Sobre condiciones de finitud y teorías de torsión

POR

J. MARTINEZ y J. L. GARCIA

INTRODUCCION

Entre los problemas que se plantean en el estudio de la localización de anillos no conmutativos se encuentra el de ver qué condiciones deben cumplirse (en términos de los ideales del anillo R o en términos de los módulos de su categoría de módulos) para que el anillo de cocientes de R respecto de una topología de Gabriel —equivalentemente, respecto de una teoría de torsión hereditaria—, sea un tipo especial de anillo. Cabe citar en este sentido los trabajos de Sandomierski ([16]) en 1967, y de Walker y Walker ([19]) en 1972, en los cuales se estudian condiciones necesarias y suficientes para que el anillo de cocientes maximal, Q_{max}, de un anillo R no singular (esto es, el anillo de cocientes de R respecto a la topología de Goldie) sea un anillo semisimple. Posteriormente, Zelmanowitz ([20], 1978) estudia el mismo problema para anillos de cocientes respecto de topologías de Gabriel mayores que la de Goldie. Estos trabajos han conducido a la consideración de anillos τ-noetherianos —para una topología de Gabriel arbitraria que determina la teoría de torsión (τ, F)—, por parte de diversos autores, definiéndolos como aquellos anillos para los cuales el conjunto de sus ideales por la derecha τ-puros verifica la condición de cadena ascendente ([8]). Así, para estos anillos, Nastasescu ([14]) demostró, en 1979, una versión relativa del teorema de Hopkins: si una categoría de Grothendieck tiene un cogenerador artiniano, entonces todo objeto artiniano es noetheriano; en particular, todo anillo T-artiniano (el conjunto de sus ideales por la derecha T-puros verifica la condición de cadena descendente) es T-noetheriano. Por otra parte, los anillos T-noetherianos están caracterizados por la propiedad de que todo cogenerador inyectivo de la teoría de torsión (T, F) es Σ-inyectivo, versión relativa de una teorema bien conocido de Bass.

Así como el estudio de los anillos noetherianos por la derecha está basado en los conceptos de módulo finitamente generado y finitamente presentado, los anillos T-noetherianos, de manera análoga, pueden caracterizarse a partir de los módulos T-finitamente generados y T-finitamente presentados, estudiados por Golan ([8]), Stenström ([18]) y Miller-Teply ([13]).

Nos proponemos en este trabajo obtener caracterizaciones de estas clases de módulos, utilizando para ello propiedades de conservación de determinados límites y colímites por parte de los funtores Hom y $\otimes$ que definen, generalizando los resultados obtenidos por Lenzing ([12]) y Skljarenko ([17]) para módulos finitamente generados y finitamente presentados, haciéndolo de modo que se obtengan estos últimos en el caso de que la teoría de torsión sea la trivial $(0, \mathrm{Mod}_R)$. Dedicamos los dos primeros capítulos del presente trabajo a este estudio, y en el tercero se emplean algunos de estos resultados para obtener caracterizaciones de los anillos T-noetherianos.

En lo que sigue, R denotará un anillo asociativo y con 1; Mod_R es la categoría de los R-módulos por la derecha. $M \in \mathrm{Mod}_R$ indicará que M es un R-módulo por la derecha. (T, F) notará una teoría de torsión hereditaria sobre Mod_R y t será el radical exacto por la izquierda asociado a esa teoría de torsión.

Capítulo 1

Módulos T-finitamente generados

1.1. Definiciones y ejemplos

Diversas condiciones de finitud respecto de teorías de torsión particulares han sido definidas recientemente con la finalidad de obtener caracterizaciones de anillos con propiedades específicas. Así, Sandomierski en [16], estudia condiciones necesarias y suficientes para que el anillo de cocientes maximal de un anillo no singular sea semisimple, encontrando que ello es equivalente a que todo ideal I del anillo sea esencialmente finitamente generado ([9]), es decir, que I contenga algún ideal J finitamente generado, con I/J de torsión en la teoría de torsión de Goldie. Por otro lado, Colby, en [3], estudia condiciones para que un anillo verifique que todos sus módulos inyectivos sean planos, obteniendo que para ello es necesario que el anillo sea «coherente», en el sentido de que todo ideal finitamente generado, I, tenga una presentación

$$0 \to K \to F \to I \to 0,$$

donde F es libre de tipo finito y K contiene un submódulo, K_0 finitamente generado, de modo que $\mathrm{Hom}_R(K/K_0, R) = 0$.

De modo más general, siendo $(\tau, \mathscr{F})$ una teoría de torsión arbitraria, Miller y Teply definen ([13]) los conceptos de módulo τ-finitamente generado y τ-finitamente presentado de la forma siguiente:

DEFINICION 1.—Sea $(\tau, \mathscr{F})$ una teoría de torsión en Mod_R, $M \in \mathrm{Mod}_R$. M se dice τ-finitamente generado (τ-FG) si existe una sucesión exacta corta $\quad 0 \to M_0 \to M \to M/M_0 \to 0$

donde M_0 es finitamente generado y M/M_0 es de torsión.

DEFINICION 2.—Sea $M \in \mathrm{Mod}_R$. M se dice τ-finitamente presentado (τ-FP) si existe una sucesión exacta corta

$$0 \to K \to F \to M \to 0$$

con F libre de tipo finito y con K τ-finitamente generado.

Consideramos a continuación algunos ejemplos de módulos τ-finitamente generados:

1) Si M es un módulo finitamente generado, es también τ-FG, cualquiera que sea la teoría de torsión $(\tau, \mathscr{F})$.

2) Si $M \in \tau$, entonces M es τ-FG.

3) Sea $(\tau, \mathscr{F})$ la teoría de torsión trivial $(0, \mathrm{Mod}_R)$. En este caso, para $M \in \mathrm{Mod}_R$, M es τ-FG si, y sólo si, M es finitamente generado.

4) Existen módulos no finitamente generados que son τ-FG para alguna teoría de torsión $(\tau, \mathscr{F})$. Por ejemplo, sea $(\tau, \mathscr{F})$ la teoría de torsión de Goldie ([18]), Ch. VI, p. 148) en la categoría Mod_Z de grupos abelianos. Q no es finitamente generado como grupo abeliano, pero es τ-FG: en efecto, Z es esencial en Q, luego Q/Z es de torsión.

5) Sea F un cuerpo y sea $R = F[X_1, \ldots, X_n, \ldots]$ el anillo de polinomios sobre F en infinitas indeterminadas; sea $(\tau, \mathscr{F})$ la teoría de torsión de Goldie en Mod_R. El ideal I generado por todas las indetermina-

das no es finitamente generado; pero, por ejemplo, (X_1) es esencial en I, luego I es τ-FG.

6) El siguiente es un ejemplo de un módulo no finitamente generado, que es τ-FG para cualquier teoría de torsión $(\tau, \mathcal{F})$ que no sea la trivial $(0, \text{Mod}_R)$. Sea Z_{p^∞} el grupo de Prüfer ([1], Ch. 1, pp. 39-40) y sea $Z_{(p)}$ el anillo de los enteros p-ádicos, $\text{Hom}_Z(Z_{p^\infty}, Z_{p^\infty})$ ([1], Ch. 1, p. 54). En [15] —p. 378—, se construye un anillo $R = Z_{(p)} \oplus Z_{p^\infty}$ con la suma natural y el producto: $(\lambda,x)(\mu,y) = (\lambda\mu, \lambda y + \mu x)$.

$I = (0) \oplus Z_{p^\infty}$ es un ideal no finitamente generado. Sin embargo, como consecuencia de [10], p. 1480, I es de torsión para cualquier teoría $(\tau, \mathcal{F})$, en que sea $T \neq (0)$; así que I es τ-finitamente generado.

En [8] se demuestra que si $(\tau, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión hereditaria en Mod_R, entonces la clase de los módulos τ-FG es cerrada para cocientes y extensiones. De aquí se obtiene que, para $M \in \text{Mod}_R$, M es τ-FG sii. $M/t(M)$ es τ-FG, siendo t el radical correspondiente a la teoría $(\tau, \mathcal{F})$. En el caso particular que sigue se puede precisar algo más:

PROPOSICION 1.—Sea $(\tau, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en Mod_R, tal que la clase $\mathcal{F}$ es cerrada para cocientes; sea t el radical asociado. Para todo $M \in \text{Mod}_R$ se tiene: M es τ-FG si, y sólo si, $M/t(M)$ es finitamente generado.

Demostración: por la observación anterior, sólo hay que probar que para M libre de torsión se verifica: M τ-FG sii. M es finitamente generado. Pero si M es libre de torsión y τ-FG, existe $M_0 \subseteq M$, de modo que M_0 es finitamente generado y M/M_0 es de torsión; esto implica $M_0 = M$, por ser F cerrada para cocientes. Luego M es finitamente generado.

1.2. Caracterización de módulos τ-FG por el funtor Hom

En una categoría de Grothendieck, los objetos finitamente generados se caracterizan por la condición de que el funtor Hom covariante que definen conserva uniones directas ([18], Ch. V, p. 121). Nos interesamos en este apartado por obtener alguna caracterización de los R-módulos τ-FG, M, a través del funtor $\text{Hom}_R(M,-)$. Recordemos primero ([8], Ch. 1, p. 34) que un R-módulo por la derecha, M, se dice τ-inyectivo —para una teoría de torsión hereditaria $(\tau, \mathcal{F})$— cuando se verifica, para todo $N \in \tau$, $\text{Ext}^1_R(N, M) = 0$.

PROPOSICION 2.—Sea $(\tau, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en Mod_R y sea $M \in \text{Mod}_R$. Si $\{E_i\}_{i \in I}$ es una familia directa de submódulos de un

R-módulo por la derecha, E, y cada E_i es libre de torsión y T-inyectivo, entonces el homomorfismo canónico

$$\Phi\colon \varinjlim_{I} \mathrm{Hom}_R(M, E_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, \textstyle\sum_I E_i)$$

es un isomorfismo.

Demostración: En primer lugar, es fácil ver que, puesto que los E_i son libres de torsión, $\sum_I E_i$ es libre de torsión (ver, por ejemplo, [18] Ch. VI, Ex. 2(ii), p. 157).

Al ser M T-FG, existe una sucesión $0 \to K \to M \to T \to 0$, con K finitamente generado y T de torsión. Teniendo en cuenta que $\varinjlim$ es un funtor exacto y que $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ es exacto por la izquierda, se obtiene el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(T, E_i) \arrow[r] & \varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(M, E_i) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(K, E_i) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(T, \sum_I E_i) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M, \sum_I E_i) \arrow[r, "k"'] & \mathrm{Hom}_R(K, \sum_I E_i) &
\end{tikzcd}$$

en el que las filas son exactas y el término de la derecha de la fila superior es 0, ya que cada $\mathrm{Ext}^1_R(T, E_i) = 0$, por ser E_i T-inyectivo; por otra parte, cada $\mathrm{Hom}_R(T, E_i) = 0$, por ser los E_i libres de torsión, y, por la misma razón, también $\mathrm{Hom}_R(T, \sum_I E_i) = 0$. En definitiva, f es isomorfismo y k es monomorfismo. Ahora, al ser K finitamente generado h es isomorfismo ([18], Ch. V, p. 121). Por lo tanto, g es también un isomorfismo, por la conmutatividad del diagrama.

En el caso de teorías de torsión de algunos tipos especiales, el resultado anterior puede mejorarse:

PROPOSICION 3.—Sea (T, F) una teoría de torsión hereditaria en Mod_R tal que el correspondiente filtro de Gabriel, $\mathscr{F}$, tiene una base de ideales de tipo finito. Sea $M \in \mathrm{Mod}_R$: M es T-FG si, y sólo si, el funtor $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ conserva uniones directas de módulos libres de torsión y T-inyectivos.

Demostración:
Pues supongamos que $\Phi\colon \varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(M, E_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, \sum_I E_i)$ es un isomorfismo para cualquier familia directa, $\{E_i\}_{i \in I}$ de submódulos libres de torsión y T-inyectivos de un cierto R-módulo por la derecha, E. De acuerdo con [18], Ch. XIII, Prop. 1.2, $\sum_I E_i$ es también libre de torsión y T-inyectivo. Nuevamente por [18], Ch. IX. IX, Prop. 1.11, obtenemos un diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(M_{\mathscr{F}}, E_i) & \cong & \mathrm{Hom}_R(M, E_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_R(M_{\mathscr{F}}, \sum_I E_i) & \cong & \mathrm{Hom}_R(M, \sum_I E_i) \end{array}$$

para cada $i \in I$. Estos diagramas inducen un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(M_{\mathscr{F}}, E_i) & \xrightarrow{\sim} & \varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(M, E_i) \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \mathrm{Hom}_R(M_{\mathscr{F}}, \sum_I E_i) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_R(M, \sum_I E_i) \end{array}$$

Como, por hipótesis, Φ es un isomorfismo, se tiene que:

$$\Psi\colon \varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(M_{\mathscr{F}}, E_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_{\mathscr{F}}, \sum_I E_i)$$

es también isomorfismo. Así, para cualquier familia directa, $\{E_i\}_{i\in I}$, de subobjetos de un objeto, E, de la categoría cociente Mod-(R, $\mathscr{F}$) —ver [18], Ch. IX, p. 199—, se tiene que el morfismo canónico

$$\varinjlim_I \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\text{-}(R,\mathscr{F})}(M_{\mathscr{F}}, E_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\text{-}(R,\mathscr{F})}(M_{\mathscr{F}}, \sum_I E_i)$$

es isomorfismo. Por lo tanto, $M_{\mathscr{F}}$ es un objeto finitamente generado de la categoría Mod-(R, $\mathscr{F}$). Teniendo en cuenta [18], Ch. XIII, Prop. 1.1, página 262, se obtiene que M es τ-FG.

PROPOSICION 4.—Sea (τ, F) una teoría de torsión hereditaria en Mod_R, tal que la clase F es cerrada para cocientes. Para cualquier R-módulo por la derecha, M, son equivalentes:

(1) M es τ-finitamente generado.
(2) $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ conserva uniones directas de R-módulos por la derecha libres de torsión.

Demostración:
(1) ⇒ (2): Sea $\{D_i\}$ una familia directa de submódulos libres de torsión de un R-módulo por la derecha, D. Dado que $\sum_I D_i$ será también libre de torsión, se tiene:

$\mathrm{Hom}_R(M/t(M), D_i) \cong \mathrm{Hom}_R(M, D_i)$, para cada $i \in I$, siendo t el radical asociado a la teoría (τ, F). También $\mathrm{Hom}_R(M/t(M), \sum_I D_i) \cong \mathrm{Hom}_R(M, \sum_I D_i)$. Ello nos da un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(M/t(M), D_i) & \cong & \varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(M, D_i) \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \mathrm{Hom}_R(M/t(M), \sum_I D_i) & \cong & \mathrm{Hom}_R(M, \sum_I D_i) \end{array}$$

Por la Prop. 1, $M/t(M)$ es finitamente generado, así que Ψ es un isomorfismo. En consecuencia, Φ es también un isomorfismo.
(2) $\Rightarrow$ (1): Debido al hecho de que F es cerrada para cocientes, el retículo $\mathrm{Sat}_{\mathscr{F}}(R)$, de los ideales T-puros (ver [8], Ch. 1, p. 28) es isomorfo al retículo de todos los submódulos de $R/t(R)$. Dado que $R/t(R)$ es finitamente generado, este retículo es compacto. Ahora, por [18], Ch. XIII, Proposición 1.1, el filtro $\mathscr{F}$ tiene una base de ideales de tipo finito. Aplicando ahora la Prop. 3 se obtiene que M es T-finitamente generado.

Se puede interpretar la Prop. 4 en otros términos: cuando la clase F es cerrada para cocientes, si denotamos por $\mathscr{A}$ la subcategoría plena de Mod_R formada por todos los módulos libres de torsión, los conúcleos en $\mathscr{A}$ coinciden con los conúcleos en Mod_R, lo que va a hacer que $\mathscr{A}$ sea una categoría abeliana, y, de hecho, una categoría de Grothendieck con generador $R/t(R)$. La Prop. 4 expresa entonces que los objetos finitamente generados de la categoría $\mathscr{A}$ son los módulos libres de torsión y finitamente generados. Por otro lado, en virtud del teorema de Gabriel-Popescu, la categoría $\mathscr{A}$ de los módulos libres de torsión es equivalente a la categoría cociente $\mathrm{Mod}\text{-}(R/t(R), \mathscr{F}')$, donde $\mathscr{F}'$ es la topología más fuerte sobre $R/t(R)$, que hace que todos los módulos libres de torsión para (T, F) sean también libres de torsión para la teoría correspondiente a $\mathscr{F}'$, (T′, F′), y sean T′-inyectivos.

1.3. Caracterización de módulos T-FG por el funtor $\otimes$

Un conocido resultado de Lenzing proporciona una caracterización de los módulos finitamente generados: para $M \in \mathrm{Mod}_R$ se tiene que M es finitamente generado sii. el morfismo canónico

$$\Phi\colon M \underset{R}{\otimes} (\underset{I}{\Pi}\, L_i) \longrightarrow \underset{I}{\Pi}(M \underset{R}{\otimes} L_i)$$

es un epimorfismo para toda familia $\{L_i\}_{i\in I}$ de R-módulos por la izquierda ([12], Satz 1, p. 263). Damos a continuación una propiedad correspondiente para módulos T-finitamente generados. El resultado más notable se obtendrá en el caso de que el filtro de Gabriel asociado a la teoría de torsión hereditaria (T, F) posea una base de ideales de tipo finito.

Utilizaremos la siguiente definición de módulo $\mathscr{F}$-divisible ([18] Ch. VI, p. 155):

DEFINICION 3.—Sea (T, F) una teoría de torsión hereditaria en Mod_R y $\mathscr{F}$, el filtro de Gabriel asociado. Un R-módulo por la izquierda, D, es $\mathscr{F}$-divisible cuando para todo módulo $M \in T$ se tiene: $M \otimes D = 0$.

PROPOSICION 5.—Sea $(\tau, \digamma)$ una teoría de torsión hereditaria en Mod_R, y $\mathscr{F}$, el filtro de Gabriel asociado. Si M es un R-módulo por la derecha τ-finitamente generado, entonces el morfismo canónico

$$\Phi\colon M \underset{R}{\otimes} (\underset{I}{\Pi} L_i) \longrightarrow \underset{I}{\Pi}(M \underset{R}{\otimes} L_i)$$

es un epimorfismo, para cualquier familia $\{L_i\}_{i\in I}$ de R-módulos por la izquierda $\mathscr{F}$-divisibles.

Demostración:

Sea $M \in \mathrm{Mod}_R$, M τ-finitamente generado. Existirá, por tanto, una sucesión exacta $0 \to K \to M \to T \to 0$ con K finitamente generado, y T, de torsión. Si $\{L_i\}_{i\in I}$ es una familia de R-módulos por la izquierda, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
K \underset{R}{\otimes} (\underset{I}{\Pi} L_i) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi"'] & M \underset{R}{\otimes} (\underset{I}{\Pi} L_i) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"] & T \underset{R}{\otimes} (\underset{I}{\Pi} L_i) \arrow[r] & 0 \\
\underset{I}{\Pi} (K \underset{R}{\otimes} L_i) \arrow[r, "\alpha"] & \underset{I}{\Pi} (M \underset{R}{\otimes} L_i) \arrow[r] & \underset{I}{\Pi} (T \underset{R}{\otimes} L_i) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dado que los L_i son $\mathscr{F}$-divisibles, $\underset{I}{\Pi} (T \underset{R}{\otimes} L_i) = 0$. Por lo tanto, α es epimorfismo; Ψ también lo es, ya que K es finitamente generado. En consecuencia, Φ es un epimorfismo.

Para la proposición que sigue, y en adelante, denotaremos por X^+ —siendo $X \in \mathrm{Mod}_R$— al módulo de caracteres $\mathrm{Hom}_Z(X, Q/Z)$, que será un R-módulo por la izquierda. También recordaremos que toda teoría de torsión hereditaria está cogenerada por algún módulo inyectivo —y recíprocamente, es decir, un módulo inyectivo cogenera una teoría de torsión hereditaria: [8], Ch. 1—.

PROPOSICION 6.—Sea $(\tau, \digamma)$ una teoría de torsión hereditaria en Mod_R tal que el filtro de Gabriel asociado, $\mathscr{F}$, posee una base de ideales de tipo finito. Sea $E \in \mathrm{Mod}_R$ un módulo inyectivo que cogenera la teoría de torsión $(\tau, \digamma)$. Para todo $M \in \mathrm{Mod}_R$ son equivalentes:

(1) M es τ-finitamente generado.

(2) El homomorfismo canónico $M \underset{R}{\otimes} (\underset{I}{\Pi} L_i) \longrightarrow \underset{I}{\Pi} (M \underset{R}{\otimes} L_i)$ es un epimorfismo para toda familia, $\{L_i\}_{i\in I}$, de R-módulos por la izquierda $\mathscr{F}$-divisibles.

(3) Para cualquier conjunto de índices, I, el morfismo canónico

$$M \underset{R}{\otimes} (E^+)^I \longrightarrow (M \underset{R}{\otimes} E^+)^I$$

es un epimorfismo.
(4) Con $I = M \times E^+$, el morfismo canónico de $M \underset{R}{\otimes} (E^+)^I$ en $(M \underset{R}{\otimes} E^+)^I$ es un epimorfismo.

Demostración:
(1) $\Rightarrow$ (2) se obtiene directamente de la Prop. 5.
(2)$\Rightarrow$(3) resulta del hecho de que E^+ es $\mathscr{F}$-divisible. Para probar esto, basta mostrar que $C \underset{R}{\otimes} E^+ = 0$, para todo módulo C cíclico y de torsión. Por otro lado, sea T un módulo de torsión y finitamente presentado; es fácil ver —[18], Ch. 1, Ex. 33, p. 47— que existe un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_Z(\mathrm{Hom}_R(T, E), Q/Z)) \cong T \underset{R}{\otimes} \mathrm{Hom}_Z(E, Q/Z) = T \underset{R}{\otimes} E^+.$$

Ahora, como T es de torsión y E es libre de torsión, se tiene $\mathrm{Hom}_R(T, E)=0$ de donde $T \underset{R}{\otimes} E^+ = 0$. Consideremos ahora un R-módulo por la derecha, C, cíclico y de torsión: será $C = R/I$, donde I es un ideal del filtro $\mathscr{F}$. Por tener $\mathscr{F}$ una base de ideales de tipo finito, existe $J \subset I$, finitamente generado, y $J \in \mathscr{F}$. Así, R/J es finitamente presentado y de torsión, de modo que, por la observación anterior, se tendrá $R/J \underset{R}{\otimes} E^+ = 0$. De la sucesión exacta $R/J \rightarrow R/I \rightarrow 0$ se obtiene $R/J \underset{R}{\otimes} E^+ \rightarrow R/I \underset{R}{\otimes} E^+ \rightarrow 0$, por lo que $C \underset{R}{\otimes} E^+ = 0$.
(3) $\Rightarrow$ (4) es obvio.
(4)$\Rightarrow$(1): Por el mismo procedimiento que en [4], 1.1, b)$\Rightarrow$c), se prueba, a partir de (4), que existirá un submódulo finitamente generado de M, M_0, tal que $M_0 \underset{R}{\otimes} E^+ = M \underset{R}{\otimes} E^+$. De ello se obtiene $M/M_0 \underset{R}{\otimes} E^+ = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_Z(M/M_0 \underset{R}{\otimes} E^+, Q/Z) = 0$, así que, por el isomorfismo de adjunción, se tiene

$$\mathrm{Hom}_R(M/M_0, \mathrm{Hom}_Z(E^+, Q/Z)) = 0 = \mathrm{Hom}_R(M/M_0, E^{++}).$$

Como Q/Z es cogenerador inyectivo en la categoría de grupos abelianos, E se sumerge en E^{++}, de modo que $\mathrm{Hom}_R(M/M_0, E) = 0$, y M/M_0 es de torsión. Así, M es τ-finitamente generado.

Dado un módulo $M \in \mathrm{Mod}_R$, existe un homomorfismo natural

$$\tau \colon M \underset{R}{\otimes} N^+ \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N)^+ \quad \text{para cada } N \in \mathrm{Mod}_R.$$

En [17] se demuestra que, si M es finitamente generado, τ es un epimorfismo para todo N. Obtenemos ahora un resultado análogo para teorías de torsión hereditarias:

PROPOSICION 7.—Sea (T, F) una teoría de torsión hereditaria en Mod_R. Si M es T-finitamente generado, entonces para cada $N \in \mathrm{Mod}_R$ y libre de torsión ,τ: $M \underset{R}{\otimes} N^+ \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N)^+$ es un epimorfismo.

Demostración:

Por hipótesis existe una sucesión exacta corta $0 \to K \to M \to T \to 0$, con T de torsión y K finitamente generado∽A partir de ella, para cada $N \in \mathrm{Mod}_R$ libre de torsión, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
K \underset{R}{\otimes} N^+ \arrow[r] \arrow[d, "\omega"] & M \underset{R}{\otimes} N^+ \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & T \underset{R}{\otimes} N^+ \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathrm{Hom}_R(K, N)^+ \arrow[r, "\lambda"] & \mathrm{Hom}_R(M, N)^+ \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(T, N)^+ \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como K es finitamente generado, ω es epimorfismo; por ser T de torsión y N libre de torsión, $\mathrm{Hom}_R(T, N) = 0$, así que también λ es epimorfismo. Por lo tanto, τ es un epimorfismo.

Capítulo 2

MODULOS T-FINITAMENTE PRESENTADOS

Del mismo modo que los módulos finitamente generados se caracterizan por propiedades de los funtores Hom y $\otimes$ que definen, los módulos finitamente presentados han sido también caracterizados por Lenzing ([12]) empleando los mismos funtores. Generalizamos a continuación estas propiedades para los módulos T-finitamente presentados definidos en el Capítulo 1.

2.1. Caracterización de módulos T-FP por el funtor Hom

LEMA 1.—Sea (T, F) una teoría de torsión hereditaria en Mod_R. Para todo R-módulo por la derecha, M, son equivalentes:

(1) M es T-finitamente presentado.
(2) Existe una sucesión exacta $0 \to T \to N \to M \to 0$, donde N es finitamente presentado, y T es de torsión.

Demostración:
(1) $\Rightarrow$ (2): Si M es T-finitamente presentado (1.1. Def. 2) existe una sucesión exacta $0 \to K \to F \to M \to 0$, con F libre de tipo finito, y K T-finitamente generado. Así pues, existe K_0 finitamente generado, siendo K/K_0 de torsión. Se puede construir un diagrama conmutativo de líneas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
 & K_0 \arrow[d] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & K/K_0 \arrow[r] & N \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Puesto que $0 \to K_0 \to F \to N \to 0$ es exacta corta, N es finitamente presentado. Tomando $T = K/K_0$, obtenemos una sucesión en las condiciones de (2), es decir, $0 \to K/K_0 \to N \to M \to 0$.
(2) $\Rightarrow$ (1): Supongamos que se tiene una sucesión exacta

$$0 \to T \to N \to M \to 0$$

en las condiciones de (2); dado que N es finitamente presentado, existe una sucesión exacta corta $0 \to K \to F \to N \to 0$, donde F es libre de tipo finito, mientras K es finitamente generado. Podemos, en consecuencia, construir un diagrama conmutativo con líneas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & K \arrow[dl] \arrow[d] & & \\
 & T_0 \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & T \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Como $0 \to T_0 \to F \to M \to 0$ es exacta y F es libre FG, basta comprobar que T_0 es τ-finitamente generado. Pero la sucesión

$$0 \to K \to T_0 \to T \to 0$$

es exacta con K finitamente generado y T, de torsión. Luego T_0 es τ-FG y M es τ-finitamente presentado.

Como resultado del lema, debe notarse que si M es libre de torsión, entonces M es τ-finitamente presentado sii. M es de la forma $N/t(N)$ para algún módulo N finitamente presentado, siendo t el radical asociado a la teoría $(\tau, \mathcal{F})$.

LEMA 2.—Sea $(\tau, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en Mod_R. Si M es un R-módulo por la derecha libre de torsión, entonces M es límite directo de módulos τ-finitamente presentados y libres de torsión.

Demostración:

De acuerdo con [2], I.2.Ex.10, p. 43, $M \cong \varinjlim_I X_i$, donde $\{X_i\}_{i \in I}$ es un sistema directo de R-módulos por la derecha finitamente presentados. Sea ahora, para cada $i \in I$, $D_i = X_i/t(X_i)$; los $\{D_i\}_{i \in I}$ forman un sistema directo, y, por la observación final del Lema 1, son módulos τ-finitamente presentados y libres de torsión. Puesto que la clase de los módulos de torsión es una clase cerrada para límites directos y M es libre de torsión, se obtiene finalmente que $M \cong \varinjlim_I D_i$.

PROPOSICION 1.—Sea $(\tau, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en Mod_R. Para todo $M \in \mathrm{Mod}_R$ se verifica:

(i) Si M es τ-finitamente presentado, entonces:
$\varinjlim_I \mathrm{Hom}_R(M, D_i) \cong \mathrm{Hom}_R(M, \varinjlim_I D_i)$ para cualquier sistema directo, $\{D_i\}_{i \in I}$ de módulos libres de torsión.

(ii) Si M es libre de torsión, es válido el recíproco de (i).

(iii) Si la clase $\mathcal{F}$ es cerrada para cocientes, entonces M es τ-finitamente presentado si, y sólo si, M es finitamente generado y el funtor $\mathrm{Hom}_R(M,—)$ conserva límites directos de módulos libres de torsión.

Demostración:

(i) De acuerdo con el lema 1, existe una sucesión exacta

$$0 \to T \to N \to M \to 0,$$

donde N es finitamente presentado y T, de torsión. Si $\{D_i\}_{i \in I}$ es un sistema directo de R-módulos por la derecha libres de torsión, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \varinjlim_{I} \mathrm{Hom}_R(M, D_i) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\Phi"'] & \varinjlim_{I} \mathrm{Hom}_R(N, D_i) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi"] & \varinjlim_{I} \mathrm{Hom}_R(T, D_i) \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M, \varinjlim_{I} D_i) \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{Hom}_R(N, \varinjlim_{I} D_i) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(T, \varinjlim_{I} D_i) \end{tikzcd}$$

Puesto que T es de torsión, $\varinjlim_{I} \mathrm{Hom}_R(T, D_i) = 0$, por lo que α es un isomorfismo. Dado que N es finitamente presentado, también Ψ es isomorfismo; ello implica que β es un epimorfismo, y, por tanto, isomorfismo. En consecuencia, Φ es un isomorfismo.

(ii) Sea $t(M) = 0$. Por el lema 2, $M \cong \varinjlim_{I} D_i$ para un cierto sistema directo, $\{D_i\}_{i \in I}$ de R-módulos por la derecha τ-finitamente presentados y libres de torsión. Por hipótesis se tiene

$$\varinjlim_{I} \mathrm{Hom}_R(M, D_i) \cong \mathrm{Hom}_R(M, \varinjlim_{I} D_i) \cong \mathrm{Hom}_R(M, M)$$

Por lo tanto, $1_M: M \to M$ se factoriza a través de algún D_{i_0} del sistema $\{D_i\}_{i \in I}$. Por lo tanto, la sucesión exacta $0 \to M \to D_{i_0} \to C \to 0$ es escindida, así que M es un sumando directo de D_{i_0} y, resulta fácil ver que todo sumando directo de un R-módulo τ-finitamente presentado es también τ-finitamente presentado.

(iii) Supongamos que M es finitamente generado, y que

$$\varinjlim_{I} \mathrm{Hom}_R(M, D_i) \cong \mathrm{Hom}_R(M, \varinjlim_{I} D_i)$$

para todo sistema directo $\{D_i\}_{i \in I}$ de R-módulos por la derecha libres de torsión.

Como $\varinjlim_{I} D_i$ es un cociente de $\bigoplus_{I} D_i$, $\varinjlim_{I} D_i$ será libre de torsión, ya que $\mathcal{F}$ es cerrada para cocientes. Se tendrá, pues, el siguiente diagrama conmutativo, en el que todas las flechas son isomorfismos:

$$\begin{tikzcd} \varinjlim_{I} \mathrm{Hom}_R(M/t(M), D_i) \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim_{I} \mathrm{Hom}_R(M, D_i) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_R(M/t(M), \varinjlim_{I} D_i) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M, \varinjlim_{I} D_i) \end{tikzcd}$$

Aplicando ahora (ii) se tiene que $M/t(M)$ es τ-FP. Puesto que M es finitamente generado, y el radical t es exacto, dado que F es cerrada para cocientes, se puede construir el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & t(K) \arrow[r] \arrow[d] & t(F) \arrow[r] \arrow[d] & t(M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K/t(K) \arrow[r] & F/t(F) \arrow[r] & M/t(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

en donde F es libre de tipo finito. Como las dos filas de arriba son exactas, la tercera ha de ser exacta. Ahora, para probar que M es τ-finitamente presentado, debemos ver que K es τ-finitamente generado, y a fin de mostrar esto último, comprobaremos que $K/t(K)$ es τ-finitamente generado. Puesto que $M/t(M)$ es τ-finitamente presentado, se podrá construir el siguiente diagrama conmutativo con líneas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & L \arrow[dl] \arrow[d] & \\
 & & X \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K/t(K) \arrow[r] \arrow[ur] & F/t(F) \arrow[r] & M/t(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con F_0 libre de tipo finito, y L, τ-finitamente generado. De la exactitud de $0 \to L \to X \to F/t(F) \to 0$ sale que X es τ-finitamente generado. Por otra parte, la sucesión $0 \to K/t(K) \to X \to F_0 \to 0$ es también exacta y escindida; por tanto, $K/t(K)$ es un sumando directo de X, de donde se obtiene que $K/t(K)$ es τ-finitamente generado.

2.2. Caracterización de módulos τ-FP por el funtor $\otimes$

PROPOSICION 2.—Sea (τ, F) una teoría de torsión hereditaria en Mod_R, cogenerada por el módulo inyectivo E. Sea $\mathscr{F}$ el filtro de Gabriel asociado, y sea M un R-módulo por la derecha. Se consideran las condiciones:

(a) M es τ-finitamente presentado.

(b) El funtor $M \underset{R}{\otimes} -$ conserva productos de R-módulos por la izquierda $\mathscr{F}$-divisibles.

(c) El funtor $M \underset{R}{\otimes} -$ conmuta con potencias de E^+.

Se verifica:

1. (a) $\Rightarrow$ (b).
2. Si $\mathscr{F}$ posee una base de ideales finitamente generados, entonces (b) $\Rightarrow$ (c).
3. Si M es finitamente generado y $\mathrm{Tor}_1^R(M, E^+) = 0$, entonces (c) $\Rightarrow$ (a).

Como consecuencia, si M es finitamente generado, $\mathrm{Tor}_1^R(M, E^+) = 0$, y $\mathscr{F}$ posee una base de ideales de tipo finito, las tres condiciones son equivalentes.

Demostración:

1. Por el lema 1, existe una sucesión exacta $0 \to T \to N \to M \to 0$ donde T es torsión y N es finitamente presentado. Sea ahora $\{L_i\}_{i \in I}$ una familia de R-módulos por la izquierda $\mathscr{F}$-divisibles. Construimos el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
T \underset{R}{\otimes} \prod_I L_i & \longrightarrow & N \underset{R}{\otimes} \prod_I L_i & \xrightarrow{\beta} & M \underset{R}{\otimes} \prod_I L_i & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \Psi} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \\
\prod_I (T \underset{R}{\otimes} L_i) & \longrightarrow & \prod_I (N \underset{R}{\otimes} L_i) & \xrightarrow{\alpha} & \prod_I (M \underset{R}{\otimes} L_i) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Por ser N finitamente presentado, Ψ es un isomorfismo ([12], Satz 2, p. 264). Como T es de torsión y los L_i son $\mathscr{F}$-divisibles, $\prod(T \underset{R}{\otimes} L_i) = 0$, luego α es también un isomorfismo.De donde β es un monomorfismo, luego Φ es un isomorfismo.

2. Basta observar que E^+ es $\mathscr{F}$-divisible, como ya se vio en la demostración de la Prop. 6, (2) $\Rightarrow$ (3), en el Capítulo 1.

3. Puesto que M es finitamente generado, existe una sucesión exacta corta $0 \to K \to F \to M \to 0$ con F libre y finitamente generado. Podemos construir un diagrama con filas exactas y conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & K \otimes_R (E^+)^I & \longrightarrow & F \otimes_R (E^+)^I & \longrightarrow & M \otimes_R (E^+)^I & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \lambda & & \downarrow \Psi & & \downarrow \Phi & & \\ (\mathrm{Tor}_1^R(M, E^+))^I & \longrightarrow & (K \otimes_R E^+)^I & \longrightarrow & (F \otimes_R E^+)^I & \longrightarrow & (M \otimes_R E^+)^I & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Por hipótesis, $\mathrm{Tor}_1^R(M, E^+) = 0$; también por hipótesis Φ es un isomorfismo, y Ψ lo es por ser F libre de tipo finito. De aquí resulta que λ es un epimorfismo, utilizando el lema Ker-Coker. Dado que esto es válido para todo conjunto I, la demostración de (4) $\Rightarrow$ (1) en la Prop. 6 del Capítulo 1 vale para probar en este caso, que K es T-finitamente generado. Así que M es T-finitamente presentado.

En el caso de que la teoría de torsión (T, F) corresponda a una topología de Gabriel perfecta (ver, para este concepto, [18]: Ch. XI.3, pp. 230 y ss.), se pueden caracterizar los módulos T-finitamente presentados mediante el anillo de cocientes, $R_{\mathscr{F}}$.

PROPOSICION 3.—Sea (T, F) una teoría de torsión hereditaria en Mod_R, con una topología de Gabriel asociada, $\mathscr{F}$, perfecta. Para todo $M \in \mathrm{Mod}_R$ y finitamente generado, son equivalentes:

(1) M es T-finitamente presentado.

(2) El funtor $M \otimes_R -$ conserva productos de R-módulos por la izquierda $\mathscr{F}$-divisibles.

(3) El morfismo canónico $M \otimes_R R_{\mathscr{F}}^I \longrightarrow (M \otimes_R R_{\mathscr{F}})^I$ es un isomorfismo para todo conjunto I.

(4) El morfismo canónico $M \otimes_R R_{\mathscr{F}}^I \longrightarrow (M \otimes_R R_{\mathscr{F}})^I$ es un isomorfismo para $I = M \times R_{\mathscr{F}}$.

Demostración:

(1) $\Rightarrow$ (2) es la parte 1. de la Prop. 2.

(2) $\Rightarrow$ (3) es consecuencia de ser $R_{\mathscr{F}}$ $\mathscr{F}$-divisible ([18], Ch. XI, Prop. 3.4, (g), p. 231).

(3) $\Rightarrow$ (4) es trivial.

(4) $\Rightarrow$ (1): Puesto que M es finitamente generado, existe una sucesión exacta corta $0 \to K \to F \to M \to 0$ con F libre de tipo finito. Dado que $R_{\mathscr{F}}$ es plano —[18], Ch. XI, Prop. 3.4 (h)—, podemos aplicar [4], Lem. 1.1 y 1.2 para deducir que existe $K_0 \subseteq K$, tal que K_0 es finitamente generado y $(K/K_0) \otimes_R R_{\mathscr{F}} = 0$. De aquí, K/K_0 es de torsión por [18], Ch.

XI, Prop. 3.4. (f), p. 231. De este modo, K es τ-finitamente generado, así que M es τ-finitamente presentado.

Como al final del Capítulo 1, terminamos ahora con la caracterización de módulos τ-finitamente presentados correspondiente a la de los módulos τ-finitamente generados de la Prop. 7 del Capítulo 1, y que, como ésta, generaliza los resultados de [17].

PROPOSICION 4.—Sea (T, F) una teoría de torsión hereditaria en Mod_R. Para todo R-módulo por la derecha, M, finitamente generado, son equivalentes:

(1) M es τ-finitamente presentado.

(2) El homomorfismo natural $\tau\colon M \underset{R}{\otimes} N^+ \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N)^+$ es un isomorfismo para todo R-módulo por la derecha, N, libre de torsión.

Demostración:

(1) $\Rightarrow$ (2): Por ser M finitamente generado, sabemos ya que τ es un epimorfismo —Prop. 7 del Cap. 1—. Ahora, por hipótesis, existe una sucesión exacta $0 \to T \to L \to M \to 0$ con T de torsión y L, finitamente presentado. Sea N un R-módulo por la derecha libre de torsión. Se obtiene un diagrama conmutativo de filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
T \underset{R}{\otimes} N^+ & \longrightarrow & L \underset{R}{\otimes} N^+ & \longrightarrow & M \underset{R}{\otimes} N^+ & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \omega} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tau} & & \\
\mathrm{Hom}_R(T, N)^+ & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(L, N)^+ & \xrightarrow{\ \nu\ } & \mathrm{Hom}_R(M, N)^+ & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

De acuerdo con [17], Lem. 2.1, p. 178, ω es un isomorfismo, al ser L finitamente presentado. Como $\mathrm{Hom}_R(T, N) = 0$, ν es un isomorfismo. De esto se deduce que τ es también isomorfismo.

(2) $\Rightarrow$ (1): Por ser M finitamente generado, existe una sucesión exacta $0 \to K \to F \to M \to 0$ con F, libre de tipo finito. Hemos de probar que K es τ-finitamente generado. Con este fin, consideramos la familia directa de los submódulos finitamente generados de K, $\{L_i\}_{i \in I}$. Para cada $i \in I$, tomamos $N_i = K/L_i$; la familia $\{N_i\}_{i \in I}$ forma un sistema directo con las proyecciones $p_{ij}\colon N_i \to N_j$ para $i \leqslant j$.

Sea ahora E un cogenerador inyectivo de la teoría de torsión (T, F), y escojamos $t \in I$; sea $J = \{i \in I / t \leqslant i\}$ y sea C un producto de copias de E, indicado por J. En virtud de [17], Lem. 2.9, p. 181, se tiene:

$$\varinjlim_{J} \mathrm{Hom}_R(N_j, C)^+ = \mathrm{Ker}\,(M \underset{R}{\otimes} C^+ \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, C)^+) = 0,$$

puesto que C es inyectivo y libre de torsión y M es finitamente generado.

Dado que lo que hemos de demostrar es que algún N_j es de torsión, razonaremos por reducción al absurdo y supondremos que, para cada $j \in J$, N_j no es de torsión. Por tanto, para todo $j \in J$, $\mathrm{Hom}_R(N_j, E) \neq 0$, de manera que, por el axioma de elección, se puede tomar, para cada j, α_j: $N_j \to E$, con $\alpha_j \neq 0$. Como p_{tj}: $N_t \to N_j$ es un epimorfismo, $\alpha_j p_{tj} \neq 0$. Así, para todo $j \in J$, se tiene $f_j \in \mathrm{Hom}_R(N_t, E)$, con $f_j \neq 0$. Por ser Q/Z un cogenerador inyectivo de la categoría de grupos abelianos, existirá, para cada j, g_j: $\mathrm{Hom}_R(N_t, E) \to Q/Z$, tal que $g_j(f_j) \neq 0$. Los g_j inducen $g = \langle g_j \rangle$: $\bigoplus_J \mathrm{Hom}_R(N_t, E) \to Q/Z$. Podemos encontrar, ya que Q/Z es inyectivo, un morfismo α: $\prod_J \mathrm{Hom}_R(N_t, E) \to Q/Z$ cuya restricción a $\bigoplus_J \mathrm{Hom}_R(N_t, E)$ sea g. A través del isomorfismo natural

$$\prod_J \mathrm{Hom}_R(N_t, E) \cong \mathrm{Hom}_R(N_t, \prod_J E) = \mathrm{Hom}_R(N_t, C)$$

podemos considerar el morfismo α perteneciente a $\mathrm{Hom}_R(N_t, C)^+$. Como $\varinjlim_J \mathrm{Hom}_R(N_j, C)^+ = 0$, α debe hacerse 0 en algún $\mathrm{Hom}_R(N_j, C)$. Es decir, $\alpha\, p^*_{tj} = 0$. Ahora, si q_j: $E \to C$ es la inmersión correspondiente al índice j, $q_j \alpha_j$: $N_j \to C$, luego $\alpha\, p^*_{tj}(q_j \alpha_j) = 0$. Entonces, $0 = \alpha(q_j \alpha_j p_{tj}) = \alpha(q_j f_j) = g(q_j f_j) = g_j(f_j) \neq 0$, por construcción, lo que proporciona la contradicción que se buscaba.

Capítulo 3

ANILLOS τ-NOETHERIANOS

3.1. Definición y ejemplos de anillos τ-noetherianos

Anillos y módulos τ-noetherianos —siendo (τ, ғ) una teoría de torsión hereditaria— han sido estudiados por diversos autores, entre ellos, Stenström ([18]), Sandomierski ([16]) y Golan ([8]). Un módulo τ-noetheriano se define como un módulo, M, tal que el módulo de cocientes, $M_{\mathscr{F}}$ respecto a la topología de Gabriel $\mathscr{F}$ asociada a (τ, ғ) es un objeto noetheriano en la categoría de Grothendieck Mod-(R, $\mathscr{F}$) de los módulos $\mathscr{F}$-cerrados. Stenström ([18]) demuestra que esta definición equivale a que todo submódulo de M sea τ-finitamente generado. Por otra parte, el anillo R se llama τ-noetheriano si, considerado como R-módulo por la derecha, es τ-noetheriano. En tal caso, la teoría de torsión (τ, ғ) posee un cogenerador inyectivo, E, que es Σ-inyectivo ([18], Ch. XIII, Prop. 2.4, p. 264).

Es inmediato ver que la clase de los R-módulos por la derecha T-noetherianos es cerrada para submódulos, extensiones y cocientes ([18], Ch. XIII, Ex. 4, p. 271). En lo que sigue, pretendemos caracterizar los anillos T-noetherianos, utilizando para ello los resultados de los capítulos precedentes.

PROPOSICION 1.—Sea (T, F) una teoría de torsión hereditaria en Mod_R. R es T-noetheriano si, y sólo si, todo R-módulo por la derecha finitamente generado es T-finitamente presentado.

Demostración:

Si R es T-noetheriano, todo módulo libre de tipo finito es T-noetheriano; así, si $M \in Mod_R$ es finitamente generado, la sucesión exacta $0 \to K \to F \to M \to 0$ con F libre de tipo finito, cumple que K es T-finitamente generado; luego M es T-finitamente presentado.

Recíprocamente, supongamos que todo módulo finitamente generado es T-finitamente presentado. Sea I un ideal por la derecha; construimos la sucesión exacta $0 \to I \to R \to R/I \to 0$. R/I es T-finitamente presentado, por hipótesis; ahora, una demostración semejante a la del final del apartado (iii) de la Prop. 1 del Capítulo anterior prueba que I es T-finitamente generado.

Consideramos a continuación algunos ejemplos:

1) Sea R un anillo, y consideremos la teoría de torsión hereditaria en Mod_R que corresponde a la topología de Goldie. Sea, ahora, (T, F) una teoría de torsión hereditaria en Mod_R más fuerte que la de Goldie. Son equivalentes:

(i) R es T-noetheriano.

(ii) La topología $\mathscr{F}$ correspondiente a (T, F) posee una base de ideales de tipo finito.

(iii) $R_{\mathscr{F}}$ es semisimple.

(iv) R no contiene ninguna familia independiente de ideales por la derecha libres de torsión ([20], Th. 3.1, p. 104).

2) Sea $R = Z_{(p)} \oplus Z_{p^\infty}$ el anillo definido en el ejemplo 6 de 1.1. R no es noetheriano, pero si (T, F) es una teoría de torsión hereditaria en Mod_R, con $T \neq 0$, R es T-noetheriano, puesto que $0 \oplus Z_{p^\infty}$ es el único ideal no finitamente generado; y, como ya se vio, es de torsión y, por tanto, T-finitamente generado.

3) Un anillo conmutativo, R, se llama localmente noetheriano cuando para todo ideal primo, p, se verifica que Rp es noetheriano. Por ejemplo, sea R un anillo conmutativo absolutamente plano y no remisimple; entonces R es localmente noetheriano, aunque no noetheriano.

Sea R localmente noetheriano y sea $\mathscr{P}$ un conjunto finito de ideales primos de R. En [18] Ch. VI.6.6, p. 151, se define una topología de Gabriel.

$$\mathscr{F}_{\mathscr{P}} = \bigcap_{p \in \mathscr{P}} \mathscr{F}_{p} = \{ I \mid V(I) \cap \mathscr{P} = \varnothing \}$$

en donde es $$V(I) = \{ p \in S_{pec}(R) \mid I \subseteq p \}$$

y $$\mathscr{F}p = \{ I \mid p \notin V(I) \}.$$

$\mathscr{F}p$ corresponde a una teoría de torsión, (T, F), tal que un R-módulo, M, es de torsión sii. el módulo de fracciones Mp = $M[S^{-1}] = 0$, para todo p, con $S = R - p$. De la Prop. 4.5. de Ch. XIII de [18], p. 267, se deduce que R es T-noetheriano.

4) Otros ejemplos se obtienen del siguiente resultado:

PROPOSICION 2.—Sea (T, F) una teoría de torsión hereditaria en Mod_R, tal que la clase F es cerrada para cocientes, y sea t el radical asociado a la teoría. Se verifica que R es T-noetheriano si, y sólo si, R/t(R) es noetheriano.

Demostración:

En efecto: R T-noetheriano $\Leftrightarrow$ todo ideal por la derecha, I, es T-finitamente generado $\Leftrightarrow$ para todo ideal por la derecha, I, $I + t(R)/t(R) \cong I/t(I)$ es T-finitamente generado $\Leftrightarrow$ para todo ideal por la derecha, I, ha de ser $I + t(R)/t(R)$ finitamente generado —Proposición 1, Cap. 1— $\Leftrightarrow$ todo ideal por la derecha de R/t(R) es finitamente generado $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ R/t(R) es noetheriano.

Ahora: sea R un anillo no noetheriano, y sea S un anillo noetheriano no nulo. Se considera $R \times S = A$, y sea $e = (1,0)$, que es un idempotente central. De acuerdo con el ejemplo VI.2.2. de [18], p. 140, e define una teoría de torsión, (T, F), centralmente escindida, de manera que, si t es el radical asociado a la misma, $t(M) = Me$, para cada $M \in Mod_A$. Como F es cerrada para cocientes —ya que será $F = \{M/Me = 0\}$— y $t(A) = Ae = R$, de la Prop. 2 resulta que A es T-noetheriano. Pero A no es noetheriano, por no serlo R.

3.2. Caracterizaciones de los anillos τ-noetherianos

Parte de las caracterizaciones de los anillos τ-noetherianos que se dan en este apartado son ya conocidas, pero aquí se prueban de manera muy simple a partir de los resultados de los dos primeros capítulos. Indicaremos previamente que si α es un cardinal, un R-módulo M se llama α-generado cuando M posee un sistema de generadores, S, tal que $\mathrm{card}(S) \leqslant \alpha$. Por otro lado, un R-módulo M es α-presentado cuando existe una sucesión exacta $0 \to K \to F \to M \to 0$ con F libre, y siendo K y F α-generados.

PROPOSICION 3.—Sea $(\tau, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en Mod_R. Sea $\mathscr{C}$ una clase de R-módulos por la derecha que contiene una familia de cogeneradores inyectivos de la teoría dada y con $\mathscr{C}$ cerrada para sumas directas numerables. Para $M \in \mathrm{Mod}_R$ se verifica entonces: si M es finitamente generado y $\aleph_0$-presentado, y para cada $C \in \mathscr{C}$ se tiene $\mathrm{Ext}^1_R(M, C) = 0$, entonces M es τ-finitamente presentado.

Demostración:

En efecto: puesto que M es finitamente generado, existe una sucesión exacta $0 \to K \to F \to M \to 0$, donde F es libre de tipo finito. Como M es $\aleph_0$-presentado, K ha de ser $\aleph_0$-generado, en virtud del lema de Schanuel. Por esta razón, K puede expresarse como unión de una cadena numerable de submódulos finitamente generados, $K = \bigcup_{n \in N} K_n$. Ya que tratamos de probar que K es τ-finitamente generado, bastará ver que K/K_n es de torsión para algún $n \in N$. Emplearemos para ello la reducción al absurdo y supondremos que $K/K_n \neq t(K/K_n)$ para todo $n \in N$.

Por lo tanto, para cada $n \in N$, existe algún módulo inyectivo, $E_n \in \mathscr{C}$, y $f_n\colon K/K_n \to E_n$, con $f_n \neq 0$. Si ahora $p_n\colon K \to K/K_n$ es la proyección natural, sea $g_n = f_n \circ p_n\colon K \to E_n$; también $g_n \neq 0$, para todo n.

Los g_n inducen $\{g_n\}\colon K \to \prod_N E_n$, y, para cada $x \in K$, $g_n(x) = 0$, para casi todo n, por ser $K = \bigcup_{n \in N} K_n$. Así pues, la imagen de $\{g_n\}$ está en $\bigoplus_N E_n$, y podemos considerar $\{g_n\} = g\colon K \to \bigoplus_N E_n$.

Construimos el diagrama conmutativo de filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_N \mathrm{Hom}_R(M,E_n) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & \bigoplus_N \mathrm{Hom}_R(F,E_n) \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & \bigoplus_N \mathrm{Hom}_R(K,E_n) \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & \bigoplus_N \mathrm{Ext}^1_R(M,E_n) \\
\mathrm{Hom}_R(M,\bigoplus_N E_n) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(F,\bigoplus_N E_n) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(K,\bigoplus_N E_n) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(M,\bigoplus_N E_n)
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis, $\operatorname{Ext}^1_R(M, E_n) = 0$, y $\operatorname{Ext}^1_R(M, \bigoplus_N E_n) = 0$, por lo que los dos términos de la derecha son 0. Por otra parte, λ y μ son isomorfismos, ya que M y F son finitamente generados. En consecuencia, π es también un isomorfismo. Así, dado que $g \in \operatorname{Hom}_R(K, \bigoplus_N E_n)$ y que $g = \{g_n\}$, se tiene que $g_n = 0$ para casi todo $n \in N$. Pero esto contradice el hecho antes establecido de que $g_n \neq 0$ para todo n, y esta contradicción prueba la proposición.

PROPOSICION 4.—Sea $(\tau, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria en Mod_R, y sea $\mathscr{C}$ una clase de R-módulos por la derecha que es cerrada para sumas directas numerables y que contiene una familia de cogeneradores inyectivos de la teoría $(\tau, \mathcal{F})$. Si para todo módulo cíclico $M \in \mathrm{Mod}_R$ y todo $C \in \mathscr{C}$ se tiene que $\operatorname{Ext}^1_R(M, C) = 0$, entonces el anillo R es τ-noetheriano.

Demostración:

Teniendo en cuenta [8], Prop. 14.5, (1) $\Longleftrightarrow$ (2), p. 131, para probar que R es τ-noetheriano bastará con ver que, dada cualquier cadena numerable $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_k \subseteq \ldots\ldots\ldots$ de ideales por la derecha, y siendo $I = \bigcup_N I_n$, existe algún k tal que I/I_k es de torsión. Ahora bien: a partir de la sucesión exacta $0 \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0$ y del hecho de que $I = \bigcup_N I_n$ podemos reconstruir la demostración de la proposición 3 para obtener que algún I/I_k es de torsión, ya que $\operatorname{Ext}^1_R(R/I, C) = 0$, por hipótesis, para todo $C \in \mathscr{C}$.

COROLARIO 1.—Sea $\mathscr{C}$ una clase de R-módulos por la derecha que contiene una familia de cogeneradores inyectivos de Mod_R y que es cerrada para sumas directas numerables. Sea $M \in \mathrm{Mod}_R$ y finitamente generado. Si M es $\aleph_0$-presentado y $\operatorname{Ext}^1_R(M, C) = 0$, para todo $C \in \mathscr{C}$, entonces M es finitamente presentado.

Demostración:

Basta aplicar la Prop. 3 a la teoría de torsión trivial $(0, \mathrm{Mod}_R)$.

COROLARIO 2.—Sea $\mathscr{C}$ una clase de R-módulos por la derecha que contiene una familia de cogeneradores inyectivos y que es cerrada para sumas directas numerables. Si para todo $M \in \mathrm{Mod}_R$ cíclico y $\aleph_0$-presentado se tiene $\operatorname{Ext}^1_R(M,C) = 0$ para todo $C \in \mathscr{C}$, entonces R es noetheriano por la derecha.

Demostración:

Bastará con probar que todo ideal $\aleph_0$-generado es finitamente generado. Así, sea I un ideal por la derecha $\aleph_0$-generado; R/I será $\aleph_0$-presentado y cíclico, de modo que, por el Cor. 1, R/I es finitamente presentado. Por el lema de Schanuel, I es finitamente generado.

Para introducir el Corolario siguiente recordaremos que un R-módulo, M, se llama Σ-inyectivo cuando $M^{(I)}$ es un módulo inyectivo para todo conjunto I.

COROLARIO 3 (Cartan-Eilenberg-Bass).—Sea (T,F) una teoría de torsión hereditaria en Mod_R cogenerada por el módulo inyectivo E. Son equivalentes:

(1) R es T-noetheriano.
(2) Todo límite directo de inyectivos libres de torsión es inyectivo.
(3) Toda suma directa de inyectivos libres de torsión es inyectivo.
(4) Toda suma directa numerable de inyectivos libres de torsión es inyectivo.
(5) E es Σ-inyectivo.
(6) $E^{(N)}$ es inyectivo.

Demostración:

(2)$\Rightarrow$(3), (3)$\Rightarrow$(4), (3)$\Rightarrow$(5), (5)$\Rightarrow$(6), (4)$\Rightarrow$(6) son triviales.
(1)$\Rightarrow$(2): Dado que, por hipótesis, $R_{\mathscr{F}}$ es un objeto noetheriano de la categoría cociente Mod-(R, $\mathscr{F}$) y es un generador en dicha categoría, tenemos que Mod-(R, $\mathscr{F}$) es localmente noetheriana. Puesto que en una categoría localmente noetheriana todo límite directo de objetos inyectivos es inyectivo, (2) se obtiene utilizando el hecho de que el funtor de inclusión i: Mod-(R, $\mathscr{F}$) $\rightarrow$ Mod_R conserva, en este caso, límites directos.
(6)$\Rightarrow$(1): Tomamos $\mathscr{C} = \{E^{(N)}\}$. $E^{(N)}$ es, por hipótesis, inyectivo y cogenerador de la teoría de torsión (T, F). Como para todo R-módulo por la derecha cíclico, M, se tiene $\mathrm{Ext}^1_R(M, E^{(N)}) = 0$, por la Prop. 4 se obtiene que R es T-noetheriano.

COROLARIO 4 ([18], Ch. XIII, Ex. 9, p. 271).—Sea (T, F) la teoría de torsión de Goldie sobre Mod_R. R es T-noetheriano si, y sólo si, todo límite directo de R-módulos por la derecha no singulares e inyectivos es inyectivo.

Demostración:

No es más que la equivalencia (1) $\Leftrightarrow$ (2) del Cor. 3.

COROLARIO 5.—Sea (τ, F) una teoría de torsión hereditaria en Mod_R tal que R es libre de torsión. Si R es τ-noetheriano, entonces se satisface la condición de cadena ascendente sobre anuladores por la derecha.

Demostración:

En efecto, sea E un cogenerador inyectivo de la teoría de torsión hereditaria (τ, F). Por la Prop. 2.1. del Cap. XIII de [18], p. 263, y teniendo en cuenta [18], Ch. IX, Prop. 4.6, p. 208, se verifica la condición de cadena ascendente sobre ideales que son anuladores por la derecha de subconjuntos de E. Como R es libre de torsión, R está cogenerado por E, de donde todo anulador por la derecha de un subconjunto de R es anulador de un subconjunto de E; por lo tanto, se cumple la condición de cadena ascendente sobre anuladores de subconjuntos de R.

COROLARIO 6 ([18], Ch. XIII, Ex. 8, p. 271).—Sea (τ, F) una teoría de torsión hereditaria en Mod_R. R es τ-noetheriano si, y sólo si, todo R-módulo por la derecha libre de torsión y FP-inyectivo es inyectivo.

Demostración:

Sea R τ-noetheriano, y sea C FP-inyectivo y libre de torsión. Para que C sea inyectivo, basta que cumpla para todo $M \in \mathrm{Mod}_R$ finitamente generado, $\mathrm{Ext}^1_R(M, C) = 0$. Pero si M es finitamente generado, será τ-finitamente presentado. Luego por el Lema 1 de 2.1. existe una sucesión exacta $0 \to T \to N \to M \to 0$ con N finitamente presentado y T de torsión. Esta proporciona una sucesión exacta

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T, C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(M, C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(N, C) \longrightarrow \ldots$$

y los dos extremos son 0, por ser T de torsión y N finitamente presentado.

Recíprocamente: sea $\mathscr{C}$ la clase de los R-módulos por la derecha FP-inyectivos y libres de torsión. $\mathscr{C}$ cumple las condiciones de la Proposición 4, y para todo $M \in \mathrm{Mod}_R$ se verifica $\mathrm{Ext}^1_R(M, C) = 0$, para todo $C \in \mathscr{C}$. Luego R es τ-noetheriano.

En [5] se define la noción de módulo α-inyectivo para un cardinal $\alpha \geqslant 2$: M es α-inyectivo si $\mathrm{Ext}^1_R(R/I, M) = 0$ para todo ideal I α'-generado con $\alpha' < \alpha$.

COROLARIO 7.—Sea (τ, F) una teoría de torsión hereditaria en Mod_R. R es τ-noetheriano si, y sólo si, todo R-módulo por la derecha $\aleph_0$-inyectivo y libre de torsión es inyectivo.

Demostración:

Lo mismo que en el Cor. 6, es fácil ver que si R es T-noetheriano y C es $\aleph_0$-inyectivo y libre de torsión, $\mathrm{Ext}^1_R(M, C) = 0$ para todo $M \in \mathrm{Mod}_R$ cíclico, ya que, por hipótesis, $\mathrm{Ext}^1_R(N, C) = 0$ para todo N cíclico y finitamente presentado. El recíproco se obtiene tomando como clase $\mathscr{C}$ la de los R-módulos por la derecha $\aleph_0$-inyectivos y libres de torsión.

Terminamos el Capítulo con algunas consideraciones acerca del caso en que la clase libre de torsión, F, es cerrada para cocientes.

LEMA.—Sea (T, F) una teoría de torsión hereditaria en Mod_R tal que la clase F es cerrada para cocientes. Entonces la familia $\{E(S_i)\}_{i \in I}$ de envolturas inyectivas de un conjunto de representantes de las clases de isomorfismo de los R-módulos simples y libres de torsión es una familia de cogeneradores inyectivos de la teoría de torsión (T, F). Además, $\bigoplus_I E(S_i)$ es un cogenerador de la clase F.

Demostración:

Hay que demostrar que $M \in \mathrm{Mod}_R$ es de torsión sii. $\mathrm{Hom}_R(M, E(S_i)) = 0$, para todo $i \in I$. Para ello, supongamos que M no es de torsión: entonces M contiene un submódulo cíclico, C, que no es de torsión; sea t el radical asociado a la teoría (T, F): de modo análogo a [18], Ch. 1, Lema 6.8, p. 21, se demuestra que C contiene un submódulo X, maximal entre los submódulos $\neq C$ y que contienen a $t(C)$; entonces C/X es simple y libre de torsión, por ser F cerrada para cocientes. Así, la proyección $C \to C/X$ da un morfismo no nulo de M en $E(C/X)$ por la inyectividad de éste. Luego $\mathrm{Hom}_R(M, E(S_i)) \neq 0$, para algún $i \in I$.

La última parte del lema es inmediata: como $\prod_I E(S_i)$ cogenera a la clase F y, a su vez, está cogenerado por $\bigoplus_I E(S_i)$, este último cogenera a F.

PROPOSICION 5.—Sea (T, F) una teoría de torsión hereditaria en Mod_R tal que la clase F es cerrada para cocientes. R es T-noetheriano si, y sólo si, todo R-módulo inyectivo y libre de torsión es suma directa de submódulos indescomponibles.

Demostración:

[18], Ch. XIII, Prop. 2.6, p. 265, proporciona una de las dos implicaciones. Para la recíproca vale una demostración análoga a la de [1], Th. 25.6, pp. 291-292, d) $\Rightarrow$ a).

PROPOSICION 6.—Sea (T, F) una teoría de torsión hereditaria en Mod_R tal que la clase F es cerrada para cocientes. R es T-noetheriano si, y sólo si, toda suma directa (numerable) de envolturas inyectivas de R-módulos por la derecha simples y libres de torsión es inyectiva.

Demostración:

(1)$\Rightarrow$(3) del Cor. 3 da la primera implicación. Para la recíproca, sea $\mathscr{C}$ la clase de todas las sumas directas (sumas directas numerables) de envolturas inyectivas de un conjunto de representantes de los módulos simples libres de torsión. Por el lema anterior, $\mathscr{C}$ contiene una familia de cogeneradores inyectivos de (τ, F) y es cerrada para sumas directas numerables. Por la Prop. 4, y dado que $\mathrm{Ext}^1_R(M, E(S_i)) = 0$, para todo $M \in \mathrm{Mod}_R$, se obtiene que R es τ-noetheriano.

COROLARIO ([11], Th. 2.4, p. 379).—Un anillo R es noetheriano por la derecha si, y sólo si, toda suma directa (suma directa numerable) de envolturas inyectivas de módulos por la derecha simples es inyectiva.

Demostración:

Es la Prop. 6 para la teoría de torsión $(0, \mathrm{Mod}_R)$.

BIBLIOGRAFIA

1. ANDERSON, F. W., y FULLER, K. R., *Rings and categories of modules,* Springer (1974).
2. BOURBAKI, N., *Commutative Algebra,* Addison-Wesley (1972).
3. COLBY, R. R., «Rings which have flat injective modules», *J. of Algebra,* 35, 239-252 (1969).
4. COLBY, R. R., y RUTTER, E. A., «π-flat and π-projective modules», *Arch. Math.,* 23, 246-251 (1971).
5. EKLOF, P., y SABBAGH, G., «Model-completions and modules», *Ann. of Math. Logic,* 2, 251-295 (1971).
6. FAITH, C., *Algebra II: Ring Theory,* Springer (1976).
7. FOSSUM, R. M.; GRIFFITH, P. A., y REITEN, I., «*Trivial extensions of abelian categories*», *Lec. Notes in Math.,* 456, Springer (1975).
8. GOLAN, J., *Localization of noncommutative rings,* Dekker (1975).
9. GOODEARL, K. R., *Ring Theory. Nonsingular rings and modules,* Dekker (1976).
10. HERDEN, G., «The latice of arbitrary torsion classes for Mod-R», *Comm. in Algebra,* 8, 1469-1492 (1980).
11. KURSHAN, R. P., «Rings whose cyclic modules have finitely generated socles», *J. of Algebra,* 15, 376-386 (1970).
12. LENZING, H., «Endlich präsentierbare Moduln», *Arch. Math.,* 20, 262-266 (1969).
13. MILLER, R. W.; TEPLY, M. L., «On flatness relative to a torsion theory» Comm. *in Algebra,* 6, 1037-1071 (1978).
14. NASTASESCU, C., «Conditiones de finitude pour les modules», *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.,* 24, 745-758 (1979).
15. OSOFSKY, B. L., «A generalization of quasi-Frobenius rings», *J. of Algebra,* 4, 373-387 (1966).
16. SANDOMIERSKI, F., «Semisimple maximal quotient rings», *Trans. Amer. Math. Soc.,* 128, 112-120 (1967).
17. SKLJARENKO, E. G., «Pure and finitely presentable modules, duality homomorphisms and the coherence property of a ring», *Math. USSR Sbornik,* 34, 173-186 (1978).
18. STENSTROM, B., *Rings of quotients,* Springer (1975).
19. WALKER, C.; WALKER, E., «Quotient categories and rings of quotients». Rocky *Mountain J. Math.,* 2, 513-555 (1972).
20. ZELMANOWITZ, J. M., «Semisimple rings of quotients», *Bull Austral. Math. Soc.,* 19, 97-115 (1978).