TRABAJOS METODOLÓGICOS

Revista Investigación Educativa - N.º 19 - 1992 (P. 69-79)

EL ANÁLISIS MULTIVARIABLE DE LA VARIANZA (MANOVA): CLAVES PARA SU INTERPRETACIÓN

por
Gregorio Rodríguez Gómez

RESUMEN

Este trabajo presenta una introducción a la utilización del Análisis Multivariable de la Varianza (MANOVA), y presenta los métodos disponibles para el análisis y la interpretación de los datos tras un MANOVA significativo.

DESCRIPTORES: Análisis de la Varianza, Análisis Multivariado de la Varianza, Análisis Discriminante.

ABSTRACT

This paper presents an introduction to use of Multivariate Analysis of Variance (MANOVA), and provides the available methods for analyzing and interpreting data after finding a significant overall MANOVA.

DESCRIPTORS: Analysis of Variance, Multivariate Analysis of Variance, Discriminant Analysis.

CURRÍCULA

Profesor de E.G.B. y Doctor en Ciencias de la Educación. Coordinador del Servicio de Apoyo Escolar de Jerez de la Fra. (Cádiz). Actualmente con Licencia para estancia en Centros de Investigación en la Universidad de Sevilla (Dpto. de Didáctica y Organización Escolar y Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación).

1. INTRODUCCIÓN

La irrupción de la informática en el campo de la investigación educativa está posibilitando, entre otras ventajas, el acceso a una serie de técnicas estadísticas que hasta no hace mucho eran poco o nada utilizadas, sobre todo por la complejidad de sus cálculos.

Éste es el caso del Análisis Multivariable de la Varianza (MANOVA), que, aún cuando se trata de una técnica desarrollada en los años 30, no viene siendo utilizada en la investigación educativa de nuestro país hasta hace relativamente poco (sirva como ejemplo de la escasa o nula utilización el hecho de que en ningún artículo y/o reseña de investigación, aparecido en la Revista de Investigación Educativa, se haga referencia a la utilización de esta técnica estadística).

El objetivo de este trabajo es, precisamente, ofrecer una breve introducción a esta técnica, así como posibilitar algunas pautas para su interpretación. En ningún caso pretendemos ofrecer el desarrollo matemático del MANOVA, para lo cual recomendamos la obra de Cuadras (1981), ni tampoco un análisis exhaustivo de la misma, sino tan sólo una introducción que nos acerque a las posibilidades y limitaciones de esta técnica para su posterior utilización e interpretación en el terreno de la investigación educativa.

2. EL ANÁLISIS MULTIVARIABLE DE LA VARIANZA

Cuando desde las ciencias de la educación, al estudiar distintos fenómenos, nos enfrentamos a uno en el que intervienen múltiples variables dependientes, y deseamos estudiar las diferencias entre medias, normalmente se ha procedido al análisis realizando una simple repetición de Análisis de Varianza (ANOVA) para cada una de las variables; lo cual suponía enfrentarse al problema de administrar pruebas repetidas de significación sobre los mismos datos. Todavía más, al aplicar un ANOVA para cada variable dependiente por separado no se tienen en cuenta las posibles correlaciones de las medidas dependientes, ya que son criterios obtenidos de los mismos sujetos. En definitiva, se aumenta el error de tipo I.

Para resolver este problema la técnica adecuada es el MANOVA en cuanto que ofrece una evaluación global y toma en consideración las interrelaciones existentes entre las diferentes variables dependientes.

Podemos conceptualizar el MANOVA como la extensión del análisis de la varianza al caso de más de una variable dependiente (Bisquerra, 1989; Escotet, 1980; Cuadras, 1981), es decir, mientras en el ANOVA se maneja una variable dependiente, en el MANOVA se manejan «p» variables, permitiéndonos estudiar la significación y la naturaleza de las diferencias existentes entre grupos de sujetos pertenecientes a poblaciones previamente definidas. No obstante debemos tener presente, además, otros aspectos diferenciadores de estas dos técnicas (Pérez Santamaría, 1989).

El primero de estos aspectos diferenciadores radica en la distinta valoración que realizan una y otra técnica sobre el efecto del tratamiento. Así, mientras el MANOVA, al valorar los efectos del tratamiento, se centra en un sólo constructo «multi-operacionándolo», el ANOVA lo «mono-operacionaliza». O dicho de otra forma, si el MANOVA toma diferentes medidas del constructo, en el ANOVA tan sólo se toma una medida.

El segundo aspecto diferenciador se encuentra en la prueba de hipótesis nula. Así, a través del ANOVA se prueba la hipótesis nula de que las medias de los «k» grupos son iguales entre sí, en una única variable dependiente. Por su parte, en el MANOVA se prueba la hipótesis nula de que las medias de los «k» grupos son iguales para todas las «p» variables.

3. LIMITACIONES Y RESTRICCIONES EN EL USO DEL MANOVA

Al igual que otras técnicas multivariantes, el MANOVA ha de cumplir los supuestos paramétricos de normalidad, homocedasticidad e independencia multivariantes. Mas, como algunos autores señalan (Bisquerra, 1989), la tendencia actual está en considerar que en muestras grandes ($n > 30$) los análisis multivariables son lo suficientemente robustos como para ser insensibles a ligeras desviaciones de los supuestos paramétricos, principalmente de la normalidad multivariable y de la homocedasticidad.

Por otra parte, el MANOVA es una técnica inadecuada para ser utilizada en aquellos casos en los que las variables dependientes no están correlacionadas; y más aún si las muestras tomadas son pequeñas.

Por último, el número de variables dependientes no debe ser mayor que el número total de subgrupos por el número de sujetos en cada uno menos uno para cada subgrupo (Escotet, 1980: 277). En este mismo sentido otros autores recomiendan una relación de 40/60 a 1, por lo menos, entre número de sujetos y número de variables dependientes. (Camacho, 1990: 111).

4. INTERPRETANDO EL MANOVA

Para realizar la interpretación del MANOVA partiremos de un ejemplo práctico, a partir del cual iremos analizando las distintas fases del análisis.

Imaginemos el siguiente problema: Un profesor lleva a cabo con sus alumnos un programa de desarrollo de actitudes positivas hacia el estudio y desea conocer la eficacia del tratamiento. Una vez finalizado el mismo, aplica la «Escala de Actitud Hacia el Estudio» (Pereda, 1989), tanto a los alumnos que han seguido el programa como a los que no, obtiendo de cada alumno las puntuaciones en cada una de las cinco dimensiones (variables) que componen la escala (nivel de aspiraciones, gusto por el estudio, organización del estudio, esfuerzo por comprender y deseo de seguir aprendiendo), cuyos resultados ficticios aparecen en la Tabla I.

TABLA I

Puntuaciones medias obtenidas por los grupos experimental y control

VARIABLES	GRUPOS CONTROL	GRUPOS EXPERIMENTAL
NIVEL DE ASPIRACIONES	5,97	6,23
GUSTO POR EL ESTUDIO	8,02	8,36
ORGANIZACION DEL ESTUDIO	7,6	7,84
ESFUERZO POR COMPRENDER	7,07	8,37
DESEO DE SEGUIR APRENDIENDO	5,89	5,07

Como podemos ver se trata del diseño más simple en el que podemos aplicar el MANOVA (unifactorial), pues tan sólo existen dos grupos (con tratamiento y ausencia de tratamiento), aún cuando el número de variables dependientes es de cinco. No obstante debemos tener presente que el MANOVA es aplicable en todos los diseños donde pueda aplicarse el ANOVA (Bisquerra, 1989; Arnau, 1990).

El primer paso a dar consiste en evaluar la H_0 global, para lo cual pueden utilizarse diferentes pruebas globales de significación: la traza de Pillais, la traza de Hotelling, la lambda de Wilks y la raíz máxima de Roy. De todas ellas, la que se muestra más potente y robusta a la vez es la traza de Pillais (NORUSIS, 1986), siendo la lambda de Wilks la más utilizada.

Todas las pruebas globales de significación reseñadas anteriormente comparten que se basan en el determinante de HE^{-1}, donde H es la matriz de sumas de cuadrados y productos cruzados intragrupos (SCPC), y E^{-1} es la inversa de la SCPC residual. Debemos tomar en consideración que el determinante es una medida de la varianza generalizada de una matriz.

La Lambda de Wilks es el producto de las varianzas no explicadas en cada una de las variantes discriminantes, y cuanto menor sea su valor mayor será la disparidad entre los grupos que se comparan. Su fórmula es:

$$W = \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{1+\lambda_i}$$

La traza de Pillais es la suma de las varianzas explicadas en las variantes discriminantes y, al contrario que la lambda de Wilks, cuanto mayor sea su valor mayor será la disparidad entre los grupos que se comparan. Su fórmula es:

$$V = \sum_{i=1}^{s} \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i}$$

En la Tabla II podemos observar los resultados obtenidos al realizar las pruebas globales de significación, donde la traza de Pillais alcanza el valor de 0,2911. Dada la complejidad de la distribución de la traza de Pillais, para estudiar la significación, el valor de ésta se aproxima a una distribución F, que en este caso concreto con 4 y 70 grados de libertad es de 5,75, valor que conlleva un grado de significación menor de 0,0001. Ello conduce al rechazo de la hipótesis nula. Es decir, existen diferencias significativas entre los tratamientos.

TABLA II
Pruebas globales del MANOVA

Multivariate Tests of Significance (S = 1, M = 1 1/2, N = 34)

Test Name	Value	Approx. F	Hypoth. DF	Error DF	Sig. of F
Pillais	.29115	5.75038	5.00	70.00	.000
Hotellings	.41074	5.75038	5.00	70.00	.000
Wilks	.70885	5.75038	5.00	70.00	.000
Roys	.29115				

A continuación procederemos al análisis de la magnitud del efecto, pues la significación no implica necesariamente un resultado importante dado que diferencias superficiales pueden ser estadísticamente significativas con tamaños grandes de las muestras, y viceversa.

En el MANOVA, la medida de la intensidad de la asociación entre los miembros del grupo y las variables dependientes es la media de las «s» correlaciones canónicas, cuyo valor puede extraerse al dividir la traza de Pillais por «s», es decir:

e^2 mult = V/s, donde s=número de grupos menos uno.
Como medida ajustada se utiliza:
e^2 mult. ajustada= 1-[(1-e^2 mult.)(N-1/N-b-1)], donde
N=tamaño total de la muestra
b=valor mayor de p y k-1.

En nuestro ejemplo, en consecuencia, tendríamos:

e^2 mult. ajustada= 1[(1-0,29/1)(76-1/76-5-1)]=0,24.

Ello nos permite concluir que el 24% de la varianza en las cinco variables dependientes puede atribuirse a las diferencias entre grupos.

Una vez probada la significación de las diferencias entre medias, el paso siguiente consiste en analizar las diferencias específicas entre los grupos, tema sobre el que no existe unanimidad en cuanto a las técnicas a utilizar, debido fundamentalmente a la disparidad de intereses al utilizar esta técnica. Bray y Maxwell (1982: 341) presentan los siguientes núcleos de interés entre los investigadores:

a) Interés por los efectos de una variable independiente sobre varias variables dependientes individualmente.
b) Interés por las relaciones entre las p variables dependientes.
c) Interés en reducir las variables dependientes a un conjunto menor de dimensiones teóricas.
d) Interés en cómo el conjunto de mediciones representa un constructo(s) o dimensión(es) subyacente.

A pesar de esta diversidad, existen una serie de técnicas que pueden ser utilizadas para el análisis posterior a un MANOVA significativo, que podemos representar de la siguiente forma:

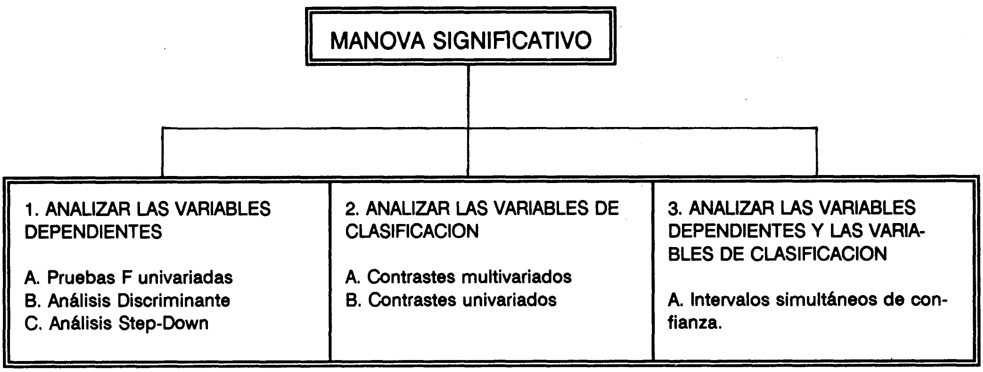

Figura 1. *Técnicas para el análisis posterior a un MANOVA significativo*

4.1. **Analizar las variables dependientes**

En la figura 1 podemos observar que para analizar las variables dependientes podemos utilizar tres procedimientos, que a continuación presentaremos brevemente.

El primero de estos procedimientos consiste en realizar *análisis univariados de varianza,* con dos posibles alternativas: el procedimiento de la F protegida y el procedimiento de Bonferroni.

El procedimiento de la F protegida, también conocido como prueba de la diferencia mínima de Fisher (L.S.D.) o procedimiento t, mantiene el error global de tipo I al nivel nominal prefijado (Camacho, 1990). Para la interpretación se considera que cada F univariable que sea significativa es importante para explicar las diferencias entre los grupos.

Trasladándonos a nuestro ejemplo, en la Tabla III se presentan los resultados obtenidos en los análisis univariados de varianza, para cuya interpretación debemos tener presente lo siguiente: Hypoth. SS=suma de cuadrados inter-grupos; Error SS=suma de cuadrados intra-grupos; Hypoth. MS=media cuadrática inter-grupos; Error MS=media cuadrática intra-grupos. Como podemos observar, para un nivel de significación del 5%, tan sólo se dan diferencias significativas en las variables Esfuerzo y Deseo.

TABLA III
Pruebas F univariadas

Univariate F-tests with (1,74) D. F.

Variable	Hypoth. SS	Error SS	Hypoth. MS	Error MS	F	Sig. of F
ASPIRA	1.31579	155.84211	1.31579	2.10597	.62479	.432
GUSTO	2.22368	81.81579	2.22368	1.10562	2.01126	.160
ORGANI	1.06579	118.13158	1.06579	1.59637	.66763	.417
ESFUER	31.59211	109.60526	31.59211	1.48115	21.32941	.000
DESEO	12.64474	168.34211	12.64474	2.27489	5.55839	.021

Una segunda alternativa más conservadora para controlar el error de tipo I es el procedimiento de Bonferroni, que consiste en dividir el error alfa por el número de variables dependientes, y comparar cada razón F individual con el valor crítico de F para el nuevo valor ajustado de alfa (Bray y Maxwell, 1982).

En nuestro ejemplo $\alpha/5=0.01$, con lo cual tan sólo se dan diferencias significativas en la variable Esfuerzo.

Tanto el procedimiento de la F protegida como el procedimiento de Bonferroni ignoran las posibles relaciones entre las variables dependientes. No obstante, si el propósito del análisis reside en controlar el error de tipo I, estos procedimientos son los más adecuados.

El segundo procedimiento para analizar las variables dependientes es el *Análisis Discriminante* (A.D.). El objetivo del A.D. consiste en diferenciar lo más posible los grupos previamente definidos, teniendo en cuenta la información que se tiene de cada sujeto, y conocer cuáles son las variables más discriminantes (Sánchez Carrión, 1984). En definitiva, a partir del A.D. podemos separar grupos y clasificar sujetos.

Dentro del contexto de la interpretación del MANOVA el A.D. aporta información sobre: (1) el número mínimo de dimensiones que están en la base de las diferencias entre los grupos sobre las p variables dependientes, (2) cómo se relacionan las variables dependientes con las dimensiones subyacentes y las otras variables dependientes, y (3) cómo pueden representarse geométricamente en un espacio discriminante reducido (Bray y Maxwell, 1982).

Tras obtener las funciones discriminantes (ecuaciones lineales de la p variables dependientes) se procede a la interpretación sólo de las significativas, disponiéndose en este momento de varias alternativas.

El método más usual consiste en utilizar las magnitudes de los *coeficientes estandarizados*, como indicadores de la importancia relativa de cada variable en la función discriminante (Norusis, 1986; Camacho, 1990), prefiriéndose éstos coeficientes a los coeficientes no estandarizados sobre todo en aquellos casos en los que las unidades de medida utilizadas son diferentes.

Así, volviendo a nuestro ejemplo, podemos observar en la Tabla IV los coeficientes estandarizados, donde se comprueba que los valores más altos corresponden a las variables Esfuerzo (-0,913) y Deseo (0,496).

TABLA IV
Coeficientes estandarizados

	Function No.
Variable	1
ASPIRA	.164
GUSTO	-.108
ORGANI	-.129
ESFUER	-.913
DESEO	.496

Otra alternativa para valorar la contribución de una variable a la función discriminante consiste en examinar las *correlaciones* entre los valores de la función y los valores de las variables, también denominados *coeficientes estructura*.

En la Tabla V podemos observar los resultados obtenidos en nuestro ejemplo, los cuales indican que las dos variables con una mayor correlación son las variables Esfuerzo (-0,83) y Deseo (0,42).

TABLA V
Correlaciones canónicas

	Canonical Variable
Variable	1
ASPIRA	-.143
GUSTO	-.257
ORGANI	-.148
ESFUER	-.838
DESEO	.428

No obstante, si comparamos los resultados de las Tablas IV y V podemos observar que la variable Aspiraciones, que tiene un coeficiente estandarizado positivo, está correlacionada negativamente con la función discriminante. Esto ocurre debido a que Aspiraciones y Esfuerzo están correlacionadas (0,37). En consecuencia, la contribución de Aspiraciones y Esfuerzo es compartida y los coeficientes individuales no son significativos.

Al interpretar los coeficientes estandarizados debemos ser cautelosos, pues la intercorrelación existente entre las variables imposibilita la valoración de la importancia de cada variable individualmente considerada (Norusis, 1986).

Si al utilizar los coeficientes estandarizados se obtienen resultados equivalentes a cuando se utilizan los coeficientes estructura cabe preguntarse, lógicamente, cuáles son las diferencias entre ambos tipos de coeficientes. En este sentido Camacho (1990) señala que los coeficientes estandarizados representan la contribución relativa de cada variable a la función discriminante, mientras que las correlaciones representan la cantidad de varianza que comparte una variable dependiente con la función discriminante. Por ello las correlaciones son las más apropiadas para la interpretación sustantiva de la función discriminante.

Por último, dentro del A.D., podemos representar los centroides de los grupos en el espacio discriminante, en aquellos casos en los que existan más de dos grupos, lo cual permitirá la interpretación de las diferencias entre los grupos, aunque no se ofrece información sobre la cantidad de la diferencia entre las p variables originales.

El tercer procedimiento disponible para analizar las variables dependientes es el *Análisis Step-Down,* a través del cual las variables dependientes se registran en un orden específico para comprobar la contribución relativa de las sucesivas medidas (Bray y Maxwell, 1982, Norusis, 1986). Esta técnica se muestra particularmente útil cuando existe un orden teórico «a priori» de las p variables. En definitiva, para utilizar este procedimiento el investigador ha de ordenar conceptualmente «a priori» todas las variables para probar cómo contribuye una variable concreta a la separación del grupo, dadas las variables precedentes.

En principio podría considerarse este procedimiento como equivalente al Análisis Discriminante paso a paso, pero debemos considerar que en el A.D. las variables se seleccionan empíricamente, mientras que en el Análisis Step-Down están ordenadas conceptualmente.

4.2. **Analizar las variables de clasificación**

Una vez rechazada la hipótesis nula se pueden investigar las diferencias entre los k grupos, para lo cual se dispone de dos alternativas: (1) los contrastes multivariados, y (2) los contrastes univariados.

Si el investigador está interesado en investigar las diferencias de grupo entre las p variables tomadas conjuntamente, entonces son aplicables los contrastes multivariados, entre cuyos estadísticos cabe destacar la T^2 de Hotelling, que es una generalización de la prueba t de Student para el caso de más de una variable dependiente (Bisquerra, 1989), cuya fórmula es:

$$T^2 = \frac{N_1 N_2}{N_1+N_2} (\bar{\underset{\sim}{X}}_1-\bar{\underset{\sim}{X}}_2)' S^{-1} (\bar{X}_1-\bar{X}_2)$$

donde N_1 y N_2 son el número de individuos de cada grupo, $\bar{\underset{\sim}{X}}_1$ y $\bar{\underset{\sim}{X}}_2$, son los vectores de las medias para cada grupo, S^{-1} es la inversa de la matriz de varianzas-covarianzas conjunta de los dos grupos y la prima (') significa la matriz transpuesta.

En el caso que se encuentren diferencias significativas entre los grupos, entonces las técnicas especificadas anteriormente en el punto 4.1 se pueden utilizar para investigar más profundamente las diferencias sobre las variables dependientes.

En nuestro ejemplo podemos ver en la Tabla II que el valor de la T^2 es de 0,41, resultando el mismo significativo, y al tratarse tan sólo de dos grupos no podemos llevar a cabo otras posibles comparaciones entre grupos.

En el supuesto de que el investigador desee investigar las diferencias de grupo entre las p variables individualmente para cada variable, entonces son aplicables las técnicas comunes de comparación del ANAVA (Scheffé, Tukey, etc.)

4.3. **Analizar las variables dependientes y las variables de clasificación**

Como tercera alternativa de análisis posterior a un MANOVA significativo, y con el fin de analizar conjuntamente las variables dependientes y las variables de clasificación, se señalaba en el gráfico 1 la utilización de los intervalos simultáneos de confianza de Roy-Bose. No obstante, Bray y Maxwell (1982) hacen notar que aún cuando esta técnica es matemáticamente ideal debido a su generalidad, sin embargo, sus aplicaciones prácticas no son muy útiles.

5. **RECAPITULANDO**

A lo largo del presente trabajo hemos realizado una introducción al Análisis Multivariable de la Varianza, el cual se emplea generalmente por una de las siguientes razones: (1) Se toman múltiples medidas dependientes y se emplea el MANOVA para controlar la proporción de error experimental, o (2) se utiliza un diseño multivariado para investigar las relaciones entre los k grupos sobre las p variables.

La utilización conjunta y adecuada de las técnicas y estrategias reseñadas en este trabajo permitirán al investigador una mayor comprensión de los datos con los que trabaja.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARNAU I GRAS, J. (1990). *Diseños experimentales multivariables.* Madrid: Alianza.

BISQUERRA ALZINA, R. (1989). *Introducción conceptual al Análisis Multivariable. Un enfoque informático con los paquetes SPSS-X, BMDP, LISREL y SPAD.* Barcelona: PPU.

BRAY, J. H. y MAXWELL, S. E. (1982). Analyzing and Interpreting Significant MANOVAs. *Review of Educational Research, 52*, (3), 340-367.

CAMACHO ROSALES, J. (1990). Interpretación del MANOVA: Análisis de la importancia de las variables dependientes. *Qurriculum*, (1), 107-121.

CUADRAS AVELLANA, C. M. (1981). *Métodos de Análisis Multivariante.* Barcelona: EUNIBAR.

ESCOTET, M. A. (1980). *Diseño multivariado en Psicología y Educación.* Barcelona: CEAC.

NORUSIS, M. J. (1986). *Advanced Statistics SPSS/PC+.* Chicago: SPSS Inc.

PÉREZ SANTA MARÍA, F. J. (1989). *Monografía introductoria al análisis multivariable de la varianza.* Sevilla: Universidad.

SÁNCHEZ CARRIÓN, J. J. (1984). *Introducción a las técnicas de análisis multivariable aplicadas a las Ciencias Sociales.* Madrid: CIS.