Revista de Investigación Educativa - Vol. 14, n.º 2, págs. 121-139

EVALUACIÓN DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS EN PRIMARIA[1]

Enrique Castro; Luis Rico; José Gutiérrez; Encarnación Castro; Isidoro Segovia; Nicolás Morcillo; Francisco Fernández; Evaristo González y Antonio Tortosa

Universidad de Granada

RESUMEN

Se analiza la dificultad de los niños de 4°, 5° y 6° de Primaria (9, 10 y 11 años) para seleccionar las operaciones adecuadas cuando resuelven problemas verbales de estructura aditiva de dos etapas. El objetivo es poner de manifiesto la competencia que tienen los niños en la resolución de estos problemas aritméticos y en qué medida se ve afectada por el tipo de relación (aumento o disminución) en la primera y segunda posición. El diseño es de tipo factorial mixto con dos variables intersujeto (colegio y curso) y una variable intrasujeto (relación de aumento o disminución en primera posición) con medidas repetidas en esta última variable. Las conclusiones obtenidas son: a) la capacidad de resolución de problemas aritméticos de los alumnos se desarrolla al pasar de 4° a 6ª. b) La variable «tipo de relación» influye en la dificultad de elegir el proceso adecuado de solución.

Enrique Castro. Profesor Titular de Universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. E-mail: ecastro@platon.ugr.es

1 Este trabajo ha sido parcialmente financiado con una ayuda a la Investigación para Niveles no universitarios (BOJA, n° 131, 19 de diciembre de 1992), concedida por la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía al Proyecto denominado *Diagnóstico de Procedimientos y Evaluación de Destrezas Terminales para la Resolución de Problemas Aritméticos en el Tercer Ciclo de la Educación Primaria Obligatoria.*

ABSTRACT

We analyze the difficulty of Primary School children of 4°, 5° and 6° levels (9, 10 and 11 years old), into choice of the proper operations when they try to solve two-steps arithmetical word problems with additive structure. Our goal is to set up the ability of the pupils to solve such kind of arithmetic problem and to value the way in that the kind of relationship (increase or decrease) both in first or second position affects this ability. We have used a repeated measure design with two between-subjects factors (teaching institution and course) and one within-subjects factor (relationship in first and second position). The obtained conclusions are: a) the ability of the pupils in arithmetic problem solving is developed upon going from 4° to 6ª. b) The variable «type of relationship» influences the difficulty of choosing the adequate process of solution.

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de la aritmética en los niveles escolares obligatorios está estrechamente ligado a las tareas de resolución de problemas. Los problemas aritméticos de enunciado verbal ocupan parte importante del tiempo reservado a matemáticas en los calendarios escolares, por otra parte los alumnos, a lo largo de su vida, encuentran multitud de problemas que deben resolver. Unas veces los problemas se plantean como estrategia de refuerzo y aplicación de aspectos conceptuales, mientras que otras veces se plantean como una tarea rutinaria para rellenar el horario de matemáticas. En cierto modo son una alternativa a la mecánica de *hacer cuentas sin un contexto explícito de referencia*.

Independientemente del éxito obtenido por los escolares en las tareas de resolución de problemas aritméticos, el objetivo fundamental para su tratamiento curricular se basa en la creencia de que la propuesta sistemática y reiterada de problemas a los alumnos va a producir una mejora progresiva en sus capacidades de resolución de problemas con el paso del tiempo. Esta creencia ha llevado, en ocasiones, a proponer problemas difíciles, con dos o tres operaciones, a alumnos en edades muy tempranas sin la necesaria madurez y desarrollo cognitivo.

Los investigadores en educación matemática han reconocido este ámbito de las matemáticas escolares como un campo fértil, digno de ser explorado más sistemáticamente en orden a comprender cómo los alumnos resuelven los problemas, las dificultades que se plantean, las variables relevantes en los procesos de resolución, los tipos diferentes de problemas que existen y los niveles educativos en que deben ser abordados.

Hoy día existe un campo de estudios e investigaciones sobre resolución de problemas aritméticos escolares con una producción considerable de literatura especializada, que estudia la influencia de variables tales como la estructura semántica, la posición de la incógnita o el tipo de relaciones de aumento o disminución entre las cantidades implicadas en el problema.

Una revisión actualizada (Castro, 1995; Castro, Rico y Gil, 1992) de las diferentes corrientes investigadoras centradas en el estudio global o parcial de las tareas de resolución de problemas aritméticos permite distinguir tres grandes enfoques: a) *Estudios correlacionales centrados en factores lingüísticos;* b) *estudios basados en variables estructurales,* y c) *estudios de tipo semántico.*

Los estudios de tipo semántico sobre problemas aditivos han estado dedicados principalmente a aquellos en cuya solución interviene una sola operación, problemas de una etapa, y constituyen la clase más sencilla de problemas aditivos. Las categorías semánticas para problemas aditivos de una etapa, que representan estructuras alternativas de información cuantitativa, fueron establecidas inicialmente por Heller y Greeno (1979) y, con sucesivos perfeccionamientos, han llegado hasta nuestros días y se mantienen como criterios válidos en las agendas de investigación sobre Educación Matemática. Fuson (1992) recoge 22 problemas aditivos estructuralmente diferentes, para cuya elaboración tiene en cuenta el cruce entre: a) cuatro estructuras semánticas alternativas, que se denominan Combinación, Cambio, Comparación e Igualación; b) dos tipos de relaciones —aumento o disminución— para las tres últimas categorías, o la disyuntiva entre una relación estática o dinámica para la primera estructura; c) tres posibilidades para el dato desconocido en la estructura de relaciones que establece el enunciado del problema (solamente dos en la estructura de Combinación).

El trabajo se sitúa dentro de este marco, siendo uno de los objetivos principales en este estudio determinar cuáles son las variables estructurales de los problemas aritméticos y qué influencia pueden ejercer sobre la dificultad en la resolución de los mismos. Se estudian problemas aritméticos aditivos, clasificados según las cuatro categorías de estructura semántica citadas. Se centra en el análisis de los problemas aritméticos aditivos de dos etapas o de dos pasos.

Problemas de dos pasos

Un problema aritmético de dos pasos es el que requiere dos operaciones para obtener la solución numérica del problema. Por ejemplo:

Problema. En un autocar había 19 pasajeros. En la primera parada bajan 8 pasajeros y suben 5. ¿Cuántos pasajeros hay ahora en el autocar?

Realizando las combinaciones de los cuatro procesos básicos (adición, substracción, multiplicación y división) de dos en dos, obtenemos las dieciséis parejas de operaciones:

(+,+), (+,-), (+,x), (+,:), (-,+), (-,-), (-,x), (-,:),
(x,+), (x,-), (x,x), (x,:), (:,+), (:,-), (:,x), (:,:)

que darán lugar a los enunciados de otros tantos problemas de dos pasos o etapas cuya solución requiera de las operaciones básicas. No hay muchos trabajos previos de investigación sobre los problemas compuestos de varias etapas. Vamos a citar aquellos que nos parecen más interesantes para nuestro estudio.

Partiendo del trabajo teórico de Durell (1940), Gray & Young utilizan la idea de la categorización de los problemas según las operaciones que intervienen en su solución para comparar niveles de dificultad entre problemas de dos pasos.

Berglaund-Gray (1938, 1939), Berglaund-Gray & Young (1940), y Young & McIsaac (1941) investigan el efecto de invertir la secuencia de operaciones. Concluyen que la substracción y la división fueron más difíciles como primeros procesos y la adición y la multiplicación fueron más difíciles como segundos procesos.

Suppes, Loftus y Jerman (1969) obtienen que «el número mínimo de operaciones diferentes requeridas para obtener la solución correcta» tiene influencia significativa sobre la dificultad de resolución de un problema aritmético; pero no así el número de pasos requerido para obtener la solución. En el trabajo posterior de Jerman y Rees (1972), también se concluye que las operaciones matemáticas tienen efecto significativo para predecir el orden de dificultad de los problemas verbales.

Sherard (1974) halla, para problemas de dos pasos, que los problemas que implican a la multiplicación y a la división son los más difíciles, siguiendo en orden descendente de dificultad los de substracción y multiplicación, substracción y división, adición y división, adición y multiplicación, y adición y substracción.

El interés por el estudio de los problemas aritméticos de dos pasos (o etapas) ha renacido recientemente (Shallin, 1985; Nesher, 1991; Nesher y Herskovitz, 1994). Los trabajos se centran en el estudio de los esquemas subyacentes a los problemas de dos etapas. Estos autores consideran que los esquemas de los problemas de dos etapas son esquemas compuestos por dos esquemas simples: el aditivo y el multiplicativo. Parten del hecho de que la definición de problema compuesto no se basa en las cuatro operaciones aritméticas sino en las esquemas simples constituidos por una relación entre tres cantidades. En el esquema aditivo las tres componentes son el todo y sus dos partes, mientras que en el esquema multiplicativo las componentes son el producto y sus dos factores. Los autores se basan en el trabajo previo de Shallin y Bee (1985) para afirmar que sólo hay tres esquemas básicos de problemas de dos etapas:

Esquema (A) (*Jerárquico*). El todo de un esquema es una parte del otro esquema.
Esquema (B) (*Compartir el todo*). Los dos esquemas comparten un todo.
Esquema (C) (*Compartir una parte*). Los dos esquemas comparten una parte.

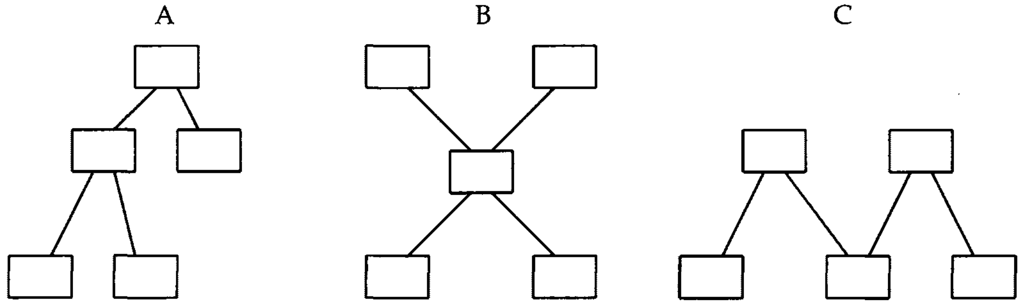

Ilustración 1
Esquemas básicos de problemas de dos etapas (Nesher y hershkovitz, 1994).

Una de las cuestiones que investigan es la influencia que tienen sobre el índice de dificultad de los problemas de dos etapas los tres esquemas y las ocho posibles combinaciones de dos operaciones que se obtienen eligiendo una operación de estructura aditiva + / - y otra de estructura multiplicativa x /: a saber:

(+,x), (x,+), (+,:), (:,+), (-,x), (x,-), (-,:), (:,-)

Para una muestra de escolares de 3°, 4°, 5° y 6° de Israel obtienen que ambas variables tienen efecto significativo sobre el índice de dificultad de estos problemas.

Con respecto a los esquemas hallan que el esquema «jerárquico» es el más fácil, le sigue en dificultad el esquema «compartir el todo» y, por último, el esquema «compartir una parte».

Categorización de los problemas en este estudio

En nuestra investigación estudiamos problemas de dos etapas desde el punto de vista estructural basándonos en las categorías semánticas de los mismos. Problemas aritméticos aditivos de dos etapas son los problemas cuyas soluciones implican solamente sumas y restas y, en todos los casos, es necesario realizar dos operaciones —distintas o repetidas— para obtener la solución; el estudio de los problemas aritméticos aditivos de dos etapas constituye el objeto principal de esta investigación. Uno de los enfoques de investigación más productivos en los estudios sobre problemas aritméticos de estructura aditiva de una etapa es el enfoque estructural basado en las categorías semánticas de los problemas (Castro y otros, 1992). Las cuatro categorías semánticas determinadas para estos problemas constituyen uno de los cimientos de nuestra categorización teórica; criterio que se complementa con otras dos variables: el tipo de relación y la posición de la incógnita.

a) *Estructura semántica de la primera y segunda etapa.* Partimos del supuesto teórico de que, en cada etapa, está presente una de estas estructuras semánticas y que, por tanto, al tratarse de problemas de dos etapas hemos de tener en cuenta la categoría semántica que se utiliza en cada una de ellas. Dicho de otra manera, en el enunciado de los problemas aritméticos de dos etapas, cada etapa del problema corresponde a una relación entre tres datos, uno de los cuales es compartido y está latente en el problema. Cada una de estas relaciones por separado las encontramos en los problemas aritméticos verbales de una etapa. En consonancia con esto, en un problema verbal de dos etapas la estructura semántica se encuentra tanto en la primera relación como en la segunda. Utilizamos, por tanto, las categorías semánticas en la primera relación del problema y las categorías semánticas en la segunda relación. Las categorías semánticas empleadas son las denominadas:

- ***cambio***, se refiere a los problemas en los que se produce algún evento o transformación que cambia el valor de una cantidad inicial; la codificamos como Ca.
- ***combinación***, problemas basados en la relación existente entre un conjunto total y una partición del mismo en dos subconjuntos; la codificamos como Co.

- ***comparación,*** son problemas que implican una relación comparativa entre dos cantidades; la designamos abreviadamente como Cp.
- ***igualación,*** son aquellos problemas en los que se plantea una acción para lograr que una cantidad sea igual a otra; abreviadamente lo designamos como Ig.

Si atendemos a las posibilidades que ofrecen estas cuatro estructuras en los problemas de dos etapas, encontramos las 16 opciones que están recogidas en la Tabla 1.

TABLA 1
COMBINACIONES SEMÁNTICAS POSIBLES EN PROBLEMAS DE DOS ETAPAS

	Ca	Co	Cp	Ig
Ca	(Ca, Ca)	(Ca, Co)	(Ca, Cp)	(Ca, Ig)
Co	(Co, Ca)	(Co, Ca)	(Co, Cp)	(Co, Ig)
Cp	(Cp, Ca)	(Cp, Co)	(Cp, Cp)	(Cp, Ig)
Ig	(Ig, Ca)	(Ig, Co)	(Ig, Cp)	(Ig, Ig)

b) *Relaciones de Aumento/Disminución.* La segunda variable hace referencia a los tipos de relaciones de comparación posibles en los problemas aditivos de dos etapas. Cuando enunciamos un problema verbal, la relación entre cada pareja de datos puede ser de aumento o disminución (Carpenter y Moser, 1983). En este caso cada una de las etapas incluye una relación de aumento o disminución, por lo que se presentan cuatro posibilidades para la variable relaciones, recogidas en la Tabla 2.

TABLA 2
COMBINACIONES SEGÚN RELACIONES POSIBLES EN PROBLEMAS DE DOS ETAPAS

	Aumento (A)	Disminución (D)
Aumento (A)	Aumento-Aumento (A,A)	Aumento-Disminución (A,D)
Disminución (D)	Disminución-Aumento (D,A)	Disminución-Disminución (D,D)

c) *Cantidad desconocida.* Una tercera caracterización de los problemas de dos etapas se refiere a cuál es la cantidad desconocida entre las posibles que intervienen en la relación global subyacente en el problema. En nuestro estudio sobre problemas aditivos de dos etapas hemos decidido trabajar exclusivamente sobre los problemas en los que el resultado de una operación entra como dato para la otra operación; con mayor precisión, consideramos problemas en cuyo enunciado aparecen en primer lugar dos datos con los que hay que operar para obtener un tercer número, este primer resultado hay que operarlo a su vez con el tercer dato del enunciado para alcanzar la solución. Esquemáticamente:

* datos ordenados del problema: a, b, c
* orden de operaciones para alcanzar la solución:
  a* * *b* → *d
  d* * *c* → *solución

En definitiva, para el estudio de los problemas aritméticos de estructura aditiva de dos etapas hemos delimitado tres características clave: a) la **estructura semántica**, con dieciséis posibilidades; b) las **relaciones de comparación**, con cuatro posibilidades; y c) la **estructura ordenada de las operaciones**, con la «*cantidad desconocida*» siempre al final. Hemos construimos así un universo de 64 problemas aritméticos de dos etapas, en base a las características anteriores, manteniendo controladas otra serie de características en cada uno de los enunciados, evitando así una posible interferencia debida a estos factores.

Objetivos

En la resolución de un problema han sido identificadas dos fases generales: la comprensión del problema y la solución del problema (Kintsch y Greeno, 1985; Mayer, 1986a, 1986b; Newell y Simon, 1974; Riley, Greeno y Heller, 1983).

Varios estudios sobre resolución de problemas aritméticos han mostrado que la mayoría de los errores que cometen los estudiantes en problemas verbales se deben a falta de comprensión de la estructura del problema más que a errores de cálculo. Los estudiantes pueden ser capaces de realizar determinados cálculos pero no ser capaces de resolver problemas verbales en los que para obtener la solución sólo se requiere de esos cálculos (Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist y Reys, 1980; De Corte, Verschaffel y De Win, 1985; Dellarosa Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer, 1988).

Esta discrepancia en el índice de dificultad de un problema según el formato numérico o verbal sugiere que la dificultad que plantea un problema a los niños no está determinada sólo por las destrezas de cálculo implicadas sino que hay otros aspectos que contribuyen a su dificultad, entre ellos, aspectos relacionados con la fase de comprensión. Por ello, nuestro trabajo tiene como objetivo evaluar la dificultad de resolución de problemas aritméticos verbales de dos pasos, con estructura aditiva, centrándonos en la fase de comprensión.

Las cuestiones que nos planteamos al respecto son:

1) ¿Hay diferencias en el rendimiento de los alumnos en la resolución de problemas aritméticos verbales de dos etapas según el colegio y el curso escolar en el que se hallen?

2) ¿Tienen los distintos problemas aritméticos verbales compuestos de dos etapas el mismo índice de dificultad de comprensión o ésta depende de la variable de tarea combinación de relaciones de aumento y de disminución?

MÉTODO

Muestra

Las pruebas se han aplicado en 6 colegios diferentes de Granada y provincia. De los centros que participaron en la experiencia cinco pertenecen a Granada capital y uno a un pueblo de la provincia. De los colegios de la capital dos están situados en la Zona centro de Granada y los otros tres están ubicados en distintos barrios de la ciudad.

Con relación a su carácter administrativo, tres tienen establecido concierto con la Administración Educativa y los tres restantes son públicos.

En cada uno de los seis colegios se han elegido simultáneamente los cursos 4°, 5° y 6° de Primaria. De cada colegio, las pruebas se han aplicado a un grupo completo de alumnos por cada uno de los cursos. En total, el número de grupos que componen la muestra son 18.

Diseño e instrumento

Hemos utilizado un diseño factorial mixto en el que han intervenido las siguientes variables:

a) Variables independientes

Las variables independientes empleadas son de dos tipos: intrasujeto e intersujeto.

Las variables independientes intersujeto han sido:

— *Semántica-1*
— *Semántica-2, y*
— *Relación*

La variables Semántica-1 y Semántica-2 tienen cada una cuatro niveles que corresponden a las cuatro estructuras semánticas detectadas en problemas verbales simples de estructura aditiva que son:

ES1: CA = Cambio
ES2: CO = Combinación
ES3: CP = Comparación
ES4: IG = Igualación

La variable independiente *Relación* es una variable compuesta de dos más simples: tipo de relación en primera etapa y tipo de relación en segunda etapa, ambas con dos niveles posibles: la suma (relación de aumento) y la resta (relación de disminución). Tiene por tanto cuatro niveles que son:

R1: (A,A)
R2: (A,D)

R3: (D,A)
R4: (D,D)

Al cruzar estas tres variables independientes entre sí se obtiene un diseño factorial de dimensión 4x4x4, que da lugar a una matriz de 64 casillas, que representan cada una de las 64 tareas-problema que han debido resolver los alumnos en una situación de diseño intrasujeto.

TABLA 3
EJEMPLOS DE PROBLEMAS CORRESPONDIENTES A LAS CUATRO COMBINACIONES DE AUMENTO Y DISMINUCIÓN

		Segunda posición	
		Aumento (A)	**Disminución (D)**
Primera posición	Aumen. to (A)	María tiene 12 sellos de Francia y 7 de España. Compra 16 sellos de Grecia ¿Cuántos sellos tiene en total?	José tiene 18 bolas rojas y 7 bolas negras. Después de jugar una partida pierde 11 bolas ¿Cuántas bolas le quedan?
	Disminu- ción (D)	José tiene 25 bolas rojas y negras, 7 son negras. Le regalan 4 bolas rojas ¿Cuántas bolas rojas tiene José?	Juan tiene 35 cromos, 7 son de animales y el resto de aviones. Regala a un amigo 12 cromos de aviones ¿Cuántos cromos de aviones le quedan?

Por último, añadimos dos nuevas variables independientes intersujeto que completan el diseño anterior, las variable COLEGIO y CURSO, que confiere al trabajo una estructura de diseño factorial mixto, donde se analizan los seis colegios en los que se aplicaron las pruebas y los tres niveles: 4°, 5° y 6° de Educación Primaria.

Decir también que la investigación se ajusta a las coordenadas propias de un diseño cuasi-experimental, ya que ni los colegios ni los alumnos se han elegido aleatoriamente.

Variables controladas

En los 64 problemas aritméticos de dos etapas hemos controlado las siguientes variables intervinientes:

— el tipo de números: naturales;
— el tamaño de los números: inferiores a 60;
— el tamaño del resultado: inferior a 60;

— el tipo de magnitud: discreta;
— la naturaleza de los agentes: personas;
— el contexto del enunciado: familiar al niño;
— la longitud de las oraciones (expresión gramatical mínima: sujeto, predicado y objeto directo);
— la situación de la pregunta en el enunciado: al final;
— el formato del enunciado: tres frases separadas por signos de puntuación. En las dos primeras frases se aportan los datos, manteniendo el mismo orden en el que luego hay que operar con ellos; en la tercera se plantea la pregunta.
— Una variable importante en la categorización de los problemas verbales simples es la *posición de la incógnita o cantidad desconocida en el esquema* correspondiente al problema verbal de una etapa. Esta variable la hemos mantenido constante en nuestro estudio.

Dado que aplicar a los mismos alumnos los 64 tipos de problemas al mismo tiempo presenta dificultades evidentes de orden práctico, elaboramos pruebas diferentes mediante una clasificación de los 64 problemas en grupos de 8 problemas; esto permitió elaborar 8 pruebas distintas. En la Tabla 3 hemos recogido una muestra de problemas incluidos en este estudio.

Procedimiento de aplicación de las pruebas

Las ocho pruebas escritas de lápiz y papel confeccionadas (Prueba A, Prueba B, Prueba C, Prueba D, Prueba E, Prueba F, Prueba G y Prueba H) se aplicaron a los alumnos de 4°, 5° y 6° de Educación Primaria de los seis colegios que intervinieron en el estudio. Las pruebas se aplicaron siguiendo el orden alfabéticos de las mismas, es decir, primero se aplicó la prueba A, después la prueba B, continuando así hasta aplicar en último lugar la prueba H.

Con la finalidad de evitar efectos indeseables producidos por la reiteración de aplicación de pruebas a los mismos niños, se realizó una programación espaciada en un periodo de tiempo del curso escolar 1993-94.

Cada una de las pruebas se ha aplicado en días distintos, procurando dejar entre prueba y prueba al menos uno o dos días de distancia, y evitando el fin de semana en medio. Los niños resolvieron los problemas de forma individual en su mesa habitual de estudio y trabajaron en silencio. Cada prueba dispuso de una hora para su realización.

Las pruebas han sido aplicadas por miembros del Seminario CIEM, directamente vinculados a la investigación. Previo a la entrega de las hojas con los problemas la persona del equipo encargada de aplicarlas daba instrucciones a los escolares sobre la forma en que debían proceder.

Criterios de corrección

Las respuestas escritas dadas por los niños a los problemas han sido catalogadas como correctas o incorrectas. Cuando un niño no ha dado respuesta a un problema se ha catalogado como incorrecta. En las respuestas dadas por los niños, y puesto que esta investigación se refiere al rendimiento en la fase de comprensión, la decisión de si un alumno ha comprendido o no un problema se ha basado en si el niño ha elegido o no operaciones que permitan obtener la solución. Hemos dado por correctas soluciones en las que el sujeto ha elegido una operación adecuada aunque se haya equivocado al operar.

Fiabilidad del conjunto total de ítems

Al ser los ítems dicotómicos (acierto-fracaso), hemos calculado la fiabilidad del conjunto de los 64 problemas mediante la fórmula KR-20 de Kuder Richardson que mide la consistencia interna del conjunto de ítems. El valor que hemos obtenido para la KR-20 ha sido de 0,96 que es un valor muy alto y garantiza la fiabilidad de los datos recogidos.

RESULTADOS

En este apartado presentamos el análisis cuantitativo de las respuestas de los niños en función del colegio, del curso y de la variable relación. La variable dependiente utilizada ha sido el número de respuestas correctas expresado en porcentaje de aciertos. Para analizar estadísticamente los resultados hemos aplicado un análisis de la varianza mixto 6x3x4 (colegio x curso x relación) al porcentaje de respuestas correctas, con medidas repetidas en el último factor, en el que el colegio y el curso actúan como factores inter-sujetos y la variable de tarea «relación» actúa como factor intra-sujetos.

El ANOVA ha sido realizado con el paquete estadístico SPSS/PC+ y muestra (véase Tabla 4), en primer lugar, que son significativos los efectos principales del COLEGIO ($F = 14.677$, $p = 0.0$), CURSO ($F = 145.584$, $p = 0.0$) y RELACIÓN ($F = 18.377$, $p = 0.0$). En segundo lugar, que no hay interacción significativa COLEGIO x CURSO, pero sí son significativas las interacciones COLEGIO x CURSO ($F = 6.110$, $p =.000$) y CURSO x RELACIÓN ($F = 3.230$, $p =.004$).

Las puntuaciones globales de los colegios, expresadas en porcentajes medios de resolución que oscilan entre 79.79 y 90.09. Realizadas «comparaciones múltiples» por el método de Scheffé ($p=0.05$), revelan que sólo hay diferencias significativas entre el colegio de menor rendimiento y todos los demás.

Con respecto al factor CURSO, para detectar entre qué parejas de cursos hay diferencias significativas hemos aplicado el método de Scheffé al nivel de significación del 5%. Los resultados obtenidos muestran que hay diferencias significativas entre todas las parejas de cursos posibles: 4° vs. 5°, 4° vs. 6°, y 5° vs. 6°). En la Ilustración 2 se observa que el rendimiento medio por curso en los problemas aritméticos verbales de dos etapas aumenta con la edad escolar. El incremento es progresivo, pero se da un salto mayor de 4° (76,5%) a 5° (88,6), que de 5° a 6° (93,8%). En estos cursos se produce, por tanto, un desarrollo de la capacidad de resolución de los problemas aditivos de dos etapas.

TABLA 4

RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LA VARIANZA EN UN DISEÑO FACTORIAL (6 X 3 X 4) Y CON LA PROPORCIÓN DE RESPUESTAS CORRECTAS COMO VARIABLE DEPENDIENTE (n=1036)

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	GL	Medias de Cuadrados	F	Signif. de F
Efectos Principales	144490.324	10	14449.032	42.123	0.0
COLEGIO	25172.985	5	5034.597	14.677	0.0
CURSO	99876.301	2	49938.151	45.584	0.0
RELACIÓN	18911.008	3	6303.669	118.377	0.0
Interacciones de 2 vías	33497.107	31	1080.552	3.150	.000
COLEGIO CURSO	20960.070	10	2096.007	6.110	.000
COLEGIO RELACIÓN	5821.088	15	388.073	1.131	.322
CURSO RELACIÓN	6648.300	6	1108.050	3.230	.004
Interacciones de 3 vías	7415.816	30	247.194	.721	.866
COLEGIO CURSO RELACIÓN	7415.816	30	247.194	.721	.866
Explicada	185403.247	71	2611.313	7.613	0.0
Residual	673688.876	1964	343.019		
Total	859092.123	2035	422.158		

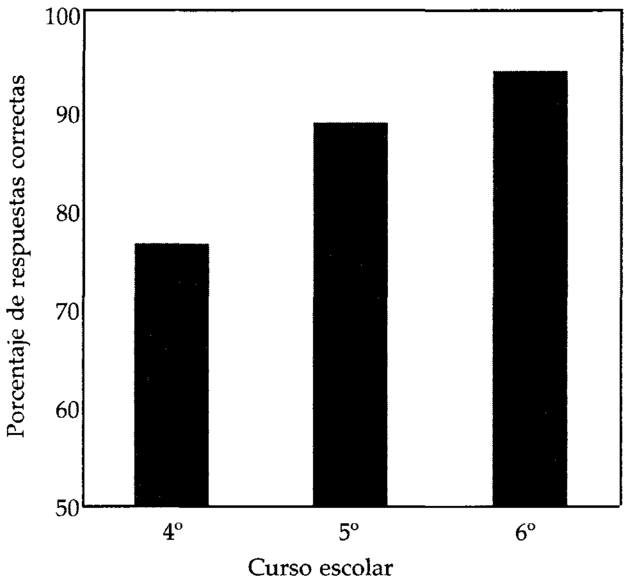

Ilustración 2.

La Ilustración 3 muestra los porcentajes de aciertos de los cuatro niveles de la variable RELACIÓN. Hay una escalonamiento suave en los índices de dificultad de las cuatro combinaciones que constituyen esta variable. Para detectar si hay diferencias significativas entre los índices de dificultad de los cuatro valores de la variable RELACIÓN hemos realizado «comparaciones múltiples» *a posteriori* por el método de Scheffé ($p = 0.05$). Con esta prueba hemos obtenido que la combinación de relaciones (D,D) difiere significativamente de la (A,A) y de la (A,D). También hemos obtenido que la combinación de relaciones (-,+) difiere significativamente de la combinación (A,A). Con estos resultados se obtienen tres parejas de combinaciones homogéneas cuyos rendimientos son muy similares entre sí, que son de mayor a menor dificultad:

— la clase 1 formada por las combinaciones (D,D) y (D,A)
— la clase 2 formada por (D,A) y (A,D), y
— la clase 3 formada por (A,D) y (A,A).

Como puede observarse hay diferencias muy pequeñas entre los porcentajes de la combinación de relaciones (D,A) y de la combinación (D,D). Debido a ello, y a que las diferencias entre la combinación (A,A) y la combinación (A,D) son también pequeñas, pensamos que, con respecto a la combinación de relaciones, la primera relación tiene un papel más decisivo que la segunda en el proceso de comprensión del problema. Esto es una conclusión que habría que analizarla estadísticamente con un diseño en el que la primera relación y la segunda se incluyeran como variables independientes.

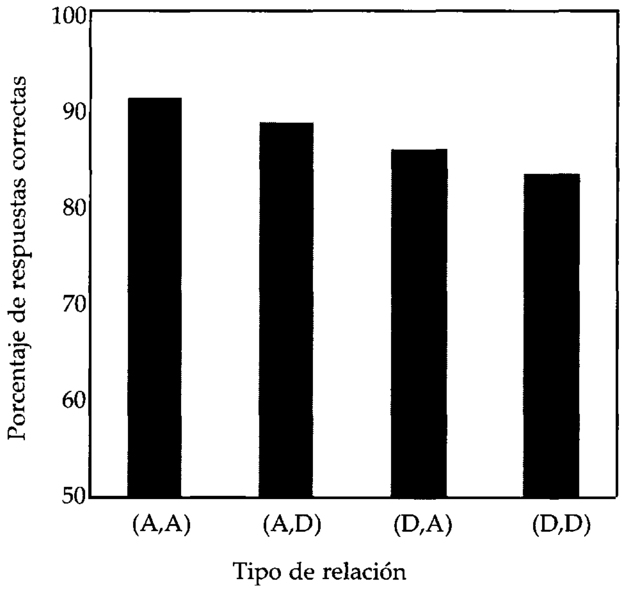

Ilustración 3. *Porcentajes de aciertos de los cuatro niveles de la variable relación.*

Interacción CURSO x RELACIÓN

Los resultados del análisis de la varianza muestran un efecto significativo de interacción entre el curso y la variable relación. El análisis de la interacción *curso x relación* lo hemos realizado mediante el estudio de los efectos de cada una de las variables según los distintos niveles de la otra y realizando en cada caso comparaciones múltiples. En primer lugar, hemos analizado el comportamiento de los tres cursos por separado y hemos obtenido que, en todos ellos, hay efecto significativo de la variable relación sobre el rendimiento de los niños. Se mantiene pues lo obtenido de manera general para la variable *relación*. Realizadas las comparaciones múltiples entre los niveles del factor relación por cada uno de los cursos, encontramos que en cuarto y en quinto las combinaciones (A,A) y (A,D) difieren significativamente de las (D,A) y (D,D), mientras que en sexto curso la combinación (A,A) difiere de las combinaciones (D,A) y (D,D). Así pues, en 4° y 5° curso hay dos clases homogéneas disjuntas: la primera, de dificultad menor, formada por las combinaciones que empiezan con aumento (A): (A,A) y (A,D), y la segunda, con una dificultad mayor que está formada por las combinaciones que empiezan por disminución (D): (D,A) y (D,D). En sexto curso, se mantiene la clase primera, pero a la segunda se incorpora también la (A,D) y por tanto las dos clases no son disjuntas.

En segundo lugar, hemos analizado el desarrollo que experimentan los niños de 4°, 5° y 6° de manera individual para cada uno de los niveles de la variable relación. Los resultados del análisis muestran que hay efecto significativo de la variable curso en cada uno de los cuatro niveles de la variable relación, al nivel del 5%. Las comparaciones múltiples efectuadas entre 4°, 5° y 6° curso han dado que hay diferencias significativas entre las tres parejas posibles 4° vs. 5°, 4° vs. 6° y 5° vs. 6°. Estos resultados son exactamente los obtenidos para la variable curso en el análisis global.

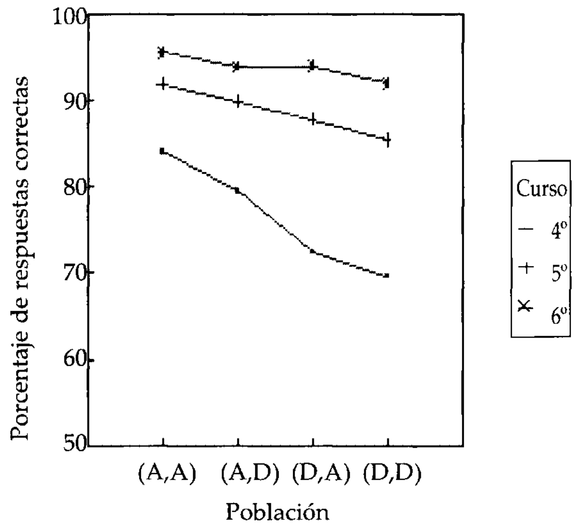

Ilustración 4. *Porcentajes de aciertos asociados al tipo de relación según el curso.*

Resumiendo, podemos decir que la interacción entre las variables RELACIÓN y CURSO no altera el orden de dificultad encontrado entre los niveles de cada variable por separado. Podemos observar en la Ilustración 4 que el avance por curso se produce en los cuatro niveles de la variable relación. Así mismo, el orden de dificultad de los niveles de la variable relación es el mismo en los tres cursos, salvo que se produce un mayor acercamiento entre los índices de dificultad de las cuatro combinaciones al avanzar en el curso escolar. Los contrastes estadísticos han dado dos grupos de problemas homogéneos, pero aunque no sea a nivel significativo hay que resaltar que la combinación (D,D) tiene el mayor índice de dificultad, seguida de (D,A), a continuación viene (A,D) y la más fácil (A,A) y esto ocurre en 4°, 5° y 6°.

CONCLUSIONES

El rendimiento medio obtenido en porcentaje por la muestra empleada de 509 alumnos de 4°, 5° y 6° ha sido del 86,98%. Esto, en principio, lleva a considerar que este tipo de problemas no plantean una dificultad alta de comprensión para este colectivo de alumnos, tomados globalmente. A la vista de este dato puede pensarse que todos los alumnos de la muestra están en el mismo nivel de comprensión en todas las tareas que se han propuesto. El análisis estadístico muestra que no es así, aunque unos aspectos son más influyentes que otros. Veámoslo con detalle. Nuestra intención al incorporar la variable *colegio* en el estudio ha sido controlar en lo posible la fenomenología inherente a distintos colegios, que pudiera incidir en los otros aspectos que estamos estudiando. El análisis estadístico ha puesto de manifiesto que de los seis colegios que participaron en la experiencia cinco de ellos tienen un rendimiento homogéneo. El otro colegio tiene un rendimiento significativamente menor que estos cinco. A la vista de estos resultados sorprende el hecho de que, aún siendo colegios muy diferentes estructuralmente en lo que se refiere a variables de contexto tales como la ubicación geográfica, el nivel social o incluso la diversidad de metodologías y tratamientos curriculares seguidos por los profesores, sin embargo, los rendimientos globales son más homogéneos de lo que, a priori, podría esperarse.

Por razones de ser los grupos de la muestra grupos naturales es también lógico que haya una cierta variabilidad en el nivel de rendimiento de los cursos 4°, 5° y 6° según los distintos colegios. Por ello, la interacción *colegio x curso* es hasta cierto punto esperada y deseada por nosotros, ya que una muestra heterogénea puede darle mayor generalidad a los resultados que hemos obtenido en los otros aspectos en que estamos interesados.

Un hallazgo importante en esta investigación sobre problemas aritméticos verbales de dos etapas ha sido que la dificultad de los niños para seleccionar las operaciones adecuadas para resolver un problema está afectada por el año escolar en el que se encuentra. Con respecto al año escolar, se produce un desarrollo significativo en los niños a lo largo de estos tres cursos en la capacidad de resolución de problemas aritméticos verbales aditivos de dos etapas. La explicación a este hecho puede ser doble: Por un lado puede deberse a la instrucción recibida y por otro al desarrollo psicológico que se produce en estas edades. Puesto que no ha habido en estos colegios un objetivo o intención explícita por mejorar la capacidad de resolución de los problemas aritméticos de dos etapas a lo largo de 4°, 5° y 6° de Primaria, ni se ha llevado una metodología tendente a mejorar esa capacidad, pensamos que la explicación a esta maduración que experimentan los niños es consecuencia indirecta de la instrucción escolar recibida y/o al desarrollo cognitivo.

Es lógico, pensar que el niño con la edad tiene una mayor capacidad de resolución de problemas, pero esto por sí mismo no permite decidir en un momento determinado si es capaz de resolver un tipo o una clase concreta de problemas. Encontrar qué problemas son adecuados a un nivel escolar, cuáles les superan su capacidad de resolución y cuáles han sido superados, es un conocimiento útil para el desarrollo del currículo de matemáticas. Al finalizar la educación primaria hemos encontrado que un alto porcentaje de los niños de 6° resuelven correctamente esta clase de problemas. Es, pues, una capacidad que se ha adquirido durante la educación primaria y lo interesante es analizar cuáles fueron las etapas claves en este aprendizaje. Si en 6° curso pensamos que el alumno en general ha desarrollado la capacidad, en 4° todavía hay aproximadamente un 25% de los alumnos que tienen dificultades para comprender los problemas de dos etapas. De 4° a 5° curso se produce un incremento considerable en su capacidad de resolución de los problemas aritméticos verbales de dos etapas de estructura aditiva, incremento que también se produce en el paso de 5° a 6°, pero en menor medida. Estos datos nos hacen conjeturar que el salto de 3° a 4° debe ser aún mayor que los anteriores, y por tanto, consideramos que los cursos 3° y 4° son claves en el desarrollo de la capacidad de resolución de los problemas verbales aditivos de dos etapas.

También hay que reseñar que esta evolución durante los años de escolaridad se ve afectada por el colegio, en el sentido de que en unos colegios se produce antes que en otros. Pero lo que hay que dejar claro es que en todos se produce y que en sexto no hay diferencias significativas de unos colegios a otros. Todo ello referido a los colegios de la muestra.

Las combinaciones de relaciones de aumento o disminución no afectan a este desarrollo. Dicho de otra manera, el desarrollo que experimentan los niños a lo largo de los cursos, se produce en las cuatro combinaciones. Lo que varía de una combinación a otra es la intensidad del desarrollo experimentado, produciéndose un mayor avance en las combinaciones menos desarrolladas en los niños hasta el momento: (D,A) y (D,D), y un menor avance en aquellas que están más consolidadas de cursos anteriores: (A,A) y (A,D).

El segundo hallazgo importante que hemos encontrado es que las distintas combinaciones de las relaciones de aumento o disminución afectan a la dificultad del problema. Los problemas de dos etapas constan de dos relaciones que pueden ser de aumento o de disminución respectivamente. Las cuatro clases de problemas que surgen según que la relación sea de aumento o de disminución, colocados en orden de dificultad creciente quedan así:

(A,A), (A,D), (D,A) y (D,D)

siendo este último, el (D,D) el de mayor dificultad.

No es fácil comparar este resultado con otros que pueden parecer similares y que hayan sido obtenidos en investigaciones previas. Y ello por una razón sencilla: El planteamiento teórico ha cambiado. Las primeras investigaciones de Berglaund-Gray (1938, 1939), Berglaund-Gray & Young (1940), y Young & McIsaac (1941) investigan el efecto de invertir la secuencia de operaciones. En estas investigaciones primero está la operación, y el problema se supone que es de sumar, restar multiplicar o dividir. En la situación actual las operaciones han perdido su papel como criterios clasificatorios *a priori* de los problemas aritméticos verbales y han sido relegadas a su verdadera función *a posteriori* que es el de herramientas con las que se pueden resolver los problemas verbales aritméticos. Esto tiene implicaciones para decidir si un problema es de uno u otro tipo. Pese a estos distanciamientos teóricos los resultados que hemos obtenido son coincidentes para los casos comunes a ambas investigaciones. Los autores anteriores concluyen que la substracción fue más difícil como primer proceso que la adición. Esto mismo hemos obtenido nosotros, pero además lo hemos obtenido en la totalidad de la muestra y en cada uno de los cursos. Lo anterior nos hace concluir que, en un problema de estructura aditiva compuesto de dos relaciones, la relación de disminución en el primer paso es más difícil que las relaciones de aumento en primer paso.

Recordamos que para obtener la variable relación hemos combinado dos relaciones simples de aumento o disminución que ocupan en el enunciado del problema la primera y la segunda posición, respectivamente. Según los resultados obtenidos la influencia de la relación de aumento o disminución en segunda posición, tiene un peso menor sobre la dificultad del problema que la que tiene en la primera posición. De hecho, no hemos obtenido unas diferencias significativas según la relación en la segunda posición. Lo que sí ocurre es que la relación de disminución en la segunda posición refuerza la dificultad que provoca la relación de disminución en la primera posición. Esto ocurre en la muestra total y en cada uno de los cursos por separado, con la única salvedad de que los índices de dificultad se mueven en un intervalo menor.

REFERENCIAS

BARNETT, J. (1980). The study of syntax variables. En G.A. Goldin y C.E. McClintock (Eds.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving*. Philadelphia, Pennsylvania: The Franklin Institute Press.

BELL, A.; GREER, B.; GRIMISON, L. y MANGAN, C. (1989). Children's performance on multiplicative word problems: Elements of a descriptive theory. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 434-449.

BERGLAUND-GRAY, G. (1938). *The effect of process sequence on the interpretation of two-step problems in arithmetic*. Unpublished doctoral dissertation. University of Pittsburg.

BERGLAUND-GRAY, G. (1939). Difficulty of the arithmetic process. *Elementary School Journal*, November, 40, 198-203.

BERGLAUND-GRAY, G. & YOUNG, R.V. (1940). The effect of process sequence on

the interpretation of two-step problems in arithmetic. *Journal of Educational Research*, September, 34(1), 21-29.
CARPENTER, T.P. y MOSER, J.M. (1982). The Development of Addition and Subtraction problem-solving skills. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, N. J.: LEA.
CARPENTER, T.P. y MOSER, J.M. (1983). The Acquisition of Addition and Subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Adquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Orlando, Florida: Academic Press.
CASTRO, E.; RICO, L. y GIL, F. (1992). Enfoques de Investigación en Problemas Verbales Aritméticos Aditivos. *Enseñanza de las Ciencias, 10* (3), 243-253.
CASTRO, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Granada: Comares.
DURELL, F. (1928). Solving problems in arithmetic. *School Science and Mathematics, 28*(9), 925-935.
FUSON, C. (1992). Research on Whole Number Addition and Subtraction. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan Publishing Comp.
GOLDIN, G. A. & McCLINTOCK, C.E. (Eds.) (1980). *Task Variables in Mathematical Problem Solving*. Philadelphia, Pensilvania: The Franklin Institute Press.
GUTIÉRREZ, J.; MORCILLO, N.; RICO, L.; CASTRO, E.; CASTRO, E.; FERNÁNDEZ, F.; GONZÁLEZ, E.; PÉREZ, A.; SEGOVIA, I.; TORTOSA, A. y VALENZUELA, J. (1993). Problemas aditivos de dos etapas con igual operación y estructura semántica duplicada. Estudio preliminar en 5° de Primaria. *Actas VI JAEM*, Badajoz.
HELLER, J.I. y GREENO, J.G. (1979). Information Processing analysis of mathematical problem solving. En R. Lesh, D. Mierkiewicz y M. Kantowski (Eds.), *Applied Mathematical Problem Solving*. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.
JERMAN, M. y REES, R. (1972). Predicting the relative difficulty of verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics, 4*, 306-323.
MORCILLO, N.; CASTRO, E.; RICO, L.; CASTRO, E.; FERNÁNDEZ, F.; GONZÁLEZ, E.; GUTIÉRREZ, J.; PÉREZ, A.; SEGOVIA, I.; SERRANO, M.; TORTOSA, A. y VALENZUELA, J. (1993). Dificultad debida al orden de operaciones en Problemas Aditivos de Dos Etapas con estructura semántica duplicada. Estudio preliminar en 5° de Primaria. *Actas VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática «Thales»*. Sevilla.
NESHER, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
NESHER, P. (1991). Two-Steps Problems, Research Finding. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings Fifteenth PME Conference*, Vol. III, pp. 65-71. Assissi, Italia.
NESHER, P. y HERSHKOVITZ, S. (1994). The role of schemes in two-step problems: analysis and research findings. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 1-23.
PUIG, L. y CERDÁN, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Editorial Síntesis.
RICO, L. y OTROS (1985). *Investigación «Granada-Mats»*. Granada: Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.

RICO, L. y OTROS (1988). *Didáctica activa para la resolución de problemas.* Granada: Departamento Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

RICO, L. y OTROS (en prensa). Categorías de problemas aditivos de dos etapas. *Educación Matemática.*

SHALLIN, V.L. y BEE, N.V. (1985). *Structural differences between two-step word problems,* presentado en el Meeting de la American Educational Research Association.

SHERARD, W.H. (1974). *The effect of arithmetical operations on the difficulty levels of verbal problems* (Doctoral dissertation, George Peabody College for Teachers, 1974). Dissertation Abstracts International, 1974, 35, 2895B. (University Microfilm No. 74-29, 189).

SUPPES, P.; LOFTUS, E. y JERMAN, M. (1969). Problem-Solving on a computer-based teletype. *Educational Studies in Mathematics, 2,* 1-15.

YOUNG, R. & MCISAAC, J. (1941). The sequence of processes affects the pupil's interpretation of verbal problems in arithmetic. *Education, 61,* 488-491.