La Conjetura de Zassenhaus

M. Serrano Sánchez[1], Á. del Río Mateos[2]

[1] Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia, mariano.serrano@um.es
[2] Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia, adelrio@um.es

Sea G un grupo finito y sea $\mathbb{Z}G$ el anillo de grupo entero de G. Denotamos por $V(\mathbb{Z}G)$ al grupo de unidades normalizadas (es decir, unidades con aumento 1) en $\mathbb{Z}G$. Hans Zassenhaus propuso una lista de conjeturas sobre subgrupos finitos de $V(\mathbb{Z}G)$. En este trabajo nosotros tratamos la única de esas conjeturas que está todavía abierta. Dicha conjetura afirma que toda unidad de torsión de $V(\mathbb{Z}G)$ es conjugada racional (es decir, conjugada en las unidades de $\mathbb{Q}G$) de un elemento de G. Nos referiremos a esta conjetura como la Conjetura de Zassenhaus.

La Conjetura de Zassenhaus ha sido verificada para grupos nilpotentes [10], para grupos cíclico-por-abelianos [2] y para algunos grupos particulares como por ejemplo, para el grupo alternado A_6. Para el caso de los grupos proyectivos especiales lineales $PSL(2,q)$ con $q = p^f$ y p un número primo, la Conjetura de Zassenhaus ha sido demostrada para $q \leq 25$ [1, 3, 4, 5, 7].

Una de las mejores maneras de tratar la Conjetura de Zassenhaus es utilizando el método introducido por Luthar y Passi en [6], el cual fue mejorado posteriormente por Hertweck en [4]. Este método es conocido como el Método HeLP. El objetivo de nuestro trabajo consiste en analizar la información que el Método HeLP nos puede proporcionar sobre la Conjetura de Zassenhaus para los grupos $PSL(2,q)$.

Analizando las demostraciones de los resultados que hemos mencionado anteriormente, se puede observar que el Método HeLP se aplica de forma automática para unidades con orden r^e, con r un número primo, siempre que $r \neq p$, o $f \leq 2$ o $p = 2$ [4, 8, 9] (esto cubre los casos $q \leq 9$ y $q = 17$). En este trabajo nosotros analizamos el alcance que tiene el Método HeLP a la hora de abordar la demostración de la Conjetura de Zassenhaus para unidades con orden el producto de dos primos distintos en los grupos $PSL(2,q)$.

La idea en la cual se basa el Método HeLP es la siguiente: Dado un elemento $u \in V(\mathbb{Z}G)$ de orden n, llamamos distribución de aumentos parciales de u a los aumentos parciales de los elementos u^d, con d recorriendo todos los divisores de n. Por un teorema de Marciniak, Ritter, Sehgal y Weiss, u es conjugada racional de un elemento de G si y solo si los aumentos parciales de u^d son todos números enteros no negativos para todo divisor d de n.

Sea ρ una representación ordinaria de G. Luthar y Passi introdujeron en [6] una fórmula para las multiplicidades de los autovalores de $\rho(u)$ en función de la distribución de aumentos parciales de u. Esta fórmula fue extendida por Hertweck para caracteres de Brauer [4]. De esta manera se producen restricciones sobre las distribuciones de aumentos parciales de unidades de torsión en $V(\mathbb{Z}G)$. Por lo tanto, el Método HeLP consiste en demostrar que la distribución de aumentos parciales de cada elemento de torsión de $V(\mathbb{Z}G)$, que satisfacen ciertas restricciones, son de la forma mencionada anteriormente.

Es importante destacar que una lista de enteros puede satisfacer todas las restricciones el Método HeLP sin ser realmente una distribución de aumentos parciales de una unidad. A esta lista la llamaremos distribución de aumentos parciales virtuales.

Recientemente, Bächle y Margolis han desarrollado un paquete para GAP en el cual se encuentra implementado el Método HeLP. Experimentando con este paquete para los grupos $PSL(2,q)$, con q un primo impar, se puede observar una regularidad en la distribución de aumentos parciales virtuales de orden $2t$ con t un primo impar. En este trabajo hemos demostrado que, de hecho, esas regularidades que se observan experimentalmente siempre ocurren.

Vamos a precisar a continuación el concepto de distribución de aumentos parciales virtuales. Para ello consideramos n un entero positivo y utilizaremos la notación x^G para referirnos a la clase de conjugación de $x \in G$. Una distribución de aumentos parciales virtuales de orden n para G es una lista $v = (v_d)_{d|n}$ indexada por los divisores de n, dónde cada v_d es una función clase de G tomando valores enteros, y verificando las siguientes condiciones:

1. (V1) $\sum_{x^G} v_d(x) = 1$;
2. (V2) Si d no divide a n entonces $v_d(1) = 0$;
3. (V3) Si el orden de x no divide a $\frac{n}{d}$ entonces $v_d(x) = 0$;
4. (V4) Si χ es o bien un carácter ordinario o una carácter de Brauer módulo un primo p que no divide a n entonces para todo entero l se verifica que lo siguiente es un entero no negativo:
$$\frac{1}{n}\sum_{x^G}\sum_{d|n} v_d(x) Tr_{\mathbb{Q}(\zeta_n^d)/\mathbb{Q}}(\chi(x)\zeta_n^{-ld}).$$

Introducimos los siguientes conjuntos:

$$TPA_n(G) = \{Distribuciones\ de\ aumentos\ parciales\ de\ elmentos\ de\ G\ de\ orden\ n\};$$

$$PA_n(G) = \{Distribuciones\ de\ aumentos\ parciales\ de\ elmentos\ de\ V(\mathbb{Z}G)\ de\ orden\ n\};$$

$$VPA_n(G) = \{Distribuciones\ de\ aumentos\ parciales\ virtuales\ de\ orden\ n\ para\ G\}.$$

Claramente $TPA_n(G) \subseteq PA_n(G) \subseteq VPA_n(G)$. Además, se tiene que la Conjetura de Zassenhaus se verifica para elementos de orden n en $V(\mathbb{Z}G)$ si y solo si $TPA_n(G) = PA_n(G)$. De hecho, calcular $PA_n(G)$ es mucho más difícil que calcular $VPA_n(G)$. También es importante destacar que el Método HeLP consiste en calcular $VPA_n(G)$. Si demostramos que $VPA_n(G) = TPA_n(G)$ entonces la Conjetura de Zassenhaus se verificaría para elementos de orden n de $V(\mathbb{Z}G)$.

El resultado principal de nuestro trabajo es el siguiente teorema:

Teorema: Sea $G = PSL(2, p^f)$ para un primo impar p y $f \geq 1$. Sea t un primo impar.

1. Supongamos que se cumple una de las siguientes condiciones:
    a. $p \equiv \pm 1 \; mod \; 4t$ y $t \geq 5$.
    b. $p^f \equiv \pm 1 \; mod \; 4t$, $t \in \{5,7\}$ y o bien $p \equiv \pm 3 \; mod \; 4t$ o bien $3p \equiv \pm 1 \; mod \; 4t$.

   Entonces $VPA_{2t}(G)$ está formado por $TPA_{2t}(G)$ y las 4-uplas $v = (v_1, v_2, v_t, v_{2t})$ con
   $$v_d(g) = \begin{cases} 1, & si \; (d, g^G) \in \{(2t, 1^G), (t, (g_0^t)^G), (2, (g_0^4)^G), (1, g_0^G), (1, (g_0^{t-1})^G)\}; \\ -1, & si \; (d, g^G) = (1, (g_0^2)^G); \\ 0, & en \; otro \; caso; \end{cases}$$
   para algún $g_0 \in G$ con orden $2t$.
2. En otro caso, es decir si ni la condición (a) ni la condición (b) se verifican, entonces $VPA_{2t}(G) = TPA_{2t}(G)$.

La conclusión del teorema es que para verificar la Conjetura de Zassenhaus para elementos de orden $2t$ en $V(\mathbb{Z}PSL(2, q))$ se necesita demostrar que $V(\mathbb{Z}PSL(2, q))$ no tiene elementos con una distribución de aumentos parciales como la que se expresa en el teorema. Es importante destacar que si dicha distribución de aumentos parciales virtuales existe entonces $t \geq 5$. Utilizando esto se puede demostrar la Conjetura de Zassenhaus para $q \leq 17$. Los casos $q = 23$ y $q = 25$ han sido verificados utilizando el Método HeLP [1] y [7] respectivamente.

Como consecuencia del teorema, el Método HeLP falla a la hora de demostrar la Conjetura de Zassenhaus para unidades con orden 10 en $V(\mathbb{Z}PSL(2,19))$. Sin embargo, Bächle y Margolis han introducido una técnica conocida como el Método del Retículo [1] que es capaz de tratar este caso. Desafortunadamente, este método no puede aplicarse en los siguientes casos ($q = 27$ y $q = 29$, y unidades con orden 14).

Referencias

[1] Bächle, A., & Margolis, L. (2014). Rational conjugacy of torsion units in integral group rings of non-solvable groups. Retrieved from: http://arxiv.org/abs/1305.7419.

[2] Caicedo, M., Margolis, L., & del Río, A. (2013). Zassenhaus conjecture for cyclic-by-abelian groups. J. Lond. Math. Soc. (2), 88(1):65-78.

[3] Gildea, J. (2013). Zassenhaus conjecture for integral group ring of simple linear groups. J. Algebra Appl. 12.

[4] Hertweck, M. (2007). Partial augmentations and Brauer character values of torsion units in group rings. Retrieved from: http://arXiv:math/0612429v2.

[5] Kimmerle, W., & Konovalov, A. (2013). Recent advances on Torsion Subgroups of Integral Group Rings. Pro. Groups St Andrews. 422:331-347.

[6] Luthar, I.S., & Passi, I.B.S. (1989). Zassenhaus conjecture for A_5. Pro. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 99:1-5

[7] Margolis, L. (2015). Torsionseinheiten in ganzzahligen Gruppenringen nicht auflöbarer Gruppen. Doktorarbeit Universität Stuttgart.

[8] Margolis, L. (2016). A Sylow theorem for the integral group ring of PSL(2,q). J. Algebra. 445:295-306.

[9] Wagner, R. (1995). Zassenhausvermutung uber die Gruppen PSL(2,p). Diplomarbeit Universität Stuttgart. Journal of Algebra and its Applications.

[10] Weiss, A. (1991). Torsion units in integral group rings. J. Reine Angew. Math., 415:175-187.