

CARACTERIZACIÓN ADIMENSIONAL DEL PROBLEMA DE CONVECCIÓN MIXTA DE YUSA EN MEDIOS POROSOS ANISÓTROPAS

CÁNOVAS, Manuel¹, ALHAMA, Iván² y GARCÍA-ROS, Gonzalo²

1: Dpto. de Met. y Minas. Facultad de Ing. y C. Geológicas. Universidad Católica del Norte, Antofagasta

2: Dpto. de Ing. Civil. Escuela de Ing. de Caminos y Minas. UPCT, Cartagena

manuel.canovas@ucn.cl, ivan.alhama@upct.es, Gonzalo.garcia@upct.es

RESUMEN

Mediante la adimensionalización discriminada de las ecuaciones de gobierno se investigan los grupos adimensionales que rigen los patrones de solución del problema de Yusa, un escenario de flujo y transporte de calor en medios porosos anisótropos, verificando los resultados mediante simulaciones numéricas.

Palabras clave: adimensionalización discriminada, problema de Yusa, medios porosos anisótropos.

1. Introducción

Los primeros trabajos sobre convección en medios porosos tenían como objetivo el estudio de los fenómenos de convección natural y convección forzada. Los mecanismos de interacción entre estos dos modos de convección comenzaron a despertar el interés de investigadores a partir de los trabajos pioneros de Wooding [1960] y Cheng [1977], este último relacionado con la energía geotérmica. Desde entonces se han publicado numerosos trabajos (Cánovas, [2014]). El de Yusa [1983], uno de los más representativos sobre convección mixta en medios porosos isótropos, estudia un escenario idealizado, 2-D, de flujo geotérmico mixto. La intención de Yusa era realizar estimaciones sobre la importancia relativa de los flujos potenciales (causados por el gradiente hidráulico) y los flujos convectivos en acuíferos con fuentes de calor geotérmicas, en base a caracterizar el problema mediante números adimensionales adecuados. En ausencia de gradiente hidráulico (problema de (Bénard) ya se había admitido que los patrones, en escenarios isótropos, dependían del número de Rayleigh.

Mediante la adimensionalización discriminada de las ecuaciones de gobierno, en las dos formulaciones conocidas, se deducen los (nuevos) grupos adimensionales que caracterizan estos escenarios verificando estas soluciones mediante simulaciones numéricas. Se discute en detalle el papel que juegan algunos parámetros del problema revisando críticamente las soluciones que existen para el caso isótropo.

2. Modelo físico y matemático

El problema de Yusa más general considera la sección transversal idealizada (2-D) de un acuífero (medio poroso) saturado. En relación con el transporte de calor, el acuífero contiene un foco caliente isoterma en parte de la frontera inferior y es adiabático en el resto de esa frontera incluyendo las laterales; la frontera superior es isoterma con temperatura inferior a la del foco caliente. En relación al flujo de agua, la frontera inferior y las fronteras laterales (divisorias) son impermeables, mientras que en la frontera superior tiene lugar la recarga y descarga merced a una condición de tipo Neumann homogénea, Figura 1.

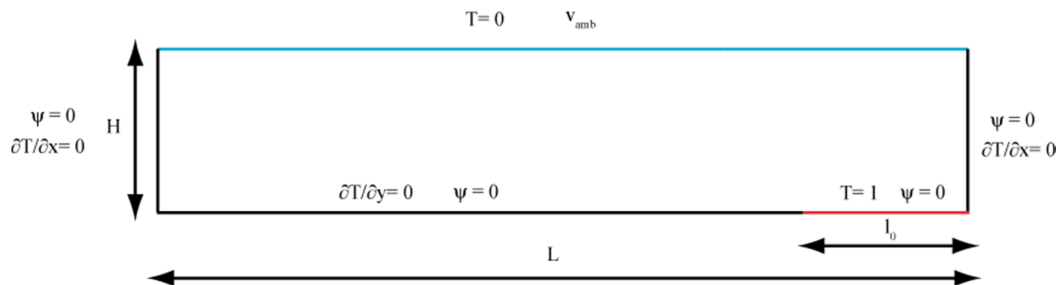


Figura 1. Esquema físico del problema de Yusa

Para las ecuaciones de gobierno seguiremos la terminología usada por Bear y Bachmat [1990]. En estado estacionario, las ecuaciones de gobierno y condiciones de contorno del fluido, en términos de la función de corriente (asumiendo la hipótesis de incompresibilidad del fluido y la aproximación de Oberbeck-Boussinesq, y habiendo eliminado la presión de la ecuación del momento), son:

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) + \frac{K_y}{K_x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = -\frac{K_y g \rho_0 \beta \Delta T}{\mu \Delta x} \quad (1a)$$

$$\gamma \left(u \frac{\Delta T}{\Delta x} + v \frac{\Delta T}{\Delta y}\right) = \alpha_x \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) + \alpha_y \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \quad (1b)$$

$$\Psi_{(x,y=0)} = \Psi_{(x=0,y)} = \Psi_{(x=L,y)} = 0 \quad (1c)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_{amb} \quad (1d)$$

En relación con la temperatura, se imponen las siguientes condiciones:

$$T_{(0 < x < l_0, y=0)} = T_c \quad (2a)$$

$$T_{(x, y=H)} = T_f \quad (2b)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0, y} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L, y} = 0 \quad (2c)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{l_0 < x < L} = 0 \quad (2d)$$

Yusa [1983] y Holzbecher y Yusa [1995] estudian 4 escenarios dentro de este problema dependiendo del gradiente hidráulico en la frontera superior: 0% ($\equiv v_{amb}=0$, Yusa 0); 1% ($\equiv v_{amb}=4.9 \cdot 10^{-9}$ m/s, Yusa 1); 3% ($\equiv v_{amb}=14.6 \cdot 10^{-9}$ m/s, Yusa 2) y 5% ($\equiv v_{amb}=29.9 \cdot 10^{-9}$ m/s, Yusa 3).

3. Grupos adimensionales

Las posibles longitudes y velocidades de referencia para definir la forma adimensional de estas variables son: i) l_0 y L para la dirección espacial x ; ii) H para la dirección espacial y ; iii) $u_1^* = \frac{q_x^*}{\varepsilon} = v_{amb} = -\left(\frac{K_x}{\mu}\right)(\Delta p_x)$, para la velocidad en sentido x , y iv) $v = \frac{q_y^*}{\varepsilon} = -\left(\frac{K_y}{\mu}\right)(\Delta p)g = -\left(\frac{K_y}{\mu}\right)\left(\frac{K_y}{\mu}\right)\rho_0 g \beta (\Delta T)$ para la velocidad en sentido y . La existencia de dos referencias para adimensionalizar la variable x fuerza a la definición del primer grupo adimensional del problema

$$\pi_{dd,1} = \frac{l_0}{L} \quad (3a)$$

Con la anteriores referencias se definen las variables adimensionales en la forma: $x' = \frac{x}{L}$, $y' = \frac{y}{H}$, $u' = \frac{u}{v_{amb}}$, $v' = \frac{v}{v^*} = \frac{v\mu}{[\rho_0 g \beta (\Delta T) K]}$ y $T' = \frac{T}{\Delta T} = \frac{T}{T_c - T_f}$. A partir de ellas, la ecuación de continuidad en forma adimensional

$$\frac{u^*}{L} \left(\frac{\partial v'_x}{\partial x'}\right) = -\frac{v^*}{H} \left(\frac{\partial v'_y}{\partial y'}\right) = \left(\frac{K_y \rho_0 g \beta (\Delta T) L}{\mu H}\right) \left(\frac{\partial v'_y}{\partial y'}\right)$$

proporciona una nueva velocidad de referencia en sentido horizontal, a saber, $u_2^* = \left(\frac{K_y \rho_0 g \beta (\Delta T) L}{\mu H}\right)$, que fuerza la introducción de un nuevo grupo adimensional discriminado (el cociente entre las dos velocidades de referencia horizontal)

$$\pi_{dd,2} = \frac{u_1^*}{u_2^*} = \left(\frac{K_x \rho_0 g \beta (\Delta T)}{\mu v_{amb}}\right) \left(\frac{L}{H}\right) \quad (3b)$$

Fuera de la región de mezcla las velocidades del fluido se rigen por la ecuación de Darcy: $u = \left(\frac{K_x}{\mu}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$, $v = \left(\frac{K_y}{\mu}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)$. La continuidad, en esta región, tomando una referencia común para los cambios de presión (Δp_0), conduce a la ecuación adimensional $\left(\frac{K_x (\Delta p_0)}{\mu L^2}\right)\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right) = \left(\frac{K_y (\Delta p_0)}{\mu H^2}\right)\left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)$, de la que deriva un tercer grupo adimensional

$$\pi_{dd,3} = \left(\frac{K_x}{K_y}\right) \left(\frac{H}{L}\right)^2 \quad (3c)$$

Por último, la ecuación estacionaria de la energía en forma dimensional, tomando como referencia para la velocidad horizontal el valor v_{amb} , conduce a

$$\gamma (T_c - T_b) \left[\left(\frac{v_{amb}}{L}\right) u' \frac{\Delta T'}{\Delta x'} + \left(\frac{v^*}{H}\right) v' \frac{\Delta T'}{\Delta y'} \right] = \left(\frac{\alpha_x}{L^2}\right) \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2}\right) + \left(\frac{\alpha_y}{H^2}\right) \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2}\right)$$

Los (4) coeficientes dimensionales de esta ecuación, $\frac{\gamma v_{amb}}{L}$, $\frac{\gamma v^*}{H} = \frac{\gamma (\Delta p) g K_y}{\mu H}$, $\frac{\alpha_x}{L^2}$ y $\frac{\alpha_y}{H^2}$, dan lugar a dos nuevos grupos adimensionales (un tercero coincide con $\pi_{dd,1}$) que, convenientemente organizados, pueden escribirse en la forma

$$\pi_{dd,4} = \left(\frac{\alpha_x}{\gamma v_{amb} L} \right) \quad (3d)$$

$$\pi_{dd,5} = \left(\frac{\alpha_x H^2}{\alpha_y L^2} \right) = \left(\frac{k_{m,x} H^2}{k_{m,y} L^2} \right) \quad (3e)$$

La Tabla 1 recoge la interpretación física de estos parámetros. El segundo ($\pi_{dd,2}$) representa el cociente entre el tiempo requerido por el fluido para cubrir la distancia L animado de la velocidad v_{amb} y el tiempo requerido por el fluido para recorrer H con una velocidad v^* . Este grupo, expresado alternativamente como $\pi_{dd,2}/\pi_{dd,4}$,

$$Ra_{dd} = \frac{\pi_{dd,2}}{\pi_{dd,4}} = \left(\frac{\gamma K_y \rho_0 g \beta (\Delta T) L^2}{\mu \alpha_x H} \right) \quad (4a)$$

es una especie de número discriminado de Rayleigh (claramente distinto al obtenido por otros autores por la presencia de las dos longitudes que definen el dominio, L y H, además del carácter anisótropo de las características físicas K_y y α_x). De la misma forma $\pi_{dd,4}$ es una especie de número de Peclet, que reescrito en la forma

$$Pe_{dd} = \pi_{dd,4} = \left(\frac{1}{\gamma} \right) \left(\frac{\alpha_x}{L} \right) \left(\frac{L}{v_{amb}} \right) \quad (4b)$$

representa el cociente entre el tiempo requerido por el fluido para recorrer la distancia L con velocidad v_{amb} y el tiempo requerido para que la concentración, a una distancia L, alcance una fracción sensible de su valor final por efecto de la difusión horizontal.

Reorganizando los monomios a conveniencia, una vez más, para que v_{amb} aparezca sólo en uno de ellos, podemos definir como grupos adimensionales discriminados independientes los siguientes (se escriben, finalmente, con subíndice romano):

$$\pi_{dd,I} = \frac{l_0}{L} \quad (5a)$$

$$\pi_{dd,II} = \left(\frac{\gamma K_y \rho_0 g \beta (\Delta T) L^2}{\mu \alpha_x H} \right) = Ra_{dd} \quad (5b)$$

$$\pi_{dd,III} = \left(\frac{K_x}{K_y} \right) \left(\frac{H}{L} \right)^2 \quad (5c)$$

$$\pi_{dd,IV} = \left(\frac{\alpha_x}{\gamma v_{amb} L} \right) = \frac{1}{Pe_{dd}} \quad (5d)$$

$$\pi_{dd,V} = \left(\frac{k_{m,x} H^2}{k_{m,y} L^2} \right) \quad (5e)$$

Grupos discriminados	Definición
$\pi_{dd,I} = \frac{l_0}{L}$	Relación de aspecto entre longitudes en la dirección x
$\pi_{dd,2} = \frac{K_y \rho_0 g \beta (\Delta T) L^2}{\mu v_{amb} H}$	Relación entre velocidades corregida
$\pi_{dd,3} = \left(\frac{K_x}{K_y} \right) \left(\frac{H}{L} \right)^2$	Relación entre permeabilidades corregida
$\pi_{dd,4} = \left(\frac{\alpha_x}{\gamma v_{amb} L} \right)$	Relación difusión/convección, ambas en dirección horizontal
$\pi_{dd,5} = \left(\frac{\alpha_x H^2}{\alpha_y L^2} \right)$	Relación entre difusividades corregida

Tabla 1. Significado físico de los grupos adimensionales discriminados

La presencia del parámetro γ en este resultado, aunque obvia, resulta aparentemente controvertida. Holzbecher [1998] deduce un Ra que contiene efectivamente este parámetro pero, más tarde, en su trabajo con Yusa (Holzbecher y Yusa [1995]), lo introduce en el término asociado al transitorio pero no en el propio Ra. Por otro lado, en su trabajo original, Yusa [1983] tampoco hace mención a este parámetro. La controversia aumenta por la existencia de dos formulaciones del problema, la de Bear y Bachmat [1990]) común a la de Holzbecher (la que hemos seguido para formular las ecuaciones de gobierno) y la de Bejan [1984].

Para los primeros autores (y para nosotros) las propiedades termofísicas se definen en la forma

$$\alpha_x = \left(\frac{k_{m,x}}{(\rho c_e)_m} \right) \quad \alpha_y = \left(\frac{k_{m,y}}{(\rho c_e)_m} \right),$$

$$k_m = \phi k_f + (1 - \phi) k_s \quad (\rho c_e)_m = \phi (\rho c_e)_f + (1 - \phi) (\rho c_e)_s$$

$$\gamma = \left(\frac{(\rho c_e)_f}{(\rho c_e)_m} \right) = \left(\frac{(\rho c_e)_f}{\phi (\rho c_e)_f + (1 - \phi) (\rho c_e)_s} \right)$$

donde los subíndices m, f y s se refieren, respectivamente, al medio poroso (fluido más matriz), fluido y matriz porosa. Merced a estas definiciones, los cocientes α_x/γ y α_y/γ , de valor

$$\frac{\alpha_x}{\gamma} = \left(\frac{k_{m,x}}{(\rho c_e)_f} \right), \quad \frac{\alpha_y}{\gamma} = \left(\frac{k_{m,y}}{(\rho c_e)_f} \right)$$

permiten escribir los grupos adimensionales resultantes $\pi_{dd,II}$ y $\pi_{dd,IV}$ en la forma

$$\pi_{dd,II} = \left(\frac{(\rho c_e)_f K_y \rho_0 g \beta (\Delta T) L^2}{\mu k_{m,x} H} \right) \quad \pi_{dd,IV} = \left(\frac{k_{m,x}}{(\rho c_e)_f v_{amb} L} \right)$$

Dado que, para Bejan, las difusividades se definen de la forma

$$\alpha_{x,Bejan} = \left(\frac{k_{m,x}}{(\rho c_e)_f} \right), \quad \alpha_{y,Bejan} = \left(\frac{k_{m,y}}{(\rho c_e)_f} \right)$$

es inmediato comprobar que los grupos deducidos (5a-5e) son los mismos para ambas formulaciones.

¿Cómo estudiar, con todo, la influencia del valor de γ en los patrones estacionarios del problema? Para responder a esta pregunta hay que tener en cuenta que el cambio de valor de este parámetro, que interviene en el grupo adimensional $\pi_{dd,4}$, puede deberse a diferentes causas. Veamos:

i) Si se modifica γ conservando el valor de $(\rho c_e)_f$ – lo que implica un cambio de $(\rho c_e)_m$ asociado a un cambio de $(\rho c_e)_s$ –, a la vista de las expresiones de γ y las difusividades de Holzbecher (α_x y α_y), éstas cambian en la misma proporción que lo hace γ ; así, ningún monomio ($\pi_{dd,1}$ a $\pi_{dd,5}$) cambia de valor y los patrones de la solución deberán ser iguales,

ii-a) Si se modifica γ conservando el valor de $(\rho c_e)_m$ – lo que implica un cambio de $(\rho c_e)_f$ y una corrección adecuada en $(\rho c_e)_s$ –, y se mantienen los valores de $k_{m,x}$ y $k_{m,y}$, los grupos adimensionales permanecen iguales excepto $\pi_{dd,4}$. En consecuencia, los patrones deberán cambiar,

ii-b) Si se modifica γ conservando el valor de $(\rho c_e)_m$ – lo que implica de nuevo un cambio de $(\rho c_e)_f$ y una corrección adecuada en $(\rho c_e)_s$ –, y se corrigen los valores de $k_{m,x}$ y $k_{m,y}$ en la misma proporción en que lo hace $(\rho c_e)_f$, todos los grupos adimensionales permanecen iguales, produciendo en consecuencia un mismo patrón de solución.

Como síntesis de los resultados anteriores, la Tabla 2 resume los monomios que rigen el problema estacionario de Yusa, organizados en distintos agrupamientos intercambiables. En el Conjunto 1, γ aparece sólo en uno de los monomios; en los Conjuntos 2 y 3, v_{amb} aparece sólo en uno de los monomios.

	Conjunto 1	Conjunto 2	Conjunto 3
$\pi_{dd,1}$	$\frac{l_0}{L}$	$\frac{l_0}{L}$	$\frac{l_0}{L}$
$\pi_{dd,2}$	$\left(\frac{K_y \rho_0 g \beta (\Delta T)}{\mu v_{amb}}\right) \left(\frac{L}{H}\right)$	$Ra_{dd} = \left(\frac{\gamma K_y \rho_0 g \beta (\Delta T) L^2}{\mu \alpha_x H}\right)$	$Ra_{dd} = \left(\frac{\gamma K_y \rho_0 g \beta (\Delta T) L^2}{\mu \alpha_x H}\right)$
$\pi_{dd,3}$	$\left(\frac{K_x}{K_y}\right) \left(\frac{H}{L}\right)^2$	$\left(\frac{K_x}{K_y}\right) \left(\frac{H}{L}\right)^2$	$\left(\frac{K_x}{K_y}\right) \left(\frac{H}{L}\right)^2$
$\pi_{dd,4}$	$Pe_{dd}^{-1} = \left(\frac{\alpha_x}{\gamma v_{amb} L}\right)$	$Pe_{dd}^{-1} = \left(\frac{\alpha_x}{\gamma v_{amb} L}\right)$	$Pe_{dd}^{-1} = \left(\frac{\alpha_x}{\gamma v_{amb} L}\right)$
$\pi_{dd,5}$	$\left(\frac{\alpha_x H^2}{\alpha_y L^2}\right)$	$\left(\frac{\alpha_x H^2}{\alpha_y L^2}\right)$	$\left(\frac{k_{m,x} H^2}{k_{m,y} L^2}\right)$

Tabla 2. Monomios adimensionales discriminados del problema de Yusa anisótropo.

Diferentes conjuntos de soluciones procedentes de la formulación de Holzbecher [1998]

Aludimos, finalmente a la porosidad. Este parámetro adimensional, que caracteriza físicamente el medio poroso, podría haberse planteado desde el principio como un grupo adimensional independiente. No lo hemos hecho así en tanto que su influencia en la solución (siguiendo a otros autores) se ha fijado en términos de las propiedades de conductividad térmica y calor específico medios (en cuyas definiciones interviene) y en términos de la conductividad hidráulica (que también depende esencialmente de este parámetro). La derivación de los grupos adimensionales a partir de las ecuaciones de gobierno no permite introducir (como lo hace la adimensionalización clásica) grupos que no sean estrictamente los obtenidos mediante este proceso (tales como factores de forma o relaciones de aspecto altura/anchura, que son grupos dimensionales bajo el punto de vista de la discriminación), o parámetros propiamente adimensionales (como la porosidad). Los únicos grupos no derivados del proceso de adimensionalización que deben incluirse en la solución del problema son aquellos que puedan formarse entre magnitudes características que tengan la misma dimensión bajo la óptica de la discriminación (por ejemplo, en el problema de Yusa, el cociente entre la anchura del dominio y la longitud del foco térmico).

En medios isótropos es inmediato demostrar que los grupos se reducen a los mostrados en la Tabla 3. El Conjunto 1 contiene γ en uno de los monomios mientras que el 2 contiene v_{amb} también en un solo monomio. El Conjunto 3, menos relevante, contiene la misma referencia H en los grupos Ra y Pe , como se recoge en la literatura clásica; la única diferencia con ésta es que se elimina γ en Pe , lo que no parece correcto si se usa la formulación de Holzbecher.

	Conjunto 1	Conjunto 2	Conjunto 3
$\pi_{dd,1}$	$\frac{l_0}{L}$	$\frac{l_0}{L}$	$\frac{l_0}{L}$
$\pi_{dd,2}$	$\left(\frac{K \rho_0 g \beta (\Delta T)}{\mu v_{amb}}\right)$	$Ra_{dd} = \left(\frac{\gamma K \rho_0 g \beta (\Delta T) H}{\mu \alpha}\right)$	$Ra_{dd} = \left(\frac{\gamma K \rho_0 g \beta (\Delta T) H}{\mu \alpha}\right)$
$\pi_{dd,3}$	$\frac{H}{L}$	$\frac{H}{L}$	$\frac{H}{L}$

$$\pi_{dd,4} \quad \text{Pe}_{dd}^{-1} = \left(\frac{\alpha}{\gamma v_{amb} L} \right) \quad \text{Pe}_{dd}^{-1} = \left(\frac{\alpha}{\gamma v_{amb} L} \right) \quad \text{Pe}_{dd}^{-1} = \left(\frac{\alpha}{\gamma v_{amb} H} \right)$$

Tabla 3. Monomios adimensionales discriminados del problema de Yusa isotrópico. Diferentes conjuntos de soluciones procedentes de la formulación de Holzbecher [1998]

¿Qué monomios proporciona la adimensionalización clásica o el análisis dimensional a este problema? En relación con la adimensionalización clásica, hasta donde hemos investigado, ningún autor presenta una deducción de los grupos adimensionales siguiendo un proceso formal. Para Holzbecher [1998], por ejemplo (aparte de los monomios l_0/L y H/L) son el número de Rayleigh y el de Peclet los que determinan la solución, éstos se definen en la forma

$$\text{Ra}_{\text{Holz}} = \left(\frac{\gamma K \rho_0 g \beta (\Delta T) H}{\mu \alpha} \right) \quad \text{Pe}_{\text{Holz}} = \left(\frac{v_{amb} L}{\alpha} \right)$$

En contraste con lo deducido anteriormente, la introducción de Pe no deriva de una deducción formal y no contiene γ ; en un trabajo anterior (Holzbecher y Yusa [1995]) proponen los siguientes números

$$\text{Ra}_{\text{Holz}} = \left(\frac{K \rho_0 g \beta (\Delta T) H}{\mu \alpha} \right) \quad \text{Pe}_{\text{Holz}} = \left(\frac{v_{amb} L}{\alpha} \right),$$

en los que no aparece γ en ninguno de ellos, ni se hace una alusión clara a que este parámetro sea en sí mismo un grupo adimensional (de ser así la solución estaría formada por un grupo adimensional más de los aquí propuestos).

4. Validación de los resultados

Nos ceñiremos al caso anisótropo. La Tabla 4 recoge las características físicas y geométricas del problema de Yusa original (medio isotrópico). La difusividad se define de acuerdo con la formulación de Bear y Bachmat [1990]. Se asume dependencia lineal de la densidad con la temperatura. Los cuatro casos del problema, asociados a la condición de contorno de la función de corriente en la parte superior del acuífero, se muestran en la Tabla 5.

Longitud del acuífero (L)	5000 m
Altura (H)	1000 m
Anchura del foco caliente (l_0)	1000 m
Máxima diferencia de densidad ($\Delta\rho$)	230 kg/m ³
Viscosidad dinámica (μ)	2 · 10 ⁻⁴ kg/m · s
Permeabilidad (K)	10 ⁻¹⁴ m ²
Difusividad térmica (α)	10 ⁻⁶ m ² /s
Cociente de calores específicos (γ)	2
Nº de Rayleigh	113
Temperatura del foco caliente (T_c)	250 °C
Temperatura del foco frío (T_f)	20 °C

Tabla 4. Características geométricas y físicas del problema de Yusa en medios isotrópicos

Se simulan el conjunto de casos expuesto en a Tabla 6. Como caso de referencia (Caso 1_{ani}) se adopta el asociado a los valores de los parámetros de la Tabla 4, con $K_x=K_y$ y $\alpha_x=\alpha_y$, y la velocidad ambiental correspondiente a los escenarios Yusa-1 y Yusa-3. Los patrones de solución para 1_{ani} a y b (para Yusa-1 y Yusa 3) se muestran en las Figuras 2 y 3. Para una verificación más completa se han cambiado dos longitudes de referencia del dominio, l_0 y L, y se mantiene constante la tercera, H (Casos 2_{ani} y 3_{ani}). Los restantes parámetros que cambian de valor son: μ , K_x , K_y , α_x , α_y , g y v_{amb} .

Las variaciones de difusividad pueden asociarse indistintamente a cambios en la conductividad térmica, o a cambios en los calores específicos bajo la condición de no cambiar el parámetro γ . El valor de los grupos adimensionales de la Tabla 6 es el mismo para los tres casos propuestos y los patrones también idénticos, Figuras 2, 3, 4 y 5.

Caso	Gradiente hidráulico	Velocidad (v_{amb})
Yusa-0	0 %	0 m/s
Yusa-1	1 %	$4.9 \cdot 10^{-9}$ m/s
Yusa-2	3 %	$14.6 \cdot 10^{-9}$ m/s
Yusa-3	5 %	$29.9 \cdot 10^{-9}$ m/s

Tabla 5. Condición de contorno en el borde superior para los 4 casos del problema de Yusa

Casos	μ	K_x	K_y	α_x	α_y	g	γ	v_{amb}	l_0	L
1 _{ani} a	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-14}$	$1 \cdot 10^{-14}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	9.81	2	$4.9 \cdot 10^{-9}$	1000	5000
1 _{ani} b	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-14}$	$1 \cdot 10^{-14}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	9.81	2	$29.9 \cdot 10^{-9}$	1000	5000
2 _{ani} a	$2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-14}$	$1 \cdot 10^{-14}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	19.62	2	$9.8 \cdot 10^{-9}$	2000	10000
2 _{ani} b	$2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-14}$	$1 \cdot 10^{-14}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	19.62	2	$5.98 \cdot 10^{-8}$	2000	10000
3 _{ani} a	$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-14}$	$0.5 \cdot 10^{-14}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$0.5 \cdot 10^{-6}$	9.81	2	$4.9 \cdot 10^{-9}$	2000	10000
3 _{ani} b	$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-14}$	$0.5 \cdot 10^{-14}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$0.5 \cdot 10^{-6}$	9.81	2	$29.9 \cdot 10^{-9}$	2000	10000

Tabla 6. Casos del problema anisótropo

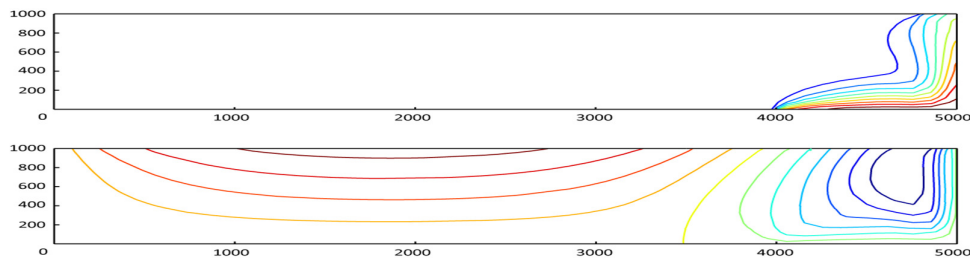


Figura 2. Problema de Yusa (Caso 1_{ani}a). Patrón de temperaturas (arriba): 0.1–1. Patrón de función de corriente (abajo): $(-6 \cdot 10^{-6})$ – $(-4 \cdot 10^{-6})$

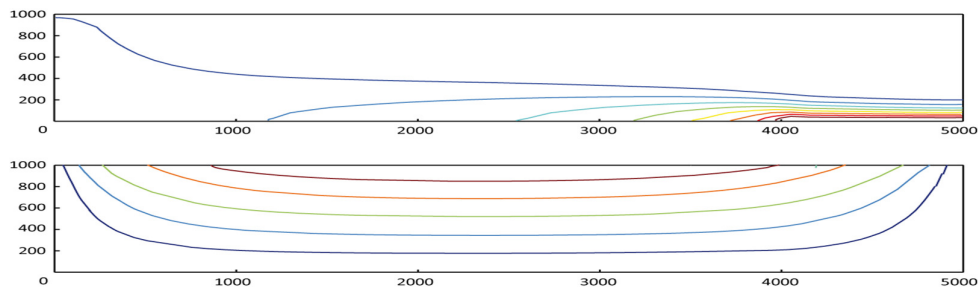


Figura 3 Problema de Yusa (Caso 1_{ani}b). Patrón de temperaturas (arriba): 0.1–1. Patrón de función de corriente (abajo): $(5 \cdot 10^{-6})$ – $(-2.5 \cdot 10^{-5})$

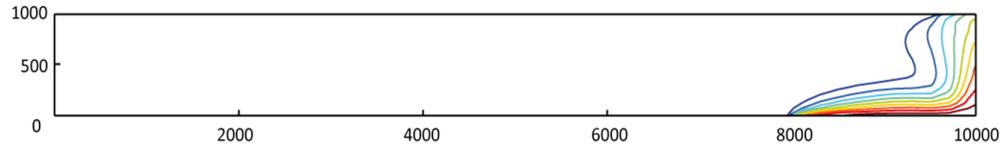
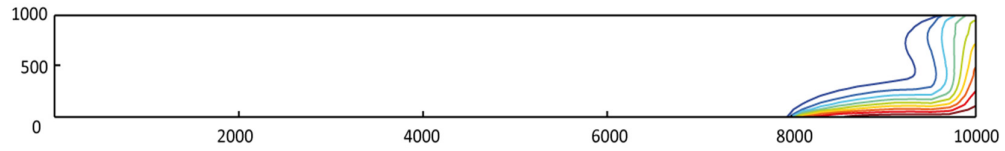


Figura 4a. Patrones de temperatura [0.1-1] de los casos $2_{ani\ a}$ (arriba) y $3_{ani\ a}$ (abajo).

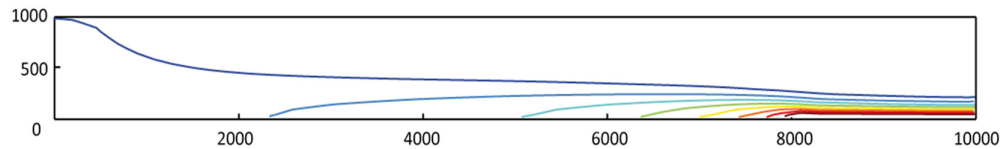
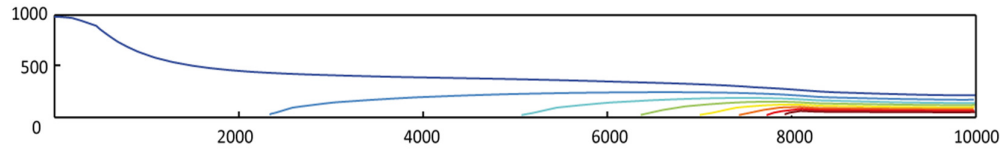


Figura 4b. Patrones de temperatura de los casos $2_{ani\ b}$ (arriba) y $3_{ani\ b}$ (abajo)

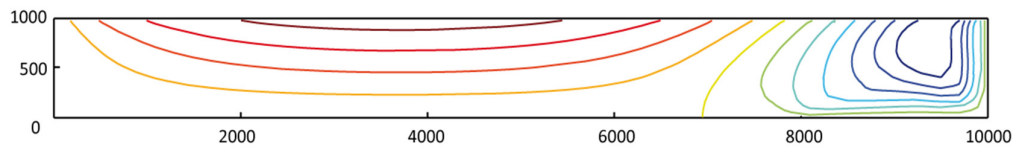
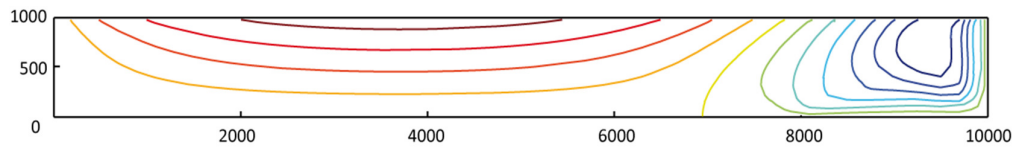


Figura 5a. Patrones de función de corriente de los casos $2_{ani\ a}$ (arriba) y $3_{ani\ a}$ (abajo). Rango de valores, $2_{ani\ a}$: $(-1.2 \cdot 10^{-5})-(8 \cdot 10^{-6})$, $3_{ani\ a}$: $(-6 \cdot 10^{-6})-(4 \cdot 10^{-6})$

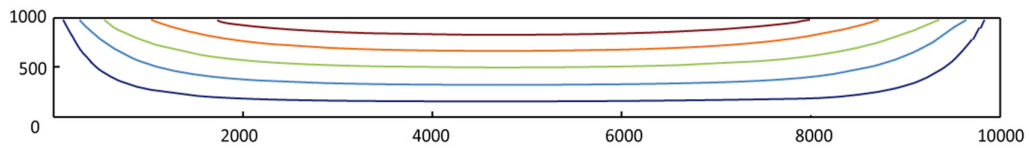
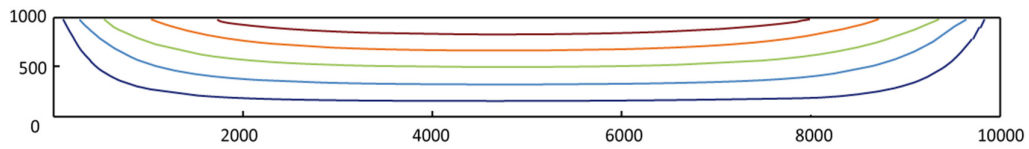


Figura 5b. Patrones de función de corriente de los casos $2_{ani\ b}$ (arriba) y $3_{ani\ b}$ (abajo). Rango de valores, $2_{ani\ b}$: $(1 \cdot 10^{-5})-(5 \cdot 10^{-5})$, $3_{ani\ b}$: $(5 \cdot 10^{-6})-(2.5 \cdot 10^{-5})$

5. Conclusiones

Se demuestra que la adimensionalización discriminada es la herramienta más precisa (en comparación con la adimensionalización clásica o con el análisis dimensional) para investigar los grupos adimensionales que rigen la solución de este problema de flujo y transporte de calor, particularmente en medios anisótropos para los que no se han propuesto soluciones precisas hasta la fecha. Las formulaciones alternativas usadas para la solución del problema conducen a grupos adimensionales diferentes que demuestran equivalentes al cambiar de una solución a otra.

Al partir de las ecuaciones de gobierno, algunos de los parámetros de problema, ya de por sí adimensionales, quedan ligados a otros formando grupos más complejos que reducen sensiblemente el número global de grupos independientes del problema haciendo que su solución sea más manejable y precisa. Las simulaciones numéricas demuestran la veracidad de los resultados propuestos.

6. Referencias

- [1] WOODING, R.A. (1960). Rayleigh instability of a thermal boundary layer in flow through a porous medium. *Journal of fluid mechanics*, 9(02), 183-192.
- [2] CHENG, P. (1977). Combined free and forced convection flow about inclined surfaces in porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 20(8), 807-814.
- [3] CÁNOVAS, M. (2014). Caracterización adimensional y simulación numérica de escenarios patrón (Bénard, Yusa y Elder) de procesos geotérmicos de flujo y transporte. Tesis Doctoral, UPCT.
- [4] YUSA, Y. (1983). Numerical experiment of groundwater motion under geothermal condition - vying between potential flow and thermal convective flow. *Journal of the Geothermal Research Society of Japan*, 5(1), 23-38 (in Japanese).
- [5] BEAR, J., BACHMAT, Y. (1990). *Introduction to modeling of transport phenomena in porous media*. Kluwer Academic, Dordrecht, Netherlands.
- [6] HOLZBECHER, E., YUSA, Y. (1995). Numerical experiments on free and forced convection in porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(11), 2109-2115.
- [7] BEJAN, A. (1984). *Convection heat transfer*. John Wiley & Sons, New York.
- [8] HOLZBECHER, E. (1998). *Modeling density-driven flow in porous media: principles, numeric, software*. Springer, Berlin.