anales de psicología
2008, vol. 24, nº 2 (diciembre), 189-200

ISSN edición impresa: 0212-9728. ISSN edición web (www.um.es/analesps): 1695-2294

TEMA MONOGRÁFICO: Psicología de las matemáticas

Las operaciones intraproposicionales y el número

José Manuel Serrano* y Rosa María Pons

Universidad de Murcia

Resumen: Esta investigación pretende confirmar la indisociabilidad cardinal-ordinal del número propuesta por Piaget, así como el origen de este instrumento de asimilación de lo real. Se analizan ampliamente los esquemas de clasificación, tanto desde una perspectiva lógica, como mereológica y los procesos cardinales de cuantificación. Igualmente se analizan los esquemas de seriación y los procesos ordinales de cuantificación. Los resultados ponen de manifiesto que el número aunque tiene un componente cardinal y un componente ordinal, el segundo tiene más peso que el primero en la psicogénesis y que ambos componentes son insuficientes para explicar la ejecución numérica de los niños.
Palabras clave: Clasificación; seriación; construcción del número; conservación de las cantidades.

Title: The intra-propositional operations and number.
Abstract: This research expects to confirm the ordinal-cardinal indisociability of the number offered by Piaget, just like the origin of this instrument of assimilation of the real. It is widely analyzed the schemes of classification, from both a logic perspective as a mereologic one, and the ordinal processes of quantization. The outcome show up that the number however has a cardinal component and an ordinal one, the second is more pure than the first one in the psychogenesis, and that both components are insufficient to explain the numerical execution of children.
Key words: Classification; seriation; number development; conservation of quantities.

Introducción

Como dice Jean-Blaise Grize en sus *Observaciones sobre la epistemología matemática de los números naturales*, "hay muy pocas obras acerca de la epistemología del número que no citen la frase de Kronecker: Dios creó los números enteros; el resto es obra del hombre" (Grize, 1979; p. 109). Esta expresión, un tanto irónica si se quiere, denota una precisa concepción de las matemáticas: su aritmetización.

El proceso de aritmetización de las matemáticas requiere un análisis que aunque reposa de forma directa en los números reales, todos sabemos que estos entes han podido ser definidos, en el último cuarto del siglo XIX, a partir de los racionales. Sin embargo, todo número racional puede, y debe, ser entendido como pareja de números enteros, los cuales, a su vez, pueden ser concebidos en términos de pares de números naturales. De esta manera, los números naturales vienen a constituirse en la pieza esencial de todo el edificio aritmético. Es, por tanto, comprensible que, además de los esfuerzos propios de los matemáticos y epistemólogos de las matemáticas, las actividades de gran parte de los psicólogos y pedagogos de todo el mundo se haya centrado, y se continúe centrando, en la psicogénesis del número natural, con el fin de poder dar respuesta a una doble pregunta ¿en qué consisten estos entes, cuyo origen parece ser contemporáneo del hombre, y que, en la cultura actual, hemos designado como 1, 2, 3, ..., n? y, lo que es más importante para nosotros, ¿cómo son aprehendidos por el individuo?.

Con relación a la primera pregunta se suscita una cuestión de enorme importancia, pues si bien los matemáticos están bastante de acuerdo acerca de las propiedades formales de los números naturales, ya no lo están tanto respecto a la naturaleza de los mismos y, en este sentido, todas las teorías matemáticas (intuicionistas, empiristas o reducionistas), incluso aquellas que se han venido mostrando como las más eficientes desde la perspectiva de un análisis metamatemático, vienen a recoger, de alguna manera, la polémica *número cardinal – número ordinal* que, partiendo de los pitagóricos, ha llegado hasta nuestros días.

En efecto, ya en el siglo VI a.C., los griegos distinguían entre dos diferentes tipos de números científicos:
- *Una composición de unidades* con un origen común. Por ejemplo, la mónada es el principio de todos los unos, la díada el de los doses, la tríada el de los treses, etc., y
- *Un raudal de mónadas*, lo que podría entenderse como un conjunto finito numerable.

Esto supone un doble hecho de gran importancia para nosotros y que puede centrar nuestro trabajo sobre la construcción del número natural. En primer lugar, aparece el número con una identidad propia, es decir, cada número presenta un valor intrínseco y unas propiedades igualmente intrínsecas, que le confieren una personalidad independiente de la base de numeración y, en segundo lugar, toma cuerpo la división que hace referencia a la doble cualidad de los números: sus aspectos cardinal y ordinal, reflejados, respectivamente, en los dos tipos de números científicos de las matemáticas helénicas.

Por esta razón encontramos siempre, y en cualquier teoría sobre la construcción del número natural, dos ideas primarias o dos nociones básicas: *clase y orden*. Esas dos nociones podrían ser definidas con una cierta exactitud de la siguiente manera:

orden es una relación de la forma A < B y que quiere decir que A precede a B o que B sucede a A.

* **Dirección para correspondencia** [Correspondence address]: José Manuel Serrano. Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación. Facultad de Educación. Universidad de Murcia. Campus de Espinardo. 30100 Murcia (España). E-mail: serrano@um.es

clase es una relación de la forma A ⊂ B y que quiere decir que todos los A son algunos B.

A las ideas de clase y orden se asocian dos formas de cuantificación, una, vinculada al orden, recibe el nombre de *ordenación*. Una se define como la construcción de una relación cuantitativa asimétrica; la otra, asociada a las clases, recibe el nombre de *cardinación* y se basa en la construcción de relaciones simétricas.

Esta polémica se ha trasladado al campo psicológico y, mientras algunos psicólogos y psicopedagogos reconocen como propiedad más sobresaliente de los números naturales su inherente ordenación, otros, por el contrario, consideran que el rasgo más distintivo es la conjetura de que cada miembro de la serie de los números se puede concebir como una clase supraordenada que es la suma lógica de todas las clases subordinadas que contienen ese número determinado de elementos.

Finalmente, una teoría *ad hoc* parece querer salir del posible *«impasse»* que crean las posiciones cardinales y ordinales del número, y es la teoría de Jean Piaget, que partiendo de consideraciones psicológicas (particularmente evolutivo-cognitivas), por un lado, y de consideraciones matemáticas, por otro, intenta una reconciliación de las teorías cardinales y ordinales.

La teoría de Piaget sobre el número se basa en una acumulación no aditiva de las teorías de Frege-Russell y de Peano, con la consideración del número como indisociablemente cardinal y ordinal y confiriéndole un carácter de sintético e irreductible. Como diría el propio Piaget, "es cierto que nuestra hipótesis permite, en cierto sentido, escapar de esta alternativa (intuicionismo, logicismo, aritmetización), pues si el número es clase y relación asimétrica al mismo tiempo, no deriva de tal o cual operación lógica (o aritmética) particular sino simplemente de la reunión de ellas, lo que concilia la continuidad con la irreductibilidad y conduce a concebir como recíprocas y no ya como unilaterales las relaciones entre la lógica y la aritmética" (Piaget y Szeminska, 1941; p. 11).

Los resultados de las investigaciones en este campo no parecen estar suficientemente claros y así, mientras que algunos autores como Brainerd, Fraser, Howe, Kingma o Koops (cf. Serrano, 2006; p. 25) han mantenido que los números se refieren a los términos de las relaciones asimétricas transitivas y son, en su sentido básico, recursos para representar los términos de las progresiones que dichas relaciones generan, por lo que el origen psicológico del número es identificado con el origen psicológico del número ordinal.

Las teorías psicológicas ordinales vienen a defender, por tanto, que este concepto evoluciona a partir del concepto de ordenación, de tal manera que, cuando la ordenación percibida llega a convertirse en un concepto internalizado estable, surge la necesidad obvia de un recurso que simbolice los términos de cualquier progresión, ya sea esta percibida o inferida, al tiempo que sirva para representarlos. En la cultura occidental, los numerales 1, 2, 3, etc., y sus respectivos nombres se encuentran disponibles para este propósito. Lo más destacable es que, cualquiera que sea el símbolo verbal o escrito empleado, su propósito original es simplemente simbolizar el hecho del orden. Así, cuando el niño del Segundo Ciclo de Educación Infantil aprende los significados concretos de los numerales escritos y hablados tiende, generalmente, a aprehender su significado ordinal. De esta manera, 2 y dos son comprendidos, en primer lugar, como segundo; 3 y tres, como tercero, y así sucesivamente hasta los primeros cinco o seis números naturales. Según estas teorías, un niño sabe primero que el dos es mayor que el uno y menor que el tres, pero desconoce que a todos los grupos de dos elementos les corresponde siempre el número 2.

Por el contrario, otro conjunto de autores, como Gelman, Gallistel, Mc Laughlin, Acredolo, Light o Gilmour, (*ibid*, p. 26), más o menos veladamente, sostienen que el principio cardinal es más relevante que el ordinal en la construcción del número, postura que parece estar avalada por la propia filogénesis (Collette, 1985).

Es evidente que tomar partido por cualquiera de estas opciones supone condicionar, básicamente, todas las actividades conducentes a un proceso de enseñanza y aprendizaje, para la adquisición de las nociones numéricas de base. En efecto, partir de una postura ordinalista equivale a potenciar los esquemas de orden (seriación, conteo, etc.) en el desarrollo de actitudes numéricas. Partir de una postura cardinalista supone, por el contrario, un potenciamiento de los esquemas cardinales (clasificación, correspondencia, etc.), partir de posiciones intuicionistas o empiristas nos conduciría a poner el sujeto en situaciones concretas tales que permitieran la "emergencia" de la intuición numérica, etc.

En efecto, cabe pensar que, en el intento de discretizar el universo para poder asimilarlo, comprenderlo y conferirle un significado, el individuo organiza lo real clasificándolo y ordenándolo para poder establecer relaciones cuantitativas entre esto que ha sido cualificado y ordenado. En definitiva, podemos observar que la consideración del número como síntesis de relaciones de equivalencia (clasificación) y relaciones de orden (seriación) se manifiesta en la mayor parte de los trabajos actuales y es una preocupación común en los educadores de los primeros niveles educativos de todos los países (Becker, 1998; Ciancio, Sadovsky, Malabonga, Trueblood y Pasnak, 1999; Garret, Busby y Pasnak, 1999; Mareschal y Shultz, 1999; Planche, 1998; Van de Rijt y Van Luit, 1999).

A tenor de todo lo dicho podemos plantear nuestra hipótesis general de trabajo sobre la conceptualización del número:

H_0: Los esquemas numéricos surgen como una síntesis de los esquemas de clasificación y seriación y suponen la organización de éstos en una estructura de conjunto. Esto es lo que denominamos estructura de número.

Esta hipótesis podría ser operativizada en la siguiente hipótesis de trabajo:

H_1: Si el número es indisociablemente cardinal-ordinal, el desarrollo de los esquemas de clase y orden (así como su interacción) determinarán su adquisición.

Método

Sujetos

La población a la que hace referencia la presente investigación se encuentra incardinada en el término municipal de Murcia y hace referencia a los dos niveles superiores de Educación Infantil y a los dos primeros niveles de Educación Primaria (primer ciclo). El número de unidades de que consta la mencionada población se sitúa en torno a los quince mil escolares. El tamaño muestral fue de 134 sujetos con un rango de edad de 49-102 (μ = 75.15 y σ = 14.84) con lo que el nivel de significación de nuestra muestra, aplicando el índice de Krejcie y Morgan era de α = .25 (χ^2 = 1.352).

El tipo de muestreo empleado para la selección fue un *muestreo aleatorio estratificado*, considerando como estratos poblacionales los distintos niveles escolares (cuatro: 2º y 3º de Infantil y 1º y 2º de Primaria), y como subestratos poblacionales los entornos donde se ubican los colegios (dos: rural y urbano). La distribución de los sujetos por estratos es la siguiente (la edad se expresa en meses):

Educación Infantil: Número de sujetos: 63; rango de edad: 49-74; μ = 61.60 y σ = 7.4.

a) 2º Ciclo-2º Curso: Número de sujetos: 35; rango de edad: 49-64; μ = 55.91 y σ = 3.84.

b) 2º Ciclo-3º Curso: Número de sujetos: 28; rango de edad: 60-74; μ = 68.71 y σ = 3.83.

Educación Primaria: Número de sujetos: 71; rango de edad: 75-102; μ = 87.18 y σ = 7.65.

c) 1º Ciclo-1º Curso: Número de sujetos: 41; rango de edad: 75-89; μ = 81.46 y σ = 3.53.

d) 1º Ciclo-2º Curso: Número de sujetos: 30; rango de edad: 88-102; μ = 95 y σ = 3.91.

Los Colegios a los cuales estaban adscritos nuestros sujetos pertenecían al municipio de Murcia.

Procedimiento

En primer lugar se procedió a determinar los instrumentos que permitirían medir las variables objeto de estudio: clasificación, seriación y número.

Pruebas

Prueba de clasificación

Inicialmente se procedió a establecer una prueba que permitiera medir la variable denominada CLASIFICACIÓN, optando por hacerlo a partir de los trabajos piagetianos. Las tareas utilizadas fueron similares a las descritas por Piaget e Inhelder (1959), pero añadiendo al material de bloques lógicos de Z.P. Dienes un material específico (soldados a caballo y a pie) que podía ser organizado como clase lógica o clase colectiva (Serrano y Fernández, 1989). Los bloques lógicos utilizados constaban de tres tipos de figuras geométricas (cuadrados, triángulos y círculos) y tres colores distintos (azul, amarillo y rojo), existiendo siempre tres elementos idénticos desde la perspectiva de los dos criterios utilizados (forma x color).

Las consignas utilizadas variaban en función del nivel cognitivo de los sujetos y se elaboraban, de forma individual, en una fase previa a la presentación de la prueba, a través de una entrevista-juego con materiales diversos. En esta entrevista se trataba de averiguar el modo y la capacidad semántica del niño para organizar lo real desde el punto de vista de las clases (relaciones de reflexividad y simetría). De cualquier forma, las consignas más utilizadas fueron del tipo: "Pon juntos los que se parecen", "pon juntos los que sean como éste", etc.

Los niveles genéticos fueron establecidos a partir de las propiedades de las clases descritas por Piaget e Inhelder (1959; pp. 60-61).

En función de estas propiedades, y atendiendo a los estadios y procedimientos (conductas) encontradas por Piaget en el desarrollo de las clases, hemos establecido siete niveles genéticos. Los dos primeros niveles pertenecen al estadio de las *colecciones figurales* y, el último, al de las *clases*. Los restantes niveles se adscriben al estadio de *colecciones no figurales*. Estos niveles son:

1. Pequeños alineamientos.
2. Alineamientos continuos (con cambio de criterios) u objetos.
3. Pequeñas colecciones yuxtapuestas sin criterio único y con un residuo heterogéneo.
4. Colecciones sin criterio único pero sin residuo ni intersecciones.
5. Colecciones con un criterio único, sin residuo ni intersecciones. Este nivel añade, por tanto, al anterior un criterio único de clasificación.
6. Colecciones con subdivisiones (en subcolecciones).
7. Clases.

Por tanto, atendiendo a su ejecución, y teniendo en cuenta las propiedades de la clasificación (antes descritas) utilizadas en esa ejecución, los sujetos podrían obtener una puntuación cuyo rango oscilaría entre uno y siete, según se adscribieran a uno u otro de los niveles genéticos que acabamos de definir.

Es evidente que sólo se utilizaron criterios de clasificación aditiva porque los esquemas numéricos a los que hace referencia el presente trabajo de investigación tienen un carácter lineal (unidimensional) y, en este sentido, aditivo.

La segunda parte de la prueba se ajusta a los mismos patrones que la anterior, la única diferencia estriba en que el material puede ser organizado, tanto desde la perspectiva de clases lógicas (teoría lógica), como desde la de clases colectivas (teoría mereológica). En efecto, la *clase de los soldados* puede ser sustituida por *el ejército* y sus posibles subdivisiones *sol-*

dados a caballo y *soldados a pie* pueden ser sustituidas, respectivamente, por *caballería* e *infantería*, eliminando, de esta manera, las posibles deficiencias que pueda presentar la tarea con un material de formas geométricas.

Prueba de seriación

Consta de seis ítems. La consigna para los cinco primeros ítems era: "Mira estos monigotes, están en desorden. Tu tienes que encontrar la manera de arreglarlos".

Ítem 1: Seriación por longitud
Material: El material está compuesto por nueve rectángulos de dos dimensiones que representan monigotes con corbatas de pajarita. La anchura de estos rectángulos es irrelevante por cuanto, al tener dos de ellos la misma anchura, no es posible la seriación a partir de esta dimensión y, por tanto, sólo puede hacerse en función de su longitud.

Ítem 2: Seriación por la anchura
Material: Siete rectángulos de dos dimensiones que representan monigotes con corbatas de pajarita. La longitud de estos rectángulos es irrelevante y la seriación debe hacerse en función de su anchura ya que dos de ellos tienen la misma longitud y, por tanto, no existe posibilidad de seriación en función de esta dimensión.

Ítem 3: Seriación por la altura
Material: El material consta también de siete rectángulos, similares a los anteriores, que representan monigotes con corbatas de pajarita. Tanto la longitud como la anchura de estos rectángulos es irrelevante y la seriación debe hacerse (no se considera el grosor que, por otra parte, es el mismo para todos los rectángulos) en función de la altura a la que se encuentran las corbatas de pajarita. Esto se debe a que dos de ellos presentan la misma longitud y otros dos la misma anchura, lo que impide la posibilidad de establecer la seriación en función de estas dos dimensiones.

Ítem 4: Seriación por la longitud
Material: El material consta de siete paralelepípedos que representan monigotes con corbatas de pajaritas. La anchura, el grosor y el peso de estos rectángulos es irrelevante y la seriación debe hacerse en función de la longitud (altura de los monigotes) de los mismos, puesto que dos de ellos tienen la misma anchura, dos tienen el mismo grosor y otros dos tienen el mismo peso y, por tanto, no es posible la seriación en función de ninguna de estas tres dimensiones.

Ítem 5: Seriación por el peso
Material: El material consta de cinco paralelepípedos que representan monigotes con corbatas de pajarita. La anchura, el grosor y la altura de estos rectángulos es irrelevante y la seriación debe hacerse en función del peso de los mismos, ya que dos de ellos tienen la misma anchura, dos presentan el mismo grosor y, finalmente, existen otros dos con la misma altura y, por tanto, no es posible la seriación en función de ninguna de estas tres dimensiones.

Ítem 6: Seriación por la longitud
Material: Siete cilindros de longitudes diferentes (con una diferencia de 2 cms.) y una plataforma con agujeros para insertar los cilindros. La separación entre los agujeros es de 6,5 cms.
Consigna: "Mira estos palos. Debes encontrar la manera de colocarlos (ordenarlos) de la mejor forma posible introduciéndolos en los agujeros (el experimentador siempre explicaba a los pequeños las características de los elementos a ordenar)".
En esta prueba cada ítem acertado se valoraba con un punto (rango de puntuación 0-6).

Pruebas numéricas.

Para medir la variable número optamos por establecer tres tipos de pruebas. En efecto, Piaget cuando habla de "conservación del número", lo hace identificándolo con "conservación de la cantidad numérica", es decir, para Piaget el número siempre es la expresión de la medida de una cantidad, por tanto, tenemos que admitir la existencia de dos niveles de medida que hacen referencia a las clásicas pruebas de conservación piagetiana sobre las cantidades discretas y continuas (Piaget y Szeminska, 1941). Sin embargo, uno de nosotros había elaborado una prueba, *ad hoc*, de composición y descomposición numérica (sobre situaciones numéricas y empíricas) que se mostró ampliamente consistente en el modelo de medida que se utilizó en una experiencia previa (Serrano, 1989).

Prueba de conservación de las cantidades discretas.- La primera de las medidas, que hemos denominado *conservación de las cantidades discretas*, esta basada en la tarea piagetiana del mismo nombre (Piaget y Szeminska, 1941; pp. 43-56) pero con algunas modificaciones.
Material: El material utilizado en esta prueba esta formado por un juego comercial de damas, es decir, que consta de doce fichas blancas y doce negras de tamaño habitual en un juego de este tipo: tres o cuatro centímetro de diámetro.
Técnica y consignas: El experimentador le dice al niño (mostrándole los dos conjunto de fichas del juego): "vamos a jugar con estas fichas a un juego que yo he inventado, ¿con cuáles quieres jugar tú, con las blancas o con las negras?". Una vez que el niño ha escogido uno de los dos conjuntos de fichas (supongamos que escoge las negras) el experimentador le dice: "bien, yo jugaré con la otras (en nuestro caso, las blancas)".

Una vez definido el color de las colecciones del experimentador y del niño, se comienza la prueba. Hemos de tener en cuenta que los ítemes o secuencias de esta tarea cognitiva presentan una dependencia lineal y, como ya demostramos en otro lugar (Pons y Serrano, 2006), el fracaso en uno cualquiera de estos ítemes excluye la posibilidad de acierto en todos los que le suceden.

El experimentador comienza la tarea colocando siete fichas de su conjunto (blancas) en línea recta y con la separación del diámetro de una cualquiera de las fichas, es decir, tres o cuatro centímetros. A continuación le dice al niño: "Mira las fichas que yo he puesto y después pon tú, aquí abajo, las mismas fichas que yo (o el mismo número de fichas que yo)".

Si el sujeto no es capaz de establecer la identidad (aunque sea de forma pseudocuantitativa) se interrumpe la prueba y se le concederá cero o un punto, en función del nivel genético al que sea asignada su conducta (Serrano, 1982).

Si, por el contrario el sujeto es capaz de establecer una identidad de tipo cuantitativo o pseudocuantitativo (fundamentalmente, como se puede constatar de forma empírica, a partir de los esquemas de correspondencia biunívoca), se le interrogará acerca de la construcción de un conjunto más o menos numeroso que el dado por el experimentador, diciéndole: "Bien, retira tus fichas". Una vez hecho, el experimentador continúa: "Ahora tienes que poner más fichas que yo". Tanto si realiza o no correctamente la construcción de un conjunto más numeroso que el dado, se le pide la de un conjunto menos numeroso: "Bien, retira tus fichas". Una vez hecho se le dice: "Ahora tienes que poner menos fichas que yo".

Si el niño no es capaz de construir un conjunto más numeroso y menos numeroso que el dado por el experimentador (con siete fichas) se suspende la prueba y se le asigna al nivel genético correspondiente que marcará su puntuación en la prueba.

Si fuera capaz de construir un conjunto menos numeroso que el dado, pero fracasara en la construcción de un conjunto más numeroso, el experimentador, para realizar una subprueba de confirmación, procedía de la manera que detallamos a continuación. En primer lugar, retira su colección de fichas y vuelve a colocar una nueva que tenga los mismos elementos que la colección construida por el niño y que le había llevado al éxito en la construcción de un conjunto menos numeroso que el inicialmente dado por el experimentador, que como se recordará tenía siete elementos, al mismo tiempo que se le dice: "Mira, yo también quito mis fichas y ahora pongo éstas. Por tú más fichas que yo". Si, tras la nueva situación, en la construcción de un conjunto más numeroso se vuelve a fracasar, se puede pensar, con una alta probabilidad de acierto, que el éxito de la situación anterior pudo ser debido al azar y, por tanto, situaremos al sujeto en el nivel genético que corresponde al fracaso de las dos situaciones (construcción de un conjunto más numeroso y un conjunto menos numeroso). Si, por el contrario, ante la nueva situación se invirtieran los términos y encontráramos una conducta de acierto para la construcción de un conjunto más numeroso y una conducta de fracaso para la construcción de un conjunto menos numeroso, se podría concluir que el éxito o el fracaso de la prueba está condicionado al número de elementos de la misma y, tras suspender la prueba, asignaríamos al sujeto la puntuación 3 correspondiente al nivel genético de "asociación de los vectores (objetivos) a los escalares (subjetivos)".

Si la construcción de un conjunto con más o menos elementos que la colección testigo hubiera sido exitosa, la prueba continuaría de la siguiente manera:

En primer lugar se le pide al niño que restablezca de nuevo la igualdad: "Pon, de nuevo, las misma fichas que yo" y, una vez lograda de nuevo, se desplazan las fichas de la colección testigo, de tal manera que la penúltima ficha de esta colección quede en "correspondencia óptica" con la última ficha de la colección formada por el niño, al tiempo que se dice: "¡Mira!, ahora yo voy a mover mis fichas, como ves no quito ni pongo ninguna, solamente las muevo". Una vez completada la operación de desplazamiento se le vuelve a interrogar sobre la igualdad que acaba de construir, diciendo: "Y ahora, ¿tenemos las mismas?". Si la respuesta es negativa, se le pregunta, en primer lugar, por la numerosidad de ambas colecciones: "¿Cuántas fichas tengo yo?, ¿Y tú?", para, a continuación, interrogarle sobre la acción que debe realizar con el fin de mantener la igualdad inicial: "¿Y qué debemos hacer para tener las mismas?". Dos posibles soluciones (a y b) apuntaban los sujetos a las demandas del experimentador:

Para la primera pregunta, y tras repetir que ambas colecciones tenían siete elementos, mantenían la desigualdad ($7 \neq 7$): "Tú tienes siete y yo tengo siete, pero tú tienes más que yo". Para la segunda pregunta, la solución apuntaba a añadir una ficha más a su colección, con el fin de establecer la igualdad perceptiva. Si se les interrogaba en esta nueva situación sobre la igualdad numérica llegaban a la conclusión de que $7 = 8$: "Ahora tú tienes siete y yo tengo ocho", el experimentador preguntaba: pero, ¿tenemos las mismas? La respuesta por parte de los sujetos de este nivel (confusión de los esquemas de adición y desplazamiento) es siempre afirmativa.

En este nivel más evolucionado (diferenciación de los esquemas de adición y desplazamiento, pero sin integración en una estructura total de conjunto), los sujetos experimentaban ciertas turbaciones ante la contradicción $7 \neq 7$. Con relación a la segunda cuestión, la solución apuntaba a un desplazamiento en sentido inverso, no admitiendo nunca la solución de adición (reversibilidad empírica o retorno empírico). Para confirmar esta diferenciación de esquemas el experimentador realizaba la contraprueba siguiente: Partiendo de la posición inicial de correspondencia uno-a-uno, se añadía una ficha a la colección testigo, y se planteaban de nuevo todas las cuestiones. La solución para esta situación era la de compensar la perturbación con otra adición en su colección o eliminar (restar) la ficha añadida a la colección del experimentador. Si la respuesta era afirmativa y el pequeño mantenía la igualdad, pese al desplazamiento, se le pedía que diera el argumento de reversibilidad operatoria (¿por qué?) que había utilizado y se realizaban algunas contra-argumentaciones ("pero mi fila es más larga que la tuya", etc.) para confirmar el nivel.

Esta prueba presenta, en función de los niveles genéticos, un rango de puntuación de cero a seis.

Prueba de conservación de las cantidades continuas.- La segunda medida del constructo de número, que hemos denominado *conservación de las cantidades continuas*, está basada, igualmente, en la tarea piagetiana del mismo nombre (Piaget y Szeminska, 1941; pp. 43-56) pero también con ciertas modificaciones (Serrano, 1982). Hemos de tener en cuenta que, por ser una tarea piagetiana, es isomorfa a la anterior y los ítemes, secuencias o niveles genéticos son idénticos en ambas tareas.
Material: El material utilizado en esta prueba está formado por un vaso grande; dos juegos idénticos formados, cada uno, por otro vaso grande (distinto del anterior en cuanto a forma, pero de la misma capacidad) y cinco vasos pequeños, idénticos entre sí y cuya suma de capacidades es equivalente a la de uno de los vasos grandes; dos tipos de refrescos (de naranja y de limón) y dos muñecas cuyo color de pelo y de vestido es similar al de los refrescos, a fin de reforzar las relaciones de correspondencia y de pertenencia.
Técnica y consignas: El experimentador le dice al niño, al mismo tiempo que le muestra los dos vasos grandes idénticos, las muñecas y las botellas de refrescos: "Vamos a jugar con estas cosas a un juego que yo he inventado y que se llama *fiesta de cumpleaños*. En este juego hay dos amiguitas nuestras que son las dos que ves aquí (le muestra las dos muñecas). Una (la de color anaranjado) quiere refresco de naranja y la otra (la de color amarillo) quiere refresco de limón. Yo voy a ponerle a ésta su refresco de naranja (el experimentador vierte el refresco de naranja de la botella en el vaso, hasta un nivel próximo al setenta y cinco por ciento de la altura total del vaso)". Una vez ejecutada la acción se le dice al pequeño: "Ves, ¡ya está! Ahora debes servir tú el refresco de limón a la otra muñeca, pero ¡cuidado! Debes ponerle lo mismo de limón (o, la misma cantidad, o, igual) que yo le puse a ésta (se le pueden dar nombres a las muñecas para simplificar la nomenclatura) de naranja".

Si el sujeto no es capaz de establecer la identidad se interrumpe la prueba y se le concederá cero o un punto, en función del nivel genético al que sea asignada su conducta.

Si, por el contrario el sujeto es capaz de establecer una identidad de tipo cuantitativo o pseudocuantitativo, se le interrogará acerca de la construcción de una entidad con mayor o menor cantidad que la dada por el experimentador, diciéndole tras vaciar el vaso de refresco de limón: "Ahora tienes que ponerle a la muñeca más (cantidad) refresco de limón que el que yo le he puesto de naranja a la otra, sin que ésta se dé cuenta (se vuelve la primera muñeca simulando un pequeño descuido)". Lo mismo se hace a continuación, pidiéndole que ponga menos.

Si el niño no es capaz de construir situaciones de desigualdad (mayor y menor cantidad que) se suspende la prueba y se le asigna al nivel genético correspondiente que marcará su puntuación en la prueba.

Si fuera capaz de solucionar el problema cuando se le pide de que ponga menos cantidad que una dada, pero fracasara en la construcción de una cantidad mayor que otra, el experimentador, para realizar una subprueba de confirmación (al igual que se hacía con las cantidades discretas), procedía de la manera que detallamos a continuación. En primer lugar, retiraba el líquido del vaso que estaba sirviendo como testigo y volvía a colocar una nueva cantidad que alcanzaba la misma altura que la entidad construida por el niño y que le había llevado al éxito en la solución del problema planteado con el uso del "menos que...", al mismo tiempo que se le decía: "Mira, yo pongo naranja por aquí. Pon tú, ahora, más refresco de limón que el que yo he puesto de naranja". Si, tras la nueva situación, en la construcción de una cantidad mayor se vuelve a fracasar, se puede pensar, con una alta probabilidad de acierto, que el éxito del problema anterior pudo ser debido al azar y, por tanto, debemos situar al sujeto en el nivel genético que corresponde al fracaso de la dos situaciones. Si, por el contrario, ante la nueva situación se invirtieran los términos y encontráramos una conducta de acierto para la construcción de una cantidad mayor y una conducta de fracaso para la construcción de una cantidad menor, se podría concluir que el éxito o el fracaso de la prueba está condicionado al tamaño de las cantidades utilizadas en la misma y, tras suspender la prueba, asignaríamos al sujeto la puntuación "tres" correspondiente al nivel genético de "asociación de los vectores (objetivos) a los escalares (subjetivos)".

Si la construcción de una entidad con más o menos cantidad que otra dada hubiera sido exitosa, la prueba continuaba de la siguiente manera:

En primer lugar se le pedía al niño que restableciera de nuevo la igualdad a través de la construcción de una unidad, diciéndole: "¡Mira! Ahora, para que no se beban todo el refresco de golpe y no les haga daño, se lo vamos a poner en estos vasos pequeños. ¡Ves!, yo le pongo a una muñeca en estos vasos pequeños lo mismo que tenía en el vaso grande (un vaso grande llena cinco pequeños). Ponle ahora tú, de nuevo, a esta muñeca la misma cantidad de refresco de limón que yo le he puesto a aquélla de naranja". Una vez conseguido el establecimiento de la igualdad, se interrogaba al niño sobre el número de unidades (vasos pequeños) que cabían en un vaso grande y se hacían experiencias de trasvase y de adición y sustracción de unidades como, por ejemplo, "Ahora que está la muñeca descuidada bébete un vaso pequeño de refresco". Tras hacerlo, se volvía a la situación primitiva (sobre los vasos grandes) pero, evidentemente, ahora una muñeca tenía en su vaso cuatro unidades y la otra cinco (lo que suponía menos cantidad y menos altura). En esta nueva situación se le interrogaba de nuevo sobre la igualdad-desigualdad, pidiendo el argumento de desigualdad. Familiarizado el sujeto con la posibilidad del manejo de la unidad iterable (y por tanto del número) se reconstruía la igualdad de las cantidades de refresco (a partir de las cinco unidades) y, una vez aceptada, se le decía: "¡Mira!, ahora yo voy a poner el refresco de naranja en este otro vaso (más largo y estrecho), como ves no quito ni pongo ningún vasito,

solamente pongo el refresco de naranja en este vaso nuevo". Completada la operación de desplazamiento se le volvía a interrogar sobre la igualdad que acababa de construir, diciendo: "Ahora, ¿tienen las dos muñecas la misma cantidad de refresco? o ¿pueden beber las dos lo mismo de refresco?" (las consignas son siempre adaptadas a la capacidad semántica del sujeto).
Si la respuesta era negativa, se le preguntaba, en primer lugar, por la numerosidad de ambas cantidades: "¿cuántos vasitos puede beber ésta?, ¿y aquélla?", para, a continuación interrogarles sobre la acción que debía realizar con el fin de mantener la igualdad inicial: "¿y qué debemos hacer para tener la misma cantidad?". Dos posibles soluciones (a y b) apuntaban los sujetos a las demandas del experimentador:

Para la primera pregunta, y tras repetir que ambas cantidades tenían cinco elementos (unidades o vasitos) mantenían la desigualdad ($5 \neq 5$): "Ésta tiene cinco y aquélla también, pero ésta tiene más que aquélla". Para la segunda pregunta, la solución apuntaba a añadir mas refresco al vaso donde el refresco alcanzaba menor altura con el fin de establecer la igualdad perceptiva.

En este nivel, mas evolucionado (diferenciación de los esquemas de adicción y desplazamiento, pero sin integración en una estructura total de conjunto), los sujetos experimentaban ciertas turbaciones ante la contradicción $5 \neq 5$. Con relación a la segunda cuestión, la solución apuntaba a un desplazamiento en sentido inverso, no admitiendo nunca la solución de adición (reversibilidad empírica o retorno empírico). Para confirmar esta diferenciación de esquemas el experimentador realizaba la contraprueba siguiente: partiendo de la posición inicial con los dos vasos idénticos se añadía una unidad al refresco de una de las muñecas, y se planteaban de nuevo todas las cuestiones. La solución para esta situación era la de compensar la perturbación con otra adicción en el otro refresco o eliminar (restar) la unidad añadida al primer refresco por parte del experimentador.

Si la respuesta era afirmativa y mantenía la igualdad, pese al trasvase del refresco, se le pedía que diera el argumento de reversibilidad operatoria (¿por qué?) y se realizaban algunas contra argumentaciones ("pero este vaso es más alto", etc.) para confirmar el nivel.

Hemos de destacar que las condiciones del material favorecían la generación de determinadas contradicciones, con la consiguiente posibilidad de superaciones, que podían conducir a una noción de conservación. En efecto en los vasos grandes las dimensiones del vaso largo y estrecho en relación con las dimensiones de cualquiera de los dos vasos cortos y anchos presentaban las siguientes características: cuando ambos albergaban cinco unidades, la altura alcanzada por el refresco era, de forma bastante perceptible, mayor en el vaso estrecho que en el ancho, pero cuando ambos diferían en una unidad (seis unidades en el vaso ancho y cinco en el estrecho o cinco unidades en el ancho y cuatro en el estrecho) la altura seguía siendo ligeramente mayor en el vaso estrecho, es decir, en el vaso que menos unidades de refresco contenía. Esto suponía una manifiesta contradicción entre los aspectos perceptivos y numéricos de la tarea.

Esta prueba presenta, en función de los niveles genéticos, un rango de puntuación idéntico al de la prueba anterior, es decir, de cero a seis.

Prueba de composición y descomposición del número.- Finalmente, y como dijimos con anterioridad, una prueba de *composición y descomposición* del número, *ad hoc*, fue aplicada por nosotros como tercera medida para el constructo de número.

Esta prueba consta de doce ítemes y estaba dividida en dos subpruebas. La primera, que podríamos denominar "composición y descomposición del número en situaciones empíricas" consta de seis ítemes que, aunque quizás podrían haber sido jerarquizados, se han utilizado con carácter de independencia.
Material: El material utilizado en esta prueba estaba formado por dos muñecas, como las descritas para las pruebas de conservación con cantidades continuas, es decir, una con el pelo y el vestido rojo y otra con el pelo y el vestido amarillo, caramelos rojos y amarillos, una caja y tarjetas cuadradas con los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9.

Ítem 1: Composición empírica de un conjunto a partir de dos subcolecciones dadas, con elementos diferenciados
Material: Dos muñecas, dos caramelos rojos, un caramelo amarillo y una caja.
Técnica y consignas: Se le presentan al niño las dos muñecas, una al lado de la otra, con una separación aproximada de veinte centímetros. Junto a ellas y a una separación de la segunda muñeca de alrededor de treinta cm., se coloca la caja. Bajo la muñeca (roja) se colocan dos caramelos del mismo color (rojos) y debajo de la amarilla, un caramelo de color amarillo, al mismo tiempo que se le dice: "¡Mira!, esta muñeca (la roja) tiene dos caramelos y ésta (la amarilla) tiene un caramelo (se le da en este momento el conjunto de todos los caramelos rojos y amarillos salvo, evidentemente, los que se le han dado a las muñecas). Ahora tienes que poner dentro de esta caja los mismos caramelos que tienen las dos muñecas juntas".
Puntuación: Si la solución del ítem es correcta se le concederá un punto, en caso contrario se puntuará con cero.

Ítem 2: Composición empírica de un conjunto a partir de dos subcolecciones dadas, con elementos no diferenciados
Material: Dos muñecas, nueve caramelos rojos y una caja.
Técnica y consignas: Se le presentan al niño las dos muñecas, una al lado de la otra, con una separación aproximada de veinte centímetros. Junto a ellas y a una separación de la segunda muñeca de alrededor de treinta cm., se coloca la caja. Bajo la muñeca (roja) se colocan seis caramelos del mismo color (rojos) y debajo de la amarilla, tres caramelos de color, igualmente rojos, al mismo tiempo que se le dice: "¡Mira!, esta muñeca (la roja) tiene seis caramelos y ésta (la amarilla) tiene tres (se le da en este momento el conjunto de todos los

caramelos rojos y amarillos salvo, evidentemente, los que ya se le han dado a los muñecas). Ahora tienes que poner dentro de esta caja los mismos caramelos que tienen las dos muñecas juntas".
Puntuación: Si la solución del ítem es correcta se le concederá un punto, en caso contrario se puntuará con cero.

Ítem 3: Descomposición empírica de un conjunto, dados los elementos del conjunto y de una de las subcolecciones, con elementos diferenciados
Material: Dos muñecas, seis caramelos rojos, dos caramelos amarillos y una caja.
Técnica y consignas: Se le presentan al niño las dos muñecas del material, la una al lado de la otra, con una separación aproximada de veinte centímetros. Junto a ellas y a una separación con respecto de la segunda muñeca de alrededor de treinta centímetros, se coloca la caja. Debajo de la muñeca (roja) se colocan tres caramelos del mismo color (rojos) y dentro de la caja, tres caramelo de color rojo y dos de color amarillo, al mismo tiempo que se le dice: "¡Mira?, esta muñeca (la de color rojo) tiene tres caramelos y dentro de la caja hemos puesto los caramelos que tienen entre las dos muñecas juntas (en este momento, se le da el conjunto de todos los caramelos rojos y amarillos, salvo, evidentemente, los que se han puesto dentro de la caja y los que se le dieron a la muñeca roja). Ahora tienes que darle tú a la muñeca amarilla los caramelos que le correspondan y para ello no debes olvidar que dentro de la caja están los caramelos que tienen las dos muñecas juntas".
Puntuación: Si la solución dada por el sujeto al ítem es la correcta se le concederá un punto, en caso contrario se puntuaría con un cero.

Ítem 4: Descomposición empírica de un conjunto, dados los elementos del conjunto y de una de las subcolecciones, con elementos no diferenciados.
Material: dos muñecas, doce caramelos todos de color rojo, y una caja.
Técnica y consignas: Se le presentan al niño las dos muñecas del material, la una al lado de la otra, con una separación aproximada de veinte centímetros. Junto a ellas y a una separación con respecto de la segunda muñeca de alrededor de treinta centímetros, se coloca la caja. Debajo de la muñeca (roja) se colocan cinco caramelos del mismo color (rojos) y dentro de la caja, doce caramelos, también de color rojo, al mismo tiempo que se le dice: "¡Mira!, esta muñeca (la de color rojo) tiene cinco caramelos y dentro de la caja hemos puesto los caramelos que tienen entre las dos muñecas juntas (en este momento, se le da el conjunto de todos los caramelos rojos y amarillos, salvo, evidentemente, los que se han puesto dentro de la caja y los que se le dieron a la muñeca de color rojo). Ahora tienes que darle tú a la muñeca de color amarillo los caramelos que le correspondan y para ello no debes olvidar que dentro de la caja están los caramelos que tienen las dos muñecas juntas".
Puntuación: Si la solución dada por el sujeto al ítem es la correcta se le concederá un punto, en caso contrario se puntuaría con un cero.

Ítem 5: Descomposición empírica de un conjunto en forma aleatoria
Material: dos muñecas, seis caramelos rojos, y una caja.
Técnica y consignas: Se le presentan al niño las dos muñecas, una al lado de la otra, con una separación aproximada de veinte centímetros. Junto a ellas y a una separación de la segunda muñeca de alrededor de treinta centímetros, se coloca la caja. Dentro de la caja se colocan los seis caramelos y se le dice: "¡Mira!, en esta caja están los caramelos de las dos muñecas (se le da en este momento el conjunto de todos los caramelos rojos y amarillos, salvo, evidentemente, los que se han puesto dentro de la caja). Ahora tienes que poner debajo de las muñecas los caramelos que tú creas que le corresponden a cada una y para ello no debes olvidar que dentro de la caja hemos puesto los caramelos que tienen las dos muñecas juntas".
Puntuación: Si la solución dada por el sujeto al ítem es la correcta se le concederá un punto, en caso contrario se puntuaría con un cero.

Ítem 6: Conmutabilidad y asociatividad en la situación anterior
Material: El mismo que para la situación anterior.
Técnica y consignas: Se presenta el material de la misma forma que se presentó en el ítem anterior y se le dice: "¡Mira!, como ya hemos visto antes, en esta caja están los caramelos de las dos muñecas (se le da en esta momento el conjunto de todos los caramelos rojos y amarillos salvo evidentemente, los que se ha colocado en la caja). Ahora tienes que poner debajo de las muñecas los caramelos que tú creas que le corresponden a cada una, pero tienes que hacerlo de diferente manera a como lo hiciste con anterioridad. No debes olvidar que dentro de la caja hemos puesto los caramelos que tienen las dos muñecas juntas. Vamos a ver de cuántas formas eres capaz de hacerlo".
Puntuación: Si para la solución del ítem recurre a la asociatividad se le concederán 0'50 puntos. Si la solución es asociativa se puntuará con cero.

La segunda de las subpruebas ("composición y descomposición del número en situaciones numéricas") consta, igualmente, de seis ítemes isomorfos con los anteriores.

La descripción de los seis ítemes es como a continuación se detalla:

Ítem 7: Composición aritmética (adición) de un conjunto a partir de dos subcolecciones dadas
Material: Dos muñecas, cinco caramelos rojos y un conjunto de cartulinas que llevan dibujadas los nueve primeros números.
Técnica y consignas: Se le presentan al niño las dos muñecas, una al lado de la otra, con una separación aproximada de veinte centímetros. Bajo la muñeca (roja) se colocan cuatro caramelos rojos y debajo de la amarilla, un caramelo también rojo, al mismo tiempo que se le dice: "¡Mira!, esta muñeca (la

roja) tiene dos caramelos y esta (la amarilla) tiene un caramelo (se le da en este momento el conjunto de todas las tarjetas con números). Ahora tienes que escoger de entre estas tarjetas aquella que tiene el numero que indica cuántos caramelos tienen las dos muñecas juntas".
Puntuación: Si la solución del ítem es correcta se le concederá un punto, en caso contrario se puntuara con cero.

Ítem 8: Composición aritmética (adición) de dos números
Material: Dos muñecas y un juego de tarjetas que contienen los nueve primero números.
Técnica y consignas: Se le presentan al niño las dos muñecas, una al lado de la otra, con una separación aproximada de veinte centímetros. Bajo la muñeca (roja) se coloca una tarjeta con el número tres y debajo de la amarilla, otra tarjeta con el número cuatro, al mismo tiempo que se le dice: "¡Mira!, esta muñeca (la roja) tiene una tarjeta que nos dice cuántos caramelos tiene y ésta (la amarilla) tiene también una tarjeta que indica el número de caramelos que tiene guardado (se le da en este momento el conjunto de todas las tarjetas con números). Ahora tienes que escoger de entre estas tarjetas aquélla que tiene el número que indica cuántos caramelos tienen las dos muñecas juntas".
Puntuación: Si la solución del ítem es correcta se le concederá un punto, en caso contrario se puntuará con cero.

Ítem 9: Descomposición empírica de un número en dos subcolecciones (con elementos diferenciados o no diferenciados), conocida una de ellas
Material: Dos muñecas, un conjunto de caramelos rojos y amarillos y una tarjeta con el número tres.
Técnica y consignas: Se le presentan al niño las dos muñecas del material, la una al lado de la otra, con una separación aproximada de veinte centímetros. Debajo de la muñeca (roja) se coloca un caramelo rojo y, junto a las muñecas una tarjeta con el número tres al mismo tiempo que se le dice: "¡Mira!, esta muñeca (la roja) tiene un caramelo y esta tarjeta indica el numero de caramelos que tienen las dos muñecas juntas (se le da en este momento el conjunto de todos los caramelos). Ahora tienes que poner debajo de la muñeca amarilla el número de caramelos que tiene ella sola. No olvides que la tarjeta te dice cuántos caramelos tienen entre las dos muñecas".
Puntuación: Si la solución dada por el sujeto al ítem es la correcta se le concederá un punto, en caso contrario se puntuará con un cero.

Ítem 10: Descomposición aritmética de un número en dos, conocido uno de ellos
Material: Dos muñecas y cartulinas con los nueve dígitos.
Técnica y consignas: Se le presentan al niño las dos muñecas, una al lado de la otra, con una separación aproximada de veinte centímetros. Debajo de la muñeca roja se coloca una cartulina con el número siete y junto a las muñecas una tarjeta con el número nueve al mismo tiempo que se le dice: "¡Mira!, esta muñeca (la roja) tiene debajo un número que nos dice cuántos caramelos tiene guardados y esta tarjeta indica el número de caramelos que tienen las dos muñecas juntas (se le da en este momento el conjunto de todas las tarjetas). Ahora tienes que poner debajo de la muñeca amarilla una tarjeta que nos indique el número de caramelos que tiene ella sola. No olvides que la tarjeta te dice cuántos caramelos tienen entre las dos muñecas".
Puntuación: Si la solución dada por los sujetos a este ítem fuera la respuesta correcta se le concederá un punto, en caso contrario se puntuaría con cero.

Ítem 11: Descomposición numérica aleatoria
Material: Dos muñecas y un juego de cartulinas con los nueve dígitos.
Técnica y consignas: Se le presentan al niño las dos muñecas, una al lado de la otra, con una separación aproximada de veinte centímetros. Junto a ellas y a una separación de la segunda muñeca de alrededor de treinta cm., se coloca una tarjeta con el número seis al mismo tiempo que se le dice: "¡Mira!, esta tarjeta nos dice el número de caramelos que tienen las dos muñecas (se le da en este momento el conjunto de todas las tarjetas salvo, evidentemente, la que se ha colocado junto a las muñecas). Ahora tienes que poner debajo de las muñecas las tarjetas con los números que tú creas que le corresponden a cada una y para ello no debes olvidar que estar tarjeta nos dice el número de caramelos que tienen las dos muñecas juntas".
Puntuación: Si la solución del ítem es correcta se le concederá un punto, en caso contrario se puntuará con cero.

Ítem 12: Conmutatividad y asociatividad en la situación anterior
Material: El mismo que para la situación anterior.
Técnica y consignas: Se presenta el material de la misma forma que se presentó en el ítem anterior y se le dice: "¡Mira!, como ya hemos visto antes, esta tarjeta nos dice el número de caramelos de las dos muñecas (se le da en este momento el conjunto de todas las tarjetas salvo, evidentemente, la que se ha colocado junto a las muñecas). Ahora tienes que poner debajo de las muñecas las tarjetas con los números que tú creas que le corresponden a cada una, pero tienes que hacerlo de diferente manera a como lo hiciste con anterioridad. No debes olvidar que esta tarjeta nos dice el número de caramelos que tienen las dos muñecas juntas. Vamos a ver de cuántas formas eres capaz de hacerlo".
Puntuación: Si para la solución del ítem recurre a la asociatividad se le concederán 0'50 puntos. Si recurre a la conmutatividad se le concederán también 0'50 puntos. Si la solución es asociativa y conmutativa se le concederá un punto, en caso contrario se puntuará con cero.

Espacio físico, duración de las sesiones y procedimiento general

La duración de una sesión de trabajo con un alumno no excedía, en ningún caso, de los cuarenta y cinco minutos y este tiempo variaba en función del nivel cognitivo de los sujetos. Además, cuando el experimentador notaba cualquier signo de fatiga o aburrimiento en el niño, la sesión se daba por concluida.

Todas las pruebas se pasaron en los propios Colegios y en una dependencia de los mismos habilitada, especialmente, para desarrollarlas. Esta dependencia reunía todos los requisitos mínimos exigidos por nosotros (de iluminación, aislamiento, mobiliario, etc.) y disponía, además, de un armario para guardar el material y los protocolos. Las pruebas se efectuaron durante el horario escolar (respetándose el horario de los recreos).

Los experimentadores dialogaban, previamente, con los niños (en una especie de juego ajeno a las pruebas, pero con el material que se iba a utilizar) a fin de determinar su capacidad semántica y adaptar las consignas verbales a un lenguaje asequible y familiar para el niño.

Experimentadores

Los experimentadores estaban cualificados y habían sido adiestrados previamente en el contenido y metodología de las pruebas a través de una actividad de formación que duró ocho sesiones de una hora (aproximadamente). Ninguno conocía los fines específicos de la investigación.

Análisis de datos

Los datos fueron analizados mediante tres ANOVA's factoriales con el paquete estadístico SYSTAT versión 12.

Tabla 1: ANOVA para la variable dependiente «conservación de las cantidades discretas».

Fuente	Sumas de Cuadrados	Grados de libertad	Medias Cuadráticas	Razón F	Valor de probabilidad
Nivel	26.50	3	8.83	9.61	.000***
Clasificación	4.04	1	4.04	4.40	.038*
Seriación	30.31	1	30.31	33.00	.000***
Error	117.60	128	0.92		

Resultados

El primero de los análisis de varianza considera, como variable dependiente la *conservación de las cantidades discretas*, como variables independientes (covariables) la *clasificación* y la *seriación*, actuando el *nivel* como factor de clasificación. Los resultados de este análisis se reflejan en la Tabla 1.

El modelo explica el 65.7% de la variable dependiente (coeficiente de determinación múltiple, $r^2 = 0.657$).

La covariante seriación resulta altamente significativa (1‰) y aunque la variable clasificación también resulta significativa, su significación es sensiblemente menor (5%). Por último, las diferencias de niveles manifiestan un comportamiento significativamente diferente (1‰).

Como se puede observar en la Figura 1, que a continuación se detalla, estas diferencias entre niveles se dan entre los niveles 1 contra 2; 1 contra 3; 1 contra 4; 2 contra 4 y 3 contra 4, no apareciendo diferencias en la comparación entre los niveles 2 y 3.

El segundo de los análisis de varianza considera como variable dependiente la *conservación de las cantidades continuas* y, al igual que en el modelo anterior, las variables *clasificación* y *seriación*, son las variables independientes del modelo, actuando el *nivel* como factor de clasificación. Los resultados de este análisis se reflejan en la Tabla 2.

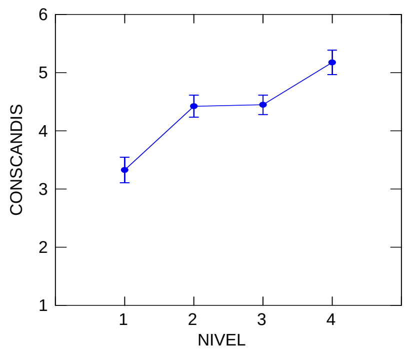

Figura 1: Diferencias interniveles para la variable *conservación de las cantidades discretas.*

Tabla 2: ANOVA para la variable dependiente «conservación de las cantidades continuas».

Fuente	Sumas de Cuadrados	Grados de libertad	Medias Cuadráticas	Razón F	Valor de probabilidad
Nivel	40.55	3	13.52	11.23	.000***
Clasificación	0.29	1	0.29	0.24	.628 (ns)
Seriación	27.25	1	27.25	22.63	.000***
Error	154.11	128	1.20		

El modelo explica el 55.7% de la variable dependiente (coeficiente de determinación múltiple, $r^2 = 0.557$).

La covariante seriación resulta altamente significativa (1‰). Sin embargo, en este modelo, la variable clasificación no resulta significativa.

Con relación al factor de agrupamiento, que hemos denominado nivel educativo, se puede comprobar que los sujetos adscritos a los distintos niveles muestran un comportamiento diferente ante la variable dependiente del modelo y estas diferencias presentan un alto nivel de significación (1‰).

Estas diferencias internivel, como se puede observar en la Figura 2, al igual que en el caso anterior, se manifiestan entre los niveles 1 contra 2; 1 contra 3; 1 contra 4; 2 contra 4 y 3 contra 4, no apareciendo diferencias en la comparación entre los niveles 2 y 3.

Finalmente, el tercero de los análisis de varianza considera, como variable dependiente la prueba específica de *número* y como variables independientes (covariables) la *clasificación* y la *seriación*, actuando el *nivel* como factor de clasificación. Los resultados de este análisis se reflejan en la Tabla 3.

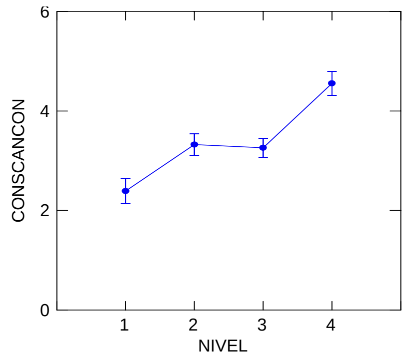

Figura 2: Diferencias interniveles para la variable *conservación de las cantidades continuas.*

Tabla 3: ANOVA para la variable dependiente «número».

Fuente	Sumas de Cuadrados	Grados de libertad	Medias Cuadráticas	Razón F	Valor de probabilidad
Nivel	148.08	3	49.36	8.78	.000***
Clasificación	28.47	1	28.47	5.07	.026*
Seriación	94.56	1	94.56	16.82	.000***
Error	719.62	128	5.62		

El modelo explica el 61.9% de la variable dependiente (coeficiente de determinación múltiple, $r^2 = 0.619$).

La covariante seriación resulta altamente significativa (1‰) y aunque la variable clasificación también resulta significativa, su nivel de significación es sensiblemente menor (5%; $\alpha \leq .026$). Por último, las diferencias de niveles vuelven a manifestar un comportamiento significativamente diferente (1‰).

Sin embargo, ahora, como se puede observar en la Figura 3 que a continuación se detalla, estas diferencias entre niveles se dan entre todas las comparaciones posibles, es decir en los niveles 1 contra 2; 1 contra 3; 1 contra 4; 2 contra 3; 2 contra 4 y 3 contra 4.

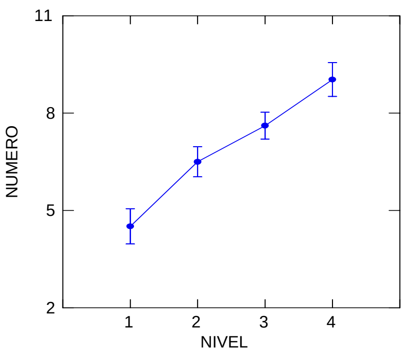

Figura 3: Diferencias interniveles para la variable *número.*

Conclusiones

Los resultados obtenidos en nuestro trabajo nos permiten elaborar unas conclusiones que van a girar en torno a cuatro ejes:

1. Los tres modelos planteados nos permiten explicar un porcentaje de varianza de las nociones numéricas que resulta a todas luces insuficiente para poder asegurar que el número, en cualquiera de las vertientes abordadas (conservación de las cantidades discretas, conservación de las cantidades continuas o composición y descomposición numérica), pueda ser considerado como síntesis de clase de clases y clase de relaciones asimétricas.
2. Las pruebas piagetianas de conservación de las cantidades (tanto discretas, como continuas) no permiten discriminar los niveles de transición inter-estadios.
3. Existe un paralelismo en la ejecución de los sujetos entre la conservación de las cantidades continuas y discretas con un ligero desfase entre ambas, resultando una tarea más compleja la conservación de las cantidades continuas.
4. El número tiene un componente ordinal que resulta más potente que el cardinal para explicar el constructo.

En efecto, la primera de nuestras conclusiones pone en entredicho las teorías que postulan el origen psicológico del número desde una perspectiva reduccionista, bien por reducción a la lógica de clases, bien por reducción a las relaciones asimétricas y a las diferencias ordenadas ya que el porcentaje de varianza explicado por las variables independientes deja, en el mejor de los casos (conservación de las cantidades discretas), casi un 35% de la varianza del constructo sin explicar. Esto nos conduce a postular que el número presenta unos componentes distintos a los de la lógica (sea una lógica de clases o de relaciones), bien porque las estrategias básicas de aprehensión sean distintas o bien porque la estructura numérica esté alimentada o constituida por unidades funcionales de conductas diferentes o distintos sistemas de relaciones. En el primero de los casos nos inclinamos por sugerir que la investigación debe continuar profundizando en las estrategias generales de selección y organización. En el segundo caso, nos inclinamos a pensar que el sistema de relaciones que caracteriza la estructura numérica es diferente al que es propio de la estructura lógica.

Con relación a la segunda de nuestras conclusiones, parece evidente que una simple mirada a las representaciones gráficas de los gráficos 1 y 2, nos pone de manifiesto la ausencia de diferencias entre los sujetos de 5 y 6 años. Esta situación no se produce en la medida efectuada a partir de situaciones numéricas específicas (gráfico 3). Todo ello nos sugiere que la propuesta de Piaget parece una solución macrogenética al problema y, por tanto, se debería continuar profundizando en la microgénesis inter-estadio para poder llegar a comprender el auténtico cambio comportamental del sujeto.

La tercera de nuestras conclusiones hace referencia al tan manido *decalage* horizontal, pero hemos querido incluirlo aquí porque quizás su explicación se encuentre en la misma línea de solución que la apuntada para el apartado 1 de nuestras conclusiones y, en parte, este desfase sea debido a la disponibilidad de las estrategias del sujeto en función de las demandas y las características de la tarea. Desde un punto de vista estructural, este desfase podría ser explicado, tal y como se desprende de nuestro análisis estadístico, por el hecho de que en la conservación de las cantidades continuas el sujeto no pone en funcionamiento esquemas de clasificación porque las demandas de la tarea en esta prueba impide que la atención ejecutiva del sujeto se centre en las relaciones parte-todo (cuantificación intensiva) y sus estrategias de selección le permiten efectuar solamente comparaciones parte-parte o todo-todo.

Finalmente, la cuarta de nuestras conclusiones apunta a que el sujeto considera el número y la serie de los números como un conjunto ordenado de forma creciente (o decreciente) que está sujeta a las relaciones de orden «mayor que» y «menor que», tal y como proponen los ordinalistas; en mucha mayor medida que como una serie encajada de entidades, tal y como proponen los cardinalistas.

Nuestros resultados nos obligan, por tanto, a rechazar la hipótesis planteada en nuestro trabajo ya que, si bien es cierto que el porcentaje de varianza explicado por nuestro modelo es alto, resulta a todas luces insuficiente para explicar la construcción del número en términos de causa-efecto. Desde el punto de vista psicopedagógico esto nos obliga a sugerir que las actividades de clasificación y seriación pueden ser un buen soporte para las actividades numéricas, pero actuando de forma complementaria a ellas, es decir, parafraseando un bonito trabajo piagetiano, clases, relaciones y números son contenidos instruccionales diferentes sobre los que actúan esquemas y sistemas relacionales distintos, con mecanismos asimiladores, probablemente diversificados y acomodaciones que confieren significados distintos a la realidad, aunque, sin lugar a dudas, se complementan entre sí para una mejor adaptación del sujeto a la realidad.

Referencias

Becker, F. (1998). Epistémologie génétique et pratique pédagogique. *Bulletin de Psychologie*, *51*, 613-622.

Collette, J.P. (1985). *Historia de las matemáticas*, Vol. 1. Madrid: Siglo XXI.

Ciancio, D., Sadovsky, A., Malabonga, V., Trueblood, L. y Pasnak, R. (1999). Teaching classification and seriation to preschoolers. *Child Study Journal*, *29*(3), 193-205.

Garret, K.N., Busby, R.F. y Pasnak, R. (1999). Cognitive gains from extended play at classification and seriation. *Journal of Research and Development in Education, 32*(4), 257-263.

Mareschal, D. y Shultz, T.R. (1999) Development of children's seriation: A connectionist approach. *Connection Science: Journal of Neural Computing, Artificial Intelligence and Cognitive Research*, *11*(2), 149-186.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1959). *La genèse des structures logiques elémentaires. Classifications et sériations.* París : Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. y Szeminska, A. (1941). *La genèse du nombre chez l'enfant*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.

Planche, P. (1998). La construction des notions spatiales chez les enfants intellectuellement précoces âges de 6 à 8 ans. *Enfance*, *2*, 159-171.

Pons, R.M. y Serrano, J.M. (2006). Determinación de niveles genéticos en la construcción del número para la programación de actividades en Educación Infantil. *Actas del I Congreso Internacional de Educación Lógico-Matemática en Educación Infantil.* Madrid (España), 28, 29 y 30 de abril de 2006.

Serrano, J.M. (1982). *Un estudio de validación convergente para determinar los niveles genéticos en la construcción del concepto de número.* Tesis doctoral (no publicada). Murcia: Universidad de Murcia.

Serrano, J.M. (1989). *Un modelo causal para analizar la construcción del número.* Memoria final (no publicada). Madrid: DGICYT.

Serrano, J.M. (2006). *La construcción del concepto de número: Implicaciones para la Educación Infantil.* Valladolid: Editorial de la Infancia.

Van De Rijt, B.A.M. y Van Luit, J.E.H. (1999). Milestones in the development of infant numeracy. *Scandinavian Journal of Psychology, 40*(1), 65-71.

(Artículo recibido: 8-4-2008; aceptado: 30-7-2008)