TEMA 1: FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE

Curso 2009/2010

ESQUEMA DE CONTENIDOS

- Concepto de función y de gráfica de una función.
- Límites. Propiedades.
- Continuidad.
- Derivabilidad.
- Análisis de los intervalos de (de)crecimiento y concavidad y definición de extremo local y global.
- Análisis gráfico de la continuidad, concavidad, (de)crecimiento y extremos de una función.

OBJETIVOS GENERALES

1. Conocer el concepto de función real de una variable, su dominio y su gráfica.
2. Saber el calcular dominio de una función.
3. Conocer las funciones elementales y sus gráficas.
4. Saber realizar operaciones algebraicas y composición de funciones.
5. Conocer algunas funciones usadas en economía y empresa.

[1]Esquema de contenidos de Matemáticas para la Empresa I para los grupos 1^oC, 1^oF y 1^oG

6. Conocer el concepto de límite, límites laterales, límites en el infinito y sus propiedades.

7. Saber calcular límites.

8. Saber el concepto de continuidad y sus propiedades respecto al álgebra de funciones.

9. Conocer el concepto de derivada de una función en un punto.

10. Conocer su interpretación. Relacionarla con la marginalidad y la elasticidad.

11. Saber calcular derivadas y utilizar la regla de la cadena.

12. Conocer el concepto de crecimiento y decrecimiento en un punto y en un intervalo.

13. Conocer el concepto de concavidad y convexidad en un intervalo.

14. Conocer el concepto de extremo relativo y extremo absoluto.

15. Saber analizar gráficamente la continuidad, concavidad, (de)crecimiento, extremos y asíntotas horizontales y verticales de una función.

1 Concepto de función y de gráfica de una función

1.1 Funciones.

Definición 1 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se denominan* intervalos abiertos *a los subconjuntos de $\mathbb{R}$:*
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \setminus a < x < b\}$
$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \setminus x < b\}$
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \setminus a < x\}$

Definición 2 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se denominan* intervalos cerrados *a los subconjuntos de $\mathbb{R}$:*
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \setminus a \leq x \leq b\}$
$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \leq b\}$
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \setminus a \leq x\}$

Definición 3 *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$. *Se denominan* intervalos semicerrados o semiabiertos *a los subconjuntos de* $\mathbb{R}$*:*
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \setminus a < x \leq b\}$
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \setminus a \leq x < b\}$

Definición 4 *Dado un subconjunto de la recta real* $D \subseteq \mathbb{R}$, *se llama* función *real de variable real definida en* D *a toda aplicación* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que asocia a cada elemento* $x \in D$ *un sólo elemento de* $\mathbb{R}$.

Las funciones de este tipo se suelen representar mediante expresiones de la forma $y = f(x)$ donde x es la variable independiente e y es la variable dependiente (depende de x).

Definición 5 *Dada una función real de variable real,* f, *se define su* dominio, *y se denota por* $Dom(f)$, *como el subconjunto de números reales para los cuales la función está definida, es decir,*

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \exists f(x)\}.$$

1.2 Gráfica de una función.

Definición 6 *Dada una función* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *se denomina gráfica de la función al conjunto de todos los pares* $(x, f(x))$ *donde* x *pertenece al dominio de* f, *es decir,*

$$Gr(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \in Dom(f),\ y = f(x)\right\}.$$

Funciones elementales.

i) *Funciones lineales:*

$$y = ax + b$$

La *pendiente* de una función lineal es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de coordenadas horizontal, y coincide con el valor de a. Dependiendo del signo de la pendiente la función será creciente, decreciente o constante. [1]

ii) *Funciones cuadráticas:*

$$y = ax^2 + bx + c$$

Su representación gráfica está dada por una parábola.

[1] Las rectas de pendiente ∞, de ecuación $x = a$, no son funciones.

iii) *Funciones potenciales:*

$$y = x^m$$

siendo m un número fijo.

Propiedades:

- Positividad. $x^m > 0$ para todo $x > 0$ y $m \in \mathbb{R}$.
- $x^0 = 1$.
- $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.
- $x^m / x^n = x^{m-n}$.
- $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$.
- $x^{-m} = (1/x)^m$.
- $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$.
- $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$.
- $(x/y)^m = x^m / y^m$.
- $(x/y)^{-m} = (y/x)^m$.
- Si $x > 1$, entonces

$$\begin{cases} m > 0 & \Rightarrow \quad x^m > 1 \\ m < 0 & \Rightarrow \quad x^m < 1 \end{cases}$$

- Si $0 < x < 1$, entonces

$$\begin{cases} m > 0 & \Rightarrow \quad x^m < 1 \\ m < 0 & \Rightarrow \quad x^m > 1 \end{cases}$$

iv) *Funciones exponenciales:*

$$y = e^x$$

Propiedades:

- $e^x > 0$.
- $e^0 = 1$.
- Como $e > 1$ ($e \cong 2.7182$), se verifica que:
  $e^x > 1$ si $x > 0$ y $e^x < 1$ si $x < 0$
- Conserva igualdades y desigualdades:
  $x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$
  El símbolo $<$ puede ser sustituido por $>$, $\leq$, $\geq$, $=$ y $\neq$.

v) *Funciones logarítmicas en base e (neperianos):*

$$y = ln(x)$$

El logaritmo (neperiano) del número x se define como el exponente al que hay que elevar e para obtener x. Es decir:

$ln(x) = y \Leftrightarrow e^y = x$

Propiedades:

- Las operaciones *tomar exponencial* y *tomar logaritmo* son operaciones inversas, puesto que $e^{ln(x)} = x$ y $ln(e^x) = x$.
  Ejemplos:
  $ln(1) = 0$ ya que $e^0 = 1$.
  $ln(e) = 1$ ya que $e^1 = e$.
  $ln(1/e) = -1$ ya que $e^{-1} = 1/e$.
- Signo de $ln(x)$: $ln(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$; $ln(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$
- $ln(x \cdot y) = ln(x) + ln(y)$.
- $ln(x/y) = ln(x) - ln(y)$.
- $ln(x^y) = y \cdot ln(x)$.
- Conserva igualdades y desigualdades:
  $x < y \Leftrightarrow ln(x) < ln(y)$
  El símbolo $<$ puede ser sustituido por $>$, $\leq$, $\geq$, $=$ y $\neq$.
- La propiedad $e^{ln(x)} = x$ permite transformar cualquier potencia x^a en una exponencial de la siguiente forma:

$$x^y = e^{ln(x^y)} = e^{y \cdot ln(x)}$$

vi) *Funciones hiperbólicas:*

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Su representación está dada por una hipérbola.
Una función racional especial porque tiene aplicaciones interesantes en Economía y Empresa es:

$$y = \frac{a}{x}$$

vi) *Función valor absoluto:*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Operaciones con funciones.

Dadas las funciones de una variable $y = f(x)$ y $z = g(x)$ se definen las siguientes operaciones:

i) *Suma y resta:* $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$.

ii) *Producto:* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

iii) *Cociente:* Si $g(x) \neq 0$, $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$.

iv) *Composición:* Dados los subconjuntos de la recta real $A, B \subseteq \mathbb{R}$, si $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la composición de f con g (o f compuesta con g) es la función $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Funciones usadas en Economía y Empresa.

i) *Función de coste:* El coste total (C_T) de producir una cantidad (x) de un determinado bien es la suma del coste variable (C_V) y del coste fijo (C_F).

$$C_T(x) = C_V(x) + C_F$$

ii) *Función de ingreso:* El ingreso total (I_T) que una empresa recibe por vender la cantidad (x) de un determinado bien que se vende a un precio p viene dado por:

$$I_T(x) = p \cdot x$$

iii) *Función de beneficios:*

$$B(x) = I_T(x) - C_T(x) = p \cdot x - C_T(x)$$

iv) *Función de producción:* Relaciona la cantidad utilizada de un factor de producción (input) con la producción obtenida (output). Se suelen emplear funciones de producción de la forma $Q = f(K)$ ó $Q = f(L)$, donde Q representa la cantidad de producto que se obtiene utilizando una cantidad K ó L de factor capital o trabajo, respectivamente.

v) *Función de demanda:* Relaciona la cantidad consumida de un bien Q_d con su precio p. Es de la forma $Q_d = f(p)$.

vi) *Función de oferta:* Relaciona la cantidad producida de un bien Q_s con su precio p. Es de la forma $Q_s = f(p)$.

2 Límites. Propiedades

En ocasiones es interesante conocer no sólo el valor de una función en un punto sino también qué ocurre en puntos cercanos a él. Para realizar dicho estudio se utiliza el concepto de límite.
Límite en un punto.

Definición 7 *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*.*

i) *Diremos que* f *tiene límite* L *(finito) cuando* x *tiende a* x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si los valores de $f(x)$ *se pueden aproximar tanto como queramos a* L *cuando* x *está suficientemente próximo a* x_0 *pero no igual a* x_0*.*

ii) *Diremos que* f *tiene límite* $+\infty$ *(respectivamente,* $-\infty$*) cuando* x *tiende a* x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

si los valores de $f(x)$ *se hacen tan grandes (respectivamente, tan pequeños) como queramos cuando* x *está suficientemente próximo a* x_0 *pero no igual a* x_0*.*

Definición 8 ***Límites laterales de*** $f(x)$ ***en*** x_0*:*

Diremos que f *tiene límite* L *(finito) cuando* x *tiende a* x_0 *por la derecha:*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

si los valores de $f(x)$ *se pueden aproximar tanto como queramos a* L *cuando* x *es mayor que* x_0 *y está suficientemente próximo a* x_0*, pero no es igual a* x_0*.*

Diremos que f *tiene límite* L *(finito) cuando* x *tiende a* x_0 *por la izquierda:*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

si los valores de $f(x)$ *se pueden aproximar tanto como queramos a* L *cuando* x *es menor que* x_0 *y está suficientemente próximo a* x_0*, pero no es igual a* x_0*.*

Proposición 9 *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*. Existe* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *si y sólo si* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$*.*

Proposición 10 *El límite de una función, si existe, es único.*

Límite en el infinito.
La definición de límite en un punto se generaliza fácilmente al caso de límites en el infinito.

Definición 11 *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*. Diremos que el límite de f cuando* $x \to +\infty$ *(respectivamente, cuando* $x \to -\infty$*) es L (finito),* $+\infty$ *ó* $-\infty$*, cuando para valores de x suficientemente grandes (respectivamente, pequeños), los valores de* $f(x)$ *tienden a L,* $+\infty$ *ó* $-\infty$*. Se escribe:*
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$, $+\infty$ ó $-\infty$

Propiedades de los límites.
Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$. Entonces:

1. $\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = L + M$.
2. $\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$.
3. Si $M \neq 0$, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.
4. Si $L > 0$, $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = L^M$

Las propiedades anteriores se pueden generalizar si algún límite es infinito, adoptando igualdades simbólicas fácilmente deducibles. Algunas de estas igualdades son:

$$\begin{aligned}
+\infty + \infty &= +\infty;\ -\infty - \infty = -\infty;\ \pm\infty + L = \pm\infty \text{ si } L \in \mathbb{R};\\
\pm\infty \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty;\ \pm\infty \cdot L = \pm\infty \text{ si } L > 0;\ \pm\infty \cdot L = \mp\infty \text{ si } L < 0,\\
\frac{1}{+\infty} &= 0;\ \frac{\pm\infty}{L} = \pm\infty \text{ si } L \in \mathbb{R} \text{ y } L > 0;\ \frac{\pm\infty}{L} = \mp\infty \text{ si } L \in \mathbb{R} \text{ y } L < 0;\\
L^{+\infty} &= \begin{cases} 0 & \text{si } |L| < 1 \\ +\infty & \text{si } L > 1 \end{cases};\quad (+\infty)^L = \begin{cases} 0 & \text{si } L < 0 \\ +\infty & \text{si } L > 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Cálculo de límites de funciones de una variable.
En general, el límite de una función en una variable se calcula sustituyendo la variable x por el punto donde se quiere calcular el límite (x_0, $+\infty$ ó $-\infty$). Si el valor que se obtiene es finito, $+\infty$ ó $-\infty$, ese valor es el resultado del límite. Existen casos en los que no se puede asegurar a priori el valor del límite de una operación con funciones. Estas situaciones se conocen con el nombre de indeterminaciones.
Límites indeterminados.
Representadas simbólicamente, algunas indeterminaciones son:

$$1^{\infty} \quad ; \quad 0 \cdot \infty \quad ; (+\infty) + (-\infty); \quad \frac{0}{0} \quad \text{y} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Para resolver una indeterminación hay que aplicar la técnica apropiada: sacar factor común y simplificar, multiplicar por el conjugado, regla de L'Hôpital (que estudiaremos en el apartado 4 del tema), etc.

1. Las indeterminaciones 1^{∞} se resuelven aplicando el siguiente resultado, que también sirve cuando $x \to +\infty$ ó $-\infty$:

   Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 1^{\infty} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)}$

2. Las indeterminaciones del tipo $0 \cdot \infty$ no se resuelven de una forma estándar. Un modo de resolverlas es reduciéndolas a indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$.

3. La regla de L'Hôpital se puede aplicar para resolver indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ e indeterminaciones que puedan ser transformadas de las anteriores.

Cálculo de asíntotas:

i) Si existe un punto a tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ó $-\infty$, entonces $x = a$ es una *asíntota vertical.*

ii) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b \neq \pm\infty$, entonces $y = b$ es una *asíntota horizontal.*

Las curvas $y = f(x)$ no cortan a las asíntotas verticales pero sí pueden cortar a las asíntotas horizontales.

3 Continuidad

En los modelos económicos, se supone que la mayoría de las funciones consideradas verifican que a variaciones infinitesimales de la variable exógena corresponden variaciones infinitesimales de la variable endógena. Cuando esto ocurre se dice que las funciones son continuas.

Se dice que una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en un punto x_0 si y sólo si el límite de la función en el punto coincide con su valor en él:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

En caso contrario, diremos que f es discontinua en x_0. Clasificamos las discontinuidades en la forma:

1. De primera especie: Si existen los límites laterales, pero:
   a) No coinciden (Discontinuidad de salto).
   b) Coinciden entre sí pero no con $f(x_0)$ (Discontinuidad evitable).
2. De segunda especie: Alguno de los límites, o no existe, o es infinito.

Definición 12 *La función* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua en un conjunto* $A \subseteq D$ *si es continua en cada uno de sus puntos.*

Propiedades.
Sean las funciones $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, ambas continuas en el punto x_0 de D, entonces se verifica que

i) $f + g$ es una función continua en x_0.

ii) $f \cdot g$ es una función continua en x_0.

iii) $\alpha \cdot f$ es una función continua en x_0 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

iv) $f \diagup g$ es una función continua en x_0 siempre que $g(x) \neq 0$.

Las propiedades anteriores nos permiten probar fácilmente la continuidad de multitud de funciones:

i) Los polinomios son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.

ii) Las funciones racionales son continuas en todo su dominio. Es decir, son continuas en todos los puntos que no anulan el denominador.

Otra propiedad importante de la continuidad es que la composición de funciones continuas es una función continua. De esta propiedad se concluye que:

i) Una función exponencial es continua donde lo es la función exponente.

ii) Una función logarítmica con argumento positivo es continua donde lo es su argumento.

iii) El valor absoluto de una función continua es una función continua.

iv) La raíz (de cualquier índice) de una función continua es una función continua donde exista la raíz.

4 Derivabilidad.

La derivabilidad de una función $y = f(x)$ permite conocer la variación infinitesimal de la variable y respecto de la variación infinitesimal de la variable x.

Definición 13 *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de una variable, y sea un punto $x_0 \in D$, se dice que f es* derivable *en x_0 si existe el límite siguiente*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Cuando este límite existe, al valor que toma se le llama derivada *de f en x_0 y se denota por $f'(x_0)$ o $\frac{df}{dx}(x_0)$.*

La derivada tiene una importante interpretación geométrica, ya que la derivada de f en un punto $x_0 \in D$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Interpretación geométrica.
Sea $y = f(x)$. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $x_0 + \triangle x, f(x_0 + \triangle x)$ es

$$\frac{x - x_0}{(x_0 + \triangle x) - x_0} = \frac{y - f(x_0)}{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}$$

Efectuando los productos cruzados, se obtiene la expresión:

$$y = \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} x + f(x_0) - \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} x_0$$

cuya pendiente es $m = \dfrac{f(x_0 + \triangle\, x) - f(x_0)}{\triangle\, x}$.
Si ésta es la ecuación de una recta secante a la curva $y = f(x)$, para convertir esta recta en *recta tangente* hay que calcular sucesivas aproximaciones de una recta que pase por el punto $(x_0, f(x_0))$ y cuya pendiente se obtenga cuando $\triangle\, x \to 0$. Esto nos lleva a la definición de derivada de una función en un punto.
La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Interpretación económica.
La derivación de funciones de una variable es una técnica muy usada en Microeconomía, en Análisis Estático-Comparativo, donde el problema gira en torno al cálculo de tasas de cambio. Además, una aplicación muy frecuente en Economía y Empresa es la obtención de funciones marginales (función de coste marginal, de ingreso marginal, etc.) a partir de funciones totales (función de coste total, de ingreso total, etc.)

i) *Tasa de cambio:* Cuando en la variable independiente x se produce una variación o incremento $\triangle\, x$ (positivo o negativo), pasando del valor inicial x_0 a $x_0 + \triangle\, x$, la variable dependiente pasa de $f(x_0)$ a $f(x_0 + \triangle\, x)$. El cambio real en la variable y es $\triangle\, y = f(x_0 + \triangle\, x) - f(x_0)$. El cociente de los incrementos

$$\frac{\triangle\, y}{\triangle\, x} = \frac{f(x_0 + \triangle\, x) - f(x_0)}{\triangle\, x}$$

se llama tasa (media) de cambio o de variación de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 para un incremento de la variable independiente igual a $\triangle\, x$.

ii) *Tasa de cambio instantánea:*La derivada se interpreta como la *tasa de cambio instantánea*. Es decir, como una medida que recoge cuánto cambia una función $y = f(x)$ cuando la variable x sufre variaciones muy pequeñas ($\triangle\, x \to 0$).
Ejemplo: Se estima que dentro de x meses los beneficios que obtenga una cierta empresa serán de $B(x) = x^2 + 20x + 8000$. ¿Cuál será la tasa de cambio instantánea de los beneficios con respecto al tiempo dentro de 15 meses?

$B'(x) = 2x + 20$
$B'(15) = 2 \cdot 15 + 20 = 50$

iii) *Tasa de cambio porcentual:* Se define como:

$$100\frac{f'(x)}{f(x)}$$

iv) *Elasticidad:* Otra aplicación de la derivación es la elasticidad.
Dada una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se define la *elasticidad media* como:

$$E_M(a) = \frac{\frac{\Delta f(a)}{f(a)}}{\frac{\Delta a}{a}}$$

La *elasticidad* de f con respecto a x en un punto $a \in \mathbb{R}$ se define como:

$$Ef(a) = \frac{a}{f(a)}f'(a)$$

Por tanto, la elasticidad de una función f es una medida de la variación relativa de f ante la variación de 1% de la variable x.

Ejemplo 1: Supongamos que la elasticidad de la demanda para el precio 70 vale 5, esto es: $ED(70) = 5$, su significado es que cuando el precio es 70, un aumento en dicho precio del 1%, da lugar a un aumento en la demanda del 5% (e igualmente, una disminución en dicho precio del 1%, da lugar a una disminución en la demanda del 5%).

A partir de esto, podemos saber la variación porcentual de la demanda ante cualquier variación porcentual de precio. Por ejemplo, en el caso anterior, ¿cuál sería la variación porcentual de la demanda cuando, siendo el precio 70, éste aumenta un 4%? La respuesta es que la demanda aumentaría un 20%, que se obtiene fácilmente, multiplicando $ED(70)$ (esto es, 5) por 4.

En general, para una función cualquiera $f(x)$, si $Ef(a) = b$, esto significa que cuando $x = a$ una variación en este valor del 1% da lugar a una variación en la función f de un b%. De la misma forma que en el ejemplo anterior, conociendo la elasticidad podríamos responder a la pregunta de cuál sería la variación porcentual de f ante una variación porcentual cualquiera de x, cuando $x = a$. Como antes, bastaría multiplicar esta última variación porcentual por la elasticidad.

Avancemos algo más; en el párrafo anterior, hablamos de variaciones, pero hay que precisar si se trata de aumentos o disminuciones. Consideremos ahora el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2: Supongamos que la elasticidad de la demanda para el precio 70 vale -2, esto es: $ED(70) = -2$, ¿que significa esto?. Su significado es que cuando el precio es 70, un **aumento** en dicho precio del 1%, da lugar a una **disminución** en la demanda del 2%. Esto es, como la elasticidad es **negativa**, las variaciones de precio y demanda son en sentido opuesto, esto es un aumento en una de ellas produce una disminución en la otra, y viceversa.

Por ejemplo, ¿cuál sería la variación porcentual de la demanda cuando, siendo el precio 70, aumenta un 4%? La respuesta sería ahora que la demanda **disminuiría** un 8%. Explicamos a continuación cómo se llega a esa respuesta: igual que en el ejemplo 1, multiplicamos la variación porcentual del precio (4) por la elasticidad (-2), y el resultado es -8, lo que significa que la demanda varía un 8% y que lo hace **disminuyendo (debido al signo -),** esto es lo que hemos dicho en la respuesta.

Veamos ahora, cuál sería la variación porcentual de la demanda cuando, siendo el precio 70, disminuye un 3%. Para responder a esto multiplicamos la variación porcentual del precio (que es **-**3, porque se trata de una disminución) por la elasticidad (-2), y el resultado es 6, lo que significa que la demanda varía un 6% y que lo hace **aumentando (debido al signo +).** La respuesta sería por tanto, que cuando, siendo el precio 70, éste disminuye un 3%, la demanda **aumenta** un 6%.

Resumiendo, en general, si $Ef(a) = b$,

¿cuál sería la variación porcentual de f ante un **aumento** del $r\%$ en x, cuando $x = a$? Para responder a esto, multiplicamos r por b, si este valor es positivo, la respuesta es: que f **aumentaría** un $(rb)\%$. Si rb es negativo, la respuesta es que f **disminuiría** un $(rb)\%$

¿cuál sería la variación porcentual de f ante una **disminución** del $r\%$ en x, cuando $x = a$? Para responder a esto, igual que antes, multiplicamos $(-r)$ por b, si este valor es positivo, la respuesta es: que f **aumentaría** un $(rb)\%$. Si rb es negativo, la respuesta es que f **disminuiría** un $(rb)\%$

Esquemáticamente, para obtener la variación porcentual de f ante un incremento del $r\%$ en x:

Multiplicar Ef por $\left\{ \begin{array}{c} r \text{ si es un aumento} \\ -r \text{ si es una disminución} \end{array} \right.$, el resultado de este producto será la correspondiente variación porcentual de f, que será un aumento si el producto es positivo, o una disminución si si el producto es negativo.

v) *Marginalidad:* Los economistas se interesan por lo que denominan *cambios marginales*. Para comprender a qué se refieren cuando hablan de ellos, consideremos la función de costes de una empresa que produce un único bien. Así $x_0(x)$ simboliza el coste (medido en unidades monetarias) que supone producir una cantidad x de dicho bien. Si se incrementa la producción en una unidad ($h = 1$), de x^* a $x^* + 1$, se produce un incremento en los costes, $C(x^* + 1) - C(x^*) \cong C'(x^*)$, que es el *coste marginal*. Veámoslo:
Suponiendo que $C(x)$ es una función derivable en $x = x^*$,

$$C(x^*) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x^* + h) - C(x^*)}{h},$$

lo que significa que para valores muy pequeños de h

$$C(x^*) \cong \frac{C(x^* + h) - C(x^*)}{h}$$

Para $h = 1$, se obtiene:

$$C(x^*) \cong \frac{C(x^* + 1) - C(x^*)}{1}$$

$$C(x^*) \cong C(x^* + 1) - C(x^*)$$

Por esta razón, en términos económicos, se define la función de costes marginales como la derivada de la función de costes. Análogamente, se obtiene el beneficio marginal, el ingreso marginal y la productividad marginal.

Ejemplo 1: Supongamos que la función de costes de una empresa es $C(x) = x^2 + 3$, donde x es el número de unidades producidas. El coste marginal cuando se producen 4 unidades es $C(4) = 2 \cdot 4 = 8$. Esto significa que si la producción se incrementa en 1 unidad, de 4 a 5 unidades, entonces el incremento aproximado en el coste total es de 8 u.m.

Ejemplo 2: La función de ingreso total de una empresa es $I(x) = 40x - 0.02x^2$, donde x son las unidades producidas. La función de ingreso marginal es $I'(x) = 40 - 0.04x$ y el ingreso marginal cuando se producen 100 unidades es $I'(100) = 36$. Es decir, cuando el número de unidades producidas pasa de 100 a 101 el incremento aproximado en el ingreso total es de 36 u.m. Para un nivel de producción $x = 1000$ unidades, el ingreso marginal es $I'(1000) = 0$, lo que significa que si se produce 1 unidad adicional, de 1000 a 1001 unidades, el ingreso total no se incrementa.

Definición 14 *Dada una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se llama función derivada de f a la función $f^{'} : D_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que asocia a cada número real x el valor de su derivada en ese punto.*

$$D_1 = \{x \in R \mid \exists f^{'}(x)\} \text{ es el dominio de derivabilidad de } f.$$

En la siguiente tabla se presentan las funciones derivadas más utilizadas.

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x^n	nx^{n-1}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$

Se cumplen además las siguientes propiedades:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(\alpha \cdot f)'(x) = \alpha \cdot f'(x) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(\tfrac{f}{g})'(x) = \tfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Regla de la cadena: Si $z = g(y)$ e $y = f(x)$, entonces z es una función de x por composición de funciones, $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Si z es una función derivable de y e y es a su vez una función derivable de x, entonces z es función derivable de x y su derivada es:

$$z' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Esto es:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Regla de L'Hôpital:
Sean f y g funciones derivables en un punto x_0, siendo $g'(x_0) \neq 0$ y $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Entonces, si existe $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ también existe $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, y se cumple que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

5 Análisis de los intervalos de (de)crecimiento y concavidad y definición de extremo local y global

Funciones crecientes y decrecientes.

Definición 15 *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Se dice que:*

i) f *es* creciente *en un punto x_0 si para puntos x próximos a x_0 tales que $x \leq x_0$ se verifica que $f(x) \leq f(x_0)$.*

ii) f *es* decreciente *en un punto x_0 si para puntos x próximos a x_0 tales que $x \leq x_0$ se verifica que $f(x) \geq f(x_0)$.*

Definición 16 *Dada una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que:*

i) f *es* creciente *en un intervalo $I \subseteq D$ si es creciente en todos los puntos del intervalo, esto es, si para cualquier par de números x_1, $x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) \leq f(x_2)$.*

ii) f *es* estrictamente creciente *en un intervalo $I \subseteq D$ si es estrictamente creciente en todos los puntos del intervalo, esto es,si para cualquier par de números x_1, $x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) < f(x_2)$.*

iii) f *es* decreciente *en un intervalo $I \subseteq D$ si es decreciente en todos los puntos del intervalo, esto es,si para cualquier par de números x_1, $x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

iv) f *es* estrictamente decreciente *en un intervalo $I \subseteq D$ si es estrictamente decreciente en todos los puntos del intervalo, esto es,si para cualquier par de números x_1, $x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) > f(x_2)$.*

Funciones cóncavas y convexas.

Una función $y = f(x)$ es convexa (ó cóncava hacia arriba) en un intervalo cuando el segmento que une dos puntos cualesquiera de la gráfica siempre está por encima de la gráfica, excepto en los extremos. Por el contrario, es cóncava (ó cóncava hacia abajo) cuando el segmento que une dos puntos cualesquiera de la gráfica de una función se sitúa por debajo de la gráfica.

Extremos relativos o locales.

i) Se dice que f tiene un *máximo relativo o local* en x_0 si para todo x próximo a x_0 que pertenezca al dominio de f, se tiene que $f(x_0) \geq f(x)$.

ii) Se dice que f tiene un *mínimo relativo o local* en x_0 si para todo x próximo a x_0 que pertenezca al dominio de f, se tiene que $f(x_0) \leq f(x)$.

Extremos globales:

i) Una función $y = f(x)$ tiene un *máximo absoluto o global* en x_0 cuando se verifica $f(x_0) \geq f(x)$ para cualquier $x \in Dom(f)$.

ii) Una función $y = f(x)$ tiene un *mínimo absoluto o global* en x_0 cuando se verifica $f(x_0) \leq f(x)$ para cualquier $x \in Dom(f)$.

6 Análisis gráfico de la continuidad, concavidad, (de)crecimiento y extremos de una función