Artículo

Proclo: constructivismo y pre-intuicionismo en la geometría griega

Álvaro José Campillo Bo

Universidad de Murcia

alvarocampillobo@gmail.com

Recibido: 02/02/2019

Aceptado: 17/03/2019

Resumen:

En este artículo ilustraré la filosofía de la matemática de Proclo de acuerdo a los enfoques constructivistas contemporáneos, principalmente los del intuicionismo. Presentándolo como un autor pre-intuicionista, intentaré contribuir a la discusión actual analizando algunas posturas de la filosofía antigua. Tengo la esperanza de cubrir esta laguna con una re-exposición de su filosofía de la matemática. Exploraré los orígenes de su teoría constructivista de la mente en la filosofía antigua y tardo-antigua (Aristóteles, Plotino y los estoicos) así como las fuentes de su posición en la controversia Académica sobre la naturaleza de los teoremas y los problemas entre Menecmo y Espeusipo.

Palabras clave: Platonismo; Intuicionismo; Proclo; Geometría

Abstract:

In this paper I will illustrate Proclus' philosophy of mathematics following contemporary constructivist approaches, mainly those of mathematical intuitionism. Presenting him as a pre-intuitionist author, I will attempt to contribute to the current discussion by analyzing certain claims of ancient philosophy in this field. It is my hope to fill this gap by a comprehensive reevaluation of Proclus' philosophy of mathematics. I will explore the origins of Proclus' theory of the constructivist mind in ancient and late ancient philosophy (Aristotle, Plotinus and the Stoics) as well as the sources of Proclus' position in the Academic controversy between Menaechmus and Speusippus concerning the nature of theorems and problems.

Key words: Platonism; Intuitionism; Proclus; Geometry

1.Introducción

En sus cursos sobre filosofía de la matemática recitados en Cambridge en 1951[1], L. E. J. Brouwer, padre del intuicionismo en filosofía de la matemática, rememoraba las palabras del matemático alemán L. Kronecker: 'Dios creó los números enteros y lo demás es obra del hombre'[2].

En su exposición, Brouwer indagó los antepasados del intuicionismo tal y como él mismo lo concibió y consideró como naturales predecesores 'pre-intuicionistas' a todos aquellos matemáticos que, al reflexionar sobre su propia disciplina y la naturaleza de los entes y verdades que trata, se aproximaron a las conclusiones del intuicionismo: que los objetos matemáticos son (1) una construcción mental (2) privada (3) y la interpretación de los valores de verdad de las proposiciones referidas a esta clase de construcciones nos impele a desechar algunos de los principios de la lógica clásica[3] (*principium tertii exclusi*, *duplex negatio* y sus equivalentes).

Por desgracia, Brouwer jamás fue más allá de la obra de I. Kant y de algunos matemáticos del siglo XIX en su examen del pre-intuicionismo, lo que dejó cantidad de filósofos y matemáticos afines a su postura desvinculados de esta tradición.

El objeto de este escrito es revindicar una de las posturas afines al 'pre-intuicionismo' en filosofía de la matemática tanto en la epistemología como en la gnoseología. Para ello me remontaré a la antigüedad tardía y analizaré el origen y coherencia de algunas secciones de la que puede considerarse la primera obra de filosofía de la matemática que hemos conservado en nuestra tradición: los '*Dos libros de comentario al primer libro de los elementos de Euclides'* (aún por traducir) de Proclo de Licia.

En la sección 2 presentaré un esbozo de la estrecha relación entre las disciplinas matemáticas y la filosofía antigua. En la sección 3 investigaré las fuentes de la postura de Proclo en tradiciones filosóficas anteriores, tanto clásicas como helenísticas. Sostendré que en su filosofía de la matemática puede rastrearse el nacimiento de una teoría combina posturas platónicas y constructivistas en un modo semejante al de Kronecker. En la sección 4 presentaré algunas de las conclusiones y las vías de investigación abiertas por el presente escrito.

2.Breve consideración sobre la matemática y la filosofía platónica

Antes de abordar el comentario de Proclo resulta conveniente detenernos en algunas consideraciones sobre la importancia de la matemática en la filosofía antigua y el origen de los tratados matemático-filosóficos (que tratan de aquello que nosotros llamaríamos 'filosofía de la matemática'). Dejaremos de lado la tradición numerológica heredada de los pitagóricos y nos centraremos en otros elementos de mayor alcance para comprender el aporte a la filosofía de las matemáticas nacido en la tradición platónica.

-Si revisamos muchas de las especulaciones clásicas en torno a la ontología o la teoría del conocimiento, nos percataremos de inmediato de que el objeto y el tenor de la discusión se corresponde a lo que hoy llamamos 'filosofía de la matemática', al presentársenos objetos de especulación tales como los criterios de validez, la relación entre los entes matemáticos y los entes materiales o el status ontológico del punto geométrico (para cada uno de estos ejemplos cf. Platón, *Rep.*, vi, 510c-e, *Tim.* 33b, y Aristóteles. *Met*. A.9, 992a.20). Estos debates se consideraban en modo tal enraizados en la matriz de la filosofía que en ningún caso se requirió de un nombre particular para una disciplina que indagase los principios filosóficos de las matemáticas, pues tanto requería la filosofía del saber matemático para dar forma a sus ideas como precisaba el saber matemático de la filosofía para discutir y asentar sus principios (a este respecto cf. el segundo ensayo sobre la geometría en obra de Vittorio Hösle[4] sobre la matemática en Platón). En una ya común perífrasis podríamos afirmar que, en el mundo clásico (y con particular énfasis en la tradición académica), la matemática sin la filosofía está ciega y la filosofía sin la matemática está vacía. En consecuencia, en el mundo griego, pensar la filosofía disociada de la matemática supondría un esfuerzo semejante o incluso mayor al que tendríamos que realizar nosotros si hoy día se nos pidiera que imaginásemos la política disociada de la economía.

-El análisis de la terminología y muchas de las operaciones lógicas utilizadas en la tradición filosófica nos revelará que cantidad de estos son conceptos expropiados del campo de la geometría y utilizados en sentido análogo u oblicuo como ideas filosóficas en discursos de segundo orden. Términos tan frecuentes en filosofía como 'demostración' (ἀπόδειξις), 'definición' (ὁρισμός), 'suposición' (ὑπόθεσις) o 'forma'/'aspecto' (εἶδος) adquieren un sentido técnico en el ámbito de la geometría a partir del lenguaje étnico. El propio ejercicio filosófico en torno a estas nociones extraídas de ámbitos particulares repercute a su vez en las disciplinas de las surgieron y las transforma como discurso de segundo orden.

-La propia existencia de los matemáticos-filósofos y filósofos-matemáticos como figuras culturales de primer orden es otro signo del vínculo indisoluble de estas dos disciplinas. Esto se pone ya de manifiesto en que los iniciados de la secta pitagórica recibiesen el nombre 'matemático' en el sentido dual del verbo griego originario (aprender/estar informado, μανθάνω) y el del hombre instruido en aritmética, música, astronomía, estereometría y geometría. Más allá de la legendaria inscripción en el pórtico de la Academia, es dato consabido que la mayoría de los filósofos de la antigüedad clásica y tardía fueron también hábiles matemáticos e, inversamente, que todos los grandes matemáticos se adhirieron a alguna escuela o corriente filosófica (generalmente a la platónica, a la que se suele adscribir al propio Euclides). Esto nos revela no sólo la dificultad para establecer fronteras claras entre ambas disciplinas en la concepción antigua, sino una continua reciprocidad intelectual y terminológica entre ambos discursos en la moneda de sus conceptos-ideas.

-En postremo lugar hemos de incidir en las ideas de necesidad (ἀγγάνκη/ ἀγγανκῖον) que desde sus albores la filosofía busca identificar en otros discursos y cuyo crisol se declara en la doctrina del silogismo y de la ciencia aristotélica (cf. *Anal. Post.* i. 6.7 4b5, i.10.76a 31-77a4). Dado que la tradición griega adoptó como modelo de racionalidad el discurso matemático, parece de todo punto natural que no sólo se aplicasen conceptos de raigambre matemática a otros discursos, sino que la propia metodología e idea de 'ciencia' como discurso riguroso (ἐπιστέμη) tuviese por modelo el razonamiento matemático. Así pues, cuando un sabio griego se preguntaba al escuchar un razonamiento '¿está este enunciado justificado en el discurso?' lo que se estaba preguntando en realidad era '¿qué rasgos en común tiene este enunciado, entramado en este discurso particular, con la necesidad y claridad de la demostración geométrica?'. En la medida en que se detectase tal similitud se consideraría ese discurso digno de confianza. No es de extrañar que Platón erigiese las disciplinas matemáticas no sólo como ineludibles en la educación de los 'escogidos' de la república, sino que prescribiese la metodología de discusión de las definiciones y análisis propia de los geómetras (ὑπόθεσις, ἀνάλυσις) para la discusión de las más altas ideas (cf. *Rep*. vi, 510 c-e, vii, 525c d). Resulta, pues, claro que la filosofía académica no comienza con una pregunta por la íntima naturaleza de las cosas, sino con una afirmación sobre conocimiento real: el discurso de la filosofía académica parte de la certeza de una disciplina concreta, de la geometría, a partir de cuyo modelo se definen los (hoy llamados) 'criterios de cientificidad' con los que se inaugurarán y enjuiciarán otras ramas del saber.

Por todo lo anteriormente asentado, no ha de sorprendernos que muchos de los grandes logros en la matemática y la 'filosofía de la matemática' antigua, hayan tenido lugar en la tradición platónica. Inversamente, podemos considerar que cualquier gran transformación en la matemática estaba destinada a producir un gran cambio en la filosofía, como lo supuso el descubrimiento de los números irracionales.

1.Proclo y su herencia

En la mayoría de las historias de las matemáticas y de la filosofía se considera a Proclo como un comentarista que lleva a cabo ejercicios sumarios de una tradición moribunda. Sin embargo, tras una mirada más atenta, resulta innegable que las obras de Proclo desarrollan posturas novedosas altamente sofisticadas, fruto de la gran madurez y variedad doctrinal de su tiempo. Como a todos consta, para la tradición del platonismo tardío los textos del peripato, la antigua sabiduría pitagórica o las doctrinas escépticas y estoicas son hallazgos conceptuales que deben utilizarse en la labor hermenéutica del legado del gran maestro: Platón. Así pues, la mayoría de las obras de Proclo consisten en una interpretación y 'puesta al día' de las doctrinas platónicas clásicas en el cuidadoso uso de doctrinas filosóficas tardías. En nuestro rescate de uno de sus aportes, nos centraremos en los *Dos libros de comentario al primer libro de los Elementos de Euclides* (abreviado a partir de ahora como CE). Expondremos y analizaremos genealógicamente las posiciones constructivistas que allí Proclo transmite. En la segunda parte, aventuraremos una hipótesis sobre sus posibles raíces en el debate gnoseológico sobre el status de problemas y teoremas matemáticos.

a.Constructivismo epistemológico y constructivismo gnoseológico

Resulta conveniente introducir a guisa de útil preámbulo una distinción entre el constructivismo aplicado a dos ámbitos filosóficos que suelen confundirse por la gran difusión y el uso promiscuo de los términos: la epistemología y la gnoseología. Mi postura en este artículo será que ambas posturas pueden hallarse en el CE.

Aunque esta distinción puede realizarse de otra manera y siguiendo otros criterios, me ajustaré a la dictada por la escuela filosófica de mayor vigor y difusión en el mundo de habla hispana: la teoría del cierre categorial de Gustavo Bueno[5]. Expliquemos estas nociones en forma parca y acorde a nuestro propósito. Entenderemos por epistemología el discurso que trata la relación entre el sujeto individual cognoscente (o su mente o su conciencia) y el objeto conocido, presuponiendo la distinción entre sujeto y objeto como condición de este mismo discurso. Por gnoseología, en cambio, entenderemos el discurso filosófico en torno a la naturaleza del saber como entramado teórico, así como el análisis de teorías y estructuras recurrentes consideradas en sí mismas, prescindiendo, por lo demás, del sujeto particular. Así pues, según Bueno, mientras que la epistemología resulta más próxima a una teoría estética de la percepción individual y subjetiva, hemos de considerar la gnoseología como teoría de la ciencia. Si consideramos las cuestiones fundamentales de cada discurso, mientras que la epistemología trata la pregunta '¿cómo conocen los sujetos?', la gnoseología tiene por objeto la pregunta '¿qué es la ciencia?'.

En este texto presentaremos tanto un enfoque constructivista tanto epistemológico como gnoseológico en lo relativo al conocimiento de la matemática en el CE. Puesto que no existe una versión en español del CE de Proclo, me he hecho cargo de esta presentación en lectura del texto original griego en la edición de Friedlein (1873). Cito los pasajes de referencia de acuerdo a la edición del estudioso británico Morrow[6]. Las traducciones que ofrezco son propias.

b.Constructivismo epistemológico: la mente creativa

'Ψυχήν ἄρα τὴν γενητικήν ὑποθετέον τῶν μαθεματικῶν εἰδῶν τε καί λόγων' (*In Eucl*., Prólogo, 11-12, 64), es decir, 'Debemos suponer que el alma es la productora de las formas y de las razones matemáticas'. Este es una de las más contundentes afirmaciones de Proclo sobre la epistemología matemática en el ensayo filosófico que constituye el prólogo al CE y que nos servirá como punto de partida.

Según Proclo, el alma[7] (ψυχή en este caso y no νοῦς) es generadora de las formas matemáticas, y las aprende en manera plena en el proceso de (re-)construirlas (*verum-factum*, en los ínclitos términos de Giambattista Vico).

Esta postura excita en manera inmediata dos cuestiones: (a) ¿Se refiere Proclo a un alma/mente individual como generadora de las razones matemáticas, a una suerte de intelecto común? y (b) en caso de ser así, ¿duplica el alma/mente individual las ideas matemáticas que pre-existen *ab aeterno* o se trata de una genuina creación de ideas eternas y objetivas?

Responder a estas cuestiones con propiedad es un propósito fuera del alcance de este escrito. Por mi parte, intentaré esbozar una respuesta parcial para (a), que habrá de tomarse como punto de partida para posteriores desarrollos de la cuestión. En las conclusiones aventuraré una hipótesis para (b).

Trataré de responder proponiendo las doctrinas de la tradición clásica a partir de las cuales (por cercanía terminológica y doctrinal) Proclo pudo aventurarse en su conclusión pre-intuicionista. Me referiré, pues, a las siguientes tres nociones en manera sucinta: (1) la 'materia inteligible' de Aristóteles, (2) la doctrina de la reminiscencia de Plotino y (3) la fantasía cataléptica de los estoicos.

1.Una de las fuentes que contribuyeron a esta postura puede hallarse entre uno de los aportes aristotélicos menos conocidos; la idea de una 'materia inteligible' (ὑλή νοετή). Este sintagma empleado por Aristóteles solamente en tres ocasiones, en los libros *Zeta* 10 y *Eta* 6 y 11 de la *Metafísica*, y fue expuesto con mayor profusión por Alejandro de Afrodisias[8]. Aunque la controversia entre los exégetas a la hora de hallar una interpretación satisfactoria de esta noción es perenne[9], una de las soluciones más exitosas, aceptada y expuesta, acaso, por Tomás de Aquino[10], fue la de suponer que ciertos objetos del pensamiento (entre ellos los objetos matemáticos), considerados en sí mismos, se constituyen a partir de un tipo de materia distinta a la materia de los entes corporales. Esta 'materia' ha de entenderse como un principio de multiplicidad en los objetos abstractos. ¿Cómo es posible que existan dos triángulos iguales sobre los que demostramos un teorema si el triángulo carece de principio material? ¿Cómo puede ser plural una forma inmaterial? Es mi hipótesis que el platonismo tardío pudo hallar en esta noción aristotélica una aguda herramienta a la hora de generar en términos más sofisticados una doctrina ontológica sobre la naturaleza de los objetos geométricos sobre los que el alma/mente opera. Por definición, no es la idea de triángulo misma la que es susceptible de ser equilátera o escalena, de duplicarse o de aumentar sus dimensiones, sino la 'materialización' de esa idea en tanto que objeto/s del pensamiento mediante un muy particular principio de multiplicidad. Se desprende, por tanto, de esta doctrina que nuestra capacidad de 'conocer' las figuras geométricas comporta la acción de conducir al acto la 'materia intelectual' que les sirve por sustrato en el ejercicio de aportarle forma. Sin embargo, es cuestión disputada si esta materia intelectual es un elemento objetivo sobre el que todos operamos o una parte de la mente individual. El origen de la individualidad constructiva en el enfoque de Proclo se explicará en el punto (3).

2.Nuestro siguiente paso consiste en preguntarnos cómo puede realizarse esta actualización de nuestra materia intelectual en manera que nuestras conclusiones nos aboquen a una doctrina constructivista. Estimo que la respuesta puede hallarse en la doctrina de la reminiscencia tal y como la reformuló Plotino y de la que Proclo es heredero[11]. Algunos de los pasajes más reveladores a este respecto se encuentran en las *Enéadas*, a las que me referiré en lo sucesivo.

En su labor de re-interpretación platónica en uso de la nueva terminología filosófica, Plotino considera las 'razones seminales' de las doctrinas estoicas (λόγοι σπερματικοί) presentes en las 'cosas mismas' como garante de su total o parcial inteligibilidad: los entes del mundo se 'despliegan' de acuerdo a una razón u orden inmanente (*Enn*. VI, 3.8). No obstante, Plotino añade a esta postura un isomorfismo (según él necesario) entre las 'razones' (λόγοι) inmanentes a las cosas y las del conocimiento del que son capaces las criaturas racionales. Dicho en otros términos: la racionalidad inherente a las cosas mismas debe residir también en estado embrionario en la mente humana como condición de posibilidad del conocimiento. Este ardid filosófico por parte de Plotino garantiza la inteligibilidad de cualquier naturaleza o estados de cosas (actual o posible) así como la plena capacidad intelectiva de la mente humana. En esta forma, Plotino incorpora y reinterpreta la doctrina de las razones seminales en conjunción con la reminiscencia platónica: aprender significa recordar, y recordar significa desplegar las razones seminales que portamos en nuestras almas y que reflejan la estructura íntima del mundo.

En un revelador pasaje[12] de la tercera *Enéada* (8, 4.31-47), Plotino intenta explicar cómo las almas caídas, no siendo pronas a la contemplación de las ideas por el efecto vil de las cadenas de la carne, precisan llevar a cabo labores manuales, palpables y visibles, de 'acción' y 'ejecución' para despertar así sus razones seminales. Un análisis lingüístico del pasaje resulta de gran interés para llevar a cabo un interpretación acertada: el verbo de acción abstracto ποιεῖν se utiliza con el substantivo abstracto de acción concreta o acción manual πράττειν/πρᾶξις por acusativo (πρᾶξιν ποιοῦνται) para referirse a al ejercicio de las labores manuales o incluso artesanales. Como ha ilustrado Radek Chlup en su obra sobre Proclo[13], la tradición platónica tardía consideró la manufactura como un acicate en el proceso de reminiscencia en substitución del arduo ejercicio teórico. Es probable que Plotino extrajese esta conclusión del aprendizaje de la geometría entre los niños. En efecto, la re-construcción manual de los problemas en uso de fragmentos de cuero y dibujos en la tierra (geometría plana) o de poliedros de madera (geometría de sólidos) era una práctica común como paso previo a la especulación pura. Por tanto, mediante esta perspectiva se asume que (a) las razones (también las matemáticas) residen en la mente individual de cada uno de nosotros y (b) que se despiertan en sus primeros pasos mediante la acción constructiva, manual, visible.

3.El tercer y último paso para dar cuenta de una doctrina epistemológica pre-intuicionista en el mundo antiguo tiene que ver con el obscuro y difícil concepto de 'construcción mental privada'. De acuerdo al intuicionismo clásico, ha de tratarse de una construcción mental y privada. Si atendemos a la terminología que emplea Proclo al referirse al proceso de 'construcción' de las razones y formas matemáticas hallaremos el término 'fantasía' (φαντασία, ἔν φαντάσᾳ) de estirpe estoica para referirse al espacio propio de la generación de formas matemáticas. Examinemos brevemente la doctrina estoica de la 'fantasía cataléptica' para dar cuenta del paso de la producción manual en Plotino a la construcción mental privada, tan familiar al intuicionismo, en los escritos de Proclo[14].

La teoría estoica de la fantasía cataléptica (φαντασία καταλεπτική) o, traduciéndola en modo más iluminador, la 'representación comprensiva', es el antepasado de lo que nosotros llamamos hoy 'teoría representacional de la mente'. Aunque esta doctrina es mucho más amplia de lo que aquí exponemos[15], presentamos tres de sus principios pertinentes para el examen de la teoría de Proclo. Según la doctrina de la mente estoica: (a) lo que percibimos del mundo es una representación mental privada (φαντασία), (b) esta representación mental es 'cataléptica' cuando se refiere a los objetos externos, esto es, refleja en manera exacta la naturaleza y las propiedades reales de los objetos percibidos; sin embargo, (c) puede darse una representación no cataléptica en una diversa ejecución de la capacidad representativa (como una alucinación, un espejismo, un sueño o un acto generativo de una imagen mental). El punto (c) resulta particularmente interesante pues deja lugar a la siguiente pregunta: ¿podemos tener una representación no cataléptica que, sin embargo, nos aporte conocimiento? No existen triángulos ni puntos en el mundo exterior, pero decimos que la construcción un teorema nos aporta conocimiento. ¿Sobre qué? La respuesta platónica en este caso resulta sencilla: sobre nosotros mismos, sobre las semillas de verdad asentadas en nuestra propia mente.

De tal suerte, cuando nos decimos 'imaginemos un triángulo equilátero', la imagen que obtenemos se nos aparece por un acto de creación mental en el espacio de la fantasía no cataléptica. Este espacio mental generativo se revela como la fábrica y el laboratorio en el que se producen las 'razones y formas' matemáticas. De acuerdo a la concepción platónica tardía, nuestra mente sigue fielmente los raíles pre-figurados en las razones seminales, que se desentierran en el proceso mismo de construcción de imágenes. En virtud de ello, nuestra mente percibe en manera inmediata la verdad de las nociones comunes (κοιναί ἔννοιαι) de la geometría euclídea[16] y las aplica incluso en manera tácita (o nesciente) en la elaboración de sus producciones geométricas. Esta facultad creativa, combinada con la facultad mental 'discursiva' (διάνοια), nos permite (re-)construir en nosotros mismos el edificio de la geometría que duerme inmutable en la íntima estructura de nuestro pensamiento.

Aunando los tres elementos precedentes, puede comprenderse cómo Proclo pudo alcanzar la concepción de un espacio privado en la mente individual generadora de verdades matemáticas: esta mente está estructurada por patrones seminales a partir de los que se generan/construyen las 'formas y razones' de la geometría en el sustrato de una 'materia inteligible' vinculada a la 'facultad representativa' de uso privado.

a.Constructivismo gnoseológico: ¿teoremas o problemas?

El segundo enfoque que proponemos para señalar los rasgos constructivistas que se nos presentan en el CE de Proclo es el gnoseológico, es decir, el referido a la naturaleza de los propios elementos que conforman una teoría (en el caso presente la geométrica). Hemos de notar, sin embargo, que aunque tratemos el discurso científico y sus estructuras como objetos, algunas de las justificaciones gnoseológicas para un determinado enfoque pueden precipitarse hacia la epistemología.

La discusión que ocupa a Proclo en multitud de pasajes del CE (*In Eucl.*, 77-81, 201.3-15, 210.5-10, 220.6-222.19, 241.19-244.9) atañe a una antigua discusión entre los matemáticos académicos: la distinción entre problemas y teoremas en geometría. Las dos posturas teóricas en reyerta eran, por un lado, la de Espeusipo y Anfínomo (la geometría se compone enteramente de teoremas) y, por otra parte, la de Menecmo: todos los teoremas son en realidad problemas. Por mor de brevedad, llamaremos a estos dos enfoques EA y M respectivamente.

Según Proclo 'los teoremas demuestran las propiedades inherentes en sí mismas a cada figura' (*In Eucl*. 77). El término 'teorema' (θεώρημα) tiene su raíz en el verbo (θεωρε-ω), que significa 'atender visualmente a un objeto sin alterarlo'. No por acaso este es el verbo del que procede la palabra griega 'teatro' (θέατρον) es decir, el lugar donde se lleva a cabo la contemplación privada de acción, pues, al menos en el teatro clásico, aquellos que observaban la representación no influyen en ella. Advertimos así que, ya en su misma etimología, el término 'teorema' comporta una carga teórica considerable: este sustantivo abstracto neutro podría traducirse con fidelidad por medio de la perífrasis 'objeto de contemplación que no se modifica'. En términos propios de la geometría clásica con la que trabajaba Proclo, un teorema ha de '(de)-mostrarse', característica ésta en la que Euclides insiste al cabo de cada una de las proposiciones teorémicas: ὅπερ ἔδει δέξαι, Lat. *quod erat (de-)monstrandum*.

Según Proclo 'en los problemas se nos propone construir (κατασκευάσαι) algo' (*In Eucl*. 77). El término 'problema' (πρόβλεμα) procede por su parte del verbo 'lanzar hacia delante' (προβάλλ-ω) y requiere un acusativo. El substantivo abstracto neutro pretende recoger la semántica que envuelve al objeto lanzado y no al sujeto lanzador: el problema es 'aquello que se nos pone delante' a guisa de impedimento y que nos impone una resolución. La tradición geométrica ha asignado a la resolución del problema no ya el verbo ostensivo vinculado a la visión como en el caso de los teoremas (δεύκνυμι, δέξαι en el infinito aoristo), sino un verbo de acción manual (πράττω, πράξαι en la forma infinitiva del aoristo). De acuerdo a Euclides al final de cada proposición problemática, los problemas hay que construirlos: ὅπερ ἔδει πράξαι, Lat. *quod erat faciendum*.

Por tanto, la cuestión en juego entre las posturas de EA y M es como sigue: ¿son los objetos de la geometría entes inmodificables de pura contemplación o se trata de objetos que se obtienen por medio de la acción/fabricación?

Resulta claro que la posición EA conviene con los beneplácitos del platonismo. Según ésta, las ideas matemáticas, al igual que el resto de las ideas, representan contenidos objetivos e inmutables que el intelecto puede captar pero no modificar a su arbitrio: descubrimos las ideas, no las construimos. Según expone Piero Tarantino (2010) en su revelador artículo "La distinzione tra "problemi" e "teoremi" nel dibattito tra i matematici dell'Accademia", la vertiente de la especulación matemática que puede adscribirse al enfoque EA es la partidaria de la nueva geometría sistematizada en sede platónica; tradición que culminaría con los *Elementos de geometría*. Sin embargo, en virtud del abstracto y transmundano celo platónico, la conclusión a la que llegaría la posición EA con respecto a los problemas fue, cuanto menos, sorprendente: puesto que la verdadera geometría consiste en la demostración de las propiedades eternas de objetos eternos, cada uno de los problemas debe o bien (a) revelarse como un teorema que nos parecía un problema, o bien (b) desecharse como parte espuria de la geometría. El problema, entonces, pasa a considerarse como una herramienta mental y caduca fabricada por el hombre al servicio de la demostración de los eternos teoremas. Estas palabras revocan las de L. Kronecker: sólo los teoremas existen eternamente; los problemas son creaciones de la mente humana.

La formulación gnoseológica de EA tuvo su contrapartida en la postura M. Según M, todos los objetos de la geometría son problemas, esto es, construcciones de algún tipo. Puede darse cuenta de semejante postura si atendemos a la función que desempeñaron en la Grecia más antigua los modelos geométricos pre-euclidianos. De nuevo el CE de Proclo se nos revela como la fuente más antigua y completa de la historia de la geometría, gracias la cual pueden realizarse algunas conjeturas sobre la postura M. En algunos pasajes Proclo nos narra cómo los primeros usos de la geometría estaban destinados no a la demostración de teoremas sino a la resolución de problemas. Estos problemas tenían carácter empírico, práctico, y podían ir desde medir la altura de una pirámide (en el caso de Tales) hasta calcular la distancia de las naves respecto a la costa (*In Eucl*. 352). A la resolución de estos problemas se le añadió en manera progresiva otro tipo de ejercicios: algunos a modo de acertijo y muestra de acumen, otros como instrumentos abstractos para diversas disciplinas y artes. Uno de los ejemplos que aporta Proclo y que ilustra este último punto con gran claridad es el de Oinópides de Quíos y sus hallazgos de la construcción de una perpendicular a una línea dada y de un ángulo recto sobre una línea (*In Eucl*. 283 y 333). Ninguno de estos descubrimientos fue motivado por un prurito teorético puro, ni tampoco por una finalidad práctica inmediata: Oinópides se dio a su empeño movido por las ventajas técnicas que estos descubrimientos proporcionaban en la cartografía celeste. Así pues, por medio de la construcción de figuras propuestas en problemas tenía lugar el descubrimiento de teoremas. El ejemplo más célebre del enfoque pre-euclidiano en la práctica de la geometría problemática, es decir, del descubrimiento de teoremas como consecuencia de la resolución de problemas, lo encontramos en el pasaje de Sócrates y el siervo en *Menón* platónico (*Men*. 87 a-b). Parece razonable pensar que Menecmo elaboró su enfoque teórico constructivista a partir de esta concepción, a saber: la geometría consiste en construcciones, en problemas. Éstos cumplen la función de combustible y estímulo heurístico para establecer y demostrar teoremas. Sin embargo, los teoremas solamente se descubren y, lo que es más, existen, por y para la resolución de los problemas, y no al revés. Que la demostración de cualquier teorema tuviera como condición necesaria el trabajo con problemas pudo ser prueba de ello para los partidarios de M. Ex. Gr., el primer teorema de Euclides se nos presenta en la proposición IV del libro I de los *Elementos*, mientras que las proposiciones I, II y III consisten en problemas imprescindibles para poder siquiera proponer el teorema de la proposición IV.

Es verosímil que, por todo ello, Menecmo llegase a considerar que los teoremas no eran sino un tipo especial de problema. De esta institución común entre los geómetras antiguos nos queda un testimonio en el registro lingüístico y técnico de su disciplina. La tradición geométrica que culmina en Euclides apela a seis pasos canónicos para la resolución de cualquier proposición geométrica propuesta[17]. A ellos podemos ceñirnos como residuo lingüístico del pretérito enfoque de la geometría, anterior incluso a Euclides. Los pasos canónicos son: (1) πρότασις (enunciación), (2) ἔκθεσις (exposición), (3) διορισμός (especificación o definición), (4) κατασκευή (edificación/construcción), (5) ἀπόδειξις (demostración o justificación), (6) συμπέρασμα (conclusión). Ahora bien, si nos detenemos en el paso (4), descubriremos que se trata del substantivo de la acción manual de levantar un edificio o estructura manualmente (κατασκευή, del verbo κατασκευάζ-ω). Es claro a partir de esta apreciación semántica que la idea de construcción o elaboración progresiva estaba incorporada en los pasos de la propia demostración de teoremas, indicando así que la propia estrategia de resolución teorémica comportaba un momento de construcción pura[18].

Estimo que, tras exponer la posición M en modo sumario, hemos probado suficientemente la existencia y las raíces del constructivismo gnoseológico en la geometría antigua, corriente de la cual Proclo es el principal trasmisor. Pareciera que la existencia de este antiguo debate (cuyo desenlace no se nos trasmite en el CE) dio lugar a una posición media por parte del propio Proclo. Esta posición podrá permitirse el marbete de 'pre-intuicionista', tal y como asentaré en la conclusión de este escrito.

2.Conclusión: una reconstrucción de la eternidad

¿Qué posición tomó Proclo en el debate expuesto en la sección anterior? Él mismo parece resistirse a revelarlo. Sin embargo, creo que podemos aventurar una respuesta sobre la postura gnoseológica de Proclo a partir de su postura epistemológica.

Para Proclo, las verdades eternas de la geometría (teoremas) residen en el mundo objetivo del intelecto (νοῦς), cuyos patrones y semillas portamos con nosotros. Ahora bien, la única manera en que la mente individua logra desplegar estas verdades es mediante su (re-)construcción. Por tanto, en conformidad con la postura EA en el ámbito gnoseológico (es decir, en la consideración de la estructura de la ciencia en sí misma), Proclo afirmaría, en concordia con su tradición, que los teoremas son verdades eternas sobre objetos eternos e independientes del pensamiento humano. Las proposiciones problemáticas, en cambio, no serían sino mente-facturas de todo punto necesarias para el proceso de proyección y reminiscencia de las razones seminales que contienen las verdades antedichas.

Sin embargo, considerados las entidades geométricas desde el punto de vista epistemológico (sujeto-objeto), Proclo parece sostener una postura generativa: todas las 'formas y razones' matemáticas son producciones del alma/mente en el espacio de nuestra facultad representativa, incluso los teoremas.

Combinando ambas respuestas creo haber satisfecho el objeto principal de este escrito: podemos aseverar que nos encontramos ante un genuino caso de lo que L. E. J. Brouwer llamó 'pre-intuicionismo' aplicado al ámbito de la geometría. Según Proclo, 'Dios' creó los teoremas, y todo lo demás es obra del hombre. Mas Proclo va un paso más allá de lo que fue Kronecker: considerando nuestro ejercicio de intelección de la verdad en geometría en sí misma, incluso la cognición de los teoremas depende en su totalidad de una construcción mental privada. La condición previa para que la mente individua aprenda que X en geometría es una verdad perenne e inmutable no es otra que haber producido X ella misma, es decir, haber generado la figura, forma o razón que revela el esquema innato de X por medio de una representación mental privada.

Otras cuestiones quedan abiertas para futura investigación tras este escrito. En el marco de la teoría de la mente generativa de Proclo, ¿puede aplicarse un proceso epistemológico similar a la aritmética? ¿En qué diferiría el modelo de generación aritmético del geométrico? ¿Existen varios tipos de 'creación' según el grado de 'razón discursiva' que se utilice[19]?

Espero poder solventar estas cuestiones y otras planteadas a lo largo del escrito en trabajos venideros.

3.Bibliografía

Alessandro di Afrodisia, (2007). *Commentario alla Metafisica di Aristotele*. Milano: Bompiani.

Bueno, G. (1992). *Teoría del cierre categorial*, Vol. I. Oviedo: Pentalfa.

Becker, I. (1831). *Aristotelis opera omnia*. Berlin: Academia Regia Borrusica.

Brouwer, L. J. E. (1981). *Brouwer's Cambridge lectures on intuitionism*. Cambridge: Cambridge University Press.

Chlup, R. (2016). *Proclus, An Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.

Ficino, M. (1492), F. *Procli commentaria*, Berlin: Academia Regia Borrusia

Ficino, M. (1492), F. *Plotini Enneades.* Berlin: Academia Regia Borrusia

Friedlein, G. (1873). *Procli In primum Euclidis elementorum commentarii libri duo.* Berlin: Academia Regia Borrusica.

Gray, J. (2008). *Plato's Ghost: The Modernist Transformation of Mathematics*. Princenton: Princeton University Press.

Heath, T. (1981). A History of Greek Mathematics, Vol. I. Mineola: Dover.

Heath, T. (1981). *A History of Greek Mathematics*, Vol. II. Mineola: Dover.

Helmig, C. (2012). *Forms and Concepts, Concept Formation in the Platonic Tradition*. Boston: Walter De Gruyter.

Hösle, V. (1994). *I fondamenti dell'aritmetica e della geometría in Platone*. Milano: Vita e pensiero.

Proclus, tr. Morrow, G, R. (1970). *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements.* Oxford: Princeton University Press.

Reale, G. (2008). *Storia della filosofía Greca e Romana.* Vol. V. Milano: Bompiani.

Stephanus, G. (1578). *Platonis opera quae extant omnia*. París: Bibliothèque de Genève.

Tarantino, P. (2010). *La distinzione tra "problemi" e "teoremi" nel dibattito tra i matematici dell'Accademia*. Nova tellus vol.28 no.1 México.

Thomas Aquinas, tr. Rowan T. P. (1961). *Commentary on the Metaphysics of Aristotle*. Chicago: Henry Regnery Company.

Thorp J., (2010). *Intelligible Matter in Aristotle*. The Society for Ancient Greek Philosophy Newsletter, 385. Binghamton University.

[1]Cf. Brouwer, L. J. E. (1981). *Brouwer's Cambridge lectures on intuitionism*. Cambridge: Cambridge University Press.

[2]Gray, J. (2008). *Plato's Ghost: The Modernist Transformation of Mathematics* (p.153). Princenton: Princeton University Press.

[3]Para el intuicionista 'X es verdadero' (donde X es un enunciado matemático) no significa otra cosa que 'yo he realizado una construcción que demuestra X'. Por el contrario 'X es falso' significa 'he realizado una construcción tal que demuestra que construir X implica una contradicción'. Es por ello que las proposiciones matemáticas no probadas ni refutadas (carentes de construcción) no poseen valor de verdad para Brouwer y sus seguidores, lo que obliga a rechazar el principio de tercio excluso.

[4]Hösle, V. (1994). *I fondamenti dell'aritmetica e della geometría in Platone*. Milano: Vita e pensiero.

[5]cf. Bueno, G. (1992). *Teoría del cierre categorial*, Vol. I. Oviedo: Pentalfa.

[6]Proclus, Morrow, G, R. (1970). *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements.* Oxford: Princeton University Press.

[7]El uso anfibológico y promiscuo de ψυχή y νοῦς es frecuente desde el periodo clásico. En lo que respecta a este escrito, considero que las diferencias semánticas resultarán irrelevantes en los tres puntos que propongo. Por ello, salvo que se mencione en modo explícito lo contrario, habrán de entenderse estos dos términos como sinónimos por obra de sinécdoque: en tanto que νοῦς es una parte de la ψυχή en el legado clásico, cuando decimos ψυχή en el discurso epistemológico entendemos la parte de alma referida a la actividad intelectiva, esto es, νοῦς. Es decir: el alma (ψυχή), en tanto que intelectiva, se llama o es intelecto νοῦς y, por ende, si se dice o se lee 'el alma conoce' debe entenderse que 'el alma, en tanto que intelecto, conoce'.

[8]Alexander of Afrodisias, *Commentaria in Aristotelis Metaphysicorum libros*, 562, 1.13ff.

[9]Thorp J. (2010). *Intelligible Matter in Aristotle*. The Society for Ancient Greek Philosophy Newsletter. 385. Binghamton University.

[10]Thomas Aquinas, tr. Rowan T. P. (1961). *Commentary on the Metaphysics of Aristotle*. Chicago: Henry Regnery Company.

[11]Ha de tenerse presente, sin embargo, que en lo relativo a las cuestiones teológicas y metafísicas Proclo siguió más bien a Jámblico que a Plotino. Esto significa que, con Jámblico, Proclo consideró el intelecto individual como una entidad absolutamente aislada de las formas intelectuales. Según esta concepción, el intelecto no tiene acceso a las formas sino por medio de la reminiscencia, es decir, el descubrimiento y despliegue de las razones seminales en uno mismo. Todo forma de visión directa o partición del ego a la manera de Plotino queda desterrada de la perspectiva.

[12]'También los hombres, cuando su capacidad para la contemplación se debilita, recurren a la labor manual, que es una sombra de la contemplación y el razonamiento, ya que la contemplación no les basta a causa de sus almas debilitadas y no son capaces de concentrarse suficientemente en la visión. Y, a pesar de no poseer tal capacidad, albergan el deseo de contemplar, y por ello recurren a la ejecución manual, para ver así aquello que no pueden contemplar con su intelecto.' *Enn*. III, 8, 4.31-47, traducción propia.

[13]Chlup, R. (2016) *Proclus, An Introduction* (pp.144-145). Cambridge: Cambridge University Press.

[14]Para un análisis detallado de la incorporación de conceptos de otras familias filosóficas (tal como el de fantasía cataléptica) a la tradición platónica cf. C. Helmig. (2012). *Forms and Concepts, Concept Formation in the Platonic Tradition*. Boston: Walter De Gruyter.

[15]Para un examen que contemple los detalles sobre las nociones de 'asentimiento' y 'disentimiento' de la representación y sus consecuencias en la doctrina ética de la Estoa Cf. Reale, G. (2008). *Storia della filosofía Greca y Romana,* Vol. V (V, II, I, IV). Milano: Bompiani

[16]Resulta de gran interés meditar sobre lo siguiente: si Proclo hubiese considerado que estaba en la capacidad de la mente individual construir las nociones comunes o los postulados en lugar de percatarse de ellos y usarlos como materia prima para el desarrollo de la geometría podría haber dado el primer paso hacia una geometría no-euclídea. Proclo, empero, consideró, como hicieran los estoicos y más tarde Leibniz y Kant, que los axiomas se nos dan en manera auto-evidente e incuestionable. Es por ello que, percatándose de las inmensas dificultades de aceptar como enunciado auto-evidente el postulado V y, por ende, la incoherencia que supone enumerarlo entre los axiomas, Proclo trató el postulado de las paralelas como si fuese un teorema e intentó, con ímprobos y vanos esfuerzos, hallar una demostración. Intentó llevar esto a cabo mediante la invención de un nuevo axioma (un postulado conocido como el 'axioma de Proclo') que se ha revelado equivalente al que introduciría Playfair en el siglo XVIII con el mismo propósito que Proclo. Para más detalles sobre los aportes de Proclo a este respecto Cf. Heath T. (1981). *A History of Greek Mathematics*, Vol. II. Mineola: Dover.

[17]Para más detalles sobre este elenco de pasos canónicos Cf. Heath T. (1981). *A History of Greek Mathematics*, Vol. I (p.370). Mineola: Dover.

[18]Al destacar el paso (6) de la κατασκευή como vestigio indeleble del origen constructivo de la geometría sigo la exposición y sugerencias del Prof. Dr. Antonio Pérez-Ramos (Universidad de Murcia, España) en sus cursos de Historia de la Geometría. Toda esta sección podría desarrollarse con más abundancia, pero postergo esta labor para futuros trabajos.

[19]En su *Comentario al Timeo* (i 243.26-246.9), Proclo distingue entre seis grados o usos de la facultad διάνοια, dependiendo del 'objeto' sobre el que la mente especule.