UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE PSICOLOGÍA

Rendimiento Académico y Competencia Matemática:

Un Estudio en Educación Secundaria

D.Jaime Ibernón Fernández

2017

UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE PSICOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE PSICOLOGÍA EVOLUTIVA Y DE LA EDUCACIÓN

TESIS DOCTORAL

RENDIMIENTO ACADÉMICO Y COMPETENCIA MATEMÁTICA:

UN ESTUDIO EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Presentada por:

D. Jaime Ibernón Fernández

Dirigida por:

Dra. Rosa María Pons Parra
Dr. José Manuel Serrano González-Tejero

Murcia, 2017

Agradecimientos

Un sincero agradecimiento a mis directores, Rosa María y José Manuel, por toda su ayuda, disponibilidad y colaboración en este trabajo.

A todos mis alumnos involucrados en la toma de muestras de este estudio y que hicieron posible la realización de esta tesis.

A mi familia, por todo su ánimo y cariño.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

La interpretación del binomio enseñanza-aprendizaje ha experimentado importantes cambios a lo largo de las últimas seis décadas. Esta evolución de la concepción de los procesos que ocurren en las aulas cuando los profesores enseñan y los alumnos aprenden permitió que, en la década de los «90», Richard E. Mayer formulara sus tres clásicas metáforas del aprendizaje (Mayer, 1992): el aprendizaje como adquisición de respuestas, el aprendizaje como adquisición de conocimientos y el aprendizaje como construcción de significados.

La metáfora del aprendizaje como adquisición de respuestas está ligada al conductismo y en ella se postula que aprender consiste en registrar mecánicamente los mensajes informativos dentro del almacén sensorial, de manera que las impresiones sensoriales caracterizan la base de todo conocimiento, incluso del conocimiento complejo que se podría reducir a sus elementos componentes. Esta metáfora domina hasta los inicios de la década de los sesenta.

Dado que la orientación conductista no resultaba satisfactoria porque, además de no dar cuenta de lo que ocurría en la mente del alumno mientras aprendía, no permitía apenas intervenir en los procesos de enseñanza y aprendizaje, al menos más allá de la programación de materiales y refuerzos, comienza a aparecer otra alternativa que intentó llenar el vacío existente entre el input y el output del conductismo: la orientación cognitiva del aprendizaje (Beltrán, 1993; pp. 17-19). Dentro de esta orientación se pueden distinguir dos metáforas distintas que han ido apareciendo al hilo de la investigación realizada de acuerdo con los principios de la revolución cognitiva: el aprendizaje como adquisición de conocimientos y el aprendizaje como construcción de significados.

El aprendizaje como adquisición de conocimientos es una metáfora que llega hasta los años setenta y en ella el aprendiz tiene un papel más activo, pero no llega a tener el control sobre el proceso de aprendizaje. Sin embargo, en la década de los ochenta se produce un nuevo cambio que nos conduce a un estudiante activo, autónomo, autorregulado, que conoce sus propios procesos cognitivos y llega a tener en sus manos el control del aprendizaje.

Estas transformaciones en la interpretación del sujeto que aprende se deben a un cambio de paradigma en la psicología de la educación que ha conducido desde el paradigma conductista (aprendizaje como adquisición de respuestas) hasta el paradigma constructivista (aprendizaje como construcción de significados).

Sin embargo, han pasado ya más de dos décadas desde que Mayer enunciara sus clásicas tres metáforas del aprendizaje y nuestras aulas no sólo no han alcanzado el techo propuesto por este autor (Mayer, 2002), sino que se tienen que enfrentar a una nueva metáfora de la enseñanza y el aprendizaje: el aprendizaje como logro de competencias.

En efecto, “la rapidez en los cambios de la vida económica, social y política, incluyendo aquellos que se relacionan con el advenimiento de nuevas tecnologías y la presente globalización, son grandes desafíos para el mundo moderno y tanto los individuos, como las comunidades, las organizaciones de trabajo y las naciones reconocen, cada vez más frecuentemente, que su bienestar futuro depende, en gran parte, del logro de competencias” (Salganik, Rychen, Moser y Konstant, 2000, p. 5) y no tanto de la adquisición de conocimientos y los propios Ministerios de Educación de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) han formulado explícitamente que “el desarrollo sostenible y la cohesión social dependen críticamente de las competencias de toda nuestra población” (DESECO, 2005; p. 3).

Por esta razón, a finales de 1997, la OCDE inició el Proyecto DESECO (Definición y Selección de Competencias, http://www.deseco.admin.ch) con el fin de brindar un marco conceptual firme para servir como fuente de información para la identificación de competencias clave y el fortalecimiento de las encuestas internacionales que miden el nivel de competencia de jóvenes y adultos. Este proyecto, realizado bajo el liderazgo de Suiza y conectado con el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés) reunió a expertos de una amplia gama de disciplinas para que trabajaran con actores y analistas políticos a fin de elaborar un marco relevante para las políticas educativas de los distintos países de la OCDE. El proyecto reconoció la diversidad de valores y prioridades a lo largo de países y culturas, pero identificó también desafíos universales de la economía global y la cultura, así como valores comunes que informan sobre la selección de las competencias más importantes.

Se considera que el término “competencia” se refiere a una combinación de destrezas, conocimientos, aptitudes y actitudes, y a la inclusión de la disposición para aprender a aprender (Comisión Europea, 2004, p. 5). Una competencia presenta, por tanto, una estructura interna con tres componentes -cognitivo, afectivo-relacional y metacognitivo- (Serrano y Pons, 2011), que responden a los tres grandes tipos de conocimiento (explícito, causal e implícito), requiere una habilidad específica (habilidad para cooperar) y se encuentra siempre contextualizada (dependiente de contexto). Una competencia-clave es crucial para:

a) La realización y el desarrollo personal a lo largo de la vida (capital cultural): las competencias clave deben permitir a las personas perseguir objetivos personales en la vida, llevados por sus intereses personales, sus aspiraciones y el deseo de continuar aprendiendo a lo largo de la vida.

b) Favorecer la inclusión y lograr una ciudadanía activa (capital social): las competencias clave deberían permitir a todos una participación como ciudadanos activos en la sociedad.

c) Generar aptitud para el empleo (capital humano): la capacidad de todas y cada una de las personas de obtener un puesto de trabajo en el mercado laboral.

Cuando DESECO formula las competencias-clave (compruébese el Estudio 5 de Eurydice, 2002; pp. 20-21), tras hacer un breve recorrido por los enfoques conductista y cognitivo, y sin descartar este último, opta, de manera bastante explícita, por recurrir al constructivismo como el enfoque educativo que mejor se adapta a los procesos de construcción de las competencias, señalando explícitamente la existencia de dos razones para justificar este hecho. En primer lugar, porque los profesores ya no imparten conocimientos a los alumnos, sino que les ayudan en su construcción mediante procesos de interacción-interactividad y, en segundo lugar, porque el enfoque constructivista de la educación acentúa la importancia del contexto para un eficaz y eficiente desarrollo de los procesos de aprendizaje. Finalmente, y en base a la importancia otorgada al contexto en el desarrollo y adquisición de las competencias, DESECO destaca la necesaria interdependencia entre los procesos de aprendizaje formal, no formal e informal.

Desde estos planteamientos nos encontramos, en primer lugar, con un paradigma (constructivismo) que nos permite incardinar los procesos de enseñanza y aprendizaje en un marco explicativo coherente, en segundo lugar con un proyecto (DESECO) que nos marca la tendencia que debe orientar esos procesos y que no es otra que la búsqueda de la competencia técnica y social y, tanto uno como otro, postulan la necesidad de contextualización de los conocimientos para un correcto aprendizaje, ya sea intencional (formal y no formal) o incidental (informal).

El paradigma constructivista y la noción de competencia se constituyen así en los dos ejes vertebradores de la concepción actual de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

1. El análisis constructivista de los procesos de enseñanza y aprendizaje

Decía Pozo (2005, pp. 61-62) que el constructivismo en las escuelas está empezando a ser un *slogan* o una imagen de marca y, del mismo modo que los adolescentes presumen de la etiqueta cosida a sus vaqueros, muchísimos maestros, pero sobre todo investigadores educativos, exhiben su vitola de constructivistas, de manera que, desde finales del siglo pasado, podemos observar que casi todas las teorías educativas y/o instruccionales parecen haber abierto sucursales constructivistas (Tolchinsky, 1994). Ante esta situación, y aprovechando que ahora casi todos somos constructivistas, parece urgente aclarar qué es el constructivismo psicológico, al menos para saber de qué hablamos cuando utilizamos este término y, sobre todo, cuál es su valor en el momento actual.

Han sido muchos los intentos de clarificar posiciones y se han dedicado no pocos trabajos monográficos al análisis del paradigma constructivista confrontando maneras diferentes de entender el constructivismo psicológico (Prawat, 1999). En términos generales podríamos decir que se han venido dando varias explicaciones alternativas del funcionamiento psicológico que podrían ser recogidas bajo el paraguas del constructivismo y que responden a las visiones teóricas constructivistas dominantes en psicología del desarrollo (Coll, 2001; Martí, 1997). En este sentido cualquier tipo de clasificación de los constructivismos recoge, explícita o implícitamente, la existencia de:

a) Un constructivismo cognitivo que hunde sus raíces en la psicología y la epistemología genética de Piaget.

b) Un constructivismo de orientación socio-cultural (constructivismo social, socio-constructivismo o co-constructivismo) inspirado en las ideas y planteamientos vygotskyanos.

c) Un constructivismo vinculado al construccionismo social de Berger y Luckmann (2001) y a los enfoques posmodernos en psicología que sitúan el conocimiento en las prácticas discursivas (Edwards, 1997; Potter, 1998).

Estas diferentes formas de entender el constructivismo, aunque comparten la idea general de que el conocimiento es un proceso de construcción genuina del sujeto y no un despliegue de conocimientos innatos ni una copia de conocimientos existentes en el mundo externo, difieren en cuestiones epistemológicas esenciales como pueden ser el carácter más o menos externo de la construcción del conocimiento, el carácter social o solitario de dicha construcción, o el grado de disociación entre el sujeto y el mundo. De manera general podríamos decir que los diferentes constructivismos se podrían situar en un sistema de coordenadas cartesianas espaciales cuyos tres ejes vendrían determinados, respectivamente, por los pares dialécticos *endógeno-exógeno*, *social-individual* y *dualismo-adualismo* (véase Figura 1) lo que conduce a que difieran a la hora de pronunciarse sobre *qué* y *cómo* se construye y *quién* construye.

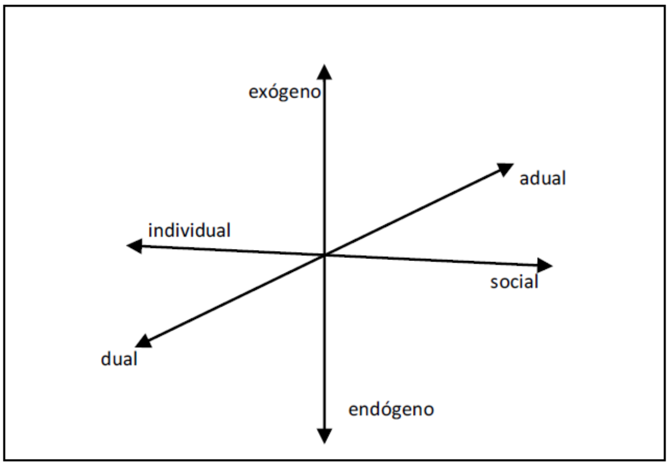


Figura 1. El sistema marco de los constructivismos

Sobre "qué es lo que se construye", aunque todas las propuestas constructivistas insisten en que construir es crear algo nuevo, mientras que para los constructivismos cognitivos de corte piagetiano el acento está situado en las estructuras generales del conocimiento y se encuentra ligado a categorías universales, para los vehiculados por el procesamiento de la información podemos observar que se centran, o bien en los cambios de reglas y en el procesamiento estratégico (modelos de procesamiento serial), o bien en los cambios asociativos y cuantitativos de las redes neuronales (modelos conexionistas) con un especial énfasis en los cambios que ocurren en el nivel microgenético y ligados a contenidos específicos. En el caso de los constructivismos de tradición vygotskyana lo que se construye es una actividad semióticamente mediada que recoge la variedad de maneras que tienen los sujetos de reconstruir significados culturales y en el construccionismo social, lo que se construye son artefactos culturales. Estas diferencias relativas a lo que se construye son importantes a la hora de valorar el alcance teórico de las diferentes propuestas constructivistas y su pertinencia para describir y explicar diferentes fenómenos como el desarrollo o el aprendizaje.

En relación al "cómo se construye" los modelos cognitivos hacen referencia a mecanismos autorreguladores, mientras que los modelos vinculados al constructivismo social o al construccionismo social no son mecanismos reguladores de naturaleza interna, sino que la responsabilidad de la dirección que toma la construcción viene determinada por una forma concreta de organización social.

Finalmente ("quién construye"), el sujeto que construye el conocimiento es, para cualquier tipo de constructivismo, un sujeto activo que interactúa con el entorno y que, aunque no se encuentra completamente constreñido por las características del medio o por sus determinantes biológicos, va modificando sus conocimientos de acuerdo con ese conjunto de restricciones internas y externas. Sin embargo, detrás de esta homogeneidad en la conceptualización del "sujeto constructor", se esconde una gran diversidad epistémica, y sin llegar a la consideración de los "siete sujetos" que nos describe Gillièron (1996; 35-39) sí que diríamos que, al menos nos encontramos con cuatro sujetos bien diferenciados: el sujeto individual, el sujeto epistémico, el sujeto psicológico y el sujeto colectivo. Estos cuatro sujetos constructores, aunque no de manera totalmente isomorfa, van a dar lugar a cuatro modelos generales de constructivismo.

La galaxia en la que se mueven los posibles enfoques para la interpretación constructivista de los procesos de enseñanza y aprendizaje se puede ubicar en un continuo que sitúa la construcción del conocimiento en el sujeto individual, despreciando el componente socio-contextual de esa construcción (constructivismos endógenos); hasta posicionamientos que consideran el conocimiento social como la única fuente válida de conocimiento, con la consideración del sujeto colectivo como el elemento nuclear, negando, de esta manera, al sujeto individual (constructivismos exógenos); pasando por posiciones que postulan una dialéctica, más o menos declarada, entre el sujeto y el contexto, entre lo individual y lo social (Bruning, Schraw y Ronning, 2002). De esta manera nos encontramos ante cuatro sujetos del constructivismo: el sujeto individual, el sujeto epistémico, el sujeto psicológico y el sujeto colectivo. Esta forma de entender al sujeto está en relación directa con las condiciones que concurren en el proceso de construcción.

De este modo, en un extremo del continuo tenemos el *constructivismo radical* para el que, en la construcción del conocimiento, el elemento social es irrelevante, siendo única y exclusivamente un proceso individual (es, por tanto, una construcción “intra”). En el extremo opuesto nos encontramos con el *construccionismo social*, y como puede desprenderse de su propia nomenclatura, el elemento social es una condición necesaria y suficiente para la construcción de los conocimientos (construcción “inter”). Para el *constructivismo cognitivo*, el elemento social ocupa un papel de coadyuvante a la mejora en la adquisición de los conocimientos, pero no es una condición necesaria para su construcción (construcción “intra-inter”). Finalmente, en el caso del *constructivismo socio-cultural* el elemento social es una condición necesaria, pero no suficiente para esta construcción (construcción “inter-intra”).

<u>Constructivismo radical</u>

La escuela constructivista austriaca inaugura una forma de constructivismo que se inicia oficiosamente con la publicación de un decálogo de trabajos en torno al pensamiento constructivista (Watzlawick, 1990) y tiene como cabezas visibles a Heinz Von Foerster, pero sobre todo a Ernst von Glasersfeld. Esta forma de constructivismo que tiene sus orígenes en el *verum ipsum cogito* cartesiano y en el posterior *verum ipsum factum* de Giambattista Vico, recibe el nombre de *constructivismo radical*.

El constructivismo radical, cuyo máximo representante es Von Glasersfeld (1995), hace referencia a un enfoque no convencional del problema del conocimiento y del hecho de conocer y se basa en la presunción de que el conocimiento, sin importar cómo se defina, está en la mente de las personas y el sujeto cognoscente no tiene otra alternativa que construir lo que conoce sobre la base de su propia experiencia. Todos los tipos de experiencia son esencialmente subjetivos y aunque se puedan encontrar razones para creer que la experiencia de una persona puede ser similar a la de otra, no existe forma de saber si en realidad es la misma.

Los cuatro principios sobre los que se asienta el constructivismo radical (Von Glasersfeld, 1995) son los siguientes:

a) El conocimiento “no se recibe pasivamente, ni a través de los sentidos, ni por medio de la comunicación, sino que es construido activamente por el sujeto cognoscente”.

b) “La función del conocimiento es adaptativa, en el sentido biológico del término, tendiente hacia el ajuste o la viabilidad”.

c) “La cognición sirve a la organización del mundo experiencial del sujeto, no al descubrimiento de una realidad ontológica objetiva”.

d) Existe una exigencia de “socialidad”, en términos de “una construcción conceptual de los otros” y, en este sentido, las otras subjetividades se construyen a partir del campo experiencial del individuo. Según esta tesis la primera interacción debe ser con la experiencia individual.

Constructivismo cognitivo

El constructivismo cognitivo, que parte esencialmente de la teoría piagetiana y postula que el proceso de construcción del conocimiento es individual, realiza los análisis sobre estos procesos bajo tres perspectivas: la que conduce al análisis macrogenético de los procesos de construcción, la que intenta describir y analizar las microgénesis y la vertiente integradora de estas dos posiciones.

En primer lugar, para Piaget, efectivamente, el proceso de construcción de los conocimientos es un proceso individual que tiene lugar en la mente de las personas que es donde se encuentran almacenadas sus representaciones del mundo. El aprendizaje es, por tanto, un proceso interno que consiste en relacionar la nueva información con las representaciones preexistentes, lo que da lugar a la revisión, modificación, reorganización y diferenciación de esas representaciones. Ahora bien, aunque el aprendizaje es un proceso intramental, puede ser guiado por la interacción con otras personas, en el sentido de que “los otros” son potenciales generadores de contradicciones que el sujeto se verá obligado a superar.

En segundo lugar, con el redescubrimiento de Piaget por la psicología estadounidense empieza a romperse el cerco conductista sobre el estudio de los procesos de pensamiento y se empieza a concebir el sistema humano en términos de Procesamiento de la Información. Esta concepción parte del presupuesto de que la mente humana es un sistema que opera con símbolos, de manera que la información se introduce en el sistema de procesamiento, se codifica y, parte de ella, se almacena para poderla recuperar con posterioridad. Por oposición al conductismo, la teoría del procesamiento de la información, proporciona una concepción "constructivista" del ser humano, por cuanto recurre a dos principios constructivistas básicos (organización y significatividad) y, además:

a) Recupera la noción de mente.

b) Reintegra la información subjetiva como un dato útil a la investigación.

c) Da un lugar preferencial al estudio de la memoria activa como explicación básica de la elaboración de la información (personalización de los significados) y de la actividad humana.

Las teorías acerca del procesamiento de la información han recibido una especial influencia de los modelos computacionales, basados en gran parte en la teoría de la información de Claude Shannon y en la teoría cibernética de Norbert Wiener. Este último modelo teórico plantea que existe en primer lugar un procesamiento efectuado por dispositivos procesadores periféricos, el cual precede al procesamiento realizado por la computadora central, por lo tanto, la metáfora que mejor se adapta a estas teorías es la del ordenador, en este sentido habría que distinguir entre teorías que se centran en el software (mente) y que corresponden a lo que se conoce como sistema de procesamiento serial de la información, y teorías que se centran en el hardware (cerebro), que corresponden a lo que se conoce con el nombre de procesamiento distribuido en paralelo.

Finalmente, un último conjunto de teorías intenta coordinar los enfoques epistemológicos piagetianos con los enfoques psicológicos que emanan del procesamiento de la información:

a) Las teorías neopiagetianas (Pascual-Leone, 1988; Case, Hayward, Lewis y Hurst, 1988; Fisher y Bidell, 2006 o Halford, 2005) que integran la teoría de Piaget con la llamada «psicología cognitiva» en base a sus tres enfoques clásicos: el de la *teoría de la información*, el del *flujo de la información* y el del *procesamiento de la información*, pero apoyándose, de forma muy especial, en los modelos de procesamiento serial.

b) Las teorías postpiagetianas (Cellérier, 1996) que intentan integrarla con el conexionismo en general y con los modelos de procesamiento distribuido en paralelo (PDP), en particular. El PDP es una de las variantes del *conexionismo,* que describe los procesos cognitivos en términos de conexiones entre neuronas. Frente a los modelos *localistas* del conexionismo, éste se denomina “distribuido” porque considera que el conocimiento (tanto el declarativo como el procedimental) no queda codificado en forma de símbolos fijos, que estarían alojados en determinados lugares del cerebro, sino en forma de elementos elaborados que se encuentran distribuidos en diferentes neuronas, todas ellas conectadas entre sí; se le añade la apostilla “en paralelo” porque el procesamiento de la información no se produce únicamente de forma seriada, sino también simultáneamente en un extenso conjunto de redes neuronales.

Constructivismo socio-cultural

El constructivismo socio-cultural tiene su origen en los trabajos de Lev S. Vygotsky y postula que el conocimiento se adquiere, según la ley de doble formación, primero a nivel intermental y posteriormente a nivel intrapsicológico, de esta manera el factor social juega un papel determinante en la construcción del conocimiento, aunque este papel no es suficiente porque no refleja los mecanismos de internalización. Sin embargo, como la idea de un origen social de las funciones psicológicas no es antitética con la noción de construcción personal, sobre todo si se parte de un modelo bidireccional de transmisión cultural en el que todos los participantes transforman activamente los mensajes, podemos asumir que la construcción de los conocimientos supone una internalización orientada por los “otros sociales” en un entorno estructurado. De esta manera el constructivismo socio-cultural propone a una persona que construye significados actuando en un entorno estructurado e interactuando con otras personas de forma intencional. Este proceso de construcción presenta tres rasgos definitorios: la unidad de subjetividad-intersubjetividad, la mediación semiótica y la construcción conjunta en el seno de relaciones asimétricas. La intersubjetividad, la compartición de códigos compartidos y la co-construcción con aceptación de la asimetría pueden lograrse porque, por medio de actividades simbólicas, los seres humanos tratan su entorno significativo como si fuera compartido.

Construccionismo social

El construccionismo social representa la otra versión del pensamiento austriaco que, encabezada por Thomas Luckmann y Peter L. Berger, postula que la realidad es una construcción social y, por tanto, ubica el conocimiento dentro del proceso de intercambio social. Desde esta perspectiva, la explicación psicológica no reflejaría una realidad interna, sino que sería la expresión de un quehacer social, por lo que traslada la explicación de la conducta desde el interior de la mente a una explicación de la misma como un derivado de la interacción social (Berger y Luckmann 2001, p. 39). En el construccionismo social la realidad aparece como una construcción humana que informa acerca de las relaciones entre los individuos y el contexto y el individuo aparece como un producto social

-el *homo socius*-, definido por las sedimentaciones del conocimiento que forman la huella de su biografía, ambiente y experiencia.

Las explicaciones de los fenómenos psicológicos no se ubican en el individuo ni en categorías psicológicas, sino que son condicionadas por las pautas de interacción social con las que el sujeto se encuentra, de manera que el sujeto individual queda "disuelto" en estructuras lingüísticas y en sistemas de relaciones sociales.

Los términos en los cuales se entiende el mundo son artefactos sociales históricamente localizados, de manera que, desde el construccionismo, el proceso de comprensión es el resultado de una tarea cooperativa y activa entre personas que interactúan y el grado en que esa comprensión prevalece o es sostenida a través del tiempo está sujeto a las vicisitudes de los procesos sociales (comunicación, negociación, conflicto, etc.).

Las relaciones sociales posibilitan la constitución de redes simbólicas, que se construyen de manera intersubjetiva, creando un contexto en el que las prácticas discursivas y sus significados van más allá de la propia mente individual.

1.1. La tendencia constructivista en educación

Entre este abanico constructivista que marca la disociación entre lo individual y lo social, entre lo interno y lo externo o entre el pensamiento y el lenguaje, existen, en el momento actual, un conjunto de propuestas cuya finalidad es mostrar que "si incorporamos las perspectivas socio-cultural y lingüística al modelo cognitivo de los procesos mentales, es posible vislumbrar cómo el lenguaje y los procesos sociales del aula, constituyen las vías a través de las cuales los alumnos adquieren y retienen el conocimiento" (Nuthall, 1997, p. 758), fundamentalmente porque resulta muy útil considerar los procesos mentales como una propiedad de los individuos que actúan en entornos organizados culturalmente (Salomon, 2001).

La tendencia actual de la investigación psicoeducativa sigue pues una línea integradora entre las posiciones más renovadoras del constructivismo cognitivo y los constructivismos de corte social (constructivismo socio-cultural y construccionismo social). Este intento de integración, en su vertiente más moderada, ha conducido a la elaboración del constructo denominado "cognición situada" en su vertiente más polarizada hacia el constructivismo exógeno, a la de "cognición distribuida".

Cuando se postula que el conocimiento es situado (cf. los trabajos del Laboratory of Comparative Human Cognition, University of California, San Diego), queremos decir que es parte y producto de la actividad, el contexto y la cultura en que se desarrolla y utiliza (Brown y Cole, 2001). En la cognición situada los elementos implicados en el proceso de construcción del conocimiento son: el sujeto que construye el conocimiento, los instrumentos utilizados en la actividad, de manera especial los de tipo semiótico, los conocimientos que deben ser construidos, una comunidad de referencia en la que la actividad y el sujeto se insertan, un conjunto de normas de comportamiento que regulan las relaciones sociales de esa comunidad y un conjunto de reglas que establecen la división de tareas en la actividad conjunta.

La cognición distribuida sustituye la teoría individual de la mente por la teoría cultural de la mente y postula que los artefactos y recursos externos modifican la naturaleza y el sistema funcional de donde surgen las actividades, afectando a nuestra concepción de qué, cómo y por qué se necesita conocer (Hutchins, 1995).

La concepción de la cognición como inextricablemente situada y distribuida nos conduce a la noción de *comunidad de aprendizaje*. El concepto de comunidad de aprendizaje se puede definir como un grupo de personas que aprende en común, utilizando herramientas comunes en un mismo entorno. Las comunidades de aprendizaje nos hablan de grupos de personas con distintos niveles de pericia, experiencia y conocimiento que aprenden mediante su implicación y participación en actividades auténticas y culturalmente relevantes, gracias a la colaboración que establecen entre sí, a la construcción del conocimiento colectivo que llevan a cabo y a los diversos tipos de ayuda que se prestan mutuamente, de manera que lo que se pretende es la construcción de un sujeto socialmente competente.

Esta tendencia a encontrar una perspectiva epistemológica sobre la mente y los procesos mentales que se sitúe *in medias res* del constructivismo cognitivo y los planteamientos posmodernos del construccionismo social, ha llevado a Prawat (1999, p. 73) a considerar la mente como propiedad de los individuos, aunque esto no implique que sean “los propietarios en exclusiva de los pensamientos y de las emociones que les permiten llevar a cabo sus transacciones con el mundo”. De hecho, “las representaciones individuales y los procesos mentales que intervienen en la construcción del universo están bajo la influencia directa de las comunidades o entornos culturalmente organizados en los que participan las personas… de manera que las relaciones entre mentes individuales y entornos culturales tienen un carácter transaccional" (Coll, 2001, p. 163).

En definitiva, existe un enfoque constructivista emergente que sería el resultado de la coordinación explícita de dos perspectivas teóricas: una perspectiva social, consistente en una visión interaccionista de los procesos colectivos y compartidos que tienen lugar en el aula y una perspectiva psicológica, consistente en una visión constructivista cognitiva de la actividad individual de los alumnos mientras participan en esos procesos compartidos (Coob y Yakel, 1996, p. 176).

El constructivismo, en esencia, plantea que el conocimiento no es el resultado de una mera copia de la realidad preexistente, sino de un proceso dinámico e interactivo a través del cual la información externa es interpretada y reinterpretada por la mente. En este proceso la mente va construyendo progresivamente modelos explicativos, cada vez más complejos y potentes, de manera que conocemos la realidad a través de los modelos que construimos *ad hoc* para explicarla. Decía Punset (2011, p. 43) que si "ya sabíamos que el alma estaba en el cerebro, ahora podemos contemplar todo el proceso molecular mediante el cual el pasado y el futuro convergen y observar cómo la materia cerebral y la memoria fabrican nuevas percepciones sobre las que emerge el futuro". La ciencia ha puesto de manifiesto que en los inicios de cualquier proceso cognitivo sólo el pasado cuenta, pero en el mismo momento que se empieza a modelar el futuro y merced al estallido de la inteligencia social, se pone en marcha un proceso en el que la capacidad de imitación, instrumentada por las llamadas neuronas espejo, interactúa con el conocimiento acumulado de la propia especie y con un archivo de recuerdos y huellas de emociones propias y surge el pensamiento nuevo. Además, hasta hace muy poco tiempo no existían indicios que pudieran sugerir cómo una parte de la memoria en funcionamiento (si se quiere, memoria a corto plazo) pudiera transformarse en memoria a largo plazo, ahora sabemos que esta capacidad para almacenar está vinculada a determinadas proteínas cerebrales que se activan con las prácticas de aprendizaje, de manera que ahora sabemos que si las raíces están en el pasado, este pasado hay que fustigarlo desde el exterior para transformarlo en futuro.

Esta es la idea germinal de todo constructivismo: la elaboración necesaria para efectuar la convergencia del pasado y del futuro.

1.2. La estructura general del constructivismo

El esquema global que constituye la opción constructivista está organizado según una estructura jerárquica dotada de tres niveles de toma de decisiones (Coll, 2001; Serrano, 2003) que se obtienen cuando interpelamos a las teorías constructivistas sobre la naturaleza, las funciones y las características de la educación escolar. El primer nivel incluye los principios acerca de la naturaleza y funciones de la educación. La toma de posicionamiento efectuada en este primer nivel crea un eje de referencia para interpretar el segundo nivel que alberga las características propias y específicas de los procesos de construcción del conocimiento en el aula. Finalmente, el tercer nivel comprende los principios explicativos de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el marco de las coordenadas creadas por los dos anteriores. Estos tres niveles marcan un posicionamiento que va desde lo más general ¿qué es ser constructivista? a lo más particular ¿cómo puedo ejercer de constructivista?

1.2.1. Principios acerca de la naturaleza y funciones de la educación

La instrucción (si se quiere la educación escolar) es uno de los instrumentos que las sociedades utilizan para promover el desarrollo y la socialización de sus miembros, ya que existe el convencimiento de que los individuos más jóvenes requieren una ayuda sistemática y planificada en algunos de esos aspectos, a fin de facilitarles el acceso a un conjunto de saberes y formas culturales que se consideran esenciales para integrarse en la sociedad en la que se encuentran inmersos, de una manera activa, constructiva y crítica.

Bajo estos presupuestos son tres los principios que configuran este eje vertebrador:

1. La educación escolar tiene una naturaleza social y una función socializadora.

2. El aprendizaje de los saberes y formas culturales incluidos en el currículum debe potenciar simultáneamente el proceso de socialización y el de construcción de la identidad personal.

3. La educación escolar debe tener en cuenta la naturaleza constructiva del psiquismo humano.

1.2.2. Principios acerca de los procesos de construcción de los conocimientos

Las actividades instruccionales se diferencian de otras prácticas educativas por el hecho de ser diseñadas, planificadas y ejecutadas con una intencionalidad específica que da sentido a la propia actividad. En efecto, a diferencia de otras prácticas educativas, la instrucción desgaja determinados saberes o formas culturales de su contexto natural y se recrean bajo la forma de contenidos escolares en un contexto artificial: el aula. Esta acontextualización o descontextualización de los conocimientos hace que su re-construcción parta de tres principios esenciales que puedan garantizar el significado y el sentido a lo aprendido:

1. La actividad constructiva del alumno es el elemento mediador entre su estructura cognitiva y los saberes previamente establecidos.

2. La atribución de sentido y la construcción de significados que realizan los alumnos deben ser acordes y compatibles con lo que significan y representan los contenidos como saberes culturales ya elaborados.

3. La función del profesor consiste en asegurar el engarce más adecuado entre la capacidad mental constructiva del alumno y el significado y sentido social y cultural que reflejan y representan los contenidos escolares.

1.2.3. Principios explicativos de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula

El tercer eje vertebrador de las distintas teorías constructivistas está constituido por los principios explicativos inter e intrapsicológicos implicados en los procesos instruccionales. Este eje podría ser descompuesto en dos sub-ejes netamente diferenciados: el eje que vehicula los procesos de construcción de los conocimientos y el eje que articula los mecanismos de influencia educativa.

Los procesos de construcción del conocimiento

El campo más conocido de la opción constructivista se encuentra constituido por aquellos principios que tratan de dar una explicación a cómo se construyen los distintos saberes y suelen aparecer organizados en dos grandes bloques: los relacionados con la construcción de significados y la atribución de sentido y los relacionados con la revisión, modificación y construcción de esquemas de conocimiento.

Construcción de significados y atribución de sentido a los aprendizajes escolares

a) La repercusión de las experiencias educativas formales sobre el desarrollo del alumno depende de su nivel de desarrollo socio-cognitivo, de sus conocimientos previos pertinentes y de los intereses, motivaciones, actitudes y expectativas con que participa en esas experiencias.

b) La clave de los aprendizajes escolares reside en el grado de significatividad que los alumnos otorgan a los contenidos y el sentido que atribuyen a esos contenidos y al propio acto de aprender.

c) La atribución de sentido y la construcción de significados están directamente relacionadas con la funcionalidad de los aprendizajes, es decir, con la posibilidad de utilizarlos cuando las circunstancias lo aconsejen y lo exijan (conocimiento condicional).

d) El proceso mediante el cual se produce la construcción de significado y la atribución de sentido requiere una intensa actividad constructiva que implica psíquicamente al alumno en su totalidad ya que debe desplegar tanto procesos cognitivos, como afectivos y emocionales.

e) La construcción de significados, la atribución de sentido y la determinación de las condiciones para su aplicación es un proceso que depende de las interacciones entre el profesor, los alumnos, los contenidos y las metas objetivas y subjetivas que se pretenden alcanzar.

Revisión, modificación y construcción de esquemas

f) La estructura mental del alumno se concibe como un conjunto de esquemas relacionados, por lo que la finalidad de la educación escolar es contribuir a la revisión, modificación y construcción de esos esquemas.

g) La finalidad última de la educación escolar es dotar a los alumnos de instrumentos (esquemas) para que sea capaz de realizar aprendizajes significativos y dotados de sentido a lo largo de toda su vida, es decir, que aprendan a aprender (metacognición).

Los mecanismos de influencia educativa

Los conceptos anteriores son una condición necesaria, pero no suficiente, para perfilar un enfoque constructivista en educación, además es necesario explicitar cómo la enseñanza contribuye a la construcción de significados y a la atribución de sentido, ya que el intento de elaborar un marco global de referencia para la educación escolar no puede limitarse a la explicación de cómo se llevan a cabo los aprendizajes, sino que debe dar cuenta de cómo y bajo qué condiciones, la enseñanza promueve el aprendizaje (Coll, 2001, pp. 183-184).

Para el constructivismo la influencia educativa debe entenderse en términos de ayuda encaminada a mejorar los procesos vinculados a la actividad constructiva del alumno y tiene por finalidad generar la necesaria aproximación entre los significados que construye el alumno y los significados que representan los contenidos curriculares.

Desde la concepción constructivista de los procesos de enseñanza y aprendizaje que ocurren en el aula, se apuntan tres fuentes principales de influencia educativa:

a) Los profesores, cuya influencia educativa se ejerce a través de los procesos de interacción-interactividad que se encuentran vehiculados por la cantidad y el ritmo de la enseñanza, por la manera de presentar la información y de elaborar sistemas de significados compartidos, por la manera de indagar y valorar las respuestas de los alumnos y por el proceso seguido a la hora de llevar a cabo el traspaso progresivo del control y de la responsabilidad de los aprendizajes.

b) Los alumnos, cuya influencia educativa es también un proceso de interacción-interactividad que viene determinado por las soluciones aportadas a los conflictos cognitivos y a las controversias conceptuales, por las regulaciones mutuas efectuadas a través del lenguaje y por el apoyo mutuo que se produce en el proceso de atribución de sentido al aprendizaje.

c) Las instituciones educativas, cuya influencia puede ser directa e indirecta. La indirecta se ejerce a través de los proyectos institucionales (educativo y curricular) y la influencia directa mediante el favorecimiento de la participación de los alumnos en situaciones de aprendizaje complementarias a las de aula.

1.3. La unidad de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje desde una perspectiva constructivista

Por tanto, para explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje, hemos de tener en cuenta cuatro elementos centrales del proceso: el sujeto que aprende, el profesor que enseña, el contenido que se aprende y la finalidad del aprendizaje. Profesor-alumno-contenido-meta se constituyen así en un todo indisociable a la hora de explicar y analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El análisis de estos procesos se efectúa a través de una compleja red de interacciones que constituyen una totalidad y que puede y debe ser descompuesta, al menos en tres subunidades interpretativas (Serrano y Pons, 2008): el triángulo cognitivo que se constituye en la subunidad para el análisis de los significados que construye el alumno, el triángulo afectivo-relacional que es la subunidad que analiza el sentido que el alumno atribuye a su aprendizaje y el triángulo competencial que versa sobre las capacidades desarrolladas por el alumno.

El triángulo cognitivo, triángulo interactivo o triángulo didáctico (véase Figura 2) consta de tres elementos vertebradores: profesor-alumno-contenido, donde la interacción entre alumnos y contenidos constituye el foco de esta subunidad de análisis.

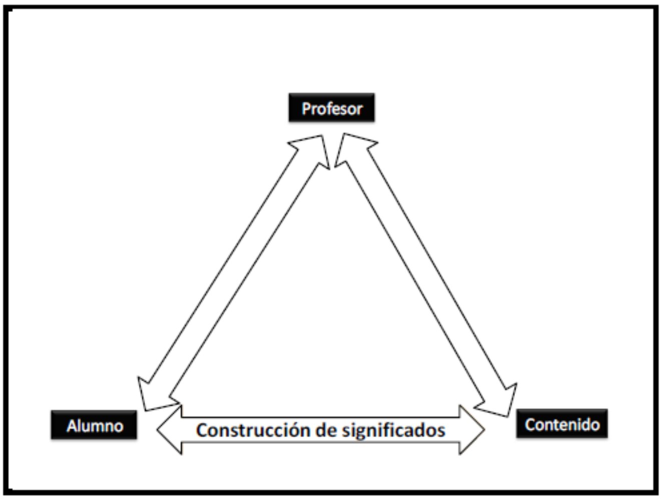


Figura 2. El triángulo cognitivo.

En primer lugar, nos encontramos con el alumno. El principio de actividad mental constructiva del alumno (que es el centro sobre el que pivota todo el constructivismo) constituye el elemento mediador para la construcción de significados que se aplica a unas formas y unos saberes culturales (contenidos escolares) que poseen un grado considerable de elaboración en el momento en que el alumno se aproxima a ellos. Esto quiere decir que los alumnos sólo pueden aprender los contenidos escolares en la medida en que despliegan ante ellos su actividad mental constructiva generadora de significados, lo que implica que el aprendizaje de los contenidos escolares es siempre un proceso de construcción o reconstrucción, que conduce a la ausencia de uniformidad en los significados construidos.

En segundo lugar, aparecen los contenidos como saberes universales y culturales que presentan distinto grado de estructuración interna (diferencias entre contenidos), con diferentes niveles de elaboración (diferencias en la organización dentro de un mismo contenido) y con un significado preestablecido de manera socio-cultural que posibilita la conservación, reproducción y legitimación del orden social, cultural y económico de su grupo social.

En el tercer vértice del triángulo encontramos la figura del profesor, cuyo papel en el proceso de construcción de los significados es el de mediador entre la estructura cognitiva del alumno y los contenidos considerados como saberes socio-culturalmente dotados de significado, es decir la función del profesor es guiar y orientar la actividad mental del alumno en la dirección que marcan los significados que la sociedad atribuye a los contenidos curriculares.

De esta manera podríamos decir que la actividad constructiva del alumno es un elemento mediador entre la enseñanza del profesor y los aprendizajes que llevan a cabo. La influencia educativa que ejerce el profesor a través de la enseñanza es un elemento mediador entre la actividad constructiva de los alumnos y los significados que vehiculan los contenidos escolares. Por último, la naturaleza y características de los contenidos mediatizan la actividad que el profesor y los alumnos despliegan en torno a ellos.

Por lo que se refiere al triángulo afectivo-relacional (véase Figura 3) vemos que consta de tres componentes: profesor-alumno-metas, donde la interacción entre alumnos y metas constituye el eje vertebrador de esta subunidad.

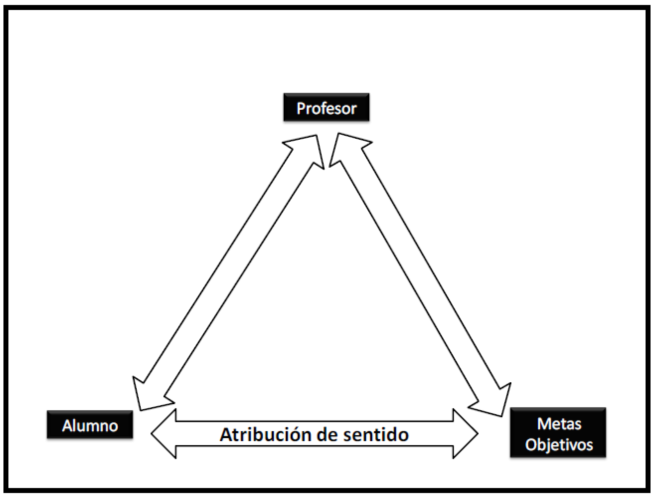


Figura 3. El triángulo afectivo-relacional

Cuando hablamos de actividad constructiva del alumno estamos implicando al alumno en su totalidad, es decir, consideramos a un aprendiz que pone en marcha tanto procesos cognitivos como afectivos y emocionales. Mientras que en el triángulo cognitivo considerábamos la dimensión cognitiva de la actividad, en el triángulo afectivo consideraremos la dimensión no cognitiva de esa actividad constructiva.

Por tanto, de la misma manera que en la construcción del significado la actividad constructiva del alumno ejercía el papel de mediador entre sus esquemas de conocimiento y los contenidos, en la vertiente no cognitiva esa actividad constructiva ejerce de mediadora entre los instrumentos afectivo-emocionales del alumno y las metas de aprendizaje.

Estas metas se encuentran vinculadas a la finalidad del acto de aprender, al interés del alumno por el contenido y por la situación de aprendizaje y al sentimiento de competencia que el alumno presenta para abordar el aprendizaje. Esta actividad mediadora es la que permite que el alumno atribuya sentido al aprendizaje.

La atribución de sentido es el término utilizado para referirse, tanto al conjunto de factores afectivos, motivacionales y relacionales, como a las intenciones, expectativas y propósitos con los que los alumnos se aproximan al aprendizaje y a la propia situación de aprender.

En esta subunidad de análisis, el papel del profesor es el de mediador entre el sistema afectivo-emocional del alumno y las metas socio-culturalmente elaboradas, es decir, la función del profesor es guiar y orientar la actividad afectivo-emocional del alumno en la dirección que marcan las metas que la sociedad atribuye al aprendizaje de los contenidos.

2. La noción de competencia

Esta concepción de los procesos de aprendizaje ha conducido a los investigadores a lo largo de las dos últimas décadas a considerar que el aprendizaje de contenidos resulta a todas luces insuficiente para dotar a los alumnos de los instrumentos que permitan atender adecuadamente los fines que demanda la sociedad. De este modo la noción de competencia ha venido a sustituir, sin elidir, los aprendizajes de contenidos y el logro de objetivos que clásicamente han guiado los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esta noción, de manera muy simple, viene a expresar que lo que la sociedad demanda de los individuos son ciertas capacidades o potencialidades que les posibilite actuar eficazmente en un contexto determinado, de manera que una “persona competente” es aquella que, en situaciones diversas, complejas e impredecibles, pone en movimiento, aplica e integra los conocimientos declarativos, procedimentales y causales que ha adquirido. Por lo tanto, la competencia se basa en los conocimientos, pero no se reduce a ellos.

Desde esta perspectiva una persona competente debe saber dar respuesta a las preguntas qué es y cómo se hace, para qué sirve y cuándo debe utilizarlo (conocimiento explícito, causal y tácito).

Si prescindimos del conocimiento metacognitivo (conocimiento que se refiere a cómo aprendemos, pensamos, almacenamos y recordamos información), la base sobre la que se asienta el conocimiento académico habría que situarla en un triángulo cuyos vértices estarían ocupados por el alumno, los contenidos y los objetivos y metas, es decir un alumno competente sería el que construye significados atribuyendo sentido a lo aprendido y a su propio aprendizaje.

En este proceso, el profesor se sitúa en el baricentro del triángulo instruccional y se constituye en el mediador entre la estructura cognitiva del alumno, la estructura logocéntrica de los contenidos y las finalidades objetivas y subjetivas del aprendizaje (véase Figura 4).

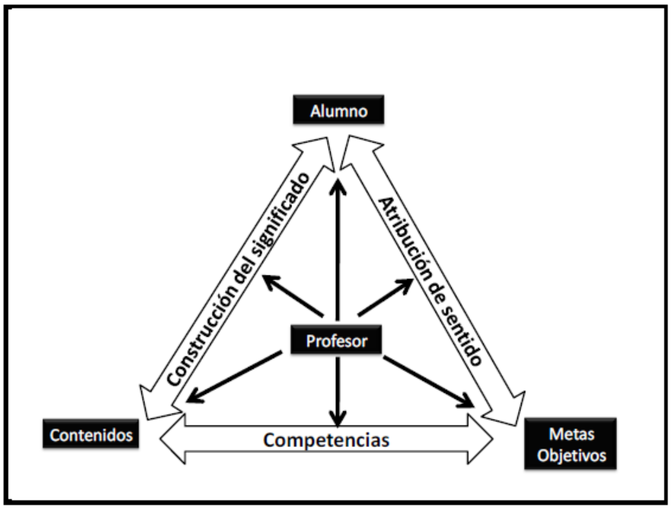


Figura 4. El triángulo instruccional

En tanto que mediador entre la actividad constructiva del alumno y los contenidos, posibilita la construcción de representaciones cognitivas de estos últimos adaptadas a las metas instruccionales. En tanto que mediador entre las características afectivo-emocionales de los alumnos y las metas instruccionales, posibilita la atribución de sentido a los contenidos. En tanto que planificador instruccional articula los contenidos y los objetivos en forma de competencias que puedan ser potencialmente asimilables por la estructura cognitiva del alumno, al tiempo que hace que le resulten retos motivantes.

No es pues de extrañar que el Consejo de Europa definiera la competencia como la "capacidad general basada en los conocimientos, valores y disposiciones que una persona ha desarrollado mediante su compromiso con las prácticas educativas" (Conclusiones de la presidencia, 2000).

Las orientaciones de la Unión Europea insisten en la necesidad de la adquisición de las competencias clave por parte de la ciudadanía como condición indispensable para lograr que los individuos alcancen un pleno desarrollo personal, social y profesional que se ajuste a las demandas de un mundo globalizado y haga posible el desarrollo económico, vinculado al conocimiento. Así se establece, desde el Consejo Europeo de Lisboa en el año 2000 hasta las Conclusiones del Consejo de 2009 sobre el Marco Estratégico para la cooperación europea en el ámbito de la educación y la formación («ET 2020»).

Por otra parte, más allá del ámbito europeo, la UNESCO estableció los principios precursores de la aplicación de la enseñanza basada en competencias al identificar los pilares básicos de una educación permanente para el Siglo XXI, consistentes en «aprender a conocer», «aprender a hacer», «aprender a ser» y «aprender a convivir» (Delors, 1996).

De igual forma, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), desde la puesta en marcha del programa PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes), plantea que el éxito en la vida de un estudiante depende de la adquisición de un rango amplio de competencias. Por ello se llevan a cabo varios proyectos dirigidos al desarrollo de un marco conceptual que defina e identifique las «competencias necesarias para llevar una vida personal y socialmente valiosa en un Estado democrático moderno» (Definición y Selección de Competencias [DeSeCo], 1999, 2003).

DeSeCo (2003) define competencia como «la capacidad de responder a demandas complejas y llevar a cabo tareas diversas de forma adecuada». La competencia «supone una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones, y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz». Se contemplan, pues, como conocimiento en la práctica, es decir, un conocimiento adquirido a través de la participación activa en prácticas sociales y, como tales, se pueden desarrollar tanto en el contexto educativo formal, a través del currículo, como en los contextos educativos no formales e informales.

Las competencias, por tanto, se conceptualizan como «saberes» que se aplican a una diversidad de contextos académicos, sociales y profesionales. Para que la transferencia a distintos contextos sea posible resulta indispensable una comprensión del conocimiento presente en las competencias y la vinculación de este con las habilidades prácticas o destrezas que las integran.

La Recomendación 2006/962/EC, del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente, insta a los Estados miembros a «desarrollar la oferta de competencias clave». Se delimita la definición de competencia, entendida como una combinación de conocimientos, capacidades, o destrezas, y actitudes adecuadas al contexto. Se considera que «las competencias clave son aquellas que todas las personas precisan para su realización y desarrollo personal, así como para la ciudadanía activa, la inclusión social y el empleo». Se identifican claramente ocho competencias clave esenciales para el bienestar de las sociedades europeas, el crecimiento económico y la innovación, y se describen los conocimientos, las capacidades y las actitudes esenciales vinculadas a cada una de ellas. Asimismo, se destaca la necesidad de que se pongan los medios para desarrollar las competencias clave durante la educación y la formación inicial, y desarrolladas a lo largo de la vida.

Así pues, el conocimiento competencial integra un conocimiento de base conceptual: conceptos, principios, teorías, datos y hechos (conocimiento declarativo-saber qué); un conocimiento relativo a las destrezas, referidas tanto a la acción física observable como a la acción mental (conocimiento procedimental-saber cómo); y un tercer componente que tiene una gran influencia social y cultural, y que implica un conjunto de actitudes y valores (saber ser).

Por otra parte, el aprendizaje por competencias favorece los propios procesos de aprendizaje y la motivación por aprender, debido a la fuerte interrelación entre sus componentes. En efecto, el conocimiento de base declarativa («conocimiento») no se aprende al margen de su uso, del «saber hacer»; tampoco se adquiere un conocimiento procedimental («destrezas») en ausencia de un conocimiento de base declarativa que permite dar sentido a la acción que se lleva a cabo.

La Comisión, en la Estrategia Europea 2020 para un crecimiento inteligente, sostenible e integrador, señala que los Estados miembros necesitarán «mejorar los resultados educativos, abordando cada segmento (preescolar, primario, secundario, formación profesional y universitario) mediante un planteamiento integrado que recoja las competencias clave y tenga como fin reducir el abandono escolar y garantizar las competencias requeridas para proseguir la formación y el acceso al mercado laboral».

Siguiendo estas recomendaciones, en España se incorporaron al sistema educativo no universitario las competencias clave con el nombre de competencias básicas. La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE), hace ya referencia en su exposición de motivos, entre otros asuntos, a la necesidad de cohesión social, al aprendizaje permanente a lo largo de la vida y a la sociedad del conocimiento, e introduce el término competencias básicas por primera vez en la normativa educativa.

La Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de Calidad Educativa (LOMCE), pone el énfasis en un modelo de currículo basado en competencias: introduce un nuevo artículo 6 bis en la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, que en su apartado 1.e) establece que corresponde al Gobierno «el diseño del currículo básico, en relación con los objetivos, competencias, contenidos, criterios de evaluación, estándares y resultados de aprendizaje evaluables, con el fin de asegurar una formación común y el carácter oficial y la validez en todo el territorio nacional de las titulaciones a que se refiere esta Ley Orgánica».

Dado que el aprendizaje basado en competencias se caracteriza por su transversalidad, su dinamismo y su carácter integral, el proceso de enseñanza-aprendizaje competencial debe abordarse desde todas las áreas de conocimiento y por parte de las diversas instancias que conforman la comunidad educativa, tanto en los ámbitos formales como en los no formales e informales. Su dinamismo se refleja en que las competencias no se adquieren en un determinado momento y permanecen inalterables, sino que implican un proceso de desarrollo mediante el cual los individuos van adquiriendo mayores niveles de desempeño en el uso de las mismas.

Además, este aprendizaje implica una formación integral de las personas que, al finalizar la etapa académica, serán capaces de transferir aquellos conocimientos adquiridos a las nuevas instancias que aparezcan en la opción de vida que elijan. Así, podrán reorganizar su pensamiento y adquirir nuevos conocimientos, mejorar sus actuaciones y descubrir nuevas formas de acción y nuevas habilidades que les permitan ejecutar eficientemente las tareas, favoreciendo un aprendizaje a lo largo de toda la vida.

La nueva disposición adicional trigésima quinta a la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, sobre «Integración de las competencias en el currículo», establece que el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte promoverá, en cooperación con las Comunidades Autónomas, la adecuada descripción de las relaciones entre las competencias y los contenidos y criterios de evaluación de las diferentes enseñanzas a partir de la entrada en vigor de la Ley Orgánica. A estos efectos, se prestará atención prioritaria al currículo de la enseñanza básica.

Las competencias que se recogen en esta orden se han establecido de conformidad con los resultados de la investigación educativa y con las tendencias europeas recogidas en la Recomendación 2006/962/EC, del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente. Dichas competencias se describen, se indica su finalidad y aspectos distintivos, y se pone de manifiesto, en cada una de ellas, las claves de desarrollo que debe alcanzar todo el alumnado referidas al final de la educación básica y Bachillerato, pero cuyo desarrollo debe iniciarse desde el comienzo de la escolarización, de manera que su adquisición se realice de forma progresiva y coherente a lo largo de las distintas etapas educativas.

Las competencias clave deberán estar estrechamente vinculadas a los objetivos definidos para la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato. Esta vinculación favorece que la consecución de dichos objetivos a lo largo de la vida académica lleve implícito el desarrollo de las competencias clave, para que todas las personas puedan alcanzar su desarrollo personal y lograr una correcta incorporación en la sociedad.

Un enfoque metodológico basado en las competencias clave y en los resultados de aprendizaje conlleva importantes cambios en la concepción del proceso de enseñanza-aprendizaje, cambios en la organización y en la cultura escolar; requiere la estrecha colaboración entre los docentes en el desarrollo curricular y en la transmisión de información sobre el aprendizaje de los alumnos y alumnas, así como cambios en las prácticas de trabajo y en los métodos de enseñanza.

2.1. El marco legal de las competencias

Las competencias básicas se introducen en el Sistema Educativo español, con la promulgación de la LOE (LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, de Educación) determinando que la incorporación de estas competencias al currículo permite poner el acento en aquellos aprendizajes que se consideran imprescindibles, desde un planteamiento integrador y orientado a la aplicación de los saberes adquiridos, permitiendo que los alumnos, al finalizar la enseñanza obligatoria, puedan lograr su realización personal, ejercer la ciudadanía activa, incorporarse a la vida adulta de manera satisfactoria y ser capaces de desarrollar un aprendizaje permanente a lo largo de la vida.

Para los redactores de la LOE la inclusión de las competencias básicas en el currículo tiene varias finalidades. En primer lugar, integrar los diferentes aprendizajes, tanto los formales, incorporados a las diferentes áreas o materias, como los informales y no formales. En segundo lugar, permitir a todos los estudiantes integrar sus aprendizajes, ponerlos en relación con distintos tipos de contenidos y utilizarlos de manera efectiva cuando les resulten necesarios en diferentes situaciones y contextos. Y, por último, orientar la enseñanza, al permitir identificar los contenidos y los criterios de evaluación que tienen carácter imprescindible y, en general, inspirar las distintas decisiones relativas al proceso de enseñanza y de aprendizaje.

Con las áreas y materias del currículo se pretende que todos los alumnos y las alumnas alcancen los objetivos educativos y, consecuentemente, también que adquieran las competencias básicas. Sin embargo, no existe una relación unívoca entre la enseñanza de determinadas áreas o materias y el desarrollo de ciertas competencias. Cada una de las áreas contribuye al desarrollo de diferentes competencias y, a su vez, cada una de las competencias básicas se alcanzará como consecuencia del trabajo en varias áreas o materias. El trabajo en las áreas y materias del currículo para contribuir al desarrollo de las competencias básicas debe complementarse con diversas medidas organizativas y funcionales, imprescindibles para su desarrollo. Así, la organización y el funcionamiento de los centros y las aulas, la participación del alumnado, las normas de régimen interno, el uso de determinadas metodologías y recursos didácticos, o la concepción, organización y funcionamiento de la biblioteca escolar, entre otros aspectos, pueden favorecer o dificultar el desarrollo de competencias asociadas a la comunicación, el análisis del entorno físico, la creación, la convivencia y la ciudadanía, o la alfabetización digital. Igualmente, la acción tutorial permanente puede contribuir de modo determinante a la adquisición de competencias relacionadas con la regulación de los aprendizajes, el desarrollo emocional o las habilidades sociales. Por último, la planificación de las actividades complementarias y extraescolares puede reforzar el desarrollo del conjunto de las competencias básicas.

Este conjunto de competencias se encuentra integrado en un grupo de ocho competencias:

1. Competencia en comunicación lingüística.
2. Competencia matemática.
3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
4. Tratamiento de la información y competencia digital.
5. Competencia social y ciudadana.
6. Competencia cultural y artística.
7. Competencia para aprender a aprender.
8. Autonomía e iniciativa personal.

Con la aparición de la LOMCE (Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa) el tema de las competencias básicas no se ve alterado en lo que podríamos considerar como sustancial. En efecto, la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el Bachillerato, especifica que esta orden tiene por objeto describir las relaciones entre las competencias y los contenidos y criterios de evaluación de la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, de acuerdo con lo indicado por la disposición adicional trigésima quinta de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

Sin embargo, existe una pequeña modificación en el número de competencias básicas que pasan a ser siete al integrarse la competencia matemática con la competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico bajo el epígrafe de "Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología", así como en la denominación de otras. De esta manera el conjunto de competencias básicas está constituido por las siguientes competencias:

1. Comunicación lingüística.
2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
3. Competencia digital.
4. Aprender a aprender.
5. Competencias sociales y cívicas.
6. Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
7. Conciencia y expresiones culturales.

Otra modificación que aparece es de nomenclatura: las competencias básicas pasan a denominarse competencias clave. La terminología competencias básicas versus competencias clave no está bien definida en los textos legales, sin embargo, atendiendo al Resumen Ejecutivo de DeSeCo, podríamos admitir que las primeras se integran en las segundas a título de sub-competencias. En efecto, los individuos necesitan de un amplio rango de competencias para enfrentar los complejos desafíos del mundo de hoy, pero producir listas muy largas de todo lo que pueden necesitar hacer en diversos contextos en determinado momento de sus vidas sería de un valor práctico muy limitado.

El marco conceptual del Proyecto DeSeCo para competencias clave clasifica dichas competencias en tres amplias categorías. Primero, los individuos deben poder usar un amplio rango de herramientas para interactuar efectivamente con el ambiente: tanto físicas como en la tecnología de la información y socio-culturales como en el uso del lenguaje. Necesitan comprender dichas herramientas ampliamente, cómo para adaptarlas a sus propios fines, usar las herramientas de manera interactiva. Segundo, en un mundo cada vez más interdependiente, los individuos necesitan poder comunicarse con otros, y debido a que encontrarán personas de diversos orígenes, es importante que puedan interactuar en grupos heterogéneos. Tercero, los individuos necesitan poder tomar la responsabilidad de manejar sus propias vidas, situar sus vidas en un contexto social más amplio y actuar de manera autónoma.

Estas categorías, cada una con un enfoque específico, están interrelacionadas, y colectivamente, forman la base para identificar y mapear las competencias clave. La necesidad de que los individuos piensen y actúen reflexivamente es fundamental en este marco de competencias. La reflexión involucra no sólo la habilidad de aplicar de forma rutinaria una fórmula o método para confrontar una situación, también la capacidad de adaptarse al cambio, aprender de las experiencias y pensar y actuar con actitud crítica.

Un marco de competencias clave consiste en un grupo específico de competencias, unido en un enfoque integrado. Este grupo de competencias es lo que podríamos denominar competencias básicas.

Competencia clave 1: usar las herramientas de forma interactiva

Las demandas sociales y profesionales de la economía global y la sociedad de la información requieren del dominio de herramientas socioculturales para interactuar con conocimientos, tales como el lenguaje, la información y el conocimiento; al mismo tiempo requieren de las herramientas físicas, tales como las computadoras.

Usar las herramientas de forma interactiva requiere de algo más que el simple acceso a la herramienta y la destreza técnica requerida para manejar la situación (ej. leer un texto, usar un software). Los individuos también necesitan crear y adaptar el conocimiento y las destrezas. Esto requiere de cierta familiaridad con la herramienta en sí misma, así como un entendimiento sobre la forma como cambia, la manera en que uno puede interactuar con el mundo y cómo puede ser utilizada para alcanzar metas más amplias. En este sentido, una herramienta no es solamente un mediador pasivo, es un instrumento para un diálogo activo entre el individuo y su ambiente.

Los individuos descubren el mundo a través de herramientas cognitivas, socioculturales y físicas. Estos encuentros, a su vez, establecen la forma como entienden y se hacen competentes en el mundo, enfrentan la transformación y el cambio, y responden a los desafíos de largo plazo. Al usar herramientas de manera interactiva se abren nuevas posibilidades en la forma como los individuos perciben y se relacionan con el mundo.

Las evaluaciones internacionales actuales, en particular PISA y la Encuesta de Alfabetismo en Adultos y Destrezas para la Vida (ALL), conducidas por el Instituto de Estadísticas de Canadá brindan evidencia empírica de los datos sobresalientes de las competencias clave en términos de la capacidad de interactuar con herramientas como textos escritos.

<u>Competencia 1-a: La habilidad para usar el lenguaje, los símbolos y el texto de forma interactiva</u>

Esta competencia clave se relaciona con el uso efectivo de las destrezas lingüísticas orales y escritas, las destrezas de computación y otras destrezas matemáticas, en múltiples situaciones. Es una herramienta esencial para funcionar bien en la sociedad y en el lugar de trabajo, y para participar en un diálogo efectivo con otros. El término como “competencias de comunicación” está asociado con esta competencia clave.

La competencia en lectura y la competencia en matemáticas en PISA y la numeración según se define en ALL son ejemplos de competencias básicas ilustrativos de esta competencia clave.

<u>Competencia 1-b: La capacidad de usar este conocimiento e información de manera interactiva</u>

Tanto el rol, cada vez más importante, de los sectores de servicios e información y el rol central del manejo del conocimiento en las sociedades de hoy hacen que sea esencial que las personas puedan usar la información y el conocimiento de manera interactiva.

Esta competencia clave requiere de una reflexión crítica sobre la naturaleza de la información en sí -su infraestructura técnica y su contexto e impactos sociales, culturales y aún ideológicos-. La competencia de información es necesaria como base para comprender opciones, formar opiniones, tomar decisiones y llevar a cabo acciones informadas y responsables.

Usar el conocimiento y la información de manera interactiva requiere que los individuos:

- Reconozcan y determinen lo que no saben.
- Identifiquen, ubiquen y accedan a fuentes apropiadas de información (incluyendo el ensamblaje de conocimiento e información en el ciberespacio).
- Evalúen la calidad, propiedad y el valor de dicha información, así como sus fuentes.
- Organicen el conocimiento y la información.

Una ilustración de esta competencia es la competencia básica ligada al alfabetismo científico, según se desarrolla en el marco de la encuesta PISA 2006. Con ello se busca explorar el grado en que los estudiantes están dispuestos a comprometerse e interactuar con preguntas científicas, incluyendo qué tan interesados están en las cuestiones científicas y no sólo su habilidad de ejecutar las destrezas cognitivas según se requiere.

Competencia 1-c: La habilidad de usar la tecnología de forma interactiva

La innovación tecnológica impone nuevas demandas a individuos dentro y fuera de su lugar de trabajo. Al mismo tiempo, los avances tecnológicos brindan a los individuos nuevas oportunidades de satisfacer las demandas de manera más efectiva y de formas nuevas y diferentes.

El uso interactivo de la tecnología requiere de un conocimiento de nuevas formas en que los individuos pueden usar la tecnología en su vida diaria. La tecnología de la información y la comunicación tiene el potencial de transformar la forma en que las personas trabajan juntas (reduciendo la importancia de la ubicación), acceden a la información (poniendo a disposición vastos montos de fuentes de información) e interactúan con otros (facilitando relaciones y redes de personas de todo el mundo de forma regular). Para aprovechar dicho potencial, los individuos necesitarán ir más allá de las destrezas técnicas básicas necesarias para simplemente usar el Internet, enviar correos electrónicos y cosas similares.

Al igual que con otras herramientas, la tecnología puede ser utilizada de forma interactiva si los usuarios comprenden su naturaleza y reflexionan sobre su potencial. Más importante aún, los individuos necesitan relacionar las posibilidades que yacen en las herramientas tecnológicas con sus propias circunstancias y metas. Un primer paso es que los individuos incorporen la tecnología a sus prácticas comunes, lo cual produce cierta familiaridad con la tecnología, que permite expandir su uso. La competencia básica que hemos denominado «competencia digital» se inserta en esta competencia.

Competencia clave 2: interactuar en grupos heterogéneos

A lo largo de sus vidas, los seres humanos dependen de sus nexos con otros para su sobrevivencia material y psicológica, también en relación con su identidad social.

Conforme las sociedades se hacen cada vez más fragmentadas y también más diversas, se hace importante manejar bien las relaciones interpersonales para beneficio de los individuos y para construir nuevas formas de cooperación.

La construcción de capital social es importante, conforme los nexos sociales existentes se hacen más débiles y se crean nuevos por aquellos con la habilidad de formar redes fuertes. En el futuro, una de las fuentes potenciales de inequidad podría ser la diferencia en las competencias de diferentes grupos para construir y beneficiarse del capital social.

Las competencias clave en esta categoría son necesarias para que los individuos aprendan, vivan y trabajen con otros. Tratan de muchas de las características que se asocian con términos como “competencias sociales”, “destrezas sociales”, “competencias interculturales” o “destrezas suaves”.

Las competencias básicas «competencias sociales y cívicas» y «conciencia y expresiones culturales» se incluirían en esta categoría general de competencias clave.

<u>Competencia 2-a: La habilidad de relacionarse bien con otros</u>

Esta primera competencia clave permite a los individuos iniciar, mantener y manejar relaciones personales con, por ejemplo, conocidos personales, colegas y clientes.

Relacionarse bien no es sólo un requerimiento para cohesión social sino, cada vez más, para el éxito económico conforme las compañías y economías cambiantes enfatizan en la inteligencia emocional.

Esta competencia supone que los individuos pueden respetar y apreciar los valores, las creencias, culturas e historias de otros para crear un ambiente en el que se sientan bienvenidos, sean incluidos y puedan crecer.

Para relacionarse bien con otros se requiere:

- Empatía, adoptar el rol de la otra persona e imaginar la situación desde su perspectiva. Esto lleva a la autorreflexión cuando, al considerar una amplia gama de opiniones y creencias, los individuos reconocen que lo que damos por sentado en una situación no es necesariamente compartido por los demás.

- El manejo efectivo de las emociones, conocerse a sí mismo e interpretar de forma efectiva sus propios estados emocionales y motivacionales subyacentes y los de los demás.

Competencia 2-b: La habilidad de cooperar

Muchas demandas y metas no pueden ser alcanzadas por un solo individuo, requieren de grupos como equipos de trabajo, movimientos cívicos, grupos de administración, partidos políticos y sindicatos.

La cooperación requiere que cada individuo tenga ciertas cualidades. Cada uno debe poder equilibrar su compromiso con el grupo y sus metas con sus propias prioridades y debe poder compartir el liderazgo y apoyar a otros. Los componentes específicos de esta competencia incluyen:

- La habilidad de presentar ideas y escuchar las ideas de otros.

- Un entendimiento de las dinámicas del debate y el seguimiento de una agenda.

- La habilidad de construir alianzas tácticas y sostenibles.

- La habilidad de negociar.

- La capacidad de tomar decisiones que permitan diferentes opiniones.

Competencia 2-c: La habilidad de manejar y resolver conflictos

En todos los aspectos de la vida ocurren conflictos, ya sea en el hogar, el lugar de trabajo o la comunidad y sociedad. El conflicto es parte de la realidad social, una parte inherente de las relaciones humanas. Surge cuando dos o más individuos o grupos se oponen uno al otro por necesidades, intereses, metas o valores divergentes.

La clave para manejar efectivamente un conflicto es enfrentarlo y resolverlo, y no negarlo, es decir, transformar el conflicto en controversia y para ello es necesario considerar los intereses y las necesidades de otros y las soluciones en las que ambas partes ganen.

Para que los individuos participen activamente en el manejo y la resolución de conflictos, necesitarán poder:

- Analizar los elementos y los intereses en juego (ej. poder, reconocimiento de méritos, división del trabajo, equidad), los orígenes del conflicto y el razonamiento de todas las partes, reconociendo que hay diferentes posiciones posibles.
- Identificar áreas de acuerdo y áreas de desacuerdo.
- Recontextualizar el problema.
- Priorizar las necesidades y metas, decidiendo lo que están dispuestos a dejar de lado y bajo qué circunstancias.

Competencia clave 3: actuar de manera autónoma

Actuar de manera autónoma no significa funcionar en aislamiento social. Al contrario, requiere de una comprensión del ambiente que nos rodea, de las dinámicas sociales y de los roles que uno juega y desea jugar. Esto requiere que los individuos se empoderen del manejo de sus vidas en forma significativa y responsable, ejerciendo control sobre sus condiciones de vida y de trabajo. Se requiere que los individuos actúen de forma autónoma para participar efectivamente en el desarrollo de la sociedad y para funcionar bien en diferentes esferas de la vida incluyendo el lugar de trabajo, la vida familiar y la vida social. Se necesita que el individuo desarrolle independientemente una identidad y elija, en lugar de seguir a la multitud. Al hacerlo, necesitan reflexionar sobre sus valores y sus acciones.

Actuar de forma autónoma es particularmente importante en el mundo moderno cuando la posición de cada persona no está bien definida como lo estaba tradicionalmente. Los individuos necesitan crear una identidad personal para dar sentido a sus vidas, para definir cómo encajan en ella. Un ejemplo es la relación laboral, donde hay menos ocupaciones estables, vitalicias para quienes trabajan para un mismo patrono.

En general, la autonomía requiere de una orientación hacia un futuro y un conocimiento del ambiente que nos rodea, de las dinámicas sociales y los roles que uno juega y desea jugar. Supone la posesión de un firme concepto de sí mismo y la habilidad de traducir las necesidades y los deseos en actos de voluntad: decisión, elección y acción.

La competencia básica «sentido de iniciativa y espíritu emprendedor» se englobaría dentro de esta competencia clave.

<u>Competencia 3-a: La habilidad de actuar dentro del gran esquema</u>

Esta competencia clave requiere que los individuos entiendan y consideren el contexto más amplio de sus acciones y decisiones. Es decir, requiere que uno tome en cuenta cómo se relacionan, por ejemplo, con las normas de la sociedad, las instituciones sociales y económicas y con lo que ha ocurrido en el pasado. Es necesario reconocer cómo nuestras acciones y decisiones encajan en este escenario más amplio.

Esta competencia requiere por ejemplo que los individuos:

- Comprendan patrones.
- Tengan idea del sistema en el que existen; ej., comprendan sus estructuras, cultura, prácticas y reglas formales e informales y expectativas y roles que juegan dentro de la misma, incluyendo una mayor comprensión de las leyes y regulaciones, y también de las normas sociales no escritas, los códigos morales, los modales y el protocolo. Complementa un entendimiento de los derechos con conocimiento de los límites de las acciones.
- Identifiquen las consecuencias directas e indirectas de sus acciones.
- Puedan elegir entre diferentes cursos de acción reflexionando en sus consecuencias potenciales en relación con las normas y metas individuales y compartidas.

<u>Competencia 3-b: La habilidad de formar y conducir planes de vida y proyectos personales</u>

Esta competencia aplica el concepto de manejo de proyectos en los individuos. Requiere que los individuos interpreten la vida como una narrativa organizada y le den significado y propósito en un ambiente cambiante en el que la vida, con frecuencia, se ve fragmentada.

Esta competencia supone una orientación hacia el futuro, implicando tanto optimismo como potencial, pero también raíces fuertes dentro de lo posible. Por ejemplo, los individuos deben poder:

- Definir un proyecto y fijar una meta.
- Identificar y evaluar tanto los recursos a los que se tiene acceso, como los recursos necesarios (ej. tiempo y dinero).
- Priorizar y refinar las metas.
- Balancear los recursos necesarios para satisfacer metas múltiples.
- Aprender de acciones pasadas, proyectando resultados futuros.
- Monitorear el progreso, haciendo los ajustes necesarios conforme se desarrolla el proyecto.

Competencia 3-c: La habilidad de afirmar derechos, intereses, límites y necesidades

Esta competencia es importante para contextos que van de asuntos legales altamente estructurados a instancias diarias sobre la asertividad de los propios intereses del individuo.

A pesar de que muchos derechos y necesidades se establecen y protegen en las leyes o en contratos, en última instancia son los individuos quienes identifican y evalúan sus derechos, necesidades e intereses (así como los de los demás) y los reafirman y defienden activamente.

Por un lado, esta competencia se relaciona con derechos y necesidades autodirigidos; también se relaciona con los derechos y las necesidades del individuo como miembro de una colectividad (ej. participando activamente en instituciones democráticas y en procesos políticos locales y nacionales). Esta competencia implica la habilidad, por ejemplo, de:

- Comprender los propios intereses (ej. en una elección).
- Conocer las reglas y principios escritos para basar un caso.
- Construir argumentos para que nuestros derechos y necesidades sean reconocidos.
- Sugerir arreglos o soluciones alternativas.

Aunque la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato, especifica en su artículo 5 (“Las competencias clave en el currículo”) que:

- Las competencias clave deben estar integradas en las áreas o materias de las propuestas curriculares, y en ellas definirse, explicitarse y desarrollarse suficientemente los resultados de aprendizaje que los alumnos y alumnas deben conseguir.

- Las competencias deben desarrollarse en los ámbitos de la educación formal, no formal e informal a lo largo de la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, y en la educación permanente a lo largo de toda la vida.

- Todas las áreas o materias del currículo deben participar, desde su ámbito correspondiente, en el desarrollo de las distintas competencias del alumnado.

- La selección de los contenidos y las metodologías debe asegurar el desarrollo de las competencias clave a lo largo de la vida académica.

Por razones evidentes con relación al tema de nuestro trabajo, nosotros pasamos a continuación a desarrollar que entendemos por «competencia matemática».

2.2. Competencia matemática

Para la LOE, la competencia matemática consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.

Forma parte de la competencia matemática la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, lo que aumenta la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida, tanto en el ámbito escolar o académico como fuera de él, y favorece la participación efectiva en la vida social.

Asimismo, esta competencia implica el conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.) en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana, y la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información. Estos procesos permiten aplicar esa información a una mayor variedad de situaciones y contextos, seguir cadenas argumentales identificando las ideas fundamentales, y estimar y enjuiciar la lógica y validez de argumentaciones e informaciones. En consecuencia, la competencia matemática supone la habilidad para seguir determinados procesos de pensamiento (como la inducción y la deducción, entre otros) y aplicar algunos algoritmos de cálculo o elementos de la lógica, lo que conduce a identificar la validez de los razonamientos y a valorar el grado de certeza asociado a los resultados derivados de los razonamientos válidos.

La competencia matemática implica una disposición favorable y de progresiva seguridad y confianza hacia la información y las situaciones (problemas, incógnitas, etc.) que contienen elementos o soportes matemáticos, así como hacia su utilización cuando la situación lo aconseja, basadas en el respeto y el gusto por la certeza y en su búsqueda a través del razonamiento.

Esta competencia cobra realidad y sentido en la medida que los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan. Por tanto, la identificación de tales situaciones, la aplicación de estrategias de resolución de problemas, y la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible están incluidas en ella. En definitiva, la posibilidad real de utilizar la actividad matemática en contextos tan variados como sea posible. Por ello, su desarrollo en la educación obligatoria se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana.

El desarrollo de la competencia matemática al final de la educación obligatoria, conlleva utilizar espontáneamente -en los ámbitos personal y social- los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones. En definitiva, supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad.

La LOMCE parte de la base de que la competencia matemática induce y fortalece algunos aspectos esenciales de la formación de las personas que resultan fundamentales para la vida ya que, en una sociedad donde el impacto de las matemáticas es determinante, la consecución y sostenibilidad del bienestar social exige conductas y toma de decisiones personales estrechamente vinculadas a la capacidad crítica y visión razonada y razonable de las personas. Para justificar estas afirmaciones recurre a una serie de implicaciones y requerimientos propios de esta competencia básica:

1. La competencia matemática implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto.

2. La competencia matemática requiere de conocimientos sobre los números, las medidas y las estructuras, así como de las operaciones y las representaciones matemáticas, y la comprensión de los términos y conceptos matemáticos.

3. El uso de herramientas matemáticas implica una serie de destrezas que requieren la aplicación de los principios y procesos matemáticos en distintos contextos, ya sean personales, sociales, profesionales o científicos, así como para emitir juicios fundados y seguir cadenas argumentales en la realización de cálculos, el análisis de gráficos y representaciones matemáticas y la manipulación de expresiones algebraicas, incorporando los medios digitales cuando sea oportuno. Forma parte de esta destreza la creación de descripciones y explicaciones matemáticas que llevan implícitas la interpretación de resultados matemáticos y la reflexión sobre su adecuación al contexto, al igual que la determinación de si las soluciones son adecuadas y tienen sentido en la situación en que se presentan.

Se trata, por tanto, de reconocer el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo y utilizar los conceptos, procedimientos y herramientas para aplicarlos en la resolución de los problemas que puedan surgir en una situación determinada a lo largo de la vida. La activación de la competencia matemática supone que el aprendiz es capaz de establecer una relación profunda entre el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental, implicados en la resolución de una tarea matemática determinada.

La competencia matemática incluye una serie de actitudes y valores que se basan en el rigor, el respeto a los datos y la veracidad.

Así pues, para el adecuado desarrollo de la competencia matemática resulta necesario abordar cuatro áreas relativas a los números, el álgebra, la geometría y la estadística, interrelacionadas de formas diversas:

- La cantidad: esta noción incorpora la cuantificación de los atributos de los objetos, las relaciones, las situaciones y las entidades del mundo, interpretando distintas representaciones de todas ellas y juzgando interpretaciones y argumentos. Participar en la cuantificación del mundo supone comprender las mediciones, los cálculos, las magnitudes, las unidades, los indicadores, el tamaño relativo y las tendencias y patrones numéricos.

- El espacio y la forma: incluyen una amplia gama de fenómenos que se encuentran en nuestro mundo visual y físico: patrones, propiedades de los objetos, posiciones, direcciones y representaciones de ellos; descodificación y codificación de información visual, así como navegación e interacción dinámica con formas reales, o con representaciones. La competencia matemática en este sentido incluye una serie de actividades como la comprensión de la perspectiva, la elaboración y lectura de mapas, la transformación de las formas con y sin tecnología, la interpretación de vistas de escenas tridimensionales desde distintas perspectivas y la construcción de representaciones de formas.

- El cambio y las relaciones: el mundo despliega multitud de relaciones temporales y permanentes entre los objetos y las circunstancias, donde los cambios se producen dentro de sistemas de objetos interrelacionados. Tener más conocimientos sobre el cambio y las relaciones supone comprender los tipos fundamentales de cambio y cuándo tienen lugar, con el fin de utilizar modelos matemáticos adecuados para describirlo y predecirlo.

- La incertidumbre y los datos: son un fenómeno central del análisis matemático presente en distintos momentos del proceso de resolución de problemas en el que resulta clave la presentación e interpretación de datos. Esta categoría incluye el reconocimiento del lugar de la variación en los procesos, la posesión de un sentido de cuantificación de esa variación, la admisión de incertidumbre y error en las mediciones y los conocimientos sobre el azar. Asimismo, comprende la elaboración, interpretación y valoración de las conclusiones extraídas en situaciones donde la incertidumbre y los datos son fundamentales.

3. El aprendizaje cooperativo

La LOMCE, a lo largo de su desarrollo, especifica que "las actividades de tipo colaborativo favorecen la regulación de los procesos de enseñanza y aprendizaje" y que el pleno logro de las competencias "implica la participación y el trabajo colaborativo", ya que la mayor parte de las actividades necesarias para alcanzarlas requieren "un trabajo colectivo en el que es preciso disponer de habilidades de cooperación y tener conciencia de apoyar y apreciar las contribuciones ajenas".

Asimismo, el aprendizaje autorregulado y el logro de una competencia básica como es el «aprender a aprender», que posibilita el aprendizaje a lo largo de toda la vida, requiere el trabajo en equipo porque la mayor parte de las veces, las alternativas necesarias para que un alumno sea consciente de qué es lo hace para aprender, pasan por "averiguar qué es lo que hacen los demás en situaciones de aprendizaje cooperativo".

Por otra parte, pero en el mismo orden de cosas, la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero (BOE nº 25 de 29 de enero) dedica el ANEXO II a las «Orientaciones para facilitar el desarrollo de estrategias metodológicas que permitan trabajar por competencias en el aula», especifica claramente que "el desarrollo de la capacidad de esfuerzo, constancia y disciplina, así como habilidades de cooperación que permitan la realización de trabajos colectivos son requisitos necesarios para la creación de cualquier producción de calidad".

Dentro de este mismo ANEXO, en el apartado dedicado a las metodologías de aula específica que:

> "Los métodos deben partir de la perspectiva del docente como orientador, promotor y facilitador del desarrollo competencial en el alumnado; además, deben enfocarse a la realización de tareas o situaciones-problema, planteadas con un objetivo concreto, que el alumnado debe resolver haciendo un uso adecuado de los distintos tipos de conocimientos, destrezas, actitudes y valores; asimismo, deben tener en cuenta la atención a la diversidad y el respeto por los distintos ritmos y estilos de aprendizaje mediante prácticas de trabajo individual y cooperativo."

La LOMCE, va incluso más allá exigiendo la aplicación de metodologías activas basadas en el proceso de interacción entre iguales con interdependencia positiva de objetivos.

> "Las metodologías activas han de apoyarse en estructuras de aprendizaje cooperativo, de forma que, a través de la resolución conjunta de las tareas, los miembros del grupo conozcan las estrategias utilizadas por sus compañeros y puedan aplicarlas a situaciones similares."

Finalmente, esta Ley Orgánica hace un reclamo del constructivismo como paradigma interpretativo de lo que ocurre en el aula y del propio aprendizaje cooperativo cuando dice que "es necesaria una adecuada coordinación entre los docentes sobre las estrategias metodológicas y didácticas que se utilicen. Los equipos educativos deben plantearse una reflexión común y compartida sobre la eficacia de las diferentes propuestas metodológicas con criterios comunes y consensuados. Esta coordinación y la existencia de estrategias conexionadas permiten abordar con rigor el tratamiento integrado de las competencias y progresar hacia una construcción colaborativa del conocimiento".

3.1. Elementos estructurales y paramétricos en el aprendizaje cooperativo

Desde que en la década de los ochenta el meta-análisis efectuado por la Escuela de Minnesota demostrara claramente la superioridad del aprendizaje cooperativo sobre el competitivo y el individualista (Johnson, Maruyama, Johnson, Nelson y Skon, 1981), la utilización de esta metodología como soporte de la instrucción ha ido creciendo, de manera exponencial, en las tres últimas décadas (Garfield, 2013; Nunnery, Chappell y Arnold, 2013; Slavin, 2011). Estos resultados se han venido manteniendo tanto en entornos reales como virtuales (Rubia y Guitert, 2014), para todas las áreas del currículum (Millis, 2010) y para todos los niveles educativos (Gillies, 2003).

En efecto, aunque los efectos positivos del aprendizaje cooperativo son muy evidentes (Springer, Stanne y Donovan, 1999) como lo demuestran los resultados obtenidos en diferentes áreas curriculares tales como matemáticas (Kalaian y Kasim, 2014), química (Jiang, 2014), ingeniería (Hsiung, 2012), ciencias de la salud (Michaelsen, Parmelee, McMahon y Levine, 2008), ciencias sociales y humanas (Sweet y Michaelsen, 2012), etc., no varían de manera sustancial de un área curricular a otra, fundamentalmente cuando la variable dependiente es el rendimiento académico.

Sin embargo, aunque los efectos positivos de la cooperación sobre esta variable están ampliamente probados (Roseth, Johnson y Johnson, 2008), la efectividad de una metodología cooperativa va a depender de la adecuada armonización entre tres estructuras (tarea, meta y recompensa) y dos parámetros (igualdad y mutualidad). Entendemos por estructura de tarea la manera en que se encuentran organizadas las actividades de aprendizaje y evaluación y el modo en que los alumnos deben realizarlas para lograr los objetivos previstos y alcanzar las competencias fijadas, la estructura de recompensa hace referencia a cómo se organizan las consecuencias que emanan del nivel de ejecución de las tareas y, finalmente, la estructura de meta determina cuál es la finalidad del proceso de enseñanza y aprendizaje (Johnson y Johnson, 1974; Vedder y Veendrick, 2003). En cuanto a los parámetros, entendemos por mutualidad el grado de conexión y la profundidad y direccionalidad de las transacciones comunicativas que se producen entre los alumnos y por igualdad el grado de simetría entre los roles desempeñados por los participantes en una actividad de aprendizaje grupal.

Aunque estos cinco elementos son altamente interdependientes (Pons, Prieto, Lomeli, Bermejo y Bulut, 2014) son numerosos los trabajos que los abordan de manera aislada para determinar sus efectos sobre determinadas variables de naturaleza, tanto intrapersonal (motivación, rendimiento, etc.), interpersonal (transacciones comunicativas, empatía, etc.) o extrapersonal (tarea, contenido, etc.), pero son muy pocos los que ofrecen estudios inter-estructurales para comparar los efectos diferenciados de las distintas estructuras en el rendimiento académico, ya sea en interacción con el contenido, ya sea en interacción con el nivel educativo o con cualquier otra variable que promueva un uso efectivo del aprendizaje cooperativo (Gillies, 2003). Pero si los estudios inter-estructurales son escasos, el número de investigaciones inter-paramétricas es aún menor (Psaltis y Zapiti, 2014) y casi todas ellas se centran en el parámetro de mutualidad (Gagné y Parks, 2013; Kotsopoulos, 2014; Pons et al., 2012), siendo prácticamente nula la investigación comparativa entre las tres relaciones de cooperación que responden al parámetro de igualdad, a pesar de que Slavin (1996) viene apuntando desde hace dos décadas que los efectos del aprendizaje cooperativo pueden ser diferentes en entornos interactivos homogéneos y heterogéneos.

En efecto, con relación al parámetro de igualdad, la mayor parte de los autores, siguiendo la tradición instaurada por Damon y Phelps (1989), distinguen tres tipos de relaciones (O'Donneel y Hmelo-Silver, 2013): tutoría entre iguales (bajo nivel de igualdad), colaboración (alto nivel de igualdad) y cooperación (nivel de igualdad variable, pero sin alcanzar valores extremos).

De estas tres relaciones, un gran parte de los trabajos realizados sobre aprendizaje cooperativo en enseñanza universitaria toman como punto de partida la relación de tutoría (De Backer, Van Keer y Valcke, 2012; Lassegard, 2008; Okoroma, 2013).

La *tutoría entre iguales* es una relación centrada en la transmisión de información y establecida entre alumnos que, ante un tema específico, presentan diferentes niveles de habilidad. Se basa en una pseudorrelación profesor/alumno que aprovecha la proximidad sociocognitiva existente entre los elementos de la relación y tiene una estructura interactiva asimétrica con una clara diferenciación de roles. Para que esta relación pueda producirse es necesario que la tarea asegure un adecuado nivel de participación y deben darse las siguientes condiciones:

- Establecimiento de un puente de conexión entre alumnos (en base a preguntas y respuestas).

- Configuración de una estructura para la resolución de los problemas inherentes a la tarea.

- Transferencia de responsabilidad.

- Participación conjunta en la resolución.

- Interacción tácita o explícita.

La *cooperación* es una relación centrada en la adquisición o aplicación de un conocimiento establecida entre alumnos que, ante un tema específico, presentan diferentes niveles de habilidad dentro de unos márgenes de relativa proximidad. En esta relación los roles han de ser jerárquicamente equivalentes y su posible diferenciación debe hacerse en base a la estructura de la tarea. La estructura interactiva es simétrica, aunque como la comunicación se desarrolla en dirección a diversas fuentes de información, no está exenta de cierta asimetría. El control del proceso recae sobre el grupo y la tarea, configurada en base a la consecución de un producto único, presenta una estructura susceptible de división (Hossaina & Tarmizi, 2013).

La *colaboración* es una relación centrada en la adquisición o aplicación de un conocimiento y se establece entre alumnos que, ante un tema específico, presentan un nivel de habilidad semejante. En la relación de colaboración no hay diferenciación de roles y si la hubiera estos han de ser jerárquicamente equivalentes. La estructura interactiva es simétrica y el control recae sobre el grupo. La tarea, configurada en base a la consecución de un producto único, debe presentar una estructura unitaria (no hay división de la tarea) pero es susceptible de intervenciones complementarias (Horn, 2012).

Aunque tenemos la certeza de que el aprendizaje cooperativo funciona con una alta efectividad en todos los niveles educativos, la toma de decisiones sobre cuál de estas relaciones sería más rentable en niveles educativos superiores tiene escaso soporte empírico (Eskay, Onu, Obiyo y Obidoa, 2012) y un soporte teórico bastante confuso que parece no dejarnos vislumbrar más allá de las bondades que tiene para los alumnos aprender a través de un proceso de interacción entre iguales.

3.2. El aprendizaje entre iguales

En efecto, la idea de aprender con iguales y entre iguales es algo que lleva martilleando a la humanidad durante varios siglos. Ya en el siglo V a.C. el ateniense Sócrates enseñaba a sus alumnos en pequeños grupos involucrándolos en diálogos con su «Arte del discurso», en el siglo I Quintiliano afirmaba que los estudiantes podían beneficiarse con la enseñanza del uno al otro y Séneca postulaba que cuando enseñas aprendes dos veces. En la Edad Media los gremios hacían que sus aprendices menos expertos trabajaran junto a aquellos que poseían un mayor nivel de pericia para que aprendieran mejor. Más recientemente, a finales del siglo XVIII, surge el concepto de enseñanza mutua y, bajo este paraguas, se puede observar que las actividades de enseñanza y aprendizaje que proponían Andrew Bell, Joseph Lancaster o Johann Heinrich Pestalozzi, tenían un marcado carácter cooperativo y Pestalozzi, ideó la «enseñanza mutua». En 1837 Horace Mann establece el *Common School Movement* en el que se enfatizaba abiertamente la cooperación y, a finales del siglo XIX, Francis W. Parker puso en marcha su modelo de educación progresiva, en el que la cooperación entre iguales jugaba un papel muy importante. Ya en el primer tercio del siglo XX Dewey (1900, 1916) promueve el aprendizaje cooperativo como un ingrediente para desarrollar su método de proyectos, Allport (1924) señala que existe un aumento en la cantidad y calidad del trabajo de los individuos cuando son capaces de realizarlo en interacción con otros, Watson (1928) encuentra que los grupos piensan de manera más eficiente que el mejor miembro del grupo cuando trabaja por sí solo, Shaw (1932) observa que las personas son más productivas cuando trabajan en grupos que cuando trabajaban solos, Mead (1937) observa que los individuos que trabajan cooperativamente obtienen mejores resultados, May y Doob (1937) establecen una clara relación entre el trabajo grupal y la interdependencia o comunalidad de objetivos entre los sujetos que componen el grupo al encontrar que las personas que colaboran y trabajan juntas para alcanzar objetivos comunes, tienen más éxito en la consecución de resultados, que las que se esfuerzan, de manera independiente, para alcanzar los mismos objetivos, además encontraron que los triunfadores independientes tenían una mayor probabilidad de mostrar comportamientos competitivos y Kurt Lewin (Lewin, 1948; Lewin, Lippitt, & White, 1939) detecta el enorme poder del grupo para influir en el comportamiento de sus miembros.

Todos los especialistas en aprendizaje cooperativo admiten que el proceso de enseñanza y aprendizaje basado en un proceso de interacción entre iguales tiene un glorioso pasado (Gillies y Ashman, 2003; Serrano, Pons y Ruiz, 2007; Sharan, 2010). Sin embargo, "aunque el aprendizaje en grupos pequeños se ha utilizado desde el comienzo de la existencia humana" (Johnson & Johnson, 2009, p. 365), habrá que esperar al advenimiento de la segunda mitad del siglo XX, para que aparezcan un conjunto de líneas de pensamiento (Slavin, 2014) que van a ser definitorias para llegar a la concepción actual del aprendizaje cooperativo. Estas líneas de pensamiento podrían ser reducidas, básicamente, a dos: la teoría de la interdependencia social y las teorías constructivistas del desarrollo y del aprendizaje que emanan de la Escuela de Ginebra y de la psicología socio-cultural soviética.

3.3. Bases teóricas del aprendizaje entre iguales

La Teoría de la interdependencia social fue formulada por Morton Deutsch (1949a), a mediados de la centuria pasada y se encuentra validada por numerosos trabajos de investigación (Johnson & Johnson, 2009). En esta teoría se señala que la interdependencia puede ser positiva o negativa. Es positiva cuando los miembros del grupo trabajan cooperativamente para alcanzar objetivos compartidos y negativa cuando compiten para controlar quién alcanza los objetivos.

La contribución de los trabajos de Deutsch, tanto en el nivel teórico como en el empírico (Deutsch, 1949b), a la investigación sobre el aprendizaje cooperativo lo podemos encontrar en dos elementos fundamentales. El primero de ellos, es la caracterización que realiza de los procesos psicológicos y sociales que emergen en la interacción y que pueden facilitar o inhibir el éxito del trabajo del grupo. El segundo y, vinculado al anterior, hace referencia a las condiciones que dan lugar a un proceso constructivo o destructivo en la resolución de los conflictos que emergen en las relaciones. Por lo que respecta al primero de los elementos, Deutsch afirma que en las situaciones de cooperación los procesos psicológicos se asocian con sustituibilidad (el grado en que las acciones de una persona son sustituidas por las acciones de otra persona), capacidad de inducción (la apertura a dejarse influenciar y a influir en los demás) e investidura positiva (la inversión de energía psicológica en objetos fuera de uno mismo), por el contrario, cuando no hay interdependencia social aparece la no-sustituibilidad, inductibilidad (únicamente para las propias acciones) y la resistencia a compartir objetivos (Deutsch, 2014). De este modo, la premisa básica que se desprende de la teoría de la interdependencia social es que la forma en la que se estructuran los objetivos, determina la forma en la que interactúan los sujetos y los patrones de interacción que se crean.

Con respecto al segundo elemento, en la teoría de la resolución del conflicto, considerada como una de las grandes aportaciones del siglo XX, Deutsch sostiene que cuando las partes implicadas consideran que el conflicto es un problema mutuo que debe ser resuelto cooperativamente, conduce a un proceso constructivo que culmina con resultados satisfactorios para todos los implicados. Por el contrario, cuando la orientación al conflicto es competitiva conduce a un proceso destructivo en la resolución del conflicto, con las dos partes perdiendo o con la parte más fuerte derrotando a la menos fuerte. Desde esta perspectiva, la respuesta a cómo fomentar las relaciones cooperativas la podemos encontrar en la *Deutsch's Crude law of social relations* (Deutsch, 1973), según la cual "los procesos y efectos característicos que provoca un tipo de relación social (cooperativa o competitiva) también tiende a provocar el tipo de relación social" (Deutsch, 2003, p. 17), por lo que cuando se introducen los efectos típicos de un proceso de cooperación en una situación de conflicto, es probable que se caracterice por un proceso constructivo de resolución del mismo, mientras que los efectos típicos de un proceso competitivo tienden a producir un proceso destructivo en su resolución (Deutsch, 2014).

Es evidente que, de la teoría de la interdependencia social, se desprende un corolario fundamental para los procesos de enseñanza y aprendizaje: la resolución cooperativa de los conflictos que surgen en el proceso de interacción tiene efectos positivos para el logro de las metas de aprendizaje. Sin embargo, esta teoría no deja claro cuál debería ser el estatus de los participantes para que el proceso de interacción maximice el aprendizaje. Este problema del estatus entre las partes implicadas en el conflicto parece atisbarse a la luz de las teorías constructivistas en las que el conflicto y la controversia son los ingredientes básicos para el proceso de construcción de los conocimientos (Johnson, Johnson y Tjosvold, 2014).

Las teorías constructivistas del desarrollo y el aprendizaje pueden ser consideradas todas ellas bajo una doble vertiente: el constructivismo cognitivo de Piaget y el constructivismo socio-cultural de Vygotsky (O'Donnell y King, 1999).

Desde el constructivismo cognitivo, para explicar cómo conocemos y cómo pasamos de un estado de menor conocimiento a otro de mayor conocimiento Piaget (1976) recurre a tres grandes factores: a las características de un programa inicial inscrito en el genoma (herencia), a las condiciones particulares de existencia (intercambios con el medio) y a un centro funcional que actuando como el compilador y la unidad central de procesos de un ordenador, haga posible la lectura y realización del programa (funcionamiento). Sin embargo, para que se produzca un desarrollo coherente, estos tres factores necesitan actuar de manera coordinada. Esto le obliga a recurrir a un cuarto factor que mantenga la armonía del sistema: la autorregulación. Esta es la razón por la que la noción de equilibrio es, para Piaget, la mejor expresión de la ley funcional que afirma la propia actividad estructural y se constituye en el verdadero motor del desarrollo.

La equilibración consiste en una serie de reacciones activas del sujeto a las perturbaciones exteriores, que pueden ser reales o anticipadas. Estas reacciones no están dirigidas únicamente a eliminar la perturbación o a recuperar el equilibrio, es decir que, ante la presencia de desequilibrios, el sistema cognitivo no persigue únicamente un reequilibrio sino un equilibrio mejor que el anterior, en concreto, el menor de los mejores equilibrios posibles (*équilibration majorante*).

Para Piaget (1975), el desarrollo de los conocimientos no procede únicamente de la experiencia con los objetos, ya sean estos físicos o sociales, o de una programación innata y preformada en el sujeto, sino de construcciones sucesivas con elaboraciones constantes de estructuras nuevas. Por lo tanto, los sistemas cognitivos son, a la vez, sistemas abiertos hacia el medio (intercambios con el medio) y cerrados, en tanto que ciclos y, para su desarrollo, se hace necesaria la concurrencia de dos procesos fundamentales que resultan esenciales para lograr el equilibrio cognitivo: la asimilación o «incorporación de un elemento exterior (objeto, suceso, etc.) a un esquema del sujeto» y la acomodación, es decir, «la necesidad con la que se encuentra la asimilación de tener en cuenta las particularidades propias de los elementos a asimilar». En efecto, desde la perspectiva piagetiana todo esquema de asimilación tiende a alimentarse incorporando elementos exteriores que sean compatibles con su naturaleza y, a su vez, todo esquema de asimilación está obligado a acomodarse a los elementos exteriores que asimila y modificarse en función de esas particularidades, pero sin perder, por otra parte, su continuidad, ni sus propios poderes anteriores de asimilación.

Una de las fuentes de los progresos en el desarrollo de los conocimientos se encuentra en los desequilibrios que obligan al individuo a superar su estado actual para buscar nuevas direcciones en su desarrollo. Los desequilibrios constituyen un factor esencial y motivacional para el desarrollo psicológico. Son estos desequilibrios internos y externos los que constituyen el motor de la búsqueda, porque si no el conocimiento quedaría estático. Las perturbaciones juegan un papel liberador y la fuente real de progreso se encuentra en la reequilibración que conduce a la mejora de la forma de equilibrio precedente. Sin los desequilibrios no hay equilibración mayorante.

Esta concepción que tiene Piaget del desarrollo cognitivo como el paso de estados de menor equilibrio a estados de mayor equilibrio, guarda una estrecha interdependencia con la conceptualización que tiene de la cooperación (De Lisi y Golbeck, 1999). En efecto, desde los inicios de su ingente obra Piaget ha considerado la enorme importancia que tiene los iguales como fuente inagotable de perturbaciones que conducen a desequilibrios (Piaget, 1923) de manera que la interacción social produce cambios en los sujetos debido al conflicto cognitivo que emerge y a las operaciones lógicas que llevan a cabo al intentar conciliar sus diferentes ideas y acciones para alcanzar el equilibrio cognitivo. En este sentido, la teoría piagetiana ha venido considerando la cooperación como una forma de lógica en la que los sujetos discuten ideas que provocan conflictos cognitivos y su resolución lógica da paso al equilibrio con un sistema de ideas que está libre de contradicciones y que es reversible (en el plano social, la reversibilidad está representada por la reciprocidad entre los diferentes puntos de vista de los participantes). La cooperación constituye, en este sentido, un sistema de co-operaciones que pone en correspondencia las operaciones de un compañero con las de los otros, uniendo, asociando y coordinando las distintas adquisiciones, etc.; y en caso de conflictos, reconociendo las contradicciones, diferenciando los diferentes puntos de vista e introduciendo entre ellos una reciprocidad (Piaget, 1965). Sin embargo, para que la interacción social conlleve procesos de equilibración que puedan culminar en restructuraciones cognitivas, Piaget (1965) considera que un elemento esencial es la igualdad de estatus de los participantes (coordinación de puntos de vista moderadamente divergentes) ya que la interacción con un adulto o un experto es una relación desigual debido a la condición de poder que se establece, lo que provoca, por un lado, que los niños abandonen sus propias ideas y acepten las del adulto o el experto, sin examinarlas y discutirlas y, por otro, y como consecuencia de esto, no existe la necesidad de justificar las propias ideas y acciones. Es decir, para Piaget, en una interacción desigual se rompe la condición de reciprocidad para alcanzar el equilibrio a través de la discusión y el debate.

El énfasis de Piaget en el proceso de interacción entre iguales ha conducido al análisis del conflicto cognitivo que se produce entre participantes de igual estatus. Los trabajos que derivan del constructivismo cognitivo sostienen que el aprendizaje cooperativo funciona porque los alumnos se benefician del conflicto cognitivo que surge al confrontar los propios puntos de vista con los de los otros (Druyan, 2001; Golbeck y Sinagra, 2000; Kruger, 1992; Light y Littleton, 1994; Slavin, 1992). En efecto, en la interacción entre iguales los distintos participantes se ven empujados a confrontar los distintos puntos de vista sobre la tarea o problema. Estos puntos de vista, cuando son moderadamente divergentes, pueden provocar conflictos entre los participantes, poniendo en duda su propio punto de vista. Esta toma de conciencia desemboca en controversias conceptuales que serán resueltas a través de la coordinación de los distintos puntos de vista y conducen a una nueva situación de equilibrio cognitivo que lleva aparejada una comprensión más profunda (Piaget, 1965).

La Escuela de Ginebra parte de este sistema alternante de estados y procesos (equilibrio-perturbación-desequilibrio-regulación-reequilibrio) para relacionar los procesos de trabajo grupal y su eficacia en el aprendizaje. En este sentido los sucesores de la teoría de Piaget (Darnon, Butera y Mugny, 2008, Tartas, Baucal y Perret-Clermont, 2010, Tartas y Perret-Clermont, 2012) sostienen que en la interacción entre iguales se produce aprendizaje por la necesidad de confrontar el punto de vista propio con el de los otros compañeros, lo que, a su vez, se traduce en la presencia de un conflicto que recibe el nombre de socio-cognitivo.

A tenor de lo expuesto, desde la perspectiva piagetiana y de la propia Escuela de Ginebra, para que se produzca un proceso de interacción que maximice los aprendizajes, el estatus de los participantes debe ser aquél que permita la confrontación de puntos de vista moderadamente divergentes. Es evidente, por tanto, que para Piaget es imprescindible que la distancia cognitiva entre los participantes se encuentre en consonancia con su concepto de equilibración mayorante, por lo que podríamos concluir que la opción que ofrece esta teoría se encontraría vinculada a lo que conocemos como aprendizaje cooperativo o aprendizaje colaborativo en donde los roles de alumnos que participan en un mismo grupo son jerárquicamente equivalentes.

Desde la perspectiva del otro enfoque del constructivismo cognitivo podemos observar que la idea central que subyace a todas las propuestas que emanan de la teoría sociocultural del desarrollo y el aprendizaje (Vigotsky, 1978) es que las actividades del ser humano se producen en un contexto cultural y están mediatizadas por instrumentos de carácter físico y psicológico, siendo el lenguaje la herramienta fundamental. De esta manera, para el constructivismo de corte sociocultural, el origen y la naturaleza de las funciones mentales superiores, tiene su concreción en la Ley de doble formación, según la cual "cualquier función en el desarrollo cultural del niño aparece dos veces o en dos planos. Primero aparece en el plano social y después en el plano psicológico. Primero aparece entre personas como una categoría interpsicológica y después en el niño como una categoría intrapsicológica [...]. Las relaciones sociales o las relaciones entre personas sustentan genéticamente todas las funciones superiores y sus relaciones". (Vigotsky, 1981, p. 163). De este modo para Vigotsky, el funcionamiento mental del sujeto solo puede entenderse analizando los procesos culturales y sociales de los que deriva, es decir, para entender el desarrollo del niño se debe tener en cuenta el origen social de los instrumentos de pensamiento que el niño utiliza y las interacciones sociales que lo guían en su aprendizaje. En este sentido, la participación del niño en actividades culturales con la guía de otros, va a posibilitar que internalice los instrumentos propios de su grupo social. Este proceso de interacción entre el niño y otra persona más competente tiene efectos sobre el desarrollo y el aprendizaje si la interacción tiene lugar dentro de lo que denominó zona de desarrollo próximo (Vigotsky, 1978, 1981). La zona de desarrollo próximo (ZDP) se define como “la diferencia entre el nivel de desarrollo real del niño determinado por la resolución independiente de un problema y el nivel de desarrollo potencial determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más competente” (Vigotsky, 1978, p. 86). Las implicaciones que se desprenden de la noción de ZDP (Hogan y Tudge, 1999, Mahn y John-Steiner, 2013) son que la instrucción debería situarse más cerca del nivel de desarrollo potencial que del nivel de desarrollo real y que las interacciones que tienen lugar en este espacio deben producirse con un compañero con un nivel de pericia mayor. Sin embargo, las características que debe tener la ayuda o asistencia que da el compañero con mayor nivel de pericia no fueron claramente especificadas por Vigotsky, como tampoco desarrolló en profundidad cómo se produce el proceso de interiorización que realizan los sujetos para apropiarse del conocimiento. A este respecto, han sido varios los intentos que han tratado de explicar cómo debe estructurarse la ayuda en la ZDP, como puede ser la noción de andamiaje (Wood, Bruner y Ross, 1976; Bruner, 1978, 1983), la enseñanza recíproca (Palincsar y Brown, 1984; Palincsar, Brown y Campione, 1993; Palincsar, Hapgood y Magnusson, 2007) o la participación guiada (Rogoff, 1994, 2006).

De todos ellos se desprende que el proceso de adquisición del conocimiento se desarrolla en base a la interacción de los alumnos con otro u otros más expertos que puedan «guiar» sus aprendizajes. En efecto, los aprendices parecen necesitar de otros con más experiencia, fundamentalmente al inicio de la actividad, y gradualmente van asumiendo mayores niveles de responsabilidad en su propio aprendizaje y en la propia participación en la actividad conjunta. Desde esta perspectiva, cuando un niño interactúa con otro en la ZDP ambos pueden tener distintas definiciones de la situación y el intercambio comunicativo que se produce entre ellos tiene como objeto llegar a una definición compartida de la situación (intersubjetividad). Esta comunicación es la antesala para la transición al funcionamiento intrapsicológico. De esta manera, la comunicación y la coordinación de las acciones durante la participación en esfuerzos compartidos suponen el establecimiento de ajustes progresivos entre los participantes que son los que permiten llegar a una comprensión más o menos común, pero sobre todo más ajustadas a los objetivos instruccionales.

En este sentido, parece que encontramos en la relación de tutoría entre iguales la mejor forma de interacción para maximizar el aprendizaje cuando optamos por ubicarnos en la perspectiva del constructivismo socio-cultural.

De cualquier manera, estos tres tipos de relaciones han sido utilizadas por igual en todas las experiencias de lo que conocemos con el nombre genérico de aprendizaje cooperativo y sus efectos, estudiados sobre numerosas variables dependientes no parecen diferir entre sí. Las únicas diferencias encontradas parecen venir de la mano de la naturaleza del contenido y de la vertebración de este contenido en la estructura cognitiva del alumno.

3.4. Aprendizaje cooperativo en matemáticas

En este sentido la interacción entre el parámetro de igualdad y la estructura del contenido parece remitirnos a valores cualitativa y cuantitativamente distintos del parámetro de mutualidad (Pons, González-Herrero y Serrano, 2008) y, como consecuencia, a efectos diferenciados en el rendimiento de los alumnos. Dentro de este orden de cosas parecen especialmente relevantes para nuestro trabajo los estudios diferenciados de aprendizaje cooperativo en matemáticas por la naturaleza del propio contenido matemático.

La naturaleza del conocimiento matemático

En efecto, frente a la pretendida "objetividad" del conocimiento matemático que emana de la concepción formalista, la perspectiva constructivista afirma que los objetos matemáticos no habitan en un mundo externo a quien conoce, sino que son construidos por el individuo en un proceso continuo de reestructuración de sus estructuras cognoscitivas.

Piaget (1975), postula que el sujeto se acerca al objeto de conocimiento mediante ciertas estructuras intelectuales que le permiten dotarlo de un determinado significado. El alumno extrae de los objetos; mediante procesos de abstracción empírica, pseudoempírica y reflexiva; una determinada información que es asimilada a dichas estructuras produciendo modificaciones en las mismas. De esta manera las observaciones están en un proceso continuo de modificación, por la naturaleza cambiante de las estructuras cognoscitivas del sujeto, construyéndose, de esta manera, el conocimiento progresivo del objeto.

En el conocimiento matemático se puede distinguir lo que depende de una interpretación general de la realidad -y en donde la realidad matemática no es sino un subconjunto de esa realidad general- y los conocimientos específicos y los medios disponibles para solucionar los problemas y realizar con éxito las tareas cotidianas matemáticas (formales y no formales). En el primer caso, la interpretación de la realidad depende de una epistemología general del sujeto que engendra una determinada visión del mundo, centrada en la comprensión de la realidad y de sí mismo (sujeto epistémico). En el segundo caso, los conocimientos que intervienen son esencialmente particulares y los modos de utilizarlos están fuertemente individualizados y sujetos a las presiones de la cultura (sujeto psicológico). Esta distinción heurística entre sujeto epistémico y sujeto psicológico, no hace más que reflejar formas complementarias del conocimiento del sujeto que tienden, bien hacia el conocimiento normativo, bien hacia el conocimiento pragmático y empírico. Por consiguiente, los profesores en general, y los profesores de matemáticas en particular, debemos de garantizar una comunalidad de enfoque a la hora de interpretar a ese sujeto cognoscente, en el seno de la cual el análisis categorial del sujeto epistémico y el análisis funcional del sujeto psicológico, tengan no sólo la misma legitimidad, sino que además sean legítimamente complementarios. Si esto es válido para todo tipo particular de conocimiento, es especialmente deseable, diríamos que indeclinable, cuando se trata del conocimiento matemático (Serrano, 2008).

Esta dualidad del conocimiento matemático fue ya asumida por Ryle (1949/2009) en la década de los «40», cuando estableció la diferencia entre conocimiento declarativo -que nos permite "saber que"- y conocimiento procedimental -que nos permite "saber cómo"- (véase Tabla 1). Las relaciones entre estos dos tipos de conocimientos han generado un conjunto de hipótesis que tienen en común la necesidad de introducir un nuevo tipo de conocimiento: el conocimiento estructural (Serrano, 2008).

Tabla 1

Características de los conocimientos declarativo y procedimental

Conocimiento declarativo	**Conocimiento procedimental**
No está sujeto a variaciones espacio-temporales (intemporal).	Está sujeto a variaciones espacio-temporales
Está dirigido a comprender las razones (saber por qué).	Está dirigido a alcanzar un objetivo (saber hacer).
Necesita de comprensión consciente, sobre todo a partir del nivel operacional.	La comprensión consciente puede ser útil, pero no necesaria
Se desarrolla mediante encajes sucesivos (el conocimiento superado se integra en el que le supera)	Se desarrolla mediante una cadena secuencial, sustituyendo cada enlace al anterior, al menos parcialmente.
Consiste en lograr el enriquecimiento cognitivo encontrando leyes de composición entre conocimientos y estructuras anteriores.	Consiste en lograr el enriquecimiento cognitivo a través de la variedad: Alcanzar el objetivo por caminos diferentes.

En efecto, algunos autores parten de una hipótesis de secuencialidad, en donde el conocimiento declarativo es necesario para construir el conocimiento procedimental, y describen el conocimiento estructural como el que "media en la conversión del conocimiento declarativo en procedimental y facilita la aplicación de éste" (Jonassen, Beissner y Yacci, 1993; p. 4). Otros autores parten de una hipótesis de indisociabilidad y, en el seno de esta segunda hipótesis, merecen especial atención los últimos trabajos de la ingente obra piagetiana (Piaget, 1974; 1976) y, en general, los trabajos emanados de la Escuela de Ginebra (Inhelder y Cellérier, 1992).

Evidentemente, en este enfoque la clave está en la actividad del sujeto, por lo que no hay objeto de enseñanza, sino de aprendizaje. Ahora, el conocimiento matemático es resultado de la reflexión del individuo sobre acciones interiorizadas (abstracción reflexiva). La matemática no es un cuerpo codificado de conocimientos, sino esencialmente una actividad.

Pero cabría aún añadir la perspectiva socio-cultural: el conocimiento es contextual y construido socialmente. Conocer es actuar, ir dando significados (socialmente definidos) al objeto para determinarlo conceptualmente y, además, es comprender de manera que nos permita compartir con otros el conocimiento y formar así una comunidad de negociación de significados.

La labor del docente consistiría en diseñar y presentar situaciones que, apelando a las estructuras anteriores (más primitivas) de que el estudiante dispone, le permitan asimilar y acomodar nuevos significados del objeto de aprendizaje y nuevas operaciones asociadas a él. Después, se compartirían estos significados con el resto de alumnos, el profesor y los textos. Se llega así a una construcción personal, pero también social, del conocimiento.

Atendiendo a lo expuesto anteriormente, la principal actividad del alumno consistiría en construir significados asociados a su propia experiencia (incluida la experiencia lingüística). La socialización de este proceso estaría basada en la negociación de tales significados en una comunidad que ha hecho suyo ese proceso constructivo.

En el proceso de construcción de significados se pueden establecer diferentes etapas: se parte de un razonamiento informal, apegado a la experiencia cotidiana, para llegar a un razonamiento más formal en el que la demostración podría explicar las relaciones del marco conceptual.

La matemática da cuenta de la estructura de un mundo ideal, surgido a partir de las acciones interiorizadas del sujeto. Es necesario el empleo de un lenguaje formal para hablar de este mundo ideal (en el formalismo, los objetos matemáticos se confunden con los nombres formales).

Mediante el lenguaje formal (simbólico) se opera un cambio en el plano de representación: las acciones, que en el plano material se realizan con objetos concretos y en el plano de las ideas se realizan con símbolos. La abstracción es resultado de un cambio en el nivel de representación.

Los objetos matemáticos se manipulan, se operan al nivel de lo simbólico; estas acciones en el nivel simbólico permiten ir generando una red de relaciones entre diversos objetos. Las sucesivas fases en el tránsito de lo concreto hacia lo abstracto (niveles de pensamiento matemático), van sustancialmente vinculadas a las posibilidades de generar relaciones y estructuras a partir de las operaciones realizadas sobre los objetos matemáticos.

En la medida en que operamos tales objetos, crece la red de significaciones que los vincula y con ello, el grado de objetividad con el que aparecen en nuestras estructuras cognoscitivas. Se trata de reconocer la naturaleza dual, simbólica y operatoria que hace concretos a los objetos matemáticos, y que permite la actividad básica del estudiante: utilizar los diversos niveles de representación para la construcción del significado.

Ahora bien, no sólo es necesario saber qué y saber cómo, también es necesario saber cuándo, es decir, bajo qué condiciones se puede aplicar el conocimiento.

El conocimiento necesario para determinar qué variables o condiciones de la situación resultan de interés fundamental para ajustar nuestra actuación a las demandas de la tarea recibe el nombre de conocimiento condicional.

El conocimiento condicional supone “la aplicación intencional y consciente del conocimiento declarativo y procedimental en relación a las condiciones en que se desarrolla la acción” (Onrubia, Rochera y Barberá, 2004, p. 494). Gracias a este tipo de conocimiento el alumno sabe que los procedimientos no se pueden aplicar de manera indiscriminada, sino que es necesario efectuar un análisis de las condiciones (personales, del profesor, de la tarea y del contexto) para determinar qué procedimiento es el más adecuado en cada situación. El conocimiento condicional proporciona, de esta manera, un sistema de valoración sobre la potencialidad y las limitaciones del conocimiento que poseemos a la hora de enfrentarnos a una tarea.

Cuando somos capaces de aunar el conocimiento declarativo, el conocimiento procedimental y el conocimiento condicional, la construcción del significado de los objetos matemáticos está garantizada.

Sin embargo, la opción constructivista va más allá de la simple construcción de los significados y determina que para que el conocimiento sea efectivo el sujeto debe atribuir sentido a lo aprendido, esto es, debe ser capaz de dar respuesta al «para qué» relativo al aprendizaje del objeto matemático. En este sentido, mientras que la construcción del significado presenta un alto grado de objetividad, la atribución de sentido tiene un amplio componente de subjetividad que se encuentra vinculado a dimensiones psicológicas que emanan directamente del sistema del «yo» y, por tanto, pertenecientes a la esfera no cognitiva del individuo.

Esta es la razón por la que DeSeCo cuando establece la definición de competencia (Salganik, Rychen, Moser y Konstant, 2000) postula que una competencia presenta tres componentes bien definidos: el componente cognitivo, el componente metacognitivo y el componente no cognitivo (Serrano y Pons, 2011).

La investigación en didáctica de las matemáticas

La adquisición de las competencias matemáticas (Nitsch et al., 2015) ha hecho correr ríos de tinta porque uno de los contenidos curriculares que mayor atención ha despertado en los investigadores ha sido el contenido matemático quizás debido a su doble vertiente formal y empírica.

En efecto, es cierto que los resultados de las matemáticas se distinguen por su alto grado de abstracción, pero también es cierto que para elaborar sus teoremas las matemáticas (o mejor, los matemáticos) utilizan modelos y analogías físicas y ejemplos muy concretos de la realidad que constituyen la fuente real de toda teoría matemática y posibilitan la elaboración y descubrimiento de los teoremas. También es igualmente cierto que los resultados de esta disciplina se distinguen por su rigor lógico que hacen de las verdades matemáticas el prototipo de lo verdaderamente incontestable (se dice “tan cierto como que dos y dos son cuatro” a modo de paradigma de lo irrefutable), sin embargo, el rigor de las matemáticas está siempre en proceso de desarrollo continuo y esto constituye su principio de vitalidad que se debe al hecho de que los conceptos y los resultados de esta disciplina tienen su origen en el mundo real y emanan del propio devenir del pensamiento del individuo para explicarlo. Esto determina su gran aplicabilidad, tanto en otras ciencias, como en los aspectos más prácticos de la vida cotidiana.

Remitámonos a tres ejemplos, escogidos al azar, para aclarar estos aspectos.

Comencemos con la Astronomía. El planeta Neptuno, uno de los más distantes del Sol (obviando las discusiones sobre Plutón), fue descubierto en 1846 analizando, mediante cálculos matemáticos, ciertas irregularidades de Urano, lo que llevó a Leverrier (también a Adams) al estudio de las mismas para llegar a concluir que eran producidas por la atracción gravitatoria de otro planeta. Basándose en las leyes de la Mecánica calculó el lugar exacto donde debía de estar el planeta y un observador lo pudo localizar con un telescopio.

Pasemos a continuación a la Física. Generalizando las leyes de los fenómenos electromagnéticos, establecidos experimentalmente, Maxwell dedujo, por métodos puramente matemáticos, la existencia de las ondas electromagnéticas y su sistema y velocidad de propagación, elaborando lo que se conoce con el nombre de Teoría electromagnética de la luz que, aplicada a numerosos campos, llevaron a la búsqueda de esas mismas ondas en otros campos, como el eléctrico (Hertz). Esto permitió, a su vez, a A. S. Popov descubrir el modo de excitarlas, trasmitirlas y recibirlas, propiciando el nacimiento de la radiotecnia, con lo que podemos asegurar que el elemento más importante en el descubrimiento de la radio fueron los resultados obtenidos a través de una deducción puramente matemática,

Finalmente, y circunscribiéndonos a aspectos más próximos a lo cotidiano, otro ejemplo más prosaico. Los estudios sobre las funciones continuas (Cauchy), condujeron al análisis de sus máximos y mínimos (si los hubiera) y, por ejemplo, ¿a qué fabricante de cajas de cartón no le gustaría saber cuál es el mayor número de cajas de un determinado volumen que puede construir con una cantidad igualmente determinada de ese material? Todo ello sin mencionar la gran cantidad de cálculos aritméticos (cesta de la compra) y geométricos (superficie útil de un apartamento) que se efectúan en ámbitos tan concretos como el de la cotidiana economía familiar.

No es de extrañar, pues, que las matemáticas ocupen un lugar privilegiado en el currículo y que, tanto sus contenidos, como la forma más adecuada de construirlos (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014), sea uno de los aspectos más inquietantes para los diseños curricular y metodológico en la política educativa de cualquier país, lo que ha venido suponiendo, fundamentalmente desde 1957 (Kline, 1973), un intento casi permanente de renovación de esos contenidos y de su formas de llevarlos al aula, pudiéndose afirmar que:

> “De entre todas las disciplinas incluidas en los planes de estudios… han sido las matemáticas las que han visto modificados sus programas de manera más radical y espectacular durante los últimos años” (Hernández, 1978, p.13).

Estas razones de índole didáctico han llevado a los investigadores a lo largo de la Historia de la Educación Matemática (Barbin y Tzanakis, 2014) a desarrollar sus investigaciones, tanto en el marco curricular (Novotná, Moraová y Tatto, 2014, Osta, 2014), como en el de los distintos contenidos de la disciplina tales como el álgebra (Kieran, 2014), el cálculo (Kidron, 2014), la probabilidad (Batanero, 2014), la estadística (Ben-Zvi, 2014), las funciones (Niss, 2014), etc. Igualmente se han abordado todos los tópicos posibles como género (Chipman, Brush y Wilson, 2014), actitudes (Papanastasiou, 2000), etc. El papel de la tecnología educativa para la enseñanza eficaz y eficiente de las matemáticas ha sido otro de los grandes tópicos de estudio (Goos et al. 2003). Igualmente han sido numerosos los estudios sobre formación del profesorado de matemáticas (Goldsmith, Doerr. y Lewis, 2014, Tatto et al. 2009).

Esta gran cantidad de trabajos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han permitido elaborar numerosas teorías sobre estos procesos (Lesh, Sriraman y English, 2014) que, en definitiva, lo que nos vienen a corroborar es que las matemáticas es una de las disciplinas más prolíficas en la investigación educativa (Kilpatrick, 2014).

Aprendizaje cooperativo en matemáticas

Uno de los temas más recurrentes en la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde finales del siglo pasado es el de cómo favorecer en los estudiantes las interacciones intra-aula más efectivas para alcanzar las metas propuestas en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Leikin y Zaslavsky, 1997).

En efecto, a pesar de la individualidad de la construcción del conocimiento lógico-matemático, todo su proceso de elaboración responde a una conciencia social específica por lo que es del todo punto comprensible que el modo de transmisión e internalización de los saberes matemáticos haya despertado un interés muy especial en aquellas personas interesadas en una pedagogía muy específica, la que se conoce con el nombre de *aprendizaje cooperativo*.

Creemos que esta es la razón por la que una de las materias en donde los procesos de instrucción han llevado a la utilización de metodologías cooperativas con más profusión son las matemáticas. En efecto, desde que comenzaron a utilizarse de manera sistemática, los métodos de aprendizaje cooperativo se han venido aplicando a la enseñanza de esta disciplina tanto bajo una forma global, como circunscritos a diversos aspectos o áreas específicas de contenido de la misma, con un carácter más o menos puntual mediante grupos de aprendizaje cooperativo formales y de base. Estas aplicaciones han sido especialmente prolíficas a partir de los años «80», abarcando diferentes contenidos, clases y niveles educativos, que han ido desde la Educación Primaria hasta la Superior, pasando por la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato.

En términos generales, la investigación sobre aprendizaje cooperativo en matemáticas ha sufrido una evolución bastante ordenada (Davidson, 2013, Davidson y Lambdin-Kroll, 1991, Dillenbourg et al., 1996). En los primeros momentos (primera generación de estudios) estas investigaciones se centraron en comparar los efectos que la enseñanza individualista, competitiva y cooperativa tenían sobre el rendimiento académico en matemáticas (Johnson, Skon y Johnson, 1980). Una vez determinada la superioridad del aprendizaje cooperativo sobre el competitivo e individualista, los esfuerzos se centraron en averiguar qué papel jugaba la interacción entre iguales en el proceso de construcción del conocimiento matemático (Forman, 1989, Healye, Hoyles y Sutherland, 1990). En la década de los «90» el interés se centró en averiguar los efectos del aprendizaje cooperativo en diferentes entornos instruccionales (Blaye y Light, 1993, Dillenbourg, 1999, Jackson, Fletcher y Messer, 1992, Mevarech, 1991). Esta línea de trabajo sigue abierta (Dennen y Hoadley, 2013, Looi, Wong y Song, 2013) y continúa dando importantes frutos para la enseñanza de las matemáticas mediante métodos de aprendizaje cooperativo que incluyen la interacción con o mediante la tecnología (Goos et al. 2003).

Durante el siglo XXI las investigaciones han derivado, esencialmente, hacia el análisis de la dinámica interna de los métodos de aprendizaje cooperativo fundamentalmente en el estudio de sus tres estructuras básicas -tarea (Esmonde, 2009), meta (Johnson y Johnson, 2009) y recompensa (Serrano y Pons, 2007)- y los dos parámetros que condicionan la efectividad del aprendizaje cooperativo: igualdad y mutualidad (Cheong, 2010, O'Donnell y Hmelo-Silver, 2013, Serrano y Pons, 2013).

Otra línea de investigación que ha venido desarrollándose desde los inicios de la investigación sobre aprendizaje cooperativo es la que se basa en la firme convicción de los investigadores de que los efectos positivos que el aprendizaje cooperativo tiene sobre el rendimiento académico dependen, de manera directa, de la adecuada formación de los profesores para su correcta implementación. Esta línea de trabajo que arranca desde los albores de la investigación sobre aprendizaje cooperativo en general (Sharan y Sharan, 1987) y en matemáticas en particular (Davidson, 1980) ha seguido una línea ininterrumpida a lo largo del tiempo (Veenman et al., 2002) y continua con total vigencia en el momento actual (Goldsmith, Doerr y Lewis, 2014, Serrano y Pons, 2013, Surian y Damini, 2014), fundamentalmente en la formación inicial de los futuros profesores de matemáticas en métodos de aprendizaje cooperativo (Erdem, 2009).

La gran profusión de trabajos sobre aprendizaje cooperativo en matemáticas nos permite en este momento no albergar ninguna duda de la eficacia de una metodología cooperativa aplicada al aula de matemáticas, como lo demuestran los resultados que arroja el último meta-análisis efectuado (Gulfer y Kamuran, 2015).

Métodos de Aprendizaje Cooperativo en Matemáticas

La metodología cooperativa utilizada en estos estudios es muy variada y va desde la utilización de técnicas específicas aplicadas a las aulas de matemáticas con grupos de aprendizaje cooperativo informal, hasta la implementación de métodos de aprendizaje cooperativo especialmente diseñados para esta disciplina y aplicados sobre grupos de aprendizaje cooperativo formales y/o de base, pasando por la utilización de métodos de aprendizaje cooperativo generalistas adaptados a las características específicas de los distintos contenidos matemáticos.

Las técnicas más utilizadas en aprendizaje cooperativo en matemáticas diseñadas con fines específicos (Serrano, González-Herrero y Pons, 2008) son las de laboratorio y recopilación de datos, la instrucción asistida por computador en grupos, la utilización de grupos cooperativos para recuperación en matemáticas o la de revisión en grupos pequeños de los errores de pruebas diagnósticas.

En cuanto a los métodos de aprendizaje cooperativo en matemáticas los más destacados son (Serrano y Calvo, 1994):

- Método de descubrimiento en pequeño grupo (Davidson, 1971) y Small group learning and teaching in mathematics (Davidson, 1980).
- Team Asssisted Individualization (Slavin, 1985).
- Método de Aprendizaje Cooperativo-Individualista para la enseñanza de las Matemáticas (Serrano, González-Herrero y Martínez-Artero, 1997).

Small Group Learning and Teaching in Mathematics

Este método fue creado por Neil Davidson en 1980 para su aplicación específica en el aula de matemáticas, asumiendo y ampliando, tanto los principios básicos del «Método de descubrimiento en pequeños grupos» que elaborara en 1971, como las modificaciones que realizó ocho años más tarde (Davidson, 1979).

El método se basa en dos supuestos o hipótesis de carácter general. Por un lado, que los problemas de matemáticas pueden ser correctamente resueltos por procedimientos diversos y, por otro, que los objetivos de la instrucción en esta asignatura deben incluir y respetar, de forma específica, el desarrollo del razonamiento lógico, el cual sólo se hará posible en una atmósfera de investigación y descubrimiento intelectual que pueda impulsar un pensamiento creativo.

La formación de grupos se realiza en función de las preferencias que tengan los alumnos y, por ello, la aplicación del método comienza con la entrega al profesor, por parte de los alumnos, de una lista de compañeros con los que les gustaría trabajar y otra con los nombres de aquellos con los que no les gustaría hacerlo. Desde el punto de vista de la habilidad para las matemáticas los grupos pueden ser tanto homogéneos como heterogéneos.

Al comienzo de la clase, el profesor introduce el material novedoso con breves exposiciones durante las cuales plantea problemas y cuestiones de investigación.

Una vez planteadas, de esta forma, las cuestiones a tratar, los alumnos pasan la mayor parte del tiempo trabajando dentro de sus equipos en la discusión sobre los conceptos matemáticos, la demostración de los teoremas, la elaboración de conjeturas sobre la resolución de un problema, etc., que el profesor ha planteado previamente.

En esta fase el profesor debe asumir el rol de un consultor que guía, apoya y resuelve las dudas que plantean los alumnos, al mismo tiempo que va dando una serie de normas básicas que se deben seguir para la correcta interacción intra y, en su caso, intergrupal. Estas normas son las siguientes:

- Trabajar en grupos de cuatro.

- Cooperar con los miembros del grupo.

- Alcanzar una solución de grupo para cada problema.

- Asegurarse de que todos los miembros del grupo comprenden la resolución del problema antes de seguir adelante.

- Escuchar a todos los compañeros e intentar aprovechar sus aportaciones.

- Compartir el liderazgo del grupo.

- Asegurarse de que todos participan.

- Establecer turnos para escribir la solución en el encerado o exponer el resultado del grupo.

La evaluación en este método permite la utilización de varias formas de calificar: exámenes, cuestionarios, proyectos de grupo, trabajos para casa y autoevaluación individual y grupal. Además de estos elementos, el profesor puede valorar la participación y la cooperación al calificar individualmente. Sin embargo, Davidson advierte que el profesor no debe evaluar nunca el rendimiento académico individual durante el trabajo en grupo porque ello podría destruir la cooperación y dar lugar a la aparición de conductas competitivas entre los miembros de un mismo equipo.

Team Assisted Individualization (TAI)

El TAI es un método diseñado por Robert Slavin para la enseñanza de las matemáticas. Tres son las razones fundamentales que guiaron la elaboración del método.

En primer lugar, se esperaba que el TAI se convirtiera en un modo de combinar el poder motivacional de los incentivos cooperativos, con un programa de instrucción individualizado que fuera capaz de proveer a cada estudiante de materia adaptada a su nivel de capacidad para las matemáticas, permitiéndole de esta forma avanzar a su propio ritmo.

En segundo lugar, se contaba con que sería un medio de producir los bien documentados efectos sociales de la cooperación. En este sentido, el objetivo fundamental se centraba en la integración de los alumnos con deficiencias.

Por último, se pretendían resolver muchos problemas que planteaba la instrucción programada como el dedicar poco tiempo a la enseñanza por parte del profesor o la falta de incentivos para que los estudiantes avanzaran rápidamente, incluso la confianza excesiva en la instrucción escrita en contraposición con la enseñanza oral.

Las características fundamentales de este método son las siguientes:

En sus inicios los alumnos son evaluados a través de un pretest que les sitúa en un lugar determinado de su programa individualizado y, a continuación, se forman equipos heterogéneos (de cuatro o cinco miembros) que son representativos de la población del aula (en ellos se pueden incluir alumnos con dificultades de aprendizaje). Cada cuatro semanas los grupos se remodelan y los alumnos son asignados a nuevos grupos.

El material que los alumnos deben trabajar consta de los siguientes elementos:

- Ficha de instrucciones donde se explica la tarea que se debe realizar y llegar a dominar, junto con un método de resolución de problemas paso a paso.

- Varias fichas consistentes en veinte problemas sobre determinada parte de la tarea en cuestión. La finalización de todas las fichas supone el dominio de la tarea.

- Cuestionario de dos series paralelas de diez ítems.

- Test final.

- Hojas de respuestas para las fichas, el cuestionario y el test final.

Los estudiantes trabajan en el seno de sus respectivos equipos siguiendo, uno a uno, los cinco pasos que a continuación se detallan:

- *Paso 1*. Se forman parejas o tríos dentro de cada equipo y se localiza y trabaja la unidad que les corresponde (instrucciones, problemas y cuestionario, así como sus correspondientes hojas de respuestas).

- *Paso 2*. Intercambio de hojas de respuestas con los compañeros.

- *Paso 3*. Cada estudiante lee su ficha de instrucciones y pregunta a sus compañeros si tienen alguna duda. A continuación, comienzan a realizar las fichas de problemas. En primer lugar, resuelven los cuatro primeros de cada ficha, tras lo cual su compañero evalúa los resultados con la hoja de respuestas y si son todos correctos se puede pasar a resolver los problemas de la siguiente ficha, en el caso de que hubiera(n) alguno(s) incorrecto(s) se deben realizar los cuatro problemas siguientes de esa misma ficha. Cualquier dificultad que se presente deberá ser consultada con sus compañeros antes de pasar a la consulta del profesor.

- *Paso 4*. Cuando los estudiantes han concluido los cuatro problemas de la última ficha, deben resolver un cuestionario «A» que contiene diez ítems semejantes a los de la última ficha. Todo el trabajo se realiza individualmente y al final un compañero es el encargado de establecer la puntuación. Si se obtiene ocho o más puntos, este estudiante certifica que el alumno en cuestión puede realizar el test final. En el supuesto de que no llegara a alcanzar esta puntuación, el profesor acude a resolver las dudas que puedan existir y, a continuación, se pasa un cuestionario «B», semejante en dificultad y contenido al cuestionario «A». Ningún estudiante realiza el test final si, previamente, no ha superado el (o los) cuestionario(s).

- *Paso 5*. Una vez certificado el cuestionario por un compañero, el alumno lo presenta a un monitor de un equipo diferente para poder realizar el test final. Este último lo puntúa el monitor de turno (ya que van cambiando diariamente).

Cada semana el profesor calcula la puntuación de grupo basada en la media de las unidades por la que ha avanzado cada miembro, basándose en los test finales que lo prueban. En función de estas puntuaciones, existen varios niveles a los que se puede acceder: SUPEREQUIPO, GRAN EQUIPO y BUEN EQUIPO, de los que los dos primeros suelen recibir certificados de reconocimiento.

Cada día, el profesor dedica un cierto tiempo, que oscila entre los cinco y los quince minutos, al trabajo con grupos de alumnos que se encuentran en el mismo nivel del programa, con el propósito de introducir nuevos conceptos.

Finalmente, cada cuatro semanas, el profesor interrumpe el programa individualizado y explica una lección a la clase en su totalidad.

Método de Aprendizaje Cooperativo-Individualizado en Matemáticas (MACIM)

El MACIM es un método creado por José Manuel Serrano (Serrano, 1991, 1993) para su específica aplicación en las aulas de matemáticas de Educación Secundaria y Bachillerato y se basa en seis supuestos de carácter general.

1. El conocimiento matemático puede ser adquirido correctamente por diversos procedimientos.

2. Los objetivos de la instrucción en Matemáticas deben incluir y respetar el desarrollo del pensamiento lógico-matemático ya que esta disciplina

reúne una serie de conocimientos que siguen un proceso de construcción funcionalmente igual al de este tipo de conocimiento.

3. La filogénesis de los conocimientos y conceptos matemáticos, actuando como complemento de la ontogénesis, es un elemento básico a tener en cuenta a la hora de la secuenciación de contenidos, pero siempre debe estar subordinada a ésta.

4. El desarrollo del razonamiento matemático necesita una atmósfera de investigación y descubrimiento intelectual que permita impulsar un pensamiento creativo.

5. El conocimiento lógico-matemático requiere una elaboración individual.

6. La interacción entre iguales facilita la construcción del conocimiento individual.

En las formulaciones finales del método (Serrano, González-Herrero y Martínez-Artero, 1997, Serrano, González-Herrero y Pons, 2008) la formación de grupos se realiza teniendo en cuenta, tanto la habilidad de los alumnos en matemáticas (a partir de una descripción del estado inicial del alumno con relación a los conocimientos previos. Es decir, con relación a los niveles cognitivos y de habilidad para abordar el programa asignado y los objetivos propuestos), como la actitud hacia las matemáticas. En este sentido los grupos presentan las siguientes características:

- No tener más de 5 ó 6 miembros.
- Ser heterogéneos en cuanto al nivel de habilidad de sus miembros, con una variabilidad moderada, es decir, se forman los grupos con niveles de habilidad medio/alto y medio/bajo.
- Ser heterogéneos en cuanto a la actitud de los componentes con respecto a las matemáticas.

Los equipos funcionan en relación de tutoría sin grupo de expertos y no se establece ningún tipo de división del trabajo. El profesor debe asumir el rol de consultor y/o tutor que guía, apoya y resuelve dudas, al mismo tiempo que da una serie de normas básicas que se deben seguir durante la interacción del grupo. Sus funciones son las siguientes:

- Prepara los temas y los expone a la totalidad de la clase.

- Elabora y/o selecciona, a partir del tema explicado, el material que los estudiantes deberán trabajar en grupos (material de discusión, ejercicios, hojas de soluciones, etc.).

- Durante el trabajo en grupo son los estudiantes los que ejercen las funciones del profesor. Este último sólo interviene si la dificultad no puede ser superada por ningún miembro del grupo y su ayuda es solicitada.

- Durante el trabajo en grupo se asegura que la relación entre iguales es la adecuada.

- Confirma la autoevaluación del grupo y proporciona a los alumnos feedback sobre los fallos que han tenido en su trabajo.

- Evalúa a los estudiantes mediante pruebas intelectuales de rendimiento.

Las normas generales de interacción entre los equipos son las siguientes:

- Escuchar las explicaciones del profesor.
- Trabajar en grupos de 5 ó 6 miembros.
- Cooperar con los miembros del grupo (dar ayuda vs. pedir ayuda).
- Alcanzar una solución de grupo para cada problema.
- Asegurarse de que todos los miembros del grupo comprenden la resolución de los problemas y cuestiones antes de seguir adelante.
- Escuchar a todos los compañeros e intentar aprovechar sus aportaciones.
- Asumir y/o compartir el liderazgo del grupo.
- Asegurarse de que todos participan.

Los alumnos disponen desde el comienzo de todo el material que tienen que trabajar a lo largo del trimestre y que consta de los siguientes elementos:

- Libros de texto.
- Fichas de cuestiones (que contienen diez elementos).
- Fichas de problemas (que contienen cuatro problemas).
- Hojas de cuestiones.

Cada tema es abordado en discusiones de grupo hasta que todos sus miembros consideran que ya lo conocen suficientemente y han resuelto los ejercicios que el texto incluye para el tema. En este momento pasan a solucionar, de forma individual, las cuestiones y problemas de las fichas de trabajo de que disponen en el material. Una vez realizadas, los miembros de cada equipo se corrigen entre sí las soluciones y si todos ellos tienen resueltas correctamente, al menos, ocho cuestiones y tres problemas, se puede pasar al tema siguiente, de lo contrario se vuelve a producir la discusión en el seno del grupo sobre los errores cometidos con la intervención del profesor, que actúa, junto con los alumnos que habían resuelto correctamente las fichas, en situación de tutoría, a fin de reorganizar los razonamientos erróneos. Una vez finalizado este proceso se pasa a resolver la segunda ficha del mismo tema, cuyos contenidos son similares a los de la primera, y así continúa la secuencia procedimental.

Cuando se han agotado todos los temas del trimestre, el profesor realiza un proceso de evaluación individual, tras el cual se reorganizan nuevamente los grupos para abordar los contenidos del segundo trimestre.

El proceso que se sigue en este segundo trimestre es idéntico al primero y, a su término, se reorganizan de nuevo los grupos para abordar los contenidos del tercer trimestre, incluyéndose, para cada reorganización grupal, una nueva variable-criterio que contempla la evaluación individual del trimestre anterior.

Esta reorganización sucesiva de los grupos pretende evitar la aparición de conductas competitivas intergrupales, al constituirse estos como unidades fuertemente cohesionadas de trabajo, a lo largo de todo un curso académico.

La interdependencia positiva dentro de los grupos se crea a través de un modelo de estructura de recompensa cooperativo-individualista en el que el factor que induce a la interdependencia entre los miembros del equipo el que la calificación de cada alumno depende, en parte, de la calificación de grupo obtenida a partir de las puntuaciones de todos los miembros. Esta circunstancia inducirá a los estudiantes a cooperar con sus compañeros de equipo, ya que, como el éxito de cada alumno contribuye a la recompensa (calificación) de todos los miembros del grupo, es razonable suponer que todos se esforzarán en ayudar a aquellos que tengan mayor dificultad.

Sin embargo, es necesario tener presente que se debe llevar la contabilidad individual, puesto que, si las aportaciones de cada individuo no se tienen en cuenta, no siendo necesario los esfuerzos de todos los compañeros de equipo en la consecución de altas calificaciones, algunos de ellos podrían percibir que, como otros van a realizar la mayor parte del trabajo, su propia participación activa y esfuerzos de aprendizaje son innecesarios. Por esta razón, en el sistema de calificación, las puntuaciones de todos los miembros del grupo se promedian y la calificación que obtiene finalmente cada alumno va a ser una combinación de esta media y de su propia calificación son unos pesos del 30% y 70%, respectivamente.

Finalmente, existe un numeroso conjunto de trabajos que aplican métodos generalistas de aprendizaje cooperativo, es decir metodologías no específicas para las matemáticas, pero adaptadas para el aprendizaje de esta disciplina. En este sentido, las metodologías más utilizadas son el Jigsaw (Naomi y Githua, 2013, Zakaria et al., 2013), el TGT (Hossain y Tarmizi, 2013, Ke y Grabowski, 2007) y el STAD (Njoroge y Githua, 2013).

Para desarrollar y analizar estos trabajos se han utilizado metodologías cualitativas (Sawyer, 2013), cuantitativas (Cress y Hesse, 2013) y mixtas (Puntambekar, 2013), siendo los modelos de análisis multinivel los más utilizados (Janssen, et al., 2013).

4. Revisión metodológica de los modelos de ecuaciones estructurales

4.1. Introducción a los modelos de ecuaciones estructurales

El concepto de modelos de ecuaciones estructurales (o modelos SEM, de Structural Equation Modelling) fue introducido por Wrigth en 1921. Trabajando sobre patrones de covariación entre varias características de cobayas, desarrolló una forma de romper las correlaciones observadas en un sistema de ecuaciones que matemáticamente describían su hipótesis respecto a las relaciones causales. Las relaciones entre variables fueron representadas en un “path diagram”, por lo que su método llegó conocerse como “path analysis” (Wrigth 1921, 1934).

Años más tarde, este método fue redescubierto y desarrollado por economistas y sociólogos, de entre los cuales, los trabajos más sobresalientes son los de Jöreskog (1974 y 1979 y 1982) y Sörbom (1982). En ellos, transformaron el “path analysis” de Wright en un nuevo método denominado “Structural Equation Modelling”. Otros nombres alternativos de esta técnica son los análisis de estructuras de covarianzas (covariance structure analysis) y el modelado causal (causal modelling).

Los modelos de ecuaciones estructurales persiguen como objetivo la estimación y el ajuste de modelos que proponen relaciones causales entre datos directamente observables.

La gran ventaja de los modelos de ecuaciones estructurales es que permiten proponer el tipo y dirección de las relaciones que se espera encontrar entre las diversas variables contenidas en él, para pasar posteriormente a estimar los parámetros que vienen especificados por las relaciones propuestas a nivel teórico.

En general, podemos decir que los puntos fuertes de estos modelos son: haber desarrollado unas convenciones que permiten su representación gráfica, la posibilidad de analizar efectos causales entre las variables, permitir la concatenación de efectos entre variables y permitir relaciones recíprocas entre ellas.

La aplicación de este tipo de modelos requiere de un diseño a priori, para el cual el investigador se apoya en la teoría de aquello que busca explicar. Este diseño a priori se conoce como “modelo teórico”, consistente en un conjunto sistemático de relaciones (entre variables) que proporcionan una explicación consistente y comprensiva del fenómeno que se pretende estudiar. Dichas relaciones están definidas por una serie de ecuaciones que describen las estructuras de las relaciones establecidas. Este modelo teórico se puede representar bien a través del conjunto de ecuaciones que lo estructuran o bien a través de los “path diagrams”, que sirven, además, para resumir gráficamente, el conjunto de hipótesis sobre las que se asienta el modelo.

Los modelos de ecuaciones estructurales pueden implementarse en varios paquetes estadísticos. Entre ellos destacamos AMOS (Analysis of Moment Structures), como un módulo dentro del programa SPSS; LISREL (Linear Structural Relationships), programa más conocido para el análisis de modelos de ecuaciones estructurales desarrollado por Jöreskog y Sörbom; EQS, que incorpora numerosas aplicaciones relacionadas con los SEM; y R que cuenta con librerías específicas para los SEM.

4.2. Conceptos básicos de los modelos de ecuaciones estructurales

4.2.1. Nociones básicas. Relaciones causales

Para la explicación de ciertas investigaciones empíricas precisamos del estudio de las relaciones causales entre las variables.

Dos variables mantienen una relación de correlación cuando ciertos valores de una de las variables están asociados con ciertos valores de la otra variable. Se trata en este caso de una relación de simetría.

Sin embargo, dos variables se relacionan causalmente cuando todo cambio en una de las variables (causa) provoca variación en la otra variable (efecto).

En este caso, se trata de una relación asimétrica entre variables, pues el hecho de que una variable X sea causa de otra variable Y no implica necesariamente que Y sea a su vez causa de X.

Los modelos de ecuaciones estructurales los podemos clasificar en modelos recursivos y no recursivos. Se denominan modelos recursivos a aquellos en los que es posible establecer una ordenación de las variables de forma que cada variable afecte solamente a las que tiene a continuación. En caso contrario diremos que el modelo es no recursivo.

La existencia de relación causal entre dos variables implica la existencia de correlación, pero no necesariamente la correlación implica relación causal entre las variables.

El objetivo de las investigaciones experimentales será mostrar que a todo cambio en la variable causa le sigue un cambio en la variable efecto.

Para ello se formula un Contraste o Test de Hipótesis, que consiste en decidir si una conjetura sobre un parámetro desconocido θ se acepta como válida o se rechaza, y mediante modelos estadísticos se estiman los efectos entre las variables causa y las variables efecto.

Los modelos de ecuaciones estructurales tienen como objetivo la estimación y el ajuste de modelos estadísticos que proponen efectos y relaciones causales entre un conjunto de variables.

Su interés fundamental es el de confirmar mediante el análisis de la muestra las relaciones causales propuestas a partir del modelo teórico, permitiendo proponer el tipo y la dirección (causa o efecto) de las relaciones que se espera encontrar entre las diversas variables para posteriormente estimar los parámetros que vienen especificados por las relaciones propuestas en el modelo teórico.

Para ello se estudian las relaciones causales sobre datos no experimentales, partiendo siempre de unos supuestos básicos, necesarios para su correcta realización.

Estos supuestos son:

- Variables continuas.
- Normalidad univariable.
- Normalidad multivariable.
- Ausencia de colinealidad entre las variables, es decir, la correlación entre las variables independientes debe de ser la mínima posible.
- Aditividad de los efectos y linealidad de las relaciones entre las variables.
- Procedimiento de selección de muestra aleatorio.
- Tamaño de muestra suficientemente grande.

Aunque los modelos de ecuaciones estructurales pueden considerarse una generalización del modelo lineal clásico y del modelo lineal generalizado y particularmente de los modelos de regresión, existen diferencias sustanciales con éstas, así como con otras técnicas estadísticas multivariables.

Por una parte, los modelos de ecuaciones estructurales incorporan mediciones directamente observables. Por otra parte, se utilizan múltiples variables respuesta (o dependientes), pudiendo una misma variable comportase, dentro de un mismo modelo, como variable respuesta en una ecuación y aparecer como variable explicativa en otra ecuación.

También es posible especificar un efecto reciproco en el que dos variables produzcan efectos la una sobre la otra (feedback).

Podemos afirmar que la gran mayoría de modelos de ecuaciones estructurales constituyen en realidad, modelos de estructura de covarianza, ya que tratan del ajuste entre la matriz de covarianza muestral S y la matriz de covarianza poblacional Σ. Es decir, lo que se pretende ajustar son las covarianzas entre las variables, minimizando la diferencia entre las covarianzas muestrales y las covarianzas pronosticadas.

Por tanto la hipótesis nula H_0 de un contraste basado en un modelo de ecuaciones estructurales (es decir, la hipótesis que se acepta provisionalmente como verdadera y se somete a comprobación experimental, frente a otra hipótesis llamada hipótesis alternativa H_1 que se aceptará cuando la hipótesis nula sea rechazada) será que la matriz de covarianza muestral S reproduce exactamente a la de covarianza poblacional Σ.

4.2.2. Variables de un modelo de ecuaciones estructurales

En un modelo de ecuaciones estructurales podemos considerar dos tipos básicos de variables, según si atendemos a su medición o a su función dentro del modelo.

***Variables clasificadas por su medición*:**

- Variables observables: son aquellas que se miden directamente, pueden ser numéricas o categóricas, también se denominan indicadores.

- Variables latentes: son aquellas que no se pueden medir directamente, también se denominan constructos. Por tanto, habría que medirlas a través de otras variables observables y diremos en tal caso que dichas variables observables asumen el papel de indicadores de la variable latente. En consecuencia, las variables latentes están libres de error de medición. Pueden ser también numéricas o categóricas

***Variables clasificadas por su función*:**

- Variables exógenas: son aquellas variables que no son causadas por otras variables del modelo, es decir que no reciben efecto de ninguna variable.

- Variables endógenas: son aquellas variables causadas por otras variables (exógenas o endógenas) del modelo, es decir reciben efecto de otra variable.

Además de las variables consideradas, podemos distinguir un tercer tipo de variable:

- Variables error: pueden representar errores de medida de las variables observables (errores de medición) o errores producidos por no haber incluido alguna variable relevante dentro del modelo (errores de especificación). Se consideran como variables latentes ya que no se pueden medir directamente.

4.2.3. Representación de las relaciones causales. “Path diagrams”

Los modelos de ecuaciones estructurales se pueden representar de forma gráfica mediante diagramas estructurales similares a los diagramas de flujo convencionales. Estos diagramas se denominan diagramas causales o “path diagrams”.

Estas representaciones son de gran utilidad ya que en ellas quedan reflejadas las relaciones causales entre las variables objeto de estudio.

En la representación de un modelo mediante un diagrama causal debemos de tener en cuenta las convenciones existentes:

- Las variables observables se representan enmarcadas en cuadrados.
- Las variables latentes se representan enmarcadas en círculos.
- Los errores de medición y de predicción, aunque son variables latentes pueden no aparecer en un círculo.
- Las relaciones causales entre dos variables se representan por medio de una flecha recta con origen en la variable exógena (causa) y extremo en la variable endógena (efecto). Sobre la flecha se incluye un coeficiente (parámetro) que indica la varianza explicada por la variable exógena (estos coeficientes estandarizados se suelen llamar saturaciones).
- La correlación entre dos variables se representa por medio de una flecha de doble dirección, sobre la flecha se suele escribir el parámetro asociado de la covarianza.
- La varianza de una variable se puede representar mediante una flecha bidireccional sobre la misma variable.
- El hecho de que dos variables no estén conectadas por medio de una flecha indica que dichas variables no están directamente relacionadas, aunque se puede dar el caso de que lo estén indirectamente.

Además de estos convenios debemos tener en cuenta que todas las relaciones causales entre las variables tienen que estar representadas en el diagrama.

La representación gráfica del modelo en un diagrama causal facilita la comprensión del modelo en su conjunto, incluyendo tanto los efectos directos entre las variables como los indirectos.

Asimismo, ayuda a localizar el significado de cada parámetro estimado y su repercusión en el conjunto del modelo.

Sin embargo, en modelos con un número elevado de variables y relaciones entre ellas, estas ventajas pueden llegar a convertirse en inconvenientes.

Para evitarlo se recomienda, en estos casos, representar las variables mediante una etiqueta que las nombre, en vez de con su denotación mediante letras con subíndices. Ello facilita la comprensión del modelo en su conjunto y de las relaciones concretas entre las variables.

A continuación, y para facilitar la comprensión de la estructura de un modelo de ecuaciones estructurales, se presenta en la Figura 5 la representación mediante un diagrama causal de un modelo de ecuaciones estructurales.

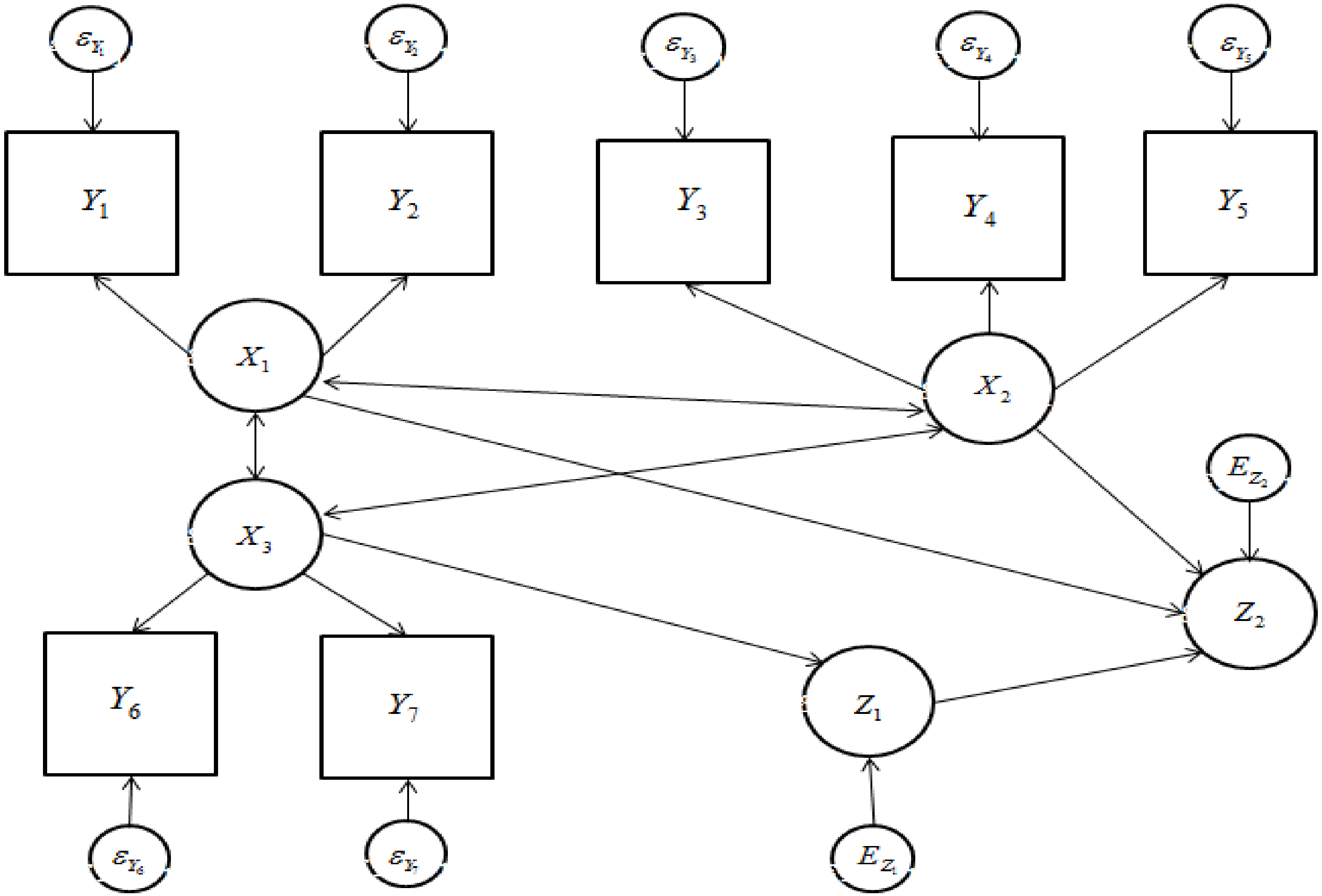


Figura 5. Representación de un modelo de ecuaciones estructurales

Este modelo está formado por:

- Tres variables latentes X_1, X_2, X_3, estableciéndose correlaciones entre X_1 y X_2, entre X_2 y X_3 y entre X_1 y X_3. Puesto que únicamente se relacionan entre sí mediante mecanismos de correlación, podemos decir que estas tres variables latentes funcionan como variables latentes exógenas. La variable latente X_1 se crea a partir de las variables observables, Y_1 y Y_2, la variable latente X_2 se crea a partir de Y_3, Y_4 y Y_5 mientras X_3 se crea a partir de Y_6 y Y_7. Los errores de medición de las variables observables $Y_1,\ldots,Y_7$ están representados por $\varepsilon_{Y_1},\ldots,\varepsilon_{Y_7}$.

- Dos variables latentes Z_1 y Z_2.Estas variables son las únicas variables latentes que reciben el efecto de otras variables latentes, es decir, son las variables latentes endógenas del modelo. Más concretamente, Z_1 recibe el efecto directo de X_3; efecto que también recibe Z_2 aunque de forma indirecta a través de Z_1 ; y por su parte, Z_2 recibe el efecto directo de X_1, X_2 y Z_1. De esta forma, entendemos que tanto Z_1 cómo Z_2 funcionan como variables dependientes y, por tanto, los errores E_{Z_1} y E_{Z_2} que llevan asociados son errores de predicción.

4.2.4. Estructura de un modelo de ecuaciones estructurales

Un modelo de ecuaciones estructurales puede considerarse como la unión de dos modelos más simples, el modelo de medición y el modelo estructural.

El modelo de medición incluye las variables observables con sus errores de medición, así como las variables latentes que miden indirectamente y las relaciones entre éstas.

El modelo estructural que incluye las variables latentes, las relaciones entre ellas y los errores de predicción.

En las Figuras 6 y 7 quedan identificados los elementos que conforman los modelos de medición y estructural, y, por tanto, las diferencias entre uno y otro. Asimismo, en la Figura 8 podemos observar un modelo global, consecuencia de la unión de dichos modelos de medición y estructural.

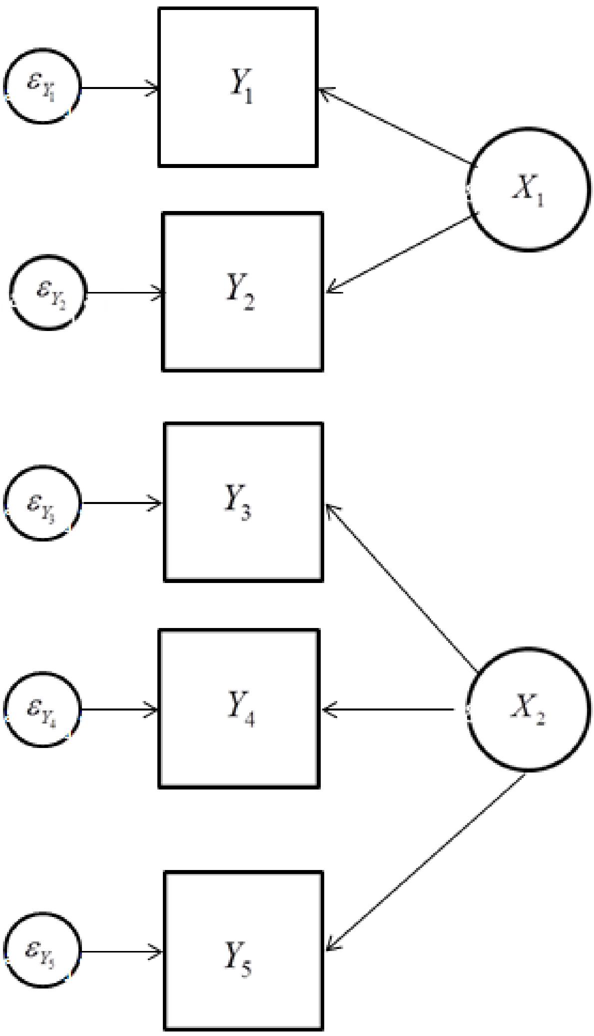


Figura 6. Representación gráfica de un modelo de medición

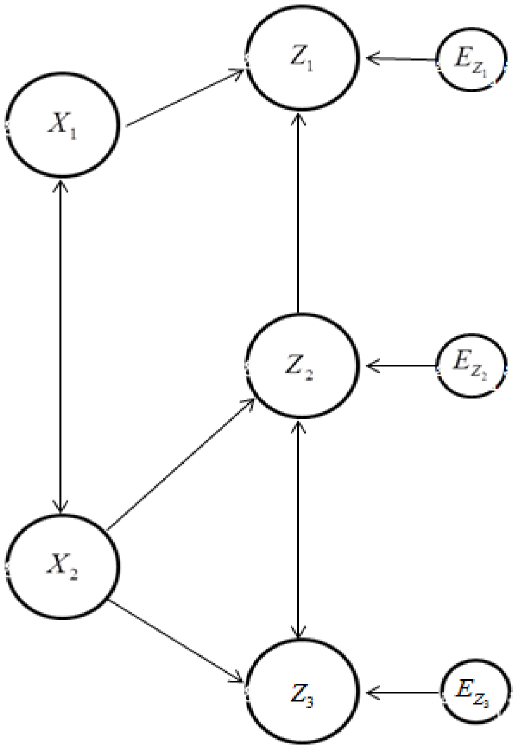


Figura 7. Representación gráfica de un modelo estructural

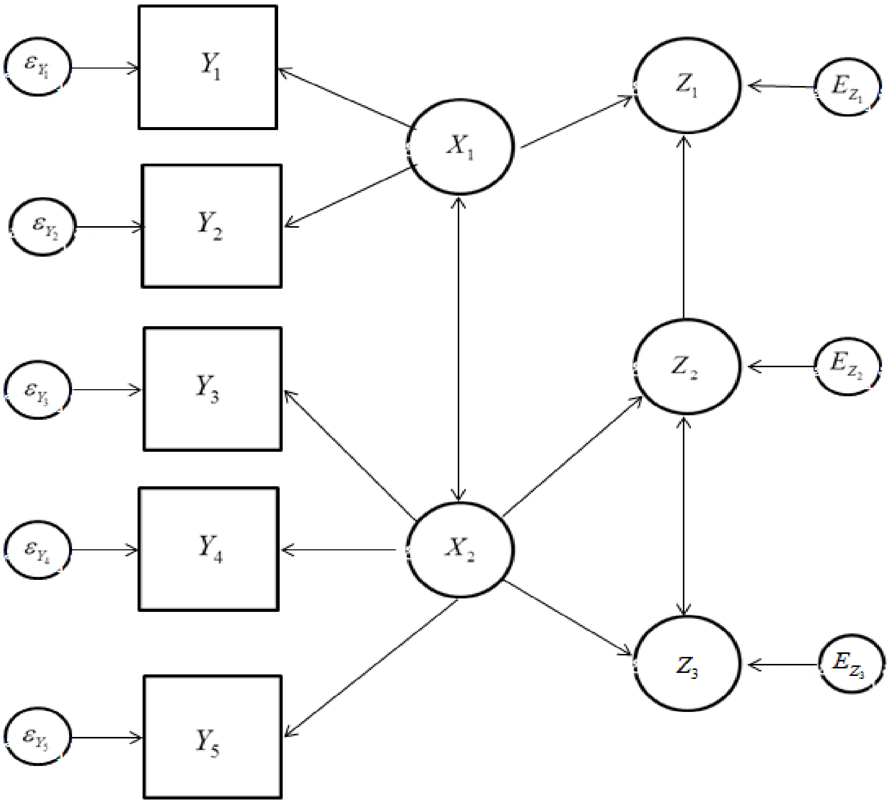


Figura 8. Representación gráfica de un modelo global

4.3. Construcción de los modelos de ecuaciones estructurales

El uso de ecuaciones estructurales supone el desarrollo de un modelo en cuatro fases.

4.3.1. Especificación del modelo causal

En la fase de especificación del modelo se definen las variables objeto de estudio y se describen las relaciones entre estas por medio de ecuaciones.

Como ya hemos dicho en el apartado anterior, el modelo de ecuaciones estructurales incluye dos componentes, el modelo de medición y el modelo estructural.

El modelo de medición queda definido mediante la siguiente ecuación matricial:

$$Y = AX + \xi$$

donde:

Y es un vector de orden $m \times 1$ de variables observables:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix}$$

X es un vector de orden $n \times 1$ de variables latentes:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

A es una matriz de orden $m \times n$ formada por los pesos factoriales, que son coeficientes que indican la influencia lineal de las variables latentes con sus indicadores. Es la magnitud del cambio esperado en la variable observada por una unidad de cambio en la variable latente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ξ es un vector de orden $m \times 1$ de los errores de las variables observables:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$$

Estos errores representan la parte del indicador que queda sin explicar por la variable latente. Asumimos que estos errores están siempre incorrelacionados entre sí.

La ecuación anterior la podemos expresar como:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$$

El modelo estructural queda definido mediante la siguiente ecuación matricial:

$$Z = BZ + CX + E$$

donde:

Z es un vector de orden $p \times 1$ de variables endógenas latentes.

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_p \end{pmatrix}$$

B es una matriz cuadrada de orden $p \times p$ formada los coeficientes que relacionan las variables endógenas latentes $Z_1, \ldots, Z_p$ entre sí.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pp} \end{pmatrix}$$

X es un vector de orden $n \times 1$ de variables exógenas latentes:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

C es una matriz de orden $p \times n$ formada por los coeficientes que relacionan las variables endógenas latentes $Z_1, \ldots, Z_p$ con las variables exógenas $X_1, \ldots, X_n$.

Por cada unidad de cambio en X_j se produce un cambio de b_{ij} unidades en la variable Z_i.

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pn} \end{pmatrix}$$

E es un vector de orden $p\times 1$ formado por los errores de predicción cometidos al explicar $Z_1,\ldots,Z_p$ mediante $X_1,\ldots,X_n$.Al igual que en el modelo de medición, supondremos que no existe correlación entre los errores y cualquier otro tipo de variable (incluidos los propios errores).

$$E=\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_p \end{pmatrix}$$

Podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_p \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_p \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones del modelo global se obtienen a partir de las ecuaciones de los modelos de medición y estructural, formando por tanto el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} Y &= AX + \xi \\ Z &= BZ + CX + E \end{aligned}\right\}$$

Sistema que en forma matricial vendría dado por la expresión:

$$\left.\begin{aligned}
\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_p \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\}$$

En general, las variables de un modelo de ecuaciones estructurales están estandarizadas, lo que supone que las varianzas de las variables son 1 y que los coeficientes de relación entre ellas vienen dados en unidades de desviación típica.

En dichas ecuaciones deben quedar reflejados, además de los errores de predicción y de especificación, los parámetros que se desean estimar.

Entre los parámetros objeto de análisis distinguiremos:

- Parámetros libres: son aquellos cuyos valores se desconocen y que estimaremos mediante los datos muestrales recogidos.

- Parámetros fijos: su valor es conocido, y es especificado a priori en el modelo propuesto.

- Parámetros restringidos: son desconocidos, pero son iguales que otros parámetros libres o fijos.

Asimismo, definiremos el número efectivo de parámetros en un modelo como “el número de parámetros libres menos el número de restricciones impuestas en dichos parámetros”.

4.3.2. Identificación del modelo causal

La identificación del modelo permite decidir si el modelo puede o no ser objeto de análisis.

Ello dependerá de si poseemos la suficiente información en nuestros datos muéstrales para proceder a la estimación de los parámetros del modelo especificado. Es decir, si podemos estimar los parámetros desconocidos a partir de la matriz de covarianza. Para ello tendremos que obtener el número de elementos de la matriz de covarianzas que viene dado por:

$$N = \frac{m\left(m+1\right)}{2}$$

donde:

m = nº de variables observables.

Por otra parte, para calcular el número de parámetros P a estimar, hay que incluir:

- Los efectos directos sobre variables endógenas de otras variables.
- Las varianzas y covarianzas de las variables exógenas.
- Las varianzas de los términos de error.

Los grados de libertad de un modelo son por tanto la diferencia N – P.

Una vez que conocemos los valores N y P, podemos clasificar el modelo en:

Modelo subidentificado, si N < P.

En este caso el modelo no puede estimarse. En la Figura 9 podemos ver la representación gráfica de un modelo justamente identificado.

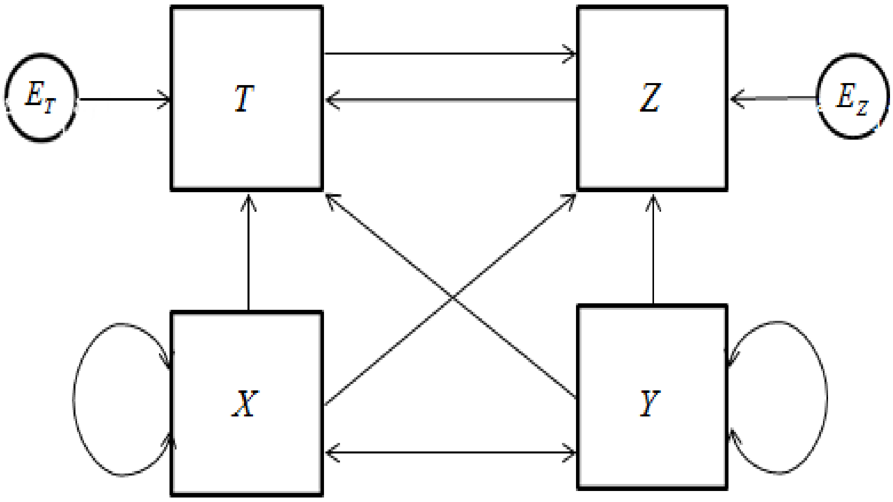


Figura 9. Ejemplo de un modelo subidentificado

El modelo tiene dos variables exógenas (X y Y) y dos endógenas (T y Z). Por tanto, el número total de elementos de la matriz de covarianzas es:

$N = \frac{m(m+1)}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ ya que hay $m = 2+2 = 4$ variables manifiestas.

El número de parámetros que se requieren para estimarlo es P=11 (6 efectos directos, 2 términos de error (E_T y E_Z) para las variables endógenas, 2 varianzas sobre las variables exógenas y 1 covarianza entre las variables exógenas).

El modelo será entonces subidentificado ya que: $N = 10 < P = 11$.

Modelo justamente identificado, si N = P.

En este caso habrá sólo “0” grados de libertad y el modelo se puede estimar, pero no interpretar.

En el Figura 10 podemos observar la representación gráfica de un modelo justamente identificado.

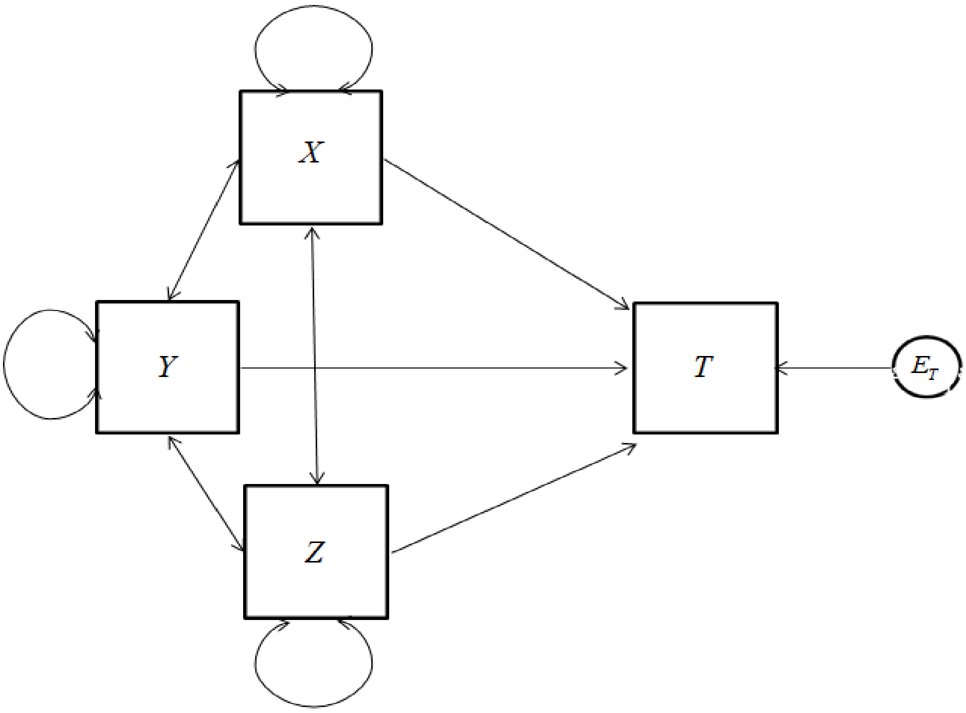


Figura 10. Ejemplo de un modelo justamente identificado

El modelo tiene tres variables exógenas (X , Y y Z) y una endógena (T). Por tanto, el número total de elementos de la matriz de covarianzas es:

$N=\frac{m(m+1)}{2}=\frac{4\cdot 5}{2}=10$ ya que hay $m=3+1=4$ variables manifiestas.

El número de parámetros que se requieren para estimarlo es P=10 (3 efectos directos, 1 términos de error (E_T) para la variable endógena, 3 varianzas sobre las variables exógenas y 3 covarianzas entre las variables exógenas).

El modelo será entonces justamente identificado ya que: $N=10<P=10$.

<u>Modelo sobreidentificado</u>, si N > P.

En este caso el modelo se puede estimar e interpretar. La obtención de la solución exacta será difícil de obtener ya que existen más ecuaciones que parámetros desconocidos.

En la Figura 11 podemos observar la representación gráfica de un modelo sobreidentificado.

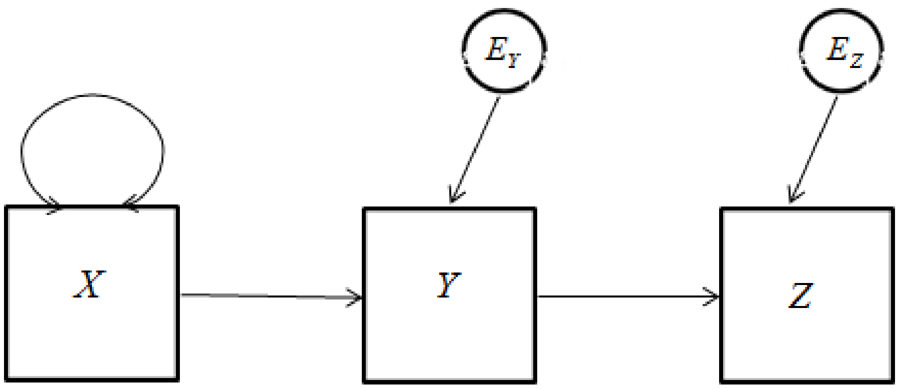


Figura 11. Ejemplo de un modelo sobreidentificado

El modelo tiene una variable exógena (X) y dos endógenas (Y y Z). Por tanto, el número total de elementos de la matriz de covarianzas es:

$N = \frac{m(m+1)}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ ya que hay $m = 1 + 2 = 3$ variables manifiestas.

El número de parámetros que se requieren para estimarlo es P=5 (2 efectos directos, 2 términos de error (E_T y E_Z) para las variables endógenas, y 1 varianza sobre la variable exógena).

El modelo será entonces sobreidentificado ya que: $N = 6 > P = 5$.

Existen estrategias para conseguir que todos los parámetros estén identificados, como, por ejemplo, utilizar al menos tres indicadores por variable latente e igualar la métrica de cada variable latente con uno de sus indicadores (esto se consigue fijando arbitrariamente al valor 1 el peso de uno de los indicadores).

De este modo, al fijar a la unidad una de las saturaciones (parámetros que relacionan los indicadores con sus constructos) de uno de los indicadores con el factor común, se consigue dotar a la variable latente de una escala (ya que están variables no son observables, y por tanto su varianza y unidad de medida no es conocida), lo que ayudara en la interpretación de dichas saturaciones.

Aun así, puede suceder que el modelo no esté completamente identificado, lo que querrá decir que se está intentando estimar más parámetros que el número de piezas de información contenidas en la matriz de covarianzas. En ese caso habrá que imponer más restricciones al modelo (fijando el valor de algún parámetro libre) y volver a formularlo.

4.3.3. Recogida y preparación de datos

El estudio de la identificación del modelo nos permite asegurar que los parámetros del modelo pueden ser estimados, de esta forma nos aseguramos que será productiva la inversión de recursos en la recogida de datos.

Tras esto, debemos decidir qué hacer con los casos sin respuesta ("missing values").

- Si eliminamos dichos datos en al menos una de las variables objeto de estudio, el tamaño muestral disminuirá y la calidad del estudio será menor. Además, si la muestra no es aleatoria, la eliminación de datos puede conllevar la estimación de parámetros no deseados. Por lo que solo eliminaremos casos sin respuesta cuando nos hayamos asegurado que el tamaño muestral es suficientemente grande y el muestreo es aleatorio.

- Eliminar los casos sin respuesta solamente de las variables de las que se desea estimar algún parámetro. En este caso la pérdida de tamaño muestral es menor pero no se favorece en igual medida al ajuste del modelo en su globalidad.

- Sustituir los casos sin respuesta por valores observados reales, esto implicaría que el tamaño muestral no se reduciría, pero podría conllevar la pérdida de la normalidad de los datos. Por ello sólo se aconseja utilizarlo cuando el tamaño muestral sea muy pequeño o cuando la proporción de casos sin respuesta sea muy elevada.

Una vez solucionado el problema de los casos sin respuesta, debemos comprobar que se cumplen los supuestos básicos ya citados de tamaño muestral, aleatoriedad en el procedimiento de selección de la muestra, normalidad univariable y multivariable, ausencia de colinealidad, aditividad de los efectos y linealidad de las relaciones entre las variables, para la realización adecuada del análisis.

Par validar la normalidad univariable de un conjunto de datos se debe estudiar y analizar la curtosis y asimetría que presentan las variables. En cuanto a la asimetría, valores por encima de |3.00| indicarían asimetría extrema, mientras que, para el caso de la curtosis, valores entre |8.00| y |20.00| corroborarían situaciones de curtosis extrema; valores por encima de |20.00| indicarían un serio problema de normalidad.

Aunque es cierto que la normalidad multivariante exige normalidad univariable esta última no garantiza la primera (las variables pueden presentar normalidad por separado, pero no de forma conjunta). Por lo que no hay que reducir el estudio de la normalidad a las variables por separado.

Para estudiar la existencia de distribución normal multivariable de los datos podemos utilizar el coeficiente de Mardia. Si su valor esta fuera del intervalo (-3,3) la hipótesis de normalidad multivariable debe ser rechazada, especialmente si la muestra es grande (aunque para valores cercanos a este rango la no normalidad no es preocupante). Para tamaños muestrales pequeños EQS utiliza una adaptación denominada test para curtosis multivariable de Bonner, Woodward, y Randall.

En el estudio de las relaciones de correlación que se puedan establecer entre las variables observadas debemos tener en cuenta que inicialmente el modelo se formula a partir de las matrices de covarianza de las variables, ahora bien, se puede utilizar la matriz de correlación, estandarizando las variables, es decir realizando el cociente por el producto de las desviaciones típicas (las covarianzas pasaran a ser correlaciones).

En un modelo de ecuaciones estructurales, el programa EQS estandariza todas las variables, incluyendo los errores y perturbaciones, quedando medidas en una nueva escala para tener así varianza 1.Consecuentemente, todos los coeficientes en las ecuaciones del modelo tienen una interpretación similar, y la magnitud de estos coeficientes estandarizados(saturaciones estandarizadas) podría ser más fácil de interpretar que la magnitud de los coeficientes obtenidos de la matriz de covarianza o de la métrica de los datos.

Más aún, los parámetros en esta métrica son invariantes a cambios arbitrarios de identificación.

Otro hecho que hace que la estandarización de datos favorezca la interpretación del modelo final, es que los coeficientes de correlación son siempre valores comprendidos entre -1 y 1. El valor -1 indica correlación negativa perfecta entre las variables, el valor 0 ausencia de correlación y el valor 1 correlación positiva perfecta.

Cuando no estandarizamos los datos, y utilizamos por tanto la matriz de covarianzas, la interpretación ha de hacerse en referencia a las unidades de medición de las variables estudiadas, lo que puede suponer un problema, ya que lo habitual es que las variables que queremos analizar tengan unidades de medida distintas.

Por tanto, es recomendable el uso preferente de variables estandarizadas, salvo en el caso de que el objetivo sea comparar muestras o poblaciones diferentes, en vez de comparar variables distintas en una misma muestra.

Sin embargo, el uso de las matrices de correlación también tiene inconvenientes como la modificación del modelo a analizar, que conlleva a que los parámetros previamente fijados tomaran nuevos valores, pudiendo aparecer errores típicos incorrectos. Otro inconveniente es que parámetros de ciertas relaciones del modelo que son conocidos podrían pasar a ser desconocidos. Una consecuencia de estos cambios es que la interpretación de la solución estandarizada, podría, a veces, ser problemática.

4.3.4. Fiabilidad de los datos

Ya hemos visto la utilidad del análisis descriptivo de las variables observables.

Pero además es necesario estudiar la fiabilidad de los datos, ya que el hecho de que un modelo sea válido no es condición suficiente para que un modelo sea también fiable.

La fiabilidad se encarga de medir la influencia de los distintos indicadores sobre un mismo constructo (el que miden).

Para el estudio de la fiabilidad de las variables de un modelo existen distintos procedimientos de uso común entre los que destacamos el que analiza el estadístico de consistencia interna Alfa de Cronbach, por ser uno de los métodos más empleados en la actualidad en la mayoría de los programas estadísticos (estando incluido en el paquete EQS).

Su cálculo se basa en el promedio de las correlaciones entre los indicadores, estando definido por la siguiente fórmula:

$$\alpha = \left(\frac{n}{n-1} \right) \left(\frac{\sum S_{ii}^2}{\sum S_{ij}^2} \right)$$

donde:

n es el número de indicadores

S_{ii}^2 son las varianzas de los indicadores (i = 1,…, n)

S_{ij}^2 son las correlaciones entre los indicadores

Es decir, este coeficiente mide la fiabilidad de la escala de las variables indicadoras sobre un constructo a partir de la matriz de covarianzas formada por dichas variables.

El estudio de este estadístico nos permite comparar la mejora o empeoramiento de la fiabilidad de la escala si se excluye una determinada variable observable del modelo propuesto.

El valor del coeficiente oscila entre 0 (inexistencia de fiabilidad) y 1 (fiabilidad máxima). El valor mínimo para considerar que el modelo de medida es fiable es de 0.8.

La ventaja de este estimador sobre otros es que cada indicador se puede evaluar de forma individual, aunque su aplicación requiera el análisis conjunto de las correlaciones de todos los indicadores del factor común.

4.3.5. Estimación del modelo.

En esta fase se trata de la estimación de parámetros libres en el modelo causal. Para ello minimizaremos la diferencia entre la matriz de covarianzas muestral S (que es conocida) y la matriz de covarianzas poblacional Σ.

La primera es conocida y la segunda es desconocida y será función del vector de parámetros a estimar θ, por tanto, escribiremos $\Sigma(\theta)$.

Así pues, se trata de estimar los parámetros desconocidos θ_i basándonos en las varianzas y covarianzas muestrales de la matriz S .

Para ello, como hemos dicho, debemos minimizar la matriz de residuos definida por $S-\Sigma(\theta)$.

Destacamos dos métodos fundamentales de estimación de parámetros, por ser los más simples y los que dan resultados más fiables. Ambos se utilizan cuando las variables son continuas, o en su defecto son discretas pero pueden ser tratadas como continuas (por ejemplo, si tenemos una variable observable discreta medida con una escala tipo Likert con un gran número de valores) y además los datos se distribuyen con normalidad multivariante.

Estimación por máxima verosimilitud (ML: Maximum likelihood)

Se define la función de ajuste (función de máxima verosimilitud) como:

$$L(\theta)=\log|S|-\log|\Sigma(\theta)|+tr\left[S\cdot\Sigma^{-1}(\theta)\right]-k$$

donde:

k = orden de S

Minimizar dicha función equivale a maximizar la expresión:

$$\log L(\theta)=-\frac{1}{2}(N-1)\log|\Sigma(\theta)|+tr\left[S\cdot\Sigma^{-1}(\theta)\right]-k$$

donde:

N = tamaño muestral

Es el método de ajuste más utilizado y su utilización supone el cumplimiento de los supuestos básicos ya mencionados. El programa EQS lo utiliza por defecto por tener cualidades estadísticas optimas, y porque, cuando el tamaño muestral es grande, los estimadores son lo más precisos posibles y los errores estándar los más pequeños posibles.

También tiene la propiedad de ser invariante a la escala de medición de las variables, es decir, los valores de la función de ajuste no dependen de la unidad de medición de las variables.

Una importante desventaja es que puede distorsionar las conclusiones sobre el modelo cuando no se cumple el supuesto de normalidad multivariante. Cuando el método es aplicado, a pesar de la no normalidad de los datos, los errores estándar obtenidos no son por lo general correctos. Desafortunadamente, en muchos campos, los datos tienen una distribución que además de no ser normal es difícil de especificar.

El programa EQS nos permite la opción de utilizar el método Robusto de Máxima Verosimilitud para los casos en que el supuesto de normalidad multivariable no se cumple de forma estricta (contraste robusto).

Tamaños de muestras de entre 200 y 500 sujetos son suficientes, aunque depende del modelo estudiado, pudiéndose aplicar a modelos con un tamaño muestral inferior a 100 (se puede aplicar incluso cuando el tamaño muestral es ligeramente superior al número de variables utilizado en el análisis), eso si hay que tener en cuenta que los resultados pueden no ser los deseados.

Estimación por mínimos cuadrados generalizados (GLS: Generalized Least Squares)

La función de ajuste que se desea minimizar está definida por:

$$L(\theta)=\frac{1}{2}tr\left[\left(S-\Sigma(\theta)\right)\cdot V^{-1}\right]^2$$

donde:

V es la matriz formada por coeficientes que ponderan las discrepancias entre las matrices S y $\Sigma(\theta)$, y se llama matriz de pesos de la matriz residual (ya que se encarga de atribuir un peso a los diversos residuos).

Las estimaciones obtenidas son consistentes (convergen a los valores poblacionales de los parámetros) y asintóticamente eficientes (de varianza mínima cuando el tamaño muestral es grande).

Con este método se obtienen coeficientes estimados carentes de sesgo cuando se cumple el supuesto de normalidad multivariable, el tamaño de la muestra es muy elevado y las variables observables son continuas.

La estimación por mínimos cuadrados generalizados, requiere muestras mucho más grandes para obtener estimaciones consistentes y eficientes (en comparación con el método de máxima verosimilitud).

Por tanto, aunque se basa en los mismos criterios que la estimación por máxima verosimilitud y se puede emplear bajo las mismas condiciones, la estimación por máxima verosimilitud resulta más apropiada cuando el tamaño de muestra es pequeño.

4.4. Evaluación e interpretación de los modelos de ecuaciones estructurales

4.4.1. Ajuste del modelo

Tenemos que comprobar que el modelo es estadísticamente significativo. Para realizar dicha evaluación tenemos que verificar en primer lugar que se cumplen los *supuestos básicos* que se exigen en un modelo de ecuaciones estructurales, ya especificados anteriormente.

Tras esto, tenemos que detectar la existencia de *estimaciones erróneas*, para ello examinaremos los valores de los parámetros libres, su signo y sus errores típicos.

Consideraremos que las estimaciones son erróneas cuando:

- Los coeficientes estandarizados o las correlaciones son superiores a 1.
- Las varianzas de los términos de error son negativas.
- Errores típicos (también llamados errores estándar) muy bajos o muy elevados.
- Los parámetros no son significativos.

En el caso de que existan correlaciones o coeficientes estandarizados superiores a 1, se suelen eliminar las variables implicadas, y en el caso de varianzas con términos de error negativos se suelen sustituir por el valor 0.005, (aunque también se podrían eliminar las variables con varianzas negativas o simplemente ignorar el valor negativo).

En cuanto a la significatividad de los parámetros estimados se pueden comprobar mediante las razones críticas que vienen definidas por:

$$t = \frac{\hat{p}}{e_p}$$

donde:

$\hat{p}$ = valor del parámetro estimado.

e_p = error típico de la estimación del parámetro libre.

Su unidad de medida es la misma que la de la variable asociada, ya que se suele estudiar solamente los de la solución no estandarizada debido a que los errores típicos para los coeficientes estandarizados no suelen ser correctos.

El error debe ser bajo, pero no demasiado próximo a 0 porque ello supondría dependencia lineal entre parámetros del modelo.

En general, consideraremos que los parámetros son significativos para un nivel de significación de 0.05 cuando $|t| > 1.96$, y para un nivel de significación de 0.01 cuando $|t| > 2.576$. En tales casos puede afirmarse con una mínima probabilidad de error en la inferencia, que los coeficientes estimados (saturaciones) son estadísticamente significativos, y por tanto es posible concluir que las relaciones causales propuestas son ciertas.

Debemos comprobar si las estimaciones de parámetros no significativos se deben al tamaño muestral, ya que el error típico será mayor cuanto menor sea el tamaño muestral. En este caso, se deberá aumentar el tamaño de la muestra para que el error disminuya e intentar así que la estimación sea significativa. En caso contrario el parámetro debería ser eliminado y, a continuación, reformular el modelo, ya que un parámetro no significativo indicaría que la relación propuesta no tiene ningún efecto sustancial.

Una vez estudiadas las estimaciones erróneas, y antes de tomar la decisión de que hacer al respecto, debemos detectar los *casos atípicos*, debido a su incidencia en la obtención de dichas estimaciones erróneas, para lo que realizaremos un análisis residual.

Los casos atípicos son valores extremos que se distancian de la media muestral (valores muy diferenciados de los restantes).

Su aparición se suele deber fundamentalmente a extraños en la población estudiada o a errores en la recogida de datos (en cuyo caso deben eliminarse).

Su presencia implica el aumento de la probabilidad de obtener estimaciones erróneas y en general un peor ajuste del modelo.

Para la detección de atípicos se suele recurrir a los gráficos multivariables que nos permiten identificar rápidamente los casos extremos que se desvían de la media muestral de la distribución.

Analíticamente lo podemos hacer mediante los residuos estandarizados (valores absolutos elevados suelen ir asociados a casos atípicos). En el programa EQS se definen como la diferencia entre el coeficiente de correlación predicho y el observado.

La razón de utilizar los residuos estandarizados frente a los no estandarizados es que se ven muy afectados por la escala de medición.

Los residuos estandarizados deben de ser pequeños para que el modelo se acepte. Valores grandes son sinónimo de mal ajuste.

Cuando los residuos son positivos y elevados, el modelo está sobreestimando la covarianza entre las variables por lo que se deberían eliminar efectos entre dichas variables.

Si los residuos son negativos y elevados se está subestimando la covarianza, por lo que habría que añadir efectos entre dichas variables.

Para corregir los daños provocados por los valores atípicos en el ajuste del modelo, podemos aumentar el tamaño muestral, de este modo la proporción de atípicos en la muestra disminuirá. Cuando el tamaño muestral es muy elevado se puede proceder a la eliminación de los datos atípicos.

Una vez comprobadas las estimaciones erróneas y los casos atípicos se puede comprobar el *ajuste de modelos de medición y estructural*.

Para estudiar las relaciones lineales entre las variables reflejadas en las ecuaciones estructurales recurriremos al coeficiente de determinación definido por:

$$R^2 = 1 - \frac{\hat{\sigma}^2_{X_i}}{\hat{\sigma}^2_{Y_i}}$$

donde:

$\hat{\sigma}^2_{X_i}$ = varianza estimada de las variables X_i

$\hat{\sigma}^2_{Y_i}$ = varianza estimada de las variables Y_i

Valores de R^2 cercanos a 1 indican que la relación entre las variables es fuerte y valores cercanos a 0 la inexistencia de relación.

Si $R^2 \geq 0.90$ se considera que el indicador explica la suficiente proporción de varianza del constructo, y por tanto se da por buena la relación entre dichas variables. En cualquier caso, este valor de 0.90 es difícil de alcanzar y en la mayoría de los casos se acepta que la relación es buena cuando R^2 supera el valor de 0.70. Si no es así, debemos revisar los errores de medición por si se ha ignorado alguno de ellos. También debemos comprobar las variables consideradas incluyendo si es necesario alguna nueva variable que pueda ser relevante en las relaciones incluidas en el modelo. Y por último comprobar que la relación está formulada correctamente.

Para evaluar el ajuste del modelo utilizamos los índices de bondad de ajuste, que nos ayudaran a decidir en qué grado el ajuste de nuestro modelo es aceptable o desaconsejable.

4.4.2. Medidas de ajuste. Índices de bondad

Para comprobar el ajuste entre las matrices de covarianza muestral y poblacional se puede estudiar la matriz de residuos. (Cuantos más ceros tenga esta matriz mejor será el ajuste).

Sin embargo, para facilitar el ajuste de dichas matrices se utilizan una gran variedad de índices. La mayoría de ellos basados en el estadístico χ^2 (Chi-cuadrado), que es el criterio fundamental, pero que suele producir valores excesivamente altos para tamaños muestrales muy altos.

Aunque, son muchos los índices de ajuste que se presentan para la evaluación del ajuste de un modelo y que programas de estimación de modelos de ecuaciones estructurales, como EQS entre otros, proporcionan, ninguno de ellos por separado resulta suficiente para determinar si el modelo se ajusta debidamente a los datos.

Entre los índices identificados como de ajuste global, podemos diferenciar entre tres tipos de medidas: medidas absolutas de ajuste, medidas incrementales de ajuste y medidas de ajuste de parsimonia.

Medidas absolutas de ajuste

Evalúan la igualdad entre la matriz de covarianza observada y la matriz de covarianza estimada por el modelo, es decir, determinan el grado en el que el modelo global (modelo estructural y modelo de medida) predice la matriz de datos inicial (matriz de covarianzas observada).

Destacamos las siguientes medidas absolutas:

<u>Índice Chi-cuadrado</u>$\left(\chi^2\right)$

Se define como:

$$\chi_g^2 = (N-1) \cdot L\left(S, \Sigma\left(\theta\right)\right)$$

donde:

N = tamaño muestral

$L\left(S,\Sigma\left(\theta\right)\right)$ = función de ajuste

g = grados de libertad

Los grados de libertad se pueden obtener con la fórmula:

$$g = \frac{1}{2}\cdot\left[\left(p+q\right)\cdot\left(p+q+1\right)\right]-t$$

donde:

p = número de variables exógenas

q =número de variables endógenas

t = número de parámetros libres estimados del modelo

Es la única medida de bondad de ajuste con un test de hipótesis asociado, mientras que el resto de medidas son descriptivas.

El test propuesto es:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : S = \Sigma \\ H_1 : S \neq \Sigma \end{array}\right\}$$

La hipótesis nula H_o expresa que el modelo ajusta los datos de la población perfectamente, mientras que la hipótesis alternativa H_1 informa de un mal ajuste de datos.

La hipótesis nula se corresponde con que nuestro modelo es el correcto, lo cual viene a ser la práctica inversa de lo habitual en los contrastes de hipótesis, ello se debe a que el estadístico χ^2 no nos informa de los parámetros que debemos eliminar sino de los parámetros que debemos incluir en el modelo.

Cuando la hipótesis nula es verdadera, el modelo debería ajustar bien a los datos y la probabilidad debería exceder el valor de corte en la distribución χ^2

(tal como 0.05 ó 0.01). Por tanto, en el modelo correcto los valores del estadístico χ^2 serán pequeños (en relación con los grados de libertad), siendo el ajuste perfecto cuando el valor χ^2 se aproxima a 0 y el p-valor asociado a dicho test es mayor que 0.05 (ó 0.01). En este caso el test será no significativo lo que quiere decir que los residuos (elementos de la matriz $S-\Sigma(\theta)$) son nulos o cercanos a 0 y por tanto el modelo propuesto se considera consistente con los datos observados.

El modelo se rechaza (el test χ^2 es significativo) cuando los valores del estadístico son grandes y la probabilidad es menor de 0.05. En tal caso concluiremos que la matriz de covarianzas de la población Σ y la matriz $\Sigma(\theta)$ estimada por el modelo son significativamente distintas una de otra.

Aunque este índice es el más utilizado, presenta dos principales inconvenientes:

- Es muy sensible al tamaño muestral. Muestras muy grandes o muy pequeñas suelen producir valores χ^2 estadísticamente significativos. El tamaño muestral debe superar los 100 casos y no exceder los 500 casos.

- Es también sensible a la no normalidad multivariable de los datos, por lo que, en caso de utilizarse es conveniente realizar una prueba para comprobar el cumplimiento de la normalidad multivariante.

Cuando el método de estimación es de máxima verosimilitud robusto, el programa EQS nos facilita distintos test χ^2 basados en las distribuciones de los residuos que se adaptan a las diversas situaciones que se nos puedan plantear.

En el caso de que no se cumplan las condiciones de normalidad multivariable, se puede utilizar el índice "χ^2 scaled" de Satorra y Bentler, definido como el valor de χ^2 dividido entre una constante obtenida a partir de la matriz residual, la curtosis y los grados de libertad del modelo.

Cuando la muestra es pequeña (entre 60 y 120 sujetos), debemos utilizar el denominado test χ^2 de Yuan-Bentler que no es más que una extensión del test χ^2 de Satorra-Bentler para modelos con tamaños muestrales pequeños.

Aunque el estadístico χ^2 es de gran utilidad, las exigencias para su utilización nos conducen a la consideración de otros tipos de ajuste global como la raíz de la media cuadrática residual estandarizada que es descriptiva y que no depende tanto del tamaño muestral.

Raíz de la media cuadrática residual estandarizada $(SRMR)$

Se define por:

$$SRMR = \left(\frac{2 \cdot \sum_{i=1}^{p+q} \sum_{j=1}^{i} \left(s_{ij} - \sigma_{ij} \right)^2}{\left(p+q \right) \cdot \left(p+q+1 \right)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

("Standarized Root Mean Square Residual")

donde:

p = número de variables exógenas

q =número de variables endógenas

s_{ij} = elementos de la matriz de covarianzas muestral S

σ_{ij} = elementos de la matriz de covarianzas poblacional Σ

En general cuanto más bajo sea su valor, mejor es el ajuste. Para un ajuste perfecto este índice debería ser de 0, mientras que para valores por debajo de 0.05 ya se considera un buen ajuste, y por encima de 0.05 pero por debajo de 0.1 un ajuste aceptable, en general el límite de ajuste se sitúa en este valor de 0.1.

El índice SRMR suele aplicarse con correlaciones en lugar de con covarianzas, para evitar la dependencia de la unidad de medición de las variables.

En el caso de que las variables observadas estén estandarizadas, se interpreta como las unidades de correlación que en promedio separan las correlaciones observadas de las predichas.

Medidas incrementales de ajuste

Estos índices de bondad comparan los estadísticos χ^2 de dos modelos, a diferencia de las medidas absolutas de ajuste que comparan las matrices de covarianzas o de correlaciones.

Más concretamente, los índices de ajuste incremental comparan el estadístico χ^2 del modelo propuesto respecto a otro modelo llamado modelo base. El modelo base más utilizado es el llamado modelo de independencia (de hecho, es el único modelo base que utiliza el programa EQS).

El modelo de independencia se caracteriza por ser aquel que no restringe en modo alguno las varianzas de las variables y que fija todos sus parámetros estructurales en cero, esto es, no especifica ninguna relación entre las variables por lo que asume que todas las varianzas son cero.

Es decir, se busca comparar el modelo propuesto con el peor modelo posible. En este sentido, aunque el ajuste del modelo diseñado no sea perfecto, será una mejor aproximación a la realidad en tanto en cuanto mejore el ajuste del modelo de independencia.

Todos los índices de ajuste incremental suelen estar acotados entre 0 y 1 (0 representa la inexistencia de ajuste y 1 el ajuste perfecto).

En general se exigen valores superiores a 0.90 para que se considere que el modelo obtenido tiene un buen ajuste, es decir, que el modelo es consistente con los datos observados.

Estos índices tienen varios inconvenientes, por una parte, el estadístico χ^2 del modelo de independencia suele tener valores muy elevados, lo que implica que con demasiada frecuencia se obtienen índices incrementales con valores cercanos a 1. Por otra parte, dependen del modelo base escogido. Otro inconveniente es el hecho de que se ven afectados negativamente por el incumplimiento de los supuestos de normalidad multivariante o de que las variables sean continuas, produciéndose en estos casos la subestimación del modelo propuesto.

Además, existe un gran número de índices incrementales y no hay ninguno de ellos al que se le dé una mayor importancia.

A continuación vemos algunos de estos índices:

Índice de ajuste normado (NFI)

Se define por:

$$NFI = \frac{\chi_b^2 - \chi^2}{\chi_b^2}$$

("Normed Fit Index")

donde:

χ^2 = estadístico chi-cuadrado del modelo propuesto

χ_b^2 = estadístico chi-cuadrado del modelo de independencia

Este índice mide la reducción proporcional en la función de ajuste cuando se pasa del modelo base al modelo propuesto.

El principal inconveniente de esta medida descriptiva, es que no tiene en cuenta los grados de libertad, lo que le haría aumentar siempre al añadir parámetros a un modelo. Además, su valor también aumenta con el tamaño de la muestra (produciéndose subestimación cuando el tamaño de la muestra es pequeño).

Índice de ajuste no normado $(NNFI)$

Se define por:

$$NNFI = \frac{\frac{\chi_b^2}{g_b} - \frac{\chi^2}{g}}{\frac{\chi_b^2}{g_b} - 1}$$

("Nonnormed Fit Index")

donde:

χ^2 = estadístico chi-cuadrado del modelo propuesto

χ_b^2 = estadístico chi-cuadrado del modelo de independencia

g = grados de libertad del modelo propuesto

g_b = grados de libertad del modelo base

Este índice compara el ajuste por grados de libertad del modelo propuesto y del modelo base.

Si se añaden parámetros al modelo, los índices solo aumentan si el estadístico χ^2 disminuye en mayor medida que los grados de libertad. Se salva así el inconveniente del índice NFI.

<u>Índice de ajuste incremental</u> (IFI)

Se define por:

$$IFI = \frac{\chi_b^2 - \chi^2}{\chi_b^2 - g}$$

("Incremental Fit Index")

donde:

χ_b^2 = estadístico chi-cuadrado del modelo de independencia

χ^2 = estadístico chi-cuadrado del modelo propuesto

g = grados de libertad del modelo propuesto

Al considerar los grados de libertad del modelo propuesto, otorga un mayor peso a la parsimonia del modelo, siendo menos sensible al tamaño de muestra.

Índice de ajuste comparativo (CFI)

Se define por:

$$CFI = 1 - \frac{\max(\chi^2 - g, 0)}{\max(\chi_b^2 - g_b, \chi^2 - g, 0)}$$

("Comparative Fit Index")

donde:

χ^2 = estadístico chi-cuadrado del modelo propuesto

χ_b^2 = estadístico chi-cuadrado del modelo de independencia

g = grados de libertad del modelo propuesto

g_b = grados de libertad del modelo independencia

La influencia del tamaño muestral es menor que en el resto de índices incrementales, produciéndose valores aceptables incluso cuando el tamaño de muestra es excesivamente pequeño.

Medidas de ajuste de parsimonia

Estas medidas tratan de comparar el modelo propuesto con modelos con un mayor número de parámetros.

Son similares a los índices de ajuste absolutos, pero incorporan una función de penalización para corregir la parsimonia, que se define como el número de grados de libertad residuales del modelo.

Son medidas que penalizan la eliminación de parámetros libres; es decir, cuanto más parámetro libre tenga el modelo mejor será el ajuste de dicho modelo.

A diferencia de las medidas de ajuste incrementales, no están acotadas entre 0 y 1, lo que dificulta su interpretación en un modelo aislado. Aunque son especialmente útiles cuando se trata de comparar modelos que se basan en las mismas variables y datos, pero con distinto número de parámetros.

Destacamos los siguientes índices:

Error de la media cuadrática residual de aproximación $(RMSEA)$

Se define por:

$$RMSEA = \sqrt{\frac{\chi^2 - g}{g}}$$

("Root Mean Square Error of Approximation")

donde:

χ^2 = estadístico chi-cuadrado del modelo propuesto

g = grados de libertad del modelo propuesto

Este índice se suele interpretar como el error de aproximación medio por grado de libertad.

Cuanto menor es su valor, mejor es el ajuste del modelo.

El valor mínimo aceptable es 0.05 (Browne y Cudeck, 1993).

La desigualdad $RMSEA \geq 0.1$ significa que el modelo no tiene un buen ajuste, aunque hay que tener en cuenta que este índice tiende a rechazar modelos correctos cuando el tamaño muestral es pequeño.

Criterio de información de Akaike (AIC)

Se define por:

$$AIC = \chi^2 - 2g$$

("Akaike Information Criterion")

donde:

χ^2 = estadístico chi-cuadrado del modelo propuesto

g = grados de libertad del modelo propuesto

Cuanto más pequeño sea este valor, el ajuste será mejor, ya que ello supone un menor número de parámetros estimados y por tanto el ajuste será más parsimonioso (no tiene ningún valor de referencia para decidir si el modelo ajusta o no lo hace).

Se suele utilizar para comparar modelos que poseen diferente número de variables latentes.

Índice información de Akaike modificado $(CAIC)$

Se define por:

$$CAIC = \chi^2 - g\left(\ln N + 1\right)$$

("Consistent AIC")

donde:

χ^2 = estadístico chi-cuadrado del modelo propuesto

g = grados de libertad del modelo propuesto

$\ln N$ = logaritmo neperiano del tamaño muestral

Este índice se basa en una transformación del índice anterior. Su interpretación es la misma que la del índice AIC.

Nota: Los índices expuestos no son los únicos existentes. Se recomienda no utilizar un único índice sino una combinación de varios de ellos.

Los valores de referencia generalmente adoptados como indicativos de un buen ajuste se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2

Cuadro resumen de los índices de bondad de ajuste

	Medida de ajuste	"Buen ajuste"	"Ajuste aceptable"
Índices de ajuste absoluto	χ^2 (g grados de libertad-p – valor)	$0 \leq \chi^2 \leq 2g$ $.05 \leq p \leq 1.00$ ($\chi^2 = 0$ ajuste perfecto)	$2g \leq \chi^2 \leq 3g$ $.01 \leq p \leq .05$
	SRMR	0≤ SRMR ≤ 0.05 (SRMR = 0 ajuste perfecto)	0.05 < SRMR ≤ 0.1
Índices de ajuste incremental	NFI	.95 ≤ NFI ≤ 1	0.90 ≤ NFI ≤ 0.95
	NNFI	0.90 ≤ NNFI ≤ 0.95	.90 ≤ NNFI ≤ 0.95
	IFI	0.95 ≤ IFI ≤ 1	0.90 ≤ IFI ≤ 0.95
	CFI	0.95 ≤ CFI ≤ 1	0.90 ≤ CFI ≤ 0.95
Índices de ajuste de parsimonia	RMSEA	0 ≤ RMSEA ≤ 0.05	0.05 ≤ RMSEA ≤ 0.1
	AIC	AIC más pequeño en la comparación	
	CAIC	CAIC más pequeño en la comparación	

4.4.3. Modificación del modelo

En caso de no superar con éxito la etapa de evaluación o tener indicios de que el ajuste puede mejorar, deberemos modificar el modelo. Para ello podemos:

- Eliminar parámetros no significativos (mejoramos así la parquedad del modelo, entendida ésta como simplicidad) o añadir parámetros (mejoramos así la bondad de ajuste del modelo). Si tomamos esta decisión liberamos parámetros fijos o pasamos parámetros fijos a parámetros ajustados como libres.

- Eliminar variables latentes no significativas o añadir nuevas variables. Esto supondría la repetición de todas las fases del análisis, incluyendo la recogida de datos.

Existen distintos índices (incluidos en la mayoría de paquetes estadísticos, y en particular en EQS) que nos ayudan a decidir la acción a adoptar:

El índice Alpha de Cronbach

Nos indica si mejora la fiabilidad de la escala si se excluyera un determinado indicador de una variable latente.

El coeficiente de determinación (R^2)

Nos ayudan decidir si las relaciones causales entre las variables incluidas en el modelo son fuertes o débiles.

Análisis de los residuos estandarizados

Nos permiten identificar las variables problemáticas.

Si el residuo es mayor que el valor 2 o menor que el valor -2 se considera la predicción de la relación entre las variables como errónea.

Las variables con varianza elevada tienden a producir residuos excesivamente elevados.

El Test Wald (W)

El test Wald es un test para evaluar si un parámetro libre puede ser fijado sin que se produzca una pérdida de información significativa. El estadístico de contraste, denominado estadístico t, se calcula como el cociente entre la estimación puntual y el error estándar de la estimación (se basa en el cambio que produce χ^2) y mide el cambio que experimenta el modelo si un parámetro "libre" se transforma en "fijo".

En una primera etapa ("APRIORI PROCESS") el programa EQS evalúa los parámetros libres que han sido incluidos en el modelo propuesto, y en una segunda etapa ("SIMULATANEOUS PROCESS") considera todos los parámetros libres que podrían estar incluidos en el modelo.

Si el test es no significativo para un determinado parámetro ($p>.05$), entonces podríamos fijar dicho parámetro, puesto que el ajuste del modelo no empeoraría.

<u>El Test Multiplicador de Lagrange</u> (LM)

Nos informa del grado de mejora del modelo cuando los parámetros fijos se transforman en parámetros libres, es decir, sirve para decidir si se libera algún parámetro. Este test es muy útil para evaluar si, desde un punto de vista estadístico, un modelo de ecuaciones estructurales podría mejorar substancialmente liberando parámetros previamente fijados. El programa EQS nos facilita una estimación de los valores que tomaría cada parámetro en caso de ser liberado (indicándolo como "parameter change"), un valor alto indica que el modelo esta subestimado y por esta razón el parámetro debería ser liberado. El programa realiza los cálculos en dos fases, en una primera etapa considera las variables una a una ("Univariate Test") y en una segunda fase considera las variables de forma conjunta ("Multivariate Test") para ver si se sostienen los resultados anteriores.

Si el test es significativo para un determinado parámetro ($p < .05$), entonces podríamos liberar este parámetro, puesto que el ajuste del modelo mejoraría.

"Una caída grande en χ^2, comparada con la diferencia en grados de libertad indica que los cambios hechos en el modelo representan una mejora real. Por otro lado, una caída próxima a la diferencia en el número de grados de libertad, indica que se obtiene la mejora en el ajuste `aprovechándose de la oportunidad´ y los parámetros añadidos pueden no tener significatividad ni significado" (Jöreskog y Sörbom, 1989).

En cualquier caso, es aconsejable, una vez introducida una modificación en el modelo, comprobar los efectos que ésta supone en dicho modelo antes de pasar a introducir el siguiente cambio. Por otra parte, se recomienda introducir las modificaciones que mejoran la bondad de ajuste (añadiendo parámetros) antes de las que mejoran la parquedad (eliminando parámetros).

4.4.4. Modelo final

Una vez que se ha obtenido el grado de aproximación a la realidad que se está dispuesto a asumir, podemos detenernos en el proceso de modificaciones.

Ahora bien, un buen ajuste del modelo no implica necesariamente que el modelo obtenido sea correcto.

Se recomiendan seguir los siguientes criterios adicionales para concluir que el modelo obtenido es el correcto (Saris y Stronkhorst, 1984):

a) El modelo empírico tiene una representación lógica.

b) La proporción de varianza explicada de las variables endógenas es suficientemente elevada. Esto nos indica que las variables medidas son relevantes en las relaciones causales estudiadas, que no se han ignorado errores de medición importantes y que las relaciones entre las variables se han especificado de forma correcta.

c) La replicabilidad de los resultados. Para que las relaciones causales sean correctas, los efectos causales deberán ser los mismos en muestreos diferentes.

Una vez que se ha decidido que nuestro modelo es el `correcto´, se procedería a su presentación.

La presentación del modelo final se hará tanto de forma gráfica como de forma analítica.

Para la representación gráfica utilizaremos los diagramas causales. Como ya hemos explicado anteriormente, éstos facilitan la comprensión del modelo en su conjunto.

En cambio, en la presentación analítica proporcionaremos más información. Se presentará una tabla resumen donde se incluye la estimación de cada parámetro, junto a su error típico, la razón típica (valor t) y su significatividad.

Además, debemos indicar siempre las modificaciones realizadas hasta llegar al modelo final, añadiendo los modelos descartados con su correspondiente justificación de rechazo (criterios seguidos con su nivel de significación e índices de ajuste estudiados)

MÉTODO

MÉTODO

Las cosas que ocurren en un aula son interdependientes entre sí (no hay nada aislado, por ejemplo, la mala conducta puede ser debida a una mala explicación).

La única manera de analizar los problemas del aula es considerar el aula de una manera holística (global), en este sentido los MEE (Modelos de Ecuaciones Estructurales) nos permiten ver todas las relaciones que existen en el aula en un modelo único y es probablemente el instrumento más potente que he encontrado para analizar los problemas que surgen en mi aula de matemáticas.

Para verificar la teoría de que existe una relación causal entre el conocimiento cognitivo y el aprendizaje cooperativo se plantea la siguiente hipótesis general de trabajo: “Si los alumnos trabajan en grupo su rendimiento académico mejora”.

Así pues, el objetivo general de nuestro trabajo será establecer el papel que juegan los factores referidos al aprendizaje cooperativo por parte del alumno en la determinación de su rendimiento académico en Matemáticas, contribuyendo a esclarecer la dinámica de relaciones que se producen entre ellos y con los factores de tipo individual, tales como la inteligencia o el autoconcepto.

Pretendemos de igual modo establecer un modelo explicativo de las interrelaciones que se producen entre las variables del aprendizaje cooperativo y rendimiento académico en Matemáticas, identificando los factores causales y las variables observables que definen más adecuadamente nuestro modelo de ecuaciones estructurales.

A partir de nuestros resultados obtenidos sacaremos las conclusiones oportunas que nos permitirán en los próximos cursos académicos actuar desde y sobre aquellos factores del trabajo cooperativo que ejercen una mayor influencia causal sobre el rendimiento.

1. Formulación del modelo

La verificación de la hipótesis planteada, que refleja el intento de validar una teoría sobre el aprendizaje cooperativo, requiere la utilización de un modelo causal por cuanto se encuentra presente en la misma, de forma explícita, una idea de causación.

Con la información anterior, y a fin de alcanzar el objetivo propuesto en nuestro trabajo, podemos formular un modelo causal con tres variables latentes, dos independientes, explicativas o exógenas y una dependiente, explicada o endógena.

Las dos variables latentes exógenas son F_1 que simboliza la controversia cooperativa y F_2 que simboliza la ayuda y subyacen a doce variables observables que determinan el modelo de medida de las variables exógenas.

La variable latente dependiente, representada por F_3, hace referencia al rendimiento académico (*componente cognitivo*). El modelo de medida que subyace a esta variable endógena está formado por dos variables observables. Estas variables observables hacen referencia, respectivamente a los conocimientos declarativo y procedimental.

Las catorce variables observables empleadas en la construcción del modelo de ecuaciones estructurales son:

<u>Variables observables para medir la variable exógena "Controversia cooperativa"</u>:

V_1: Expone su comprensión de la tarea (enfoque, proceso, producto).

V_2: Justifica su comprensión de la tarea (enfoque, proceso, producto).

V_3: Justifica su valoración de las actuaciones propias y ajenas.

V_4: Ofrece ayuda y orientación sin que se la pidan.

V_5: Respeta turnos de intervención.

V_6: Asume su responsabilidad en el progreso grupal.

Variables observables para medir la variable exógena “Ayuda”:

V_7: Da ayuda sobre el producto (presentación, estructura).

V_8: Da ayuda sobre el contenido (conceptos, perspectivas de interpretación).

V_9: Da ayuda sobre el proceso de realización de la tarea (estrategias y recursos).

V_{10} : Ofrece y permite la exposición completa de la demanda.

V_{11} : Pide sugerencias y explicaciones sobre los distintos aspectos de la demanda.

V_{12} : Ofrece sugerencias y explicaciones sobre los distintos aspectos de la demanda.

Variables observables para medir la variable endógena “Rendimiento académico”:

V_{13} : Conocimiento declarativo.

V_{14} : Conocimiento procedimental.

Una vez efectuada esta breve conceptualización sobre las variables implicadas en el modelo, pasamos a describir la prioridad causal de las mismas mediante un diagrama de path que nos permita visualizar las vías causales establecidas (véase Figura 12).

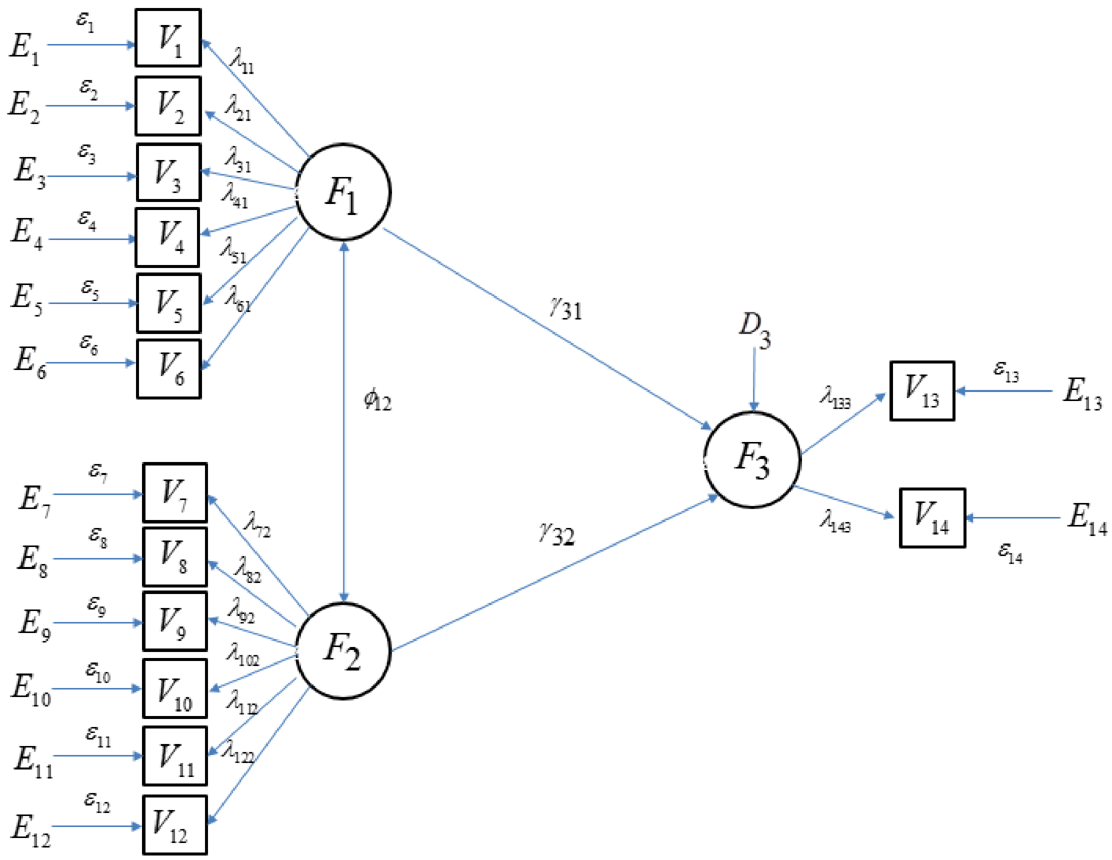


Figura 12. Representación del modelo causal

La parte estructural del modelo especifica las relaciones hipotéticas existentes entre los tres constructos simbolizados por círculos $(F_1, F_2\, y\, F_3)$. Tal y como indican las sagitas, F_1 y F_2 suponemos que afectan a F_3 y, de acuerdo con la teoría de Piaget, la correlación ϕ_{12} también posee connotaciones causales. La magnitud de las relaciones causales viene expresada por los coeficientes estructurales, γ_{31} y γ_{32}. Además, se ha representado el residual D_3 que es la parte de la varianza de la variable latente endógena que no puede atribuirse a los constructos del modelo.

Además del modelo estructural, se plantea un modelo de medida conformado por catorce variables observables, que se encuentran representadas por cuadrados, y que se denotan por dos vectores (que, se designan como x e y). El vector $y(V_{13}, V_{14})$ es un vector de medidas para la variable dependiente y el vector $x(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8, V_9, V_{10}, V_{11}, V_{12})$ es un vector de medidas para las variables independientes.

Los errores de medida se encuentran representados, respectivamente, por los vectores $w(E_{13}, E_{14})$ y $\delta(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9, E_{10}, E_{11}, E_{12})$.

Los coeficientes o saturaciones factoriales de las variables observables $y(V_{13}, V_{14})$ sobre la variable latente F_3 se encuentran representados por λ^y y los de las variables observables $x(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8, V_9, V_{10}, V_{11}, V_{12})$ sobre las variables latentes F_1 y F_2 se han simbolizado por λ^x.

Las ecuaciones estructurales de este modelo se refieren a las relaciones especificadas entre las variables exógenas y endógenas y vienen dadas por la expresión matricial siguiente:

$$\Omega = \Gamma\Psi + \sigma \qquad \textbf{(I)}$$

donde Ω es un escalar que define a la variable latente endógena, Ψ es un vector (2 × 1) de variables latentes exógenas, Γ es un vector (1 × 2) de coeficientes de los efectos de las variables exógenas sobre la variable endógena y σ es un escalar que especifica el residual (error) de la ecuación general **(I)**.

El desarrollo de esta ecuación es:

$$F_3 = \begin{bmatrix} \gamma_{31} & \gamma_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} + D_3 \textbf{(II)}$$

donde suponemos que las medias de todas las variables se expresan en unidades de desviación $(\mu = 0)$ y que σ y Ψ no correlacionan.

El modelo de medida puede ser transformado a dos ecuaciones cuyas expresiones, en términos matriciales, serían:

$$y = \lambda^y\Omega + w \qquad \textbf{(III)}$$

$$x = \lambda^x\Psi + \delta \qquad \textbf{(IV)}$$

donde y es un vector (2 × 1) de medidas para la variable endógena, λ^y es un vector (2 × 1) de coeficientes (saturaciones factoriales) de y sobre la variable latente Ω y w es un vector (2 × 1) de errores de medida de y; x es un vector (12 × 1) de medidas para las variables exógenas, λ^x es una matriz (12 × 2) de coeficientes (saturaciones factoriales) de x sobre las variables latentes Ψ y, finalmente, δ es un vector (12 × 1) de errores de medida de x.

El desarrollo matricial de estas ecuaciones sería:

$$\begin{bmatrix} V_{13} \\ V_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{53} \\ \lambda_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_5 \\ E_6 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(V)}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \\ V_{10} \\ V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ \lambda_{21} & 0 \\ \lambda_{31} & 0 \\ \lambda_{41} & 0 \\ \lambda_{51} & 0 \\ \lambda_{61} & 0 \\ 0 & \lambda_{72} \\ 0 & \lambda_{82} \\ 0 & \lambda_{92} \\ 0 & \lambda_{102} \\ 0 & \lambda_{112} \\ 0 & \lambda_{122} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(VI)}$$

2. Participantes

La muestra a la que hace referencia la presente investigación abarca a los alumnos de tres cursos de Educación Secundaria Obligatoria del IES Isaac Peral de Cartagena (Comunidad Autónoma de Murcia), concretamente a alumnos de primero y segundo de Educación Secundaria Obligatoria (niveles que constituyen el primer ciclo de ESO) y alumnos de primero de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud.

El I.E.S Isaac Peral es un instituto público ubicado en un barrio de clase obrera en el que la mayoría de los vecinos se dedican al sector servicios por lo que se trata de un instituto con unos alumnos con un nivel socio-cultural medio, y en la actualidad cuenta con seis líneas en 1º ESO, cinco líneas en 2º ESO y tres líneas en Bachillerato.

Debido a la masiva inmigración el centro cuenta con más de un 5% de inmigrantes de distintas nacionalidades y culturas entre sus alumnos, en particular en nuestras aulas nos encontramos con 9 de ellos (12 %) que intentaremos, mediante actividades apropiadas, se integren social y culturalmente.

El muestreo utilizado ha sido incidental (no probabilístico de tipo intencional), es decir la selección de la muestra, así como tamaño de muestra, se seleccionó por conveniencia. Las razones fueron de planteamiento y de oportunidad. Siendo los alumnos seleccionados los propios del profesor que realiza esta tesis doctoral, que prestaba sus servicios en calidad de profesor de Matemáticas en el citado instituto de Cartagena en el curso académico 2014/2015.

Aunque esta forma de selección incidental de la muestra tenga limitaciones determinadas por factores de orden práctico, Snow (1979) señala que, en muchos estudios realizados sobre la práctica educativa, la muestra de sujetos no se extrae aleatoriamente de la población general de interés. En estos casos la solución consiste en describir con la mayor exhaustividad posible las características de la muestra disponible, incluyendo una descripción de aquellas variables de los sujetos que la teoría, la investigación previa, etc., sugieren que son relevantes.

Los participantes en la investigación fueron 74 alumnos, de los cuales eran varones 34 (46%) y mujeres 40 (54%), con edades que fluctuaban entre los 12 y 18 años.

Todos estos alumnos estaban en el curso que por edad les correspondía, ya que ninguno de ellos era repetidor.

La distribución de los participantes por materia y curso se especifica en la Tabla 3.

Tabla 3.

Distribución del alumnado por materia y curso

Materia	Curso	Nº de alumnos
Matemáticas 1ºESO	2014/2015	30
Matemáticas 2ºESO	2014/2015	28
Matemáticas 1ºBachillerato CNS	2014/2015	16

Las asignaturas de matemáticas en primero y segundo de ESO son obligatorias, mientras que la asignatura Matemáticas I es optativa en primero de Bachillerato.

Todas estas asignaturas son impartidas a lo largo del curso académico en sesiones de 55 minutos durante cuatro días a la semana.

3. Procedimiento

Para desarrollar la investigación que nos proponemos llevar a cabo proponemos una organización del aula que combina las lecciones magistrales (actividades de gran grupo) con un trabajo grupal basado en la interdependencia positiva de objetivos y metas (trabajos en pequeños grupos de naturaleza cooperativa). Los efectos positivos que una organización cooperativa del aula tiene para la enseñanza de las matemáticas, están ampliamente probados (Cheng, 2011, García, 2013, Pons, González-Herrero y Serrano, 2008, Serrano, González-Herrero y Pons, 2008) y estos resultados se han mostrado consistentes en las diferentes áreas de contenido matemático (Davidson, 1990).

El proceso didáctico implica la existencia de unos objetivos a alcanzar, y es el método, el camino utilizado para llegar a ese fin.

Entendemos el método didáctico como un conjunto lógico y unitario de los procedimientos didácticos encaminados a dirigir el aprendizaje. El método que debemos utilizar será aquel que resulte más atractivo, cómodo y útil a los alumnos.

En Matemáticas, por la abstracción que supone su estudio, quedará restringido el campo general a unos casos particulares de aplicación de métodos y técnicas y que son los utilizados por la casi totalidad de los docentes de esta materia.

En concreto para este curso hemos desarrollado una metodología activa y participativa de modo que el profesor queda en un segundo plano dejando al alumno que construya su propio aprendizaje, dicho de otra manera, el alumno participa en el desarrollo de la clase pasando el profesor a ser un orientador y un coordinador de la marcha de la clase. Con este método se logra una perfecta formación integral del alumno compaginando sus conocimientos adquiridos con la forma de expresarse ante sus compañeros, ante los demás, manteniendo y defendiendo sus propias ideas y aceptando los razonamientos lógicos que superen al que defienden.

En este sentido se realizarán actividades de grupo que favorezcan la discusión, la confrontación y la reflexión sobre experiencias matemáticas.

Al inicio del curso se aplicó una prueba inicial en cada uno de los tres diferentes niveles (1º ESO, 2º ESO y 1º de Bachillerato) para evaluar los conocimientos previos de los alumnos con el fin de configurar los equipos de trabajo. Las pruebas pueden verse en los ANEXOS I, II y III y los resultados en el ANEXO IV.

Parece conveniente aclarar que todas las pruebas utilizadas en esta investigación fueron pasadas y evaluadas en exclusiva por el que escribe estas páginas.

Así, los estudiantes se adscribieron a un grupo en función de los resultados obtenidos en dicha prueba inicial y de la observación sistemática llevada a cabo por el profesor de la actitud hacia las matemáticas de los alumnos durante las dos primeras semanas del curso académico, formando pequeños grupos de 3 o 4 alumnos, heterogéneos en cuanto a rendimiento académico (mezclando alumnos de distintos niveles cognitivos) y habilidad (variabilidad moderada, respetando al máximo el concepto de heterogeneidad media). Para la formación de dichos grupos también se buscó la heterogeneidad en cuanto el sexo y etnia del grupo aula.

Los grupos de la asignatura de Matemáticas 1º ESO estaban constituidos por 8 equipos (con n = 3 ó 4), los de Matemáticas 2º ESO por 7 equipos (con n = 4), y los de Matemáticas I de 1º Bachillerato por 4 equipos (con n= 4). La distribución de los alumnos en los diferentes grupos se puede ver en el ANEXO V.

Las actividades se han llevado a cabo durante el curso académico 2014-2015 y los contenidos responden al programa que emana del currículum oficial de los distintos cursos a los que se aplica la experiencia. Dichos contenidos vienen divididos, en cada nivel, en distintas unidades didácticas (ANEXOS I, II y III).

En primer lugar, el profesor presentó cada unidad didáctica exponiendo el proceso académico y social a seguir. Los objetivos sociales (Serrano, González-Herrero y Pons, 2008) son los siguientes:

- Respeto al trabajo de los compañeros.
- Cumplimiento de las indicaciones para la realización de una actividad de grupo.
- Participar en la gestión del grupo.
- Asumir la responsabilidad inherente a la condición de miembro del grupo.
- Responder las demandas de ayuda formuladas por otros miembros del grupo, aclarando sus dudas mediante explicaciones conducentes a la comprensión del proceso implicado en la resolución de la cuestión.
- Respetar el nivel de logro de los compañeros de equipo, valorando su contribución al producto del grupo.
- Participar en la discusión y aclaración de los conceptos implicados en la tarea, comprobando que todos los miembros del grupo han superado sus dificultades.
- Pedir ayuda siempre que sea necesario.
- Responder siempre a las demandas de ayuda.
- Implicarse al máximo de sus capacidades en las reelaboraciones grupales.

Se comenzó cada unidad explicando brevemente a la clase los puntos fundamentales del tema que iba a ser tratado posteriormente en profundidad, y que, para lograr la máxima eficacia en todos los aspectos, era necesario que cada alumno colaborase y ayudase a sus compañeros de grupo.

Se les explica también a los alumnos los criterios de evaluación y de calificación:

En cada evaluación se han distribuido los contenidos en tres unidades didácticas, al final de cada unidad didáctica se realiza un examen de grupo, siendo valorado cada uno de estos exámenes con el 10% de la nota final de la evaluación. Al finalizar estas tres unidades didácticas se realizará un examen individual sobre los contenidos de estos tres temas, suponiendo este examen global el 70% de la nota de la evaluación. Por tanto, a lo largo del curso académico se realizaron nueve pruebas de grupo y tres individuales (ANEXOS I, II y III). En cada una de ellas se evaluó tanto el conocimiento declarativo como el conocimiento procedimental en una escala de intervalo de 0 a 10. Estos exámenes sirvieron de medida para la variable endógena Rendimiento Académico. Los resultados finales obtenidos por los alumnos pueden verse en el ANEXO VI.

En una primera fase el profesor inició la exposición de cada unidad didáctica, aclarando los aspectos fundamentales para su comprensión y para la actualización de los conocimientos que sustentan la realización de diversas actividades encaminadas a que los alumnos adquieran los conocimientos de dicha unidad.

Se partió siempre de situaciones comunes, cotidianas y concretas, que pudiesen servir de motivación a los alumnos y alumnas, poniendo especial énfasis en los enunciados de problemas que tratasen sobre temas transversales, para posteriormente generalizarlas y abstraerlas de la realidad.

Pensando en la diversidad de niveles matemáticos de los alumnos, siempre que fue necesario se recordaron los conceptos de cursos pasados con el fin de que el alumno fuese el verdadero motor del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Las clases comenzaron resolviendo las dudas planteadas al estudiar lo tratado el día anterior. Dedicando el grueso de la sesión a avanzar en el temario, compaginando nuevos conceptos con ejercicios sobre ellos, y dejando los últimos minutos para profundizar sobre los conceptos estudiados.

Una vez que el profesor introduce un nuevo concepto y que ha comprobado su comprensión, el grupo se reúne para realizar una serie de actividades propuestas por el profesor.

Dichas actividades son necesarias para conseguir el desarrollo de las capacidades programadas y será el profesor el que establecerá el criterio de clasificación y puesta en funcionamiento de las mismas, dentro de las actividades que se les propuso a los alumnos podemos distinguir de varios tipos:

De introducción-motivación, se realizarán en la primera sesión de trabajo. Se dirigirán a promover el interés del alumno intentando conectar con sus intereses.

De desarrollo de los propios contenidos, encaminadas a adquirir los conocimientos programados.

Una vez realizadas las exposiciones precisas, se pasó a *actividades de descubrimiento dirigido*, donde se plantearon problemas sencillos sobre los contenidos, que permitieron extraer las primeras conclusiones y se fue aumentando la dificultad progresivamente.

Son también actividades de desarrollo las *actividades de tipo comprobativo* consistentes en solicitar a los alumnos que verifiquen la exactitud de un resultado, conclusión o procedimiento.

Concluidas las explicaciones, se realizaron *actividades de consolidación*, solicitando a los alumnos que elaboren cuadros sinópticos y esquemas, lo que permitió comprobar el estado del proceso de aprendizaje.

De ampliación, en algunos casos permiten llegar a niveles de conocimiento superiores al exigido, pero que no son imprescindibles para el proceso de enseñanza.

De recuperación, dirigidas a alumnos que tienen dificultades para alcanzar los objetivos previstos para el tema o unidad didáctica.

Cada alumno debe resolver individualmente las actividades planteadas, para ello cuenta tanto con la ayuda de sus compañeros de grupo como con la ayuda del profesor.

En este instante el profesor recuerda a los alumnos que deben pedir ayuda en todo momento que la necesiten y que es responsabilidad de sus compañeros de grupo resolverle sus dudas lo mejor posible. Para reforzar dicha responsabilidad se les hace ver que su esfuerzo será recompensado en su calificación final. Así, se establece en el grupo una relación de tutoría centrada en el intercambio de información ante un tema concreto y la puesta en marcha de un plan conjunto para la resolución de la tarea. Sin olvidar que los alumnos dentro de un mismo grupo presentaban niveles de habilidad diferentes dentro de una variabilidad relativa cercana. Aunque el rol de los alumnos dentro el grupo es siempre jerárquicamente igual.

Del mismo modo se insistió que el proceso de interacción llevado a cabo en cada grupo para resolver las actividades tiene que ser un proceso en el que cada miembro del grupo acabe siendo capaz de resolver por sí mismo las actividades propuestas, siempre de una manera razonada y nunca mecánica.

Mientras los alumnos realizaron dichas actividades, el profesor vigilo sistemáticamente el trabajo en grupo, prestando especial atención tanto al reparto y correcto desempeño de roles como a las transacciones comunicativas producidas en la interacción de los componentes del equipo para solucionar los problemas propuestos; efectuando cuando fue necesario observaciones tanto en referencia al grupo como a cada uno de sus miembros. Dichas observaciones fueron siempre en términos positivos y se realizaron en el momento de detectarse su necesidad. En las primeras unidades didácticas del curso académico se produjeron un mayor número de intervenciones en el nivel de 1º ESO, debidas en su mayor parte a las necesidades sociales y académicas propias del comienzo de una nueva etapa formativa (estos alumnos acaban de empezar sus estudios en Secundaria) así como de la diversidad de su procedencia. Por otra parte, en todos los niveles objeto de la investigación se observó inexperiencia en situaciones cooperativas. Estas observaciones de las conductas de interactividad grupal que se presentaron de manera espontánea durante el trabajo cooperativo quedaron registradas en todo momento por el profesor en la ficha de seguimiento del alumno (véase ANEXO VII). Cada grupo fue observado de forma directa al menos una vez en cada sesión.

Una vez que todos los alumnos finalizan la tarea, se procedió a su corrección.

Si algún alumno ha tenido errores, deberá con la ayuda de sus compañeros de grupo, y del profesor si fuese necesario, rectificar dichos errores y entender el porqué de ellos de forma que se asegure no volver a cometerlos.

Tras ésto, y antes del examen, los alumnos realizaron, al final de cada unidad didáctica, un test de autoevaluación (véase ANEXO VIII), con el fin de evaluar así el proceso de enseñanza de dicho tema.

Por último, al final de cada unidad didáctica, se realizó una prueba de grupo con cuestiones parecidas a las realizadas en el seno del grupo. A pesar de que la interacción dentro del grupo se hace en relación de tutoría entre el alumno que solicita la ayuda y el que la recibe, cada alumno es responsable de la correcta resolución de las preguntas planteadas en el examen. En la gestión del grupo todos colaboran por igual y no se establece división del trabajo entre los miembros del grupo, debiéndose entregar al profesor una única hoja de examen con los nombres de los integrantes del grupo. En caso de conflicto social o académico el profesor intervendrá para orientar su solución.

La siguiente sesión a la del examen grupal se dedicó a la autoevaluación formativa grupal de dicho examen. Con la consiguiente reflexión sobre las respuestas acertadas, así como del porqué de los errores cometidos, procediendo a la rectificación de éstos en su cuaderno de clase. El profesor reviso dicha autoevaluación del grupo y puntuó dichos exámenes.

Los recursos utilizados a lo largo del curso fueron principalmente el libro de texto, transparencias, fotocopias, calculadora y ordenador ya sea para buscar información en internet como para trabajar con software propios matemáticos como el Derive o Excel. Su utilización en el seno del grupo, respondió siempre a un criterio de efectividad marcado por la secuencia de los contenidos que integran cada unidad: comprensión conceptual y procedimental, consolidación de conocimientos y aplicación de los conocimientos a la resolución de problemas de la vida real.

Las clases se impartieron en el espacio-aula distribuyendo a los alumnos en grupos, agrupando las mesas de la manera más favorable para la exposición del profesor a toda la clase con el fin de facilitar la observación tanto de los alumnos como la del profesor que ha de realizar sobre el trabajo de sus alumnos, para la posterior evaluación. Siempre que fue posible se llevó a los alumnos al aula de ordenadores para tratar contenidos correspondientes a la unidad que se estaba estudiando, utilizando un ordenador por grupo.

La observación del profesor se produjo durante el desarrollo de las actividades propuestas, del examen grupal y de la autoevaluación de ésta.

Al final del curso académico el profesor elaboró, a partir de las notas de la ficha de seguimiento del alumno, dos fichas de observación que permitieran medir las variables observables del modelo, recogiendo las conductas presentadas por los alumnos en el trabajo cooperativo en el seno de su grupo durante el curso académico. El primer cuestionario hace referencia al constructo llamado “*Controversia cooperativa*" (F_1) (véase ANEXO IX), y el siguiente cuestionario se refería al constructo denominado “Ayuda” (F_2) (véase ANEXO X).

El protocolo de observación sistemática quedó establecido de acuerdo con una escala compuesta por reactivos tipo Likert, que se valoraron conforme a una escala ordinal de 1 a 10 donde los valores equivalían a un porcentaje de frecuencia en el cual 1 supone la peor valoración y 10 la mejor:

10 $\longrightarrow$ Siempre (más del 90 % de veces)

1 $\longrightarrow$ Nunca (menos del 10 % de veces)

Estas conductas fueron extraídas del artículo “Desarrollo y validación de un instrumento para analizar el parámetro de mutualidad” (Pons, et al. 2012), dedicado al análisis del parámetro de mutualidad.

Desde la hipótesis de la interdependencia Hooper ya había demostrado que:

> cuando la mutualidad es alta, la interacción entre los estudiantes es amplia y dinámica y se genera un ambiente propicio para que se produzca un aumento del conocimiento y de la comprensión. En consecuencia, los grupos que presentan un alto nivel de mutualidad proporcionan ambientes de aprendizaje más productivos (Hooper, 1992).

En este sentido, Selznik (1996) y Schwier (1999) identificaron diez elementos paramétricos que caracterizan a una Comunidad de Aprendizaje (historia, identidad, mutualidad, reciprocidad, pluralidad, autonomía, participación, integración, orientación hacia metas, tecnología y aprendizaje) concluyendo que el parámetro de mutualidad es el más relevante para su desarrollo efectivo por integrar elementos de comunicación, interdependencia y reciprocidad.

Nuestra investigación se centra en los elementos que intervienen en el parámetro de mutualidad establecidos en los siguientes atributos:

Atributos para medir la variable endógena “*Controversia cooperativa*":

- Formulación de los puntos de vista propios:

  Para la consecución de dicho atributo es necesario tener conciencia del propio conocimiento y saber expresarlo.

- Orientación hacia el otro:

  El individuo debe poner en marcha las estrategias y recursos adecuados para asegurarse de que el otro entiende sus argumentos.

Atributos para medir la variable endógena “*Ayuda*”:

- Obtención de conductas de ayuda complejas:

  La ayuda prestada debe adecuarse a la demanda realizada.

- Producción de conductas de ayuda directas:

  La ayuda prestada debe aplicarse de manera efectiva a la solución del problema.

El primer atributo, *formulación de los puntos de vista propios*, supone la toma de conciencia del propio conocimiento y la necesidad de expresarlo de manera explícita. Como mecanismo de aprendizaje en la interacción entre iguales, debe su importancia al hecho de que, para hacerlo, se requiere aclarar, profundizar y reorganizar los propios conocimientos detectando y resolviendo eventuales lagunas e imprecisiones (Webb, 1991).

El segundo, *orientación hacia el otro*, obedece a lo que Cazden (1991) denominó “discurso como relación con un auditorio” y supone beneficios en la resolución de una tarea cuando los estudiantes tratan de que sus compañeros comprendan sus argumentos.

El tercero y el cuarto, *obtención de conductas de ayuda complejas y producción de conductas de ayuda directas*, hacen referencia al ajuste de la ayuda. Webb (1991) elaboró conclusiones particularmente esclarecedoras mostrando que, durante el trabajo en pequeños grupos, los estudiantes que demandaron ayuda y la recibieron mejoraron su rendimiento individual posterior, siempre y cuando la ayuda recibida cumpliera dos condiciones: Adecuarse a la demanda explícita o implícitamente realizada y aplicarse de manera efectiva a la solución del problema o la tarea. Además de ofrecer y recibir ayuda de manera mutua, los estudiantes pueden, en situaciones de cooperación, construir conjuntamente conocimientos a lo largo de la propia interactividad.

La conformación de los factores con sus respectivas categorías se presenta a continuación:

Factor 1: Controversia cooperativa

En referencia a la formulación de los puntos de vista propios:

- Expone su comprensión de la tarea (enfoque, proceso, producto).
- Justifica su comprensión de la tarea (enfoque, proceso, producto).
- Justifica su valoración de las actuaciones propias y ajenas.

En referencia a la orientación hacia el otro:

- Ofrece ayuda y orientación sin que se la pidan.
- Respeta turnos de intervención.
- Asume su responsabilidad en el progreso grupal.

Factor 2: Ayuda

En referencia a la obtención de conductas de ayuda complejas:

- Da ayuda sobre el producto (presentación, estructura).
- Da ayuda sobre el contenido (conceptos, perspectivas de interpretación).
- Da ayuda sobre el proceso de realización de la tarea (estrategias y recursos).

En referencia a la producción de conductas de ayuda directas:

- Ofrece y permite la exposición completa de la demanda.
- Pide sugerencias y explicaciones sobre los distintos aspectos de la demanda.
- Ofrece sugerencias y explicaciones sobre los distintos aspectos de la demanda.

Las fichas de observación con los resultados en la escala Likert obtenidos por cada alumno en las distintas categorías puede verse en el Anexo XI.

4. Análisis de los datos

Tras haber descrito el contenido de la matriz de datos original, se procede, en primer lugar, a comprobar que el modelo está identificado, tras esto al análisis descriptivo de los datos de las variables observables, y posteriormente, se pondrá a prueba el modelo global propuesto, recurriendo al análisis de modelos ecuaciones estructurales con el programa EQS versión 6.1, para lo cual se utilizará el método de estimación de máxima verosimilitud (ML). Este programa supone una aproximación general matemática y estadística al análisis de sistemas de ecuaciones estructurales lineales.

Por último, introduciremos los cambios convenientes en el modelo, presentando a continuación un modelo corregido que mejorara al anterior.

4.1. Identificación del modelo

Veamos ahora si el modelo está identificado para decidir si puede ser objeto de análisis.

El número de elementos de la matriz de covarianzas viene dado por:

$$N = \frac{m(m+1)}{2} = \frac{14x15}{2} = 105$$

donde

m= nº de variables observables.

Por otra parte, el número de parámetros a estimar es p=32.

Por tanto, p < N lo que indica que se trata de un modelo sobreidentificado y por tanto podemos estimar dicho modelo.

A continuación, y para facilitar la comprensión de la estructura del modelo de ecuaciones estructurales, se presenta en la Figura 13 el Modelo Inicial con el arranca el análisis causal con ecuaciones estructurales

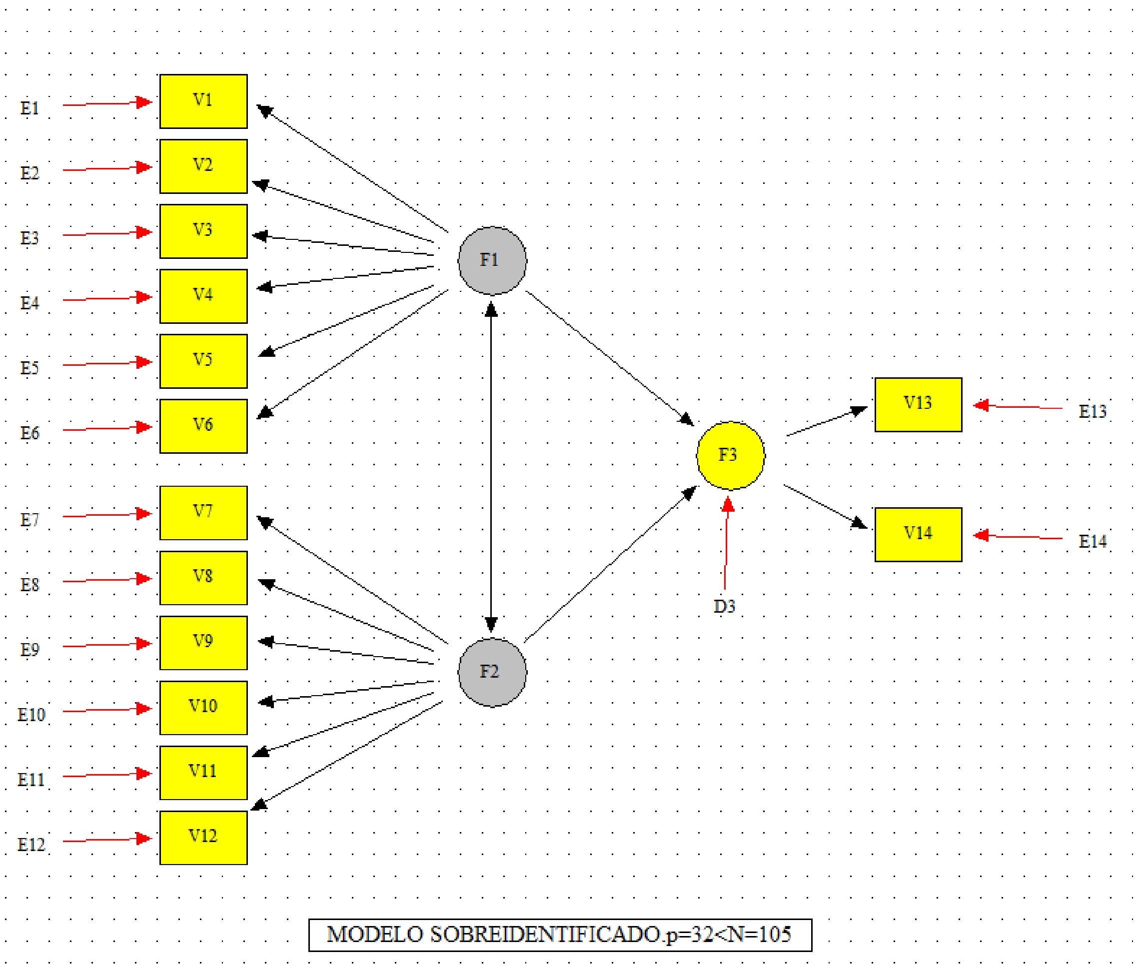


Figura 13. Gráfico del Modelo Inicial

La Figura 13 muestra que el modelo de ecuaciones estructurales con el que se inicia el estudio es de tipo recursivo, puesto que incluye sólo relaciones causales unidireccionales.

4.2. Recogida y preparación de datos

El problema de los *casos perdidos* se subsano llamando a los alumnos a los que les faltaban pruebas individuales por hacer, que por una u otra razón no pudieron realizarlas (habitualmente por faltas de asistencia a clase), para que efectuaran dichas pruebas individuales. Cuando se trataba de pruebas de grupo, se valoró con la calificación obtenida por el grupo del que formaba parte. No obstante, cabe destacar que el número de casos perdidos no excedió el 10% en ninguna prueba.

Veamos en primer lugar que se cumplen los **supuestos básicos** necesarios para una correcta realización del análisis de la muestra mediante un modelo de ecuaciones estructurales.

- Los indicadores que miden el constructo "*Rendimiento matemático*" son variables continuas, sin embargo, las variables observables de los factores "*Controversia cooperativa*" y "*Ayuda*" son variables discretas, aunque se puede considerar que la exigencia del nivel de medida de estas variables se cumple, ya que la escala de medición de 1 a 10 se considera lo suficientemente amplia (el número de valores de cada variable es igual a 10 y se considera necesario que las variables observables o indicadoras sean **variables continuas** o, excepcionalmente ordinales con al menos 4 niveles).

- Por otra parte, para estudiar la **normalidad univariable** de los datos recurrimos al estudio de los principales estadísticos descriptivos de las 14 variables observables que forman el modelo de ecuaciones estructurales inicial. La Tabla 4 recoge dichos estadísticos descriptivos.

Tabla 4.

Estadísticos descriptivos de las variables observables

VARIABLES	CASOS	MEDIA	DESVIACIÓN TIPICA	ASIMETRÍA	CURTOSIS
V_1	74	4.8378	2.5697	0.0202	-1.2791
V_2	74	4.9595	2.3782	0.0546	-1.3237
V_3	74	5.7297	2.0020	-0.0366	-0.6123
V_4	74	5.5946	2.1576	0.0470	-1.2556
V_5	74	6.6892	2.2264	-0.3017	-0.9437
V_6	74	4.9459	2.7343	-0.0685	-1.2594
V_7	74	5.4595	1.9316	0.3088	-0.639
V_8	74	4.4324	2.5912	0.4250	-0.924
V_9	74	4.7162	2.5563	0.4531	-0.8463
V_{10}	74	4.3243	2.6072	0.3787	-1.0914
V_{11}	74	5.3108	2.2691	0.3546	-0.6264
V_{12}	74	5.0946	1.5186	0.2409	0.6476
V_{13}	74	5.3000	2.3821	-0.1075	-0.8219
V_{14}	74	5.5676	2.4237	-0.1612	-1.1862

Los resultados de la Tabla 4 revelan la inexistencia de problemas de asimetría y curtosis en las variables observadas ya que no existen valores de asimetría por encima de |3.00| ni de curtosis por encima de |8.00|. Lo que indica la existencia de normalidad univariable (o al menos, que la violación de este supuesto no es preocupante).

- En cuanto a la **normalidad multivariable**, el coeficiente de Mardia tiene un valor de 3.820, el cual está fuera del intervalo de (-3,+3) establecido como intervalo de referencia para la aceptación, aunque por escaso margen, y por tanto podemos afirmar que no existe normalidad multivariada de los datos, pero a su vez que no es preocupante. De cualquier modo, debido a que la muestra utilizada es pequeña, debemos de asegurarnos de este hecho mediante el test Bonett-Woodward-Randall (que complementa al coeficiente de Mardia en modelos con un tamaño muestral pequeño). Efectivamente, el programa EQS nos indica que, para nuestro conjunto de datos, este test confirma que existe un exceso significante de curtosis multivariable a nivel del 0.05%. En consecuencia, resulta aconsejable utilizar el método de estimación por máxima verosimilitud robusto en el análisis de los datos.

- También es necesario estudiar las **relaciones de correlación** que se puedan establecer entre las variables observables. La Tabla 5 nos muestra la matriz de correlaciones de las variables observadas junto con sus correspondientes medias y desviaciones típicas.

Tabla 5

Matriz de correlaciones, medias y desviaciones típicas de las variables observadas

INDICADORES	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}
V_1	1.000													
V_2	0.9179	1.000												
V_3	0.7822	0.7831	1.000											
V_4	0.8330	0.8057	0.8400	1.000										
V_5	0.2185	0.2951	0.4573	0.3042	1.000									
V_6	0.8566	0.8318	0.7705	0.8693	0.2650	1.000								
V_7	0.6638	0.6721	0.6772	0.6304	0.5051	0.7102	1.000							
V_8	0.8068	0.7853	0.6275	0.7252	0.3252	0.7825	0.8465	1.000						
V_9	0.8041	0.7822	0.6513	0.7066	0.3381	0.7641	0.8230	0.9370	1.000					
V_{10}	0.7911	0.7798	0.5813	0.6861	0.2111	0.7903	0.6772	0.8326	0.8074	1.000				
V_{11}	0.7535	0.7005	0.5766	0.6724	0.2417	0.6762	0.6671	0.7736	0.7263	0.7075	1.000			
V_{12}	0.4007	0.3652	0.4411	0.3631	0.1992	0.4499	0.3586	0.3480	0.3246	0.3481	0.4088	1.000		
V_{13}	0.8204	0.7948	0.6849	0.6936	0.3156	0.7688	0.7082	0.7718	0.7542	0.7868	0.8547	0.5398	1.000	
V_{14}	0.7700	0.7559	0.6535	0.6666	0.2999	0.7440	0.6640	0.7242	0.6861	0.7625	0.7839	0.4823	0.8741	1.000
DESVIACIÓN TIPICA	2.5697	2.3782	2.0020	2.1576	2.2264	2.7343	1.9316	2.5912	2.5563	2.6072	2.2691	1.5186	2.3821	2.4237
MEDIA	4.8378	4.9595	5.7297	5.5946	6.6892	4.9459	5.4595	4.4324	4.7162	4.3243	5.3108	5.0946	5.3000	5.5676

• Fijándonos en los coeficientes de correlación de Pearson comprobamos la existencia de una importante estructura de correlación entre los indicadores; más concretamente, vemos que las correlaciones son más grandes dentro de cada grupo de variables observables; es decir, se producen correlaciones entre sí más altas entre los indicadores $(V_1, V_2, V_3, V_4, V_6)$ que construyen el constructo "*Controversia cooperativa*" (todas a excepción de V_5), todos los indicadores $(V_7, V_8, V_9, V_{10}, V_{11})$ referentes a la variable "*Ayuda*" menos V_{12}, y los referentes a la variable "*Rendimiento académico*" (V_{13}, V_{14}). Por tanto, se comprueba la existencia de una estructura de correlación compleja ente las variables observables, lo cual a su vez hace que sea pertinente pensar en el diseño del modelo de ecuaciones estructurales propuesto. Las correlaciones nos ayudan a interpretar los datos, ya que, aunque todas las variables observables toman valores de 1 a 10 o de 0 a 10, las doce primeras variables (las que miden los constructos "*Controversia cooperativa*" y "*Ayuda*") son discretas ya que toman valores puntuales en una escala Likert, mientras que las dos variables que miden la variable latente "*Rendimiento Académico*" son continuas, ya que pueden tomar cualquier valor en el intervalo (0,10).

• **El tamaño de la muestra** es pequeño, pero lo suficientemente grande para obtener resultados fiables utilizando el método de máxima verosimilitud.

• Aunque **el procedimiento utilizado no es aleatorio**, podemos considerar que la forma de escoger la muestra si tiene carácter aleatorio en el sentido que está compuesta por los alumnos de los cursos a los que un determinado profesor da clase en un curso académico, y por tanto no proviene de un fenómeno determinista.

4.3. Fiabilidad de los datos

Para el estudio de la fiabilidad de los datos analizamos el coeficiente de consistencia Alfa de Cronbach, ya definido anteriormente.

En la Tabla 6, podemos observar como los valores de este índice oscilan entre 0.919 y 0.933, alcanzando el valor 0.919 si tenemos en cuenta la escala total.

Tabla 6

Valores del coeficiente Alfa de Cronbach en la escala total

Constructos	Nº variables observables	Alpha de Cronbach
F_1	6	0.919
F_2	6	0.920
F_3	2	0.933
Total	14	0.963

Todas las variables latentes ("*Controversia cooperativa*", "*Ayuda*" y "*Rendimiento Académico*") son medidas de forma fiable puesto que el coeficiente Alfa de Cronbach es superior al valor de referencia 0.8 fijado como mínimo aceptable. Es más, podemos incluso afirmar que los indicadores incluidos en el Modelo Inicial son muy representativos de los constructos que miden, puesto que los valores que nos arroja el estudio de dicho estimador están muy próximos a 1. En especial el valor del coeficiente asociado al constructo "*Rendimiento Académico*".

No obstante, si analizamos uno por uno los valores de cada variable observable, considerando todos los indicadores, podría resultar recomendable prescindir únicamente de las variables V_5 y V_{12} con el objetivo de que el valor del coeficiente Alfa de Cronbach se incremente, ya que para la variable V_5, pasa de 0.963 a 0.969 y para la variable V_{12} aumenta hasta 0.966.De todas formas en los dos casos dicho incremento es muy pequeño.

Tabla 7

Valores Alfa de Cronbach en la escala total (eliminando un indicador)

Indicador eliminado	**Alfa de Cronbach en la escala total**
V_1	0.958
V_2	0.958
V_3	0.960
V_4	0.959
V_5	0.969
V_6	0.958
V_7	0.960
V_8	0.958
V_9	0.958
V_{10}	0.959
V_{11}	0.960
V_{12}	0.966
V_{13}	0.958
V_{14}	0.946

Si estudiamos de la fiabilidad del constructo "*Controversia Cooperativa*", vemos que el coeficiente Alfa de Cronbach aumenta notablemente, pasando de 0.919 a 0.958, si quitamos la variable V_5.

Tabla 8

Valores Alfa de Cronbach en la escala del constructo F_1

Indicador eliminado	Alfa de Cronbach en la escala del constructo F1
V_1	0.889
V_2	0.888
V_3	0.894
V_4	0.890
V_5	0.958
V_6	0.891

Lo mismo ocurre en la variable latente "*Ayuda*" si eliminamos la variable V_{12}, siendo el incremento para el índice Alfa de Cronbach de 0.920 a 0.945.

Tabla 9

Valores Alfa de Cronbach en la escala del constructo F_2

Indicador eliminado	Alfa de Cronbach en la escala del constructo F2
V_7	0.901
V_8	0.881
V_9	0.887
V_{10}	0.899
V_{11}	0.903
V_{12}	0.945

4.4. Estimación del Modelo Inicial.

A continuación analizaremos detenidamente tanto las relaciones de covariación como de regresión entre las variables del modelo de ecuaciones estructurales propuesto (Modelo Inicial); así como también los parámetros libres a estimar en dicho modelo.

Es oportuno comenzar, en primer lugar, indicando que el método de estimación utilizado fue el método de máxima verosimilitud (ML), por ser el que mejor resultados produce para muestras pequeñas; y por violarse la condición de normalidad multivariable, utilizaremos la extensión de dicho método para contrastes robustos.

Además, éste es el método de estimación de parámetros utilizado por defecto en el programa EQS.

Los parámetros (V_1, F_1), (V_7, F_2) y (V_{13}, F_3) se fijan a 1 para dar estabilidad al modelo (este requisito es necesario en EQS). De esta forma, conseguimos, además, fijar la escala de las variables latentes a la de dichos indicadores, facilitando así la interpretación de las saturaciones estandarizadas. Como vemos en la Figura 14 el hecho de que estos parámetros sean fijos se indica mediante una fecha de color rojo.

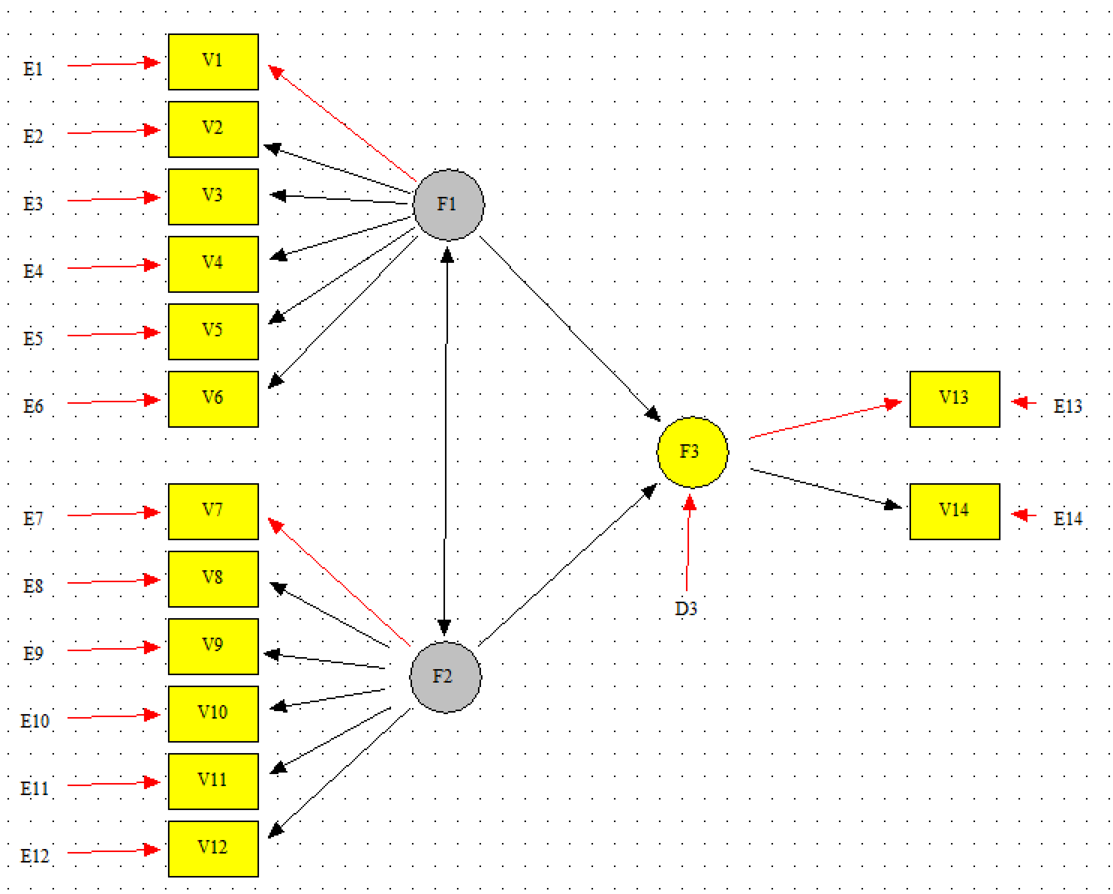


Figura 14. Gráfico del Modelo Inicial

El Modelo Inicial, representado en el gráfico, está integrado por un total de diecisiete variables, de las cuales catorce variables son directamente observables, también llamadas indicadores, representadas a través de rectángulos y tres son variables latentes (variables no observadas directamente) representadas mediante círculos. Junto a ellas aparecen asociados los errores de medida y el de predicción de la variable endógena del modelo F_3.

El resumen de las iteraciones efectuadas por EQS contiene información de cada iteración (véase Tabla 10)

Tabla 10

Iteraciones EQS

ITERATIVE SUMMARY

ITERATION	PARAMETER ABS CHANGE	ALPHA	FUNCTION
1	1.474591	0.50000	8.01560
2	0.953794	0.50000	5.30307
3	0.475721	1.00000	2.89857
4	0.073780	1.00000	2.75897
5	0.027596	1.00000	2.72540
6	0.012768	1.00000	2.71932
7	0.004727	1.00000	2.71831
8	0.002101	1.00000	2.71815
9	0.000747	1.00000	2.71813

Las iteraciones convergen a pesar de que los dos primeros valores son malos. Podemos comprobar también como la convergencia es rápida (9 iteraciones solamente) y suave a partir de la tercera iteración (alfa es siempre 1).

En la Figura 15 aparecen las estimaciones de todos los parámetros del modelo; estimaciones que están estandarizadas para que la interpretación del modelo sea más sencilla.

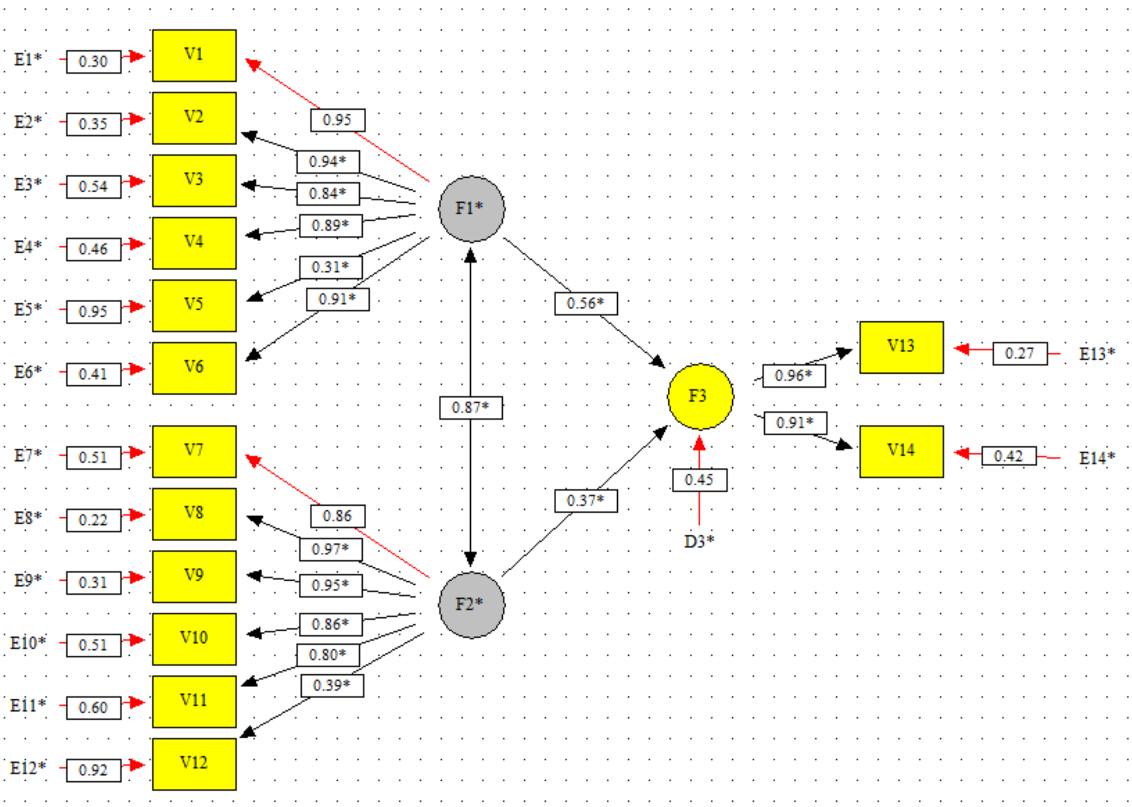


Figura 15. Gráfico del Modelo Inicial con estimaciones de los parámetros.

En la Figura 15 puede observarse la existencia o inexistencia de estimaciones erróneas.

- **Ningún valor de los coeficientes estandarizados es superior a 1**, por lo que en este sentido no es necesario aplicar ninguna medida correctora.

- Los errores típicos no son muy bajos y tampoco muy elevados, a excepción de los asociados a las variables V_5 y V_{12} .

Llegados a este punto, debemos estudiar el ajuste del modelo de medida, así como las distintas relaciones que han sido incluidas en el Modelo Inicial, a partir siempre de los coeficientes estimados por el método de máxima verosimilitud robusto para los parámetros del modelo, los cuales están incluidos en el gráfico anterior.

Los coeficientes reflejados sobre las flechas que van desde las variables latentes hacia las variables observables expresan la "*carga factorial*" de los indicadores en el constructo común a dichas variables observables. De igual modo ocurre con los valores que aparecen junto a las flechas que van de las variables latentes exógenas a la variable latente endógena.

Es decir, indican el cambio en unidades de desviación típica (ya que el coeficiente esta estandarizado) que se produce en la variable a la que apunta la fecha por cada unidad de cambio en la variable de la que sale, manteniendo las demás variables constantes.

Esto permite comparar la influencia de los indicadores en los constructos y de las variables exógenas en la variable endógena del modelo, aunque, por otra parte, al estar estandarizados los coeficientes nos dificultaría la posible comparación posterior con otro modelo similar sobre otra población (ya que dependen de las desviaciones típicas de las variables observables en distintas muestras).

Los coeficientes estandarizados del modelo de medida son, en general, altos. El coeficiente más elevado (0.97) se da entre la variable latente exógena "*Ayuda*" y el indicador "*Da ayuda sobre el contenido (conceptos, perspectivas de interpretación)*" y el más bajo (0.31) entre la variable latente exógena "*Controversia Cooperativa*" y el indicador "*Respeta turnos de intervención*".

Respecto al modelo estructura, observamos que la variable "*Controversia cooperativa*" tiene mayor peso (0.56) que la variable "*Ayuda*" (0.37) sobre la variable endógena del modelo "*Rendimiento académico*".

Por tanto, se cumplen las ecuaciones:

$$V_1 = 0.95F_1 + 0.30E_1$$

$$V_2 = 0.94F_1 + 0.35E_2$$

$$V_3 = 0.84F_1 + 0.54E_3$$

$$V_4 = 0.89F_1 + 0.46E_4$$

$$V_5 = 0.31F_1 + 0.95E_5$$

$$V_6 = 0.91F_1 + 0.41E_6$$

$$V_7 = 0.86F_2 + 0.51E_7$$

$$V_8 = 0.97F_2 + 0.22E_8$$

$$V_9 = 0.95F_2 + 0.31E_9$$

$$V_{10} = 0.86F_2 + 0.51E_{10}$$

$$V_{11} = 0.80F_2 + 0.60E_{11}$$

$$V_{12} = 0.39F_2 + 0.92E_{12}$$

$$V_{13} = 0.96F_3 + 0.27E_{13}$$

$$V_{14} = 0.91F_3 + 0.42E_{14}$$

$$F_3 = 0.56F_1 + 0.37F_2 + 0.45D_3$$

La única correlación considerada en el modelo (representada mediante una flecha bidireccional) implica a las dos variables latentes exógenas: "*Controversia cooperativa*" y "*Ayuda*". Su valor es positivo y alto: 0.87.

Para el estudio de la significatividad de los parámetros, utilizamos la Tabla 11, obtenida del análisis realizado con el programa EQS. En ella se incluyen las estimaciones de los parámetros del modelo (coeficientes no estandarizados), con los errores típicos (S.E "*Standard Error*") y las razones críticas (C.R. "*Critical Ratio*").

Recuérdese que los coeficientes de los indicadores "*Expone su comprensión de la tarea (enfoque, proceso, producto)*" para la variable latente "*Controversia cooperativa*", "*Ayuda sobre el producto (presentación, estructura)*" para la variable latente "*Ayuda*" y "*Conocimiento declarativo*" para la variable latente "Rendimiento académico", fueron fijados a 1.000 para ayudar a la identificación del modelo y a la vez dotar de una escala a los tres constructos del modelo.

Tabla 11

Estimaciones de los parámetros

Parámetros estimados	Coeficiente	S. E	C.R
$V_1 \leftarrow F_1$	1.000		
$V_2 \leftarrow F_1$	0.909	0.053	17.125
$V_3 \leftarrow F_1$	0.687	0.059	11.728
$V_4 \leftarrow F_1$	0,783	0.056	13.913
$V_5 \leftarrow F_1$	0.285	0.103	2.767
$V_6 \leftarrow F_1$	1.016	0.067	15.178
$V_7 \leftarrow F_2$	1,000		
$V_8 \leftarrow F_2$	1.524	0.117	13.049
$V_9 \leftarrow F_2$	1.469	0.119	12.369
$V_{10} \leftarrow F_2$	1.350	0.136	9.947
$V_{11} \leftarrow F_2$	1.097	0.125	8.794
$V_{12} \leftarrow F_2$	0.353	0.103	3.414
$V_{13} \leftarrow F_3$	1.000		
$V_{14} \leftarrow F_3$	0.959	0.69	13.962
$F_3 \leftarrow F_1$	0.520	0.132	3.932
$F_3 \leftarrow F_2$	0.505	0.196	2.577

A la vista de los resultados contenidos en dicha tabla, se comprueba que todos los valores de las razones críticas son mayores que 1.96, por lo que, en consecuencia, todos los parámetros estimados son significativos para un nivel de significación de 0.05, e incluso son mayores que el valor 2.576 (para un nivel de significación de 0.01).

Por lo tanto, los parámetros no se pueden fijar a 0, ya que esto repercutiría en un peor ajuste del modelo.

La interpretación de los coeficientes no estandarizados es la misma que la de los coeficientes estandarizados descrita anteriormente, siendo la única diferencia que el cambio indicado esta medido en su unidad de medida original en lugar de en unidades de desviación típica. Podemos por tanto afirmar que las siguientes relaciones causales son ciertas:

$$V_1 = 1.000F_1 + 1.000E_1$$

$$V_2 = 0.909F_1 + 1.000E_2$$

$$V_3 = 0.687F_1 + 1.000E_3$$

$$V_4 = 0.783F_1 + 1.000E_4$$

$$V_5 = 0.285F_1 + 1.000E_5$$

$$V_6 = 1.016F_1 + 1.000E_6$$

$$V_7 = 1.000F_2 + 1.000E_7$$

$$V_8 = 1.524F_2 + 1.000E_8$$

$$V_9 = 1.469F_2 + 1.000E_9$$

$$V_{10} = 1.350F_2 + 1.000E_{10}$$

$$V_{11} = 1.097F_2 + 1.000E_{11}$$

$$V_{12} = 0.353F_2 + 1.000E_{12}$$

$$V_{13} = 1.000F_3 + 1.000E_{13}$$

$$V_{14} = 0.959F_3 + 1.000E_{14}$$

$$F_3 = 0.520F_1 + 0.505F_2 + 1.000D_3$$

En cuanto a las varianzas de los errores, también observamos en la Tabla 12 que además de ser no negativas son significativas.

Tabla 12

Varianzas de los errores

Variables error	Varianza	S.E	C.R
E_1	0.584	0.143	4,094
E_2	0.681	0.146	4.657
E_3	1.170	0.209	5.592
E_4	0.968	0.182	5.332
E_5	4.469	0.742	6.022
E_6	1.266	0.247	5.122
E_7	0.985	0.176	5.604
E_8	0.335	0.112	2.981
E_9	0.609	0.140	4.356
E_{10}	1.792	0.320	5.603
E_{11}	1.846	0.320	5.764
E_{12}	1.984	0.327	6.015
E_{13}	0.413	0.205	2.020
E_{14}	1.034	0.247	4.193
D_3	1.073	0.270	3.972

Ninguna de las varianzas de las variables exógenas ha sido fijada previamente a 1, ya que no fue necesario para la identificación del modelo. Además, se experimentó el fijarlas a 1 obteniéndose un modelo con un peor ajuste que el Modelo Inicial que está siendo objeto de estudio.

Los resultados obtenidos para las varianzas de las variables exógenas se muestran en la Tabla 13 y los de su covarianza en la Tabla 14.

Tabla 13

Varianzas de las variables exógenas

Variables	Varianza	S.E	C.R
F_1	6.020	1.094	5.504
F_2	2.746	0.599	4.582
D_3	1.073	0.270	3.972

Tabla 14

Covarianza de las variables exógenas

Variables	Covarianza	S.E	C.R
$F_1 \leftrightarrow F_2$	3.545	0.695	5.100

Los valores de las razones críticas nos indican que son significativas con un nivel de 0.01.

En cuanto a los casos atípicos, no detectamos ninguno ya que no observamos ningún residuo estandarizado elevado.

Tabla 15

Residuos estandarizados. Modelo Inicial

INDICADORES	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}
V_1	0.000													
V_2	0.220	0.000												
V_3	-0.021	-0.006	0.000											
V_4	-0.017	-0.029	0.091	0.000										
V_5	-0.081	0.001	0.193	0.025	0.000									
V_6	-0.014	-0.023	0.004	0.058	-0.021	0.000								
V_7	-0.051	-0.030	0.048	-0.035	0.270	0.028	0.000							
V_8	-0.005	-0.012	-0.088	-0.031	0.058	0.008	0.01	0.000						
V_9	0.011	0.003	-0.048	-0.032	0.078	0.007	0.006	0.009	0.000					
V_{10}	0.077	0.078	-0.048	0.020	-0.024	0.108	-0.059	-0.004	-0.010	0.000				
V_{11}	0.087	0.045	-0.011	0.051	0.023	0.040	-0.020	-0.007	-0.036	0.020	0.000			
V_{12}	0.080	0.050	0.159	0.064	0.094	0.144	0.028	-0.027	-0.042	0.015	0.100	0.000		
V_{13}	0.017	0.005	-0.023	-0.055	0.051	0.002	0.006	-0.026	-0.025	0.085	0.199	0.225	0.000	
V_{14}	0.012	0.012	-0.014	-0.04	0.051	0.021	0.002	-0.028	-0.048	0.101	0.166	0.185	0.000	0.000
Media de los valores absolutos de los residuos estandarizados = 0.0423														

El Programa EQS nos proporciona también los 20 mayores residuos, lo que nos facilita el análisis (véase Tabla 16).

Tabla 16

Residuos estandarizados. Modelo Inicial

LARGEST STANDARDIZED RESIDUALS:

NO.	PARAMETER	ESTIMATE	NO.	PARAMETER	ESTIMATE
1	V7, V5	0.270	11	V12, V11	0.100
2	V13, V12	0.225	12	V12, V5	0.094
3	V13, V11	0.199	13	V4, V3	0.091
4	V5, V3	0.193	14	V8, V3	-0.088
5	V14, V12	0.185	15	V11, V1	0.087
6	V14, V11	0.166	16	V13, V10	0.085
7	V12, V3	0.159	17	V5, V1	-0.081
8	V12, V6	0.144	18	V12, V1	0.080
9	V10, V6	0.108	19	V10, V2	0.078
10	V14, V10	0.101	20	V9, V5	0.078

Como podemos observar en la Tabla 16 todos los valores son menores que 2 y mayores que -2 por lo que se considera que no hay valores atípicos. Además, la media y en general todos los residuos estandarizados toman valores muy cercanos a 0, lo que indica un ajuste correcto.

En la Figura 16 se corrobora este hecho.

```
 DISTRIBUTION OF STANDARDIZED RESIDUALS

  ----------------------------------------
  !                                      !
60-                                      -
  !                                      !
  !                                      !
  !                                      !
  !                    *                 !              RANGE      FREQ PERCENT
45-                 *  *                 -
  !                 *  *                 !    1   -0.5  -  --         0   0.00%
  !                 *  *                 !    2   -0.4  -  -0.5       0   0.00%
  !                 *  *                 !    3   -0.3  -  -0.4       0   0.00%
  !                 *  *                 !    4   -0.2  -  -0.3       0   0.00%
30-                 *  *                 -    5   -0.1  -  -0.2       0   0.00%
  !                 *  *                 !    6    0.0  -  -0.1      46  43.81%
  !                 *  *                 !    7    0.1  -   0.0      48  45.71%
  !                 *  *                 !    8    0.2  -   0.1       9   8.57%
  !                 *  *                 !    9    0.3  -   0.2       2   1.90%
15-                 *  *                 -    A    0.4  -   0.3       0   0.00%
  !                 *  *                 !    B    0.5  -   0.4       0   0.00%
  !                 *  *  *              !    C     ++  -   0.5       0   0.00%
  !                 *  *  *              !    -------------------------------
  !                 *  *  *  *           !              TOTAL       105 100.00%
  ----------------------------------------
     1  2  3  4  5  6  7  8  9  A  B  C    EACH "*" REPRESENTS     3 RESIDUALS
```

Figura 16. Gráfico de la distribución de los residuos.

Para comprobar el ajuste de los modelos de medición y estructural, recurrimos a los valores de la varianza explicada en las variables observables por el constructo (R^2), que podemos entender como la fiabilidad de la medida (véase la Tabla 17).

Tabla 17

Coeficiente de determinación

VARIABLES	R-SQUARED
V_1	0.912
V_2	0.880
V_3	0.708
V_4	0.792
V_5	0.098
V_6	0.831
V_7	0.736
V_8	0,950
V_9	0.907
V_{10}	0.736
V_{11}	0.641
V_{12}	0.148
V_{13}	0.927
V_{14}	0.824
F_3	0.796

El indicador "*Da ayuda sobre el contenido (conceptos, perspectivas de interpretación)*" es el que tiene un mayor coeficiente de determinación con un valor de 0.95, lo que indica que el 95% de su variabilidad queda explicada por el factor “*Ayuda*”, siendo solamente el 5% la parte de variabilidad que quedaría sin explicar.

En general, las cargas factoriales del Modelo Inicial estimado por el método de máxima verosimilitud, tienen unos índices de fiabilidad aceptables en todos los casos quedando explicada al menos el 64 % de la proporción de varianza de los indicadores por el factor común, a excepción de en las variables V_5 y V_{12} cuyas proporciones de varianza son explicadas solamente un 1% por el constructo “*Controversia cooperativa*” y un 15% por el constructo “*Ayuda*” respectivamente.

La proximidad del valor de R^2 a 1 también nos indica que las correspondientes variables observables son un buen indicador del constructo al que miden (la relación es más fuerte cuanto más se acerca el valor de R^2 a 1).

El siguiente paso en el análisis de ajuste del modelo comienza comprobando que el Modelo Inicial se confirma, es decir, llevando a cabo la evaluación global del mismo, de forma que se pueda determinar en qué medida este Modelo Inicial reproduce adecuadamente las relaciones que existen en la matriz de covarianzas de los datos empíricos.

Dentro de las medidas absolutas de ajuste, con 74 grados de libertad y un valor de χ^2 de 198.424 tenemos un estadístico que tiene una probabilidad menor de 0.000, lo que quiere decir que tiene un valor estadísticamente significativo (p<.01).

Si atendemos únicamente a este valor deberíamos aceptar la hipótesis nula que sostiene que las matrices de covarianzas poblacional y muestral son distintas, y por tanto concluir que el modelo propuesto no ajustaría con los datos.

Ahora bien, este valor puede ser debido a que las variables observables de los constructos “*Controversia cooperativa*” y “Ayuda” no son estrictamente continuas, aunque hayan sido tratadas como tales, lo cual podría haber producido un valor de χ^2 sobrestimado ya que el método de máxima verosimilitud es muy sensible al incumplimiento de los supuestos de normalidad.

Para evitar el problema de normalidad debemos considerar el estadístico de Satorra–Bentler χ^2 scaled que nos proporciona el programa EQS mediante su contraste robusto, éste tiene un valor de 156.5097 (con 74 grados de libertad) también muy elevado con un p-value asociado de 0.000 que nos lleva igualmente al rechazo del ajuste de los datos del modelo.

No obstante, este valor de χ^2 también está influenciado por el tamaño de muestra, ya que la muestra estudiada no llega a 100 sujetos, y el estadístico χ^2 exige un tamaño muestral de entre 100 y 500 sujetos como hemos dicho anteriormente.

El programa EQS nos proporciona a través del método de máxima verosimilitud robusto el test χ^2 de Yuan-Bentler que extiende al test anterior, en el sentido de que es válido para muestras pequeñas (entre 60 y 120 sujetos). Desafortunadamente, el programa EQS nos indica que este valor no puede ser calculado para el Modelo Inicial, error que se debe a que la matriz de residuos del modelo podría ser singular.

Por este motivo debemos completar el valor de este índice de ajuste global con otros de los valores de los índices de ajuste.

La otra medida absoluta de ajuste que destacamos es la estandarización del valor del residuo cuadrático medio (SRMR) que arroja un resultado de 0.067; un valor que se encuentra dentro de los límites para considerar el ajuste del modelo "aceptable".

Esta medida es considerada, en nuestro caso más fiable que la anterior, pues es descriptiva y no le influye tan negativamente que el tamaño muestral sea pequeño.

Tabla 18

Medidas absolutas de ajuste. Modelo Inicial

Medidas absolutas de ajuste	**Modelo Inicial**	**Ajuste**
χ^2	p <.000	Mal ajuste
χ^2 scaled	p <.000	Mal ajuste
SRMR	0.067	Ajuste aceptable

Otro tipo de índices de ajuste del modelo, de los que ya hemos hablado en el apartado 4.2.2, son los **índices incrementales de ajuste**, tradicionalmente promovidos por Bentler (en el programa EQS). Este tipo de índices comparan el modelo implementado, en este caso el Modelo Inicial, con el modelo base o independiente, en el que no se define ninguna relación entre las variables del modelo obtenido. En otras palabras, comparan el modelo estimado con el modelo más sencillo posible, el cual se espera que tenga un mal ajuste sean cual sean los datos. Este modelo nos sirve de referencia porque es sinónimo de mal ajuste.

En la Tabla 19 podemos ver los valores de estos índices (los cuales se obtendrían aplicando las fórmulas que aparecen en el citado apartado):

Tabla 19

Índices incrementales de ajuste. Modelo Inicial

Índices de ajuste incremental	Modelo inicial	Ajuste
NFI	0.900	Ajuste aceptable
NNFI	0.931	Ajuste aceptable
IFI	0.945	Ajuste aceptable
CFI	0.944	Ajuste aceptable

Observamos que todos los índices incrementales presentados se consideran como aceptables al ser su valor mayor o igual que 0.90 pero menor que 0.95, todo ello apunta por tanto hacia un ajuste aceptable del modelo.

Hacemos notar que el valor del índice NFI, aunque está dentro de los márgenes de aceptabilidad, está en el límite del valor de referencia que marca un ajuste pobre. Sin embargo, los valores de los índices IFI y CFI están muy cercanos al valor de referencia para que el ajuste sea considerado bueno en lugar de aceptable.

En cuanto a las medidas de ajuste de parsimonia, en la Tabla 20 quedan indicados los valores de los índices AIC y CAIC que como podemos observar tienen para el Modelo Inicial valores alejados de los obtenidos para el Modelo de Independencia, lo que indica que el ajuste es aceptable.

Tabla 20

Índices de ajuste de parsimonia. Modelo Inicial

Índices de ajuste de parsimonia	Modelo Independencia	Modelo Inicial
AIC	1389.442	8.510
CAIC	1088.773	-235.991

Por otra parte, el valor del error de la media cuadrática residual de aproximación (RMSEA) es de 0.124 siendo (0.096, 0.149) el intervalo de confianza al 90%, lo cual indica que el ajuste no es bueno, aunque se puede deber a que el tamaño muestral es inferior a 100 y no se ajusta a la recomendación más habitual de que existan 10 veces más casos que variables observables (Jaccard y Wan, 1996), lo cual no ha sido posible debido a no disponer de tal número de sujetos para formar la muestra.

Una vez realizado el análisis del ajuste del modelo debemos decidir si es conveniente fijar alguno de los parámetros libres del modelo o por el contrario liberar alguno de los parámetros fijos, para ello utilizamos el Test Wald y el Test de los Multiplicadores de Lagrange.

El Test Wald está incluido en el programa EQS; los resultados obtenidos (Tabla 21) nos muestran que, desde un punto de vista estadístico, podríamos fijar a cero la covarianza de los factores F_2 y F_3 así como la varianza del error E_6, ya que la probabilidad es mayor de 0,05 y por tanto el test es no significativo, lo que quiere decir que si fijamos dichos valores el ajuste del modelo no empeoraría; para el resto de los valores el test es significativo ($p<.05$) y por tanto el cambio conllevaría una perdida sustancial del ajuste de los datos del modelo.

Ahora bien, en un modelo de ecuaciones estructurales con variables latentes no tiene sentido fijar las varianzas de los errores a cero. Por otra parte, el factor de correlación es casi significativo ($p=.088$).

Tabla 21

Resultados Test Wald

WALD TEST (FOR DROPPING PARAMETERS)
ROBUST INFORMATION MATRIX USED IN THIS WALD TEST
MULTIVARIATE WALD TEST BY APRIORI PROCESS

		CUMULATIVE MULTIVARIATE STATISTICS			UNIVARIATE INCREMENT	
STEP	PARAMETER	CHI-SQUARE	D.F.	PROBABILITY	CHI-SQUARE	PROBABILITY
1	F3,F2	2.903	1	0.088	2.903	0.088
2	E13,E13	8.885	2	0.012	5.983	0.014
3	V5,F1	15.233	3	0.002	6.347	0.012
4	V12,F2	26.843	4	0.000	11.610	0.001
5	E4,E4	38.888	5	0.000	12.045	0.001
6	E6,E6	42.339	6	0.000	3.452	0.063
7	E2,E2	48.137	7	0.000	5.798	0.016
8	E8,E8	54.354	8	0.000	6.216	0.013
9	E1,E1	82.283	9	0.000	27.929	0.000
10	E14,E14	115.564	10	0.000	33.282	0.000
11	E7,E7	149.020	11	0.000	33.456	0.000
12	E9,E9	184.982	12	0.000	35.962	0.000
13	E12,E12	221.696	13	0.000	36.714	0.000
14	E11,E11	244.443	14	0.000	22.748	0.000
15	D3,D3	266.986	15	0.000	22.543	0.000
16	E3,E3	318.330	16	0.000	51.344	0.000
17	E10,E10	373.905	17	0.000	55.575	0.000
18	E5,E5	431.809	18	0.000	57.904	0.000
19	V3,F1	567.220	19	0.000	135.411	0.000
20	F2,F2	675.531	20	0.000	108.310	0.000
21	F2,F1	819.157	21	0.000	143.626	0.000
22	F1,F1	872.908	22	0.000	53.751	0.000
23	V14,F3	1179.112	23	0.000	306.204	0.000
24	V11,F2	1445.065	24	0.000	265.953	0.000
25	F3,F1	1596.788	25	0.000	151.723	0.000
26	V4,F1	2104.506	26	0.000	507.717	0.000
27	V6,F1	2872.535	27	0.000	768.029	0.000
28	V9,F2	3261.714	28	0.000	389.179	0.000
29	V10,F2	3568.423	29	0.000	306.709	0.000
30	V2,F1	4268.267	30	0.000	699.844	0.000
31	V8,F2	5087.598	31	0.000	819.331	0.000

El W Test procede a una segunda etapa, en la cual hace un intento de encontrar parámetros libres adicionales que podrían no ser necesitados en el modelo. En este procedimiento (SIMULTANEOUS PROCCES) todos los parámetros libres son considerados.

Tabla 22

Resultados Test Wald (SIMULTANEOUS PROCCES)

```
MAXIMUM LIKELIHOOD SOLUTION (NORMAL DISTRIBUTION THEORY)
MULTIVARIATE WALD TEST BY SIMULTANEOUS PROCESS


      CUMULATIVE MULTIVARIATE STATISTICS           UNIVARIATE INCREMENT
      ----------------------------------           --------------------

STEP  PARAMETER   CHI-SQUARE  D.F.  PROBABILITY       CHI-SQUARE  PROBABILITY
---- ----------- ----------  ----  -----------       ----------  -----------


   ************
        NONE OF THE FREE PARAMETERS IS DROPPED IN THIS PROCESS.
```

El Test Wald no encuentra ningún parámetro que deba ser fijado,(véase Tabla 22) lo mismo que en los z-test de significación realizada anteriormente, que nos indicaban que todos los parámetros eran significativos con un nivel del 0.05 %.

Los resultados del test univariable LM se muestran en la Tabla 23.

Tabla 23

Resultados del test univariable LM

MAXIMUM LIKELIHOOD SOLUTION (NORMAL DISTRIBUTION THEORY)

LAGRANGE MULTIPLIER TEST (FOR ADDING PARAMETERS)

ORDERED UNIVARIATE TEST STATISTICS:

NO	CODE		PARAMETER	CHI-SQUARE	PROB.	HANCOCK 74 DF PROB.	PARAMETER CHANGE	STANDAR-DIZED CHANGE
1	2	20	V11,F3	26.857	0.000	1.000	0.794	0.153
2	2	20	V12,F3	13.954	0.000	1.000	0.574	0.165
3	2	20	V8,F3	9.304	0.002	1.000	-0.308	-0.052
4	2	20	V10,F3	9.287	0.002	1.000	0.469	0.078
5	2	12	V10,F1	6.310	0.012	1.000	0.383	0.060
6	2	12	V8,F1	4.690	0.030	1.000	-0.222	-0.035
7	2	20	V4,F3	4.623	0.032	1.000	-0.283	-0.057
8	2	12	V11,F1	4.329	0.037	1.000	0.316	0.057
9	2	12	V12,F1	4.077	0.043	1.000	0.307	0.082
10	2	12	V3,F2	4.045	0.044	1.000	-0.367	-0.111
11	2	20	V9,F3	3.888	0.049	1.000	-0.210	-0.036
12	2	12	V5,F2	2.088	0.148	1.000	0.489	0.133
13	2	20	V1,F3	1.506	0.220	1.000	0.152	0.026
14	2	12	V6,F2	1.173	0.279	1.000	0.219	0.048
15	2	12	V4,F2	1.080	0.299	1.000	-0.179	-0.050
16	2	20	V5,F3	1.076	0.300	1.000	0.269	0.053
17	2	20	V3,F3	0.736	0.391	1.000	-0.120	-0.026
18	2	12	V1,F2	0.582	0.446	1.000	0.123	0.029
19	2	12	V7,F1	0.378	0.539	1.000	-0.070	-0.015
20	2	12	V14,F2	0.238	0.626	1.000	-0.150	-0.037
21	2	12	V14,F1	0.238	0.626	1.000	0.154	0.026
22	2	12	V13,F1	0.238	0.626	1.000	-0.160	-0.027
23	2	12	V13,F2	0.238	0.626	1.000	0.156	0.040
24	2	20	V2,F3	0.186	0.666	1.000	0.053	0.010
25	2	20	V6,F3	0.173	0.678	1.000	0.064	0.010
26	2	12	V9,F1	0.095	0.758	1.000	-0.033	-0.005
27	2	12	V2,F2	0.027	0.870	1.000	0.026	0.007
28	2	20	V7,F3	0.009	0.926	1.000	0.011	0.002
29	2	0	V1,F1	0.000	1.000	1.000	0.000	0.000
30	2	0	V7,F2	0.000	1.000	1.000	0.000	0.000
31	2	0	V13,F3	0.000	1.000	1.000	0.000	0.000

Hay 31 parámetros fijos evaluados por el test univariable LM (véase Tabla 23), pequeños valores de probabilidad indican que el parámetro es significativo y que por tanto la restricción impuesta no es razonable y que el parámetro debería ser liberado.

Un cambio estandarizado de 0.000 implica que liberar el parámetro podría producir que el modelo dejase de estar identificado.

En nuestro modelo, 12 de los 31 parámetros evaluados por el LM test univariable son significativos ($p < .05$) por el criterio estándar (esto nos indica que, si dichos parámetros son liberados, o incluidos en el modelo, el ajuste de los datos mejoraría notablemente). Sin embargo, el test conservativo de Hancock (Hancock, 1999; Hancock, Lawrence, y Nevitt, 2000; Mao, Harring, y Hancock, 2015) nos dice que ningún parámetro debe ser liberado, pues produce todas las probabilidades mayores de 0.05.

Para estar seguros de nuestras conclusiones debemos fijarnos en el test multivariable LM (véase Tabla 24).

Tabla 24

Resultados del test multivariable LM

	CUMULATIVE MULTIVARIATE STATISTICS				UNIVARIATE INCREMENT			
							HANCOCK'S SEQUENTIAL	
STEP	PARAMETER	CHI-SQUARE	D.F.	PROB.	CHI-SQUARE	PROB.	D.F.	PROB.
1	V11,F3	26.857	1	0.000	26.857	0.000	74	1.000
2	V12,F3	41.517	2	0.000	14.660	0.000	73	1.000
3	V10,F3	54.045	3	0.000	12.528	0.000	72	1.000
4	V4,F3	58.668	4	0.000	4.623	0.032	71	1.000
5	V3,F2	63.150	5	0.000	4.482	0.034	70	1.000

El Test nos indica que solo 5 de las 12 relaciones causales consideradas anteriormente podrían ser ahora incluidas en el modelo.

El Test propone añadir cuatro efectos directos entre las variables observables V_4, V_{10}, V_{11}, V_{12} y el constructo F_3.

Incluso sin estos efectos directos, dichos indicadores afectan a F_3, pero solo a través de la variable mediadora:

$$F_1 \ (V_4 \rightarrow F_1 \rightarrow F_3)$$

$$F_2 \ (V_{10} \rightarrow F_2 \rightarrow F_3,\ V_{11} \rightarrow F_2 \rightarrow F_3 \ \text{ y } \ V_{12} \rightarrow F_2 \rightarrow F_3)$$

Por lo que, no parece conceptualmente significativo, incluir estos efectos directos aquí; además debemos tener en cuenta que el criterio de Hancock no nos aconseja añadirlos al modelo.

El test estándar nos indica también que es posible añadir un efecto directo entre el indicador V_3 y la variable latente F_2. Lo cual atribuimos a que cuando un alumno justifica su valoración de las actuaciones propias y ajenas está ayudando indirectamente a sus compañeros. Sin embargo, tomaremos la decisión de no incluir este efecto directo en el modelo apoyándonos en que el valor del test estándar es casi no significativo (p= .34) y no significativo para el criterio de Hancock. Además, el modelo ya ajusta suficientemente bien, luego no se considera necesario.

4.5. Mejora del Modelo Inicial: Modelo Corregido

Normalmente, se rechazan los modelos, dada su excesiva complejidad y las numerosas restricciones a las que están sujetos. Ante este escenario, los modelos han de ser modificados para mejorar tanto en su ajuste como en complejidad.

Aunque en cierta medida el modelo logra representar los datos originales, podemos introducir algunos cambios en el modelo con el fin de mejorar dicho ajuste.

En virtud de lo expuesto hasta ahora, y de los resultados obtenidos en el análisis de los datos modelo y del grado de ajuste de éstos, podemos deducir que, aunque el Modelo Inicial tiene un ajuste aceptable presenta capacidad de mejora, por lo que resulta necesario realizar las modificaciones pertinentes.

Con ello, se espera que, tras la estimación de un nuevo modelo modificado del anterior, “Modelo Corregido”, los valores de los índices de bondad de ajuste sean mejores y más favorables. Así, con este nuevo objetivo, se considera procedente y oportuna la eliminación de determinadas variables observables del Modelo Inicial; más concretamente, de las variables V_5 y V_{12} que están definidas como:

V_5: Respeta turnos de intervención.

V_{12} : Ofrece sugerencias y explicaciones sobre los distintos aspectos de la demanda.

El prescindir de estos indicadores queda justificado por varias razones:

a) El valor del estadístico Alfa de Cronbach mejora al suprimirlas, tanto en cada constructo, como en el total que aumenta de 0.963 a 0.973 (véase Tabla 25).

Tabla 25

Valores Alfa de Cronbach en las escalas de F_1, F_2, F_3 *y total*

Constructos	Nº variables observables	Alfa de Cronbach
F_1	5	0.960
F_2	5	0.947
F_3	2	0.933
Total	12	0.973

b) Su escaso poder de explicación de la varianza de los constructos (o variables latentes) a los que estaban asociados (los valores de R^2 son 0,098 y 0,148 respectivamente). Por tanto, estos indicadores no miden adecuadamente los respectivos constructos, ya que queda un 90% y un 85% de la variabilidad sin explicar.

c) Errores excesivamente elevados (de 0.95 y 0.92 respectivamente). Por todo ello, se considera que mantenerlos en el análisis puede distorsionar los resultados.

Estas modificaciones nos llevan a la repetición del análisis de los datos, para comprobar que el modelo modificado alcanza un mejor ajuste con los datos muestrales(véase Figura 17).

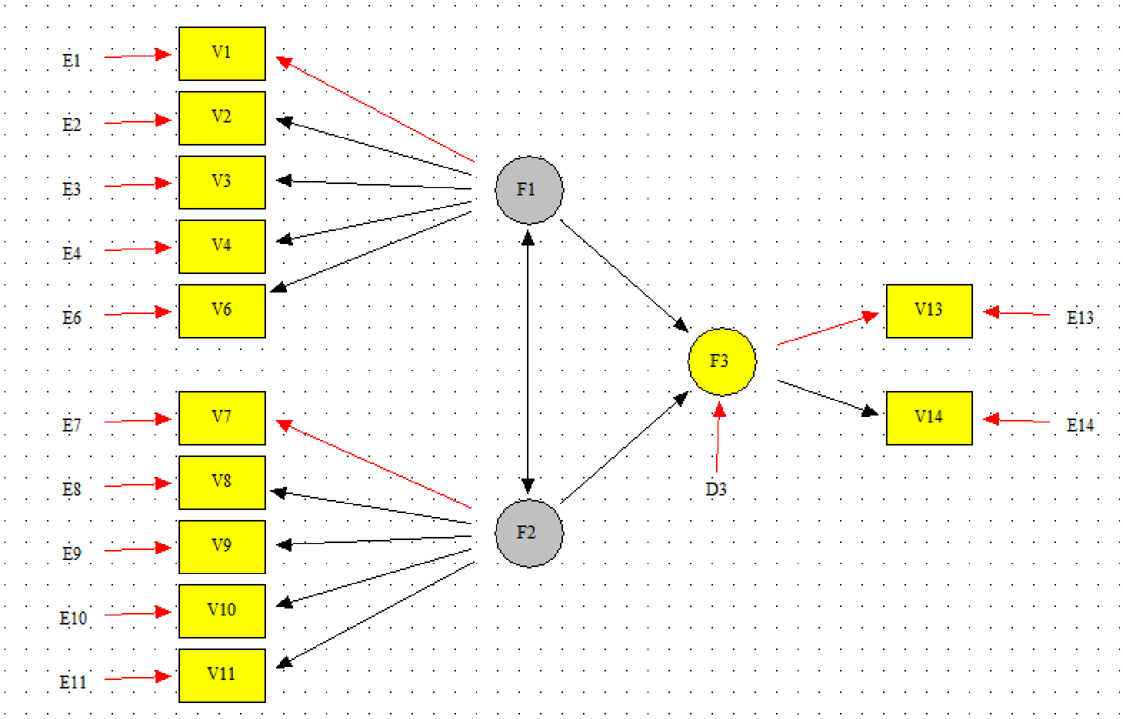


Figura 17. Gráfico del Modelo Corregido.

El número de elementos de la nueva matriz de covarianzas viene dado por:

$$N = \frac{m(m+1)}{2} = \frac{12x13}{2} = 78$$

donde

m = nº de variables observables.

Por otra parte, el número de parámetros a estimar del nuevo modelo es p=28.

Por tanto, al igual que ocurría en el Modelo Inicial, se cumple la desigualdad p < N lo que indica que el Modelo Corregido es un modelo sobreidentificado y por tanto podemos también estimar dicho modelo.

El coeficiente de Mardia (estimador normalizado) arroja un valor de 4.211 lo que indica que sigue sin existir normalidad multivariada (este valor sigue estando fuera del intervalo de referencia (-3,3)). Hecho confirmado por la extensión de este test para tamaños muestrales pequeños, ésto es, el test de Bonnet-Woodward-Randall que nos dice que sigue existiendo un exceso significante de curtosis multivariable a un nivel del 5%. Por tanto, el método de estimación que utilizaremos será el mismo que para el Modelo Inicial: el método de máxima verosimilitud robusto.

La convergencia del Modelo Corregido sigue siendo rápida, manteniéndose en 9 iteraciones (véase Tabla 26). Además, sigue habiendo solamente un cambio brusco en la tercera iteración (al igual que en el Modelo Inicial).

Tabla 26

Iteraciones EQS en el Modelo Corregido

ITERATIVE SUMMARY

ITERATION	PARAMETER ABS CHANGE	ALPHA	FUNCTION
1	1.851677	0.50000	7.11640
2	1.119936	0.50000	4.44566
3	0.519960	1.00000	2.08366
4	0.075735	1.00000	1.98695
5	0.023057	1.00000	1.96907
6	0.009112	1.00000	1.96686
7	0.002855	1.00000	1.96659
8	0.001151	1.00000	1.96656
9	0.000379	1.00000	1.96655

En la Figura 18 aparecen las estimaciones estandarizadas del Modelo Corregido.

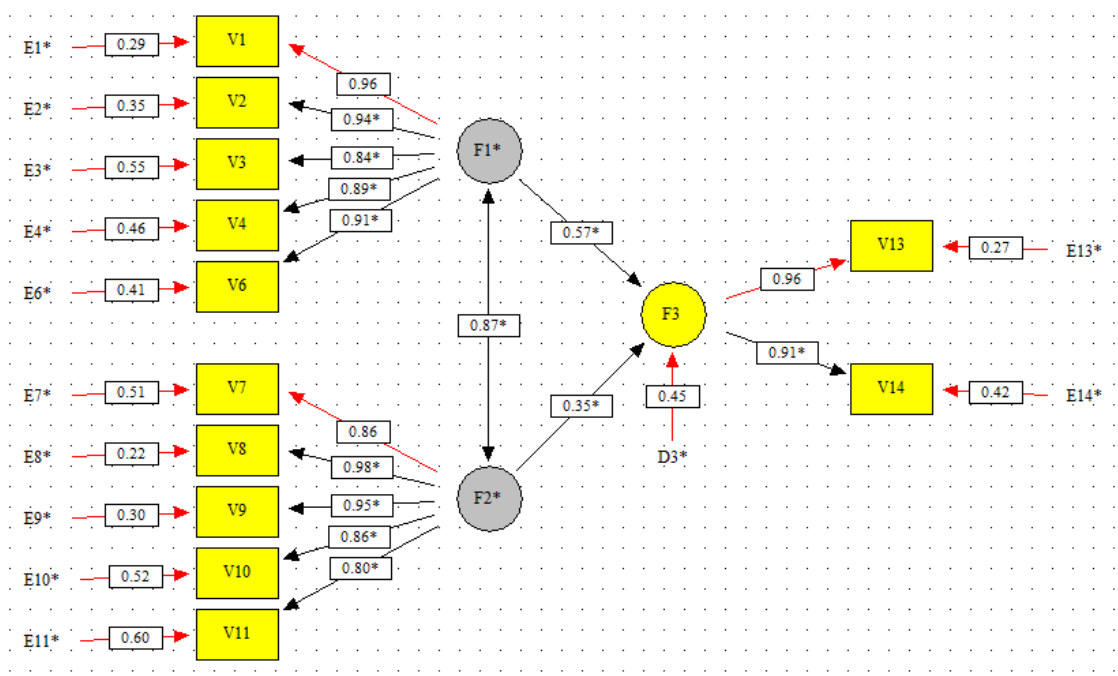


Figura 18. Modelo Inicial con estimaciones de los parámetros.

En este modelo corregido puede observarse la inexistencia de estimaciones erróneas, ya que en este caso todos los errores típicos presentan similitud.

Los coeficientes estandarizados del modelo de medida son ahora altos para todos los indicadores. El coeficiente más elevado (0.98) sigue dándose entre la variable latente exógena "*Ayuda*" y el indicador "*Da ayuda sobre el contenido (conceptos, perspectivas de interpretación)*" y el más bajo (0.80) se da ahora entre la variable latente exógena "*Ayuda*" y el indicador "*Pide sugerencias y explicaciones sobre los distintos aspectos de la demanda*".

Respecto al modelo estructura, observamos que la variable "*Controversia cooperativa*" sigue teniendo un mayor peso (0.57) que la variable "*Ayuda*" (0.35) sobre la variable endógena del modelo "*Rendimiento Académico*".

Las nuevas ecuaciones vienen dadas por:

$$V_1 = 0.96F_1 + 0.29E_1$$

$$V_2 = 0.94F_1 + 0.35E_2$$

$$V_3 = 0.84F_1 + 0.55E_3$$

$$V_4 = 0.89F_1 + 0.46E_4$$

$$V_6 = 0.91F_1 + 0.41E_6$$

$$V_7 = 0.86F_2 + 0.51E_7$$

$$V_8 = 0.98F_2 + 0.22E_8$$

$$V_9 = 0.95F_2 + 0.30E_9$$

$$V_{10} = 0.86F_2 + 0.52E_{10}$$

$$V_{11} = 0.80F_2 + 0.60E_{11}$$

$$V_{13} = 0.96F_3 + 0.27E_{13}$$

$$V_{14} = 0.91F_3 + 0.42E_{14}$$

$$F_3 = 0.57F_1 + 0.35F_2 + 0.45D_3$$

La correlación entre los constructos se mantiene en el mismo valor de 0.87.

En la Tabla 27 se incluyen las estimaciones de los parámetros libres (soluciones no estandarizadas) del Modelo Corregido.

En el Modelo Corregido, al igual que en el Modelo Inicial, los coeficientes de los indicadores "*Expone su comprensión de la tarea (enfoque, proceso, producto)*" para la variable latente "*Controversia cooperativa*", "*Ayuda sobre el producto (presentación, estructura)*" para la variable latente "Ayuda" y "*Conocimiento declarativo*" para la variable latente "*Rendimiento académico*" , han sido fijados con el valor de 1.000 para ayudar a la identificación del modelo y al mismo tiempo dar una escala a las variables que no son directamente observables , es decir a los tres constructos del modelo.

Tabla 27

Estimaciones de los parámetros. Modelo Corregido

Parámetros estimados	Coeficiente	S.E	C.R
$V_1 \leftarrow F_1$	1.000		
$V_2 \leftarrow F_1$	0.907	0.052	17.354
$V_3 \leftarrow F_1$	0.682	0.059	11.663
$V_4 \leftarrow F_1$	0.780	0.056	13.939
$V_6 \leftarrow F_1$	1.013	0.066	15.262
$V_7 \leftarrow F_2$	1.000		
$V_8 \leftarrow F_2$	1.528	0.117	13.082
$V_9 \leftarrow F_2$	1.471	0.119	12.383
$V_{10} \leftarrow F_2$	1.349	0.136	9.917
$V_{11} \leftarrow F_2$	1.094	0.125	8.744
$V_{13} \leftarrow F_3$	1.000		
$V_{14} \leftarrow F_3$	0.960	0.69	13.961
$F_3 \leftarrow F_1$	0.531	0.130	4.079
$F_3 \leftarrow F_2$	0.485	0.194	2.504

Todos los parámetros siguen siendo significativos para un nivel de 0.05, como podemos comprobar en la Tabla 27 .

La significatividad de dichos parámetros nos indica que las siguientes relaciones causales son ciertas:

$$V_1 = 1.000F_1 + 1.000E_1$$

$$V_2 = 0.907F_1 + 1.000E_2$$

$$V_3 = 0.682F_1 + 1.000E_3$$

$$V_4 = 0.780F_1 + 1.000E_4$$

$$V_6 = 1.013F_1 + 1.000E_6$$

$$V_7 = 1.000F_2 + 1.000E_7$$

$$V_8 = 1.528F_2 + 1.000E_8$$

$$V_9 = 1.471F_2 + 1.000E_9$$

$$V_{10} = 1.349F_2 + 1.000E_{10}$$

$$V_{11} = 1.094F_2 + 1.000E_{11}$$

$$V_{13} = 1.000F_3 + 1.000E_{13}$$

$$V_{14} = 0.960F_3 + 1.000E_{14}$$

$$F_3 = 0.531F_1 + 0.485F_2 + 1.000D_3$$

De igual modo, las varianzas siguen siendo, en el Modelo Corregido, no negativas y significativas(véase Tabla 28).

Tabla 28

Varianzas de los errores. Modelo Corregido

Variables Error	Varianza	S.E	C.R
E_1	0.556	0.139	4.004
E_2	0.676	0.145	4.654
E_3	1.191	0.212	5.608
E_4	0.979	0.183	5.348
E_6	1.275	0.248	5.137
E_7	0.988	0.176	5.617
E_8	0.314	0.110	2.851
E_9	0.598	0.138	4.338
E_{10}	1.805	0.321	5.618
E_{11}	1.867	0.323	5.776
E_{13}	0.415	0.206	2.017
E_{14}	1.032	0.247	4.175
D_3	1.086	0.272	3.986

Al igual que en el Modelo Inicial se comprobó que se obtienen peor ajuste si se fijan a 1 las varianzas de las variables exógenas (práctica usual en el modelo de ecuaciones estructurales para mejorar la identificación del modelo). Las estimaciones obtenidas de estas varianzas se pueden observar en la Tabla 29.

Tabla 29

Varianzas de las variables exógenas. Modelo Corregido

Variables	Varianza	S.E	C.R
F_1	6.048	1.094	5.528
F_2	2.743	0.599	4.579

Tabla 30

Covarianza de las variables exógenas. Modelo Corregido

Variables	Covarianza	S.E	C.R
$F_1 \leftrightarrow F_2$	3.537	0.694	5.093

Los valores de las razones críticas nos indican que las covarianzas son significativas con un nivel de 0.01 (véase Tabla 30).

Por otra parte, no se detecta ningún caso atípico, ya que ningún residuo estandarizado es elevado o bajo, ya que ninguno es superior a 2 o inferior a -2 (véase Tabla 31).

Tabla 31

Residuos estandarizados. Modelo Corregido

INDICADORES	V_1	V_2	V_3	V_4	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{13}	V_{14}
V_1	0.000											
V_2	0.220	0.000										
V_3	-0.020	-0.004	0.000									
V_4	-0.017	-0.028	0.095	0.000								
V_6	-0.015	-0.023	0.007	0.060	0.000							
V_7	-0.049	-0.027	0.053	-0.031	0.032	0.000						
V_8	-0.005	-0.010	-0.083	-0.028	0.010	0.009	0.000					
V_9	0.012	0.005	-0.043	-0.029	0.010	0.006	0.006	0.000				
V_{10}	0.079	0.081	-0.043	0.025	0.112	-0.058	-0.004	-0.009	0.000			
V_{11}	0.090	0.050	-0.050	0.056	0.045	-0.017	-0.006	-0.035	0.023	0.000		
V_{13}	0.015	0.005	-0.020	-0.054	0.003	0.011	-0.022	-0.021	0.090	0.205	0.000	
V_{14}	0.011	0.011	-0.011	-0.038	0.021	0.006	-0.025	-0.045	0.105	0.172	0.000	0.000
Media de los valores absolutos de los residuos estandarizados = 0.0304												

Observamos como la media de los valores absolutos de los residuos en el Modelo Corregido es levemente inferior a la media de los del Modelo Inicial, por lo que el ajuste mejoraría.

Los 20 mayores residuos quedan recogidos en la Tabla 32.

Tabla 32

Residuos estandarizados. Modelo Corregido

```
LARGEST STANDARDIZED RESIDUALS:

    NO.     PARAMETER   ESTIMATE      NO.     PARAMETER   ESTIMATE
    ---     ---------   --------      ---     ---------   --------
     1      V13, V11      0.205       11      V6,  V4       0.060
     2      V14, V11      0.172       12      V10, V7      -0.058
     3      V10, V6       0.112       13      V11, V4       0.056
     4      V14, V10      0.105       14      V13, V4      -0.054
     5      V4,  V3       0.095       15      V7,  V3       0.053
     6      V11, V1       0.090       16      V11, V2       0.050
     7      V13, V10      0.090       17      V7,  V1      -0.049
     8      V8,  V3      -0.083       18      V14, V9      -0.045
     9      V10, V2       0.081       19      V11, V6       0.045
    10      V10, V1       0.079       20      V10, V3      -0.043
```

La distribución de los residuos obtenida con el programa EQS queda reflejada en la Figura 19.

```
 DISTRIBUTION OF STANDARDIZED RESIDUALS


   ----------------------------------------
   !                                      !
60-                                       -
   !                                      !
   !                                      !
   !                                      !
   !                                      !           RANGE       FREQ PERCENT
45-                                       -
   !                *                     !   1   -0.5  -   --        0    0.00%
   !                *                     !   2   -0.4  -  -0.5       0    0.00%
   !                *                     !   3   -0.3  -  -0.4       0    0.00%
   !                *  *                  !   4   -0.2  -  -0.3       0    0.00%
30-                 *  *                  -   5   -0.1  -  -0.2       0    0.00%
   !                *  *                  !   6    0.0  -  -0.1      41   52.56%
   !                *  *                  !   7    0.1  -   0.0      33   42.31%
   !                *  *                  !   8    0.2  -   0.1       3    3.85%
   !                *  *                  !   9    0.3  -   0.2       1    1.28%
15-                 *  *                  -   A    0.4  -   0.3       0    0.00%
   !                *  *                  !   B    0.5  -   0.4       0    0.00%
   !                *  *                  !   C     ++  -   0.5       0    0.00%
   !                *  *                  !   -------------------------------
   !                *  *  *               !           TOTAL          78 100.00%
   ----------------------------------------
      1  2  3  4  5  6  7  8  9  A  B  C    EACH "*" REPRESENTS    3 RESIDUALS
```

Figura 19. Gráfico de la distribución de los residuos. Modelo Corregido

La distribución está cercana a ser simétrica, y centrada en el cero.

Al igual que en el Modelo Inicial los residuos estandarizados están muy próximos a 0 lo que indica que el modelo tiene un buen ajuste.

Los coeficientes de determinación R^2 se presentan en la Tabla 33.

Tabla 33

Coeficiente de determinación

VARIABLES	R-SQUARED
V_1	0.916
V_2	0.881
V_3	0.703
V_4	0.790
V_6	0.830
V_7	0.735
V_8	0.953
V_9	0.908
V_{10}	0.734
V_{11}	0.637
V_{12}	0.927
V_{14}	0.824
F_3	0.794

Recordamos que el coeficiente de determinación o coeficiente de correlaciones cuadradas múltiples indica la proporción de la varianza de los indicadores que es explicada por el constructo común, y que, por tanto, valores cercanos a 1 significan que los indicadores miden adecuadamente el constructo.

Una vez eliminados los indicadores "*Respeta turnos de intervención*" y "*Ofrece sugerencias y explicaciones sobre los distintos aspectos de la demanda*", se considera que la fiabilidad de todos los indicadores es aceptable, pues aunque solamente es superado el valor de referencia, establecido en la parte teórica de 0,9, por los cuatro indicadores "*Expone su comprensión de la* *tarea (enfoque, proceso, producto)*", "*Da ayuda sobre el contenido (conceptos, perspectivas de interpretación)*", "*Da ayuda sobre el proceso de realización de la tarea (estrategias y recursos*)" y "*Da ayuda sobre el proceso de realización de la tarea (estrategias y recursos)*", el resto de valores obtenidos está próximo a dicho valor de referencia, siendo el más bajo el coeficiente 0.637 del indicador "*Pide sugerencias y explicaciones sobre los distintos aspectos de la demanda*", que indica que el 36% de la variabilidad de dicha variable observable no es explicada por la variable latente común "*Ayuda*".

Veamos ahora el grado de ajuste del Modelo Corregido, comparándolo con el grado de ajuste obtenido para el Modelo Inicial.

En la Tabla 34 quedan recogidas las medidas absolutas de ajuste del Modelo Corregido.

Tabla 34

Medidas absolutas de ajuste. Modelo Corregido

Medidas absolutas de ajuste	**Modelo Corregido**	**Ajuste**
χ^2	p <.000	Mal ajuste
χ^2 -scaled	p <.000	Mal ajuste
χ^2 -Yuan-Bentler	p <.149	Buen ajuste
SRMR	0.049	Buen ajuste

Para el Modelo Corregido obtenemos un valor para χ^2 de 143.558 con 51 grados de libertad y para χ^2 scaled de Satorra –Bentler de 106.4408.

No sorprende comprobar que estos índices χ^2 del Modelo Corregido sigan siendo significativos (p<.01), es decir se sigue aceptando la hipótesis nula de que las matrices de covarianzas muestral y estimada son distintas. La interpretación de estas medidas de ajuste debe ser completada con otras medidas, ya que, como se dijo para el Modelo Inicial, los valores de este estadístico χ^2 son sensibles a la normalidad multivariable de los datos y al tamaño muestral, y en nuestro estudio los datos no siguen una distribución normal multivariable y la muestra es pequeña por motivos obvios. Además, las variables observables que miden los constructos "*Controversia Cooperativa*" y "*Ayuda*" no son estrictamente continuas.

Ahora bien, al eliminar las dos variables observables V_5 y V_{12} del Modelo Inicial, la matriz residual pasa a ser no singular (para el Modelo Corregido), lo que nos permite calcular el valor del estadístico V_{12} de Yuan-Bentler (recuérdese que el programa EQS no nos proporcionaba el valor de este estadístico para el Modelo Inicial por problemas de cálculo con la matriz residual), valido para modelos cuyos datos han sido obtenidos con muestras pequeñas (entre 60 y 120 sujetos) y que no tienen normalidad multivariable. Este valor es de 61.463 con un p valor de 0.149, que se traduce en que el estadístico es no significativo (p>.01) y por tanto se acepta que el modelo ajusta a los datos. Además, se considera que el ajuste es bueno puesto que p>.05.

Para la otra medida de ajuste absoluta considerada, observamos como el valor del índice de ajuste SRMR pasa de 0.067 en el Modelo Inicial a 0.049 en el Modelo Corregido lo que indica un mejor ajuste, estando en este caso por debajo del valor de referencia 0.05 que indica un buen ajuste de los datos.

En la Tabla 25 observamos como los valores de los índices de ajuste incrementales son mayores en el Modelo Corregido, lo que indica que el ajuste es mejor.

Tabla 35

Índices incrementales de ajuste. Modelo Corregido

Índices de ajuste incremental	**Modelo Inicial**	**Modelo Corregido**
NFI	0.900	0.929
NNFI	0.931	0.950
IFI	0.945	0.962
CFI	0.944	0.961

El índice NFI mejora en el modelo Corregido, pero sigue sin superar el valor de 0,95 por lo para este índice el ajuste sigue siendo aceptable sin llegar a ser bueno; sin embargo, para el resto de indicadores sí que supera ese valor de referencia de 0.95 y por lo tanto el ajuste se puede considerar bueno (en lugar de aceptable como en el Modelo Inicial).

En cuanto a los índices de parsimonia; la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSEA) toma un valor de 0.122 (menor que el valor de 0.124 obtenido para el Modelo Inicial) que supera por un escaso margen el valor de 0.1

establecido como referencia para aceptar un modelo. Sin embargo, por las mismas razones que el estadístico χ^2 no se le da excesiva importancia a este hecho, ya que el resto de medidas sugieren que se acepte el modelo, y además el valor de RMSEA no es del todo malo, ya que intervalo de confianza al 90 % es (0.089, 0.153) por lo que se encuentra en el límite de aceptación marcado.

En cuanto a los valores AIC y CAIC son más pequeños en el Modelo Corregido, lo que indica su mejor ajuste, es decir es más parsimonioso.

Tabla 36

Índices de ajuste de parsimonia. Modelo Corregido

Índices de ajuste de parsimonia	**Modelo Independencia**	**Modelo Corregido**
AIC	1369.136	4.441
CAIC	1151.068	-164.067

Estudiamos ahora los resultados obtenidos por el Test Wald (véase Tabla 37), para determinar si un conjunto de parámetros que fueron tratados como libres en el modelo podrían ser fijados simultáneamente a cero sin que se produzca una perdida sustancial de información.

Tabla 37

Resultados Test Wald. Modelo Corregido

```
WALD TEST (FOR DROPPING PARAMETERS)
ROBUST INFORMATION MATRIX USED IN THIS WALD TEST
MULTIVARIATE WALD TEST BY   APRIORI    PROCESS
       CUMULATIVE MULTIVARIATE STATISTICS              UNIVARIATE INCREMENT
       ----------------------------------              --------------------
STEP  PARAMETER   CHI-SQUARE  D.F.  PROBABILITY       CHI-SQUARE  PROBABILITY
---- ----------- ---------- ----  -----------       ----------  -----------
  1     F3,F2        2.876     1      0.090            2.876       0.090
  2    E13,E13       8.750     2      0.013            5.874       0.015
  3     E9,E9       18.039     3      0.000            9.289       0.002
  4     E4,E4       31.985     4      0.000           13.946       0.000
  5     E6,E6       35.307     5      0.000            3.323       0.068
  6     E2,E2       40.970     6      0.000            5.663       0.017
  7    E14,E14      60.545     7      0.000           19.575       0.000
  8     E1,E1       83.922     8      0.000           23.376       0.000
  9     E7,E7      106.502     9      0.000           22.581       0.000
 10     E8,E8      144.679    10      0.000           38.177       0.000
 11    E11,E11     176.775    11      0.000           32.096       0.000
 12     D3,D3      193.857    12      0.000           17.082       0.000
 13    E10,E10     247.516    13      0.000           53.659       0.000
 14     E3,E3      300.808    14      0.000           53.293       0.000
 15    V11,F2      426.187    15      0.000          125.379       0.000
 16    V10,F2      497.680    16      0.000           71.493       0.000
 17     V8,F2      513.921    17      0.000           16.241       0.000
 18     V9,F2      520.917    18      0.000            6.996       0.008
 19     F1,F1      731.433    19      0.000          210.517       0.000
 20     F3,F1     1095.176    20      0.000          363.743       0.000
 21     F2,F1     1485.239    21      0.000          390.063       0.000
 22     F2,F2     1728.474    22      0.000          243.235       0.000
 23    V14,F3     2260.074    23      0.000          531.600       0.000
 24     V6,F1     3236.930    24      0.000          976.856       0.000
 25     V4,F1     3938.115    25      0.000          701.185       0.000
 26     V3,F1     4551.620    26      0.000          613.504       0.000
 27     V2,F1     4860.336    27      0.000          308.717       0.000
```

Los resultados son los mismos que para el Modelo Inicial, se pueden fijar a cero la covarianza de los factores F_2 y F_3 así como la varianza del error E_6.

Y también, en la segunda etapa del W Test se concluye que ningún parámetro de los considerados en el Modelo Corregido debe ser fijado.(véase Tabla 38).

Tabla 38

Resultados Test Wald (SIMULTANEOUS PROCCES). Modelo Corregido.

```
MAXIMUM LIKELIHOOD SOLUTION (NORMAL DISTRIBUTION THEORY)
MULTIVARIATE WALD TEST BY SIMULTANEOUS PROCESS


       CUMULATIVE MULTIVARIATE STATISTICS             UNIVARIATE INCREMENT
       ----------------------------------             --------------------

STEP  PARAMETER   CHI-SQUARE  D.F.  PROBABILITY       CHI-SQUARE  PROBABILITY
---- -----------  ----------  ----  -----------       ----------  -----------


   ************
        NONE OF THE FREE PARAMETERS IS DROPPED IN THIS PROCESS.
```

Los resultados del Test de los Multiplicadores de Lagrange en su primera fase (Test LM univariable), se recogen en la Tabla 39.

Tabla 39

Resultados del test univariable LM

MAXIMUM LIKELIHOOD SOLUTION (NORMAL DISTRIBUTION THEORY)
LAGRANGE MULTIPLIER TEST (FOR ADDING PARAMETERS)
ORDERED UNIVARIATE TEST STATISTICS:

NO	CODE		PARAMETER	CHI-SQUARE	PROB.	HANCOCK 51 DF PROB.	PARAMETER CHANGE	STANDAR-DIZED CHANGE
1	2	20	V11,F3	27.289	0.000	0.997	0.789	0.152
2	2	20	V10,F3	9.909	0.002	1.000	0.476	0.080
3	2	20	V8,F3	7.790	0.005	1.000	-0.274	-0.046
4	2	12	V10,F1	6.906	0.009	1.000	0.394	0.061
5	2	12	V11,F1	4.828	0.028	1.000	0.329	0.059
6	2	12	V8,F1	4.254	0.039	1.000	-0.205	-0.032
7	2	20	V4,F3	4.240	0.039	1.000	-0.271	-0.055
8	2	12	V3,F2	3.606	0.058	1.000	-0.343	-0.103
9	2	20	V9,F3	2.947	0.086	1.000	-0.178	-0.030
10	2	20	V1,F3	1.344	0.246	1.000	0.142	0.024
11	2	12	V6,F2	1.210	0.271	1.000	0.219	0.048
12	2	12	V4,F2	0.843	0.358	1.000	-0.156	-0.044
13	2	20	V3,F3	0.540	0.462	1.000	-0.103	-0.022
14	2	12	V1,F2	0.509	0.476	1.000	0.112	0.026
15	2	12	V7,F1	0.390	0.532	1.000	-0.069	-0.015
16	2	12	V14,F2	0.216	0.642	1.000	-0.136	-0.034
17	2	12	V13,F2	0.216	0.642	1.000	0.142	0.036
18	2	12	V13,F1	0.216	0.642	1.000	-0.156	-0.027
19	2	12	V14,F1	0.216	0.642	1.000	0.150	0.025
20	2	20	V6,F3	0.209	0.648	1.000	0.071	0.011
21	2	20	V2,F3	0.192	0.661	1.000	0.053	0.010
22	2	20	V7,F3	0.048	0.827	1.000	0.024	0.006
23	2	12	V2,F2	0.047	0.828	1.000	0.034	0.009
24	2	12	V9,F1	0.029	0.865	1.000	-0.018	-0.003
25	2	0	V1,F1	0.000	1.000	1.000	0.000	0.000
26	2	0	V7,F2	0.000	1.000	1.000	0.000	0.000
27	2	0	V13,F3	0.000	1.000	1.000	0.000	0.000

De los 27 parámetros considerados, solamente 7 podrían ser liberados si atentemos al criterio estándar y ninguno si consideramos el criterio de Hancock.

Los resultados del test multivariable se muestran en la Tabla 40.

Tabla 40

Resultados del test multivariable LM

```
MULTIVARIATE LAGRANGE MULTIPLIER TEST BY SIMULTANEOUS PROCESS IN STAGE  1

PARAMETER SETS (SUBMATRICES) ACTIVE AT THIS STAGE ARE:

   PVV PFV PFF PDD GVV GVF GFV GFF BVF BFF
```

	CUMULATIVE MULTIVARIATE STATISTICS				UNIVARIATE INCREMENT			
							HANCOCK'S SEQUENTIAL	
STEP	PARAMETER	CHI-SQUARE	D.F.	PROB.	CHI-SQUARE	PROB.	D.F.	PROB.
1	V11,F3	27.289	1	0.000	27.289	0.000	51	0.997
2	V10,F3	39.771	2	0.000	12.482	0.000	50	1.000
3	V4,F3	44.011	3	0.000	4.240	0.039	49	1.000

El Test estándar propone añadir solamente 3 de estas relaciones causales (frente a las 5 que el Test proponía en el Modelo Inicial). Efectos directos entre las variables observables V_4 , V_{10} y V_{11}, con el constructo F_3.

No nos parece oportuno incluir dichos efectos directos, por las mismas razones argumentadas para el Modelo Inicial:

Dichos indicadores afectan a F_3, pero solo a través de la variable mediadora:

$$F_1 \ (V_4 \rightarrow F_1 \rightarrow F_3)$$

$$F_2 \ (V_{10} \rightarrow F_2 \rightarrow F_3 \ \text{ y } \ V_{11} \rightarrow F_2 \rightarrow F_3)$$

El criterio de Hancock no nos aconseja añadirlos al modelo.

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

Como apuntamos en la ***Primera Parte*** de este trabajo, la interacción entre alumnos en el aula y el aprendizaje en pequeños grupos está generando en el momento actual un enorme interés, tanto teórico como práctico. Este interés obedece a tres grandes factores.

Uno de ellos, que sin duda ocupa un lugar preeminente, es el creciente cuerpo de investigaciones que demuestran que una organización social cooperativa de las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula resulta, al menos bajo ciertas condiciones, más efectiva desde el punto de vista del rendimiento académico y la socialización de los alumnos que una organización competitiva o individualista de dichas actividades. Este hecho ha sido corroborado por numerosos meta-análisis (Johnson, D. W., Maruyama, Johnson, R. y Nelson, 1981; Kyndt, Raes, Lismont, Timmers, Dochy y Cascallar, 2013).

Un segundo factor que ha contribuido sustancialmente a sustentar esta hipótesis es la aceptación cada vez más generalizada de una visión de los procesos escolares de enseñanza y aprendizaje apoyada en las teorías y modelos de inspiración cognitiva y constructivista (Coll, 2001; Cuadrado, 2008).

Desde estas teorías y modelos, ***el aprendizaje*** escolar se concibe como «un proceso constructivo que tiene un carácter intrínsecamente social, interpersonal y comunicativo» y ***la enseñanza*** como «un proceso complejo de estructuración y guía de esa construcción que se lleva a cabo mediante apoyos y soportes diversos. En este sentido, los otros alumnos tienen un papel natural como fuentes potenciales de ayuda educativa».

Finalmente, un tercer factor, que se encuentra vinculado al concepto de competencia, ha venido, en los albores de este siglo, a insuflar nuevos aires y dar mayor consistencia a la idea de una nueva organización del aula en la que el proceso de interacción entre iguales es el eje sobre el que deben girar todos los procesos de enseñanza y aprendizaje. En efecto, los trabajos que emanan de DeSeCo, *Definition and Selection of Competencies* (Salganik, Rychen, Moser y Konstant, 1999; Rychen y Salganik, 2001; Rychen y Salganik, 2003) han puesto de manifiesto que de los tres pilares competenciales (usar herramientas de manera interactiva, actuar en grupos heterogéneos y actuar de manera autónoma), dos de ellos hacen referencia explícita a la interacción/interactividad, es decir que para ser competentes es necesario poseer una habilidad: ***la habilidad de cooperar***.

Partiendo de la profunda revisión efectuada por Colomina y Onrubia (Colomina y Onrubia, 2004; Colomina, Onrubia y Barberá, 2004) sobre la evolución histórica y conceptual de los trabajos sobre interacción entre alumnos en las últimas cinco décadas se puede observar cómo en los años setenta y ochenta la cuestión de la eficacia del trabajo en grupo frente a otras formas de organización social del aula ocupó buena parte de los esfuerzos de los investigadores. Las sucesivas revisiones de los resultados ofrecidos por estos estudios comparativos permiten extraer dos conclusiones generales.

La primera es la constatación reiterada de los efectos positivos de las estructuras cooperativas con respecto a las de carácter competitivo o individualista. Estos efectos se dan tanto sobre el rendimiento académico y los resultados de aprendizaje de los alumnos en el sentido tradicional del término, como sobre variables de carácter actitudinal y motivacional, las relaciones entre estudiantes de distintas etnias, el altruismo, la capacidad de tomar en consideración el punto de vista de otros o la autoestima. Además, se verifican con alumnos de distintas edades, en distintas áreas curriculares y en una amplia gama de tareas, tanto cerradas como abiertas y tanto centradas en aprendizajes mecánicos o memorísticos como en procesos de resolución de problemas de alto nivel cognitivo. La organización social de las actividades de aprendizaje en el aula a partir del trabajo en pequeños grupos cooperativos aparece globalmente, en estas revisiones, como potencialmente generadora de mejores resultados de aprendizaje que la organización de dichas actividades en términos competitivos o individualistas.

Sin embargo, y como segunda conclusión general de estas revisiones, la superioridad de las situaciones cooperativas no se produce de manera uniforme, es decir, que no aparece en todos los estudios y que, además, se ve afectada por diversas variables. La potencialidad de las situaciones cooperativas para mejorar el aprendizaje de los alumnos no se actualiza de manera automática por el hecho de plantear un trabajo en grupo; por el contrario, se concreta realmente sólo en determinadas ocasiones.

La identificación de los mecanismos y factores susceptibles de dar cuenta de esta variabilidad no puede obtenerse, sin embargo, mediante la mera comparación entre situaciones cooperativas y no cooperativas. Delimitar en qué condiciones se actualiza la efectividad del trabajo cooperativo, y sobre todo explicar esa efectividad, requiere ir más allá de la aproximación «de caja negra» típica de los trabajos que se centran en el contraste entre situaciones cooperativas y no cooperativas únicamente a partir de medidas finales de los resultados de aprendizaje obtenidos por los alumnos (primera generación de estudios), sin considerar los procesos interactivos propiamente dichos ocurridos durante el trabajo en grupo. Un primer paso para superar esta limitación estriba en el reconocimiento y constatación de la diversidad de formas concretas de organización de la actividad de los alumnos que subyace a las «situaciones cooperativas».

Esta constatación hace que, a lo largo de la década de los noventa. se modifique sustancialmente esta situación, de manera que lo que se va intentar a lo largo de estos años es ‘comprender’ la cooperación. Se trata ahora de identificar las condiciones bajo las cuales el trabajo en pequeños grupos en el aula puede ser productivo, de manera que en las dos últimas décadas el intento investigador es especificar los mecanismos y pautas interactivas que pueden explicar esa productividad. La recontextualización de la interacción entre alumnos en el marco global del aula se sitúa, en el momento actual, como una de las líneas prioritarias, y con más futuro, para la investigación de las relaciones entre interacción entre alumnos y aprendizaje escolar.

La investigación sobre aprendizaje cooperativo en el siglo XXI es, pues, una investigación intraparadigmática que trata de sacar a la luz cuáles son los mecanismos interpsicológicos, intrapsicológicos y cuáles son los factores moduladores que posibilitan la construcción del conocimiento en el proceso de interacción entre iguales.

CUESTIONES DE PRERREQUISITO PARA NUESTRA INVESTIGACIÓN

Con relación a los factores moduladores (Colomina y Onrubia, 2004), la investigación, realizada desde el paradigma constructivista en educación, apunta, como no podía ser de otra forma, a los tres vértices del triángulo interactivo clásico: profesor-alumnos- contenidos.

Partiendo del primer elemento, podemos decir que la intervención del profesor aparece como esencial, tanto para la productividad y efectividad del trabajo cooperativo entre alumnos, como para la actualización de sus contribuciones potenciales al aprendizaje que éstos realizan en las situaciones de aula, hasta el punto de que, para algunos autores, el «entrenamiento» del profesorado y su experiencia en estrategias instruccionales de guía del trabajo de los grupos constituye un factor esencial modulador del aprendizaje de los alumnos en este tipo de trabajo. Esta es la razón por la que, en el momento actual, numerosas investigaciones se centran en la formación del profesorado en aprendizaje cooperativo Cohen, Brody y Sapon-Shavon, 2004; Serrano, Moreno, Pons, y Lara, 2008; Koutselini, 2009). Estas investigaciones, en términos generales, apuntan en dos direcciones.

La primera, remite al necesario «andamiaje» efectuado sobre las interacciones productivas de los alumnos mediante la incorporación contextualizada de reglas de interacción; para ello, el profesor debe hacer explícitas determinadas reglas que deben regir la interacción, al tiempo que facilita su toma en consideración en el transcurso de la interacción. La segunda hace referencia a los apoyos que el profesor debe dar para lograr una efectiva regulación de las interacciones grupales de manera que los grupos puedan redirigir su trabajo en una dirección productiva al tiempo que asegure que todos los miembros del grupo están implicados en la interacción. En muchos casos, estos 'apoyos' suponen que el profesor modelice estrategias específicas de trabajo cooperativo y ayude a los alumnos, contextualizadamente, a emplearlas.

Desde esta perspectiva la acción educativa efectuada por el profesor a lo largo de la experiencia fue la siguiente:

El profesor escuchaba las intervenciones de los distintos alumnos del grupo, interactuaba con todos ellos, resumía adecuadamente la conversación del grupo, pedía y proporcionaba informaciones, mediaba en la gestión de situaciones conflictivas, etc.

Con este tipo de intervenciones se desarrollaba una especie de «moldeamiento metacognitivo» de las habilidades relevantes para la regulación y la autorregulación de la interacción por parte de los alumnos.

Con relación al segundo de los vértices del triángulo interactivo, la investigación parece indicar que determinadas características de los participantes en el trabajo en grupo relativas a su estatus académico y social pueden llegar a incidir de forma decisiva en el tipo de interacción y, en consecuencia, facilitar o bloquear los beneficios del trabajo cooperativo. Problemas derivados de las diferencias de estatus pueden comprometer los efectos del trabajo en grupo, provocando desigualdades tanto en la interacción que se lleva a cabo como en los resultados del aprendizaje.

Tres tipos de características de los participantes, asociadas al estatus, han sido consideradas prioritariamente en la investigación: el rendimiento académico, el estatus socioeconómico y la procedencia étnica y cultural, y el género de los alumnos.

La toma en consideración del rendimiento académico se ha inscrito en la polémica sobre la mayor o menor bondad de los grupos homogéneos, formados por alumnos similares en cuanto a su nivel de rendimiento, frente a los grupos heterogéneos, formados por alumnos de diversos niveles de rendimiento. A este respecto, tres resultados generales de la investigación nos parecen especialmente relevantes. El primero es que el trabajo en grupos heterogéneos beneficia a los alumnos de bajo nivel de rendimiento, que logran en este tipo de grupos un aprendizaje significativamente superior al que logran en los de carácter homogéneo, y resulta también potencialmente favorable para los alumnos de nivel alto, cuyo rendimiento trabajando en grupos heterogéneos resulta igual o superior, pero no inferior, al que alcanzan trabajando en grupos homogéneos. El segundo es que los alumnos de un nivel medio de rendimiento parecen beneficiarse más cuando trabajan en grupos en que la heterogeneidad no es muy elevada (por ejemplo, grupos formados por alumnos de rendimiento medio y bajo, o medio y alto) que cuando lo hacen en grupos de elevada heterogeneidad. El tercero es que determinadas actuaciones de los profesores son importantes para manejar de modo efectivo la heterogeneidad del grupo clase al servicio del rendimiento académico de los alumnos; entre estas actuaciones destacan el ofrecimiento de una ayuda especial a los alumnos de bajo rendimiento, el uso de grupos pequeños con tareas y/o materiales diferenciados, la evaluación y calificación diferenciada de los alumnos según criterios relativos a su esfuerzo individual y su progreso continuado, el uso de tutorías entre iguales, la evaluación y devolución frecuentes a todos los alumnos sobre su rendimiento académico y el establecimiento de mecanismos para asegurar que los alumnos participen y finalicen las tareas.

El estatus socioeconómico y la procedencia étnica y cultural de los participantes se han señalado en diversos estudios como factores que afectan la interacción. Sin embargo, sobre este punto es necesario subrayar que, a menudo, el estatus socioeconómico y la procedencia étnica y cultural correlacionan en las aulas con el estatus académico, con lo que es difícil valorar hasta qué punto los efectos observados son atribuibles a una u otra característica.

Finalmente, algunos estudios han mostrado la incidencia del género para las interacciones que se desarrollan entre los alumnos. Estos estudios apuntan la conveniencia de que los grupos estén constituidos por igual o muy parecido número de chicos y chicas, al menos en el período de la adolescencia: en los grupos con más alumnos que alumnas los primeros tienden a ignorar las aportaciones que sus compañeras llevan a cabo y a mostrar mayor rendimiento; en la situación inversa, en los grupos con mayoría de alumnas, éstas tienden a centrar parte importante de su participación en la interacción con sus compañeros varones, obteniendo, como en el caso anterior, un rendimiento más bajo que ellos. Estas diferencias, sin embargo, no han sido identificadas en estudios en que la composición de los grupos era equilibrada en cuanto al número de alumnos y de alumnas, ni tampoco en edades más tempranas.

La constatación de que determinadas características de los alumnos pueden influir en las formas y procesos de interacción que surgen en las situaciones cooperativas limitando, en algunos casos, su potencialidad constructiva, lleva a la necesidad de plantear formas de intervención que tiendan a promover posibilidades equitativas de interacción y aprendizaje para todos los alumnos, con independencia de sus características personales, evitando desigualdades en cuanto a sus oportunidades para participar en interacciones constructivas y beneficiarse de ellas. A este respecto, al menos tres tipos de consideraciones parecen derivarse de los resultados de la investigación.

La primera es que determinar formas óptimas de agrupamiento de los alumnos, válidas para todos ellos y en cualquier ocasión, resulta enormemente difícil. Esto es así porque cada alumno presenta una constelación propia de características personales en relación con las diversas variables apuntadas, y porque los efectos de las distintas variables interactúan entre sí y con otras variables también relevantes para el trabajo en grupo. En este sentido, puede resultar prudente en la práctica una estrategia que diversifique los tipos de agrupamientos empleados en distintos momentos y que preste una especial atención a la valoración de qué consecuencias favorables o desfavorables, y para quién, aparecen en cada contexto concreto asociadas a las diferentes formas de organizar los grupos de alumnos.

Una segunda consideración relevante es la de que, del conjunto de características relacionadas con el estatus de los alumnos, el estatus académico puede resultar la más influyente para la interacción: los alumnos con un estatus académico bajo interactúan menos frecuentemente y consiguen incidir en menor medida en el grupo que los alumnos que gozan de un estatus académico alto, que dominan la interacción y son percibidos como líderes con mayor frecuencia. Desde una perspectiva de intervención, ello resulta de especial interés para el tratamiento de las desigualdades debidas a las características que estamos comentando, en tanto el estatus académico es, sin duda, una de las características personales de los alumnos más sensibles a una intervención educativa.

Por último, y en relación muy directa con lo anterior, cabe señalar que algunas estrategias específicas de intervención se han mostrado capaces de modificar las percepciones de estatus académico, promoviendo así la equidad en la participación en la interacción entre alumnos de distintas características y optimizando los efectos del trabajo cooperativo.

De cualquier forma, la consideración de las conclusiones de las distintas investigaciones analizadas sobre el parámetro de igualdad, no parecen indicar que exista una estructura que opere de forma más efectiva que otra sobre la variable rendimiento académico y que la elección de una estructura de colaboración, cooperación o tutoría puede estar mediatizada por el tipo de contenido, el nivel de desarrollo social, etc. de los alumnos.

Este segundo bloque de investigaciones en torno a los alumnos presenta una cierta ambigüedad global y unas conclusiones expresadas más en términos probabilísticos que determinísticos, por ello, este factor modulador de la interacción entre iguales en el aula fue recogido en nuestro trabajo de la siguiente manera:

Interpretamos las investigaciones sobre este punto considerando la formación de grupos desde dos ejes. Por un lado, las características psicosocioculturales de los alumnos que constituyen el contexto aula y, por otro, la idea de que los procesos de construcción de significados y de atribución de sentido serían más consistentes en grupos con heterogeneidad media.

De esta manera se formaron grupos moderadamente heterogéneos y que fueran representativos de la población de cada una de las aulas.

Finalmente, en relación con el tercer vértice del triángulo interactivo (los contenidos), se ha podido constatar que entre las variables que influyen en los procesos interactivos que se producen en el trabajo cooperativo entre alumnos, las características de la tarea y del contenido que se propone a los alumnos como objeto de enseñanza y aprendizaje ocupan un lugar destacado. Al menos dos dimensiones de la tarea parecen críticas para el trabajo cooperativo.

La primera se refiere al carácter realmente colectivo y grupal, o no, de la tarea, es decir, hasta qué punto las tareas propuestas son realmente tareas de grupo. Una tarea de grupo se definiría como aquella que requiere recursos (información, conocimiento, estrategias heurísticas de resolución de problemas, materiales, habilidades) que ningún miembro del grupo posee por sí solo, de manera que ningún miembro del grupo tiene la capacidad de resolver el problema o alcanzar los objetivos de la tarea sin al menos una cierta aportación de los otros. En una tarea de grupo, por tanto, los participantes son interdependientes: cada uno debe obtener e intercambiar algún tipo de recurso con los otros para que la tarea pueda completarse y todos pueden y deben aportar algo a la resolución de la tarea. Desde esta caracterización, cabe llamar la atención sobre el hecho de que no toda tarea que se propone a un grupo es realmente una tarea de grupo: en muchos casos se trata de tareas que -o al menos algunos de- los participantes podrían resolver individualmente, y en las que, por consiguiente, es posible que el trabajo sea realizado sólo por una parte de los miembros del grupo.

La segunda dimensión de la tarea que parece crítica tiene que ver con el carácter más o menos abierto o cerrado de la misma: nos encontramos en este caso con un continuo que va desde tareas completamente definidas, de respuesta única y que se realizan a través de procedimientos algorítmicos bien establecidos y rutinizados, hasta tareas que plantean problemas mal definidos, con múltiples respuestas posibles y que no pueden resolverse mediante la mera aplicación de determinadas técnicas o procedimientos específicos. En las tareas más abiertas, la interacción entre los alumnos resulta mucho más crucial para la productividad y el rendimiento, puesto que no hay un camino preestablecido de resolución: si los miembros del grupo no intercambian ideas e información, difícilmente conseguirán encontrar vías de solución a la tarea propuesta.

Además de diferir en cuanto a sus características en dimensiones como las indicadas, las tareas que se proponen a los grupos también pueden variar en cuanto a la manera específica en que son presentadas. En este sentido, las instrucciones para la tarea han sido señaladas como un elemento clave para la puesta en marcha de los procesos interpsicológicos responsables del aprendizaje en la interacción cooperativa entre alumnos. Una de las cuestiones centrales a este respecto tiene que ver con hasta qué punto resulta favorecedor para los procesos de construcción de conocimiento en las situaciones cooperativas que el profesor especifique o paute muy detalladamente el proceso de resolución de las tareas por parte de los alumnos. Si los alumnos no reciben ningún tipo de guía o de apoyo, es posible que su interacción sea inadecuada o ineficaz y que no se actualicen las pautas y procesos constructivos que hemos señalado como necesarios para que el trabajo cooperativo sea productivo y promueva efectivamente el aprendizaje. Por otro lado, las pautas ofrecidas por el profesor pueden llegar a encorsetar excesivamente la actuación de los alumnos, limitando las posibilidades de que se impliquen en procesos auténticos de exploración, discusión y elaboración compartida. En este sentido, algunos autores apuntan la necesidad de que, al menos en tareas abiertas y complejas, las instrucciones de la tarea no sean excesivamente detalladas ni restrinjan en exceso la dinámica interactiva del grupo; ello no obsta, sin embargo, para que pueda resultar necesario ofrecer un cierto grado de apoyo al trabajo de los alumnos que les ayude a especificar roles, preparar elementos para su discusión, plantear preguntas u organizar procedimientos de trabajo

En otro sentido, las instrucciones para la tarea son esenciales para que los alumnos entiendan y aborden efectivamente la tarea como una tarea colectiva. A este respecto, resulta fundamental que el profesor ayude a los alumnos a representarse qué quiere decir y en qué se concreta llevar a cabo una tarea de forma cooperativa, explicitando al máximo los criterios y formas de actuación y de discurso que pretende que los alumnos pongan en marcha.

Como la idea era generar controversias cognitivas y fomentar la aplicación de las instancias de ayuda se optó por combinar tareas individuales y grupales y tareas abiertas y cerradas que organizamos en bloques: introducción-motivación, desarrollo de contenidos, consolidación y ampliación y, en su caso recuperación.

Se procuró siempre que las consignas aclararan la forma de realización de la tarea, animando a la colaboración

Concretar en mayor medida los mecanismos y factores susceptibles de dar cuenta de la efectividad de las situaciones cooperativas requiere abrir definitivamente la «caja negra» para centrarse en los procesos mismos de interacción entre los alumnos que puedan producirse en estas situaciones y examinar sistemáticamente las variables que puedan incidir en tales procesos. Se trata, en último término, de pasar de la mera constatación de los efectos de las situaciones cooperativas a la búsqueda de explicaciones de cuándo, cómo y por qué se producen tales efectos, situando para ello el foco de indagación en las pautas de interacción de mayor potencialidad que utilizan los alumnos para promover su aprendizaje. Este planteamiento resulta plenamente coherente con las actuales perspectivas cognitivas y constructivistas sobre el aprendizaje escolar, que sitúan la dinámica interactiva y comunicativa que se establece entre el alumno y los restantes participantes en el contexto del aula en el eje de la explicación de los procesos de aprendizaje escolar.

EL MARCO DE NUESTRA INVESTIGACIÓN

Los estudios que han tratado de analizar la dinámica interactiva y comunicativa que se establece entre los alumnos en situaciones cooperativas han propuesto diversos mecanismos explicativos de la potencialidad constructiva de esa dinámica que responden a las dos grandes escuelas de pensamiento en psicología: Piaget *versus* Vygotsky. Entre estos mecanismos podemos destacar el conflicto entre puntos de vista moderadamente divergentes y la regulación mutua y el apoyo mutuo a través del habla (Colomina y Onrubia, 2004).

Como es sabido, la teoría de Piaget ha asignado un papel importante en el desarrollo psicológico al conflicto cognitivo que se establece entre el sujeto y el objeto (sea este físico, lógico-matemático o sociocultural. Para Piaget, este conflicto promueve, a través de un proceso de desequilibrio y reequilibrio, la modificación de los esquemas del sujeto, y por tanto un avance en sus instrumentos intelectuales para comprender la realidad.

Apoyándose en estos planteamientos, la Escuela de Ginebra (Mugny y Doise, 1978; Doise, Mugny y Perret-Clermont, 1975; Doise y Mugny, 1979). ha demostrado que, en la interacción cooperativa entre alumnos, la existencia entre los participantes de puntos de vista divergentes en relación con la tarea o situación objeto de la interacción, puede favorecer la aparición de conflictos que llevan a la revisión y reestructuración de los puntos de vista propios, y con ello al aprendizaje y al avance intelectual.

Frente a la explicación piagetiana clásica, el origen de estos conflictos no sería estrictamente individual, sino social. De ahí que se denomine conflicto sociocognitivo: cognitivo, porque se da entre representaciones o significados distintos para una misma tarea; y social, porque esas representaciones o significados distintos no provienen de un único individuo, sino que se producen como consecuencia de las aportaciones de los distintos participantes en la interacción.

La evidencia empírica en favor de la potencialidad constructiva del conflicto entre puntos de vista moderadamente divergentes en la interacción entre alumnos se refuerza con los resultados obtenidos, desde una tradición de investigación distinta, en algunos estudios sobre los efectos de las controversias conceptuales entre iguales (Buchs, Butera, Mugny, y Darnon, 2004; Buchs, Darnon, Quiamzade, Mugny y Butera, 2008; Darnon, Butera, y Mugny, 2008). Las controversias suponen una voluntad de superar las discrepancias entre las ideas, creencias, informaciones, opiniones o puntos de vista divergentes. Estos estudios señalan que, cuando se resuelven satisfactoriamente, las controversias pueden tener un efecto positivo sobre la socialización, el desarrollo intelectual y el aprendizaje escolar; un efecto que se explica porque la existencia de un conflicto conceptual genera en los participantes sentimientos de incertidumbre y un desequilibrio cognitivo que les lleva a buscar nuevas informaciones y a analizar desde nuevas perspectivas la información ya disponible.

En cualquier caso, es importante destacar que la mera presencia o aparición de conflictos en la interacción entre alumnos no es suficiente para garantizar efectos positivos sobre el aprendizaje, sino que este efecto depende de algunos factores y variables que son necesarios considerar. Así, por ejemplo, y desde la perspectiva piagetiana, se ha constatado una relación entre el nivel de conflicto y los efectos del mismo, de acuerdo con esta relación, los grupos en que los conflictos son infrecuentes o muy frecuentes progresan menos que los grupos en que los conflictos se dan en un nivel moderado. En la explicación de estos autores, los conflictos infrecuentes pueden reflejar supresión de los desacuerdos (por ejemplo, por la imposición de un punto de vista sobre los otros) o su resolución ineficaz mediante pseudo-acuerdos o falsos consensos, mientras que el exceso de conflicto puede impedir a los participantes la búsqueda efectiva de nueva información o perspectivas que les ayuden a resolver sus discrepancias. De acuerdo con esta explicación, el tipo de regulación del conflicto sería un factor clave para explicar su efectividad y esta regulación se vería afectada tanto por los aspectos estrictamente cognitivos como por los aspectos relacionales en juego en la dinámica grupal, así como por las capacidades tanto cognitivas como interpersonales de los alumnos participantes.

En un sentido similar, la Escuela de Minnesota (Johnson, D. W. y Johnson, R. T., 1979; Johnson, D. W. y Johnson, R. T., 2009; Johnson, D. W. y Johnson, R. T., 2015) señala que los efectos beneficiosos de las controversias desaparecen, e incluso pueden llegar a invertirse, si devienen irresolubles. Al mismo tiempo, apuntan una serie de elementos como factores que contribuyen a una resolución positiva de las controversias: la relevancia de la información disponible, la motivación y competencia de los participantes, la no atribución de la discrepancia a incompetencia o falta de información de los oponentes, el volumen y calidad de los conocimientos relevantes de los oponentes, la capacidad de relativizar el propio punto de vista y la naturaleza cooperativa de la actividad en cuyo seno se produce la controversia.

Situándonos ahora en el polo vygotskiano, sabemos que uno de los rasgos distintivos de la aproximación al estudio de la interacción entre alumnos desde una perspectiva sociocultural es su interés por los instrumentos mediacionales, y muy particularmente el habla, que los participantes emplean en el transcurso de la interacción; un interés que enlaza con el carácter semióticamente mediado que, para Vygotsky y sus continuadores, presentan el aprendizaje y el desarrollo humanos.

Desde esta perspectiva, el rasgo más destacable de las situaciones de interacción cooperativa entre alumnos es que permiten muy diversas formas de uso del habla para regular la comunicación entre los participantes y mediar así sus procesos de construcción compartida del conocimiento. Por un lado, en estas situaciones los alumnos tienen muchas oportunidades para regular a otros mediante su propio lenguaje, oportunidades que no aparecen prácticamente en la interacción con el profesor y que les plantean, a su vez, la necesidad de explicitar, estructurar y formular más claramente sus requerimientos y puntos de vista. Por otro lado, los alumnos son también a menudo regulados por el lenguaje de sus compañeros, recibiendo y adaptándose a informaciones e instrucciones de una manera distinta a las que, de forma habitual, les formularía el profesor. Por último, y en el punto medio de las dos posibilidades anteriores, los alumnos encuentran en la interacción entre iguales amplias oportunidades para implicarse en un auténtico proceso de construcción conjunta de metas, planes, ideas y conceptos, apoyándose para ello en la posibilidad de coordinar y controlar mutuamente sus aportaciones, puntos de vista y roles en la interacción; una construcción en la que, además, se crean condiciones óptimas para que los alumnos utilicen el lenguaje para autorregular las acciones y procesos mentales propios. Con todo ello, podemos afirmar que las situaciones de interacción entre iguales constituyen un espacio ideal para que los alumnos utilicen plenamente las potencialidades del lenguaje como instrumento de aprendizaje.

Sin embargo, para que el lenguaje sea efectivo requiere un aprendizaje que posibilite su utilización como herramienta interactiva (Rychen y Salganik, 2003), este aprendizaje se tiene que producir sobre dos aspectos fundamentales: la formulación adecuada de los puntos de vista propios y la utilización ajustada de las instancias de ayuda.

En efecto, formular adecuadamente los puntos de vista sobre una tarea o problema específico que se debe aprender, obliga a dedicar tiempo y esfuerzo a controlar el contenido y a construir un marco de conocimientos organizado que hacen más conscientes a los alumnos de sus propias lagunas e incorrecciones cuando tienen que intercambiar verbalmente la información a otros compañeros. En este orden de cosas los trabajos de Webb (1991) centrados en el análisis de pautas de interacción entre alumnos durante la resolución colaborativa de problemas, demuestran que el ofrecimiento de explicaciones detalladas y elaboradas predice de manera consistente un rendimiento positivo individual posterior al trabajo conjunto: el alumno que más se beneficia en su rendimiento posterior es el que ofrece a los otros durante la interacción explicaciones elaboradas que incluyen contenidos e información específica. Esto es lo que Cazden (1991) denominó «discurso como relación con un auditorio» y viene a demostrar que dar este tipo de explicaciones, al requerir aclarar, profundizar y reorganizar los propios conocimientos, permite detectar y resolver eventuales lagunas e incomprensiones

Esta es la razón por la que para que el binomio controversia conceptual / conflicto cognitivo desemboque en una situación de aprendizaje significativo requiere "un adecuado discurso" (lo que equivale a decir: una correcta formulación de los puntos de vista propios) "como relación con un auditorio" (lo que equivale a decir: orientado hacia el otro). Esta es la razón, por la que cuando medimos en nuestra investigación la CONTROVERSIA lo hacemos a través de seis indicadores:

En referencia a la formulación de los puntos de vista propios:

- Expone su comprensión de la tarea (enfoque, proceso, producto).
- Justifica su comprensión de la tarea (enfoque, proceso, producto).
- Justifica su valoración de las actuaciones propias y ajenas.

En referencia a la orientación hacia el otro:

- Ofrece ayuda y orientación sin que se la pidan.
- Respeta turnos de intervención
- Asume su responsabilidad en el progreso grupal

Otro conjunto importante de investigaciones, tratan de analizar qué papel pueden jugar en el aprendizaje entre iguales el hecho de recibir ayudas de los compañeros. En este sentido parece existir un claro punto de acuerdo y es que los alumnos que durante el trabajo en pequeños grupos demandan una ayuda y la reciben mejoran su rendimiento individual posterior si la ayuda recibida cumple dos condiciones: adecuarse a la demanda realizada y aplicarse efectivamente a la resolución del problema (Webb y Palincsar, 1996). Cabe resaltar la relación entre estas condiciones y el principio de ajuste de la ayuda, propuesto por la concepción constructivista del aprendizaje escolar y de la enseñanza: la efectividad de la ayuda recibida no se relaciona tanto con las características intrínsecas de la ayuda recibida, como con su grado de ajuste a lo que el alumno que la solicita requiere en el momento de pedirla. De hecho, el conjunto de resultados de las diferentes investigaciones sugiere que, para que un participante pueda beneficiarse de la ayuda recibida de sus compañeros, es importante que necesite realmente esa ayuda, que le resulte relevante a su necesidad, que se formule en un nivel de elaboración ajustado al nivel de elaboración de la dificultad, que se proporcione tan pronto como se manifiesta la dificultad, que el receptor de la ayuda pueda entenderla y que tenga oportunidad de emplear efectivamente la ayuda recibida.

Es importante destacar que la posibilidad de que un alumno se beneficie de una ayuda ajustada de sus compañeros tiene que ver con su capacidad para solicitar ayuda y para hacerlo de una manera específica que favorezca una respuesta también específica. En este sentido para que todo proceso interactivo sea rentable para el aprendizaje, es necesario que funcionen adecuadamente las instancias de ayuda: dar ayuda *versus* pedir ayuda.

Teniendo en cuenta estos presupuestos, para tratar de explicar sus efectos sobre el aprendizaje de los alumnos hemos creado un factor (AYUDA) con seis conductas observables:

En referencia a la obtención de conductas de ayuda complejas:

- Da ayuda sobre el producto (presentación, estructura).
- Da ayuda sobre el contenido (conceptos, perspectivas de interpretación).
- Da ayuda sobre el proceso de realización de la tarea (estrategias y recursos)

En referencia a la producción de conductas de ayuda directas:

- Ofrece y permite la exposición completa de la demanda.
- Pide sugerencias y explicaciones sobre los distintos aspectos de la demanda.
- Ofrece sugerencias y explicaciones sobre los distintos aspectos de la demanda.

LOS RESULTADOS DE NUESTRA INVESTIGACIÓN

Los resultados obtenidos vienen a confirmar los trabajos previos, estableciendo que el rendimiento académico depende de la estructura interactiva que propongamos. En esta estructura interactiva las controversias que se plantean en torno a la resolución de las tareas tienen un alto poder explicativo del rendimiento académico, al igual que las instancias de ayuda que surgen en este proceso interactivo. Pero lo más relevante del estudio es haber encontrado que la correlación entre ambos factores es muy alta y, además, tiene connotaciones causales.

El modelo causal que hemos establecido nos permite afirmar la bondad de los resultados ya que todos los parámetros estimados son significativos (nivel de significación de 0.05) y, por tanto, podemos postular que todas las relaciones causales encontradas entre las variables son ciertas.

Por un lado, el modelo estructural nos permite afirmar que el rendimiento académico puede ser explicado, tanto por la estructura de controversia/conflicto, como por las instancias de ayuda, porque los índices incrementales presentados se encuentran en el intervalo aceptable-bueno.

En efecto, los alumnos encuentran en el proceso interactivo marcado por la controversia diversas oportunidades para implicarse en procesos de construcción conjunta de significados, apoyándose para ello en la posibilidad de coordinar y controlar mutuamente sus aportaciones y puntos de vista. Por ello, podemos afirmar que las situaciones de interacción entre iguales marcadas por la controversia constituyen un espacio ideal para que los alumnos utilicen plenamente las potencialidades del lenguaje como instrumento de aprendizaje, por cuanto supone la toma de conciencia del propio conocimiento y la necesidad de expresarlo de manera explícita. Como mecanismo de aprendizaje en la interacción entre iguales, creemos con Webb (1991) que debe su importancia al hecho de que, para hacerlo, se requiere aclarar, profundizar y reorganizar los propios conocimientos detectando y resolviendo eventuales lagunas e imprecisiones. Igualmente, este factor alcanza su máxima expresión y potencialidad para el aprendizaje, cuando en la resolución de una tarea los estudiantes tratan de que sus compañeros comprendan sus argumentos (orientación hacia el otro).

Con relación a la instancia “dar ayuda” aunque en la mayor parte de los casos se ajustaba bastante a la demanda realizada y se aplicaba a la resolución de los problemas, se centraba más en los productos que en los procesos, de ahí probablemente el menor peso de este factor en las explicaciones sobre el rendimiento. De cualquier forma, habría que tener en cuenta que la instancia “pedir ayuda” resultaba, a veces, incompleta o ambigua.

De cualquier forma, se pudo constatar que, como afirmaba Webb (1991), durante el trabajo en pequeños grupos, los estudiantes que demandaron ayuda y la recibieron mejoraron su rendimiento individual posterior. De esta manera pudimos constatar que cuando los estudiantes ponen adecuadamente en marcha las instancias de ayuda (ofrecer y recibir ayuda de manera mutua), los procesos de co-construcción de los conocimientos a lo largo de la propia interactividad son más firmes y duraderos.

Por otro lado, el modelo de medida es muy ajustado y explica una parte altamente significativa de la varianza de los factores. Esto quiere decir que los indicadores utilizados (variables observables) son un buen instrumento de medida.

En este orden de cosas hay que hacer una salvedad a los instrumentos de ambos factores. En primer lugar, la variable observable “respeta turnos de intervención” resulta un mal indicador para medir la controversia, probablemente porque una vez que se ha dejado que se exponga la información completa o la totalidad de la demanda de ayuda, quién intervenga resulta irrelevante para la rentabilidad del proceso. En segundo lugar, la variable observable “ofrece sugerencias y explicaciones sobre los distintos aspectos de la demanda” también resulta un pobre indicador del factor y un nulo predictor del rendimiento académico, las razones habría que buscarlas porque todos los alumnos, en todos los grupos, daban por sentado que todos habían comprendido las consignas y si existían diferentes formas de ser interpretadas en el proceso de interacción se iban aclarando estas divergencias.

Finalmente, el modelo de medida para el factor tres (rendimiento académico) se ha mostrado altamente eficiente y viene a demostrar la importancia de evaluar el conocimiento declarativo en matemáticas y no circunscribir la evaluación a aspectos puramente procedimentales y, especialmente algorítmicos.

Por tanto, estamos ante un modelo que viene a dar cuenta de cómo ***la interacción cooperativa en el aula que fomenta las controversias entre puntos de vista moderadamente divergentes y que posibilita el pleno desarrollo de las instancias de ayuda, favorece el rendimiento académico de los alumnos en matemáticas***.

LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Los procesos y mecanismos considerados en nuestro trabajo permiten explicar, al menos parcialmente, la potencialidad de la interacción entre alumnos desde un punto de vista esencialmente cognitivo; por decirlo en términos de la concepción constructivista del aprendizaje escolar y de la enseñanza, dan cuenta, al menos parcialmente, de por qué la interacción entre alumnos puede facilitar los procesos de construcción de significados implicados en el aprendizaje escolar. La potencialidad de este tipo de interacción, sin embargo, no se agota en estos aspectos cognitivos. Por el contrario, en la interacción entre alumnos se ponen en juego también procesos y mecanismos de carácter motivacional, afectivo y relacional que contribuyen también a explicar su efectividad para el aprendizaje escolar y para el desarrollo de capacidades de diverso tipo por parte de los alumnos. De hecho, en nuestra experiencia, las actividades las iniciábamos con ejercicios encaminados a motivar a los alumnos en los contenidos sobre el tema objeto de estudio. Es decir que utilizando de nuevo términos de la concepción constructivista, podemos afirmar que la interacción entre alumnos puede promover no sólo procesos de construcción de significados, sino también de atribución positiva de sentido al aprendizaje escolar.

La aproximación tradicional a este tipo de procesos ha centrado su interés en cómo asegurar la motivación y disposición de los alumnos para que, una vez distribuidos en grupos, puedan actuar de manera auténticamente cooperativa. En el intento de responder a esta pregunta, encontramos dos posturas claramente diferenciadas entre los investigadores.

En primer lugar estarían aquellos que sostienen que la motivación se ubicaría en las estructuras de tarea (Wen, 2013) y de meta (Bryant, 2009), de manera que para conseguir esa motivación habría que generar tareas que, en su realización se lograra establecer una interdependencia positiva de objetivos y recursos entre los alumnos: esta interdependencia se vincula al hecho de que los miembros del grupo dependan unos de otros para lograr un objetivo grupal y de que cada miembro del grupo necesite utilizar recursos o información de la que inicialmente disponen otros miembros distintos del grupo. Desde esta postura, por tanto, asegurar la interdependencia positiva de los objetivos y los recursos de resolución de las tareas de los distintos alumnos participantes es la clave motivacional para conseguir que todos ellos se impliquen auténticamente en un trabajo cooperativo y se beneficien de su potencialidad.

En segundo lugar, estarían aquellos investigadores para los que la clave motivacional del trabajo cooperativo se encuentra en la estructura de la recompensa que obtienen los alumnos a partir del trabajo en grupo, es decir, en la relación entre la recompensa obtenida por todos y cada uno de los miembros del grupo (Ames, 1981; Hurley, Allen y Boykin, 2009; Slavin, 1977). Algunos autores han señalado, a este respecto, que la interdependencia de objetivos y recursos no es suficiente para asegurar la efectividad del trabajo en grupo y que ésta depende de que los alumnos reciban recompensas grupales basadas en el rendimiento individual de cada uno de los miembros; es decir, que haya recompensas idénticas para todos los miembros del grupo y, al mismo tiempo, que estas recompensas se hagan en función del rendimiento individual de todos y cada uno de ellos, y no en base a una medida de rendimiento global del grupo (Slavin, 1995).

Ambas posturas coinciden, por tanto, en que la cooperación exitosa entre alumnos requiere una fuerte interdependencia y coordinación que les lleve a una auténtica cooperación, y también en que los aspectos motivacionales son esenciales para lograr esa interdependencia, pero difieren radicalmente en cuanto a los elementos necesarios y suficientes para alcanzarla.

En su revisión de esta polémica, Cohen (1994) afirmaba que la mera interdependencia de objetivos y recursos no garantiza una interacción efectiva entre los alumnos, pero también sostiene que la interdependencia de recompensas no es un factor imprescindible para la efectividad del trabajo en grupo. Por ello, apuesta por reformular los términos de la discusión, superando las explicaciones basadas en los conceptos de interdependencia de objetivos y recursos y de estructura de recompensa para centrar los análisis en cómo las diferentes instrucciones específicas y tareas concretas que se plantean a los alumnos promueven o no que éstos se impliquen en un auténtico trabajo cooperativo.

Nosotros entendemos, siguiendo las sugerencias de Colomina y Onrubia (2004), que una vía relevante para superar de manera fructífera la polémica anterior es analizar de manera más específica el conjunto de relaciones psicosociales puestas en juego en la interacción entre alumnos, entendidas como variables mediadoras entre una determinada estructura de organización de las actividades y tareas en el aula (de objetivos y recursos o de recompensa) y sus efectos desde el punto de vista de la atribución de sentido al aprendizaje por parte de los alumnos. Desde esta perspectiva, se apunta que la potencialidad de las situaciones cooperativas entre alumnos estaría vinculada a procesos motivacionales, como la percepción de competencia o la autonomía en la realización de las tareas, y a procesos afectivo-relacionales, como los sentimientos de pertenencia al grupo o de satisfacción y orgullo ante el éxito escolar. Las posibilidades de las situaciones cooperativas para satisfacer las necesidades de autonomía y control de su propio aprendizaje, fomentar una motivación intrínseca orientada hacia el propio aprendizaje, reforzar la atribución de importancia al propio esfuerzo o para facilitar los sentimientos de aceptación, apoyo mutuo y autoestima elevada serían entonces, desde esta perspectiva, otras tantas claves para explicar por qué la interacción entre alumnos puede resultar especialmente favorecedora de una atribución positiva de sentido al aprendizaje escolar por parte de los alumnos

Esto supone elaborar modelos causales más complejos con variables latentes de segundo orden y diseños en panel.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

Allport, F. H. (1924). *Social Psychology*. Boston, MA: Houghton Mifflin.

Ames, C. (1981). Competitive Versus Cooperative Reward Structures: The Influence of Individual and Group Performance Factors on Achievement Attributions and Affect. *American Educational Research Journal*, *18* (3), 273-287.

Barbin, E. y Tzanakis, C. (2014). History of Mathematics and Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 255-260). New York, NY: Springer Publisher.

Batanero, C. (2014). Probability Teaching and Learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 491-496). New York, NY: Springer Publisher.

Ben-Zvi, D. (2014). Data Handling and Statistics Teaching and Learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 137-140). New York, NY: Springer Publisher.

Beltrán, J. (1993). *Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje*. Madrid: Síntesis.

Berger, P. L. y Luckmann, T. (2001). *La construcción social de la realidad*. Madrid: Amorrortu Editores.

Blaye, A. y Light, P. H. (1993). Collaborative problem solving whith hypercard: The influence of peer interaction on planning and information handling strategies. En C. O'Malley (Ed.), *Computer Supported Collaborative Learning* (pp. 108-119). Heidelberg: Springer-Verlag.

Brown, K. y Cole, M. (2001). Cultural historical activity theory and the expansion of opportunities for learning after school. En M. J. Packer y M. B. Tappan (Eds.), *Cultural and critical perspectives on human development*. Nueva York: SUNY Press.

Browne, M. W y Cudeck, R. (1993). Alternative ways of assessing model fit. En K. A. Bollen y J. S. Long (Eds.), *Testing structural equation models (*pp.136-162). London: Sage.

Bruner, J. S. (1978). The role of dialogue in language acquisition. En A. Sinclair, R. J. Jarvella y W. J. M. Levelt (Eds.), *The child's conception of language* (pp. 241-255). New York, NY: Springer-Verlag.

Bruner, J. S. (1983). *Child's Talk: Learning to use language*. Oxford: Oxford University Press.

Bruning, R. H.; Schraw, G. J. y Ronning, R. R. (2002). *Psicología cognitiva e instrucción*. Madrid: Alianza Editorial.

Bryant, B. (2009). Goal Structure and Collaborative Learning. *Teaching of Psychology, 5* (4), 182-185.

Case, R., Hayward, S., Lewis, M. y Hurst, P. (1988). Toward a neo-Piagetian theory of cognitive and emotional development. *Developmental Review, 8* (1), 1-51.

Cazden, C. (1991). *El discurso en el aula. El lenguaje de la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Paidós-MEC.

Cellérier, G. (1996). El constructivismo genético hoy día. En B. Inhelder y G. Cellérier (Comps.), *Los senderos de los descubrimientos del niño. Investigaciones sobre las microgénesis cognitivas* (pp. 223-257). Barcelona: Paidós [Publicación original, 1992].

Chen, H. (2011). A Case Study of Cooperative Learning in Mathematics: Middle School Course Design. *Journal of Mathematics Education, 4* (1), 75-88.

Cheong, C. (2010). From Group-based learning to Cooperative Learning: A metacognitive approach to Project-based group supervision. *Informing Science: The International Journal of an Emerging Transdiscipline, 13* (1), 73-85.

Chipman, S. F., Brush, L. R. y Wilson, D. M. (2014). *Women and Mathematics: Balancing the equation.* New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Colomina, R. y Onrubia, J. (2004). Interacción educativa y aprendizaje escolar: la interacción entre alumnos. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Comps.), *Desarrollo psicológico y educación. 2. Psicología de la educación escolar* (pp. 415-436). Madrid: Alianza.

Colomina, R., Onrubia, J. y Rochera, M. J. (2004). Interactividad, mecanismos de influencia educativa y construcción del conocimiento en el aula. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Comps.), *Desarrollo psicológico y educación. 2. Psicología de la educación escolar* (pp. 437-458). Madrid: Alianza.

Coll, C. (2001). Constructivismo y educación: la concepción constructivista de la enseñanza y el aprendizaje. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Comps.), *Desarrollo psicológico y educación 2. Psicología de la educación escolar* (pp. 157-186). Madrid: Alianza Editorial.

Coob, P. y Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist, 31*, 175-190.

Cress, U. y Hesse, F. W. (2013). Quantitative methods for studying small groups. En C. E. Hmelo-Silver, C. A. Chinn, C. K. K. Chan y A. M. O'Donnell (Eds.), *The International Handbook of Collaborative Learning* (pp. 93-111). New York, NY: Routledge.

Damon, W. y Phelps, E. (1989). Critical distinctions among three approaches to peer education. *International Journal of Educational Research, 13*, 9-19.

Darnon, C., Butera, F. y Mugny, G. (2008). *Des conflits pour apprendre.* Grenoble: Presses Universitaires de Grenoble.

Davidson, N. (1971). The small group discovery method as applied in calculus instruction. *American Mathematical Monthly, 78*, 789-791.

Davidson, N. (1979). The small group discovery methods: 1967-1977. En J. Harvey y T. Romberg (Eds.), *Problem solving studies in Mathematics* (pp. 34-58). Madison: University of Wisconsin.

Davidson, N. (1980). Small-group learning and teaching in mathematics. En S. Sharan (Ed.), *Cooperation in Education* (pp. 54-75). Provo, UT: Bringham University Press.

Davidson, N. (Ed.) (1990). *Cooperative Learning in Mathematics: A Handbook for Teachers*. Menlo Park, CA: Addison-Wesley.

Davidson, N. (2013). Small-group learning and teaching in mathematics. A selective review of the research. En R. Slavin, S. Sharan, S. Kagan, R. Hertz-Lazarowitz, C. Webb y R. Scmuck (Eds.). *Learning to cooperate, cooperating to learn* (pp. 211-230). New York, NY: Plenum Press.

Davidson, N. y Lambdin-Kroll, D. (1991). An Overview of Research on Cooperative Learning Related to Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 22* (5), 362-365.

De Backer, L., Van Keer, H. y Valcke, M. (2012). Exploring the potential impact of reciprocal peer tutoring on higher education students' metacognitive knowledge and regulation. *Instructional Science: An International Journal of the Learning Sciences, 40* (3) 559-588.

De Lisi, R. y Golbeck, S. L. (1999). Implications of Piagetian theory for peer learning. En A. M. O'Donnell y A. King (Eds.), *Cognitive Perspectives in peer learning* (pp. 3-38). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Delors, J. (1996.): Los cuatro pilares de la educación. En *La educación encierra un tesoro*. Informe a la UNESCO de la Comisión internacional sobre la educación para el siglo XXI (pp. 91-103). Madrid, España: Santillana/UNESCO.

Dennen, W. P. y Hoadley, C. (2013). Designing Collaborative Learning through Computer Support. En C. E. Hmelo-Silver, C. A. Chinn, C. K. K. Chan y A. M. O'Donnell (Eds.), *The International Handbook of Collaborative Learning* (pp. 389-402). New York, NY: Routledge.

DeSeCo (1999). Annual Report. OCDE.

DeSeCo (2003). Summary of the Final Report. OCDE.

Deutsch, M. (1949a). A theory of cooperation and competition. *Human Relations, 2*, 129–152.

Deutsch (1949b). An experimental study on the effects of cooperation and competition upon group process. *Human Relations, 2*, 199–231.

Deutsch, M. (1973). *The Resolution of conflict: Constructive and destructive processes*. New Haven, CT: Yale University Press.

Deutsch, M. (2003). Cooperation and conflict: A personal perspective on the history of the Social Psychological Study of conflict resolution. En M. A. West, D. Tjosvold y K. G. Smith (Eds.), *International Handbook of Organizational Teamwork and Cooperative Working* (pp. 9-44). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Deutsch, M. (2014). Cooperation, competition, and conflict. En P. T. Coleman, M. Deutsch y E. C. Marcus (Eds.), *The Handbook of Conflict Resolution. Theory and Practice* (3-28). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Dewey, J. (1900). *The school and Society*. Chicago, IL: University of Chicago Press. Recuperado de https://ia601408.us.archive.org/33/items/schoolsociety00dewerich/schoolsociety00dewerich.pdf

Dewey, J. (1916). *Democracy and Education: An introduction to the philosophy of education*. New York, NY: The MacMillan Co. Recuperado de https://archive.org/details/democracyeducati1916dewe

Dillenbourg, P. (1999). What do you mean by "collaborative learning"? En P. Dillenbourg (Ed.), *Collaborative learning: Cognitive and computational approaches* (pp. 1-16). Amsterdam, NL: Pergamon, Elsevier Science.

Dillenbourg, P., Baker, M., Blaye, A. y O'Malley, C. (1996). The evolution of research on collaborative learning. En E. Spada y P. Reiman (Eds.) *Learning in Humans and Machine: Towards an interdisciplinary learning science*. (pp. 189-211). Oxford: Elsevier.

Druyan, S. (2001). A comparison of four types of cognitive conflict and their effect on cognitive development. *International Journal of Behavioural Development, 3*, 226-236.

Edwards, D. (1997). *Discourse and Cognition.* Londres: Sage.

Erdem, A. (2009). Preservice teachers’ attitudes towards cooperative learning ın mathematics course. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 1* (1), 1668–1672.

Esmonde, I. (2009). Mathematics learning in groups: Analyzing equity in two cooperative activity structures. *Journal of the Learning Sciences, 18* (2), 247-284.

Eskay M., Onu V. C., Obiyo N., y Obidoa M. (2012). Use of peer tutoring, cooperative learning, and collaborative learning: Implications for reducing anti-social behavior of schooling adolescents. *US-China Education Review, 11*, 932-945.

Eurydice (2002). *Las competencias clave. Un concepto en expansión dentro de la educación obligatoria.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Recuperado de http://comclave.educarex.es/pluginfile.php/126/mod_resource/content/2/Competencias_clave_Eurydice.pdf

Forman, E. A. (1989). The role of peer interaction in the social construction of mathematical knowledge. En N. Webb (Eds.), *Peer Interaction, Problem Solving, and Cognition* (pp. 55-70). Oxford: Pergamon Press.

Fischer, K. y Bidell, T. (2006). Dynamic development of psychological structures in action and thought. En W. Damon y L. R. M. (Eds.), *Handbook of child psychology: Theoretical models of human development* (pp. 1-62). Nueva York: John Wiley & Sons.

Gagné, N. y Parks, S. (2013). Cooperative learning tasks in a Grade 6 intensive ESL class: Role of scaffolding. *Language Teaching Research, 17*, 188-209.

García, M. T. (2013). *El aprendizaje cooperativo en matemáticas en los dos primeros cursos de la ESO* (Trabajo Fin de Máster no publicado), Universidad Internacional de la Rioja, Logroño. Recuperado de http://reunir.unir.net/handle/123456789/1723

Garfield, J. (2013). Cooperative learning revisited: From an instructional method to a way of life. *Journal of Statistics Education*, *21* (2). Recuperado de http://www.amstat.org/publications/jse/v21n2/garfield.pdf

Gillièron, Ch. (1996). L'émergence d'un constructivisme psychologique: Epistémologie génétique et étude du développement. *Anuario de Psicología, 69*, 19-42.

Gillies, R. M. (2003). Structuring cooperative group work in classrooms. *International Journal of Educational Research, 39* (1-2*), 35-49.*

Gillies, R. M., y Ashman, A. F. (2003). An historical review of the use of groups to promote socialization and learning. En R. M. Gillies y A. F. Ashman (Eds.), *Co-operative Learning: The social and intellectual outcomes of learning in groups* (pp. 1-18). New York, NY: RoutledgeFalmer.

Golbeck, S. L. y Sinagra, K. (2000). Effects of gender and collaboration on college students'performance on a Piagetian spatial task. *Journal of Experimental Education, 69* (1), 22-31.

Goldsmith, L. T., Doerr, H. M. y Lewis, C. C. (2014). Mathematics teachers' learning: a conceptual framework and synthesis of research. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17* (1), 5-36.

Goos, M., Galbraith, P., Renshaw, P. y Geiger, V. (2003). Perspectives on technology mediated learning in secondary school mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior, 22* (1), 73–89.

Gulfer, C. y Kamuran, T. (2015). Efficacy of the Cooperative Learning Method on Mathematics Achievement and Attitude: A Meta-Analysis research. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *15* (2), 553-559.

Halford, G.S. (2005). Development of Thinking. En K. J. Holyoak y R. G. Morrison (Eds.), *The Cambridge Handbook of Thinking and Reasoning* (pp. 529-558). Nueva York: Cambridge University Press.

Hurley, E., Allen, B. A. y Boykin, A. W. (2009). Culture and the interaction of student ethnicity with reward structure in group learning. *Cognition and Instruction*, *27* (2).121-146.

Hancock, G. S. (1999). A sequential Scheffé-type respecification procedure for controlling Type I error in exploratory structural equation model modification. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 6* (2), 158-168. DOI: 10.1080/10705519909540126

Hancock, G. R**.**, Lawrence, F. R. y Nevitt, J. (2000). Type I error and power of latent mean methods and MANOVA in factorially invariant and noninvariant latent variable systems. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal*, *7*, 534-556.

Healye, L., Hoyles, C. y Sutherland, R. (1990). *The role of peer group discussion in mathematical environments*. London: Institute of Education, Department of mathematics, Statistics and Computing.

Hernández, J. (1978). Introducción. En J. Hernández (Ed.), *La enseñanza de las matemáticas modernas* (pp. 6-15). Madrid: Alianza.

Hogan, D. y Tudge, J. (1999). Implications of Vygotsky's theory for peer learning. En A. O'Donnell y A. King (Eds.), *Cognitive perspectives on peer learning* (pp. 39-65). New Jersey: Erlbaum Press.

Hooper, S. (1992). Cooperative learning and computer-based instruction. *Educational Technology Research and Development, 40* (3), 21-38.

Horn, I. S. (2012). *Strength in numbers: Collaborative learning in secondary mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hossain, A. y Tarmizi, R. A. (2013). Effects of cooperative learning on students' achievement and attitudes in secondary mathematics. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 93*, 473-477.

Hsiung, C. (2012). The effectiveness of cooperative learning. *Journal of Engineering Education, 101* (1), 119-137.

Hutchins, E. (1995). *Cognition in the wild*. Cambridge, MA: MIT Press.

Inhelder, B. y Cellérier, G. (Eds.). (1992). *Los senderos de los descubrimientos del niño*: *Investigaciones sobre las microgénesis cognitivas.* Barcelona: Paidós.

Jaccard, J. Y Wan, CH. (1996). *LISREL approaches to interaction effects in multiple regression, Thousand Oaks, Sage*.

Jackson, A. C., Fletcher, B. y Messer, D. J. (1992). Ehen talking doesn't help: An investigation of microcomputer-based group problem solving. *Learning and Instruction, 2*, 185-197.

Janssen, J., Cresse, U., Erkens, G. y Kirschner, P. A. (2013). Multilevel Analysis for the analysis of collaborative learning. En C. E. Hmelo-Silver, C. A. Chinn, C. K. K. Chan y A. M. O'Donnell (Eds.), *The International Handbook of Collaborative Learning* (pp. 112-125). New York, NY: Routledge.

Jiang, B. (2014). Web-based cooperative learning in college chemistry teaching. *International Journal of Emerging Technologies in Learning, 9* (2), 45-47.

Johnson, D. W. y Johnson, R. T. (1974). Instructional goal structure: Cooperative, competitive or individualistic. *Review of Educational Research, 44*, 213-240.

Johnson, D. W. y Johnson, R. T. (2009). An educational psychology success story: Social Interdependence Theory and Cooperative Learning. *Educational Research, 38* (5), 365-379.

Johnson, D. W., Johnson, R. T. y Tjosvold, D. (2014). Constructive Controversy: The Value of Intellectual Opposition. En P. T. Coleman, M. Deutsch y E. C. Marcus (Eds.), *The Handbook of Conflict Resolution: Theory and Practice* (76-103). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Johnson, D. W., Maruyama, G., Johnson, R. T., Nelson, D. y Skon, L. (1981). Effects of cooperative, competitive, and individualistic goal structures on achievement: A Meta-analysis. *Psychological Bulletin, 89*, 47-62.

Johnson, D. W., Skon, L. y Johnson, R. T. (1980). Effects of cooperative, competitive, and individualistic conditions on children problem solving performance. *American Educational Research Journal, 17*, 83-93.

Jonassen, D.H., Beissner, K. y Yacci, M. (1993). *Structural knowledge: Techniques for representing, conveying, and acquiring structural knowledge.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Jöreskog, K.G. (1974). Analyzing psychological data by structural analysis of covariance matrices. En R. C. Atkinson, D. H. Krantz, R. D. Luce y P. Suppes (Eds.). *Contemporary developments in mathematical psychology* (pp. 1-56). San Francisco, CA: Freeman.

Jöreskog, K.G. (1979). Statistical estimation of structural models in longitudinal developmental investigations. En J. R. Nesselroade y P. B. Baltes (Eds.), *Longitudinal research in the study of the behavior and development*. New York: Academic Press.

Jöreskog, K.G. y Sörbom, D., (1982). Recent developments in Structural Equation modeling. *Journal of Marketing Research, 19*, 404–416.

Jöreskog, K.G. y Sörbom, D., (1989).LISREL 7: *A guide to the program and applications*. Chicago: SPSS Inc.

Kalaian, S. A. y Kasim, R. M. (2014). A Meta-analytic review of studies of the effectiveness of small-group learning methods on statistics achievement. *Journal of Statistics Education, 22* (1), Recuperado de http://www.amstat.org/publications/jse/v22n1/kalaian.pdf

Ke, F. y Grabowski, B. (2007). Gameplaying for maths learning: cooperative or not? British Journal of Educational Technology, 38 (2), 249-259.

Kidron, I. (2014). Calculus teaching and learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 69-75). New York, NY: Springer Publisher.

Kieran, C. (2014). Algebra teaching and learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 27-32). New York, NY: Springer Publisher.

Kilpatrick, J. (2014). History of research in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 267-272). New York, NY: Springer Publisher.

Kline, M. (1973). *Why Johnny can't add: The failure of the new math*. New York, NY: St. Martin’s Press.

Kotsopoulos, D. (2014). The case of Mitchell's cube: Interactive and reflexive positioning during collaborative learning in mathematics. *Mind, Culture, and Activity, 21* (1), 34-52.

Kruger, A. C. (1992). The effect of peer and adult-child transactive discussions on moral reasoning. *Merrill-Palmer Quarterly, 38,* 191-211.

Lassegard, J. P. (2008). The effects of peer tutoring between domestic and international students: The tutor system at Japanese universities. *Higher Education, Research and Development, 27* (4), 357-369.

Lewin, K. (1948) *Resolving social conflicts: Selected papers on group dynamics*. New York: Harper & Brothers.

Leikin, R. y Zaslavsky, O. (1997). Facilitating Student Interactions in Mathematics in a Cooperative Learning Setting. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28* (3), 331-354.

Lesh, R. A., Sriraman, B. y English, L. (2014). Theories of learning mathematics. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 615-623). New York, NY: Springer Publisher.

Lewin, K., Lippitt, R. y White, R. (1939). Patterns of aggressive behaviour in experimentally created social climates. *The Journal of Social Psychology, 10,* 271-299.

Light, P. L. y Littleton, K. (1994). Cognitive approaches to group work. En P. Kutnick & C. Rogers (Eds.), *Groups in schools* (pp. 87-103). London: Cassell.

Looi, C. K., Wong, L. H. y Song, Y. (2013). Mobile Computer-Supported Collaborative Learning. En C. E. Hmelo-Silver, C. A. Chinn, C. K. K. Chan y A. M. O'Donnell (Eds.), *The International Handbook of Collaborative Learning* (pp. 420-436). New York, NY: Routledge.

Mevarech, Z. R. (1991). Learning mathematics in different mastery environments. *Journal of Educational Research, 84*, 225-231.

Mahn, H. y John-Steiner, V. (2013). Vygotsky and sociocultural approaches to teaching and learning. En W. M. Reynolds y G. E. Miller (Eds.), *Handbook of Psychology. Vol. 7: Educational Psychology* (pp. 117-146). Hoboken, NJ: Wiley & Sons.

Mao, X., Harring, J. R. y Hancock, G. R. (2015). A note on the specification of error structures in latent interaction models. *Educational and Psychological Measurement*, *75*, 5-21.

Martí, E, (1997). El constructivismo y sus sombras. *Anuario de Psicología, 69*, 3-18.

May, M., y Doob, L. (1937). *Cooperation and competition*. Social Sciences Research Council, 25. Recuperado de https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015008023809;view=2up;seq=1

Mayer, R. E. (1992). Guiding students" processing of scientific information in text. En M. Pressley, K. R. Harris y J. T. Guthrie (Eds.), *Promoting academic competence and literacy in school* (pp. 243-258). Nueva York: Academic Press.

Mayer, R. E. (2002). Psicología educativa. El aprendizaje en las áreas de conocimiento. Madrid: Pearson Prentice-Hall.

Mead, M. (1937). *Cooperation and competition among primitive peoples*. New York, NY: McGraw-Hill. Recuperado de https://archive.org/details/cooperationandco033408mbp

Michaelsen, L. K., Parmelee, D. X., McMahon, K. K. y Levine, R. E. (Eds.). (2008). *Team-based learning for health professions education: A guide to using small groups for improving learning*. Sterling, VA: Stylus Publishing.

Millis, B. J. (2010). Why faculty should adopt cooperative learning approaches. En B. J. Millis (Ed.), *Cooperative learning in higher education: Across the disciplines, across the academy* (pp. 1-10). Sterling, VA: Stylus Publishing.

Naomi, M. W. y Githua, B. N. (2013). Effects of jigsaw cooperative learning strategy on students' achievement in secondary school mathematics in Laikipia east district, Kenya. *Asian Journal of Management Sciences and Education, 2* (3), 177-188.

Niss, M. A. (2014). Functions Learning and Teaching. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 238-241). New York, NY: Springer Publisher.

Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, A., Naccarella, D. Leuders,T. y Wirtz, M. (2015). Students' competencies in working with functions in secondary mathematics education-empirical examination of a competence structure model. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13* (3), 657-682.

Njoroge, J. N. y Githua, B. N. (2013). Effects of cooperative learning/ teaching strategy on learners' mathematics achievement by gender. *Asian Journal of Social Sciences & Humanities, 2* (2), 567-576.

Novotná, J., Moraová, H. y Tatto, M. (2014). Mathematics Teacher Education Organization, Curriculum, and Outcomes. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 425-431). New York, NY: Springer Publisher.

Nunnery, J. A., Chappell, S. y Arnold, P. (2013). A Meta-analysis of a cooperative learning model's effects on student achievement in mathematics. *Cypriot Journal of Educational Sciences, 8* (1), 34- 48.

Nuthall, G. (1997). Understanding student thinking and learning in the classroom. En B. J. Biddle, T. L. Good e I. F. Goodson (Eds.), *International Handbook of Teachers and Teaching* (pp. 681-768). New York, NY: Springer.

O'Donnel, A. M. y Hmelo-Silver, C. H. (2013). What is collaborative learning? An overview. En C. E. Hmelo-Silver, C. A. Chinn, C. Chan y A. M. O'Donnel (Eds.), T*he international handbook of collaborative learning* (pp. 1-16). New York, NY: Routledge.

O'Donnell, A. M. y King, A. (Eds.). (1999). *Cognitive Perspectives in Peer Learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Okoroma, F. N. (2013). The Impact of peer tutoring on librarians in training at the University of Ibadan, Nigeria. *Educational Research and Reviews, 8* (21), 2059-2070.

Onrubia, J., Rochera, M. J. y Barberá, E. (2004). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Comps.), *Desarrollo psicológico y educación: 2. Psicología de la educación escolar* (487-508). Madrid: Alianza Editorial.

Osta, I. (2014). Mathematics curriculum evaluation. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 417-423). New York, NY: Springer Publisher.

Palincsar, A. S. y Brown, A. L. (1984). Reciprocal teaching of comprehension-fostering and comprehension-monitoring activities. *Cognition and Instruction, 1* (2), 117-175.

Palincsar, A. S., Brown, A. L. y Campione, J. C. (1993). Dialogues among communities of first grade learners. En E. Foreman, N. Minnick y A. Stone (Eds.), *The institutional and social context of mind: New directions in Vygotskian theory and research* (pp. 43-57). Oxford: Oxford University Press.

Palincsar, A. S., Hapgood, S. y Magnusson, S. J. (2007). Examining "expert guidance" in the context of inquiry-based science teaching: Applying lenses that Ann Brown honed to the study of teachers' practice. En J. C. Campione, K. Metz y A. S. Palincsar (Eds.), *Children's learning in the laboratory and in the classroom: Essays in honor of Ann Brown* (pp-113-136). New York, NY: Routledge.

Papanastasiou, C. (2000). Effects of attitudes and beliefs on mathematics achievement. *Studies in Educational Evaluation, 26* (1), 27–42.

Pascual-Leone, J. (1988). Affirmations and negations, disturbances and contradictions, in understanding Piaget: Is his later theory causal? *Contemporary Psychology, 33*, 420-421.

Piaget, J. (1923). *Le langage et la penseé chez l'enfant*. Neuchâtel: Delachaux & Niestlé.

Piaget, J. (1965). *Études sociologiques*. Ginebra: Librairie Droz.

Piaget, J. (1974). *Réussir et comprendre*. París: Presses Universitaires de France.

Piaget, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives*. Paris: P.U.F.

Piaget, J. (1976). *Le comportement, moteur de l'évolution.* Paris: Gallimard.

Pons, R. M., González-Herrero, M. E. y Serrano, J. M. (2008). Aprendizaje cooperativo en matemáticas: Un estudio intracontenido. *Anales de Psicología, 24* (2), 253-261.

Pons, R. M., Prieto, M. D., Lomeli, C. Bermejo, M. R. y Bulut, S. (2014). Cooperative learning in mathematics: A study on the effects of the parameter of equality on academic performance. *Anales de Psicología, 30* (3), 832-840.

Pons, R. M. y Serrano, J. M. (2011). La adquisición del conocimiento: Una perspectiva cognitiva en el dominio de las matemáticas*. Educatio Siglo XXI, 29* (2), 117-138.

Pons, R. M., Serrano, J. M., Luna, E., Cordero, G., Lomeli, C. y Moreno, T. (2012). Validación de un instrumento para analizar el parámetro de mutualidad en el proceso de interacción entre iguales. *Revista Mexicana de Psicología, 29* (1), 86-96.

Pons, R. M. y Serrano, J. M. (2015). Cooperative learning in University education: An analysis of the effects of the relationships of collaboration, cooperation and peer-tutoring upon academic performance. En R. Gillies (Ed.), *Collaborative learning: Developments in research and practice* (pp. 295-318). New York: Nova.

Potter, J. (1998). *La representación de la realidad. Discurso, retórica y construcción social.* Barcelona: Paidós.

Pozo, I. (2005). *Aprendices y Maestros. La nueva cultura del aprendizaje.* Madrid: Alianza Editorial.

Psaltis, C. y Zapiti, A. (2014). *Interaction, communication and development*. New York, NY: Routledge.

Puntambekar, S. (2013). Mixed methods for analyzing collaborative learning. En C. E. Hmelo-Silver, C. A. Chinn, C. K. K. Chan y A. M. O'Donnell (Eds.), *The International Handbook of Collaborative Learning* (pp. 220-229). New York, NY: Routledge.

Punset, E. (2011). *Excusas para no pensar. Cómo nos enfrentamos a las incertidumbres de nuestra vida*. Barcelona: Ediciones Destino.

Prawat, R. S. (1999). Social constructivism and process-content distinction as viewed by Vygotsky and pragmatism. *Mind, Culture, and Activity, 6* (4), 255-273.

Rogoff, B. (1994). Developing understanding of the idea of communities of learners. *Mind, Culture, and Activity, 1* (4), 209-229.

Rogoff, B. (2006). Los tres planos de la actividad sociocultural: la apropiación participativa, la participación guiada y aprendizaje. En J. V. Wertsch, P. del Río y A. Álvarez (Eds.), *La mente sociocultural: Aproximaciones teóricas y aplicadas* (pp. 111-128). Madrid: Fundación Infancia y Aprendizaje.

Roseth, C. J., Johnson, D. W. y Johnson, R. T. (2008). Promoting early adolescents' achievement and peer relationships. *Psychological Bulletin, 134*, 223–246. doi: 10.1037/0033-2909.134.2.223

Rubia, B. y Guitert, M. (2014). ¿La revolución de la enseñanza? El aprendizaje colaborativo en entornos virtuales (CSCL). *Comunicar*, *42 (*XXI), 10-14. doi: http://dx.doi.org/10.3916/C42-2014-a2

Rychen, D. S. y Salganik, L. H. (Eds). (2001). Definition and Selection of Competencies: Theoretical and conceptual foundations. Kirkland, WA: Hogrefe & Huber Publishers.

Rychen, D. S. y Salganik, L. H. (Eds.) (2003). *Key Competencies for a successful Life and a Wellf-functioning society*. Cambridge, MA: Hogrefe &Huber Publishers.

Ryle, G. (2009). *The Concept of Mind*. New York: Routledge. (Trabajo original publicado en 1949). Recuperado de http://s-f-walker.org.uk/pubsebooks/pdfs/Gilbert_Ryle_The_Concept_of_Mind.pdf

Salganik, L. H., Rychen, D. S., Moser, U. y Konstant, J. W. (2000). *Definición y selección de competencias. Proyectos sobre Competencias en el Contexto de la OCDE*. *Análisis de base teórica y conceptual*. Neuchâtel: OCDE.

Salganik, L. H.; Rychen, D. S.; Moser, U. y Konstant, J. W. (Eds.). (1999). Projects on competencies in the OECD context: Analysis of theoretical and conceptual foundations. Neuchâtel: SFSO, OECD, ESSI.

Salomon, G. (2001). No hay distribución sin la cognición de los individuos. Un enfoque interactivo dinámico. En G. Salomon (Comp.), *Cogniciones distribuidas. Consideraciones psicológicas y educativas* (pp. 153-184). Buenos Aires: Amorrortu.

Saris, W. y Stronkhort, H. (1984). *Causal modelling in non-experimental research: An introduction to the LISREL approach.* Amsterdam: Sociometric Research Foundation.

Schwier, R. A. (1999). *Turning learning environments into learning communities: Expanding the notion of interaction in multimedia*. World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications, Seattle, WA, Association for the Advancement of Computers in Education.

Selznik, P. (1996). In search of community. En W. Vitek y W. Jackson (Eds.), *Rooted in the land: Essays on community and place* (pp. 195-203). New Haven: Yale University Press.

Serrano, J. M. (1991). *Un modelo de aprendizaje cooperativo para la enseñanza de las matemáticas*. Informe final. Madrid: Dirección General de Investigación científica y Técnica del Ministerio de Educación y Ciencia.

Serrano, J. M. (1993). *Los modelos de aprendizaje cooperativo y su aplicación al aula de matemáticas*. Murcia: C.A.M./Dirección Provincial del M.E.C.

Serrano, J. M. (2003). *Psicología de la Instrucción*: *Historia, Concepto, Objeto y Método.* Murcia: D M Editor.

Serrano, J. M. (2008). Acerca de la naturaleza del conocimiento matemático. *Anales de Psicología, 24* (2), 169-179.

Serrano, J. M. y Calvo, M. T. (1994): *Aprendizaje cooperativo: Técnicas y análisis dimensional*. Murcia: Caja Murcia. Obra Cultural.

Serrano, J. M., González-Herrero, M. E. y Martínez-Artero, M. C. (1997). *Aprendizaje cooperativo en matemáticas. Un método de aprendizaje cooperativo-individualizado para la enseñanza de las matemáticas*. Murcia: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Murcia.

Serrano, J. M., González-Herrero, M. E. y Pons, R. M. (2008). *Aprendizaje cooperativo en matemáticas. Diseño de actividades en Educación Infantil, Primaria y Secundaria*. Murcia: Editum.

Serrano, J. M., Pons, R. M. y Ruiz, M. G. (2007). Perspectiva histórica del aprendizaje cooperativo: Un largo y tortuoso camino a través de cuatro siglos. *Revista Española de Pedagogía, 236*, 125-138.

Serrano, J. M. y Pons, R. M. (2007). Cooperative learning: we can also do it without task structure. *Intercultural Education, 18* (3), 215-230.

Serrano, J. M. y Pons, R. M. (2008). La concepción constructivista de la instrucción: Hacia un replanteamiento del triángulo interactivo. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 38*, 681-712.

Serrano, J. M. y Pons, R. M. (2011). El constructivismo hoy: enfoques constructivistas en educación. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 13* (1). Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1607-40412011000100001

Serrano, J. M. y Pons, R. M. (2013). Influencia del parámetro de mutualidad en la formación del profesorado universitario en y mediante métodos de aprendizaje cooperativo. *Infancia y Aprendizaje, 36* (3), 361-373.

Sharan, Y. (2010). Cooperative learning for academic and social gains: Valued pedagogy, problematic practice. *European Journal of Education, 45* (2), 300-313.

Sharan, Y. y Sharan, S. (1987). Training teachers for cooperative learning. *Educational Leadership*, *45* (3), 20-25.

Slavin, R. E. (1977). Classroom reward structure: An analytic and practical review. *Review of Educational Research, 47*, 633-650.

Slavin, R. E. (1985). Team-assisted individualization: Combining cooperative learning and individualizaded instruction in mathematics. En R. E. Slavin, S. Sharan, S. Kagan, R. Hertz-Lazarowitz, C. Webb y R. Scmuck (Eds.), *Learning to cooperate, cooperating to learn* (pp. 177-210). New York, NY: Plenum Press.

Slavin, R. E. (1992). When and why does cooperative learning increase achievement? Theoretical and empirical perspectives. En R. Hertz-Lazarowitz y N. Miller (Eds.), *Interaction in cooperative groups: The theoretical anatomy of group learning* (pp. 145-173). New York: Cambridge University Press.

Slavin, R. E. (1995). *Cooperative Learning: Theory, Research and Practice*. Boston: Allyn & Bacon. (2ª edition).

Slavin, R. E. (1996). Research on Cooperative Learning and Achievement: What we know, what we need to know. *Contemporary Educational Psychology, 21* (1), 43-69.

Slavin, R. E. (2011). Cooperative Learning. En V. G. Aukrust (Ed.), *Learning and cognition in education* (pp. 160-166). Oxford: Academic Press.

Slavin, R. E. (2014). Cooperative learning and achievement: Why does groupwork work? *Anales de Psicología, 30* (3), 785-791.

Snow, R.E. (1979). Diseños representativos y cuasi-representativos para la investigación en la enseñanza. En F. Alvira, M.D. Avia, R. Calvo y F. Morales (Eds.), *Los dos métodos de las ciencias sociales.* Madrid: Centro de investigaciones Sociológicas.

Springer, L., Stanne, M. E. y Donovan, S. S. (1999), Effects of small-group learning on undergraduates in science, mathematics, engineering, and technology: A Meta-analysis. *Review of Educational Research, 69* (1), 21-51.

Surian, A. y Damini, M. (2014). "Becoming" a cooperative learner-teacher. *Anales de Psicología, 30 (3),* 808-817.

Sweet, M. y Michaelsen, L. K. (Eds.). (2012). *Team-based learning in the Social Sciences and Humanities group work that works to generate critical thinking and engagement*. Sterling, VA: Stylus Publishing.

Tartas, V. y Perret-Clermont, A. N. (2012). Faire avec autrui: une situation pour comprendre le développement. En Yves Clot (Ed.), *Vygotsky maintenant* (pp 193-211). Paris: La Dispute.

Tartas, V., Baucal, A. y Perret-Clermont, A. N. (2010). Can you think with me? The social and cognitive conditions and the fruits of learning. En C. Howe y K. Littletown (Eds.), *Educational dialogues: Understanding and promoting productive interaction* (pp. 64-82). New York, NY: Routledge.

Tatto, M. T., Schwille, J. S., Senk, S., Ingvarson, L. C., Peck, R. y Rowley. G. L. (2009). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual Framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Tolchinsky, L. (1994). Constructivismo en educación. *II Seminario sobre Constructivismo y Educación*. Puerto de la Cruz: Universidad de La Laguna.

Vedder, P. y Veendrick, A. (2003). The role of the task and reward structure in cooperative learning. *Scandinavian Journal of Educational Research, 47* (5), 529-542.

Veenman, S., van Benthum, N., Bootsma, D., van Dieren, J. y van der Kemp, N. (2002). Cooperative learning and teacher education. *Teaching and Teacher Education, 18,* (1), 87–103.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521-525). New York, NY: Springer Publisher.

Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. Londres: The Falmer Press.

Zakaria, E., Solfitri, T., Daud, Y. y Abidin, Z. Z. (2013). Effect of cooperative learning on Secondary School students' mathematics achievement. *Creative Education, 4* (2), 98-100.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes* (Cole, M., John-Steiner, V., Scribner, S. y Souberman, E. (Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. En J. V Wertsch (Ed. & Trans.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 144-188). Armonk, NY: Sharpe.

Watson, G. (1928). Do groups think more efficiently than individuals? *Journal of Abnormal Psychology, 17*, 328–336.

Watzlawick, P. (Comp.) (1990). *La realidad inventada.* Barcelona: Gedisa.

Webb, N. (1991). Task-related verbal interaction and mathematics learning in small groups. *Journal for Research in Mathematics Educatio*n, *22* (5), 366-389.

Wen, H. M. (2013). *The effects of task structure on group process and quality of group product in a cooperative project-based learning environment*. Ph.D. thesis, The Florida State University.

Wood, D., Bruner, J. S. y Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem-solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17* (2), 89-100.

Wright, S. (1921). Correlation and causation. *Journal of Agricultural Research 20*, 557–585. Recuperado de http://www.ssc.wisc.edu/soc/class/soc952/Wright/Wright_Correlation%20and%20Causation.pdf

Wright, S. (1934). The method of path coefficients. *Annals of Mathematical Statistics 5* (3), 161–215. Recuperado de http://www.ssc.wisc.edu/soc/class/soc952/Wright/Wright_The%20Method%20of%20Path%20Coefficients.pdf

ANEXOS

ANEXO I

TEMPORALIZACIÓN Y PRUEBAS DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS 1ºEDUCACION SECUNDARIA OBLIGATORIA

1ª EVALUACIÓN	**ARITMÉTICA I**	**Prueba individual 1**
	UD1: LOS NUMEROS NATURALES.	Prueba grupal 1
	UD2: POTENCIAS.	Prueba grupal 2
	UD3: DIVISIBILIDAD.	Prueba grupal 3
2ª EVALUACIÓN	**ARITMETICA II**	**Prueba individual 2**
	UD4: FRACCIONES.	Prueba grupal 4
	UD5: NUMEROS DECIMALES.	Prueba grupal 5
	UD6: NUMEROS ENTEROS.	Prueba grupal 6
3ª EVALUACIÓN	**ALGEBRA Y GEOMETRIA**	**Prueba individual 3**
	UD7: EXPESIONES ALGEBRAICAS Y ECUACIONES	Prueba grupal 7
	UD8: FIGURAS GEOMETRICAS	Prueba grupal 8
	UD9: AREAS Y PERIMETROS	Prueba grupal 9

	MATEMÁTICAS 1.º ESO			
	Nombre		Nº	
	Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Prueba Inicial. Grupo E1B. 24 de Septiembre de 2014.

1. **Realiza las siguientes operaciones:**
   a) 29 654 + 5 678,35 + 76 234,06 = **b) 75 846 + 67 836 =**
   c) 546,5 · 53 = **d) 174 825 : 2,5 =**

2. **Efectúa la siguiente operación: (10·5 + 12:4) – (12·4 + 10:5) =**

3. **Expresa en forma de potencia:**
   a) $2^5 \cdot 2^3 =$ **b)** $3^5 : 3^2 =$ **c)** $(6^4)^3 =$

4. **Observa la tabla y marca con una cruz la casilla que corresponda.**

Números	Múltiplo de 2	Múltiplo de 3	Múltiplo de 5
35			
21			
42			

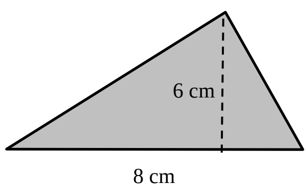
5. **Calcula:**
   a) M.C.D. (35, 60) = **b) m.c.m. (12, 15) =**

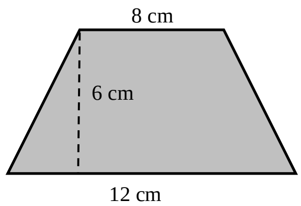
6. **Calcula el resultado de las siguientes operaciones con números enteros:**
   a) (+4) + (+12) = **e) (-8) + (+10) =**
   b) (+12) – (-5) = **f) (-7) – (+4) =**
   c) (+5) · (-3) = **g) (-2) · (+7) + (+5) · (+6) =**
   d) (-12) : (-4) = **h) (-3) + (-9) – (-4 + 11 + 6) =**

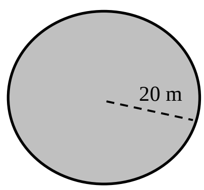
7. **Realiza las siguientes operaciones:**
   a) $\frac{7}{2}+\frac{1}{5}=$ **b)** $\frac{5}{10}-\frac{2}{5}-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=$ **c)** $\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{5}=$ **d)** $\frac{4}{3}:\frac{5}{6}=$

8. **Completa: a) 25 km = ... m** **b) 2 850 mm = ... m** **c)** $6\,300\ cm^2 = ... m^2$

9. **Calcula el área de las siguiente figuras:**







MATEMÁTICAS 1.º ESO

Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Primera evaluación. Prueba grupal 1.Grupo E1B. 13 de octubre de 2014.

1. **Compara el sistema de numeración romano y el sistema de numeración decimal.**

2. **Redondeo de números naturales. Ejemplos.**

3. **Escribe la cifra que representa cada número romano y viceversa:**

XXIV =	CLXVI =	49 =	2099 =
DCCL =	MDXLIX =	944 =	1806 =

4. **Redondea estos números a las centenas y a las unidades de millar:**

	A las centenas	**A las unidades de millar**
a) 102457		
b) 257 898		
c) 9 521		

5. **Calcula:**
   a) 75 952 + 54 678 + 3 005 =
   b) 98 653 – 85 234 =
   c) 896 · 56 =
   d) 55368 : 36 =

6. **Realiza la división entera 73 : 5**
   Cociente……. Resto………
   Realiza la prueba de la división: dividendo = divisor x cociente + resto

7. **Calcula:**
   a) 16 – 5·(4 – 1) + 3·(6 – 2) =

   b) (11 + 9):(12 – 7) + 18:6 =

8. **En un bote tenemos 235 canicas y en otro 186. Si quitamos del primer bote 45 canicas y las pasamos al segundo, ¿cuántas canicas habrá en cada bote?**

9. **Compras un bolígrafo de 1 € 43 céntimos y un rotulador de 2 € 77 céntimos. Si pagas con un billete de 10 €, ¿cuánto te devuelven?**

	MATEMÁTICAS 1.º ESO			
	Nombre		Nº	
	Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Primera evaluación. Prueba grupal 2.Grupo E1B. 27 de Octubre de 2014

1. Potencias de base 10. Aplicaciones y ejemplos.

2. Calcula:

a) $5^2 =$	**b)** $2^5 =$	**c)** $3^4 =$
d) $7^3 =$	**e)** $6^2 =$	**f)** $10^4 =$
g) $10^5 =$	**h)** $10^{12} =$	**i)** $100^2 =$
j) $20^2 =$	**k)** $30^3 =$	**l)** $17^0 =$
m) $1000^3 =$	**n)** $100^3 =$	**o)** $40^1 =$

3. Expresa con una potencia de base diez:

a) **diez mil** ……………………………

b) **un millón** ……………………………

c) **cien millones** ……………………………

d) **un billón** ……………………………

4. Escribe la descomposición polinómica de los números:

a) **5 730 185** ……………………………

b) **680 500** ……………………………

5. Escribe en forma abreviada el número 3 500 000 000.

6. Expresa en una sola potencia y después calcula:

a) $2^3 \cdot 2^5 =$

b) $3 \cdot 3^3 =$

c) $10^5 \cdot 10^2 \cdot 10^4 =$

d) $3^7 : 3^5 =$

e) $18^4 : 6^4 =$

f) $2^5 \cdot 5^5 =$

g) $12^5 : 4^5 =$

h) $30^5 : (5^5 \cdot 3^5) =$

i) $(4^4 : 4) : 4^3 =$

7. Expresa con una sola potencia:

a) $a^3 \cdot a^4 =$

b) $a^5 \cdot a^2 =$

c) $x^8 : x^5 =$

d) $(x^2)^4 =$

8. Calcula mentalmente:

a) $\sqrt{64} =$	**b)** $\sqrt{100} =$	**c)** $\sqrt{25} =$
d) $\sqrt{400} =$	**e)** $\sqrt{225} =$	**f)** $\sqrt{121} =$

MATEMÁTICAS 1.º ESO

Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Primera evaluación. Prueba grupal 3. Grupo E1B. 25 de Noviembre de 2014.

1. Responde a las preguntas y justifica tu respuesta:

a) ¿Cuál de estos números es múltiplo de 3? Explica por qué.

20 15 49 13

b) ¿Cuál de estos números es divisor de 48? Explica por qué.

20 11 16 9

2. Calcula todos los divisores de los siguientes números:

a) Divisores de 40.

b) Divisores de 56.

3. Justifica las siguientes afirmaciones:

a) Si a un múltiplo de 6 le sumamos 12, obtenemos otro múltiplo de 6.

b) Si sumamos dos múltiplos de 5, el resultado es también múltiplo de 5.

4. Rodea los números compuestos y tacha los números primos:

91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110

5. Observa estos números y responde a las preguntas:

180 255 303 565 468 804

a) ¿Cuáles son múltiplos de dos?

b) ¿Cuáles son múltiplos de tres?

c) ¿Cuáles son múltiplos de cinco?

***d)* ¿Cuáles son múltiplos a la vez de dos y de cinco?**

6. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 22

***b)* 644**

7. Calcula:

a) m.c.m. (15, 16, 18)

b) M.C.D. (32, 40, 48)

	MATEMÁTICAS 1.º ESO			
	Nombre		Nº	
	Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Primera evaluación. Prueba individual 1.Grupo E1B.9 de diciembre de 2014.

1. **Realiza las siguientes operaciones:**
   a) 29 654 + 5 678 +76 234
   b) 75 846 - 67 836
   c) 546· 53

2. **En un instituto hay cuatro clases de primero de ESO, en cada clase hay 30 alumnos y alumnas. La mitad de ellos son chicos. ¿Cuántos chicos hay en primero?**

3. **Calcula las siguientes potencias:**
   a) $(-2)^0 =$ **b)** $8^1 =$
   c) $5^2 =$ **d)** $6^2 =$
   e) $4^0 =$ **f)** $(-30)^1 =$

4. **Reduce a una sola potencia:**
   a) $2^5 \cdot 4^5 =$ **b)** $(-3)^2 \cdot 7^2 =$
   c) $(-2)^8 \cdot (-5)^8 =$ **d)** $(-2)^4 \cdot 3^4 \cdot (-5)^4 =$
   e) $(-18)^4 : 6^4 =$ **f)** $(-12)^5 : (-3)^5 =$

5. **Explica razonadamente el significado de:**
   a) Múltiplo de un número
   b) Divisor de un número

6. **Calcula:**
   a) Todos los divisores de 92.
   b) Tres primeros múltiplos de 25.

7. **¿Qué es un numero primo?**

8. **Calcula:**
   a) Max.C.D. (120, 180) =
   b) min.c.m. (30, 40) =

9. **Un niño recibe visita de sus abuelos cada 6 días y visita de sus padrinos cada 8 días. ¿Cada cuánto tiempo le coinciden ambas visitas en el mismo día?**

10. **Se desea dividir una finca de terreno en forma rectangular de 60 m de ancho por 90 m de largo en parcelas cuadradas iguales que sean lo más grandes posibles. ¿Cuánto debe medir el lado de cada parcela?**

MATEMÁTICAS 1.º ESO

Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Segunda evaluación. Prueba grupal 4. Grupo E2B, 19 de Enero de 2014.

1. **Fracciones equivalentes. Fracción irreducible.**

2. **Escribe, en cada caso, la fracción del todo que corresponde a la parte indicada:**
   a) De una docena de huevos se han roto 3. ¿Qué fracción se ha roto?
   b) En una urbanización se han construido 25 casas y ya se han vendido 15. ¿Qué fracción se ha vendido?

3. **Comprueba si son equivalentes los siguientes pares de fracciones:**
   a) $\frac{5}{15}$ **y** $\frac{3}{9}$

   b) $\frac{12}{13}$ **y** $\frac{14}{26}$

4. **Halla la fracción irreducible de cada una de estas fracciones:**
   a) $\frac{100}{120}$

   b) $\frac{36}{54}$

5. **Resuelve las siguientes operaciones escribiendo el proceso de resolución paso a paso:**
   a) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}+\frac{5}{9}$

   b) $\left(4+\frac{2}{5}\right)-\left(2+\frac{3}{10}\right)$

6. **Resuelve las siguientes operaciones y simplifica el resultado:**
   a) $\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{5}$

   b) $\frac{1}{2}:\frac{5}{6}$

7. **Resuelve las siguientes operaciones con fracciones:**

   a) $\left(\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\right):\left(1-\frac{4}{5}\right)$

   b) $\frac{7}{5}:\left[\frac{3}{5}-2\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)\right]$

MATEMÁTICAS 1.º ESO

Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Segunda evaluación. Prueba grupal 5.Grupo E1B. 16 de Febrero de 2014

1. Los órdenes de unidades decimales.

2. Escribe con cifras:

a) Cuatro cienmilésimas.

b) Once millonésimas.

c) Cuatrocientas quince milésimas.

3. Expresa en décimas:

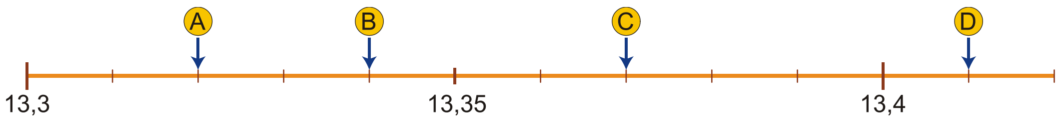
a) 8 unidades =

b) 50 centésimas =

c) 300 milésimas =

d) 2 centésimas =

4. ¿Qué valores se asocian a los puntos *A*, *B*, *C* y *D* en la siguiente recta numérica?



5. Calcula:

a) 41,28 + 3,141 + 6,028 =

b) 3,125 + 89, 2 – 34,15 =

c) 254 × 6,35 =

6. Calcula hasta las centésimas:

a) 4 : 7 =

b) 34 : 0,5 =

c) 74,5 : 6,25 =

7. Calcula:

a) 36,25 · 100 =

b) 0,0035 · 1 000 =

c) 5 678 : 1 000

8. Reduce y calcula:

a) 12,67 + 4,25 · (5,5 – 2,55) =

b) 35,26 – 3,25 · 8,32 =

9. Un restaurante encarga a una frutería:
7 kg de manzanas a 2,15 euros el kg
6 kg de mandarinas a 2,55 euros el kg
10 kg de patatas a 0,80 euros el kg
¿Cuál es el coste total de la fruta?

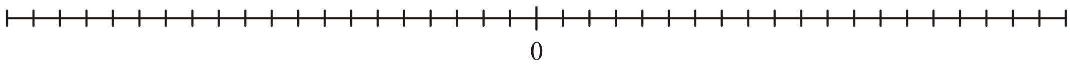
MATEMÁTICAS 1.º ESO			
Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Segunda evaluación. Prueba grupal 6.Grupo E1B. 3 de Marzo de 2014.

1. Valor absoluto y opuesto de un número entero. Ejemplos.

2. Representa los siguientes números enteros sobre la recta numérica:

+5 –15 +9 +16 –8 –1 –10 +18



3. Resuelve la siguiente operación con números enteros:

3 – 6 – 2 + 5 + 2 + 6

4. Calcula los siguientes productos y divisiones de números enteros:

a) (+6) · (–2) · (+8)

b) (–5) · (+10) · (–2)

c) (–160) : (–40)

d) (+200) : (+5)

5. Resuelve escribiendo el proceso paso a paso:

a) (–7) · [(+3) + (+4) – (2 + 5 – 1)]

b) (–7) · (+1) – [(–5) + (–2) – (–3)] · (–2)

6. Un comerciante recibe un pedido de 225 cajas que contienen, cada una, seis bolsas de 5 kg de naranjas. Después de una semana ha vendido dos de cada tres bolsas. ¿Cuántos kilos de naranjas le quedan?

7. Un avión que vuela a 5 400 metros de altura, debe descender 500 metros para evitar una tormenta. Desde esa altura detecta en su vertical a un submarino que está sumergido a 70 metros de profundidad y que, a su vez, asciende 25 metros. ¿Qué distancia separa el avión del submarino después del movimiento de ambos?

8. Armando tiene 15 euros, pero debe 7 a su hermana. Su abuelo le da 8 euros de paga, y se gasta 13 euros en una cinta de música. ¿Cuánto le queda?

	# MATEMÁTICAS 1.º ESO		
	Nombre		Nº
	Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.	Calificación	

Segunda evaluación. Prueba individual 2.Grupo E1B. 23 de Marzo de 2014.

1. Escribe, en cada caso, la fracción del todo que corresponde a la parte indicada:

a) En un huerto había 100 árboles y se han cortado 40. ¿Qué fracción se ha cortado?

b) En un rebaño de cuarenta ovejas hay cinco negras. ¿Qué fracción del rebaño son negras?

2. Calcula y simplifica:

a) $\frac{3}{4}:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)=$

b) $\left(\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\right):\left(1-\frac{4}{5}\right)=$

4. Completa cómo se leen o escribe las siguientes cantidades:

2,1307	
0,00023	
0,000409	
	Dieciséis unidades y seis centésimas.
	Nueve unidades y ochenta y siete milésimas.
	Treinta y dos unidades y ciento ochenta y tres diezmilésimas.

5. Completa la tabla con aproximaciones:

	a las décimas	**a las centésimas**	**a las milésimas**
1,7352			
8,619953			
20,454545			
6,990905			

6. Juan compra en el mercado dos sandías, un kilo y medio de tomates, tres barras de pan y cinco cartones de leche. Los precios unitarios son los siguientes:

Sandía .... un euro y medio la unidad.
Tomates .... dos euros y veinte céntimos el kilogramo.
Barra de pan .... sesenta céntimos la unidad.
Cartón de leche......... un euro y cinco céntimos la unidad.

a) ¿Cuánto le cuesta la compra?.

b) Si paga con un billete de veinte euros, ¿cuánto le devuelven?

7. Calcula:

a) 10 – (11 + 5) =

b) (2 – 6 – 3) + (5 – 3 – 1) – (2 – 4 – 6) =

c) 20 – (4 – 13 + 5) =

d) 15 – [4 – (5 – 8)] =

8. Una rana corre dando saltos de 30 cm perseguida por un gato que da saltos de 45 cm. ¿Cada cuánta distancia coinciden las huellas del gato y las de la rana?

MATEMÁTICAS 1.º ESO

Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Tercera evaluación. Prueba grupal 7.Grupo E1B. 20 de Abril de 2014.

1. Llamando x a un número natural cualquiera, escribe:

- **La suma del número y su siguiente.**
- **El doble de su anterior.**
- **Su triple menos dos unidades.**
- **El doble del número que resulta de sumarle tres.**

2. Reconoce los elementos de los siguientes monomios:

Monomio	$5x^2$	x^3	$\frac{-2}{3}xy^3$	**3**	
Coeficiente					**½**
Parte literal					x
Grado					

3. Reduce las siguientes expresiones:

a) $x + 2x + 3x$ **b)** $7x - 4x$

c) $6x : 2x^2$ **d)** $2x : 3x$

4. Dado el siguiente monomio $-3x^2$:

a) Calcula su valor numérico para $x = 2$

b) Calcula su valor numérico para $x = -1$

6. Reduce las siguientes expresiones algebraicas:

a) $x + x =$ **b)** $x + x + x =$

c) $2x + x =$ **d)** $5x + 4x =$

7. Reduce las siguientes expresiones algebraicas:

a) $x \cdot x =$ **b)** $x \cdot x \cdot x =$

c) $x^2 \cdot x =$ **d)** $3x \cdot 2x =$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones usando métodos algebraicos y comprueba la solución:

a) $x + 3 = 5$

b) $5x = 30$

c) $3x + x + 2 + 4 = 18$

d) $7 + 5x + 8x = 11x + 13$

9. El doble de un número menos cuatro es diez. ¿Cuál es el número?

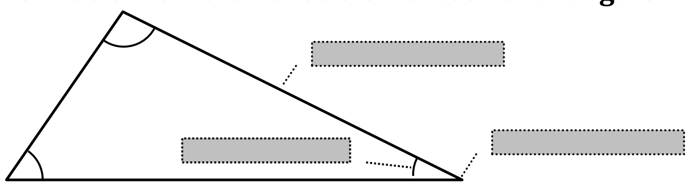
10. En una granja de vacas, entre cuernos y patas suman 90. ¿Cuál es el número de vacas?

MATEMÁTICAS 1.º ESO

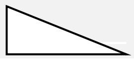
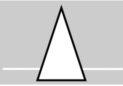
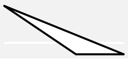
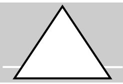
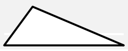
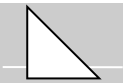
Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Tercera evaluación. Prueba grupal 8. Grupo E1B, 11 de Mayo de 2014.

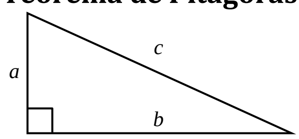
1. Escribe el nombre de los elementos del triángulo:



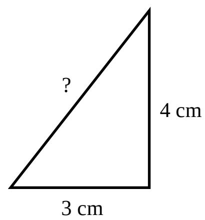
2. Clasifica los siguientes triángulos según sus lados y según sus ángulos.

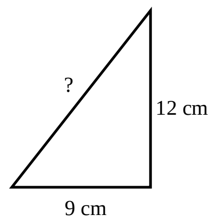
Triangulo	Según sus lados	Según sus ángulos
		
		
		
		
		
		

3. Teorema de Pitágoras:

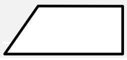
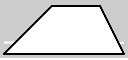


4. Calcula el lado desconocido en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos, utilizando el teorema de Pitágoras:

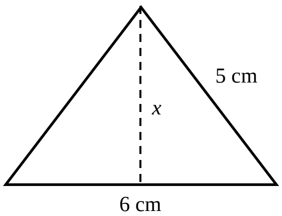


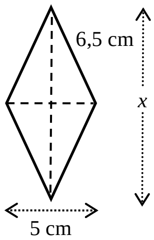


5. Pon el nombre adecuado a cada una de estas figuras. Di cuales de ellas son paralelogramos:

Figura	Nombre	Figura	Nombre
			
			
			
			

6. Calcula la longitud *x* en las siguientes figuras planas:





7. Di si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. En las que sean falsas, explica por qué, y en las verdaderas, pon un ejemplo:

a) Un triángulo puede tener dos de sus ángulos agudos.

b) Un triángulo puede tener dos de sus ángulos obtusos.

c) Los lados de un triángulo pueden medir 10 cm, 4 cm y 5 cm.

c) Los ángulos de un triángulo pueden medir 37°, 49° y 93

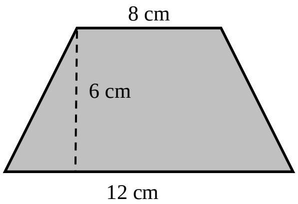
MATEMÁTICAS 1.º ESO

Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

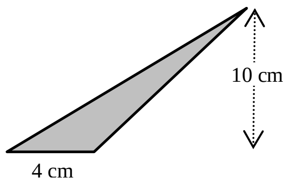
Tercera evaluación. Prueba grupal 9.Grupo E1B. 28 de Mayo de 2014.

1. Escribe el nombre y calcula el área de las siguientes figuras:

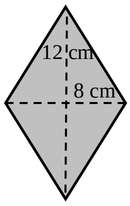
a)



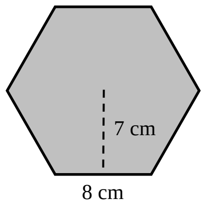
b)



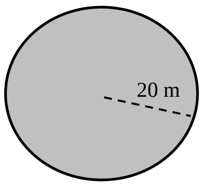
c)



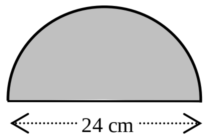
d)



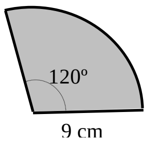
e)



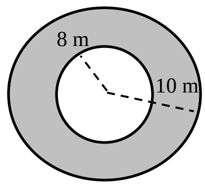
f)



g)



h)

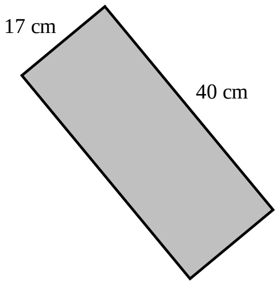


i)

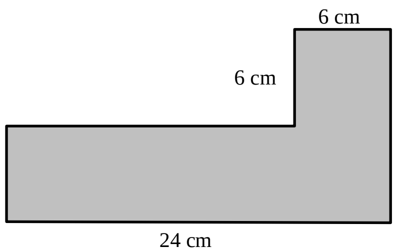
j)

2. Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras:

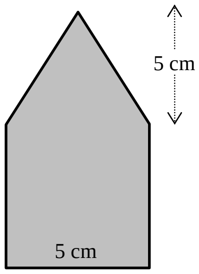
a)



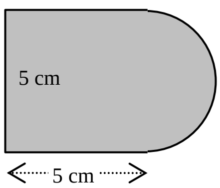
b)



c)



d)



MATEMÁTICAS 1.º ESO			
Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Tercera evaluación. Prueba individual 3. Grupo E1B. 11 de junio de 2014.

1. Completa la tabla indicando el coeficiente, la parte literal y el grado de cada monomio:

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL	GRADO
$3b^2c$			
$-9ax^3$			
$\frac{2}{3}ab^2x^3$			

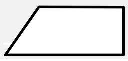
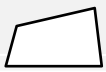
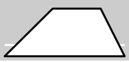
2. Opera y reduce:

a) $5a + 3a - 2a - 7a + 3a =$

b) $(5x^2y)\cdot(3xy) =$

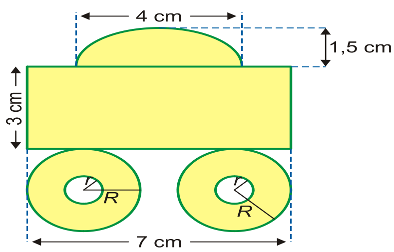
c) $(3x^2y):(6x^2y) =$

3. Pon el nombre adecuado a cada una de estas figuras. Di cuales de ellas son paralelogramos:

Figura	Nombre	Figura	Nombre
			
			
			
			

4. Halla la altura y el área de un triángulo equilátero de 3 cm de lado.

5. Calcula el área de la parte coloreada:



ANEXO II

TEMPORALIZACIÓN Y PRUEBAS DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS

2ºEDUCACION SECUNDARIA OBLIGATORIA

<table>
<tr><td rowspan="5">1ª EVALUACIÓN</td><td>ARITMÉTICA</td><td>Prueba individual 1</td></tr>
<tr><td>UD1: DIVISIBILIDAD Y NUMEROS ENTEROS.</td><td>Prueba grupal 1</td></tr>
<tr><td>UD2: SISTEMA DE NUMERACION DECIMAL Y SISTEMA SEXAGESIMAL.</td><td>Prueba grupal 2</td></tr>
<tr><td>UD3: LAS FRACCIONES.</td><td>Prueba grupal 3</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td rowspan="5">2ª EVALUACIÓN</td><td>GEOMETRÍA</td><td>Prueba individual 2</td></tr>
<tr><td>UD4: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES.</td><td>Prueba grupal 4</td></tr>
<tr><td>UD5: TEOREMA DE PITÁGORAS.SEMEJANZA.</td><td>Prueba grupal 5</td></tr>
<tr><td>UD6: CUERPOS GEOMÉTRICOS.</td><td rowspan="2">Prueba grupal 6</td></tr>
<tr><td>UD7: MEDIDA DE VOLUMEN.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3ª EVALUACIÓN</td><td>ANALISIS Y ALGEBRA</td><td>Prueba individual 3</td></tr>
<tr><td>UD8: FUNCIONES.</td><td>Prueba grupal 7</td></tr>
<tr><td>UD9: EXPRESIONES ALGEBRAICAS.</td><td>Prueba grupal 8</td></tr>
<tr><td>UD10: ECUACIONES.</td><td>Prueba grupal 9</td></tr>
</table>

MATEMÁTICAS 2.º ESO

Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Prueba Inicial. Grupo E2B. 24 de Septiembre de 2014.

1. Realiza las siguientes operaciones:
a) 29 654 + 5 678,35 + 76 234,06 = **b) 75 846 + 67 836 =**
c) 546,5 · 53 = **d) 174 825 : 2,5 =**

2. Efectúa la siguiente operación: (10·5 + 12:4) – (12·4 + 10:5) =

3. Expresa en forma de potencia:
a) $2^5 \cdot 2^3 =$ **b)** $3^5 : 3^2 =$ **c)** $(6^4)^3 =$

4. Observa la tabla y marca con una cruz la casilla que corresponda.

Números	Múltiplo de 2	Múltiplo de 3	Múltiplo de 5
35			
21			
42			

5. Calcula:
a) M.C.D. (35, 60) = **b) m.c.m. (12, 15) =**

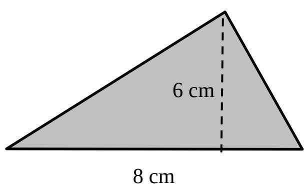
6. Calcula el resultado de las siguientes operaciones con números enteros:
a) (+4) + (+12) = **e) (-8) + (+10) =**
b) (+12) – (-5) = **f) (-7) – (+4) =**
c) (+5) · (-3) = **g) (-2) · (+7) + (+5) · (+6) =**
d) (-12) : (-4) = **h) (-3) + (-9) – (-4 + 11 + 6) =**

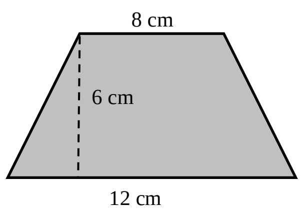
7. Realiza las siguientes operaciones:
b) $\frac{7}{2}+\frac{1}{5}=$ **b)** $\frac{5}{10}-\frac{2}{5}-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=$ **c)** $\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{5}=$ **d)** $\frac{4}{3}:\frac{5}{6}=$

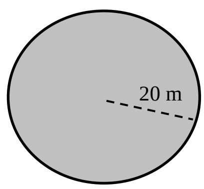
8. En un almacén agrícola hay 3000 kg de trigo. El lunes se venden 2/5 de su contenido y el martes 3/10. ¿Cuántos kilogramos quedan?

9. Completa: a) 25 km = ... m **b) 2 850 mm = ... m** **c) 6 300 cm² = ... m²**

10. Calcula el área de las siguiente figuras:







MATEMÁTICAS 2.º ESO			
Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Primera evaluación. Prueba grupal 1.Grupo E2B. 8 de octubre de 2014.

1. **Explica la diferencia entre un número primo y un número compuesto.**

2. **Criterios de divisibilidad.**

3. **Responde razonadamente.**
   - **a)** **El número 60 es múltiplo de 12.**
   - **b)** **El número 15 es divisor de 360.**
   - **c)** **El número 8 es divisor de 2014.**

4. **Calcula:**
   - **a)** **Todos los divisores de 46.**
   - **b)** **Tres primeros múltiplos de 16**

   .

5. **Rodea con un círculo los números primos:**

51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**

6. **Calcula:**
   - **a)** **m.c.m. (24, 36) =**
   - **b)** **m.c.m. (15, 16, 18) =**
   - **c)** **M.C.D. (32, 40) =**
   - **d)** **M.C.D. (60, 72, 84) =**

7. **El autobús de la línea A pasa por cierta parada cada 12 minutos, el de la línea B pasa cada 18 minutos y el de la línea C, cada 24 minutos. Si todos coinciden ahora mismo, ¿cuántos minutos pasarán para que vuelven a coincidir?**

8. **Resuelve las siguientes operaciones con números enteros:**
   - **a)** $3 - 7 - 2 + 5 + 2 - 8 =$
   - **b)** $-14 + 1 - 8 + 3 - 7 + 10 =$
   - **c)** $(-7) \cdot (-3) \cdot (-2) =$
   - **d)** $(-320) : [(+5) \cdot (-2)]$

9. **Resuelve escribiendo el proceso paso a paso:**
$(-6) \cdot [(+5) + (+3) - (3 + 5 - 1)] =$

10. **Calcula:**
   - **a)** $(-4)^2 =$ **b)** $(-2)^5 =$ **c)** $(-3)^4 =$
   - **d)** $(+5)^3 =$ **e)** $(-1)^{100} =$

11. **Reduce a una sola potencia:**
   - **a)** $2^3 \cdot 2^4 =$ **b)** $(-5)^9 : (-5)^3 =$
   - **c)** $(-8)^9 : 4^9 =$ **d)** $5^2 \cdot 5^3 \cdot 5 =$

	MATEMÁTICAS 2.º ESO		
	Nombre	Nº	
	Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.	Calificación	

Primera evaluación. Prueba grupal 2.Grupo E2B. 29 de Octubre de 2014.

1. Clases de números decimales.

2. El sistema sexagesimal.

3. Escribe cómo se leen las siguientes cantidades:
a) 0,00017 ……………………………………………………………………………………
b) 9,0024 …………………………………………………………………………………….

4. Clasifica los siguientes números decimales.

a) 25,0042 **b)** $3,\overline{12}$

c) $1,4\overline{56}$ **d) 0,666…**

5. Completa la tabla con aproximaciones:

	a las décimas	a las centésimas	a las milésimas
12,40918			
0,454545			

6. Calcula:
a) 352 + 124,25 + 0,046 =
b) 91,5645 – 89,1239 =

7. Calcula:
a) 12,56 · 0,124 =
b) 4,2 : 0,06 =

8. Pablo va al supermercado a comprar una serie de productos. Tiene 17 € y efectúa las siguientes compras.
– 2,5 kilogramos de naranjas que valen 0,70 €/kg – 2 barras de pan a 0,30 €/barra.
– 0,9 kilogramos de kiwis que valen 1,50 €/kg. – 5 latas de refresco de cola a 0,34 €/lata.
– 4 cartones de leche a 0,65 €/cartón. – 3 paquetes de detergente a 2,13 €/paquete.
a) Calcula cuánto le ha costado la compra.
b) Al pagar en caja, ¿cuánto dinero le ha sobrado?

9. Efectúa:
a) expresa en segundos: 4º 58’ 40’’
b) pasa a forma compleja 10 215 s

10. Calcula:
a) 4º 25’ 45’’ + 15º 38’ 29’’ =
b) (52h 23 min 10 s) – (43h 25 min 34 s) =
c) (23º 21’ 19’’) × 4 =
d) (85h 35min 10s) : 3 =

11. Juan se conecta con su móvil a internet a las 14 h 10 min 35 s y se desconecta a las 17 h 25 min 12s. ¿Cuánto tiempo ha estado conectado?

	MATEMÁTICAS 2.º ESO		
	Nombre	Nº	
	Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.	Calificación	

Primera evaluación. Prueba grupal 3. Grupo E2B. 26 de Noviembre de 2014.

1. **Fracciones equivalentes**.

2. **Operaciones con fracciones.**

3. **Halla la fracción irreducible de:**

   a) $\frac{100}{120}$

   b) $\frac{36}{54}$

4. **Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones reduciéndolas previamente a factor común:**

$$\frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{5}{12}, \frac{5}{18}$$

5. **Resuelve las siguiente operación escribiendo el proceso de resolución paso a paso:**

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{9}-\frac{3}{4}+\frac{5}{12}$$

6. **Resuelve las siguientes operaciones con fracciones:**

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right):\left(1-\frac{4}{6}\right)$$

7. **Un depósito contiene 150 l de agua. Se consumen los 2/5 de su contenido. ¿Cuántos litros de agua quedan?**

8. **Andrea tiene 14 años, que son los $\frac{2}{7}$ de la edad de su padre. ¿Cuál es la edad del padre?**

9. **En una reunión de amigos, Raul se ha comido ½ de una pizza; Pedro se ha comido ¼ del total y Juan se ha comido 1/6 del total. ¿Qué fracción de pizza ha quedado?**

10. **Calcula las siguientes potencias:**

    a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

    b) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-2} =$

	MATEMÁTICAS 2.º ESO		
	Nombre		Nº
	Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.	Calificación	

Primera evaluación. Prueba individual 1. Grupo E2B, 3 de diciembre de 2014.

1. **Significado y cálculo del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor.**

2. **Operaciones con números decimales. Ejemplos.**

3. **Fracción irreducible. Métodos para obtenerla.**

4. **Calcula el mínimo común múltiplo de 36, 48 y 60.**

5. **En una tienda de golosinas tienen 280 caramelos de fresa y 252 caramelos de limón, que quieren vender en bolsas con el mismo número de caramelos y sin mezclar ambos sabores. ¿Cuántos caramelos habrá en cada bolsa?**

6. **Calcula:**
   a) 6 h 42 min 36 s + 8 h 54 s
   b) (39º 42’ 24’’) : 8 =

7. **Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones reduciéndolas previamente a factor común:**

$$\frac{5}{4};\ \frac{6}{5};\ \frac{7}{12};\ \frac{9}{15}$$

8. **Resuelve:**

$$\frac{3}{5}:\left[\frac{4}{5}-2\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)\right]$$

9. **Efectúa:**
   a) ¾ de 60 es ….
   b) 7/6 del total es 161, entonces el total es ….
   c) La fracción de 14 respecto del total 20 ….

10. **Los 2/5 de los ingresos de un colegio se emplean combustible para calefacción, 1/8 se emplea en electricidad, 1/12 en material de oficina, 1/4 en mantenimiento del edificio y el resto se emplea en limpieza. ¿Qué fracción de los ingresos se emplea en limpieza?**

Segunda evaluación. Prueba grupal 4. Grupo E2B, 14 de Enero de 2014.

1. **Magnitudes directamente proporcionales. Definición y ejemplos.**

2. **Magnitudes inversamente proporcionales. Definición y ejemplos.**

3. **Aumentos y disminuciones porcentuales. Ejemplos.**

4. **Dada la siguiente tabla de valores que relaciona las magnitudes A y B.**

A		**4**	**6**	**10**	**16**	
B	**5**	**10**		**25**		**50**

   a) **¿Las magnitudes son directamente o inversamente proporcionales?**
   b) **Completa en la tabla los valores que falta.**

5. **Un bote de pintura de 50 kg cuesta 28 €. Si necesita 900 kg de pintura para pintar, ¿cuánto le costará?. Resuélvelo por reducción a la unidad.**

6. **Si ir a Madrid en coche a 110 km/h se tarda 4 horas. ¿Cuánto tardaría si fuera a 88 km/h?**

7. **Una fábrica de automóviles, trabajando 12 horas diarias, ha necesitado 10 días para fabricar 600 coches. ¿Cuántos días necesitará para fabricar 200 coches si trabaja 8 horas diarias?**

8. **Calcula:**
   a) **El 35% de los 540 alumnos son de 2º ESO. ¿Cuántos alumnos son de 2º ESO?**

   b) **Un día asisten 16 alumnos de una clase de 25 alumnos. Calcula el porcentaje de alumnos que asisten a clase.**

   c) **En otra clase se van de excursión 24 alumnos, lo que supone el 80 % de la clase. Calcula el total de alumnos de esa clase.**

9. **La factura por pintar una clase es de 250€ sin IVA. ¿Cuál es el precio final después de incrementarle el 21% de IVA?**

10. **Durante el presente curso, un instituto tiene un 8% menos de alumnos que el curso anterior. El curso anterior tenía 450 alumnos. ¿Cuántos alumnos hay este curso?**

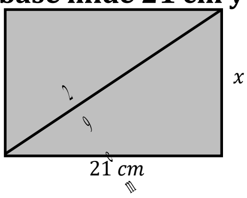
MATEMÁTICAS 2.º ESO

Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

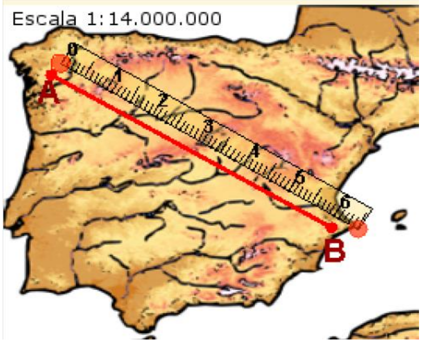
Segunda evaluación. Prueba grupal 5.Grupo E2B. 11 de Febrero de 2014.

1. **Enunciado del teorema de Pitágoras.**

2. **Halla el área de un rectángulo cuya base mide 21 cm y su diagonal, 29 cm.**

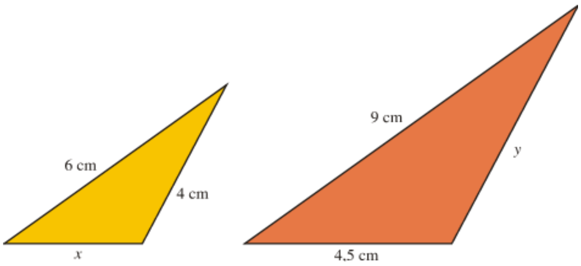


3. **Calcula la distancia real entre A y B del mapa.**

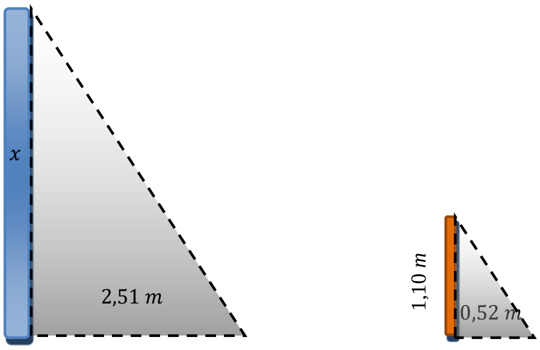


4. **La distancia en un mapa entre dos pueblos, que en la realidad están a 22,4 Km., es de 11,2 cm. ¿Cuál es la escala del mapa?**

5. **Estos dos triángulos son semejantes. Calcula la longitud de los lados que le faltan a cada uno de ellos:**



6. **Un muro proyecta una sombra de 2,51 m al mismo tiempo que una vara de 1,10 m proyecta una sombra de 0,92 m. Calcula la altura del muro.**

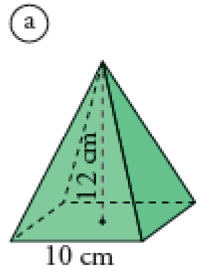


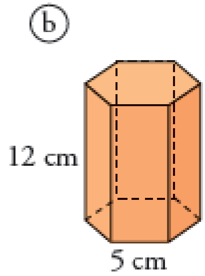
	MATEMÁTICAS 2.º ESO			
	Nombre		Nº	
	Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

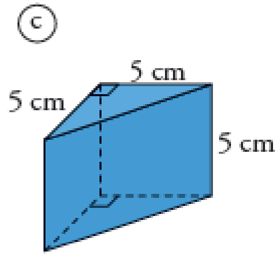
Segunda evaluación. Prueba grupal 6.Grupo E2B. 4 de Marzo de 2014.

1. Pirámides regulares. Elementos, desarrollo y superficie.

2. Halla el área total de los siguientes cuerpos:

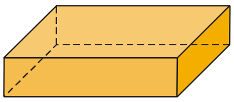




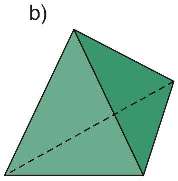


3. Indica, razonando tu respuesta, si las siguientes figuras son poliedros regulares o no:

a)

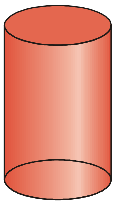


b)

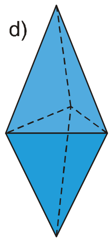


(4 triángulos equiláteros)

c)



d)



(6 triángulos equiláteros)

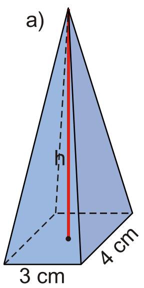
4. Halla el área total de cada una de estas figuras:

a) Icosaedro de 3 dm de arista.

b) Cilindro de 9 cm de altura y 3 cm de radio de la base.

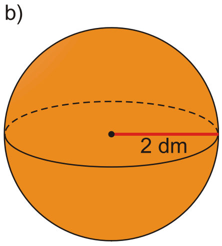
5. Halla el volumen de estas figuras:

a)



h = 9 cm

b)



MATEMÁTICAS 2.º ESO

Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

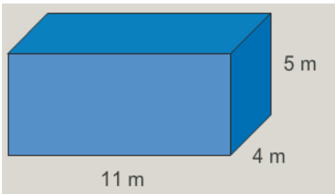
Segunda evaluación. Prueba individual 2.Grupo E2B. 18 de Marzo de 2014.

1. **Para levantar un muro en 18 días hacen falta 8 obreros. ¿Cuántos obreros se necesitarán para construirlo en 4 días?**

2. **La factura por pintar una clase es de 250€ sin IVA. ¿Cuál es el precio final después de incrementarle el 21% de IVA?**

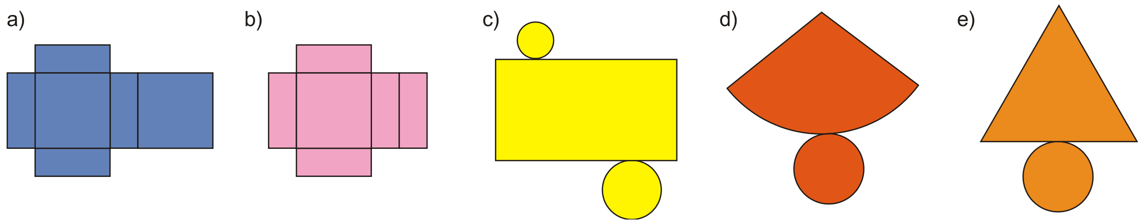
3. **Halla el área y el perímetro de un triángulo equilátero de 3 cm de lado.**

5. **Calcula la superficie del siguiente prisma:**



6. **Poliedros regulares. Tipos.**

7. **Indica, para cada una de estas figuras, si puede corresponder a un poliedro, a un cuerpo de revolución o a ninguno de ellos:**



8. **Volumen de un prisma. Ejemplos.**

9. **Halla el volumen de estos cuerpos geométricos:**

a) Un cono con 2 cm de radio de la base y 5 cm de altura.

b) Un prisma de base cuadrada, de 6 cm de altura, cuyo lado de la base mide 3 cm.

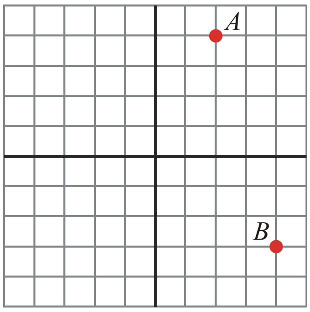
Tercera evaluación. Prueba grupal 7.Grupo E2B. 15 de Abril de 2014.

1. **Concepto de función. Ejemplos gráficos.**

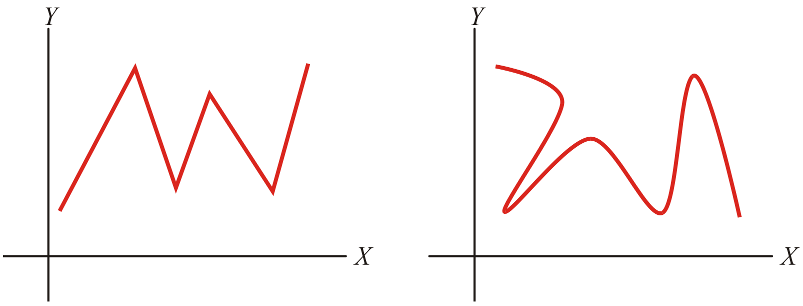
2. **Funciones de proporcionalidad.**

3. **Escribe las coordenadas de los puntos A y B y sitúa en el eje de coordenadas los puntos**

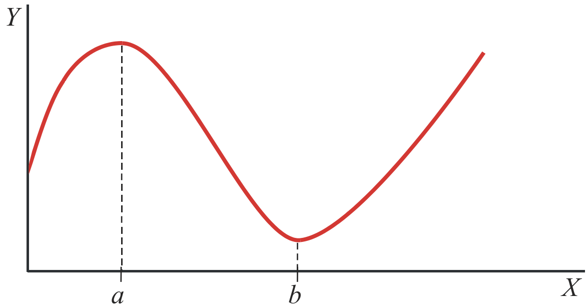
   C = (–1, 3) y D = (2, –4).



4. **Di cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función y cuál no, e indica el porqué:**



5. **Analiza la siguiente función y señala los intervalos constantes, los de crecimiento y los de decrecimiento:**



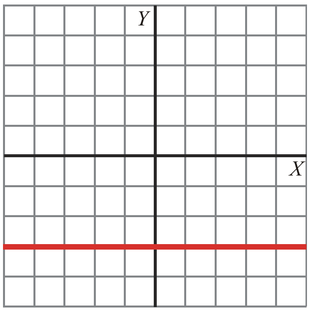
6. **Completa la tabla de valores para la función $y = x^2 - 4x$ y dibuja la gráfica correspondiente.**

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	–5						

7. **Representa la siguiente función, indica de qué tipo de función es y señala cuál es su pendiente:**

$y = 3x - 2$

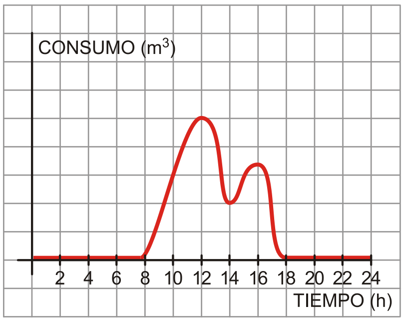
8. **Observa la representación gráfica de esta función y, sin hacer ningún cálculo, indica cuál es su ecuación:**



9. **Construye una gráfica que se ajuste al siguiente enunciado:**

Esta mañana, Eva fue a visitar a su amiga Leticia y tardó 20 minutos en llegar a su casa, que se encuentra a 800 metros de distancia. Estuvo allí durante media hora y regresó a su casa, tardando en el camino de vuelta lo mismo que tardó en el de ida.

10. **El consumo de agua en un colegio viene dado por esta gráfica:**



a) ¿Durante qué horas el consumo de agua es nulo? ¿Por qué?

b) ¿A qué horas se consume más agua? ¿Cómo puedes explicar esos puntos?

c) ¿Qué horario tiene el colegio?

d) ¿Por qué en el eje X solo consideramos valores entre 0 y 24?¿Qué significado tiene?

	MATEMÁTICAS 2.º ESO			
	Nombre		Nº	
	Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Tercera evaluación. Prueba grupal 8. Grupo E2B, 6 de Mayo de 2014.

1. **Partes de un Monomios. Monomios semejantes. Ejemplos.**

2. **Calcula el valor numérico del polinomio $x^2 - 5x + 6$ para los siguientes valores:**
   - **a)** $x = -1$
   - **b)** $x = 2$

3. **Calcula y simplifica:**
   - **a)** $5x^2 + 7x - 3x^2 + 2x - 8$
   - **b)** $(2x^2)\cdot(4x^3)$
   - **c)** $x^5 : x^3$

4. **Calcula**:
   - **a)** $(2x^3 + 9x - 7) + (5x^2 - 4x + 8)$
   - **b)** $(4x^3 + 5x^2 + 3x + 2) - (x^3 - 2x^2 + 1)$
   - **c)** $5x \cdot (3x^2 - x - 2)$

5. **Calcula:** $(x^2 + x - 2) \cdot (x^2 - 3x + 1)$:

6. **Calcula aplicando identidades notables:** :
   - **a)** $(x - 2)^2$
   - **b)** $(x + 5)^2$
   - **c)** $(x + 6)\cdot(x - 6)$

7. **Expresa como cuadrado de una suma, o de una diferencia, o como producto de una suma por diferencia:**
   - **a)** $x^2 - 6x + 9$
   - **b)** $x^2 + 4x + 4$
   - **c)** $x^2 - 16$

8. **Saca factor común a las siguientes expresiones:**
   - **a)** $5x^3 + 3x^2$
   - **b)** $x^2 + x$

	MATEMÁTICAS 2.º ESO			
	Nombre		Nº	
	Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Tercera evaluación. Prueba grupal 9.Grupo E2B. 27 de Mayo de 2014.

1. **Ecuaciones de primer grado. Elementos y nomenclatura.**

2. **Ecuaciones de segundo grado. Tipos.**

3. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**
   - **a)** $6 - 2x = 10$
   - **b)** $6x - 4x + 2 = 15 - 5x + 1$
   - **c)** $3(x + 5) - 7x + 1 = 2x - 2$
   - **d)** $\frac{2+x}{3} = \frac{3-x}{2}$

4. **Si al triple de un número lo disminuimos en 6 unidades se obtiene el mismo número aumentado en 14 unidades. Halla el número.**

5. **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:**
   - **a)** $x^2 - 3x + 2 = 0$
   - **b)** $x^2 + 6x + 9 = 0$
   - **c)** $2x^2 - 6x + 5 = 0$

6. **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:**
   - **a)** $2x^2 - 128 = 0$
   - **b)** $4x^2 + 4 = 0$
   - **c)** $3x^2 = 75$

Valoración

- En la resolución de ecuaciones se valora la justificación de los pasos para su resolución.
- En los problemas de enunciado hay que resolverlos mediante su correcto planteamiento mediante ecuaciones.

MATEMÁTICAS 2.º ESO

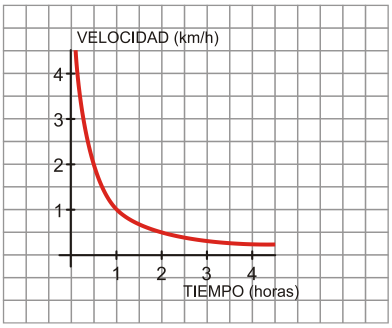
Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. No se puede utilizar calculadora. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Tercera evaluación. Prueba individual 3. Grupo E2B. 10 de junio de 2014.

1. **Identidades notables.**

2. **Resolución de las ecuaciones de segundo grado.**

3. **La velocidad de un móvil en función del tiempo que tarda en recorrer 1 km viene dada por la siguiente gráfica:**



a) **¿Es una función creciente o decreciente?**

b) **¿Cuál es la velocidad cuando t =1 hora?**
¿Y cuando t = 2 horas?
¿Y cuando t = 15 minutos?

c) **Al aumentar el tiempo, ¿a qué valor tiende la velocidad?**

4. **Calcula:**
   - a) $(x^3 + 9x - 7) + (5x^2 - 4x + 8)$
   - b) $(4x^3 + 5x^2 + 3x - 2) - (x^3 - 2x^2 + 1)$
   - c) $5x \cdot (3x^2 - x - 2)$
   - d) $(x^2 + x - 2) \cdot (x^2 - 3x + 1)$

5. **Calcula aplicando identidades notables:**
   - a) $(x - 5)^2$
   - b) $(2x + 3)^2$
   - c) $(x + 4)\cdot(x - 4)$

6. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**
   - a) $3(x - 1) = 4 - 2(x + 1)$
   - b) $x^2 + 2x - 3 = 0$
   - c) $x^2 - 5x = 0$

7. **La base de un rectángulo mide 3 cm más que su altura. Hallar las dimensiones de dicho rectángulo sabiendo que su perímetro es 2**

ANEXO III

TEMPORALIZACIÓN Y PRUEBAS DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS

1ºBACHILLERATO CIENCIAS DE LA NATURALEZA Y LA SALUD

<table>
<tr><td rowspan="4">1ª EVALUACIÓN</td><td>ARITMÉTICA Y ALGEBRA</td><td>Prueba individual 1</td></tr>
<tr><td>UD1: NÚMEROS REALES.</td><td>Prueba grupal 1</td></tr>
<tr><td>UD2: SUCESIONES.</td><td>Prueba grupal 2</td></tr>
<tr><td>UD3: ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES.</td><td>Prueba grupal 3</td></tr>
<tr><td rowspan="5">2ª EVALUACIÓN</td><td>GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA</td><td>Prueba individual 2</td></tr>
<tr><td>UD4: RAZONES Y FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS.</td><td>Prueba grupal 4</td></tr>
<tr><td>UD5: NÚMEROS COMPLEJOS.</td><td>Prueba grupal 5</td></tr>
<tr><td>UD6: VECTORES Y PROBLEMAS MÉTRICOS</td><td rowspan="2">Prueba grupal 6</td></tr>
<tr><td>UD7: CÓNICAS</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3ª EVALUACIÓN</td><td>ANÁLISIS</td><td>Prueba individual 3</td></tr>
<tr><td>UD8: FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL.</td><td>Prueba grupal 7</td></tr>
<tr><td>UD9: LÍMITES Y CONTINUIDAD</td><td>Prueba grupal 8</td></tr>
<tr><td>UD10: INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES</td><td>Prueba grupal 9</td></tr>
</table>

MATEMÁTICAS 1.º BACHILLERATO

Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Prueba Inicial. Grupo B1A. 25 de Septiembre de 2014.

1. Efectúa las siguientes operaciones y, si es posible, simplifica el resultado:

$$\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

2. Calcula y expresa el resultado en notación científica $\dfrac{5{,}25\cdot 10^{10}-4{,}12\cdot 10^{8}}{2\cdot 10^{-8}}$

3. Expresa como intervalo y representa: a) $\{x \in \Re \ / \ -1 \le x < 3\}$ b) $\{x \in \Re \ / \ x > 0\}$

4. Expresa en forma exponencial: a) $\sqrt[5]{a^3}$ **b)** $\sqrt{10}$

5. Factoriza los siguientes polinomios: a) $2x^4 + 6x^2$ b) $9 + 6x + x^2$

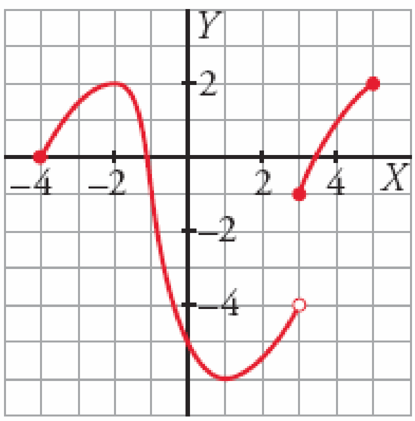
6. Un televisor que valía 1000 € lo rebajaron un 15% en las rebajas de enero pero luego en febrero lo subieron un 10%.
   a) ¿Cuál es su precio actual?
   b) ¿Cuál es la variación total expresada en porcentaje?

7. Una persona gana un premio de 25 000 € y decide colocarlo en un banco que le ofrece un 4,25% anual. Calcula el capital que tendremos después de 6 años en los siguientes casos:
   a) Los intereses anuales no se acumulan al capital.
   b) Los intereses anuales se acumulan cada año al capital.
   Utiliza la fórmula adecuada, identificando todos sus elementos.

8. Resuelve estas ecuaciones: a) $x(2x-1)(x+5) = 0$ b) $\sqrt{4x+5} = x+2$

9. El triple de un número más la mitad de otro suman 10; y si sumamos 14 unidades al primero de ellos, obtenemos el doble del segundo. Plantea un sistema de ecuaciones y resuélvelo para hallar dichos números.

10. Observa la gráfica y halla:
   a) Dominio y recorrido.
   b) Máximos y mínimos.
   c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   d) Dónde es continua y los puntos de discontinuidad.



MATEMÁTICAS 1.º BACHILLERATO

Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Primera evaluación. Prueba grupal 1.Grupo B1A. 9 de octubre de 2014.

1. Campos numéricos.

2. Notación científica.

3. Considera los siguientes números:

$$\frac{2}{3},\ \sqrt[3]{-1},\left|\sqrt{2}-\sqrt[4]{16}\right|,\phi,\frac{\pi}{2},\sqrt{23,}\ \ e^2$$

Clasifícalos según sean naturales, enteros, racionales o reales.

4. Simplifica todo lo que puedas las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$ **b)** $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

a) $7\sqrt[3]{81a}-2\sqrt[3]{3a^4}+\dfrac{\sqrt[3]{3a}}{5}$ **d)** $\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}}$

5. Representa en la recta real los siguientes números e intervalos:

a) $[0,5)$ **e)** $\sqrt{12}$

b) $\left\{x/|x|<3\right\}$ **f)** $\left|\sqrt{2}-\sqrt{5}\right|$

c) $\left\{x/x^2>4\right\}$ **g)** $\dfrac{5}{3}$

d) $\left\{-\infty<x\le 7\right\}$ **h)** $0,\widehat{3}$

6. Efectúa y expresa el resultado en notación científica con tres cifras significativas:

b) $\dfrac{\left(3,12\cdot 10^{-5}+7,03\cdot 10^{-4}\right)8,3\cdot 10^{8}}{4,32\cdot 10^{3}}$ **b)** $\dfrac{\left(1,5\cdot 10^{7}-8\cdot 10^{9}\right)\left(3,5\cdot 10^{-5}+185\right)}{9,2\cdot 10^{6}}$

7. Si $x\in R$**, explica si es verdadera o falsa cada una de estas afirmaciones:**

a) x^2 **es siempre positivo o nulo.**

b) x^3 **es siempre positivo o nulo.**

c) $\sqrt[3]{x}$ **solo existe si** $x\ge 0$**.**

d) x^{-1} **es negativo si lo es** x**.**

e) **–** x^2 **es siempre negativo.**

MATEMÁTICAS 1.º BACHILLERATO

Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Primera evaluación. Prueba grupal 2.Grupo B1A. 30 de Octubre de 2014.

1. Progresiones. Suma de sus elementos.

2. Obtener el término general o criterio de recurrencia de las siguientes sucesiones, identificando cuales de ellas son progresiones aritméticas y cuales geométricas:

a) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\frac{1}{5}\ .....$

b) $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2,\ \sqrt{5}....$

c) 4, 7, 3, -4, -7.......

d) 1, 2 ; 2,4; 3,6; 4,8; 6.......

e) 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001.......

3. Dada la sucesión $a_n = 5 - 3\,n$ obtener la suma desde a_{20} hasta a_{30} ambos incluidos.

4. Un capital de 3000 euros se coloca al 5% de interés compuesto durante 7 años ¿Qué capital se forma al cabo de ese tiempo?, Si el interés fuese simple obtendríamos más o menos capital.

5. Di si existen o no los siguientes límites y calcula, razonando tu respuesta aquellos que existan:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{5n+3}{n}} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n+5000}{n^2} \qquad \lim_{n\to\infty}\ n^2+1$$

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n+15 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

6. ¿Es posible encontrar una progresión aritmética que converja a 5? ¿Y una geométrica? Razona tu respuesta.

	MATEMÁTICAS 1.º BACHILLERATO		
	Nombre	Nº	
	Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.	Calificación	

Primera evaluación. Prueba grupal 3. Grupo B1A. 27 de Noviembre de 2014.

1. Método de Gauss.

2. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\sqrt{3x+16} = 2x-1$

b) $\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 1 + \frac{4}{x^2}$

3. Resuelve las ecuaciones que se dan a continuación:

a) $3^x + \frac{1}{3^x} - \frac{1}{3} = \frac{79}{9}$

b) $ln(3x\text{-}1) = ln\,2 + ln(4x\text{-}\ 6)$

4. Un grupo de amigos tiene que pagar una factura de 500 euros. Si fueran dos amigos más, cada uno de ellos tendría que pagar 12,5 euros menos. ¿Cuántos amigos son?

5. Halla los valores de x, y, z mediante el método de Gauss:

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-2y+3z=1 \\ x+2y-z=4 \end{cases}$$

6. Resuelve e interpreta gráficamente las inecuaciones:

a) $2x + 1 > -5$

b) $x^2 + x - 6 \leq 0$

	MATEMÁTICAS 1.º BACHILLERATO		
	Nombre		Nº
	Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.	Calificación	

Primera evaluación. Prueba individual 1. Grupo B1A. 4 de diciembre de 2014.

1. Propiedades de los logaritmos.

2. Encuentra las soluciones de las ecuaciones siguientes:

a) $x + 4 = \sqrt{4x + 12}$ b) $\frac{2x - 1}{x} + \frac{4}{x - 1} = \frac{11}{2}$

3. Obtén las soluciones de cada una de estas ecuaciones:

a) $2^{2x} - 2^{x+1} + \frac{3}{4} = 0$ b) $log\,(x - 2) + log\,(x - 3) = log\,6$

4. Calcula y simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{80} - 3\sqrt{45}$ b) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$

5. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2log\ x + log\ y = 1 \\ log\ x - 2log\ y = -2 \end{array}\right\}$$

6. Obtén la solución del siguiente sistema de ecuaciones, aplicando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ x + y - 3z = -5 \\ 2x - y + 2z = 9 \end{cases}$$

	MATEMÁTICAS 1.º BACHILLERATO		
	Nombre	Nº	
	Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.	Calificación	

Segunda evaluación. Prueba grupal 4. Grupo B1A. 12 de Enero de 2014.

1. **Enunciado y demostración del Teorema del Seno.**

2. **Si** $sen\,\alpha = \frac{3}{5}$ **y** $90^{o} < \alpha < 180^{o}$ **,sin hallar previamente el valor de** α**, calcula** $tg\,\frac{\alpha}{2}$

3. **Demuestra que:**

$$\frac{\cos x}{1 - sen\,x} + \frac{1 + sen\,x}{\cos\,x} = \frac{1 + \cos 2x}{\cos x - \frac{1}{2}\,sen\,2x}$$

4. **Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:**

   a) $\cos x\,sen\,2x - sen\,x = 0$

   b) $\cos 2x + \cos^{2} x = 2$

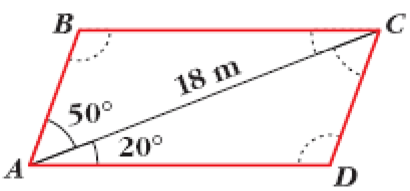
5. **Resuelve los siguientes triángulos:**

   a) ***a*** **= 12 cm** ***b*** **= 16 cm** ***c*** **= 5 cm**

   b) ***b*** **= 5 m** $A = B = 35^{o}$

6. **Calcula el área y las longitudes de los lados y de la otra diagonal:**

   $BAC = ACD = 50^{o}$ ***.Calcula los lados del triángulo ACD y su área. Para hallar la otra diagonal, considera el triángulo ABD.***



	MATEMÁTICAS 1.º BACHILLERATO		
	Nombre		Nº
	Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.	Calificación	

Segunda evaluación. Prueba grupal 5.Grupo B1A. 12 de Febrero de 2014.

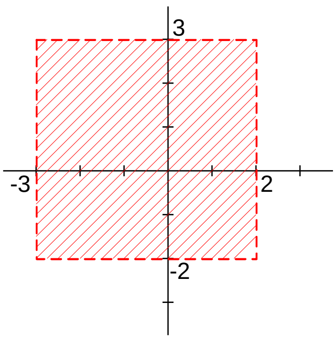
1. Formas de un número complejo.

2. Halla el valor de b para que el producto (3 - 6*i*) (4 + b*i*) sea:

a) Un número imaginario puro.

b) Un número real.

3. ¿Qué condiciones deben cumplir los números complejos cuya representación gráfica sea?



4. Representa los siguientes números complejos, sus opuestos y conjugados, y exprésalos en forma polar:

a) $1 - i$ **b)** -4 **c)** $-\frac{3}{4}i$ **d)** $2+2\sqrt{3}i$

5. Calcula y representa gráficamente el resultado:

a) $\frac{i^7 - i^{-7}}{2i}$ **b)** $\sqrt[3]{\frac{1+i}{2-i}}$ **c)** $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$

6. La suma de dos números complejos es 3 + *i*. La parte real del primero es 3, y el cociente de este entre el segundo es un número real. Hállalos.

7. Representa gráficamente los resultados que obtengas al hallar $\sqrt[3]{-2-2i}$ **y calcula el lado del triángulo formado al unir esos tres puntos.**

8. Resuelve la ecuación: $i\,x^3 - 27 = 0$

MATEMÁTICAS 1.º BACHILLERATO

Nombre | Nº
Calificación

Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.

Segunda evaluación. Prueba grupal 6.Grupo B1A. 2 de Marzo de 2014.

1. Ecuaciones de una recta.

2. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto (4, 0) es igual a la mitad de la distancia a la recta $x-16=0$. Representa la curva que obtienes.

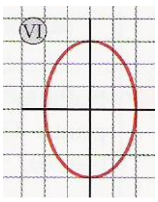
3. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por (– 3, 2) y (4, 1) y es tangente al eje *OX*.

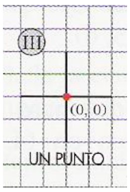
4. Halla la ecuación de la hipérbola que tiene el centro en el origen de coordenadas y los focos en el eje de abcisas, sabiendo que pasa por el punto P$\left(\sqrt{\frac{5}{2}},1\right)$y que una de sus asíntotas es la recta $y=2x$

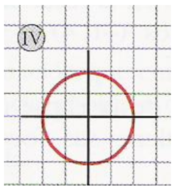
5. Asocia a cada una de las ecuaciones una de las gráficas que se dan a continuación:

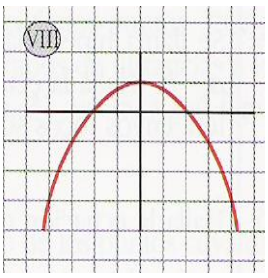
a) $xy=1$ **b)** $\frac{x^2}{4}+y^2=0$ **c)** $y^2-\frac{x^2}{4}=1$

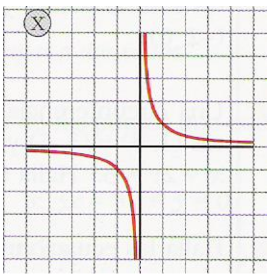
d) $\frac{x^2}{4}+y=1$ **e)** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$ **f)** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

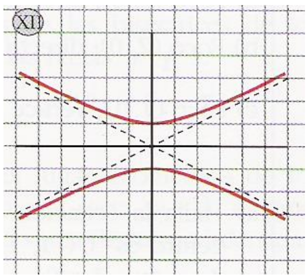












6. Describe las siguientes cónica, obtén sus elementos y dibújalas:

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

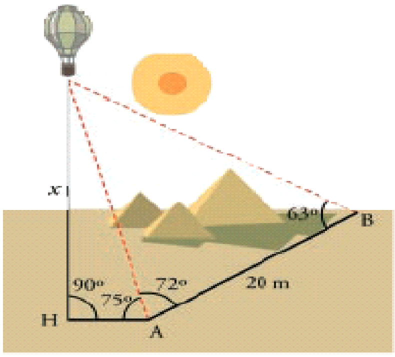
MATEMÁTICAS 1.º BACHILLERATO

Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Segunda evaluación. Prueba individual 2.Grupo B1A. 17 de Marzo de 2014.

1. **Enunciado y demostración del Teorema del Coseno.**

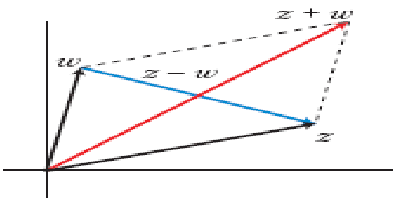
2. **Para hallar la altura de un globo, realizamos las mediciones indicadas en la figura. ¿Cuánto dista el globo del punto *A*? ¿Cuánto del punto *B*? ¿A qué altura está el globo?**



3. **Demuestra:** $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{1+tg\,\alpha\;tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\;tg\,\beta}$

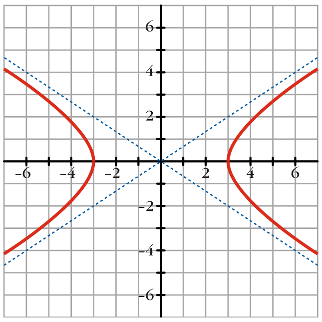
4. **Halla dos números complejos tales que su cociente sea 3, la suma de sus argumentos $\frac{\pi}{3}$ y la suma de sus módulos 8.**

5. **Demuestra, utilizando números complejos, que en un paralelogramo cualquiera la suma de los cuadrados de las diagonales es igual al doble de la suma de los cuadrados de los lados.**



6. **Halla la ecuación general de la recta perpendicular a $3x - y = 1$ que pasa por el punto $(0, 1)$.**

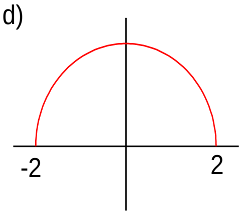
7. **Escribe la ecuación de la siguiente hipérbola y halla sus semiejes, sus focos, su excentricidad y sus asíntotas.**

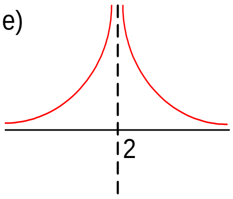


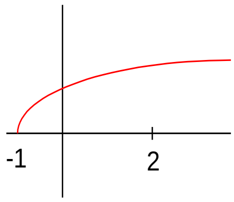
Tercera evaluación. Prueba grupal 7.Grupo B1A. 16 de Abril de 2014.

1. **Funciones logarítmicas. Ejemplos.**
2. **Calcula el dominio de las siguientes funciones:**

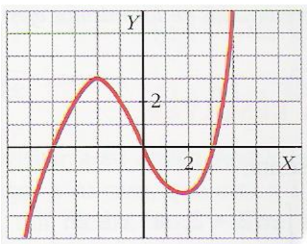
a) $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ b) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$ c) $y=cos\,x$

d) 

e) 

f) 

3. **Esta es la gráfica de la función** $y=f(x)$:



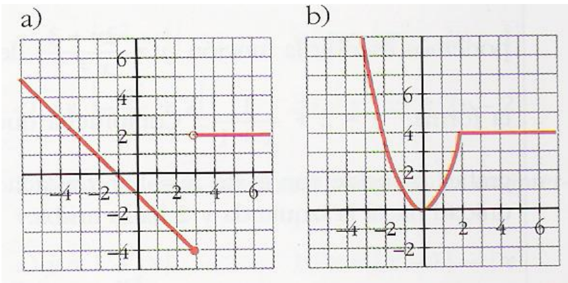
Representa a partir de ella la función $y=|\,f(x)|$

4. **Representa las siguientes funciones en las que se ha restringido voluntariamente su dominio:**

a) $y=x^2-4$ si $x\in[-2,3]$

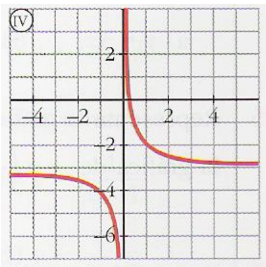
b) $y=5-\dfrac{x}{2}$ si $x\in[-2,+\infty)$

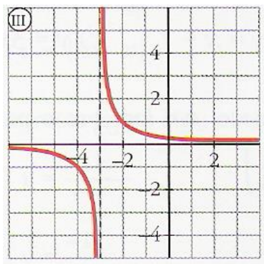
5. Busca la expresión analítica de esta funciones:

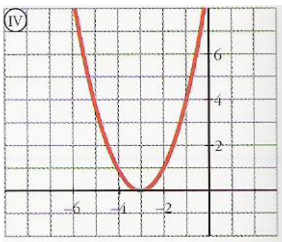


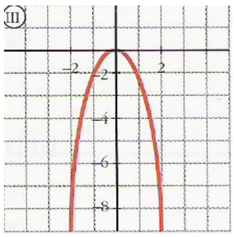
6. Asocia a cada una de estas funciones su representación gráfica:

a) $y=(x+3)^2$ **b)** $y=\dfrac{1-3x}{x}$ **c)** $y=-2x^2$ **d)** $y=\dfrac{1}{x-4}$









7. Obtén la expresión analítica de la función inversa de $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ **y represéntala gráficamente.**

8. De un cuadrado de 4 cm de lado, se cortan en las esquinas triángulos rectángulos isósceles cuyos lados iguales miden x.

a) Escribe el área del octógono que resulta en función de *x*

b) ¿Cuál es el dominio de esa función? ¿Y su recorrido?

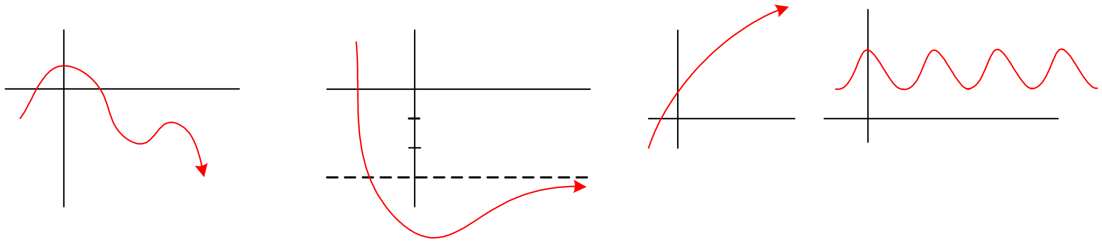
MATEMÁTICAS 1.º BACHILLERATO			
Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Tercera evaluación. Prueba grupal 8. Grupo B1A. 7 de Mayo de 2014.

1. Tipos de discontinuidad.

2. ¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en que la función no esté definida? ¿Puede ser la función continua en ese punto?

3. Escribe el límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones:



4. Calcula los siguientes límites:

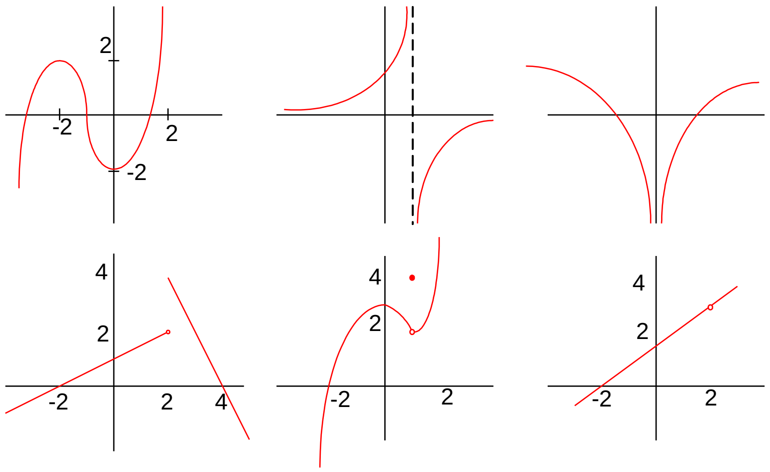
a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+1}{x+1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2} \log_2 x$

5. Representa una función que verifique estas condiciones:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

6. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función continua? Señala, en caso que no lo sea, la razón de su discontinuidad.



7. ¿Existe algún valor de *k* para el cual la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } \; x\neq 0\\ k & \text{si } \; x=0\end{cases}$$

sea continua en $x=0$? Justifica tu respuesta.

8. Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

$$y=\frac{1}{9-x^2} \qquad\qquad y=\frac{2x^3-3}{x^2-2}$$

9. Los gastos de una empresa dependen de sus ingresos, x. Así,

$$g(x)=\begin{cases}0,6\,x+200 & \text{si } \; 0\leq x\leq 1000\\ \dfrac{1000\,x}{x+250} & \text{si } \; x>1000\end{cases}$$

donde los ingresos y los gastos vienen expresados en euros.

a) Representa $g(x)$ y di si es función continua.

b) Calcula el límite de $g(x)$ cuando $x\to+\infty$ y explica su significado

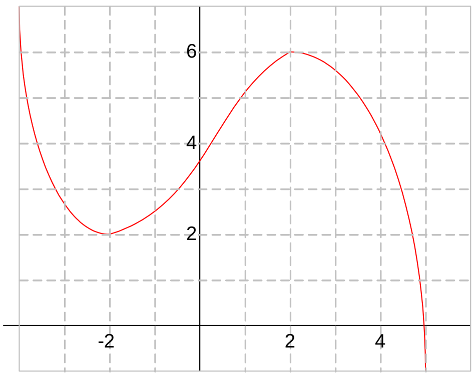
Tercera evaluación. Prueba grupal 9.Grupo B1A. 28 de Mayo de 2014.

1. **Utilidad de la función derivada.**
2. **Sabiendo que la derivada de** $f(x) = \sqrt{x}$ **es** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$**, responde:**
   a) **¿cuál es la ecuación de la tangente en** $x = 1$**?**

   b) **¿Tiene f puntos de tangente horizontal?**

   c) **¿Es creciente o decreciente en** $x = 4$**?**

3. **Indica, en la siguiente gráfica, los puntos en los que la derivada es cero. En** $x=1$**, ¿La derivada es positiva o negativa? ¿y en** $x=3$**?**



4. **La tasa de variación media de una función *f*(*x*) en el intervalo [3, 3 + *h*] es igual a** $\frac{2-3h}{h+1}$

   ¿Cuál es el crecimiento de esa función en $x = 3$**?**

5. **Calcular las derivadas de las siguientes funciones, simplificando al máximo el resultado:**

   a) $y = cos^2 x + e^{sen\,x}$ **b)** $y = arc\,tg\left(x^2 + 1\right)$

   c) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x^2 - 4}}$ **d)** $y = 7^{x+1}.e^x$

6. **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

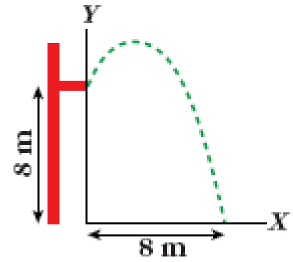
   a) $y = x^3 - 3x^2$ **b)** $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

MATEMÁTICAS 1.º BACHILLERATO

Nombre		Nº	
Utiliza bolígrafo azul o negro. Escribe la solución en esta hoja de examen. Escribe nombre en hojas de borrador y entrégala junto al examen. Se debe justificar pasos y expresar fórmulas si se usan.		Calificación	

Tercera evaluación. Prueba individual 3. Grupo B1A. 11 de junio de 2014.

1. En una piscina hay un trampolín a 8 m del agua. Un nadador se lanza tomando impulso y elevándose 1 m antes de empezar a caer. El nadador alcanza el agua a 8 m del borde del trampolín.



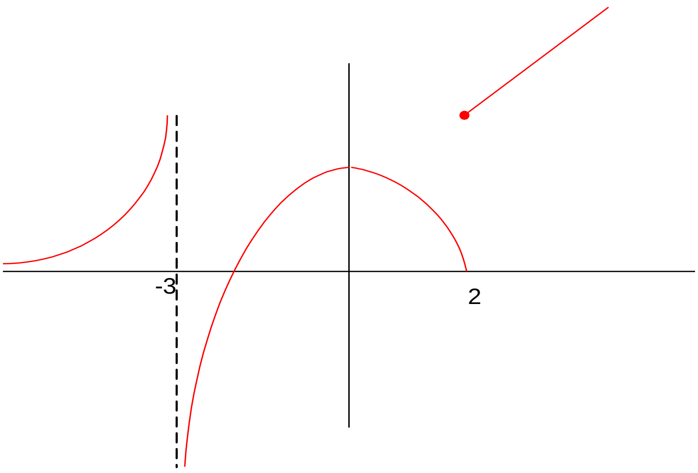
Si tomamos como origen de coordenadas la proyección del extremo del trampolín sobre el agua y el vértice de la parábola es (*a*, *b*), ¿cuánto vale *b?*

2. Si $f(x) = sen\ x$, $g(x) = x^2 + 5$, **halla** $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ **y** $g \circ g$. **Halla el valor de estas funciones en** $x = 0$ **y** $x = 2$.

3. Sobre la gráfica de la función f(x), halla:

a) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ **b)** $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ **c)** $\lim_{x \to 0} f(x)$ **d)** $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

e) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ **f)** $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ **g)** $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ **h)** $\lim_{x \to -2} f(x)$

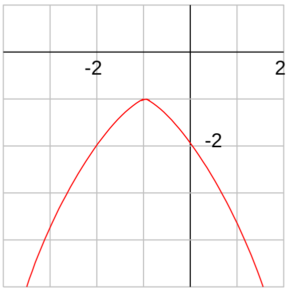


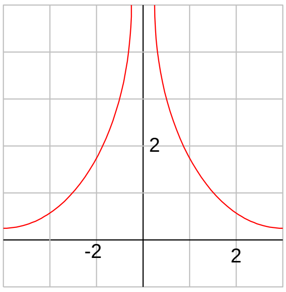
4. Comprueba si la función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ x-1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$, es continúa en **x = 0.**

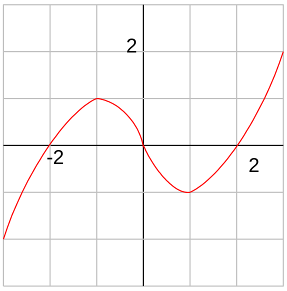
5. Halla la función derivada de estas funciones:

a) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ **b)** $y=\left(x^2-3\right)^3$ **c)** $y=cos^2x+e^{sen\,x}$

6. Indica en cada una de estas funciones los valores de x en los que f' es positiva y en los que f' es negativa.







7. Representa la siguiente función racional:

$$y=\frac{x^2+3x+11}{x+1}$$

ANEXO IV. RESULTADOS DE LAS PRUEBAS DE EVALUACIÓN INICIAL

1º ESO	
Nº de alumno	Notas prueba inicial
1	5.5
2	5.5
3	2.75
4	5
5	7
6	5
7	7
8	8.25
9	6
10	7.5
11	6.75
12	5
13	6.5
14	5.5
15	7
16	6.5
17	4.5
18	4.5
19	5
20	7
21	6.5
22	5.75
23	9
24	5
25	6
26	8
27	7
28	5.5
29	5.25
30	7.75

2º ESO	
Nº de alumno	Notas prueba inicial
1	5.75
2	5.25
3	5.75
4	5.5
5	6.5
6	5.25
7	5.75
8	6.75
9	4.75
10	4
11	6
12	5.75
13	9.5
14	5.5
15	4.25
16	4.5
17	7
18	6
19	6.25
20	3.25
21	3.5
22	3.25
23	6.25
24	5
25	5.75
26	5.5
27	6
28	7

1º BACHILLERATO	
Nº de alumno	Notas prueba inicial
1	7
2	6
3	4
4	7.5
5	6.25
6	6.75
7	6
8	5.5
9	5
10	4.75
11	4.75
12	7.25
13	5.5
14	5.5
15	4.75
16	4.75

ANEXO V

DISTRIBUCIÓN DE LOS ALUMNOS POR GRUPOS

MATEMATICAS 1ºESO		MATEMATICAS 2ºESO		MATEMATICAS I BACHILLERATO	
GRUPOS	ALUMNOS	GRUPOS	ALUMNOS	GRUPOS	ALUMNOS
1	7,23 y 25	1	1,13,20 y 24	1	1, 14, 15 y 16
2	4, 6 y 9	2	6,7,10 y28	2	2, 8, 10 y 12
3	3, 21, 26 y 29	3	2,12,17 y22	3	4, 5, 7, y 11
4	12,16,28 y 30	4	11,21,25 y 26	4	3, 6, 9 y 13
5	10,13,14 y 18	5	4,8,15 y 18		
6	2,5,11 y 17	6	3,5,16 y 27		
7	1,8,24 y 27	7	9,14,19 y 23		
8	15,19,20 y 22				

ANEXO VI. RESULTADOS DE LAS PRUEBAS DE CONOCIMIENTO

1º ESO	Conocimiento	
Nº de alumno	Declarativo	Procedimental
1	8	9
2	6	7.75
3	1	2
4	5	2.7
5	9.5	8
6	9	9.5
7	2	3.1
8	7.7	8.5
9	6.5	7.25
10	8	8.2
11	5	8.25
12	6.5	7
13	6.5	7.5
14	6.2	8.7
15	6	6.2
16	7.5	8.7
17	3	4
18	3.5	4.5
19	2	2.7
20	4	5.5
21	7	7.25
22	5.5	7
23	6	8.7
24	1.2	2
25	4	6
26	7	8,1
27	7.75	6.5
28	1.5	2.7
29	4	4.7
30	3	3.2

2º ESO	Conocimiento	
Nº de alumno	Declarativo	Procedimental
1	8.2	8.5
2	2	3
3	4	5
4	7.2	7.5
5	6	7
6	8	6.7
7	5.5	6
8	9	6
9	5.1	8
10	2	1
11	5	4
12	6	5
13	9.5	8
14	7.4	8
15	2	3
16	4	1
17	8.5	7
18	6	7.5
19	3.7	4
20	3	4
21	0.5	1
22	3.25	2
23	2	3
24	5	4
25	5.5	6
26	6	8
27	1	2
28	4.2	3

1º BACHILLERATO	Conocimiento	
Nº de alumno	Declarativo	Procedimental
1	3.7	4
2	7	7.7
3	6	6.5
4	5.5	5.2
5	9.2	10
6	2	3.5
7	6.6	5.2
8	5	4
9	7.5	8
10	6	5
11	2.3	2
12	5	3.5
13	10	9
14	4	3
15	8	7
16	5	4

ANEXO VII. FICHA DE SEGUIMIENTO DEL ALUMNO/A
FICHA DEL ALUMNO/A

Foto

APELLIDOS: ____________________ **NOMBRE:** __________________ Grupo ________

Datos Personales:

Fecha de Nacimiento:______________ Domicilio: ____

Telf. fijo: ________________Telf. móvil: ___________Nº de Hermanos: _______ lugar que ocupa: ______

Nombre de la madre: ____ Profesión: _________________________

Nombre del padre:____ Profesión: ___________________________

Datos Académicos:

Nota en el curso anterior: ________________ Optativas elegidas: ____

Asistencia:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
S																															
O																															
N																															
D																															
E																															
F																															
M																															
A																															
M																															
J																															

Resultados académicos

Evaluación Inicial	

1ª Evaluación	Pruebas	Formulación de los puntos de vista propios	Orientación hacia el otro	Obtención conductas de ayuda complejas	Produccion de conductas de ayudas directas

PRIMERA EVALUACIÓN ☐ **Recuperación** ☐

2ª Evaluación	Pruebas	Formulación de los puntos de vista propios	Orientación hacia el otro	Obtención conductas de ayuda complejas	Produccion de conductas de ayudas directas

SEGUNDA EVALUACIÓN ☐ **Recuperación** ☐

3ª Evaluación	Pruebas	Formulación de los puntos de vista propios	Orientación hacia el otro	Obtención conductas de ayuda complejas	Produccion de conductas de ayudas directas

TERCERA EVALUACIÓN ☐ **Recuperación** ☐

CALIFICACIÓN JUNIO ☐ **CALIFICACIÓN SEPTIEMBRE** ☐

ANEXO VIII

TEST PARA LA EVALUACIÓN DEL PROCESO DE ENSEÑANZA

Valora de uno a cinco las siguientes cuestiones:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
He aprendido bastante en esta Unidad					
Hemos hecho suficientes ejercicios					
El tema me ha parecido interesante					
Debería dedicarse más tiempo a la unidad					
Los ejercicios propuestos me han parecido inadecuados					
Las explicaciones en la pizarra me han resultado complicadas					
El profesor me ha resuelto todas las dudas					
El examen no correspondía con lo explicado en clase.					
Me he aburrido en clase					
Evaluación final de la unidad					

Para evaluar el proceso de enseñanza como ya hemos dicho utilizamos este modelo de test que pasamos a los alumnos para que valorasen las cuestiones de 1 a 5, donde:

5 ⟶ Totalmente de acuerdo

4 ⟶ Básicamente de acuerdo aunque con algunos matices

3 ⟶ Regular de acuerdo

2 ⟶ Básicamente en desacuerdo aunque con algunos aspectos positivos.

1 ⟶ Totalmente en desacuerdo

ANEXO IX

FACTORES PARA MEDIR LA VARIABLE CONTROVERSIA COOPERATIVA

1. Expone su comprensión de la tarea (enfoque, proceso, producto).
2. Justifica su comprensión de la tarea (enfoque, proceso, producto).
3. Justifica su valoración de las actuaciones propias y ajenas.
4. Ofrece ayuda y orientación sin que se la pidan.
5. Respeta turnos de intervención.
6. Asume su responsabilidad en el progreso grupal.

Para medir estas variables utilizaremos una escala de tipo Likert de 1 a 10, donde:

10 → Siempre

1 → Nunca

ANEXO X

FACTORES PARA MEDIR LA VARIABLE AYUDA

1. Da ayuda sobre el producto (presentación, estructura).
2. Da ayuda sobre el contenido (conceptos, perspectivas de interpretación).
3. Da ayuda sobre el proceso de realización de la tarea (estrategias y recursos).
4. Ofrece y permite la exposición completa de la demanda.
5. Pide sugerencias y explicaciones sobre los distintos aspectos de la demanda.
6. Ofrece sugerencias y explicaciones sobre los distintos aspectos de la demanda.

Para medir estas variables utilizaremos una escala de tipo Likert de 1 a 10, donde:

5 ⟶ Siempre

1 ⟶ Nunca

ANEXO XI. FICHAS DE OBSERVACIÓN

1ºE.S.O	CONTROVERSIA COOPERATIVA						AYUDA					
Nº de alumno	Categoría 1	Categoría 2	Categoría 3	Categoría 4	Categoría 5	Categoría 6	Categoría 1	Categoría 2	Categoría 3	Categoría 4	Categoría 5	Categoría 6
1	8	9	8	7	7	8	7	8	8	10	7	7
2	9	8	9	9	10	8	7	9	8	7	6	7
3	1	1	2	2	7	1	3	1	1	1	3	4
4	2	3	4	3	6	2	5	3	6	2	3	5
5	9	8	9	8	9	9	7	8	10	8	8	7
6	7	6	8	7	9	6	7	6	6	7	7	7
7	2	2	4	3	7	2	4	2	3	1	2	8
8	7	8	8	7	9	7	6	5	6	7	6	6
9	4	4	3	5	2	5	5	5	4	6	7	5
10	6	7	8	7	4	5	6	4	3	5	6	6
11	7	5	8	9	5	6	5	3	5	6	5	6
12	5	4	5	4	6	6	4	2	3	6	5	7
13	8	7	9	9	10	7	8	6	6	3	6	4
14	8	8	6	5	6	6	6	7	6	5	7	4
15	5	6	7	6	8	6	6	5	6	7	5	3
16	7	7	5	6	5	8	6	8	9	8	6	6
17	1	3	2	3	8	1	4	1	1	1	2	2
18	2	3	6	4	8	3	5	3	2	3	2	5
19	2	3	5	6	9	1	3	1	2	2	3	3
20	5	7	6	7	4	6	3	4	5	6	3	5
21	8	6	7	8	9	8	8	7	7	8	5	5
22	2	3	6	5	8	5	7	3	2	3	6	8
23	6	7	8	6	7	10	9	6	7	8	5	5
24	1	2	4	3	7	1	4	2	1	1	3	2
25	4	4	6	7	9	6	6	3	4	2	5	5
26	7	8	6	8	5	7	6	7	6	8	9	4
27	5	6	7	6	9	5	7	5	5	3	7	5
28	2	1	4	3	6	1	3	1	1	1	4	2
29	4	4	6	5	9	2	3	2	3	1	5	6
30	2	2	3	3	4	2	3	2	2	1	3	4

2ºE.S.O	CONTROVERSIA COOPERATIVA						AYUDA					
Nº de alumno	Categoría 1	Categoría 2	Categoría 3	Categoría 4	Categoría 5	Categoría 6	Categoría 1	Categoría 2	Categoría 3	Categoría 4	Categoría 5	Categoría 6
1	7	7	8	9	9	8	8	7	8	7	10	5
2	1	2	4	3	9	1	10	9	9	3	4	4
3	6	7	7	7	7	7	5	3	4	3	4	6
4	4	4	6	5	7	3	6	5	4	3	9	10
5	6	5	7	6	3	3	4	3	4	3	6	4
6	8	9	9	8	9	7	7	6	7	5	9	6
7	3	3	5	4	8	5	7	3	4	3	5	6
8	8	9	9	8	9	8	7	8	9	8	9	6
9	5	5	6	5	9	6	4	3	3	2	4	6
10	3	3	4	3	4	2	3	1	2	1	3	4
11	4	3	2	3	2	1	3	3	4	3	5	5
12	6	7	5	6	7	6	5	4	4	3	4	6
13	9	7	8	8	6	9	10	10	10	9	9	6
14	6	7	5	6	4	5	5	6	5	7	8	5
15	2	2	3	2	4	1	2	1	1	1	3	4
16	4	3	5	5	7	5	4	3	3	4	4	6
17	9	8	9	9	10	8	9	8	9	8	10	5
18	6	6	4	5	4	6	6	5	6	3	6	4
19	6	5	7	6	4	6	4	3	3	8	5	5
20	3	5	7	8	7	6	5	4	5	3	4	5
21	1	1	1	3	5	1	2	1	1	1	3	2
22	3	2	4	3	5	2	3	1	2	1	2	4
23	1	2	4	3	7	1	3	1	2	4	2	3
24	6	6	5	7	4	6	5	4	3	5	6	7
25	8	9	7	8	6	8	7	9	8	7	6	5
26	2	3	5	3	10	3	5	3	3	3	7	5
27	4	3	6	4	4	3	4	2	3	1	1	3
28	2	3	4	4	5	3	4	2	3	3	3	5

1ºBACH.	CONTROVERSIA COOPERATIVA						AYUDA					
Nº de alumno	Categoría 1	Categoría 2	Categoría 3	Categoría 4	Categoría 5	Categoría 6	Categoría 1	Categoría 2	Categoría 3	Categoría 4	Categoría 5	Categoría 6
1	2	2	4	3	5	2	3	1	2	1	2	5
2	7	6	5	5	6	7	7	6	6	7	8	7
3	7	5	6	7	4	5	6	7	6	5	7	5
4	2	3	4	3	10	1	4	3	3	2	4	6
5	9	7	6	8	8	9	8	10	10	10	10	5
6	1	2	3	4	6	3	4	2	2	2	3	4
7	6	7	8	7	8	7	7	5	4	5	4	5
8	3	2	6	9	3	9	4	5	4	3	6	5
9	7	8	7	8	9	9	8	8	8	7	7	6
10	4	4	5	5	9	5	6	5	3	6	4	6
11	1	2	3	2	5	1	4	2	3	3	3	3
12	4	5	6	4	8	3	6	3	4	2	5	3
13	9	8	7	9	10	9	7	9	9	8	10	5
14	3	3	4	3	2	2	4	2	3	2	5	5
15	8	8	10	9	9	9	9	7	8	5	7	8
16	6	7	5	6	7	5	7	6	7	7	6	4