

Significados de los conceptos de número positivo y de número negativo manifestados por estudiantes de secundaria obligatoria

Meaning of Concepts of Positive and Negative Number as Expressed by Compulsory Secondary Students

MIGUEL VÍLCHEZ MARÍN¹

mvm243@hotmail.com

LUIS RICO ROMERO

lrico@ugr.es

JUAN FRANCISCO RUIZ HIDALGO

jfruiz@ugr.es

Universidad de Granada, España

Resumen:

En este trabajo exponemos algunos resultados de un estudio exploratorio llevado a cabo con escolares de 2º de ESO, enfocado a determinar los diversos significados que dichos estudiantes pueden asignar al concepto de número entero. Para ello hemos elaborado un cuestionario semántico centrado en las nociones básicas de número positivo y de número negativo. El estudio de las respuestas suministradas por los alumnos a las preguntas y actividades planteadas en el cuestionario, analizadas en términos de elementos y componentes del significado de los conceptos matemáticos escolares, identifica las nociones y los temas empleados. Los resultados, deriva-

Abstract:

This study describes some results of an exploratory study undertaken with secondary students (13-14 years old), regarding the various meanings they could link to the concept of integer. We designed a semantic questionnaire to gather basic meanings of integer numbers as expressed by students. Specifically, we focused on the concepts of both positive and negative numbers. We studied the students' answers to the posed questions and activities by means of the elements and the meaning components of mathematical school concepts and we studied the emerged system, which was useful to classify the answers collected. The results

1 Dirección para correspondencia (correspondence address):

Miguel Vílchez Marín. C/Parras, 29. 18170 Alfacar (Granada)

dos de clasificar e interpretar las respuestas acerca de los números enteros, ayudan a determinar los significados de los escolares sobre tales conceptos numéricos.

Palabras clave:

Concepto de número positivo; concepto de número negativo; cuestionario semántico; educación secundaria obligatoria; significado de un concepto matemático escolar.

from this classification help to us identify the meanings of such numerical school concepts.

Key words:

Compulsory secondary education; positive integer number concept; negative integer number concept; semantic questionnaire; school mathematics concept meaning.

Résumé:

Dans cet article, nous décrivons les résultats obtenus lors d'une étude préparatoire réalisée auprès d'élèves du secondaire âgés de 13-14 ans. Cette étude vise à déterminer les différentes significations que les élèves attribuent à la notion de nombre entier. Nous avons pour cela conçu un questionnaire sémantique afin de recueillir quelques idées exprimées par les étudiants à ce sujet. Plus précisément, nous nous concentrons sur les concepts de nombre positif et négatif. Nous avons analysé d'une part, leurs réponses aux questions posées et aux activités proposées par le biais de composants de signification des concepts mathématiques de l'école. D'autre part, nous avons étudié le système émergé, utile pour classer les réponses recueillies. Les résultats de cette classification nous aident à comprendre le sens de ces concepts scolaires numériques.

Mots clés:

Concept de nombre positif; concept de nombre négatif; éducation secondaire obligatoire; questionnaire sémantique; signification d'un concept mathématique scolaire.

Fecha de recepción: 23-02-2016

Fecha de aceptación: 07-01-2017

1. Introducción

Las nociones y conceptos que establecen la estructura de los números enteros, en particular la noción de número negativo, presentan dificultades singulares para su aprendizaje y requieren estrategias de instrucción propias durante su enseñanza (Bell, 1986; Iriarte y otros, 1991; Bruno, 2001). La idea de negatividad para una magnitud patentiza las contradicciones que los estudiantes encuentran para proporcionarle significado y constituye una importante limitación para el aprendizaje de sus propiedades y relaciones. Este conflicto se ha identificado en diversas ocasiones a lo largo de la historia de la matemática, es conocido y sobre el mismo se ha trabajado y profundizado al estudiar la fundamentación de esos conceptos numéricos (Lizcano, 1993).

Griegos y babilonios desconocieron la noción de número negativo,

no pudieron materializarla en magnitud alguna, ni lograron pensarla (González-Marí, 1998). Algo comparable sucedió a determinados matemáticos de la modernidad, como a Monge (Maz, 2005). Fischbein (2002) también destaca la ausencia de modelos físicos para ejemplificar la estructura del anillo de los números enteros. Los usos coloquial y formal de los términos y conceptos asociados a estas nociones muestran sentidos y estructuras diferentes, con modos de uso no concordantes (González-Marí, 1998). Aun cuando los alumnos hayan sido instruidos sobre números negativos esto no garantiza que los definan, los representen y los usen de manera coherente, que los entiendan y utilicen, es decir, que su significado sea apropiado.

Como muestran los estudios curriculares y la práctica docente, las dificultades señaladas imponen limitaciones para una correcta comprensión de los conceptos mencionados. Esos desajustes son resistentes al cambio y no se superan fácilmente durante el proceso de su enseñanza. Por otra parte, los profesores no advierten cómo se obstaculiza su uso significativo para los escolares. Por ello estamos interesados en identificar los significados parciales, o concepciones personales, de los que se apropian los alumnos y que se manifiestan como conocimientos incompletos y como trabas finalizado el periodo de instrucción sobre el tópico. Pretendemos registrar y describir esas discordancias mediante componentes del significado del concepto, buscando reconducir el aprendizaje de cada alumno y ayudarle a superar sus contradicciones.

El trabajo que aquí se presenta es parte de un estudio realizado sobre los números enteros con un grupo de estudiantes de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria, mediante un cuestionario semántico. Los cuestionarios semánticos sirven para aprehender aquellos componentes del significado de un concepto tal y como los emplean los sujetos, es decir, indagar acerca de las relaciones y propiedades a que refieren, de las representaciones que manejan y de los argumentos que los estudiantes emplean para darles sentido (Vander Klok, 2014).

Para hacer el estudio se diseñan y seleccionan distintas tareas de respuesta abierta. Esas tareas, en su conjunto, demandan respuestas a preguntas relativas a los componentes del significado escolar del concepto de número entero y muestran los significados parciales de distintos sujetos y, en su caso, las contradicciones existentes.

El objetivo general de esta investigación consiste en identificar, analizar y describir diversos modos en que los estudiantes de secundaria

expresan distintos significados del número entero, cuando atienden a cuestiones relativas a elementos y componentes de dichos significados, una vez recibida instrucción sobre dicho concepto.

Este trabajo se aborda a partir de una revisión de estudios anteriores, que contribuyen a la elección de las tareas con las que hemos diseñado el instrumento para la recogida de información. La construcción de un cuestionario sobre las nociones básicas de número positivo y de número negativo, está vinculada a los objetivos propuestos en esta investigación. Así mismo, consideramos precedentes del marco teórico y del método los trabajos de Castro-Rodríguez (2010, 2015), Fernández-Plaza (2011, 2015), Martín-Fernández (2013) y Martín-Fernández, Ruiz-Hidalgo y Rico (2016).

El informe se organiza como sigue. En primer lugar, se presenta el marco teórico basado en la noción de significado, de sus componentes y de otros estudios previos (Rico, 2007, 2016). En segundo lugar, se describen el diseño de la investigación, sus objetivos secundarios, la muestra elegida, el instrumento elaborado para la recogida de datos, su aplicación, seguido por las unidades de análisis para la clasificación de esos datos. En tercer lugar, se interpretan y clasifican las respuestas para lo cual se identifican temas y se determinan categorías y subcategorías, ajustadas a los elementos recogidos y los componentes de significado empleados. Tras la descripción, se discuten y presentan los resultados del análisis de las respuestas, los cuales muestran las concepciones que manifiestan los alumnos de secundaria encuestados acerca de las nociones de número positivo y de número negativo. Para terminar, se presentan las conclusiones.

2. Marco teórico

Los conceptos matemáticos escolares se caracterizan por su variedad y riqueza de significados. Identificamos esa diversidad cuando observamos los distintos modos en que los escolares los expresan, construyen y validan, los utilizan en distintas situaciones y contextos. El aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos por los escolares se manifiesta en su capacidad para identificarlos, representarlos, describirlos de diversos modos, aplicar sus procedimientos y argumentar con ellos, así como para utilizarlos al plantear y resolver una diversidad de problemas. En definitiva, el significado alcanzado se identifica mediante la riqueza de signos,

sentidos y referencias, es decir, de diversos elementos, propiedades y relaciones que los alumnos emplean, de las que se apropian y que manejan cuando trabajan con un concepto matemático determinado.

Destacamos la noción de significado de un concepto matemático escolar como central en este estudio. El significado establece las nociones de concepción, aprendizaje significativo y con sentido de un concepto matemático escolar (Castro-Rodríguez, 2015; Fernández-Plaza, 2015; Rico, Flores y Ruiz-Hidalgo, 2015; Rico, 2016).

2.1. Significados y conocimientos escolares

Nuestro interés se centra en determinar cuáles y qué tipos de significados han aprehendido y emplean los escolares cuando tienen que manejar y usar conceptos matemáticos en situaciones no habituales; no en el logro de unos estándares curriculares convencionales. En concreto, se enfoca en el significado de un concepto matemático conocido por los escolares, el concepto de número entero en este caso; no se preocupa por determinar el rendimiento de ese concepto según el logro en una prueba de evaluación estandarizada, con unos objetivos de aprendizaje o bien el rendimiento de un grupo de escolares.

Para que los escolares desarrollen nuevos significados matemáticos resulta necesario proporcionarles una instrucción previa, de manera que las nociones y elementos que articulen los nuevos conceptos se incorporen a su vocabulario usual, al conjunto de sus ideas básicas, al modo, individual o compartido, de usar esas nociones matemáticas, de pensar con ellas. Ahora bien, la génesis y desarrollo de lo que entiende y aprende un estudiante, las fuentes de las que brotan los significados de un concepto matemático, no se limitan a lo que le transmite el profesor; tampoco a lo que aparece en el libro de texto. Hay un trabajo de reflexión personal, un uso del nuevo vocabulario, una adaptación e integración de los nuevos conocimientos con otros ya conocidos, una búsqueda de modos renovados de expresión y de inserción en el medio, de conversación, comunicación y discusión con los compañeros. El escolar se apropia del nuevo concepto por muchas vías, cada una de las cuales emplea sus propios elementos y aporta nuevos significados parciales. Queremos ejemplificar con los números positivos y negativos cómo se identifica y estudia la variedad y coordinación de esas concepciones y los significados que de ellas emergen.

Consideramos que la formación previa se exterioriza en las concepciones de los estudiantes, entendidas como “las interpretaciones fundadas de un conjunto de respuestas (verbal, gráfico, simbólico, gestual, etc.) que proporciona un estudiante a una serie de estímulos para lo cual moviliza aspectos de su concepción interna, inobservables directamente.” (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico, 2015, p. 214). También sostenemos que las tareas propuestas deberán apelar a las concepciones personales ya arraigadas, a los modos individuales en que se usan tales conceptos, en los que la formación escolar recibida es moldeada por estas concepciones personales, como se ha observado en estudios de otros autores ya mencionados (Castro-Rodríguez, 2010; Fernández-Plaza, 2011; Martín-Fernández, 2013).

2.2. Significado de un concepto matemático escolar

Para establecer y caracterizar el aprendizaje de los escolares acerca de un concepto mediante aquello que manifiestan, escogemos como idea central la noción de significado. La noción que elegimos se refiere al *significado de un concepto matemático escolar* (Rico, 2012), idea que se ubica en el marco del análisis didáctico (Rico, 2013), que interpreta a su vez, la noción de significado establecida por Frege (1996).

En este marco, consideramos que el significado de un concepto matemático escolar se constituye y analiza mediante tres componentes. En primer lugar su *referencia*, que consiste en la estructura formal en que el concepto se ubica, sus elementos, las relaciones y propiedades que la enmarcan, los cuales permiten valorar la veracidad o falsedad de aquellos enunciados en que participa. En segundo lugar, los *sistemas de representación*, aspectos sintácticos determinados por los signos, las formas y las reglas usuales de expresión y transformación de las notaciones. Finalmente, *los sentidos y modos de uso*, que consisten en aquellos elementos semánticos, dados por los contextos donde se usan, las situaciones en que aparecen, los fenómenos que están en su origen y sus aplicaciones convencionales. Los tres componentes muestran el significado de un determinado concepto matemático escolar, mediante una diversidad de elementos posibles y lo constituyen mediante expresiones orales o explicaciones escritas.

Adaptamos esta noción de significado al medio escolar. Consideramos que una *concepción personal* es la interpretación del investigador

(en términos de elementos y componentes de significado) de la descripción que proporciona un sujeto asociada a un concepto dado independientemente de que el mensaje transmitido por éste pueda ser incompleto o defectuoso (Fernández-Plaza y otros, 2013).

2.3. Estudios sobre significados de los números enteros

Son varios los estudios previos en los que hemos localizado diversos antecedentes de los elementos y de las componentes del significado de este concepto. González-Marí (1998) llevó a cabo un extenso análisis didáctico sobre los números enteros, en el cual postuló la necesidad de introducir los números naturales relativos como nuevos entes numéricos, establecidos entre los números naturales y los números enteros, necesarios para planificar su enseñanza y aprendizaje. Bell (1986) identificó, clasificó e interpretó los errores conceptuales en situaciones de listas y escalas, errores como ignorar el signo, confundir posición y movimiento. Maz (2005) revisó libros de texto españoles de los siglos XVIII y XIX y documentó la evolución ocurrida en el tratamiento de la estructura conceptual de los números enteros en tales textos durante ese periodo. Maz y Rico (2009) presentaron una categorización acerca de los fenómenos y los tipos de sistemas de representación utilizados para presentar los números negativos en libros de texto de matemáticas publicados en España durante los siglos XVIII y XIX.

Por sus características y las cuestiones que analiza, hemos trabajado el estudio de Gallardo y otros (2010) que recopilan y organizan *contextos y modos de uso* que se atribuyen al número negativo, como los que siguen:

- *Número sustractivo*. En el que la noción de número se subordina a la de magnitud. En la resta de dos cantidades $a - b$, siempre b será menor que a , donde a, b son números naturales, es decir, el signo menos sólo tiene un carácter binario a nivel de la operación de sustracción.
- *Número signado*. Es el número natural al que se designa con un signo más o un signo menos. Surge así la dualidad del signo: binario (signo de la operación de adición o sustracción) y unario (signo asociado al número natural).
- *Número relativo*. Cuando se concibe la idea de opuestos, en situaciones discretas así como la idea de simetría en situaciones continuas.
- *Número aislado*. Cuando se acepta un número negativo como resultado de una operación o solución de un problema o ecuación.

Por otra parte, estas revisiones proporcionaron gran riqueza de elementos sobre los *sistemas de representación* de los números enteros, que identificamos y clasificamos en tres tipos (Vílchez-Marín, 2015):

- *Verbal*: Todas aquellas expresiones o términos que refieran a alguna modalidad de número entero. Los dos términos principales utilizados para comunicar acerca de los números enteros son los de *positivo* y *negativo*.
- *Simbólica*: Aquellos signos, notaciones y reglas que hacen referencia a números enteros, como por ejemplo, $+$ o $-$.
- *Gráfica*: Representaciones que denoten con un esquema o dibujo los números enteros, como es el caso de la recta entera numérica, los ejes cartesianos (plano de coordenadas enteras), el color (números rojos para identificar a los negativos), o el gesto.

La *estructura o referencia* en esta temática, incluye elementos propios como son los conceptos y relaciones de número positivo y número negativo, cero, relaciones de “menor que” y “mayor que”, simétrico de un entero. Igualmente, incluye otras relaciones que fundamentan este concepto: pares ordenados de naturales; relación de equivalencia entre pares que mantiene las propiedades formales para las operaciones de suma y producto entre las clases; extensión al conjunto cociente de la estructura aditiva y la multiplicativa; las relaciones de orden y de divisibilidad.

Estas consideraciones se sistematizaron en el diseño de una unidad didáctica sobre Números enteros, realizada como Trabajo de fin de Máster basada en el método del Análisis Didáctico, para alumnos de Educación Secundaria, en el Máster para Profesor en Secundaria (Vílchez-Marín, 2015).

3. Diseño

Se trata de un estudio cualitativo, exploratorio y descriptivo con el fin de obtener información mediante los elementos y componentes a partir de los cuales un grupo de escolares de secundaria obligatoria elaboran sus significados parciales, o concepciones, relativos a los números positivos y a los números negativos.

3.1. Método

La investigación sigue un método de encuesta y se lleva a cabo según un cuestionario de respuesta abierta. Consiste en un análisis del contenido semántico de las respuestas dadas por los escolares, mediante las componentes de la noción de significado. Los elementos que escogen los alumnos y el modo en que los emplean, indican el modo en que los estudiantes entienden, expresan e interpretan determinadas nociones y conceptos acerca de los números enteros; sus conclusiones se articulan según categorías y se obtienen del análisis de las respuestas aportadas (Cohen, Manion y Morrison, 2011; Vander Klock, 2014).

Su finalidad es didáctica; forma parte de un trabajo aplicado, orientado a obtener información fundada con la que proceder al diseño de propuestas de cambio e innovación curricular en matemáticas para la instrucción de los escolares de secundaria obligatoria.

3.2. Objetivos secundarios

Este trabajo hace una primera aproximación a las concepciones escolares, o significados parciales, sobre los números enteros. A la vista de cómo hemos precisado el significado de un concepto matemático escolar y sus componentes, abordamos el objetivo general propuesto en el apartado 1, mediante tres objetivos secundarios:

- Identificar, analizar y describir los términos, contextos y situaciones empleados por los estudiantes cuando se les pide que describan modos de uso para determinados números enteros, así como analizar las expresiones utilizadas.
- Identificar, analizar y describir las representaciones gráficas o simbólicas utilizadas por los estudiantes para los números enteros, tanto de número positivo como de número negativo.
- Identificar, analizar y describir los conceptos clave y las relaciones utilizados por los estudiantes encuestados cuando expresan su noción de número entero, lo vinculan conceptualmente y escogen categorías para su interpretación.

3.3. Muestra

La muestra es intencional y por disponibilidad, características que se reconocen como apropiadas cuando los investigadores estiman la posibilidad de plantear las cuestiones individualmente a los participantes, tanto por escrito como oralmente (Vander Klok, 2014). En este caso, como se indica en los objetivos, el estudio no pretende generalizar a contextos más amplios los significados parciales detectados, sino proporcionar pruebas de existencia de ejemplos prototípicos, profundizar sobre ellos e interpretarlos en un contexto determinado.

La muestra del estudio la forman 31 estudiantes de 2º curso de ESO de un Instituto de Educación Secundaria de la ciudad de Granada. Su realización tuvo lugar durante el curso 2013/2014. Los profesores responsables de la asignatura informaron que los estudiantes participantes habían recibido instrucción previa sobre los conceptos de número entero durante el curso 2012/2013, según el temario de 1º de ESO, guiado por el libro de texto de Matemáticas de la editorial SM para dicho nivel escolar (Anzola, 2009).

En el momento de aplicación del cuestionario, también habían transcurrido las sesiones de instrucción correspondientes a este tema en el 2º curso y los estudiantes habían sido evaluados al respecto. El cuestionario se aplicó durante la hora de clase de Matemáticas, en presencia del profesor habitual. Las cuestiones que los estudiantes plantearon fueron incidentales, relativas al uso del material y a la organización de las respuestas.

3.4. Instrumento y aplicación

El instrumento para recoger los datos es un cuestionario semántico, cuyos enunciados surgen de la revisión de estudios previos (Vílchez-Marín, 2014). Su realización requiere que se responda por escrito, modalidad que se considera más útil para recoger juicios robustos de una diversidad de sujetos (Vander Klok, 2014).

Las tareas fueron revisadas, adaptadas para su aplicación en un nuevo contexto y, en su caso, completadas para atender unos objetivos propios. Los enunciados de las tareas fueron discutidos y revisados en las reuniones mantenidas entre el investigador y el director del trabajo.

El cuestionario aplicado consta de 12 tareas. Por razones de extensión,

en este documento se presentan, analizan y estudian solo dos cuestiones y sus respuestas. Se trata de las tareas iniciales, que solicitan al escolar una descripción abierta y personal de número positivo y otra de número negativo. El análisis de las restantes tareas y sus resultados quedan para un próximo trabajo.

- *Actividad 1. Explica verbalmente qué entiendes por número positivo.*
- *Actividad 2. Explica verbalmente qué entiendes por número negativo.*

Figura 1. Enunciados de las tareas.

Las cuestiones no requieren una definición, notación específica, uso o aspecto formal del concepto. Se limitan a pedir a los alumnos que redacten una explicación personal sobre qué entienden por número positivo y qué entienden por número negativo, con sus propias palabras.

Las respuestas solicitadas son abiertas y no tienen límite de espacio para su redacción. Destaca la riqueza y diversidad de testimonios finalmente obtenidos a partir de esas tareas.

4. Información, análisis y discusión

Comenzamos por acotar, transcribir y ordenar el conjunto de respuestas proporcionadas por el total de alumnos, recogidas para cada una de las dos cuestiones.

A continuación, identificamos aquellos elementos o nociones clave, presentes en los registros verbales. Esos elementos y nociones permiten fragmentar las respuestas de cada alumno, según correspondan a términos o relaciones clave distintos, los cuales expresen significados diversos. Se dispone así de un listado de fragmentos de respuestas significativas diferentes, cada una de ellas identificada por uno o varios términos clave, notaciones o relaciones propios.

A partir de tales fragmentos se establecen las unidades de análisis según sus componentes semánticos y su contenido temático. En este proceso, debido al número limitado de datos existente, la determinación de las unidades de análisis debe hacerse de manera exhaustiva (Vílchez, 2014).

Organizada y jerarquizada la información en términos de unidades se procede al análisis de su contenido mediante otros descriptores (Rico,

2012). Dicho análisis se realiza identificando temas y relaciones entre ellos, como a continuación se ejemplifica para las tareas 1 y 2.

4.1. Argumentos localizados en las unidades de análisis

A partir de una primera categorización procedemos a interpretar los datos obtenidos, las relaciones encontradas y los significados identificados según los temas expresados (Rico, 2013; Cohen, Manion y Morrison, 2011).

Nos centramos en el estudio de las respuestas a las dos tareas presentadas en la figura 1. Un análisis de significado sobre el conjunto de las respuestas obtenidas de las actividades 1 y 2, identifica tres tipos de argumentos, que emplean nociones diferentes. Esos argumentos son:

1. empleo del cero en argumentos y explicaciones,
2. utilización y justificación de signos,
3. descripción mediante conceptos clave y relaciones estructurales.

En cada uno de esos argumentos se pueden distinguir varios temas, cuya discusión y caracterización pasamos a presentar.

Hay simetría entre los argumentos empleados por cada sujeto para describir los significados de los números positivos y los correspondientes argumentos del mismo sujeto para describir los números negativos. En conjunto, hay una nueva unidad de análisis cuando cambian sus términos o relaciones clave por sus opuestos.

4.2. Relación respecto de cero

Observando las unidades de información, encontramos un primer argumento que surge al explicar *qué se entiende por número positivo o negativo a partir de su relación con el cero*. Identificamos dos variantes: las primeras transmiten sentido mediante términos que *indican posición*; las segundas argumentan con una *relación de orden*; un tercer tipo combina las dos nociones anteriores. En todas ellas la relación se establece con respecto a cero.

A) SENTIDO POSICIONAL

El primer tema identificado en este argumento ofrece distintos modos de caracterizar los números positivos/negativos mediante su ubicación re-

lativa a 0, para lo cual, detallamos aquellos términos que muestran una relación de posición. La tabla 1 incluye las expresiones y términos clave utilizados, que indican posición relativa a 0.

Tabla 1. Expresiones clave utilizadas para la relación posicional.

Para número positivo	Para número negativo
A la derecha de 0	A la izquierda de 0
Por encima de 0	Por debajo de 0
Desde 0 hacia arriba	Desde 0 hacia abajo
Después de 0	Antes de 0
Detrás de 0	Delante de 0
Antes del -	Después del +
Para arriba de 0	

Algunas observaciones sobre los términos y relaciones aquí empleados.

- Las expresiones *Por encima de 0* y *Para arriba de 0*, denotan una misma idea de verticalidad aunque utilizan términos diferentes. Expresan su ubicación mediante un criterio espacial o respecto de un sistema posicional; parecen considerar los números en una determinada situación espacial respecto a 0, concretamente sobre 0. La expresión *Por encima de 0* es la más usada por los alumnos en la actividad 1. Lo mismo ocurre con la expresión *Por debajo de 0*, en la actividad 2.
- Análogamente, las expresiones *A la derecha de 0* y *Después de 0*; *A la izquierda de 0* y *Antes de 0* contemplan otra posición espacial horizontal.
- Las expresiones *Antes de 0* y *Después de 0* también se interpretan como una relación que emplea un criterio temporal, mientras que las expresiones *Desde 0 hacia arriba* y *Desde 0 hacia abajo* transmiten un criterio dinámico, que emplea movimiento.
- Todos esos términos y expresiones caracterizan un número positivo, o un número negativo, mediante una relación posicional relativa a 0, respectivamente. Poseen la misma estructura sintáctica: una frase compuesta por complementos circunstanciales, un sustantivo o expresión sustantivada y una preposición que las enlaza. Según la Real Academia Española (RAE, 1991), esta clase de expresión se denomina *relación preposicional*.

- Los alumnos que dan alguna de estas respuestas proporcionan un sentido posicional a las nociones cuestionadas mediante pares de términos opuestos, no específicamente matemáticos, como son derecha e izquierda, arriba y abajo, después y antes, junto con una construcción gramatical específica.
- Estas respuestas transmiten un sentido o modo de uso basado en la experiencia espacio-temporal personal, no en una referencia formal. En general las expresiones enfocan el carácter anterior o posterior de un número respecto de 0, empleando para ello bien un criterio posicional, bien uno temporal, o bien un movimiento

B) SENTIDO DE ORDEN

Un segundo tema del primer argumento sobre la relación con 0 agrupa aquellas unidades de análisis que expresan dicha relación como criterio de orden. La tabla 2 enumera las expresiones y términos identificados para este tema.

Tabla 2. Expresiones clave utilizadas para la relación de orden.

Expresiones utilizadas para número positivo	Expresiones utilizadas para número negativo
Mayor que 0	Menor que 0
Supera el valor de 0	Tiene un valor inferior a 0
Siguen un orden a partir de 0	Siguen un orden inverso a partir de 0
Son superiores a 0	Son inferiores a 0

Observamos que las expresiones utilizadas comparten una terminología específica de la relación matemática de orden, sus términos y expresiones formales, no comunes y habituales como los anteriores.

Los alumnos que dan estas respuestas las fundamentan en un criterio de orden: “siguen un orden”, y usan términos y conceptos ordinales, como “mayor”, “menor”, “superior” e “inferior”.

C) SENTIDOS DE POSICIÓN Y DE ORDEN

En un tercer tema encontramos respuestas que enlazan dos fragmentos distintos, cada uno ejemplificando una de las opciones anteriores. Aunque solo aparece una respuesta de este tipo en cada actividad, dada por el mismo sujeto, consideramos conveniente destacarla. La respuesta en cuestión fue:

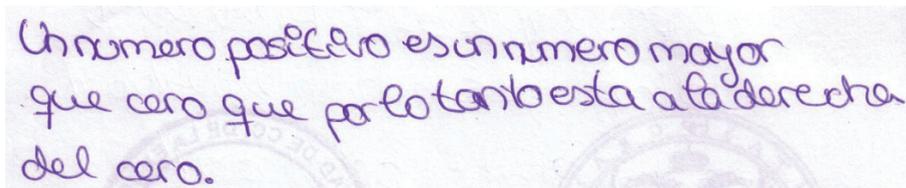


Figura 2. Respuesta que combina una relación de posición y otra de orden.

El sujeto elabora una versión del primer argumento que resulta de combinar el tema del orden y el tema de la relación de posición relativa a cero. Este estudiante propuso un nuevo tema, más amplio, al considerar dos tipos de relaciones respecto a cero.

Los términos, relaciones y nociones enumerados identifican distintos elementos empleados por los escolares con los que usar distintos contextos y situaciones para proporcionar argumentos y emplear diferentes temas con los que responder a las tareas con los números enteros.

Se alcanza así el objetivo parcial número 1, enunciado en el apartado 3.2.

4.3. Signos y notación

Observando ahora las unidades de información *cuyos elementos describen qué notaciones muestran un número positivo y cuáles uno negativo*, identificamos un segundo argumento, que surge de distintos empleos de las notaciones simbólicas o gráficas, en este caso limitadas a los usos de los signos + y -.

Al realizar el desglose de los descriptores y determinar las unidades de análisis, observamos distintas expresiones clave, dadas mediante algún tipo de notación.

Así, las unidades de análisis que se identifican en la *Actividad 1*, dicen:

Signo + En este descriptor hemos incluido las unidades de análisis que definen los números positivos como aquellos en cuya representación simbólica aparece un signo + (Figura 3).

Signo -: Incluyen las unidades de análisis que definen los números positivos como aquellos en cuya representación simbólica no aparece el signo -.

Sin signo Se incluyen aquellas unidades de información que definen los números positivos como aquellos en cuya representación simbólica no aparecen signos (Figura 4).

Las unidades de análisis que se identifican en la *Actividad 2*, dicen:

Signo + En este descriptor hemos incluido las unidades de análisis que definen a los números negativos como aquellos en cuya representación simbólica no aparece un signo +.

Signo -: Se incluyen las unidades de análisis que definen a los números negativos como aquellos en cuya representación simbólica aparece el signo -.

Las respuestas agrupadas en esta categoría, pueden estar clasificadas en uno o varios de las unidades de análisis anteriores.

Las figuras muestran algún ejemplo de respuestas encontradas:

Handwritten text in purple ink on a light background. The text reads: "Cualquier número que tiene mas ~~mas~~ delante del número". There is a faint circular stamp in the background.

Figura 3. Respuesta clasificada en el descriptor Signo + de la actividad 1.

Handwritten text in purple ink on a light background. The text reads: "Un número positivo para míes todo aquel número que no tiene signo". There is a faint circular stamp in the background.

Figura 4. Respuesta clasificada en el descriptor Sin signo de la actividad 1.

Handwritten text in purple ink on a light background. The text reads: "Es el numero que tiene un + delante o no hace falta". There is a faint circular stamp in the background.

Figura 5. Respuesta clasificada en los descriptores Signo + y Sin signo de la actividad 1.

Las notaciones, simbólicas o gráficas, muestran distintos temas con que los escolares han dado respuesta a las tareas mediante diferentes representaciones para los números enteros. No hemos encontrado ningún ejemplo de representación gráfica en las unidades de análisis obtenidas.

Se alcanza así el objetivo parcial número 2, descrito en el apartado 3.2.

4.4. Conceptos clave y relaciones estructurales

Por último, los conceptos clave y las relaciones estructurales constituyen un tercer argumento identificado en el conjunto de las respuestas recogidas. Se presenta en aquellas unidades de análisis en que se registra un tema o concepto básico –número o cantidad– acompañado siempre de otro elemento calificativo, que proporciona un criterio, propiedad o relación que precisa la estructura que, en cada caso, lo incardina e identifica como positivo o negativo. Los sustantivos, junto con sus calificativos, constituyen el descriptor del concepto clave en cada caso.

Los conceptos clave detectados son:

Tabla 3. Conceptos y relaciones clave de las actividades 1 y 2.

Términos clave para números positivos	Términos clave para números negativos
Número natural	Número no natural
No es negativo	No es positivo
Contrario a un negativo	Contrario a un positivo
Cantidad positiva	Cantidad negativa
Número entero	Número entero
Valor positivo	Valor negativo

Como observamos, los términos clave para los conceptos de ambas actividades son contrarios u opuestos y van emparejados. Los alumnos responden a las dos actividades usando un mismo tema, con las puntualizaciones correspondientes al signo según la pregunta.

También observamos que esas unidades de análisis proporcionan referencia conceptual, según notaciones y símbolos ya comentados en el apartado 4.2., si bien aquí se presenta la noción de cantidad, que allí no se mencionó.

Esos conceptos, propiedades y relaciones se expresan mediante elementos y términos clave, que muestran distintos modos en que los escolares han dado respuesta a las tareas mediante diferentes referencias acerca de los números enteros.

Se alcanza así el objetivo parcial número 3, del apartado 3.2.

5. Resultados

A través de dos preguntas sencillas hemos recibido respuestas proporcionadas por alumnos de 2º de E.S.O. en las que hemos identificado y estudiado unidades de información para su análisis, de las cuales hemos determinado su contenido semántico. Se ha obtenido así un primer acercamiento a los significados parciales sobre el concepto de número entero expresados por estos alumnos.

Objetivo general de esta investigación es identificar, analizar y describir los significados que manifiestan los estudiantes de secundaria sobre el concepto de número entero una vez recibida instrucción sobre el tópico, mediante las respuestas proporcionadas a cuestiones abiertas sobre dicho contenido.

Estos alumnos han manifestado una diversidad y riqueza de referencias, signos y sentidos. Singularmente, al limitar el estudio a las Actividades 1 y 2, dicho propósito se ha centrado en conocer e interpretar aquellos significados básicos que habían interiorizado y asumido los alumnos encuestados sobre número positivo y número negativo, transcurrido un curso desde su iniciación escolar al respecto.

5.1. Resultados y componentes del significado

Los elementos elegidos por los escolares en sus respuestas a las distintas tareas ayudan a identificar qué componentes de significado atribuyen a cada concepto matemático escolar.

Describimos los argumentos identificados según los componentes de significado manifestados, que surgen de las categorías de análisis empleadas.

SENTIDO Y MODOS DE USO – RELACIONES CON RESPECTO A CERO

La mayoría de repuestas en este grupo aducen con distintos temas, de cuál tipo de número entero se trata, según la relación o relaciones que mantengan respecto a cero.

- Esas relaciones incluyen contextos, que sirven para dar sentido al concepto de número entero.
- Las descripciones empleadas para esas respuestas, generalmente, denotan posición lineal (vertical: arriba-abajo, u horizontal: derecha-izquierda), temporal (antes de- después de), dinámica (desde

... hacia arriba - desde ... hacia abajo) o relación de orden (mayor que-menor que, superior-inferior), es decir, expresan una relación o reconocen una estructura ordinal.

- Las relaciones de posición o de orden para describir el concepto de número positivo/negativo, son siempre respecto a un mismo término: cero.

Dadas estas características identificamos en las respuestas un sentido habitual o modo de uso general sobre el concepto de número entero; en ellas se describen situaciones o contextos referentes al número positivo/negativo o, alternativamente, una referencia expresada por la estructura de orden. El significado que aportan estos alumnos destaca un sentido, establecido por su uso en relación con cero. Son estudiantes que manejan como *usuarios* el concepto de número entero.

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN – SIGNOS Y NOTACIÓN

Identificamos un segundo grupo de alumnos quienes razonan su concepto parcial de número entero según diferentes maneras en que lo representan. Como hemos dicho, las representaciones obtenidas mediante símbolos y notaciones de los números positivos y/o negativos, son las que siguen.

- Para definir el número positivo se emplean 3 formas diferentes: lleva +, no lleva –, no lleva signo.
- Para definir número negativo se emplean 2 formas diferentes: lleva –, no lleva +.

Esas opciones argumentan que el significado de un concepto matemático escolar se caracteriza mediante el sistema de representación que lo expresa, cuyos elementos son los signos que se utilizan para el concepto y las reglas que lo establecen. Este grupo de estudiantes codifican o registran los enteros como un sistema de símbolos o signos, son estudiantes *codificadores*.

REFERENCIA – CONCEPTOS CLAVE DE LA ESTRUCTURA NUMÉRICA

Un tercer grupo muestra mediante el empleo de determinadas nociones y propiedades clave, que lo identifican e incluyen, sus relaciones con otros conceptos, que atienden bien a su estructura matemática, bien a la que configuran. Es decir, en nuestro caso, los elementos que utilizan

estos estudiantes son conceptos y relaciones con definición propia, para precisar los nuevos conceptos pedidos, a saber, números positivos y/o negativos.

Estos argumentos corresponden a la referencia del concepto matemático escolar. El significado que aportan estos alumnos se basa en el concepto y la relación establecida para determinar una referencia y caracterizar la noción de número entero. Estos alumnos subrayan que los enteros son un caso específico de concepto numérico; los denominamos *delimitadores*, ya que identifican y acotan el concepto mediante alguna característica principal del mismo.

5.2. Respuestas con más de un componente de significado

No todos los alumnos transmiten significado mediante elementos expresan los mismos componentes. Hay alumnos en cuya respuesta se identifica un solo componente y excluyen o ignoran a los otros dos; otros alumnos combinan en sus respuestas dos de los componentes y prescinden del tercero; finalmente, hay alumnos que combinan los tres componentes de significado en la misma descripción. Identificamos y detallamos las combinaciones posibles entre los componentes de significado.

Hay alumnos que utilizan descriptores de sentido mediante “relaciones respecto a 0” y, a su vez, descriptores de “signos y notación” (Figura 8).

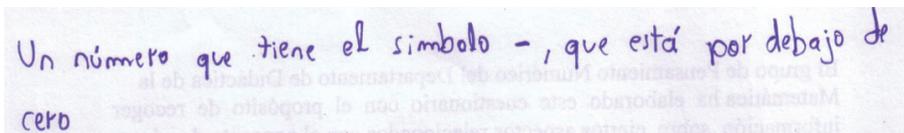


Figura 8. Respuesta que utiliza las componentes de signo y sentido.

Estos alumnos argumentan su significado sobre los números enteros integrando la representación con modos de uso del concepto. Como muestra la tabla 4, hay un porcentaje de estudiantes que emplean esos dos componentes e ignoran el aspecto conceptual en su caracterización; de hecho identifican signo con posición. Son alumnos que describen de modo *pragmático* el significado de un número relativo.

Igualmente, hay alumnos que utilizan descriptores de “relaciones respecto a 0” y, a su vez, descriptores de “conceptos clave” (Figura 9).

Un número negativo es lo contrario a uno positivo, su valor es menor al positivo y van desde el más grande mayor: -1, hasta el más pequeño.

Figura 9. Respuesta que utiliza las componentes de sentido y referencia.

Estos alumnos argumentan su significado sobre los números enteros integrando una noción clave “contrario a un positivo”, con un modo de uso del concepto “valor menor que el positivo”. Este grupo de estudiantes emplean esos elementos e ignoran el aspecto representacional en su caracterización; de hecho identifican número con un valor que se usa. La noción que manejan estos alumnos es *funcional*, ya que expresan el contenido del concepto mediante un modo de uso de una propiedad, no mediante un signo y su dominio.

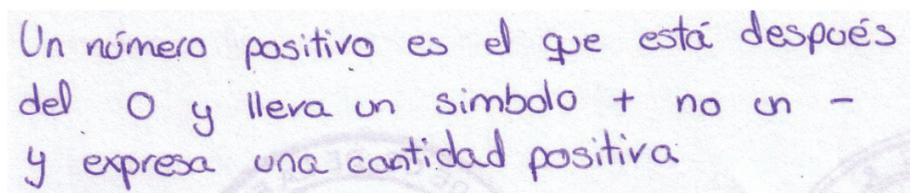
Finalmente, hay otros alumnos que utilizan descriptores de “conceptos clave” y, a su vez, descriptores de “signos y notación” (Figura 10).

Es un número que no es positivo, es decir, que lleva un signo (-) acompañado de su número. -3

Figura 10. Respuesta que utiliza las componentes de signo y referencia.

Estos alumnos establecen su significado sobre los números enteros integrando una noción clave del concepto con su notación. También localizamos un porcentaje de estudiantes que emplean esos dos componentes y descuidan el sentido del concepto en su respuesta; de hecho identifican número con valor que se establece por su signo. El modo en que estos alumnos se manifiestan es *instrumental*, ya que buscan el concepto mediante un signo que expresa e instrumentaliza una propiedad.

Para concluir, reseñamos la respuesta de un alumno, que incluye los tres componentes del significado: “sentidos y modos de uso – sistemas de representación – referencia”. Este estudiante utilizó descriptores de las tres categorías presentadas en este documento (relaciones con respecto a cero, signos y notación, conceptos clave) (Figura 11).



Un número positivo es el que está después del 0 y lleva un símbolo + no un - y expresa una cantidad positiva.

Figura 11. Respuesta que abarca la totalidad del significado.

En esta respuesta, el sujeto utiliza la relación de posición dentro de la categoría de relaciones con respecto a cero; usa dos elementos: signo + y signo - de la componente de signos y notación; y, finalmente, usa la expresión “cantidad positiva” correspondiente a la categoría de conceptos clave. El significado expresado por este alumno es *matemático*, ya que identifica y usa los tres componentes semánticos del concepto.

6. Conclusiones

El análisis muestra que la mayor parte de los significados elaborados por los estudiantes en respuestas a las tareas planteadas, descritos en términos de los elementos y de componentes semánticos del concepto que emplean, son parciales e incompletos. Son argumentos que responden a la noción de *concepción personal* antes señalada.

Así, a partir de datos empíricos, hemos identificado y descrito 7 tipos o categorías de *concepciones personales* diferentes en las respuestas de los escolares que han participado en el estudio, concepciones sobre las que esperamos profundizar con éste y otros conceptos matemáticos escolares.

La tabla 4 presenta las denominaciones de las categorías detectadas según componentes de significado, identificadas cada una por distintos elementos, junto con los porcentajes de respuestas alcanzados para cada una en este caso.

Tabla 4. Categorías y porcentajes de respuestas según componentes identificadas.

	Descripción de componentes	Denominación de categoría	Porcentajes de respuesta
Un solo componente	Relación con respecto a cero	Usuario	38%
	Signos y notación	Codificador	26%
	Conceptos clave	Delimitador	6%
Dos componentes	Relación con respecto a cero – Signos y notación	Pragmático	6%
	Relación con respecto a cero – Conceptos clave	Funcional	14%
	Signos y notación – Conceptos clave	Instrumental	4%
Tres componentes	Relación con respecto a cero – Signos y notación – Conceptos clave	Matemático	6%

Los datos del estudio muestran que los argumentos en que predomina un solo componente semántico para definir un número positivo/negativo, los emplean un 70% de los alumnos. Un 24% utilizan argumentos basados en dos componentes semánticos distintos. Finalmente, solo un 6% de ellos fundamenta su argumentación empleando elementos de los tres componentes semánticos. Esos datos ejemplifican las limitaciones de las concepciones observadas. La mayoría de los estudiantes se conforman con argumentar qué entienden por número entero con no más de un componente semántico en su justificación, lo cual muestra su comprensión parcial y limitada del concepto, al menos en una primera aproximación.

Otra posible lectura de esos datos, muestra que el argumento más utilizado es la relación con respecto a cero con un 64%, seguido de los símbolos y notaciones con un 42%, mientras que los conceptos clave solo se presentan en un 20% de los casos. Conjeturamos que los alumnos identifican más a menudo los números enteros por un elemento de referencia, en este caso el cero. Por otro lado, su caracterización se basa en la dicotomía de su representación, mediante los signos +/-, en menor porcentaje pero también de manera notable. Por último, los conceptos clave que utilizan estructuras matemáticas para definir los números enteros, son razonamientos menos utilizados.

Este estudio ejemplifica diferentes argumentos que pueden elaborar

estudiantes de estas edades mediante los componentes del significado sobre números positivos y negativos, e identifica aquellos aspectos que los alumnos reconocen como apropiados cuando se explican acerca de ellos. Los siete tipos o categorías de significados documentadas señalan líneas de reflexión, de manera que se pueda profundizar en el aprendizaje significativo con esos números.

Referencias bibliográficas

- Anzola, M.; Bujanda, M^a. P.; Mansilla, S. y Vizmanos, J.R. (2009). *Matemáticas 1º E.S.O. Esfera*. Madrid, España: S.M.
- Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las ciencias*, 4(3), (pp. 199-208).
- Bruno, A. (2001). La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 4, N^o 2, (pp. 415-428).
- Castro-Rodríguez, E. (2010). *Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación inicial*. Memoria final del Máster en Didáctica de la Matemática. Granada: Universidad de Granada, España.
- Castro-Rodríguez, E. (2015). *Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros*, Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education (7th edition)*. Londres, Reino Unido: Routledge.
- Fernández-Plaza, J. A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Estudio exploratorio*. Memoria final del Máster en Didáctica de la Matemática. Granada: Universidad de Granada, España.
- Fernández-Plaza, J. A. (2015). *Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada, España.
- Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. y Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA*, 7(3), (pp. 117-131).
- Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. (2015). Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias*, 33.2, (pp. 211-229).
- Fischbein, H. (2002). *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach*. Rotterdam, Países Bajos: Springer.
- Frege, G. (1996). Sobre sentido y referencia. En G. Frege: *Escritos filosóficos*, (pp. 172-197). Barcelona, España: Crítica.
- Gallardo, A., Santos, N. y Hernández, J. A. (2010). La aparición simultánea de los sentidos de uso de los números negativos y el cero en alumnos de secundaria. Un estudio de caso. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV Simposio SEIEM* (pp. 303-314).

- González-Marí, J. L. (1998). *Números naturales relativos*. Granada, España: Editorial Comares.
- Iriarte, M., Jimeno, M. y Vargas-Machuca, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *Suma*, 7, (pp. 13-18).
- Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática. La construcción social del número, el espacio y lo imposible*. Barcelona, España: Gedisa.
- Martín-Fernández, E. (2013). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de razón trigonométrica. Estudio exploratorio*. Memoria fin de Máster en Didáctica de la Matemática. Granada: Universidad de Granada, España.
- Martín-Fernández, E.; Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las Ciencias* 34.3, (pp. 51-71).
- Maz, A. (2005). *Los Números Negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada, España.
- Maz, A. y Rico, L. (2009). Números negativos en los siglos XVIII y XIX: fenomenología y representaciones. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1).
- Megías, M., Ruiz, J. F. y Lupiáñez, J. L. (2015). Significado de decimal expresado por escolares mediante la elaboración de cuentos. *Épsilon*, Vol. 32 (3), nº 91, 25-40.
- Real Academia Española (1991). *Esbozo de una nueva gramática de la lengua española*. Madrid, España: Espasa-Calpe.
- Rico, L. (2007). *Sistemas de significados de un concepto en las Matemáticas Escolares*. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada, España.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, (pp. 39-63).
- Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista iberoamericana de educación matemática. Unión*, 33, (pp. 11-27).
- Rico, L. (2016). Significado de los contenidos matemáticos. En L. Rico y A. Moreno (Eds.) *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*. (pp. 153-176). Madrid, España: Editorial Pirámide.
- Rico, L., Flores, P. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). Sentido de los contenidos matemáticos para enseñar las matemáticas con sentido. *UNO Revista de Didáctica de la Matemática*. Nº. 70, (pp. 48-54).
- Vander Klok, J. (2014). On the use of questionnaires in semantic fieldwork: A case study in modality. En: A. Belkadi, K. Chatsiou and K. Rowan (Eds.) *Proceedings of the Conference on Language Documentation and Linguistic Theory 4*. London, Reino Unido: SOAS.
- Vílchez-Marín, M. (2014). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de E.S.O. respecto al concepto de número entero. Estudio exploratorio*. Memoria fin de Máster en Didáctica de la Matemática. Granada: Universidad de Granada, España.
- Vílchez-Marín, M. (2015). *Propuesta de unidad didáctica: números enteros*. Memoria fin de Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad: Matemáticas. Granada: Universidad de Granada, España.

