Los problemas de probabilidades geométricas

POR

PROCOPIO ZOROA TEROL

Los problemas de probabilidades geométricas han estado en cierta medida menospreciados por considerarse que no tratan líneas fundamentales de investigación en la Ciencia.

J. H. Cardwell (1) dice literalmente que es "un campo relativamente despreciado" y Uspensky (2) afirma que "desde el punto de vista de los principios, estas investigaciones, por ingeniosas que sean, no representan ninguna gran contribución a la teoría general de la probabilidad".

Sin embargo, este campo de las probabilidades tiene gran amplitud y belleza, y producirá sin duda, durante mucho tiempo, problemas de interés teórico y práctico.

En los comienzos de la teoría de la probabilidad, los problemas de probabilidades geométricas han desempeñado un importante papel al servir de estímulo para discutir y aclarar la cuestión de fundamentos de la probabilidad por las paradojas y dificultades que entrañaban estos problemas.

Como ejemplo simple y conocido recordemos la paradoja de Bertrand (3) que aparece en el problema de calcular la probabilidad de que una cuerda elegida al azar en un círculo tenga una longitud menor que el lado del triángulo regular inscrito en el círculo, pues se dieron tres resultados distintos, 1/2, 1/3, 1/4 como solución del problema.

(1) J. S. Cardwell. Topics in recreational Mathematics. pág. 162. Cambridge (1966).
(2) J. V. Uspensky. Matemáticas de las Probabilidades. Editorial Nigar. 1947.
(3) J. Bertrand. Calcul des probabilites. 1907.

También es de indudable valor histórico, como precursor del Método de Montecarlo, uno de los problemas más célebres de probabilidades geométricas, el de la aguja de Buffon (4) que constituye el primer ejemplo de realizar un cálculo numérico por el Método de Montecarlo, como señala Schreider (5).

Pero los problemas de probabilidades geométricas, que también podemos llamar de geometría estocástica, o geometría estadística, aunque estas denominaciones tiendan a ampliar o modificar el contenido inicial, han sido rehabilitados merecidamente por la variedad de sus aplicaciones: en astronomía, física atómica, biología, cristalografía, estereometría, muestreo, etc.

Además esta Geometría Estocástca está enlazada con otras zonas de las matemáticas, como la geometría diferencial, geometría integral, teoría de la medida, teoría de grupos de transformaciones, etc.

Los problemas de probabilidades geométricas, en términos generales, tratan de calcular la probabilidad (esperanza, distribución, medida) de que cierta figura geométrica F (formada por puntos, rectas, círculos, etc.), cumpla una condición dada.

Concretando algo el problema, podemos suponer que la figura F que entra en consideración pertenece a un espacio euclídeo de n dimensiones, E^n, y que para determinar la figura F necesitamos un coonjunto conveniente de parámetros (coordenadas de los puntos, coeficientes de las rectas, radios de los círculos, etc.). Cada conjunto de valores de estos parámetros correspondiente a una figura F particular, puede considerarse como un punto de un espacio paramétrico Φ, de modo que cada figura F, en E^n queda representada por un punto P del espacio Φ. De este modo elegir al azar una figura F en E^n es lo mismo que elegir al azar un punto P del espacio Φ, luego el problema de fijar una ley de probabilidad para la obtención aleatoria de la figura F queda trasladado a fijar una distribución de probabilidad en el espacio paramétrico Φ. Es preferible sin embargo, tratar de establecer en el espacio paramétrico Φ, una medida μ, a partir de la cual obtendremos las probabilidades que interesen por cociente.

La situación típica sería: al tomar una figura F entre las que cumplen la condición C_1 ¿cuál es la probabilidad de que F cumpla la condición C_2? Sean A_1 y A_2 los conjuntos del espacio Φ que corresponden a las figuras F que cumplen las condiciones C_1 y C_2 respectivamente.

(4) G. Buffon. Essai d'arithmetique morale. Suplement a l'Histoire Naturelle, Vol. 4 (1777).

(5) Yu. A. Shreider. The Monte Carlo Method. Pergamon Press (1966).

La probabilidad pedida anteriormente, admitiendo establecida la medida μ, será

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{\mu(A_1 \cap A_2)}{\mu(A_1)}$$

Aun concretándonos a tratar problemas de figuras F tomadas en un espacio euclídeo E^n se comprende que hay una gran variedad de problemas tanto por la diversidad de elementos geométricos que sirven de base para componer la figura F, como por las distintas posibilidades para fijar una medida en el espacio paramétrico Φ.

Entre las medidas que es posible establecer en el espacio Φ hay una que se ha considerado como "natural" o "distinguida" y ha recibido una atención especial, sin que ello suponga que carezcan de interés otras medidas que puedan resultar mediante otros planteamientos del problema.

Esta medida que hemos calificado de "natural" se obtiene de la siguiente forma:

En primer lugar, es preciso que fijemos previamente la familia $\mathscr{B}$ de conjuntos para los que va a estar definida la medida que vamos a llamar m. Esto se puede hacer simplemente tomando el álgebra de Borel que contenga los rectángulos (de la dimensión conveniente) que se pueden formar en Φ, como producto cartesiano de intervalos abiertos de valores de los distintos parámetros utilizados para definir Φ.

Consideremos ahora el grupo $\mathscr{M}$ de los movimientos euclídeos de E^n; uno de tales movimientos M lleva cada figura F a una figura $F' = M(F)$.

Si son P y P' los puntos del espacio Φ representativos de F y F', podemos definir una transformación T en Φ que lleva P a P'. De esta forma cada movimiento $M \in \mathscr{M}$ produce una transformación T de Φ en Φ y el conjunto $\mathscr{E}$ de estas transformaciones constituye un grupo, grupo, del mismo modo que es un grupo el conjunto de los movimientos euclídeos $\mathscr{M}$ en E^n.

Con estos antecedentes, se formula la siguiente pregunta: ¿existe en Φ una medida m invariante respecto de todos los elementos de $\mathscr{E}$?

Más formalmente, se trata de averiguar si existe una medida m tal que para los conjuntos

A y T(A) (con $A \in \mathscr{B}$, $T \in \mathscr{E}$) valga

$$m(A) = m(T(A)).$$

En el caso particularmente simple en que la figura F se reduzca a un punto tomado del espacio E^n, el espacio auxiliar Φ es idéntico a E^n y el grupo $\mathscr{G}$ es el mismo $\mathscr{M}$ y la medida pedida, invariante en los movimientos, es precisamente la de Lebesgue, salvo un factor constante como es bien sabido.

Si la figura F es una recta, o un plano, o de un modo más general, un espacio línea L_r, de dimensión r, existe asimismo una medida invariante por las transformaciones de $\mathscr{G}$ (salvo un factor constante) cuya expresión puede verse, por ejemplo, en la Geometría Integral de Santaló (6). Antecedentes de estos conceptos con los que nace la Geometría Integral se encuentran en Blaschke (7) (8), Petkantschin (9), Deltheil (10) y Crofton (11) (12). Poincaré (13), por ejemplo, prueba la unicidad de esta medida para las rectas del plano.

Cabe preguntarse si puede plantearse un problema inverso del anterior. Si prefijamos la distribución o medida para ciertos elementos geométricos ¿existirá algún grupo de transformaciones que posea como medida invariante la propuesta?

Así, por ejemplo, los movimientos euclídeos en E^3 con un punto fijo, forman un grupo. Uno de tales movimientos queda fijado conociendo tres parámetros, constituidos por los siguientes ángulos:

θ : distancia polar del eje de giro.

φ: longitud del eje de giro respecto de un plano meridiano fijo.

V : ángulo de giro alrededor del eje determinado por los dos parámetros anteriores.

$$(0 \leq \theta < \pi , \quad 0 \leq \varphi < 2\pi , \quad 0 \leq V < 2\pi)$$

La Medida de Haar que se obtiene para estas rotaciones con arreglo al criterio dado anteriormente, viene determinada por el elementos diferencial

---

(6) L. A. Santaló. Introduction to Integral Geometry. Hermann, París (1953) (Ac. Sci. Indust. No. 1198).

(7) W. Blaschke. Integralgeometrie 1. Ermittlung der Dichten ffür lineare Unterräume im E_n. Herman, París (1935) (Ac. Sci. Indust. No. 252).

(8) W. Blaschke. Integralgeometrie 2. Zu Ergebnissen von M. W. Crofton. Bull. Math. Soc. Roumaine des Sci. *37* (1935), 3-11.

(9) B. Petkantschin. "Integralgeometrie 6. Zusammenhänge zwischen den Dichten der linearen Unterraume im n-dimensionalen Raum". Abh. Math. Sominar Hamburg, *11*, (1936).

(10) R. Deltheil. Probabilites Geometriques. Gauthier-Villars. (1926).

(11) M. W. Crofton. On the theory oof local probability. Transact. of the Royal Soc. of London (1968).

(12) M. W. Crofton. "Probability". Encyclopaedia Britannica (1885).

(13) H. Poincaré. Calcul des probabilités. París (1912).

$$dP = \left(\frac{1}{4\pi} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi \right) \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{V}{2} \, dV \right)$$

$$(0 \leq \theta < \pi , \quad 0 \leq \varphi < 2\pi , \quad 0 \leq V < 2\pi)$$

como puede verse en Deltheil (10) o Kendall y Morán (14), y pone de manifiesto que la posición del eje de rotación y el ángulo de rotación son estocásticamente independientes, poseyendo el primero una distribución uniforme para todas las direcciones posibles, pero no así el ángulo de rotación V, cuya distribución no uniforme está definida por el elemento diferencial

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{V}{2} \, dV. \qquad (0 \leq V < 2\pi)$$

Este resultado se considera paradójico pues parece que debía resultar también que el ángulo de giro tuviese distribución uniforme en $(0, 2\pi)$.

Entonces podemos preguntarnos:

¿Aceptando esta distribución uniforme tanto para la dirección del eje de giro como para el ángulo de giro, cuál es el grupo, si existe, de las transformaciones que dejan invariante esta medida? Esto es tanto como preguntar: ¿cómo tiene que ser definido de nuevo el producto de dos rotaciones para que éstas formen grupo y dejen invariante la medida anterior?

La medida de Haar considerada en este problema de las rotaciones con un punto fijo arroja un valor finito al espacio paramétrico total (producto cartesiano de tres circunferencias) por lo cual es fácil convertirla en una distribución de probabilidad.

En el caso citado anteriormente de considerar el espacio Φ de las variedades lineales de dimensión r contenidas en el espacio euclídeo E^n (espacio de dimensión $(r+1)(n-r)$) esto no ocurre, y es preciso limitar de alguna forma una porción de dicho espacio al objeto de conseguir un conjunto con medida finita. Una forma típica de conseguir esto es considerar aquellas variedades lineales L_r de r dimensiones que cortan a un conjunto fijo X, variedades que podemos llamar r-secantes de X.

Si X se ha elegido convenientemente, el conjuntoo así definido

$$\left\{ L_r : L_r \cap X \neq \emptyset \right\}$$

(14) M. G. Kendall, P. A. P. Moran. Geometrical Probability. Charles Griffin. (1963).

O su imagen $\Phi_X{}^n_r$ del espacio paramétrico Φ tendrá una medida finita, y su expresión responde a la fórmula, como se ve por ejemplo en Miles (15), (16).

$$m\ (\Phi_X) = M_{n-r}(X)$$

donde M_{n-r} (X) representa la media del (n-r)-contenido de las proyecciones X_{n-r} del conjunto X sobre el complemento ortogonal L_{n-r} de cualquier r-secante L_r a X, al variar L_r en todas las orientaciones posibles.

Esta media M_{n-r} (X) es posible calcularla en algunos casos como por ejemplo si r = 1 (es decir si manejamos rectas) y X es convexo, quedando expresada la media M_{n-1} por una fórmula que utiliza el (n—1)-contenido S de la frontera del conjunto convexo X, suponiendo que el *n*-contenido de X *no* es *nulo*,

$$M_{n-1}(X) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) S/\ (2\ \sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right))$$

S = (n—1)-contenido de la frontera de X

En el caso particular de que el espacio considerado sea el plano y el conjunto X una curva del mismo de longitud L se tiene la fórmula

$$\bar{P} = \text{Proy. media de } L = \frac{2L}{\pi}$$

incluso siendo la curva no convexa, pero contando cada proyección tantas veces como puntos de intersección tenga cada recta proyectante con la curva. Esta fórmula fue utilizada por Steinhaus (17) para medir la longitud de una curva observada bajo el microscopio estimando la proyección media $\bar{P}$ mediante la media aritmética de las longitudes de n proyecciones en n direcciones igualmente espaciadas.

La fórmula análoga para un sólido convexo en E^3 es

$$\bar{P} = \text{Proy. media de } S = \frac{S}{4}$$

(15) R. E. Miles. Poisson flats in euclidean spaces. Part I. Afinite number of random uniform flats. Adv. Appl. Prob. *1* (1969).
(16) R. E. Miles. Isotropic random simplices. Adv. Appl. Prob. 3. (1971).
(17) H. Steinhans. Akad. d. wiss. Leipsig, Ber. *82.* (1930).

(cada punto de la proyección se cuenta una sola vez) donde S es el área de la frontera de dicho cuerpo.

Morán (18) da cotas del error que se comete utilizando las medias de las proyecciones sobre las caras de un dodecaedro y un icosaedro.

También se ha considerado en E^3, por ejemplo, por Santaló (19) la media de las longitudes de las proyecciones de una curva alabeada sobre los planos con todas las orientaciones posibles,

$$\bar{P} = \frac{\pi L}{4}$$

para lo que igualmente se pueden obtener acotaciones utilizando las madias de las proyecciones sobre las caras de un dodecaedro o un icosaedro.

Si la proyección de una curva alabeada se hace sobre las rectas de las distintas direcciones resulta

$$\bar{P} = \text{Proyec. media} = \frac{L}{2}$$

contando cada punto de la proyección tantas veces como intersecciones tiene la curva con el plano proyectante.

Un estudio de los datos estadísticos relacionados con direcciones, con diversas aplicaciones puede verse en el libro de Mardia (20) y en Downs (21).

En el planteamiento general que hemos hecho anteriormente la figura F que se desea tomar al azar en el espacio E^n se supone una figura rígida, constituida por un punto, o un ángulo de amplitud fija o un triángulo con lados de longitudes dadas, un círculo, etc.

No entraña ninguna dificultad teórica el suponer que se desean tomar sucesiva e independientemente un número N, fijo, de figuras F del mismo tipo, pues la medida a utilizar será simplemente el producto de N veces la medida considerada para una sola figura.

El caso más sencillo es aquel en que se toman N puntos independientes en una cierta región $D \subset E^n$. En este caso puede representar una

(18) P. A. P. Moran. Measuring the surface área of a convex body. Ann. of Math, 45 (1944).
(19) L. A. Santaló. On the length of a space curve as mean value of the length of its orthogonal proyections. Math. Notae 6 (1946).
(20) K. V. Mardia. Statistics directional data. Academic Press. 1972.
(21) Thomas D. Downs. Orientation statistics. Biométrika, 59 (1972).

ventaja para el cálculo de la probabilidad P de que los N puntos cumplan cierta condición C utilizar una fórmula de Crofton (12).

$$\frac{dP}{dV} = \frac{N(P_1 - P)}{V}$$

que relaciona dicha probabilidad con la probabilidad condicionada P_1 de que uno de los N puntos pertenezca a la frontera de D.

Para la esperanza de ciertas variables asociadas con la configuración geométrica de los N puntos hay otra fórmula análoga

$$\frac{d\mu}{dV} = \frac{N(\mu_1 - \mu)}{V}$$

igualmente dada por Crofton.

Una generalización de ésta ha sido dada por Rubén y Reed (22) y aplicada al estudio de puntos aleatorios en un *n*-simplex.

Pero el problema es mucho más complejo si el número de puntos, rectas, etc., a tomar es asimismo aleatorio. Planteamientos en este sentido pueden concebirse de muchas maneras. Para fijar las ideas imaginemos que se trata de elegir aleatoriamente puntos en una recta o en un espacio euclídeo E^n.

Un mecanismo teórico nos lo da el conocido proceso de Poisson definido de forma que la probabilidad de que aparezcan N puntos en una región V cualquiera es:

$$P(\xi\ (V) = N) = \exp(-c\, m\ (v)) \frac{(c\, m\ (V))^N}{N!} \quad (N = 0, 1, 2, \ldots)$$

donde m (V) es la medida de Lebesgue de V y c una constante que se llama intensidad del proceso y ξ (V) el número de puntos en V.

Con este planteamiento todavía no ha sido eliminada la medida de Lebesgue, o si se tratase de otros elementos geométricos, la medida preconizada por la Geometría integral, pues sigue desempeñando el papel que se le encomendó (invariabilidad en los movimientos).

El proceso de Poisson indicado tiene un significado intuitivo sencillo y el mecanismo para su realización puede consistir en lo siguiente:

(22) H. Ruben, W. J. Reed. A more general form of a theorem of Crofton. J. Appl. Probability. *10*. (1973).

Se divide el espacio en regiones de contenido finito, y para cada región V se determina un número N al azar con las probabilidades de Poisson dadas anteriormente.

Fijado ya el número N para la región V, se obtiene aleatoriamente N puntos, mediante una distribución uniforme en V. El conjunto total de puntos así obtenidos en todo el espacio constituye una configuración de puntos realizada conforme con el proceso de Poisson.

Una generalización inmediata del proceso de Poisson indicado anteriormente se obtiene sustituyendo la medida de Lebesgue m utilizada por cualquier medida λ, que supondremos no atómica, es decir, que da medida nula a cada conjunto formado por un solo punto ($\lambda \{x\} = 0$ para todo x del espacio). De este modo, para cada conjunto A, la probabilidad de que el número ξ (A) de puntos que caigan en A sea N se expresará ahora por la fórmula

$$P(\xi(A) = N) = \exp(-\lambda(A)) \frac{\lambda(A)^N}{N!}$$

habiendo en este proceso cedido toda su preponderancia la medida de Lebesgue.

Pero este proceso es una formulación particular de los llamados procesos puntuales o procesos de puntos.

Un proceso puntual consiste en una distribución aleatoria de puntos en algún espacio junto con una asignación a cada uno de ellos de un entero mayor o igual a 1.

Se suele exigir que estos puntos, que se les puede llamar partículas, sean aislados. Si a un punto se le ha asignado un número mayor o igual a dos dicho punto se llama múltiple.

Los procesos puntuales no están exentos de aplicaciones: Serfling (23) señala numerosos ejemplos y sugerencias de aplicaciones en biometría y teoría de la fiabilidad, Gani (24) hace un estudio detallado en epidemiología, Brillinger (25) destaca aplicaciones en neurofisiología y Kartasev (26)en tecnología agrícola.

(23) R. J. Serfling. Research in point processes, with applications in reliability and biometry. Reliability and biometry: statistical analysis of lifelength (Proc. Conf. Florida State Univ. 1973).

(24) J. Gani Point processes in epidemiology stochastic point processes. (Conf. IBM Res. Centes (1971). Wiley-Interscience (1972).

(25) D. R. Brillinger. The identification of point processes systems. The Annals of Probability. 1975.

(26) Jn. V. Kartasev, V. A. Sabranskii. The relative distribution of random points on a line. Vycisl. Prikl. Mat. (Kiew). (1973).

Estos procesos de puntos son a su vez casos particulares de medidas aleatorias ξ , pues en efecto, cada realización de un proceso de puntos puede concebirse como una medida que toma valores enteros no negativos (o infinito) en cada región del espacio, siendo el valor de esta medida en una región deteruinada, el número de partículas contenidas en dicha región tras la realización del proceso.

Un átomo del proceso ξ es un punto fijo x del espacio tal que

$$P\left(\xi(\{x\}) > 0\right) > 0$$

Podría pensarse que todo proceso de puntos es de Poisson con una medida conveniente.

Prekopa (27), da las condiciones precisas para que esto ocurra; un proceso de puntos es de Poisson si y sólo si no tiene átomos, ni puntos múltiples y es completamente aleatorio.

Una medida aleatoria ξ es completamente aleatoria si son independientes las variables aleatorias ξ (V) y ξ (V') que dan las medidas de dos regiones disjuntas cualesquiera V y V'.

La relación de las medidas completamente aleatorias con los procesos de Poisson según Kingman (28) es la siguiente: una medida completamente aleatoria ξ es la suma de tres medidas,

$$\xi = \mu + \xi_a + \xi_p,$$

una medida μ fija, no aleatoria, y no atómica, y dos medidas aleatorias independientes, una ξ_a puramente atómica con un conjunto contable de átomos, con masas aleatorias independientes, y una medida ξ_p que es límite de procesos de Poisson con masas aleatorias independientes en sus puntos.

Pero incluso utilizando como base procesos de Poisson se pueden obtener procesos de puntos que no sean medidas completamente aleatorias. Este es el caso de los procesos de Poisson mixtos y los procesos de Poisson doblemente estocásticos.

Un proceso de Poisson mixto se obtiene mediante dos procesos aleatorios. En primer lugar una variable aleatoria real positiva con distribución conocida toma un valor λ y con este vayor ya obtenido se realiza un proceso de Poisson, de intensidad λ . De esta forma se obtiene.

(27) A. Prekopa. Secondary processes generated by a random point distribution of Poisson type. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eotvos Sec. Math. *1* (1958).
(28) J. F. C. Kingman. Completely random measures. Pacific J. Math. *21* (1967).

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda\, m(V)) \frac{(\lambda\, m(V))^N}{N!}\, dF(\lambda)$$

como probabilidad de que aparezcan N puntos en la región V.

Más radical todavía es el proceso de Poisson doblemente estocástico, que exige en primer lugar la obtención de una medida aleatoria λ (V) y para cada realización de ésta el número de puntos aleatorios que aparecen en la región V responde a la fórmula de Poisson

$$\exp(-\lambda(V)) \frac{(\lambda(V))^N}{N!}$$

Una demostración de la existencia de medidas aleatorias y procesos de puntos aleatorios en espacios topológicos localmente compactos y con base contable, y otras propiedades de estos procesos puede verse por ejemplo en un trabajo de Jagers (29).

En lo expuesto anteriormente se ha admitido que las probabilidades para caracterizar un proceso estaban fijadas de forma finita.

Es corriente plantear hipótesis de carácter infinitesimal o asintótico referentes a las probabilidades del número ξ (A) de puntos en una región A de medida muy pequeña, y a partir de ellas estudiar la naturaleza de dicho proceso.

En estos casos juega un papel importante la medida paramétrica del proceso λ (A) que limitándose al caso del espacio $R = E^1$ se define primeros para un intervalo I, como una integral de Riemann, en el sentido de los refinamientos de las particiones de I, de la función de intervalo subaditiva (o semiaditiva superiormente).

$$P(\xi(I) > 0),$$
$$\lambda(I) = \sup \sum P(\xi(I_i) > 0),$$
$$\{I_i\} \in \mathcal{D}(I)$$

($\mathcal{D}$ (I) = conjunto de las particiones de I en número finito de intervalos) (ver Hildebrandt (30)) y extendiéndola después a una σ-álgebra.

Daley (31) presenta una jerarquización de los procesos de puntos en

(29) Peter Jagers. Aspects of random measures and point processes. Advances in Probability. Vol. *3* (1974).

(30) T. H. Hildebrandt. Introduction to the theory of integration. Academic Press. 1963.

(31) Daryl. J. Daley. Various concepts of orderliness for point-processes. Stochastic. Geometry. John Wiley. 1974.

la recta demostrando por ejemplo que los procesos de puntos casi seguramente regulares, es decir los que carecen de puntos múltiples son más generales que los ordinarios, para los cuales es cero

$$\inf_{\{I_i\} \in \mathcal{D}(I)} \sum P(\xi(I_i) \geq 2) \qquad \text{(para todo I).}$$

($\mathcal{D}$ (I) = conjunto de las particiones de I.).

Estos últimos a su vez son más generales que los analíticamente regulares, para los cuales para cada x,

$$\lim_{(h_1, h_2) \to (0,0)} \frac{P(\xi(x - h_1, x + h_2) \geq 2)}{h_1 + h_2} = 0$$

y estos a su vez son más generales que los uniformemente analíticamente regulares, en los cuales el límite anterior vale uniformemente respecto de x.

Si se puede precisar la naturaleza σ-finita, y estacionaria o no de la medida paramétrica λ se encuentran otras relaciones de dependencia entre diversos tipos de regularidad de los procesos de puntos en la recta.

Abordar este estudio en otros espacios es una tarea interesante.

Se puede notar que en los procesos de puntos que hemos comentado se ha manejado la probabilidad de que el número de puntos de una región A tome un valor finito, (al menos para conjuntos A de medida finita) o que ξ (A) sea una medida finita, o en términos más generales que ξ sea una medida σ-finita.

Se presentan en ciertas situaciones procesos de puntos en los que las probabilidades anteriores degeneran, tomando el valor cero, por lo que quedan indiferenciados los posibles conjuntos obtenidos en el proceso con el solo uso de las probabilidades del tipo anterior.

El conjunto de ceros de un movimiento Browniano o el conjunto de instantes en que un proceso de Markov está en un estado dado pueden plantear este problema.

En situaciones de este tipo dado un intérvalo fijo T = (a, b) puede resultar igual a la unidad la probabilidad de que el número de puntos.

$$\text{card.}\,(Z \cap T) = \xi\,(T)$$

del proceso, contenidos en T, sea infinito, o también puede valer la unidad la probabilidad de que la medida

$$m\,(Z \cap T) = \text{medida de Lebesgue}$$

sea cero, como se ve en Taylor (32).

Para obviar este inconveniente Kendall (33) desarrolla una idea presente en Davidson (34) que en líneas generales consiste en lo siguiente:

En el espacio-soporte o básico C consideramos una familia $\mathcal{T}$ de conjuntos que vamos a llamar "conjuntos de rastreo" o "trampas", no vacíos y cuya unión es C, y además unas funciones definidas en $\mathcal{T}$ y que toman valores cero o uno las cuales se llaman funciones de incidencia fuerte si cumplen con

$$f(T) = 1,\ T \subset \bigcup T_\alpha,\quad T,\ T_\alpha \in \mathcal{T} \implies f(T_\alpha) = 1 \text{ para algún } \alpha$$

y al mismo tiempo define otras funciones llamadas de incidencia débil si se cumple que

$$f(T) = 1,\ T \subset \bigcup_1^n T_i,\ T,\ T_i \in \mathcal{T} \implies f(T_i) = 1 \text{ para algún } i.$$

Para cada conjunto $Z \subset C$, se define la clausura-$\mathcal{T}$ por

$$Cl\,(Z, \mathcal{T}) = \Big(\bigcup_{T \cap Z = \emptyset} T \Big)^c = \bigcap_{T \cap Z = \emptyset} T^c$$

que prueba que si $\mathcal{T}$ fuese una base de una topología la clausura definida sería la de dicha topología, pero en general éste no será el caso. Sin embargo la analogía explica que esta clausura tenga ciertas propiedades análogas a la de una clausura topológica.

Por otra parte un conjunto Z permite definir una función de incidencia fuerte f_Z por la regla

$$f_Z(T) = 0 \quad \text{si} \quad Z \cap T = \emptyset$$

$$f_Z(T) = 1 \quad \text{si} \quad Z \cap T \neq \emptyset$$

(32) S. J. Taylor. The α-dimensional measure of the graph and the set of zeros of a Brownian path. Proc. Cambridge Dhil. Soc. 51 (1975).

(33) D. G. Kendall. Foundations of a theory of random sets. Stochastic Geometry. John Wiley (1974).

(34) R. Davidson. Some arithmetic and geometry in probalidity theory. Cambridge (1968).

Precisamente toda función de incidencia fuerte f coincide con una f_Z definida del modo anterior, siendo el conjunto Z que la determina único si se exige que sea $\mathscr{E}$ cerrado, o sea igual a su clausura.

$$Cl(Z, \mathscr{E}) = Z,$$

y para cualquier otro conjunto Z' que valga $f = f_Z{}' = f_Z$ resulta

$$Cl\ (Z', \mathscr{E}) = Z$$

Se puede definir, en primer lugar una distribución de probabilidad en el conjunto de las funciones de incidencia débil f(T) (con $T \varepsilon \mathscr{C}$, f $\cdot$ W = conjunto de funciones de incidencia débil) que constituyen claramente un proceso estocástico de parámetro $T \varepsilon \mathscr{C}$.

Si se consigue extender esta medida de probabilidad a las funciones de incidencia fuerte se habrá conseguido según la observación anterior obtener una medida de probabilidad en la familia de los conjuntos $\mathscr{C}\varepsilon$ cerrados.

Como un ejemplo inmediato de aplicación de esta teoría se obtienen los conjuntos aleatorios cerrados en la recta $E^1 = R$ si se toma como $\mathscr{E}$ la familia de los intervalos abiertos.

Entre los problemas de geometría estocástica debemos incluir aquellos que tienen un carácter topológico como por ejemplo problemas de árboles obtenidos por bifurcación aleatoria que son de interés en poblaciones genéticas, en el estudio de polimeros, estructura bronquial, etcétera, y que han sido considerados por Harding (35) (36), Shreve (37) y otros.

En dicho estudio se distinguen dos tipos de formas. Las formas no rotuladas que podemos concebir como figuras engendradas partiendo de un punto que llamaremos raíz de la forma del que salen dos ramas hasta alcanzar dos nuevos puntos o vértices, nuevamente cada uno de estos dos vértices puede bifurcarse en dos nuevas ramas y así sucesivamente pudiendo detenerse en cada vértice la bifurcación mediante un mecanismo aleatorio.

A una forma de este tipo, con un número finito de vértices, le llamaremos forma no rotulada, siendo su grado el número de sus vértices terminales, en los que no se produce bifurcación. Si en una forma de

(35) E. F. Harding. The probabilities of rooted tree-shapes generated by random bifurcation. Adv. Appl. Prob. 3 (1971).
(36) E. F. Harding. The probabilities shapes of randomly bifurcating. trees. Stoch. Geom. (1974).
(37) R. L. Shreve. Statistical laws of stream numbers. J. Gool. 74 (1966).

grado n se asignan a sus n vértices finales o términos n simbólicos distintos $1_1, 1_2, \dots 1_n$ se obtiene una forma rotulada.

Si es k_n el número de formas rotuladas, de la relación recurrente:

para $n = 2m\text{-}1$

$$k_n = \binom{n}{1} k_1 k_{n-1} + \binom{n}{2} k_2 k_{n-2} + \dots + \binom{n}{m} k_{m-1} k_m$$

para $n = 2m$.

$$k_n = \binom{n}{1} k_1 k_{n-1} + \binom{n}{2} k_2 k_{n-2} + \dots + \binom{n}{m-1} k_{m-1} k_{m+1} + $$
$$+ \frac{1}{2} \binom{n}{m} k_m^2$$

resulta fácilmente la función generatriz

$$F(x) = 1 - \sqrt{1-2x} = \sum k_n \frac{x^n}{n!}$$

y de aquí el valor

$$k_n = 1.\ 3.\ 5.\ \dots\ (2n\text{-}3) = (2n\text{-}3)!!$$

Sin embargo, para el número S_n, de las formas no rotuladas, que satisface

$$S_n = \begin{cases} S_1 S_{n-1} + S_2 S_{n-2} + \dots + S_{m-1} S_m & \text{si } n = 2m\text{-}1 \\ S_1 S_{m-1} + S_2 S_{m-2} + \dots + S_{m-1} S_{m+} + \frac{1}{2} S_m (S_m + 1), & \text{si } n = 2m \end{cases}$$

no se ha encontrado fórmula explícita.

La probabilidad entre las formas no rotuladas de grado n, se reparte de modo que se supone igual probabilidad para que se produzca una bifurcación en los n-1 vértices terminales de las formas de grado n-1 de que puede provenir, contando luego como forma única todas las que puedan reducirse a una sola forma alterando el orden de cololación de las dos ramas en algunos vértices.

La probabilidad en las formas rotuladas de grado n se obtiene de la probabilidad de las no rotuladas del mismo grado, teniendo en cuenta además que las asignaciones de los n símbolos $l_1, \ldots, l_n$ a sus vértices terminales se hace con igual probabilidad para todas las asignaciones posibles.

Siendo, para n grande, impracticable la construcción detallada de la distribución de probabilidad sobre todas las formas de grado n se ha tratado de encontrar la forma más probable o las k formas más probables, o cotas para dicha probabilidad, por ejemplo por Hammersley y Grimmett (38). Los problemas aquí pueden multiplicarse. Se puede investigar las variables aleatorias que representan la altura de una forma, máxima distancia del vértice original a uno terminal, media de las distancias de los términos al vértice inicial para cada forma; asimismo se puede generalizar este estudio para árboles en que las ramificaciones se producen partiendo de cada vértice varias ramas en número fijo o aleatorio, o problemas aleatorios referentes a grafos como el estudiado por Kordecki (39) en que las aristas del grafo van apareciendo en el transcurso del tiempo de un modo aleatorio, iniciéndose el proceso sin ninguna arista en t = 0, y cada vez que aparece una arista ya no desaparece, estudiándose la probabilidad de que al cabo de un cierto tiempo t el grafo sea conexo.

Otros resultados sobre conexión y estructura de grafos aleatorios y de hipergrafos han sido expuestos por Kelmans (40), Stepanov (41), Ljamín y Selivanov (42).

Los problemas de búsqueda enlazan con la teoría de optimación y teoría de juegos pero no por ello dejan de entroncar con la geometría estocástica.

Un caso simple puede ser el siguiente. Una canoa ha quedado extraviada en el mar a una distancia d conocida de una costa rectilínea que la niebla la hace invisible; aunque el piloto carece de brújula puede iniciar un itinerario en cualquier dirección y describir cualquier trayectoria ya que manejando el timón controla la curvatura de dicha trayectoria ¿qué tipo de trayectoria debe describir para hacer mínimo el recorrido hasta alcanzar la costa?

(38) J. M. Hammersley, G. R. Grimmett. Maximal solutions of the generalized subadditive inequality. Stoch. Geom. (1974).

(39) Wojciech Kordecki. Probability of the connectedness of random graphs. Prace Nauk. Inst. Mat. Fiz. Teooret. Politechn. Wroclaw (1973).

(40) A. K. Kelmans. Asymptotic formulae for the probabiliy of k-connections of random grphs. Teor. Verojatnost i Primenen. *17* (1972).

(41) V. E. Stepanov. Structure of the random graphs. Teor. Verojatnost i Primenen. *17* (1972).

(42) V. N. Ljamin, B. I. Selivanov. Random hipertrees and hiperforest. Math Zametki (1974. Math. Notes (1947).

Una solución intuitiva consiste en recorrer radialmente la distancia d alejándose del punto de partida en cualquier dirección y después de esto describir una circunferencia de radio d con centro el referido punto.

Pero el mismo problema cambia extraordinariamente si la distancia d no está determinada sino que responde a una distribución de probabilidad conocida, si la costa es de una isla circular, varias islas, o se trata de un lago, etc.

De optimación es también el problema de la calle Fitzwilliam estudiado por Wilkinson (43), planteado como sigue: desde un punto A exterior a una recta nos dirigimos a otro punto B perteneciente a dicha recta la cual constituye un refugio ante cierto peligro que aparece de de modo aleatorio y que obliga a dirigirse perpendicularmente a la recta en el instante de su aparición, hasta alcanzarla y seguir por ella hasta llegar al punto B. Se trata de hacer mínimo el recorrido esperado para ir desde A a B. Es curioso que la solución intuitiva, conjeturada por Davidson, de dirigirse en línea recta de A hacia B hasta que aparezca el peligro, no es la correcta. La solución es una cierta curva convexa (vista desde la recta) que va de A a B dependiente de la distribución de probabilidad con que aparece el peligro.

Después de las figuras formadas por puntos las figuras formadas por rectas han sido muy estudiadas así como figuras formadas por variedades lineales de varias dimensiones.

En el caso más simple se consideran figuras formadas por rectas aleatorias del plano (orientadas o no).

Para elegir al azar una sola recta es conocida, como ya quedó dicho, la medida adecuada, sobre el espacio paramétrico Φ , que en este caso se reduce a un cilindro, producto cartesiano de un círculo por una recta (o semirrecta, si se trata de rectas no orientadas). En efecto cada recta del plano puede determinarse por dos parámetros: uno puede ser la medida de un ángulo que varía entre 0 y 2π y el otro la medida de un segmento orientado.

Los movimientos en el plano producen transformaciones en este cilindro, cuyo conjunto es el grupo $\mathscr{G}$ y existe una medida invariante respecto de este grupo de transformaciones como se dijo anteriormente.

Tal medida puede seguir siendo aplicada en el estudio de problemas en que se tomen un número fijo de rectas.

Pero si el número de rectas es aleatorio, es decir si consideramos procesos de rectas, volvemos a encontrarnos con una gran variedad de po-

(43) E. M. Wilkinson. The Fitzwilliam Street Problemm. Stochastic Geometry (1964).

sibilidades en la que dicha medida invariante deja de desempeñar un papel preponderante.

En el proceso de rectas de Poisson, e incluso en los procesos de Poisson mixtos esta medida sigue siendo un auxiliar básico para su formulación. Esta se hace del mismo modo que la señalada anteriormente en el espacio euclídeo de puntos con la medida de Lebesgue, pero cambiando ahora esta medida de Lebesgue por la medida en el cilindro, invariante en los movimientos del grupo $\mathscr{E}$.

Una gran generalidad tienen los procesos de Poisson de rectas doblemente estocásticos, que utilizan medidas arbitrarias, o si se prefiere una intensidad aleatoria V (w) variable con la localización de la recta w; podemos decir que son procesos de Poisson doblemente estocásticos de puntos en el cilindro Φ.

Davidson (44) plantea el problema de construir un papel o tejido reforzado con fibras colocadas según las rectas obtenidas por un proceso de este tipo, estacionario de segundo orden bajo los movimientos de $\mathscr{E}$ buscando aquel que resulte más resistente a la rotura por contener una densidad de intersecciones de las rectas lo mayor posible, y concluye que el proceso de rectas de Poisson mixto es el más conveniente para este fin.

Supongamos que nosotros limitamos nuestro proceso Z de rectas a satisfacer las condiciones de regularidad siguientes:

1) que Z sea localmente finito (o sea el número de rectas de Z que corte a cualquier círculo sea casi seguramente (c. s.) finito).

2) que Z carezca c.s. de rectas dobles, de rectas paralelas y de rectas antiparalelas (rectas paralelas de orientación contraria).

3) que Z sea localmente de cuadrado sumable, y estacionario de segundo orden bajo los movimientos de $\mathscr{E}$.

Entre los procesos que cumplen estas condiciones generales Davidson (45) encuentra que existen procesos de Poisson doblemente estocásticos y otros que no lo son.

Pero si a las condiciones generales señaladas anteriormente se agrega la de que Z sea estrictamente estacionaria los procesos obtenidos parecen ser todos de Poisson doblemente estocásticos, sin que se haya podido probar tal conjetura.

Los problemas de recubrimientos tratan de que ciertas figuras geométricas cubran ciertos conjuntos pudiendo estar estas figuras situadas en la recta, el plano, la circunferencia, superficie esférica, etc.

(44) Rollo Davidson. Stochastic Processes of flats and exchangeability. Stochastic Geometry. 1974.

(45) R. Davidson. Construction of line-processes: second-orden properties. Stochastic Geometry.

Un caso particular es aquel en que la figura a cubrir está constituida por los puntos de un reticulado de la recta o del plano, pudiendo ser en este último caso un reticulado cuadrangular, triangular, etc.

En el caso sencillo en que tomemos en la recta los puntos de abcisa entera y elijamos al azar un segmento de longitud h ($h < 1$) el número N de puntos del reticulado cubierto por el segmento de longitud h es evidentemente p o p + 1, siendo p la parte entera de h, con probabilidadades 1-q y $q = h\text{-}p$ luego el momento de orden n de N es

$$E(N^n) = (1\text{-}q)\, p^n + q(p + 1)^n$$

En Kendall (46) están calculadas para este caso la varianza por dos métodos distintos, y también está calculada la varianza para el caso de un rectángulo y un círculo aleatorio tomado en un reticulado cuadrangular en el plano. Kendall y Rankin (47) (48) hacen este estudio para un óvalo y una esfera.

En estos casos el conjunto utilizado para cubrir puntos de un reticulado tiene forma fija pero más difícil es el problema cuando la forma de estos conjuntos aleatorios puede ser variable. Para este caso es útil un teorema de Robbins (49) contenido sustancialmente en Kolmogoroff (50) (Cap. IV § 5) considerado al tratar la permutabilidad del signo de integración con el de esperanza matemática. Generalizaciones de este resultado de Robbins se encuentran en Bronowski y Neyman (51) Garwood (52) y Santaló (53), utilizando, los primeros, intervalos aleatorios de lados paralelos a los ejes y generalizando Santaló dicho estudio al caso en que la orientación de estos intervalos es también aleatoria.

Un problema de cubrimiento se plantea al contar pequeñas partículas de polvo en una placa, bacterias en un cultivo, etc., pues dicho número se subestima debido a la superposición de partículas, formando varias de ellas un grupo o paquete, lo que nos lleva a estudiar el número de paquetes que contienen un número determinado de partículas.

---

(46) M. G. Kendall, P. A. P. Moran. Geometrical Probability. Charles Griffin.

(47) D. G. Kendall. In the number of lattice points inside a random oval. Q. J. Math. *19* (1948).

(48) D. G. Kendall, R. A. Rankin. On the number of points of a given lattice in a random hipersphere. Q. J. Math. *4* (1953).

(49) H. E. Robbins. On the measure of a random set. I. Ann. Math. Stat. *15* (1944). II. Ibidem. *16* (1945).

50) A. N. Kolmogoroff. Grundbegriffe der Wahrsheinlichkeitrechnung. (1933).

(51) J. Bronowski, J. Neyman. The variance of the measure of a two-dimensional random set. Ann. Math. Sta. *16* (1945).

(52) F. Garwood. The variance of the overlap of geometrical figures with reference to a bombing problem Biometrika *34* (1947).

(53) L. A. Santaló. On the first two moments of the measure of a random set. Ann. Math. Stat. *18* (1947).

Este tratamiento ha sido desarrollado por Armitage (54) y Mack (55).

Supongamos que en un segmento de longitud L vamos colocando altatoriamente intérvalos de longitud unidad no rampantes hasta que no sea posible colocar más. El cociente entre lal longitud cubierta y L se llama densidad esperada. Igualmente en un rectánculo pueden colocarse cuadrados de lados unidad disjuntos hasta que resulte imposible colocar nuevos rectángulos definiéndose del mismo modo la densidad esperada para el rectángulo. Considerando el caso límite de estas densidades esperadas para toda la recta y todo el plano Palasti ha conjeturado que la densidad para el plano es el cuadrado de la de la recta.

Blaisdell y Solomon (56) sostiene sobre la base de métodos de simulación que la conjetura es aproximada pero no correcta.

Shepp (57) da una condición necesaria y suficiente para que un conjunto de intérvalos aleatorios obtenidos en la recta mediante cierto proceso de Poisson cubra toda la recta con probabilidad uno. Este problema lo estudia también Wschebor (58).

También en la circunferencia ha sido estudiado el problema de cubrimiento por arcos aleatorios.

Si se supone que se distribuyen al azar arcos aleatorios de igual longitud α sobre una circunferencia de longitud la unidad, se precisa un cierto número de tales intérvalos para cubrir el círculo; la distribución de este número es conocida y la expresión asintótica si α tiende a cero ha sido estudiada por Flatto (59). En vez de considerar la longitud de los intérvalos anteriores constante se puede tratar de cubrir la circunferencia por arcos aleatorios de longitudes l_1, l_2, l_3,... ($l_i < 1$) siendo la longitud de la circunferencia igual a la unidad.

Se han venido dando condiciones necesarias y suficientes para que el conjunto de puntos de la circunferencia no cubiertos por la unión de los arcos l_1, l_2, l_3, ... tenga medida de Lebesgue cero con probabilidad uno, y también de que dicho conjunto sea vacío con probabilidad uno por Dvoretzky y Shepp (60).

(54) P. Armitage. An overlap problem arising in particle counting. Biometrica *36*. (1949).

(55) C. Mach. The effect of overlapping in bacterial caounts of incubated colonies. Biométrica *40* (1953).

(56) B. Edwin Blaisdell, Herbert Solomon. On random sequential packing in the plane and a conjeture of Patesti. J.Appl. Probability 7 (1970).

(57) L. A. Shepp. Covering the line with random intervals. Z. Wharscheinlichkeistheorie und Verw. Gebiete, *23* (1972).

(58) Mario Wshebor. Sur un theoreme de Lonard Shepp. Z. Wahrscheinlinchkeitstheoric und Werw. Gibiete *27* (1973).

(59) Leopold Flatto. A. Limit theorem for random coverings of a circle. Israel J. Math. *15* (1973).

(60) L. A. Shepp. Covering the circle with random arcs. Israel J. Math. *11* (1972).

También estudia este problema Wschebor (61) tomando en vez de intérvalos l_n conjuntos abiertos o bien conjuntos medibles Lebesgue.

Si tomamos cierto número de conjuntos arbitrarios aleatoriamente en un espacio X podemos definir en cada punto $x \in X$ una variable aleatoria H(x) igual al número de conjuntos aleatorios a los que pertenece x.

Los valores mínimo y máximo $\underline{H}$ y $\overline{H}$ de H(x) para $x \in X$ son dos nuevas variables aleatorias que pueden llamarse *cobertura* y *concentración* de los subconjuntos tomados en X.

La distribución de estas variables en el caso de círculos en E^2, esferas en E^3 o hiperesferas en E^n ha sido considerada por Gilber (62), Wendel (63) y Miles (64). Este señala la utilidad de estos resultados para aplicaciones estadísticas en problemas de contrastes de hipótesis referentes a procesos de puntos.

Los problemas de recubrimientos son muy prolíficos. El clásico problema ya citado de la aguja de Buffon, que tiene afinidad con este tipo de problemas, aún tiene hoy variantes y generalizaciones.

Por ejemplo Neuts y Purdre (65) lo tratan en el círculo y Ambarcumjam (66) en R^3.

Si se toman aleatoriamente no conjuntos C_1, C_2, ..., C_m, contenidos en un conjunto fijo C_0 de medida finita puede pedirse la distribución del contenido o medida del conjunto cubierto por 0, 1, 2, ... m de tales conjuntos. La del contenido de aquellos C_i cubiertos totalmente por un C_j, o por dos C_j, etc. Los cardinales finitos pueden sustituirse por trasfinitos si se toman infinitos conjuntos C_j, etc.

Sin duda el concepto de convexidad es de gran importancia en toda la matemática y está ligado con numerosas cuestiones. Esto explica que, sobre figuras convexas haya gran número de problemas en probabilidades geométricas.

Inicialmente trataron problemas de figuras convexas Barbier (67) Crofton (11) (12) (68) y Sylvester (69). Entre los problemas tratados por

(61) Mario schebor, Sur le recouvement du cercle par des ensembles places au hasard. Israel J. Math. *15* (1973).

(62) E. N. Gilbert. The probability of covering sphere with N circular caps. Biométrika *52* (1965).

(63) J. G. Wendel. A. problem in geometric probability. Math. Scand. *11* (1962).

(64) R. E. Miles. A synopsis of Bisson flats in euclidean spaces. Stochastic Geometry. (1974).

(65) M. F. Neuts, P. Purdre. Garffon in the round. Math. Mag. *44* (1971).

(66) R. V. Ambarcumjam. Onthe solution of the Burron. Sylvester problem in R^3. Dokl Akad. Nauk. SSSR. *210* (1973).

(67) E. Barbier. Note sur le probleme l'aiguille et le jeu du joint couvert. J. Math. pures et appl. *5* (1860).

(68) M. W. Croffon. Geometrical theorems relating to mean valuer. Proc. London Math. Soc. *8* (1877).

(69) J. J. Sylvester. On Buffon's problem of the needle. Acta Mathematica. *14* (1891).

estos autores figura el de calcular la probabilidad de que una recta del plano tomada al azar entre las que costan a una curva convexa C_1, corte también a otra curva convexa C_2, obteniéndose fórmulas distintas en los tres casos posibles.

1. Que C_2 sea interior a C_1.
2. Que C_2 corte a C_1.
3. Que C_2 sea exterior a C_1.

Es curiosa la relación entre estas probabilidades.

En el primer caso la probabilidad pedida es el cociente entre las longitudes de C_2 y C_1. En el segundo, al numerador del caso anterior se le suma la longitud de C_1 y se le resta la del contorno convexo que encierra a C_1 y C_2. En el tercero el numerador es la diferencia entre el perímetro de la figura formada por C_1 y C_2 con sus tangentes comunes interiores y el análogo con las tangentes comunes exteriores.

También sin interesantes los resultados llamados teoremas primero y segundo de Crofton para figuras convexas.

El primer teorema de Crofton establelce una igualdad entre dos valores de la medida del conjunto de pares de secantes a la figura convexa C que se cortan fuera de C,

$$\iint_D (\alpha - \operatorname{sen} \alpha)\, dxdy = \frac{1}{2} L^2 - \pi S,$$

D = exterior de C
α = ángulo subtendido por C desde (x, y)
$\alpha - \operatorname{sen}\alpha$ = densidad de los pares de secantes de C en (x, y)
L = longitud de C
S = área encerrada por C.

El segundo teorema de Crofton se obtiene de dos expresiones de la medida de los pares de puntos interiores a una curva convexa C y está expresado por la igualdad

$$\frac{1}{3} \iint_D l_{AB}^3 \; dp \; d\,\vartheta = S^2$$

D = conjunto de todas las rectas AB definidas por las coordenadas (p, θ) que cortan a C.
l_{AB} = longitud de la cuerda que la recta AB determina en C.
S = área encerrada por C.

Siendo K_i conjuntos convexos del plano K_0 fijo y K_1, ... K_m aleatorios, se ha estudiado el valor medio de algunas funciones de la intersección $\bigcap_{0}^{m} K_i$, como área, perímetro, número de Euler, por ejemplo por Filipescu (70).

Sulanke (71) estudia el número esperado de vértices de un poliedro convexo en E^N obtenido como intersección de los semiespacios que contienen el origen y están limitados por hiperplanos tomados aleatoriamente secante a la esfera de radio r y dentro del origen. El límite de dicho número demuestra que es $\pi^{N-1} W_N/W_{N-1}$ donde W_N es el volumen de la esfera N-dimensional de radio unidad.

También Prekopa (72) estudia el número de vértices de un poliedro convexo obtenido por diversos mecanismos aleatorios.

Santaló (73) estudia en un espacio E^n la distribución aleatoria de cilindros de sección convexa y su intersección con un cuerpo convexo arbitrario.

Una propiedad de mínimo probada por Groemer (74) es la siguiente. Entre los cuerpos convexos de volumen dado, contenidos en E^n la esfera da valor mínimo al momento de orden r ($r \geq 1$) del volumen de un simplex formado por $n + 1$ puntos aleatorios tomados en el cuerpo convexo considerado.

Jajte (75) estudia conjuntos convexos aleatorios en el plano fijando un espacio de probabilidad (Ω, A, P) a partir del cual determina una distribución sobre los conjuntos convexos cerrados del plano.

Brook (76) estudia el siguiente problema.

Supongamos que tenemos un campo de forma arbitraria y se trazan en él rectas paralelas a una dirección fija y equidistante como se hace usualmente en ciertas plantaciones. La media de las longitudes de los segmentos que quedan interceptados en la figura dada determina una función de la dirección que, representada en coordenadas polares resulta ser una curva convexa de período π.

Este problema tiene un recíproco fácil de plantear: si se fija una

---

(70) Dumitru Filipescu. Random convex sets in the euclidean plane. Bu. Inst. Politchn. Bucaresti. *34* (1972).

(71) R. Sulanke, P. Wintegen. Zufallige konvexe Polyder im N-dimensionalen euklidischen Raum. Perid. Math. Hungar 2 (1972).

(72) A. Prekopa. On the number of vertices of random convex polyhedra. Period. Math. Hungar. *2* (1972).

(73) L. A. Santaló. Probabilidades sobre cilindros y cuerpos convexos. Rev. Un. Mat. Argentina *25* (1970-1971).

(74) H. Groemer. On some mean values associated with a randomly selected simplex in a convex set. Pacific. J. Math. 45 (1973).

(75) R. Jajte. On some random convex sets. Collq. Math. *24* (1971-72).

(76) Foster Brooks. Corn rows and convex curves. Math. Mag. *44* (1971).

curva convexa de período π, expresada en coordenadas polares, ¿es posible encontrar la forma de un campo para que su curva convexa obtenida por el método anterior coincida con la dada?

Otro capítulo vasto y atractivo es el de los mosáicos o enlosados aleatorios del plano (o de otros espacios) muy tratado por su interés o como un subproducto de otras cuestiones.

Si se considera en el plano un número contable de rectas aleatorias queda dividido el plano en un conjunto de polígonos convexos, habiéndose estudiado el número esperado de sus lados, su perímetro, su área y momentos de segundo orden de estas magnitudes principalmente por Miles (77) (78).

Santaló y Yáñez (79), extienden este estudio al plano hiperbólico y el mismo Miles (80) hace un estudido para la superficie esférica.

Esta somera e incompleta revisión de la geometría estocástica dará una ligera idea de la variedad de problemas que ligan las probabilidades y los conceptos geométricos, de las interesantes aplicaciones que pueden encontrar estos estudios en diversos terrenos da la ciencia y la técnica, y de la enorme fecundidad de esta teoría que está en continua evolución y crecimiento.

Con ello hemos tratado de desvirtuar al arcáico y erróneo concepto en que como dijimos al principio, se ha tenido en ocasiones de esta materia, menospreciándola inmerecidamente.

Si lo hemos logrado, aunque sólo sea en parte, nos daremos por satisfechos.

---

(77) R. E. Miles. Random polygons determined by random lines in a plane. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. *52* (1964).

(78) R. E. Miles. The various aggregates of random polygons determined by random lines in a plane. Advances in Math. *10* (1973).

(79) L. A. Santaló, I. Yáñez. Averages for polygons formed by random lines in euclidean and hyperbolic planes. J. Appl. Probability *9* (1972).

(80) R. E. Miles. Random points, sets and tesselations on the surface of a sphere. Sankhya Ser. A *33* (1971).