

Ajuste por un polinomio trigonométrico de las temperaturas medias diarias de Murcia y su aplicación a la programación de plantaciones

POR

F. MUÑOZ y L. MURCIA

I. OBJETIVOS DEL TRABAJO

El problema de investigación operativa que nos proponemos, es la programación racional de las fechas de plantación de diferentes tipos de cultivos agrícolas con el objeto de conseguir determinadas producciones diarias, previamente fijadas.

Sea T una fábrica que elabora en condiciones ópticas, una cantidad diaria q de un determinado producto agrícola; es decir, para esta cantidad, q , el coste unitario es mínimo. Una cantidad $q_1 < q$, aumentaría el coste unitario por mantenerse los costes fijos y una cantidad $q_2 > q$, produciría el mismo efecto, ya que se trata de productos perecederos.

De lo anterior, se deduce la necesidad de programar las plantaciones de tal forma, que en la citada fábrica entren las cantidades q_1, q_2, \dots, q_n en los instantes b_1, b_2, \dots, b_n , para lo cual se requerirá efectuar las plantaciones en los instantes a_1, \dots, a_n .

H. L. Seaton (1) en su trabajo (con amplia revisión bibliográfica) sobre este tema, llega a la conclusión de que algunas especies requieren una cantidad, h , de unidades de "calor", que se miden en grados-día. Precizando



lo anterior: siendo a el día de plantación de un cultivo, b el día óptimo de su recolección y $t=f(x)$, la función que nos da la temperatura media del día x es

$$\int_a^b (f(x) - k) dx = h \quad (1)$$

con h medido en grados días, siendo k una temperatura fija y conocida, característica de la especie, por debajo de la cual no hay crecimiento de la planta.

La primera cuestión a resolver será pues, la determinación de la función $t=f(x)$, para lo cual hemos dispuesto de los datos que nos ha proporcionado el Servicio Meteorológico Nacional de las temperaturas medidas durante 24 años (1945 a 1968) en el Observatorio Meteorológico del Aeródromo de Alcantarilla (Murcia).

II. ELABORACION PREVIA DE LOS DATOS

Como es habitual en las investigaciones meteorológicas y en los trabajos relacionados con el tema que nos ocupa, se considera la temperatura media diaria, como la media aritmética de las temperaturas máxima y mínima del día.

La función $t=f(x)$, que vamos a obtener, deseamos que sea independiente del hecho de que un año sea o no bisiesto y por tanto, para homogeneizar el conjunto de datos del que disponemos, no tenemos en cuenta los valores de temperatura correspondientes al último día de los años bisiestos, lo cual repercute en un 1-2 % de error en la predicción del número de grados-días de una plantación que se realice en un año bisiesto, pero sin embargo, no afecta a la predicción del espaciamiento en las fechas de plantación para conseguir el correspondiente espaciado en la fecha de recolección, lo que es el objetivo fundamental de este trabajo.

Partimos, pues del conjunto de datos (t_{ij}) donde el subíndice i indica día del año y varía en el intervalo $[0,364]$ y j es el número del año correspondiente, variando en $[1,24]$. El número t_{ij} indica la media aritmética de las temperaturas máxima y mínima del día i del año j .

La Tabla n.º 1 refleja los resultados iniciales obtenidos a partir del conjunto (t_{ij}) . En las columnas segunda y tercera, aparecen la media \bar{t}_i , y la desviación típica s_i , definidas por las fórmulas

$$\bar{t}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N t_{ij}, \quad i = 0, 1, \dots, 364$$

$$s_i = \left(\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (t_{ij} - \bar{t}_i)^2 \right)^{1/2}, \quad i = 0, 1, \dots, 364$$

siendo N el número de años en los que se dispone de datos.

En las columnas quinta, sexta y séptima, se facilitan respectivamente, el máximo, mínimo y recorrido de las temperaturas medias en el día, i , de los años, $1, 2, \dots, N$.

Con objeto de reducir los errores aleatorios que aparecen en la determinación de los números \bar{t}_i , procedemos a su alisamiento siguiendo la técnica descrita por Berezín y Zhidkov (2), que consiste en determinar, por el método de mínimos cuadrados, el polinomio de mejor aproximación a un conjunto de $2n+1$ puntos consecutivos cuyas abscisas están igualmente espaciadas ($x_{i-n}, \dots, x_i, \dots, x_{i+n}$). Siendo $P(x)$ el polinomio anterior, el alisamiento consiste en la substitución del número \bar{t}_i por $P(x_i)$.

Se ha utilizado la fórmula

$$P(x_i) = \frac{1}{35} (-3\bar{t}_{i-2} + 12\bar{t}_{i-1} + 17\bar{t}_i + 12\bar{t}_{i+1} - 3\bar{t}_{i+2})$$

que corresponde al caso de un polinomio de tercer grado que se ajusta a un conjunto de cinco puntos.

Los resultados del alisamiento están expuestos en la cuarta columna de la Tabla n.º 1.

Por razones de brevedad, llamaremos y_i , a las temperaturas medias alisadas $P(x_i)$.

TABLA N° 1

Día	\bar{t}_i	s_i	y_i	max. t_i	min. t_i	Recorrido
0	8,8	2,1	9,2	12,5	5,2	7,3
1	10,1	2,6	9,9	14,0	4,4	9,6
2	10,6	3,1	10,3	16,3	3,1	13,2
3	9,5	3,0	9,8	15,3	3,8	11,5
4	9,4	2,8	9,3	15,3	4,0	11,3
5	9,5	2,9	9,6	16,0	4,5	11,5
6	9,8	3,0	9,7	16,3	5,1	11,2
7	9,4	2,7	9,2	16,2	5,4	10,8
8	8,6	2,4	9,2	13,0	5,2	7,8
9	10,0	2,4	9,5	13,8	4,9	8,9
10	9,6	2,4	9,8	14,4	6,0	8,4
11	9,7	2,7	9,8	14,0	4,3	9,7
12	9,9	2,3	9,6	14,8	2,8	12,0
13	8,9	2,9	9,1	15,5	2,0	13,5
14	8,7	3,3	8,6	17,3	3,7	13,6
15	8,8	3,8	8,9	16,5	2,3	14,2
16	9,4	3,3	9,3	15,5	1,7	13,8
17	9,7	4,2	9,8	21,5	-0,8	22,3
18	10,1	3,8	10,0	19,0	-0,3	19,3
19	10,0	3,1	10,1	16,7	4,6	12,1
20	10,1	3,5	10,2	17,6	4,3	13,3
21	10,3	3,2	10,2	19,3	3,3	16,0
22	9,9	3,0	10,0	18,7	5,4	13,3
23	9,8	2,3	9,8	15,1	4,4	10,7
24	9,9	2,8	10,1	14,8	2,6	12,2
25	10,6	2,8	10,2	16,3	3,7	12,6
26	9,8	2,8	10,1	16,1	2,6	13,5
27	10,0	2,5	9,8	15,4	5,2	10,2
28	9,7	2,5	9,8	16,3	4,0	12,3
29	9,7	2,5	9,7	13,6	4,9	8,7
30	9,8	2,7	9,7	13,9	5,0	8,9

TABLA N.º1 (Continuación)

Día	\bar{t}_i	s_i	y_i	max. t_i	min. t_i	Recorrido
31	9,8	3,3	9,9	15,0	0,9	14,1
32	10,1	3,4	10,0	19,1	3,0	16,1
33	10,1	3,5	10,2	16,4	1,2	15,2
34	10,2	3,3	10,1	15,5	1,6	13,9
35	10,0	3,4	10,1	16,0	1,8	14,2
36	10,4	3,4	10,4	15,8	4,2	11,6
37	10,9	3,3	10,9	17,3	5,2	12,1
38	11,3	2,8	11,3	16,4	5,2	11,2
39	11,4	3,1	11,4	18,2	6,0	12,2
40	11,3	3,5	11,2	19,2	4,2	15,0
41	11,0	3,5	11,1	16,9	4,0	12,9
42	11,1	3,3	11,1	15,5	0,7	14,8
43	11,4	3,2	11,3	17,0	3,0	14,0
44	11,2	3,3	11,2	16,2	5,1	11,1
45	10,9	3,2	11,1	18,4	3,7	14,7
46	11,4	3,2	11,3	17,9	5,9	12,0
47	11,5	3,2	11,4	17,5	5,3	12,2
48	11,2	3,1	11,3	16,7	4,3	12,4
49	11,1	4,0	10,9	17,5	1,2	16,3
50	10,4	3,4	10,8	19,0	2,8	16,2
51	11,2	3,6	10,9	18,7	4,4	14,3
52	11,2	2,7	11,4	17,3	5,8	11,5
53	11,8	2,5	11,5	16,5	8,6	7,9
54	11,5	2,5	11,7	17,8	7,7	10,1
55	11,8	2,4	11,7	16,9	7,3	9,6
56	11,7	2,1	11,7	15,7	8,1	7,6
57	11,7	2,3	11,7	18,1	8,8	9,3
58	11,9	2,1	11,9	15,6	8,7	6,9
59	12,0	2,5	11,8	17,3	7,5	9,8
60	11,4	2,2	11,5	16,2	6,9	9,3
61	11,4	2,7	11,6	17,2	6,7	10,5
62	12,1	3,1	11,9	16,8	5,8	11,0

TABLA N°1 (Continuación)

Día	\bar{t}_i	s_i	y_i	max. t_i	min. t_i	Recorrido
63	11,8	2,9	11,9	16,5	6,8	9,7
64	11,7	2,9	11,7	17,2	6,3	10,9
65	11,7	2,5	11,8	17,0	8,5	8,5
66	12,0	2,8	11,8	16,5	6,6	9,9
67	11,7	3,3	11,9	17,2	5,3	11,9
68	12,2	3,2	12,0	18,2	6,3	11,9
69	12,1	2,9	12,2	16,7	3,7	13,0
70	12,3	1,8	12,4	15,2	8,3	6,9
71	12,9	2,2	12,6	17,6	8,6	9,0
72	12,5	2,6	12,9	18,1	8,5	9,6
73	13,5	2,9	13,2	20,8	8,8	12,0
74	13,7	2,7	13,8	19,3	8,7	10,6
75	14,1	2,6	14,1	19,7	9,0	10,7
76	14,4	2,4	14,4	19,0	10,7	8,3
77	14,6	2,7	14,5	19,4	9,4	10,0
78	14,4	2,7	14,7	19,6	10,2	9,4
79	15,1	2,8	14,8	21,5	8,0	13,5
80	14,5	2,8	14,7	19,8	8,9	10,9
81	14,4	3,0	14,3	21,3	9,5	11,8
82	14,0	3,6	14,1	21,9	8,7	13,2
83	14,4	2,8	14,3	20,5	9,0	11,5
84	14,1	2,5	14,2	18,2	10,6	7,6
85	15,1	2,0	15,0	19,8	10,9	8,9
86	15,5	1,9	15,3	19,0	11,9	7,1
87	14,9	1,8	15,1	17,9	11,3	6,6
88	14,8	2,2	14,8	19,5	11,5	8,0
89	14,7	2,4	14,7	18,5	10,5	8,0
90	14,6	2,5	14,7	20,8	10,7	10,1
91	14,9	2,4	14,8	18,4	10,2	8,2
92	14,7	2,3	14,8	19,5	11,9	7,6

TABLA N°1 (Continuación)

Día	\bar{t}_i	s_i	y_i	max. t_i	min. t_i	Recorrido
93	14,6	1,9	14,6	18,1	10,1	8,0
94	14,6	2,1	14,6	17,9	9,2	8,7
95	14,6	2,7	14,5	19,2	10,1	9,1
96	14,4	2,9	14,5	21,1	6,8	14,3
97	14,5	2,1	14,5	19,2	10,9	8,3
98	15,8	2,8	14,8	20,2	11,2	9,0
99	15,0	2,8	15,0	20,8	10,4	10,4
100	15,0	2,7	15,0	19,9	11,1	8,8
101	14,9	3,1	14,8	23,4	9,7	13,7
102	14,6	2,9	14,9	19,9	5,9	14,0
103	15,4	2,7	15,2	20,3	8,6	11,7
104	15,5	3,1	15,6	24,5	10,3	14,2
105	15,5	2,4	15,4	20,7	11,6	9,1
106	15,3	2,0	15,6	19,2	10,8	8,4
107	16,1	2,3	15,8	19,5	11,9	7,6
108	15,9	2,6	16,0	19,7	9,5	10,2
109	15,9	2,4	15,9	21,7	11,9	9,8
110	16,0	3,0	16,1	23,7	11,1	12,6
111	16,6	3,2	16,5	25,7	11,9	13,8
112	16,5	2,4	16,5	22,2	12,2	10,0
113	16,1	2,4	16,2	22,2	12,0	10,2
114	16,2	2,3	16,2	21,6	12,4	9,2
115	16,4	1,9	16,3	20,8	13,9	6,9
116	16,3	2,0	16,4	20,0	13,0	7,0
117	16,3	2,6	16,2	22,7	10,7	12,0
118	16,0	2,7	16,3	22,3	11,2	11,1
119	16,7	2,2	16,5	20,6	12,2	8,4
120	16,6	1,8	16,7	20,5	13,5	7,0
121	16,7	2,8	16,7	23,5	12,4	11,1
122	16,8	3,2	16,8	24,6	12,3	12,3
123	17,1	3,2	17,3	22,2	12,3	9,9
124	18,2	3,6	18,0	23,6	13,5	10,1

TABLA N°1 (Continuación)

Día	\bar{t}_i	s_i	y_i	max. t_i	min. t_i	Recorrido
125	18,4	2,9	18,3	23,8	13,8	10,0
126	17,8	2,5	17,9	23,0	14,6	8,4
127	17,9	2,5	18,1	23,4	13,9	9,5
128	18,9	2,9	18,6	25,9	12,9	13,0
129	18,7	2,6	18,8	23,0	11,5	11,5
130	18,5	3,2	18,4	23,3	10,4	12,9
131	18,3	2,2	18,5	22,2	14,5	7,7
132	18,8	2,2	18,6	22,6	14,4	8,2
133	18,9	2,1	19,1	23,4	13,8	9,6
134	19,5	2,6	19,3	23,9	13,3	10,6
135	19,4	3,1	19,4	29,0	15,3	13,7
136	19,2	2,8	19,2	25,2	15,3	9,9
137	19,0	2,8	19,1	26,2	15,3	10,9
138	19,3	2,0	19,2	23,6	16,1	7,5
139	19,5	2,1	19,5	24,7	16,2	8,5
140	19,7	2,0	19,7	24,0	16,5	7,5
141	20,1	1,9	20,1	25,8	16,8	9,0
142	20,4	2,0	20,2	24,2	16,5	7,7
143	19,9	2,2	20,2	23,9	16,3	7,6
144	20,3	2,4	20,0	23,8	16,2	7,6
145	19,8	2,1	20,0	23,5	15,4	8,1
146	20,2	1,8	20,2	23,8	16,7	7,1
147	20,8	2,4	20,7	24,7	16,2	8,5
148	20,9	2,2	20,8	24,6	16,4	8,2
149	20,6	1,9	20,7	23,7	17,8	5,9
150	20,6	2,1	20,5	25,5	17,8	7,7
151	20,6	1,6	20,8	23,6	18,2	5,4
152	21,0	1,7	20,7	23,4	18,3	5,1
153	20,4	2,2	20,7	26,0	16,3	9,7
154	21,1	2,1	21,1	24,6	15,1	9,5
155	21,7	1,5	21,5	25,6	18,1	7,5

TABLA N°1 (Continuación)

Día	\bar{t}_i	s_i	Y_i	max. t_i	min. t_i	Recorrido
156	21,2	1,8	21,4	24,9	16,6	8,3
157	21,4	2,1	21,4	25,9	16,7	9,2
158	21,8	2,3	21,8	27,2	17,0	10,2
159	22,1	1,7	22,1	25,9	18,3	7,6
160	22,1	2,0	22,0	25,4	16,8	8,6
161	21,7	2,2	21,8	25,3	16,4	8,9
162	21,9	2,1	22,0	25,5	17,6	7,9
163	22,6	2,2	22,4	26,6	18,7	7,9
164	22,3	2,7	22,3	26,6	17,2	9,4
165	22,1	2,2	22,-2	25,3	17,3	8,0
166	22,6	1,9	22,6	26,5	19,2	7,3
167	23,2	2,4	23,2	28,6	17,7	10,9
168	23,4	2,4	23,2	27,3	17,0	10,3
169	23,0	1,7	23,3	25,8	18,3	7,5
170	23,7	1,5	23,6	26,0	20,7	5,3
171	24,1	2,2	24,1	29,5	19,4	10,1
172	24,2	2,4	24,1	29,5	19,9	9,6
173	23,9	2,1	24,0	27,2	18,3	8,9
174	24,1	1,9	24,0	26,7	18,1	8,6
175	24,1	1,2	24,3	25,9	20,8	5,1
176	24,6	1,7	24,5	28,1	21,4	6,7
177	24,5	1,9	24,4	27,5	21,8	5,7
178	24,1	1,6	24,4	26,9	21,6	5,3
179	24,9	2,2	24,6	31,4	20,9	10,5
180	24,6	1,5	24,8	27,5	21,2	6,3
181	24,9	1,8	24,7	28,2	21,2	7,0
182	24,7	1,6	24,8	27,6	21,7	5,9
183	24,8	2,5	24,8	29,2	20,0	9,2
184	25,1	2,2	25,1	29,7	20,5	9,2
185	25,2	1,8	25,2	29,0	21,1	7,9
186	25,2	1,7	25,2	28,5	22,1	6,4

TABLA N°1 (Continuación)

Día	\bar{t}_w	s_i	y_i	max. t_i	min. t_i	Recorrido
187	25,1	1,7	25,0	27,9	21,1	6,8
188	25,1	1,8	25,4	29,4	21,1	8,3
189	26,3	1,9	25,9	30,2	21,2	9,0
190	25,8	2,3	26,0	30,7	20,8	9,9
191	25,9	1,7	25,9	30,2	22,8	7,4
192	26,1	2,2	26,1	30,5	20,0	10,5
193	26,2	2,5	26,2	31,5	22,2	9,3
194	26,3	1,8	26,3	29,4	21,8	7,6
195	26,1	1,5	26,1	31,0	23,0	8,0
196	25,7	1,5	25,7	29,1	22,7	6,4
197	25,5	1,2	25,7	27,4	22,2	5,2
198	26,2	1,8	26,0	29,6	21,0	8,6
199	26,1	,17	26,1	29,3	22,6	6,7
200	26,0	1,4	26,1	29,7	23,1	6,6
201	26,2	2,0	26,1	31,4	22,7	8,7
202	26,1	1,8	26,2	31,6	23,5	8,1
203	26,1	1,8	26,0	30,2	22,5	7,7
204	26,0	1,5	26,2	28,5	22,5	6,0
205	26,5	1,8	26,3	30,9	21,8	9,1
206	26,3	1,4	26,5	29,5	22,8	6,7
207	26,8	1,2	26,6	28,7	24,3	4,4
208	26,7	1,4	26,8	28,9	22,8	6,1
209	26,9	1,3	26,8	29,6	24,3	5,3
210	26,6	1,1	26,7	28,0	24,3	4,7
211	26,6	1,4	26,6	29,1	23,7	5,4
212	26,7	1,3	26,7	29,9	24,0	5,9
213	26,7	1,6	26,7	30,4	24,4	6,0
214	26,9	1,8	27,0	30,0	23,3	6,7
215	27,2	1,8	27,1	31,1	25,0	6,1
216	26,8	1,6	26,7	30,1	23,3	6,8

TABLA N°1 (Continuación)

Día	\bar{t}_i	s_i	y_i	max. t_i	min. t_i	Recorrido
217	26,3	1,5	26,6	29,5	23,8	5,7
218	27,0	1,6	26,7	29,9	24,3	5,6
219	26,8	1,9	26,9	30,6	22,5	8,1
220	26,6	1,8	26,6	30,5	22,4	8,1
221	26,5	1,5	26,5	29,0	22,8	6,2
222	26,6	1,7	26,5	30,0	24,2	5,8
223	26,5	1,8	26,5	29,0	22,7	6,3
224	26,4	1,5	26,4	29,5	22,2	7,3
225	26,4	1,4	26,4	29,1	24,0	5,1
226	26,2	1,8	26,1	31,1	22,7	8,4
227	25,9	2,0	26,1	29,7	21,1	8,6
228	26,6	1,7	26,5	30,3	23,8	6,5
229	26,9	2,2	26,8	32,6	22,3	10,3
230	26,3	1,5	26,3	28,5	23,1	5,4
231	25,9	2,1	25,9	31,4	22,5	8,9
232	25,8	1,9	25,8	28,6	22,2	6,4
233	25,6	1,7	25,6	28,1	22,0	6,1
234	25,4	1,9	25,4	28,7	21,6	7,1
235	25,4	1,6	25,3	29,0	22,4	6,6
236	25,3	1,7	25,4	29,3	22,8	6,5
237	25,7	1,8	25,6	28,8	22,4	6,4
238	25,6	1,3	25,7	27,7	22,7	5,0
239	25,6	1,3	25,5	27,8	22,4	5,4
240	25,5	2,0	25,6	28,7	20,3	8,4
241	25,7	1,6	25,7	29,0	22,0	7,0
242	25,7	2,0	25,5	31,6	22,7	8,9
243	25,0	1,5	25,2	30,0	22,0	8,0
244	25,1	1,7	24,9	28,4	21,3	7,1
245	24,7	2,0	24,7	27,2	18,7	8,5
246	24,3	2,3	24,5	27,9	19,1	8,8
247	24,7	2,1	24,6	28,8	21,0	7,8

TABLA N°1 (Continuación)

Día	\bar{t}_i	s_i	Y_i	max. t_i	min. t_i	Recorrido
248	24,7	1,5	24,8	28,1	21,4	6,7
249	24,7	1,9	24,5	29,3	22,1	7,2
250	23,9	1,7	24,1	28,6	21,6	7,0
251	24,0	1,6	24,0	27,1	21,1	6,0
252	24,2	1,6	24,1	26,5	20,3	6,2
253	24,0	1,9	24,1	27,4	19,1	8,3
254	24,0	1,6	24,1	27,0	20,2	6,8
255	24,2	1,6	24,1	27,2	21,1	6,1
256	23,9	1,9	24,0	26,2	19,3	6,9
257	23,8	2,1	23,7	27,4	19,1	8,3
258	23,5	1,9	23,6	27,9	19,8	8,1
259	23,6	2,0	23,5	26,6	18,7	7,9
260	23,5	2,2	23,5	28,8	19,8	9,0
261	23,3	1,9	23,3	27,0	19,4	7,6
262	23,2	1,9	23,3	28,4	20,2	8,2
263	23,6	2,1	23,5	28,5	19,3	9,2
264	23,6	1,8	23,7	26,6	20,6	6,0
265	23,7	1,7	23,4	27,2	20,7	6,5
266	22,8	2,2	23,3	30,0	19,5	10,5
267	23,4	2,5	23,0	29,9	16,9	13,0
268	22,5	2,4	22,5	26,6	16,4	10,2
269	21,5	2,6	21,7	25,4	15,4	10,0
270	21,5	2,6	21,5	25,9	16,9	9,0
271	21,7	1,9	21,5	24,7	17,5	7,2
272	21,0	1,8	21,2	23,5	16,2	7,3
273	20,8	1,9	20,8	25,0	18,2	6,8
274	20,7	2,0	20,5	23,7	15,1	8,6
275	20,0	2,7	20,2	25,2	14,6	10,6
276	20,1	2,3	20,0	25,1	14,8	10,3
277	20,3	1,7	20,4	23,5	17,4	6,1
278	20,9	1,7	20,7	24,8	17,2	7,6

TABLA N°1 (Continuación)

Día	\bar{t}_i	s_i	y_i	max. t_i	min. t_i	Recorrido
279	20,5	1,8	20,7	23,8	17,0	6,8
280	20,5	2,2	20,4	25,5	16,3	9,2
281	20,4	2,4	20,4	25,1	15,2	9,8
282	20,4	1,9	20,2	23,7	16,9	6,8
283	19,8	2,2	19,9	23,8	15,3	8,5
284	19,5	2,1	19,4	25,5	15,8	9,7
285	19,1	2,1	19,2	22,1	15,0	7,9
286	19,1	1,7	19,1	22,2	15,9	6,3
287	19,1	1,5	19,1	21,3	16,1	5,2
288	19,1	1,9	19,0	22,3	16,0	6,3
289	18,9	1,6	19,1	21,9	15,0	6,9
290	19,2	1,9	18,9	24,2	14,7	9,5
291	18,3	2,1	18,4	21,4	13,5	7,9
292	17,9	2,9	18,0	22,3	13,0	9,3
293	18,0	2,1	17,9	21,0	13,6	7,4
294	17,7	1,9	17,8	21,6	13,6	8,0
295	17,8	2,2	17,8	23,1	13,3	9,8
296	18,0	2,2	18,0	23,9	13,5	10,4
297	17,8	2,6	17,7	23,5	13,1	10,4
298	17,2	2,6	17,4	21,1	11,8	9,3
299	17,3	2,2	17,2	21,5	13,3	8,2
300	16,9	2,5	16,7	20,9	12,5	8,4
301	15,8	2,3	16,1	19,7	12,1	7,6
302	15,9	2,3	15,7	19,6	11,3	8,3
303	15,8	2,5	16,0	20,5	10,2	10,3
304	16,4	2,3	16,0	20,0	10,0	10,0
305	15,7	2,9	16,1	20,8	9,8	11,0
306	16,2	2,0	15,8	19,1	11,8	7,3
307	15,5	2,6	15,8	21,2	12,3	8,9
308	15,7	1,7	15,6	19,2	12,2	7,0
309	15,7	2,4	15,6	20,0	11,8	8,2

TABLA N^o1 (Continuación)

Día	\bar{t}_i	s_i	Y_i	max. t_i	min. t_i	Recorrido
310	15,2	2,6	15,3	20,3	9,9	10,4
311	14,9	3,0	14,9	19,2	9,6	9,6
312	14,9	2,1	14,9	19,2	11,1	8,1
313	14,9	2,9	14,9	20,4	9,8	10,6
314	14,7	3,1	14,8	20,5	7,9	12,6
315	14,6	2,5	14,4	19,6	8,9	10,7
316	13,7	2,3	14,0	19,8	9,9	9,9
317	14,0	2,3	13,9	20,6	11,1	9,5
318	14,1	2,5	14,0	19,7	9,0	10,7
319	13,7	2,5	13,8	17,9	9,5	8,4
320	13,8	2,5	13,8	17,9	8,5	9,4
321	13,8	3,0	13,7	22,3	7,2	15,1
322	13,4	2,9	13,5	20,1	9,2	10,9
323	13,1	2,9	12,9	18,8	8,8	10,0
324	12,4	3,1	12,7	16,5	5,1	11,4
325	12,9	2,8	12,6	18,7	8,1	10,6
326	12,7	2,5	12,9	18,1	8,8	9,3
327	13,0	2,7	12,7	17,3	5,6	11,7
328	12,5	2,9	12,8	16,4	4,2	12,2
329	13,0	2,6	12,9	17,6	7,4	10,2
330	13,2	2,9	13,1	20,9	7,8	13,1
331	12,8	2,8	13,0	18,9	8,0	10,9
332	12,9	2,2	12,7	17,2	8,6	8,6
333	12,4	3,2	12,4	21,6	3,7	17,9
334	12,0	2,5	12,1	15,8	7,7	8,1
335	12,2	2,8	12,0	19,4	6,6	12,8
336	12,0	2,5	12,2	16,0	6,7	9,3
337	12,5	2,7	12,3	15,6	5,5	10,1
338	12,0	2,5	12,1	16,2	6,6	9,6
339	11,7	2,3	11,6	15,1	7,4	7,7
340	11,2	2,0	11,3	14,3	6,7	7,6

TABLA N°1 (Continuación)

Día	\bar{t}_i	s_i	Y_i	max. t_i	min. t_i	Recorrido
341	11,1	2,1	11,1	13,3	6,0	7,3
342	11,0	2,4	10,9	15,0	6,3	8,7
343	10,6	2,9	10,6	15,8	4,9	10,9
344	10,3	2,9	10,4	16,1	4,8	11,3
345	10,4	2,8	10,3	14,8	3,4	11,4
346	10,4	2,9	10,4	15,8	5,0	10,8
347	10,4	3,2	10,5	17,4	3,8	13,6
348	10,5	3,7	10,4	19,2	5,2	14,0
349	10,2	3,4	10,2	20,8	5,8	15,0
350	10,0	3,9	10,1	17,6	3,5	14,1
351	10,4	3,8	10,3	16,8	3,1	13,7
352	10,6	3,1	10,5	17,7	4,9	12,8
353	10,4	3,0	10,7	16,3	5,0	11,3
354	10,9	2,7	10,5	15,1	3,9	11,2
355	10,0	2,8	10,3	14,0	2,9	11,1
356	10,2	3,3	10,3	16,3	3,8	12,5
357	10,9	3,4	10,5	16,1	3,9	12,2
358	10,1	4,4	10,2	19,6	0,8	20,4
359	9,9	3,8	10,1	17,8	1,6	16,2
360	10,7	3,3	10,6	17,3	4,3	13,0
361	10,7	2,2	10,5	14,0	5,5	8,5
362	9,8	2,1	10,2	13,8	6,0	7,8
363	10,3	2,7	9,9	14,9	3,5	11,4
364	9,5	3,2	9,5	14,4	2,8	11,6

III. DETERMINACION DE LA FUNCION $t=f(x)$

Dadas las características naturales del fenómeno en estudio, parece deseable exigir a la función $t=f(x)$ el carácter de periodicidad, con un período de 365 días; por tanto pensamos en la utilización de funciones trigonométricas.

Berezín y Zhidkov (2), desarrollan la teoría de aproximación de funciones tabuladas, llegando en primer lugar a las siguientes conclusiones generales:

DEFINICION 1

Sea R un espacio funcional lineal normado, con una norma que representaremos por $\|f\|$ y \bar{R} un cierto subconjunto de R .

Dado $f \in R$, si existe un $\xi_0 \in \bar{R}$, tal que

$$\|f - \xi_0\| = \inf_{\xi \in \bar{R}} \|f - \xi\|$$

diremos que ξ_0 es la mejor aproximación de f , relativa al subconjunto R .

Siendo $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, un conjunto C de $(n+1)$ elementos linealmente independientes de R y \bar{R} el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de C se demuestra el siguiente

TEOREMA 1.—Existe una mejor aproximación de f relativa a \bar{R} .

DEFINICION 2

Un espacio lineal normado R , se dice estrictamente normado si y sólo si la igualdad

$$\|f_1 + f_2\| = \|f_1\| + \|f_2\|$$

se cumple para $f_2 = \alpha f_1$, con $\alpha \neq 0$.

TEOREMA 2.—Si el espacio R es estrictamente normado, la mejor aproximación es única.

Tomando como espacio R el de todas las funciones continuas en (a, b) con la norma usual

$$\|f\| = \sup_{x \in (a, b)} |f(x)|,$$

$\forall f \in R$, se puede probar que R es un espacio funcional lineal normado, pero no estrictamente normado. A pesar de ello, si el conjunto, $C = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un sistema de Chebyshev, es decir, si las $\alpha_i(x)$, están definidas en $[a, b]$ y ninguna de las combinaciones lineales $c_0\alpha_0 + c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n$ se anula para más de n valores distintos de x en $[a, b]$, se demuestra el siguiente

TEOREMA 3.—(de Kaar)

Sí y solo si el conjunto $C = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un sistema de Chebyshev, existe y es única la mejor aproximación para cualquier $f \in R$ relativa al conjunto \bar{R} .

En el caso concreto de funciones dadas en forma tabulada, los teoremas anteriores se aplican teniendo en cuenta las siguientes definiciones previas.

Supongamos dada una función $f(x)$, definida en (a, b) y de la que conocemos $(x_i, f(x_i))$, para $i = 0, 1, 2, \dots, n$, con $x_i \in (a, b)$. También será dado el conjunto

$$[\alpha_0(x), \alpha_1(x), \dots, \alpha_m(x)]$$

de $(m+1)$ funciones en (a, b) linealmente independientes, siendo $m \leq n$.

El conjunto de todas las funciones $f(x)$ definidas en (a, b) , se denotará por R .

En R se define la relación de equivalencia $f(x) \equiv g(x)$ si y sólo si $f(x_i) = g(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

La suma y producto de elementos de R se define en la forma habitual, siendo el elemento neutro para la suma la función "nula" $\theta(x)$ tal que

$$\theta(x_i) = 0 \text{ para } 0, 1, \dots, n.$$

Definiendo el producto escalar de elementos f y g de R como:

$$(f, g) = \sum_{i=0}^n f(x_i) g(x_i)$$

se comprueba que $\|f\| = [(f, f)]^{1/2}$ es una norma en R .

De lo anterior se deduce, que R es un espacio lineal normado sobre el cuerpo de los números reales, siendo además estrictamente normado.

Tomamos \bar{R} como el conjunto de todas las combinaciones lineales de las funciones $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \dots, \alpha_m(x)$ es fácil comprobar que es un subespacio lineal de dimensión $(m+1)$.

Por aplicación del Teorema 1, tenemos demostrada la existencia de una mejor aproximación para toda función $f \in R$ relativa a \bar{R} . Teniendo en cuenta que R es estrictamente normado y aplicando el Teorema 2, se deduce la unicidad de dicha mejor aproximación y, finalmente, por aplicación del Teorema 3, se llega a la conclusión, de que el conjunto $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ ha de ser un sistema de Chebyshev.

En la práctica, la determinación de la función de mejor aproximación

$$\phi_0(x) = \sum_{i=0}^m c_i^0 \alpha_i(x)$$

de la función $f(x) \in R$ se hará teniendo en cuenta que se ha de verificar

$$\begin{aligned} \|f - \phi_0\| &= \min_{\phi \in R} \|f - \phi\| = \min_{\phi \in R} \sqrt{(f - \phi, f - \phi)} = \min_{\phi \in R} \sqrt{\sum_{i=0}^n [f(x_i) - \phi(x_i)]^2} = \\ &= \min \sqrt{\sum_{i=0}^n \left\{ f(x_i) - \sum_{j=0}^m c_j \alpha_j(x_i) \right\}^2} \quad (2) \end{aligned}$$

donde el último miembro es el mínimo de una función de los (c_0, c_1, \dots, c_m) pues los $f(x_i)$ y $\alpha_j(x_i)$ son constantes.

El conjunto $(c_0^0, c_1^0, \dots, c_m^0)$ para el cual se alcanza el mínimo de la función anterior, es el que se obtiene en el ajuste por el método de mínimos cuadrados de una función $f(x)$.

El conjunto de funciones

$$\begin{aligned} &1, \cos \frac{2\pi}{n} x, \sin \frac{2\pi}{n} x, \cos 2 \cdot \frac{2\pi}{n} x, \sin 2 \cdot \frac{2\pi}{n} x, \dots, \\ &\cos p \frac{2\pi}{n} x, \sin p \frac{2\pi}{n} x \end{aligned}$$

constituye un sistema de Chebyshev en el intervalo $[0, n]$.

Tomando para \bar{R} el conjunto de todas las combinaciones lineales de las funciones del sistema anterior sabemos que existe un elemento de \bar{R} que es la mejor aproximación (relativa a \bar{R}) de cualquier función dada, f , de entre todas las definidas en $[0, n]$, siempre que $2p + 1 \leq n$.

Llamando

$$T_p(x) = a_0 + \sum_{i=1}^p \left(a_i \cos i \frac{2\pi x}{n} + b_i \operatorname{sen} i \frac{2\pi x}{n} \right)$$

la condición (2) nos permite obtener los coeficientes dados por las fórmulas

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad (3)$$

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cos k \frac{2\pi}{n} i \quad (4)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \operatorname{sen} k \frac{2\pi}{n} i \quad (5)$$

con $k = 1, 2, \dots, p$.

Las fórmulas (3), (4) y (5), llamadas fórmulas de Bessel, incidentalmente coinciden con las correspondientes que proporcionan los coeficientes de Fourier, si se aproximan las integrales que aparecen en el cálculo de estos últimos por el método del trapezoide.

Mediante el uso de las fórmulas (3), (4) y (5), tomando $n = 365$ y siendo $f(x_i) = y_i$ dadas en la Tabla N.º 1, se han calculado los coeficientes del polinomio trigonométrico $T_p(x)$, como se expone en la Tabla N.º 2, en la que se dan solamente los valores correspondientes para $p = 20$, pues por razones de brevedad (y ser innecesarias para lo que sigue) no se exponen los obtenidos para $p = 182$.

Para decidir sobre el grado p , del polinomio trigonométrico, se procedió a realizar los ensayos resumidos en la Tabla N.º 3.

A la vista de dichos resultados, la situación óptima se alcanza para $p = 4$, pero los valores para $p \leq 2$, no difieren considerablemente del anterior. Se calculó también el coeficiente de correlación, resultando ser para $1 \leq p \leq 10$, del orden de 0,9999, lo que no nos ayuda en la elección de p .

Las fórmulas (3), (4) y (5) se aplicaron también para el ajuste por un polinomio trigonométrico de las desviaciones típicas diarias con los resultados reseñados en la Tabla N.º 4.

En la Tabla N.º 5 damos los resultados correspondientes, análogos a los de la Tabla N.º 3, de los ensayos para la elección de p en este último ajuste. El óptimo se alcanza para $p = 5$. También se calcularon los correspondientes coeficientes de correlación, resultando ser todos ellos para $1 \leq p \leq 10$ del orden de 0,996.

Por tanto, los polinomios trigonométricos de mejor aproximación para la temperatura media diaria $t(x)$ y para la desviación típica $s(x)$ son:

$$t(x) = 17,59 - 7,41 \cos. 0,017 x - 3,43 \operatorname{sen.} 0,017 x - \\ - 0,29 \cos. 0,034 x + 1,10 \operatorname{sen.} 0,034 x - 0,17 \cos. 0,051 x - \\ - 0,12 \operatorname{sen.} 0,051 + 0,06 \cos. 0,069 x - 0,04 \operatorname{sen.} 0,069 x$$

$$s(x) = 2,38 + 0,56 \cos. 0,017 x + 0,32 \operatorname{sen.} 0,017 x + \\ + 0,06 \cos. 0,034 x - 0,08 \operatorname{sen.} 0,034 x + 0,06 \cos. 0,051 x + \\ + 0,06 \operatorname{sen.} 0,051 x - 0,04 \cos. 0,069 x + 0,01 \operatorname{sen.} 0,069 x - \\ - 0,08 \cos. 0,086 x - 0,04 \operatorname{sen.} 0,086 x$$

IV. BANDAS DE CONFIANZA

Una vez determinados los dos polinomios anteriores $t(x)$ y $s(x)$, podemos estimar para un día fijo x_0 , los valores $t(x_0)$ y $s(x_0)$, como temperatura media y desviación típica, respectivamente, asignables a dicho día. En el supuesto de que las temperaturas se distribuyan diariamente siguiendo una ley normal, sería posible la determinación de un intervalo de confianza, correspondiente a un nivel de probabilidad fijado. Al variar x_0 de 0 a 364, los extremos superior e inferior de los intervalos de confianza, describen dos líneas, de tal forma que la región limitada por ellas constituye la denominada banda de confianza.

En consecuencia, se ha procedido al contraste de la hipótesis de normalidad, mediante el siguiente test: Sea (t_{ij}) el conjunto de las temperaturas obtenidas en el día i -ésimo para los 24 años, e y_i , s_i , la temperatura media alisada y la desviación típica correspondientes.

1.º Hipótesis nula H_0 : los números (t_{ij}) , i fijo, proceden de una distribución normal $N(y_i, s_i)$;

2.º Nivel de significación $\alpha = 0,05$;

3.º Estadístico de contraste

$$\chi^2 = \frac{pN \sum_{k=1}^p (f_k - F_k)^2}{F_k}$$

TABLA N° 2

<u>K</u>	<u>a_k</u>	<u>b_k</u>
0	17,59	
1	-7,41	-3,43
2	-0,29	1,10
3	-0,17	-0,12
4	0,06	-0,04
5	0,02	-0,02
6	-0,08	0,09
7	-0,10	-0,08
8	0,11	-0,14
9	0,06	0,09
10	0,10	0,07
11	-0,01	0,01
12	-0,06	-0,10
13	0,04	-0,09
14	0,10	0,00
15	0,01	-0,08
16	-0,11	-0,10
17	0,03	-0,02
18	0,01	0,01
19	0,03	-0,02
20	-0,02	0,09



TABLA N.º 3

P.	$\max \left\{ y_i - T_p(x_i) \right\}^2$	$\sum_{i=0}^{364} \left(y_i - T_p(x_i) \right)^2$	$\chi^2 = \sum_{i=0}^{364} \frac{\left[y_i - T_p(x_i) \right]^2}{T_p(x_i)}$
1	0,97	1,57	0,15
2	0,49	0,97	0,10
3	0,38	0,84	0,09
4	0,34	0,84	0,09
5	0,37	0,85	0,09
6	0,37	0,84	0,09
7	0,52	0,92	0,10
8	0,43	0,87	0,09
9	0,36	0,85	0,09
10	0,48	0,93	0,09

TABLA N°4

<u>K</u>	<u>a_k</u>	<u>b_k</u>
0	2,38	
1	0,56	0,32
2	0,06	-0,08
3	0,06	0,06
4	-0,04	0,01
5	-0,08	-0,04
6	0,04	-0,03
7	-0,02	-0,01
8	0,05	-0,10
9	0,00	-0,06
10	-0,04	0,01



TABLA N.º 5

K	$\max \left\{ s_i - S_P(x_i) \right\}^2$	$\sum_{i=0}^{364} \left\{ s_i - S_P(x_i) \right\}^2$	$X^2 = \sum_{i=0}^{364} \frac{\left\{ s_i - S_P(x_i) \right\}^2}{S_P(x_i)}$
1	0,71	0,88	0,30
2	0,80	1,02	0,34
3	0,91	1,21	0,39
4	0,83	1,08	0,36
5	0,69	0,85	0,29
6	0,75	0,94	0,32
7	0,72	0,89	0,30
8	0,81	0,99	0,33
9	0,81	0,99	0,33
10	0,75	0,92	0,31

donde las f_k y F_k tienen el siguiente significado:

Dividida la recta en los p intervalos A_1, \dots, A_p , siendo

$$A_1 = (-\infty, a_1), A_2 = [a_1, a_2), \dots, A_{p-1} = [a_{p-2}, a_{p-1}), A_p = [a_{p-1}, +\infty),$$

con $a_1 < a_2 < \dots < a_{p-1}$, llamamos f_k al número de elementos del conjunto (t_{ij}) , con i fijo, que pertenecen al intervalo A_k , mientras que F_k es la correspondiente frecuencia, calculada a partir de la curva normal $N(y_i, s_i)$.

4.º Si H_0 es cierta, la distribución del estadístico χ^2 es una χ^2 con $(p-3)$ grados de libertad, puesto que la distribución teórica se determina a partir de dos estadísticos de la muestra.

5.º Se acepta la hipótesis H_0 (al nivel de significación $\alpha = 0,05$) si

$$\chi^2 < \chi_{0,95}^2(p-3)$$

Para aplicación del test anteriormente propuesto, se tomó, aleatoriamente, una muestra de 20 días del año, obteniéndose los resultados de la Tabla N.º 6, en la que se observa que sólo se necesitan los valores teóricos de χ^2 , al 95 %, correspondientes a 2, 3, 4 y 6 grados de libertad, que son 5,99 - 7,81 - 9,49 - y 12,59 respectivamente. Comparando estos últimos valores con los obtenidos mediante el cálculo vemos que solamente para el correspondiente al día 69, no es aceptable la hipótesis H_0 al nivel 0,05; fácilmente se comprueba que sí lo es el 0,025.

Como consecuencia del test anterior, decidimos aceptar la hipótesis H_0 , por lo que los intervalos de confianza correspondientes al día i -ésimo, serán de la forma $(y_i - ks_i, y_i + ks_i)$. Los valores de k correspondientes a los niveles de probabilidad 0,9 y 0,99 son, respectivamente, $k_{0,9} = 1,6448$ y $k_{0,99} = 2,5758$.

Utilizando las funciones $t(x)$ y $s(x)$, determinadas anteriormente, precisaremos un intervalo de confianza, función de x y que en consecuencia, variará con continuidad.

Al variar x en $[0,364]$, los puntos $[x_i t(x) - k_{0,99} s(x)]$ y $[x_i t(x) + k_{0,99} s(x)]$ describen las fronteras inferior y superior, respectivamente, de la banda de confianza al 90 %. Análogamente tendríamos utilizando $k_{0,99}$, en lugar de $k_{0,9}$ la banda de confianza al 99 %.

Las ecuaciones de estas líneas son:

a) Banda de confianza al 90 %.

TABLA N°6

Día	Intervalo	Frec. teor. f_k	$\frac{a_{k-1} - y_i}{s_i}$	Frec. teor. F_k	$\chi^2 = \sum \frac{(f_k - F_k)^2}{F_k}$	Grados de libertad
17	Más de 17	1	1,74	0,98	2,40	3
	14-17	1	1,02	2,71		
	11-14	6	0,31	5,37		
	8-11	9	-0,40	6,65		
	5- 8	5	-1,12	5,14		
	Menos de 5	2		3,14		
38	Más de 16	1	1,68	1,10	0,92	4
	14-16	3	0,96	2,95		
	12-14	7	0,25	5,57		
	10-12	5	-0,46	6,62		
	8-10	5	-1,18	4,90		
	6- 8	2	-1,89	2,16		
	Menos de 6	1		0,70		
66	Más de 15	4	1,32	2,23	2,06	2
	13-15	6	0,52	5,01		
	11-13	6	-0,28	7,39		
	9-11	5	-1,08	6,00		
	Menos de 9	3		3,36		
69	Más de 15,5	2	1,17	2,90	8,96	3
	13,5-15,5	10	0,48	4,68		
	11,5-13,5	3	-0,21	6,41		
	9,5-11,5	4	-0,90	5,59		
	7,5-9,5	4	-1,59	3,07		
	Menos de 7,5	1		1,34		
71	Más de 16,5	1	1,64	1,22	1,37	2
	14,5-16,5	6	0,73	4,37		
	12,5-14,5	6	-0,18	8,11		
	10,5-12,5	8	-1,09	6,98		
	Menos de 10,5	3		3,31		

TABLA N°6 (Continuación).

Día	Intervalo	Frec. teor. F_k	$\frac{a_{k-1} - y_i}{s_i}$	Frec. teor. F_k	$\chi^2 = \sum \frac{(f_k - F_k)^2}{F_k}$	Grados de libertad
83	Más de 19	2	1,64	1,22	1,42	3
	17-19	2	0,93	3,00		
	15-17	6	0,21	5,78		
	13-15	6	0,50	6,58		
	11-13	6	1,21	4,70		
	Menos de 11	2		2,71		
84	Más de 17	3	1,16	2,95	2,72	2
	15-17	8	0,36	5,66		
	13-15	4	-0,44	7,46		
	11-13	6	-1,24	5,35		
	Menos de 11	3		2,56		
96	Más de 18	1	1,24	2,59	3,96	4
	16-18	6	0,55	4,41		
	14-16	8	-0,14	6,33		
	12-14	5	-0,83	5,78		
	10-12	2	-1,52	3,33		
	8-10	1	-2,21	1,20		
	Menos de 8	1		0,33		
100	Más de 19	3	1,48	1,66	2,05	2
	17-19	3	0,74	3,86		
	15-17	6	0,00	6,48		
	13-15	5	-0,74	6,48		
	Menos de 13	7		5,52		
123	Más de 21	5	1,22	2,69	6,05	3
	19-21	3	0,59	3,98		
	17-19	2	-0,03	5,61		
	15-17	6	-0,66	5,59		
	13-15	6	-1,28	3,72		
	Menos de 13	2		2,40		

TABLA N°6 (Continuación)

Día	Intervalo	Frec. teor. f_k	$\frac{a_{k-1} - y_i}{s_i}$	Frec. teor. F_k	$\chi^2 = \sum \frac{(f_k - F_k)^2}{F_k}$	Grados de libertad
145	Más de 23	1	1,52	1,49	1,47	6
	22-23	3	1,05	1,88		
	21-22	3	0,57	3,17		
	20-21	4	0,09	4,12		
	19-20	4	-0,38	4,23		
	18-19	3	-0,86	3,61		
	17-18	3	-1,33	2,16		
	16-17	1	-1,81	1,49		
	Menos de 16	1		0,83		
	147	Más de 24	4	1,33		
23-24		2	0,92	2,00		
22-23		1	0,50	2,99		
21-22		4	0,08	3,65		
20-21		3	-0,33	3,72		
19-20		4	-0,75	3,29		
18-19		1	-1,17	2,44		
17-18		3	-1,58	1,47		
Menos de 17		1		1,31		
148		Más de 24	2	1,41	1,84	2,18
	23-24	3	0,95	2,11		
	22-23	3	0,50	3,15		
	21-22	3	0,04	4,02		
	20-21	3	-0,41	4,02		
	19-20	3	-0,86	3,36		
	18-19	4	-1,32	2,35		
	17-18	1	-1,77	1,26		
	Menos de 17	1		0,87		

TABLA N°6 (Continuación)

Día	Intervalo	Frec. teor. f_k	$\frac{a_{k-1} - y_i}{s_i}$	Frec. teor. F_k	$\chi^2 = \sum \frac{(f_k - F_k)^2}{F_k}$	Grados de libertad
187	Más de 27	2	1,12	3,14	3,41	4
	26-27	7	0,53	4,03		
	25-26	4	-0,06	5,40		
	24-25	5	-0,65	5,23		
	23-24	4	-1,23	3,57		
	22-23	1	-1,82	1,80		
	Menos de 22	1		0,81		
225	Más de 29	1	1,86	0,71	2,08	3
	28-29	3	1,14	2,21		
	27-28	4	0,43	4,76		
	26-27	4	-0,29	6,44		
	25-26	7	-1,00	5,22		
	Menos de 25	4		3,66		
266	Más de 26	2	1,45	1,70	4,08	4
	25-26	2	1,00	1,95		
	24-25	1	0,54	3,13		
	23-24	7	0,09	3,88		
	22-23	4	-0,36	4,07		
	21-22	3	-0,82	3,51		
	Menos de 21	5		4,74		
300	Más de 20	4	1,24	2,48	10,03	6
	19-20	3	0,84	2,11		
	18-19	0	0,44	2,99		
	17-18	2	0,04	3,54		
	16-17	7	-0,36	3,61		
	15-16	1	-0,76	3,10		
	14-15	3	-1,16	2,32		
	13-14	2	-1,56	1,47		
	Menos de 13	1		1,35		

TABLA N°6 (Continuación)

Día	Intervalo	Frec. teor. f_k	$\frac{a_{k-1}-y_i}{s_i}$	Frec. teor. F_k	$\chi^2 = \sum \frac{(f_k - F_k)^2}{F_k}$	Grados de libertad
316	Más de 17,5	2	1,65	1,13	2,03	2
	15,5-17,5	3	0,78	3,89		
	13,5-15,5	6	-0,09	7,31		
	11,5-13,5	9	-0,96	6,78		
	Menos de 11,5	3		3,89		
347	Más de 15,5	1	1,59	1,29	1,62	4
	13,5-15,5	3	0,97	2,53		
	11,5-13,5	4	0,34	4,62		
	9,5-11,5	5	-0,28	5,59		
	7,5-9,5	7	-0,91	4,81		
	5,5-7,5	2	-1,53	2,71		
Menos de 5,5	1		1,45			
358	Más de 15	2	1,11	3,06	6,84	4
	13-15	4	0,66	2,81		
	11-13	5	0,20	3,82		
	9-11	1	-0,25	4,09		
	7-9	6	-0,70	3,65		
	5-7	4	-1,16	2,74		
Menos de 5	1		2,83			

Frontera superior:

$$t_1(x) = 21,51 - 6,48 \cos. 0,017 x - 2,90 \text{ sen. } 0,017 x - \\ - 0,20 \cos. 0,034 x + 0,97 \text{ sen. } 0,034 x - 0,08 \cos. 0,051 x - \\ - 0,03 \text{ sen. } 0,051 x - 0,01 \cos. 0,069 x - 0,01 \text{ sen. } 0,069 x +$$

Frontera inferior:

$$t_2(x) = 13,68 - 8,33 \cos. 0,017 x - 3,95 \text{ sen. } 0,017 x - \\ - 0,38 \cos. 0,034 x + 1,23 \text{ sen. } 0,034 x - 0,27 \cos. 0,051 x + \\ - 0,21 \text{ sen. } 0,051 x + 0,13 \cos. 0,069 x - 0,06 \text{ sen. } 0,069 x$$

b) Banda de confianza al 99 %

Frontera superior:

$$t_3(x) = 23,72 - 5,95 \cos. 0,017 x - 2,60 \text{ sen. } 0,017 x - \\ - 0,15 \cos. 0,034 x + 0,89 \text{ sen. } 0,034 x - 0,02 \cos. 0,051 x + \\ + 0,02 \text{ sen. } 0,051 x - 0,05 \cos. 0,069 x$$

Frontera inferior:

$$t_4(x) = 11,46 - 8,86 \cos. 0,017 x - 4,25 \text{ sen. } 0,017 x - \\ - 0,43 \cos. 0,034 x + 1,31 \text{ sen. } 0,034 x - \\ - 0,32 \cos. 0,051 x - 0,26 \text{ sen. } 0,051 x + \\ + 0,17 \cos. 0,069 x - 0,07 \text{ sen. } 0,069 x$$

En la gráfica N.º 1, se representan las líneas anteriores, así como la de la función $t(x)$.

V.—PROGRAMACION DE FECHAS DE PLANTACION

Una vez resueltos los problemas preliminares, no nos resta más que la resolución de la ecuación (1), que después de lo anteexpuesto y una vez efectuada la integración se reduce a

$$(17,59-k)a - 435,88 \text{ sen. } 0,017 a + 201,76 \cos. 0,017 a - 8,53 \text{ sen. } 0,034 a - 32,35 \cos. 0,034 a - 3,33 \text{ sen. } 0,051 a + 2,35 \cos. 0,051 a + 0,87 \text{ sen. } 0,069 a + 0,58 \cos. 0,069 a = (17,59-k)b - 435,88 \text{ sen. } 0,017 b + 201,76 \cos. 0,017 b - 8,53 \text{ sen. } 0,034 b - 32,35 \cos. 0,034 b - 3,33 \text{ sen. } 0,051 b + 2,35 \cos. 0,051 b + 0,87 \text{ sen. } 0,069 b + 0,58 \cos. 0,069 b - h \quad (6)$$

que es una ecuación, suma de una función trascendente y otra algebraica en la incógnita a y por tanto hemos de acudir a métodos aproximados para su resolución.

Se propone, debido a su simplicidad y a la poca precisión exigida a la solución, el método siguiente:

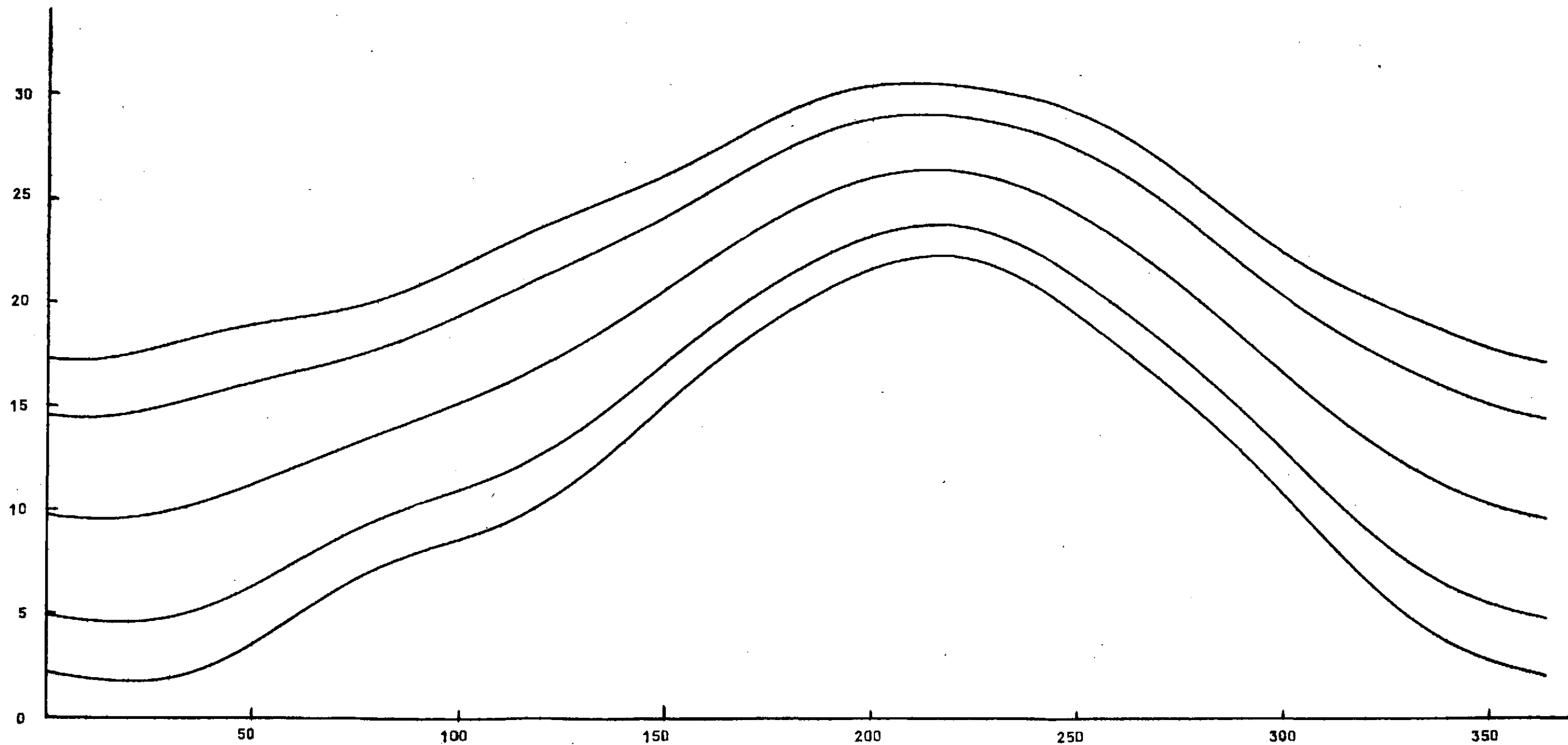
$$\begin{aligned} \text{Siendo } F_k(x) = & (17,59-k)x - 435,88 \text{ sen. } 0,017 x + \\ & + 201,76 \text{ cos. } 0,017 x - 8,53 \text{ sen. } 0,034 x - 32,35 \text{ cos. } \\ & 0,034 x - 3,33 \text{ sen. } 0,051 x + 2,35 \text{ cos. } 0,051 x + \\ & + 0,87 \text{ sen. } 0,069 x + 0,58 \text{ cos. } 0,069 x \end{aligned}$$

y una vez representada gráficamente, sobre el eje OX llevaremos b levantando una paralela al eje OY hasta cortar a la curva. Disminuida la ordenada así obtenida, $F_k(b)$, en h se obtiene el punto $(b, F_k(b) - h)$ por el que se traza una paralela al eje OX que corta a la curva en un punto de abscisa a , pudiendo verificarse que para este valor a , se satisface la ecuación (6).

La función $F_k(x)$ se ha representado en la gráfica N.º 2 para valores de k 0, 2, 4, 4,4, 6 y 8.

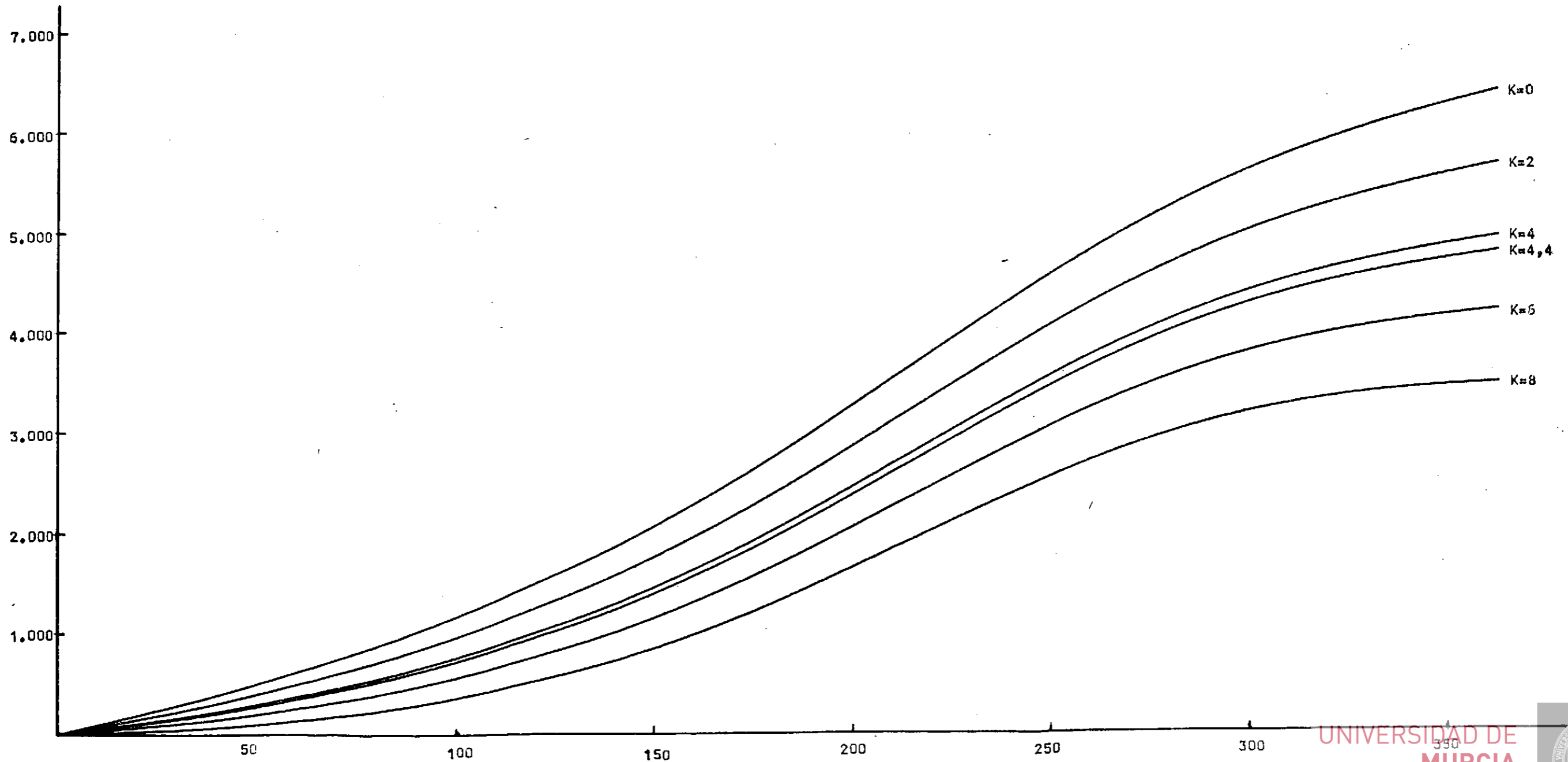
El valor 4,4 es característico del guisante, variedad a la que se aplica frecuentemente esta técnica. Para dicha planta los valores de h , oscilan entre 650 y 950 grados-día, según las diferentes variedades.

Gráfica nº1





Gráfica nº2



REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- (1) H. L. SEATON.—Scheduling Plantings and Predicting Harvest Maturities for Processing Vegetables.
Continental Can Co. Inc. Research Dept. (1955).
- (2) I. S. BEREZIN and N. P. ZHIDKOV.—Computing Methods, Vols. I.
Pergamon Press (1965).
- (3) C. E. P. BROOKS and CARRUTHERS.—Handbook of Statistical Methods in Meteorology.
Her Majesty's Stationnery Office (1953).

