



# UNIVERSIDAD DE MURCIA

## DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Sobre los Ceros de Polinomios de Dirichlet, en General,  
y los de las Sumas Parciales de la Función Zeta de Riemann,  
en Particular

**D. Eric Dubon**  
**2015**

À mes parents Roberte et Vincent,  
a mi mujer Ainhoa,  
à ma fille Adèle,  
à ma grand-mère Marcelle.

# Agradecimientos

Al contrario de lo que pone en su título una película francesa, puedo decir que la vie *n'est vraiment pas un long fleuve tranquille* (La vida *no* es un largo río tranquilo). Cuántos momentos difíciles se han puesto en el camino antes de poder acabar este trabajo. Sin embargo, tuve la suerte que, después de golpes duros, la vida me haya ofrecido buenos momentos que me permitieron aguantar y seguir adelante.

Además del apasionante trabajo que es el de escribir una tesis y de los momentos de alegría y dudas inherentes a la investigación en matemáticas, puedo decir que esta aventura me habrá permitido conocer a muchas personas, algunas de las cuales se han convertido en amigos.

En primer lugar, voy a citar a **Juan Matías Sepulcre Martínez**, con quien compartí largas discusiones en casi todos los temas, y con el cual espero poder seguir trabajando y escribir más artículos. Ha sido un apoyo para mí en innumerables ocasiones. Me gustaría, también, dar las gracias a algunos miembros del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Alicante. A **Lorena Segura Abad**, cuya sonrisa, alegría y sinceridad siempre me han acompañado y animado. A **José Carlos Navarro Climent**, accesible y dispuesto a ayudar. Siempre me acordaré de su famoso saludo: “Hola familia”. A **Ángel San Antolín Gil**, siempre dispuesto a aconsejar, ayudar y a proponer proyectos. A **Juan Manuel Conde Calero**, verdadera enciclopedia matemática, me acordaré de todas las reuniones e intercambios en los pasillos sobre la enseñanza y la historia de las matemáticas.

Voy a terminar mencionando a cuatro personas sin las cuales esta tesis no hubiera podido ser defendida. **Amparo Navarro Faure** y **José Miguel Sempere Ortells**, no sé cómo daros las gracias por todo el tiempo pasado y la energía dedicada a que algunas situaciones complicadas tengan un final feliz.

Concluiré con dos personas que han dado todo de sí mismos para que este proyecto pueda finalmente terminar y no puedo encontrar palabras lo suficientemente fuertes para darles las gracias por su tiempo, compromiso y apoyo. Se trata de **Salvador Segura Gomis**, director del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Alicante, que movió cielo y

tierra para desbloquear una situación que parecía desesperada; y mi director de tesis, **Ángel Ferrández Izquierdo**, quién tuvo confianza en mí y que accedió llevar a su fin este trabajo. Abrió las puertas del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia y, en particular, las del laboratorio de Geometría y Topología. Gracias por el apoyo a todos ustedes.

No puedo terminar estas líneas sin agradecer a mis padres **Roberte** y **Vincent**, que siempre me han apoyado; y a mi esposa y mi hija, **Ainhoa** y **Adèle**, que tuvieron que soportar las largas horas que pasé en mi despacho, en casa, frente al ordenador o mis “ausencias” mientras estaba pensando en cómo demostrar tal resultado.

# Índice general

<b>Summary and Conclusions</b>	<b>1</b>
<b>Introducción</b>	<b>6</b>
<b>1. Aproximaciones de la función zeta de Riemann.</b>	<b>11</b>
1.1. Introducción . . . . .	11
1.2. La función $H_n(z)$ como función entera de clase C. . . . .	12
1.3. Aproximaciones de la función zeta de Riemann. . . . .	25
1.3.1. Una familia de aproximaciones de la zeta de Riemann .	27
1.3.2. Una clase de funciones casi-periódicas conteniendo las sumas parciales de la zeta de Riemann. . . . .	30
<b>2. Densidad de los ceros de las sumas parciales de la zeta de Riemann.</b>	<b>32</b>
2.1. Introducción . . . . .	33
2.2. Densidad de los ceros simples de $\zeta_n(-z) = 1 + 2^z + \dots + n^z$ . . . . .	36
<b>3. Clases de equivalencia de Bohr de polinomios de Dirichlet.</b>	<b>49</b>
3.1. Introducción . . . . .	51
3.2. El teorema de equivalencia de Bohr. . . . .	52
3.3. Una propiedad topológica de los ceros. . . . .	59

3.3.1.	La $\mathcal{D}$ -propiedad. . . . .	59
3.3.2.	Algunos ejemplos de polinomios de Dirichlet con la $\mathcal{D}$ - propiedad. . . . .	64
3.4.	Clases de equivalencia. . . . .	71
3.4.1.	Principales propiedades . . . . .	71
3.4.2.	Una aplicación: las ecuaciones funcionales . . . . .	72
3.4.3.	Preguntas y conjetura. . . . .	73
<b>4.</b>	<b>Una aplicación a la teoría de las cuerdas fractales.</b>	<b>75</b>
4.1.	Introducción. . . . .	75
4.2.	Cuerdas fractales non-lattice y dimensiones complejas. . . . .	77
4.2.1.	Cuerda de Cantor y generalidades. . . . .	77
4.2.2.	Cuerdas auto-similares. Dimensiones complejas. . . . .	79
4.3.	Las proyecciones reales de los ceros de la función $L_n(z)$ . . . . .	83
4.3.1.	Primeras consideraciones. . . . .	83
4.3.2.	Los extremos de la banda crítica. . . . .	83
4.3.3.	Los casos $n = 2$ y $n = 3$ . . . . .	85
4.3.4.	Los casos $n = 4$ y $n = 5$ . . . . .	88
4.3.5.	El caso general. . . . .	92
4.4.	Aplicaciones a otras cuerdas non-lattice. . . . .	97
4.4.1.	La cuerda de oro. . . . .	97
4.4.2.	La cuerda de oro+ . . . . .	100
4.4.3.	La cuerda de Bessel. . . . .	105
<b>5.</b>	<b>Estabilidad de ecuaciones en diferencias de tipo neutro.</b>	<b>107</b>
5.1.	Introducción . . . . .	108
5.2.	La función $G_n(z)$ como función media-periódica y su relación con las ecuaciones diferenciales . . . . .	115
5.3.	Ecuaciones en diferencias . . . . .	118

5.4. Clases de equivalencia de ecuaciones en diferencias con retardo  
de tipo neutro. . . . . 120

**Bibliografía** . . . . . **124**

# Summary and Conclusions

I will begin this thesis with a citation of Paul Erdős [15] regarding Paul Túrán:

”Probably the most important, most enduring and most original of Turán’s results are his power sum method and its applications. [...] Their importance first of all is that they lead to interesting deep problems of a completely new type; they have quite unexpectedly surprising consequences in many branches of mathematics - differential equations, numerical algebra, and various branches of function theory.”

Indeed, we can say that the wide study on partial sums of Dirichlet series began with the work of Túrán about the Riemann’s hypothesis (1859).

Paul Turán found a relation between the partial sums  $\zeta_N(z) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^z}$  and the Riemann’s hypothesis. He said that the conjecture would be true if it would be impossible to find a zero of the partial sums in the open half-plane  $\operatorname{Re} z > 1 + \frac{c}{\sqrt{n}}$ , for some  $c > 0$  [64, th. I, p. 4].

For more precision, if we consider  $\lambda(n)$  the Liouville’s function defined as  $(-1)^{\Omega(n)}$ , where  $\Omega(n)$  is the number of prime factors of  $n$  taking into count the multiplicity and if we consider the Riemann’s zeta function  $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$  we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^z} = \frac{\zeta(2z)}{\zeta(z)},$$

for  $\operatorname{Re} z > 1$ .

Moreover, if we write  $S(x) = \sum_{n \leq x} \lambda(n)$ , Pólya, in [49], conjectured that



for all  $x \geq 2$ ,  $S(x) \leq 0$  and it was proven that if the Pólya's conjecture was true this could imply the Riemann's hypothesis.

In 1948, Túran made a similar conjecture: if the partial sums of the zeta function, i. e.,  $\zeta_N(z) = \sum_{n=1}^N n^{-z}$  don't have any zero with real part greater than 1, then  $T(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\lambda(n)}{n} \geq 0$ , for  $x > 0$ . Turán proved that if this result was also true, this could show that the Riemann's hypothesis is true. Nevertheless, in 1958 Haselgrove (see [24]) found a counter-example with  $x = 906150257$  such that  $S(x) = 1$ . This result implied the falseness of the Polyá's conjecture and in the same article he showed that  $T(x)$  is negative for infinite values of  $x$ .

Túran gave a more precise result when he conjectured that zeros of the partial sums, whose real parts are greater than  $1 + N^{-\frac{1}{2} + \epsilon}$ , do not exist. This result is false and it had been proved by H. Montgomery in 1983 (see [37]).

Paul Túran had high hopes in using the partial sums to prove the Riemann's hypothesis. Nevertheless, this work was a precursor of many results on the Dirichlet polynomials, especially those related to partial sums of the Riemann zeta function. Amongst the long list of mathematicians who worked on this, we can cite, for example, the articles of Robert Spira ([57], [58], [59]), who began a precise study on the zeros of the partial sums of the Riemann zeta function.

Like Túran in his famous article [64], Spira used the Bohr equivalence as a tool. This will be dealt with in the second chapter. He exposed, as a conjecture, in his article [58], the possibility that the real parts of the zeros of the partial sums of the Riemann zeta function could be dense in some intervals included in the critical strips of these Dirichlet polynomials (we will talk about this case in the second chapter).

A partial answer to this conjecture was published by C. Moreno in [46], where he showed the existence of density for the partial sums  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k^z}$ , where  $p_k$  are the  $n$  first prime numbers. In this article, Moreno, using a geometric principle, talks about density showing that we can find zeros, in the critical strip, close to each line that is perpendicular to the real axis.

Using this work as a basis, the paper [14] of our research group was accepted in 2012 in the RACSAM journal. In this article, we showed that for  $n$  prime, the partial sums  $\zeta_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^z}$  have simple zeros in their critical strips and that the real projections of such zeros are dense in some intervals which are situated in these critical strips.

During the research on the proof of such result, I found an article of Balazard and Velásquez-Castañón [3]. In the bibliography of this article, I discovered the thesis of Velásquez-Castañón ([67]) and it gave me the opportunity to develop an idea on *oscillation* of exponential polynomials. In fact, in this thesis I found articles of M. Lapidus *et al.* which deal with the relation between exponential polynomials and fractal strings.

My idea was to use the results to answer our initial problem. But it turned out that they had a similar problem to ours with their polynomials and they could not prove certain results that they expressed with conjectures ([30, p 66]).

When we finally showed the main result, I reconsidered my above idea in order to demonstrate these conjectures of Lapidus using the previous article [14].

In collaboration with J. M. Sepulcre, we finally published the answers to these conjectures in the Experimental Mathematics journal in 2014 (see [13]).

However, while I was working on the Lapidus conjectures, I found that several Dirichlet polynomials of a certain type shared the same property that is to have zeros near each vertical line included in their critical strips.

I wondered if there was a way to *transport* this topological property and if, in addition, one could state a method that would explicitly construct such Dirichlet polynomials. I realized that the equivalence theorem of Bohr on Dirichlet series could be the solution provided it could be applied to Dirichlet polynomials and working with vertical strips instead of half-planes.

So, this thesis is presented in the following five chapters.

1. In the first one we will introduce the function

$$H_n(z) = 1 + 2^{iz} + 3^{iz} + \dots + n^{iz}$$

as an approximation of the Riemann's zeta function and we will focus on one of its most important properties, which is to be an entire function of exponential type of  $\mathcal{C}$  class.

We will present, using the Levinson's notion of distribution, a demonstration of the density of the zeros of such functions. This proof will be different to the authors one (see cf [41]).

We will also give a formula of the distribution of zeros on the imaginary axis (if they exist).

Then, we will show some results on the number of zeros in rectangles of approximations of the Riemann's zeta function and we will show how the use of the function  $H_n(z)$  gives us a precise formula on the number of zeros in some specific rectangles.

2. In the second chapter we will prove that for some particular approximations of the Riemann's zeta functions, i. e., the partial sums, there is density in the real parts of its simple zeros in some intervals of their respective critical strips.
3. In the third chapter, using arithmetic and completely multiplicative functions, we offer a method to carry a topological property of the zeros of some exponential polynomials named Dirichlet polynomials. We will use the Bohr-equivalence theorem which is usually used for Dirichlet series. We will show that we can use it for Dirichlet polynomials too and we will obtain an explicit method to construct polynomials with the desired property.
4. In the fourth chapter we introduce the notion of nonlattice fractal strings and then we prove the conjectures of Michel Lapidus and Machiel van Frankenhuysen (see [30]), which have a relation with the density of the real parts of the zeros of Dirichlet polynomials associated to such strings.
5. In the last chapter we will present some results on the relation between Dirichlet polynomials and differential equations in differences of neutral type. We will prove a result on unstability for such equations and using the previous result we will create some equivalent classes of differential equations with unstability.

At the end of each chapter, we will present some open problems which could be further developed in future research.

# Introducción

Empezaré este trabajo citando una frase de Paul Erdős [15] respecto a Paul Túrán:

“Probably the most important, most enduring and most original of Turán’s results are his power sum method and its applications. [...] Their importance first of all is that they lead to interesting deep problems of a completely new type; they have quite unexpectedly surprising consequences in many branches of mathematics - differential equations, numerical algebra, and various branches of function theory.”

En efecto, se puede decir que el extenso estudio que se hizo sobre las sumas parciales de las series de Dirichlet tuvo su principio con el trabajo de Túrán sobre la conjetura que formuló B. Riemann en 1859 en [52] y que hoy se llama la hipótesis de Riemann.

Paul Túrán encontró una relación entre las sumas parciales  $\zeta_N(z) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^z}$  y la hipótesis de Riemann. Él enunció que la conjetura sería cierta si las sumas parciales no se anulan en el semiplano  $\operatorname{Re} z > 1 + \frac{c}{\sqrt{n}}$ , para un cierto  $c > 0$  [64, th. I, p. 4].

Para ser más preciso, si consideramos  $\lambda(n)$  la función de Liouville definida como  $(-1)^{\Omega(n)}$ , donde  $\Omega(n)$  es el número total de factores primos de  $n$  contados con multiplicidad, y si consideramos la función zeta de Riemann  $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ , entonces tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^z} = \frac{\zeta(2z)}{\zeta(z)},$$

para  $\operatorname{Re} z > 1$ .

Además, si ponemos  $S(x) = \sum_{n \leq x} \lambda(n)$ , Pólya, en [49], conjeturó que para todo  $x \geq 2$ ,  $S(x) \leq 0$ , y se demostró que la conjetura de Pólya, si fuera cierta, implicaría la hipótesis de Riemann.

En 1948 Túran hizo una conjetura similar: si las sumas parciales de la función zeta de Riemann no tienen ceros, con  $\operatorname{Re} z > 1$ , entonces  $T(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\lambda(n)}{n} \geq 0$ , para  $x > 0$ . Turán probó que este resultado, si fuera cierto, demostraría la hipótesis de Riemann. Sin embargo, en 1958, Haselgrove, en [24], encontró un contraejemplo con  $x = 906150257$ , para el cual  $S(x) = 1$ , lo que implicaba que la conjetura de Pólya era falsa y en ese mismo artículo demostró que  $T(x)$  es negativo para un número infinito de valores de  $x$ .

Además del resultado anterior, Túran tenía otro más preciso donde exponía que no existían ceros de las sumas parciales con partes reales mayores que  $1 + N^{-\frac{1}{2} + \epsilon}$ , con  $\epsilon > 0$ . Este resultado tampoco era cierto y lo demostró H. L. Montgomery en 1983 en [37].

Paul Túran puso mucha esperanza en el uso de las sumas parciales para demostrar la hipótesis de Riemann. Sin embargo, este trabajo fue precursor de muchos resultados sobre los polinomios de Dirichlet, en particular sobre las sumas parciales de la función zeta de Riemann  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ . En la larga lista de matemáticos que se dedicaron al tema, podemos citar, entre otros, a Robert Spira ([57], [58], [59]), quién empezó un estudio preciso de los ceros de las sumas parciales.

Como Túran en su famoso artículo [64], Spira utilizó, como herramienta, la equivalencia de Bohr, tema que se abordará en el segundo capítulo, y mencionó, como conjetura, en su artículo [58], la posibilidad de que las partes reales de los ceros de las sumas parciales de la función zeta de Riemann sean densas en intervalos incluidos en las bandas críticas de dichos polinomios de Dirichlet (tema que se tratará en el capítulo dos).

Una respuesta parcial a esta conjetura fue publicada por C. Moreno en [46], quien demuestra que hay densidad para las sumas parciales  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k^z}$ , donde los  $p_k$  son los  $n$  primeros números primos. En este artículo, Moreno, a través de un principio geométrico, trata el tema de la densidad diciendo que

se pueden encontrar ceros en la banda crítica, cerca de cada recta paralela al eje imaginario.

Basándose en este trabajo, se aceptó en 2012, en la RACSAM, el artículo [14], en el cual nuestro grupo de trabajo demostró que, para  $n$  primo, las sumas parciales  $\zeta_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^z}$  tienen dentro de sus bandas críticas ceros simples y que las proyecciones reales de estos ceros son densas en intervalos incluidos en esas bandas críticas.

Mientras investigaba y buscaba la prueba de este resultado, encontré un artículo de Balazard y Velásquez-Castañón[3]. Estudiando los resultados comunicados por los autores, descubrí la tesis de Velásquez-Castañón[67], lo cual me permitió poner de relieve una idea que yo tenía sobre la *oscilación* de polinomios exponenciales. En efecto, leyendo capítulos de dicha tesis, y su bibliografía, encontré artículos y libros escritos por M. Lapidus y sus coautores. Me di cuenta que se relacionaban polinomios exponenciales (en realidad un caso particular que son los polinomios de Dirichlet) con cuerdas fractales.

Mi idea, entonces, fue utilizar sus resultados para contestar a nuestro problema inicial. Pero resultó que ellos también tenían un problema similar al nuestro con sus polinomios y que no podían demostrar ciertos resultados que finalmente expresaron mediante conjeturas ([30, p. 66]).

Cuando por fin demostramos el resultado principal de [14], volví a considerar mi idea anterior con el propósito de demostrar estas conjeturas de Lapidus basándome en el artículo anterior.

Finalmente, con J. M. Sepulcre, lo conseguimos y lo publicamos en la revista *Experimental Mathematics* en 2014 [13]. Sin embargo, mientras estaba trabajando sobre las conjeturas de Lapidus, me di cuenta de que varios polinomios de Dirichlet de un cierto tipo, compartían la misma propiedad de tener ceros cerca de cada recta vertical incluida en sus bandas críticas.

Me pregunté, entonces, si había una manera de *transportar* esta propiedad topológica y si, además, se podría enunciar un método que permitiera construir de forma explícita tales polinomios de Dirichlet. Me di cuenta que el teorema de equivalencia de Bohr sobre las series de Dirichlet podría ser la solución a condición de poder aplicarlo a los polinomios de Dirichlet y de trabajar con bandas verticales en lugar de semiplanos.

Entonces, el trabajo que presento en esta tesis se reparte de la siguiente manera:

1. En el primer capítulo se introducirá la función

$$H_n(z) = 1 + 2^{iz} + 3^{iz} + \dots + n^{iz}$$

como aproximación de la función zeta de Riemann y se pondrá de relieve una de sus principales propiedades, que es la de ser una función entera de tipo exponencial de clase  $\mathcal{C}$ .

Se presentará, utilizando la noción de distribución de Levinson, una demostración de la densidad de ceros de este tipo de funciones distinta a la obtenida por los autores de [41].

Se dará también, con la condición de existencia de ceros sobre el eje imaginario, una fórmula sobre la distribución de dichos ceros. Después, se presentarán algunos resultados sobre el número de ceros dentro de rectángulos de aproximaciones de la función zeta de Riemann y se expondrá cómo el uso de la función  $H_n(z)$  permite obtener una fórmula precisa del número de ceros dentro de ciertos rectángulos.

2. En el segundo capítulo se demostrará que para unas ciertas aproximaciones de la zeta de Riemann, es decir, las sumas parciales, hay densidad de las partes reales de sus ceros simples dentro de intervalos incluidos en sus bandas críticas. Los resultados de este capítulo aparecen en [14].
3. En el tercer capítulo se propondrá, utilizando aritmética y funciones completamente multiplicativas, un método para transportar una propiedad topológica de ceros de ciertos polinomios exponenciales, llamados polinomios de Dirichlet. Se utilizará el teorema de equivalencia de Bohr, muy conocido para las series de Dirichlet. Se demostrará que se puede aplicar este resultado a los polinomios de Dirichlet, lo cual nos dará un método explícito para construir polinomios obteniendo la propiedad requerida y formando, al mismo tiempo, clases de equivalencia.
4. En el cuarto capítulo, después de haber introducido el tema de las cuerdas fractales no reticulares, se demostrarán conjeturas expuestas por Michel Lapidus y Machiel van Frankenhuysen en [30], relacionadas con la densidad de las partes reales de ceros de polinomios de Dirichlet asociados a dichas cuerdas. Se puede encontrar estos resultados en [13].



5. En el último capítulo se expondrán algunos resultados sobre la relación entre los polinomios de Dirichlet y las ecuaciones en diferencias de tipo neutro. Demostraremos un resultado de inestabilidad para dichas ecuaciones y, utilizando el resultado anterior, se propondrá la creación de clases de equivalencias de ecuaciones en diferencias inestables.

Al final de cada capítulo, se presentaran algunos temas abiertos que podrían ser desarrollados en el futuro.

# Capítulo 1

## Aproximaciones de la función zeta de Riemann.

**Sumario.** El objetivo de este capítulo es presentar la noción de aproximación de la función zeta de Riemann. Se da otra prueba de un resultado de densidad de [41] utilizando las funciones enteras de clase  $\mathcal{C}$  y la distribución de Levinson. Tomando como condición la existencia de ceros en el eje imaginario para las sumas parciales de la zeta de Riemann, proponemos un resultado de densidad de tales ceros.

---

**Abstract.** The aim of this chapter is to introduce the notion of approximation of the Riemann zeta function. We give a new proof of a result of density of [41] using entire functions of class  $\mathcal{C}$  and distribution of Levinson. By assuming the condition of the existence of zeros on the imaginary axis for partial sums of the Riemann zeta, we propose a density result of such zeros.

### 1.1. Introducción

En [7], Bombieri y Friedlander nos dicen que se puede aproximar la función zeta de Riemann por polinomios de Dirichlet y, en particular, por sus sumas parciales.

En este capítulo vamos a centrarnos en la función  $H_n(z) = 1 + 2^{iz} + \dots + n^{iz}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  y todo  $z \in \mathbb{C}$ , como aproximación de la zeta de Riemann. En efecto, si escribimos  $G_n(z) = \zeta_n(-z) = 1 + 2^z + 3^z + \dots + n^z$ , como se puede ver  $H_n(z) = G_n(iz)$  lo que significa que la función entera  $H_n(z)$  comparte muchas propiedades con la  $G_n(z)$  y, en particular, su banda crítica se obtiene haciendo una rotación de 90 grados de la banda crítica de  $G_n(z)$ .

La función  $H_n(z)$ , entonces, es una función entera de tipo exponencial, casi-periódica en el sentido de Bohr [6]. La podemos ver, también, como un polinomio exponencial y en particular un polinomio de Dirichlet. Todas estas caracterizaciones de la función  $H_n(z)$  nos darán informaciones que nos ayudarán a comprender mejor los ceros de la función  $G_n(z)$ . Desarrollaremos este punto en el segundo apartado.

Antes, vamos a poner de relieve una propiedad característica de la función  $H_n(z)$ : ser una función entera de clase  $\mathcal{C}$  (eso viene de la matemática Mary Cartwright, pero Levin en su libro [34] habla de funciones de tipo A).

En este capítulo, vamos a demostrar, con métodos distintos, un resultado ya obtenido por G. Mora y J. M. Sepulcre en [41]. En particular, utilizaremos el hecho que  $H_n(z)$  sea una función de clase  $\mathcal{C}$  y la noción de distribución de Levinson.

Luego hablaremos de las aproximaciones de la función zeta de Riemann y mostraremos, cómo, utilizando la función  $H_n(z)$ , se consiguió obtener una fórmula muy precisa para contar ceros dentro de ciertos rectángulos incluidos en la banda crítica de las sumas parciales de la zeta de Riemann.

## 1.2. La función $H_n(z)$ como función entera de clase $\mathcal{C}$ .

En esta sección hablaremos de la densidad asintótica de los ceros de las sumas parciales de la zeta de Riemann  $\zeta_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^z}$  y con este propósito vamos a centrar nuestro estudio en la función  $G_n(z) = \zeta_n(-z) = 1 + 2^z + \dots + n^z$  y más precisamente en la función  $H_n(z) = G_n(iz)$ . Llegaremos a un resultado sobre la densidad asintótica pasando por un camino distinto a lo que se puede encontrar en [41] y la demostración propuesta será también distinta.

Vamos a centrar nuestro estudio en la función  $H_n(z)$  y no presentaremos la amplia teoría de las funciones de tipo exponencial, la cual puede ser consultada, por ejemplo, en el libro de Boas [5]. Una gran parte de lo que se expondrá aquí está extraído del libro de Koosis [27].

**Definición 1** Una función entera  $f(z)$  es de tipo exponencial si se pueden encontrar dos constantes  $C$  y  $A$  tales que  $|f(z)| \leq Ce^{A|z|}$ , para todo complejo  $z$ .

La función  $H_n(z) = 1 + 2^{iz} + \dots + n^{iz}$  se puede escribir de la forma  $H_n(z) = \sum_{k=1}^n e^{i(\ln k)z}$ , es decir, como un polinomio exponencial. Es una función entera de tipo exponencial  $\ln n$  y admite una factorización de Hadamard de la forma

$$H_n(z) = ce^{az} z^n \prod_k \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\frac{z}{z_k}},$$

siendo  $\{z_k\}_k$  los posibles ceros de  $H_n(z)$ .

Una caracterización debida a Lindelöf nos dice que el producto representa a una función entera de tipo exponencial si, y solo si,  $\frac{n(r)}{r}$  y  $\sum_{|z_k| \leq r} \frac{1}{z_k}$  están acotadas cuando  $r$  tiende a infinito, siendo  $n(r)$  el número de  $z_k$  tales que  $|z_k| \leq r$ .

Muchas veces, para comprobar que una función entera es de tipo exponencial, se suelen utilizar resultados de Phragmén-Lindelöf y en particular el siguiente:

**Proposición 1** Si  $f(z)$  es analítica en el semi-plano complejo superior, continua en  $\mathbb{R}$  y en el semi-plano superior, tenemos que

$$|f(z)| \leq Ce^{a|z|}, \text{ con } C \geq 0 \text{ y } a \in \mathbb{R}.$$

Si además para cualquier  $x \in \mathbb{R}$  se verifica que  $|f(x)| \leq M$ , entonces

$$|f(z)| \leq Me^{a \operatorname{Im} z}, \text{ para cualquier } z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \operatorname{Im} z > 0.$$

Si notamos  $b = \limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |f(iy)|}{y}$ , obtenemos que  $|f(z)| \leq Me^{b \operatorname{Im} z}$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\operatorname{Im} z > 0$ .

Se puede demostrar de forma sencilla que para  $H_n(z)$  el valor de  $b$  es 0 y, como veremos en la próxima sección, se consiguió, con este resultado, obtener unas informaciones sobre la distribución de los ceros de  $H_n(z)$ , y por tanto de los de  $G_n(z)$ .

Un primer resultado para entender mejor la distribución de los ceros es el teorema de Levinson, que se puede encontrar en [27]. Primero presentaremos este resultado y daremos las primeras consecuencias sobre los ceros de  $H_n(z)$ . Luego veremos cómo, considerando el trabajo de Mary Cartwright [11], podemos sacar informaciones y un mejor conocimiento de tal distribución.

Sea, entonces,  $\Lambda = \{z_k\}$  tal que para todo  $k$ ,  $z_k \neq 0$  y  $0 < |z_1| < |z_2| < \dots$  y sea  $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C}; \alpha < \arg z < \beta\}$ , con  $\beta - \alpha < \pi$  un sector del plano complejo con su vértice en el origen de los ejes.

Sea  $n_\Lambda(r, \mathcal{S}) = \text{card}\{z_k \in \Lambda \cap \mathcal{S}; |z_k| \leq r\}$  teniendo en cuenta la multiplicidad.

**Definición 2** *Se dice que  $\Lambda$  es una distribución de Levinson de densidad  $A$  si se cumplen las tres condiciones siguientes:*

1.  $\sum_k \left| \text{Im}\left(\frac{1}{z_k}\right) \right| < \infty.$

2.  $\sum_{|z_k| \leq r} \text{Re}\left(\frac{1}{z_k}\right)$  tiene un límite finito cuando  $r$  tiende hasta el infinito.

3. a)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_\Lambda(r, \mathcal{S})}{r} = A$$

si  $\mathcal{S}$  contiene el eje de los reales positivos o el eje de los reales negativos.

- b)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_\Lambda(r, \mathcal{S})}{r} = 2A$$

si  $\mathcal{S}$  contiene todo el eje real.

- c)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_\Lambda(r, \mathcal{S})}{r} = 0$$

si el eje real está fuera de  $\mathcal{S}$ .

Enunciaremos ahora un resultado importante que se utilizará más tarde. Este teorema se revela útil en la práctica, en particular cuando se quiere demostrar que una función es de clase  $\mathcal{C}$ . La demostración se puede encontrar en [27, p. 7].

**Teorema 2** *Sea  $n_\Lambda(r)$  el número de  $z_k$  de módulo menor o igual que  $r$  que pertenecen a  $\Lambda = \{z_k\}$  teniendo en cuenta la multiplicidad. Entonces la Propiedad 1 de la definición 2 se deduce de las propiedades 2 y 3 y de*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r} = 2A.$$

Ahora tenemos el principal resultado de este apartado.

**Teorema 3** *La sucesión de los ceros de  $H_n(z)$  es una distribución de Levinson de densidad  $\frac{\ln n}{2\pi}$ .*

Para demostrarlo se necesita el lema siguiente, cuya prueba se puede encontrar en [27, p. 8].

**Lema 1 (Teorema de Levinson)** *Supongamos que la función entera*

$$f(z) = ce^{az} z^m \prod_k \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\frac{z}{z_k}}$$

*es de tipo exponencial y satisface las tres siguientes propiedades:*

1.  $\limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |f(iy)|}{y} + \limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |f(-iy)|}{y} = 2\pi A;$
2.  $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |f(x)|}{x} + \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |f(-x)|}{x} = 0;$
3.  $\int_1^R \frac{\log |f(x)f(-x)|}{x^2} dx$  tiene un límite finito cuando  $R \rightarrow \infty$ .

*Entonces la progresión  $\Lambda = (z_k)_k$  es una distribución de Levinson de densidad  $A$ .*

Demostramos ahora el Teorema 3.

**Prueba.** Sea  $H_n(z) = 1 + 2^{iz} + \dots + n^{iz}$ . Entonces  $H_n(iy) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^y}$  y obtenemos la desigualdad  $|H_n(iy)| \leq 1 + \frac{n-1}{2^y}$ . Si ahora tomamos el logaritmo, podemos escribir que  $\log |H_n(iy)| \leq \log(1 + \frac{n-1}{2^y})$  y eso implica que  $\limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |H_n(iy)|}{y} = 0$ . Considerando  $H_n(-iy) = 1 + 2^y + \dots + n^y$ , tenemos  $|H_n(-iy)| \leq n^{y+1}$ , lo que nos da  $\log |H_n(-iy)| \leq (y+1) \ln n$ .

Finalmente se obtiene que  $\limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |H_n(-iy)|}{y} = \ln n$ . Por eso ponemos  $A = \frac{\ln n}{2\pi}$ .

Por el momento podemos decir que  $H_n(z)$  cumple las propiedades siguientes:

1.  $\limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |H_n(iy)|}{y} + \limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |H_n(-iy)|}{y} = \ln n = 2\pi A$ ;
2.  $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |H_n(x)|}{x} + \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |H_n(-x)|}{x} = 0$ .

Ahora sea  $R > 0$ . Vamos a demostrar que la función cumple también el tercer punto del teorema de Levinson

$$\int_1^R \frac{\log |H_n(x)H_n(-x)|}{x^2} dx = \int_1^R \left( \frac{\log |H_n(x)|}{x^2} + \frac{\log |H_n(-x)|}{x^2} \right) dx \leq \int_1^R \frac{2 \ln n}{x^2} dx.$$

La integral de la parte derecha de la desigualdad converge cuando  $R$  tiende a infinito, lo que implica la convergencia de  $\int_1^R \frac{\log |H_n(x)H_n(-x)|}{x^2} dx$ . Ahora se aplica el Lema 1 y tenemos el resultado. ■

En [41] se obtuvo un resultado similar pero utilizando otros argumentos. En efecto, la función  $H_n(z)$  cumple una condición equivalente a la que está expuesta en el teorema de Levinson, que es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+ |H_n(x)|}{1+x^2} dx < \infty.$$

Como vamos a ver, esta condición es equivalente a ser de clase  $\mathcal{C}$ , pero antes de ver ese resultado vamos a recordar algunos resultados dados por A. Pfluger, que se pueden encontrar en [34, p. 139]. Empezamos con unas definiciones.

**Definición 3** Se dice que una función entera  $f(z)$  es de crecimiento completamente regular si existe el límite

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}},$$

para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ , donde  $\rho(r)$  es el orden de la función.

**Definición 4 (clase  $\mathcal{C}$ )** Se dice que una función entera  $f(z)$  es de clase  $\mathcal{C}$  si verifica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \operatorname{Im} \left( \frac{1}{z_n} \right) \right) < \infty,$$

donde los  $z_n$  son los ceros de la función  $f(z)$ .

**Definición 5** Se dice que una función entera  $f(z)$  es una función acotada en el eje real si se verifica que

$$|f(x)| \leq w(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

donde  $w(x) = O(e^{\epsilon|x|})$  y  $|x| \rightarrow \infty$ , para todo  $\epsilon > 0$ .

En el Capítulo V de su libro [34], Levin demuestra que una función entera de tipo exponencial acotada en el eje real con crecimiento completamente regular es una función de clase  $\mathcal{C}$ . Sin embargo, en su artículo [26], Katsnel'son demuestra que una función que pertenece a la clase de Cartwright no cumple de forma general este tipo de condición de crecimiento regular. No obstante, la función  $H_n(z)$  es una función de clase  $\mathcal{C}$  y cumple todos los requisitos.

En efecto, si tomamos  $w(x) = n$ ,  $|H_n(x)| = |1 + 2^{ix} + \dots + n^{ix}| \leq n$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , vemos que  $H_n(z)$  es una función acotada en el eje real.

Vamos ahora a exponer dos criterios [34, Th. 7, p. 243] y [34, Th. 11, p. 251] para que una función entera sea de clase  $\mathcal{C}$ .

**Teorema 4 (M. Cartwright [11])** Si  $f(z)$  es una función de tipo exponencial en el semi-plano  $\operatorname{Im} z \geq 0$ , y si la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log_+ |f(t)|}{1+t^2} dt$$

es convergente, entonces la función  $f(z)$  es de clase  $\mathcal{C}$  y de crecimiento completamente regular para  $0 < \arg z < \pi$ .



Notación:

$$\log_+(t) = \begin{cases} \ln t, & \text{si } t \leq 1 \\ 0, & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

**Teorema 5** *Si una función entera de tipo exponencial satisface una de las siguientes condiciones*

1. La integral  $\int_0^\infty \frac{\ln |f(x)f(-x)|}{1+x^2} dx$  existe;
2. La integral  $\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln |f(x)|}{1+x^2} dx$  existe;
3. La integral  $\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln_+ |f(x)|}{1+x^2} dx$  existe,

entonces  $f(z)$  es de clase  $\mathcal{C}$  y es de crecimiento completamente regular.

**Corolario 1** *La función  $H_n(z)$  es una función entera de clase  $\mathcal{C}$  y de crecimiento completamente regular.*

**Prueba.** La demostración es inmediata con el uso de los dos criterios anteriores y la prueba del Teorema 3. ■

Para exponer el resultado sobre la densidad de los ceros de la función  $H_n(z)$ , hemos que definir un nuevo concepto de densidad. Estas diferentes nociones se pueden encontrar en el libro de P. Koosis [27, p. 55]. Las expon-dremos aquí para favorecer la lectura.

Consideramos una sucesión  $\Lambda \subseteq (0, \infty)$  que no contiene punto de acumulación finito y notamos  $n_\Lambda(t)$  el número de puntos de  $\Lambda$  en  $[0, t]$  teniendo en cuenta la multiplicidad. Dado  $D > 0$ , ponemos

$$\Theta_D(\Lambda) := \left\{ t > 0; \frac{n_\Lambda(\tau) - n_\Lambda(t)}{\tau - t} > D \right\}, \text{ para al menos un } \tau > t.$$

El conjunto  $\Theta_D(\Lambda)$ , siendo un abierto, es la unión de algunos intervalos abiertos de la forma  $(a_k, b_k)$  con sus componentes incluidos en  $(0, \infty)$ .

Supongamos que para  $a_k \leq t < b_k + \epsilon$ , con  $\epsilon > 0$ , tenemos  $n_\Lambda(t) = n_\Lambda(a_k)$ . Si  $c = \frac{a_k + b_k}{2}$  entonces para un  $\tau > c$  se verifica que

$$\frac{n_\lambda(\tau) - n_\Lambda(c)}{\tau - c} > D.$$

Pero teniendo en cuenta la definición de  $c$ , tenemos también  $\tau \geq b_k + \epsilon$ , lo que implica que

$$\frac{n_\lambda(\tau) - n_\Lambda(t)}{\tau - t} > \frac{n_\lambda(\tau) - n_\Lambda(c)}{\tau - c} > D, \text{ para } c < t < b_k + \epsilon.$$

Eso implica que  $(a_k, b_k + \epsilon) \subseteq \Theta_D(\Lambda)$ , pero entonces  $(a_k, b_k)$  no sería un componente de  $\Theta_D(\Lambda)$ , lo que contradice la definición de  $\Theta_D(\Lambda)$ . En conclusión, eso implica que un intervalo  $(a_k, b_k]$  de longitud finita contiene, al menos, un punto de  $\Lambda$ .

Ahora, con el hecho de que  $\Lambda$  no contiene un punto de acumulación finito podemos decir que los intervalos  $(a_k, b_k]$  no se pueden acumular en una parte finita de  $(0, \infty)$ . Esto nos permite escribir los componentes  $(a_k, b_k)$  de  $\Theta_D(\Lambda)$  de forma que  $0 \leq a_0 < b_0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots$

En el caso que existan intervalos  $(a_k, b_k)$  de longitud finita tenemos la igualdad siguiente

$$n_\Lambda(b_k) - n_\Lambda(a_k) = D(b_k - a_k).$$

Vamos, ahora, definir la longitud de los conjuntos  $\Theta_D(\Lambda)$ .

**Definición 6** Si todas los componentes de  $\Theta_D(\Lambda)$  tienen una longitud finita definimos una medida de  $\Theta_D(\Lambda)$

$$\|\Theta_D(\Lambda)\| = \sum_{k \geq 1} \left( \frac{b_k - a_k}{a_k} \right)^2.$$

En el caso que uno de los componentes sea de longitud infinita ponemos  $\|\Theta_D(\Lambda)\| = \infty$ .

Una propiedad inmediata es que si  $D' > D$  tenemos  $\Theta_{D'}(\Lambda) \subseteq \Theta_D(\Lambda)$  y cada componente de  $\Theta_{D'}(\Lambda)$  está incluido en un componente de  $\Theta_D(\Lambda)$ . Entonces si  $\|\Theta_D(\Lambda)\| < \infty$  tenemos  $\|\Theta_{D'}(\Lambda)\| < \infty$ .

Dicho de otra manera, existe un valor  $D_0$  tal que para todo  $D > D_0$  tengamos  $\|\Theta_D(\Lambda)\| < \infty$  y para  $0 < D < D_0$  tenemos  $\|\Theta_D(\Lambda)\| = \infty$ . Así Beurling y Malliavin introdujeron la noción de densidad efectiva de  $\Lambda$ .

**Definición 7 (Densidad efectiva)** Sea  $\Lambda$  una sucesión de puntos de  $(0, \infty)$ . Si  $\Lambda$  tiene un punto de acumulación finito ponemos  $\tilde{D}_\Lambda = \infty$ ; en el caso contrario  $\tilde{D}_\Lambda = D_0$ , que hemos definido antes.

Notamos por  $\overline{D}_\Lambda = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t}$  la densidad superior ordinaria. Si  $D < \overline{D}_\Lambda$ ,  $\Theta_D(\Lambda) = (0, \infty)$  lo que implica que siempre tenemos  $\tilde{D}_\Lambda \geq \overline{D}_\Lambda$ .

Si suponemos que  $H_n(z) = 1 + 2^{iz} + \dots + n^{iz}$  tiene ceros sobre el eje real y si  $\Lambda$  es el conjunto de ceros reales que  $H_n(z)$  podría tener, entonces, teniendo en cuenta la multiplicidad de cada uno de estos ceros, se puede escribir:

**Teorema 6** Sea  $\tilde{D}_\Lambda$  la densidad efectiva asociada a  $H_n(z)$  entonces

$$\tilde{D}_\Lambda \leq \frac{\ln n}{2\pi}.$$

**Prueba.** Notaremos  $\Lambda_+ = \Lambda \cap (0, \infty)$  y  $\Lambda_- = (-\Lambda) \cap (0, \infty)$ . Como  $H_n(z) \neq 0$ , la sucesión  $\Lambda$  no puede tener un punto de acumulación finito lo que implica que  $\tilde{D}_\Lambda = \max\{\tilde{D}_{\Lambda_+}, \tilde{D}_{\Lambda_-}\}$ .

Sabemos que  $H_n(z)$  es una función de clase  $\mathcal{C}$  lo que nos da que la progresión de todos sus ceros es una distribución de Levinson de densidad  $\frac{\ln n}{2\pi}$ . Eso implica que  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{n_{\Lambda_+}(t)}{t} \leq \frac{\ln n}{2\pi}$ . Entonces, para todo  $D > \frac{\ln n}{2\pi}$ , todos los componentes  $(a_k, b_k)$  de  $\Theta_{D'}(\Lambda_+)$  son de longitud finita. Para  $k \geq 1$ , tenemos  $a_k > 0$  y cada intervalo  $(a_k, b_k]$  contiene  $n_{\Lambda_+}(b_k) - n_{\Lambda_+}(a_k) = D(b_k - a_k)$  puntos de  $\Lambda_+$ . Además, estos intervalos son disjuntos. Como sabemos que  $|\Theta_D(\Lambda)| < \infty$ , entonces  $|\Theta_D(\Lambda_+)| < \infty$ .

Si ahora sustituimos  $H_n(z)$  por  $H_n(-z)$  se prueba de la misma manera que  $|\Theta_D(\Lambda_-)| < \infty$  para  $D > \frac{\ln n}{2\pi}$ . Al final, tenemos  $\tilde{D}_{\Lambda_+} \leq \frac{\ln n}{2\pi}$  y  $\tilde{D}_{\Lambda_-} \leq \frac{\ln n}{2\pi}$  es decir  $\tilde{D}_\Lambda \leq \frac{\ln n}{2\pi}$  y es lo que queríamos. ■

Sabemos que  $G_2(z) = 1 + 2^z$  tiene todos sus ceros sobre el eje vertical, es decir, todos sus ceros son imaginarios. A partir de  $n > 2$  no sabemos si hay más ceros y cuantas sobre el eje vertical. Un primer resultado que podemos exponer en este apartado es el siguiente:

**Teorema 7** *Supongamos que  $G_n(z) = 1 + 2^z + \dots + n^z$  tiene ceros imaginarios. Sea  $D > \frac{\ln n}{2\pi}$  y supongamos que haya intervalos disjuntos y no vacíos  $(ia_k; ib_k]$ , con  $a_k > 0$ , tal que  $(ia_k; ib_k]$  contenga al menos  $D(b_k - a_k)$  ceros de  $G_n(z)$ . Entonces*

$$\sum_k \left( \frac{b_k - a_k}{a_k} \right)^2 < \infty$$

**Prueba.** Es una aplicación directa del teorema que se encuentra en el libro de Koosis [27, p. 70]. ■

Vamos a dar una información sobre los ceros de las sumas parciales de la función zeta de Riemann.

Sea  $\Lambda$  el conjunto de todos los ceros de  $H_n(z)$ . Para cada  $z_k \in \Lambda$  con  $\operatorname{Re} z_k \neq 0$  consideramos  $z'_k = \frac{1}{\operatorname{Re}(\frac{1}{z_k})}$  y definimos

$$\Lambda' = \{z'_k; z_k \in \Lambda \text{ y } \operatorname{Re} z_k \neq 0\}.$$

Vamos a dar un resultado clave para nuestra meta.

**Teorema 8** [27, p. 73] *Sea  $g(z) \not\equiv 0$  una función de la clase de Cartwright tal que*

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |g(iy)|}{y} + \limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |g(-iy)|}{y} = 2\pi A$$

*y sea  $\Lambda$  la progresión de los ceros (cada uno contado con su multiplicidad). Entonces  $\Lambda$  es una distribución de Levinson de densidad  $A$ . Para la progresión real  $\Lambda'$  asociada a  $g(z)$  tenemos*

$$\overline{D}_{\Lambda'} = A.$$

**Prueba.** La función  $g(z)$ , siendo una función de clase  $\mathcal{C}$ , cumple las condiciones del Lema 1, lo que implica que la primera conclusión del teorema es cierta. Nos queda la demostración de la igualdad  $\overline{D}_{\Lambda'} = A$ . Vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que  $g(0) = 1$ , porque, si no fuera el caso, bastaría sustituir  $g(z)$  por  $\frac{g(z)}{cz^m}$  en el razonamiento que vamos a exponer. Podemos, entonces, escribir

$$g(z) = e^{\alpha z} \prod_{z_k \in \Lambda} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\frac{z}{z_k}},$$

y, sabiendo que  $\Lambda$  es una distribución de Levinson, tenemos  $\sum_k |\operatorname{Im}(\frac{1}{z_k})| < \infty$ , lo que implica que podemos escribir también

$$g(z) = e^{\beta z} \prod_{z_k \in \Lambda} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z \operatorname{Re}(\frac{1}{z_k})}.$$

La progresión real  $\Lambda'$  es también una progresión de Levinson de densidad  $A$  cf [27, B.2, Chap. 1], lo que implica que la función entera

$$G(z) = e^{\beta z} \prod_{z'_k \in \Lambda'} \left(1 - \frac{z}{z'_k}\right) e^{\frac{z}{z'_k}}$$

es de tipo exponencial, y con el Lema 1 tenemos

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |G(iy)|}{y} + \limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |G(-iy)|}{y} = 2\pi A.$$

Consideramos  $\Lambda_0 = \{z_k \in \Lambda; \operatorname{Re} z_k = 0\}$  y  $\Lambda_1 = \Lambda \setminus \Lambda_0$ . Se tiene entonces

$$|g(x)| = e^{\operatorname{Re} \beta x} \prod_{z_k \in \Lambda_0} \left|1 - \frac{x}{z_k}\right| \prod_{z_k \in \Lambda_1} \left|1 - \frac{x}{z_k}\right| e^{x \operatorname{Re}(\frac{1}{z_k})}$$

para  $x \in \mathbb{R}$  y

$$|G(x)| = e^{\operatorname{Re} \beta x} \prod_{z_k \in \Lambda_1} \left|1 - \frac{x}{z'_k}\right| e^{x \operatorname{Re}(\frac{1}{z_k})}.$$

Así  $|1 - \frac{x}{z_k}| = \sqrt{1 + (\frac{x^2}{|z_k|^2})} \geq 1$  si  $z_k$  pertenece a  $\Lambda_0$  y se obtiene la desigualdad  $|1 - \frac{x}{z'_k}| \leq |1 - \frac{x}{z_k}|$  si  $z_k$  pertenece a  $\Lambda_1$ . Por tanto, para todo  $x$  real,  $|G(x)| \leq |g(x)|$  y si añadimos el hecho de que  $g(z)$  es una función de clase  $\mathcal{C}$  se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |G(x)|}{1+x^2} dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |g(x)|}{1+x^2} dx < \infty.$$

Podemos concluir que  $G(z)$  es también una función de clase  $\mathcal{C}$  y, siendo  $\Lambda'$  el conjunto de sus ceros, obtenemos que  $\overline{D}_{\Lambda'} = A$ . ■

**Teorema 9** *Para la progresión real  $\Lambda'$  asociada a  $H_n(z)$  tenemos:*

$$\overline{D}_{\Lambda'} = \frac{\ln n}{2\pi}.$$

Presentamos ahora el resultado sobre la distribución asintótica de los ceros de  $G_n(z) = 1 + 2^z + \dots + n^z$ , con su demostración, que se puede encontrar en [41].

De su definición,  $G_n(z) = \sum_{k=1}^n e^{z \ln k}$  pertenece a las siguientes familias de funciones: de las casi-periódicas introducidas por H. Bohr [6]; de las funciones enteras de tipo exponencial, cuyo estudio se puede encontrar en [5], [34]; y de las funciones exponenciales, a la familia de polinomios de Dirichet. Todas estas caras de esta función nos darán herramientas para entender mejor a  $G_n(z)$ .

En este apartado ya hemos visto cómo el hecho de ser una función entera de tipo exponencial de clase  $\mathcal{C}$  nos lleva unas informaciones sobre la distribución de los ceros. Vamos a exponer otro método para obtener dicho resultado.

Por ser una función entera de orden 1 y de tipo exponencial  $\sigma = \ln n$ , en [40] G. Mora demostró en que los ceros de  $G_n(z)$  pertenecen a una banda paralela al eje vertical llamada “banda crítica”. Para ser más preciso, casi todos los ceros de  $G_n(z)$  están repartidos en un entorno del eje imaginario. Daremos en el último capítulo de este trabajo más informaciones al respecto y las consecuencias que esto conlleva con relación a ecuaciones diferenciales.

Vamos a utilizar ahora el hecho que sea una función casi-periódica. En [41], G. Mora y J. M Sepulcre empezaron a estudiar la distribución asintótica de los ceros de las funciones  $G_n(z)$  en cada uno de sus intervalos críticos.

Consideremos  $H_n(z) = \sum_{k=1}^n e^{iz \ln(k)}$ . Por definición  $H_n(z) = G_n(iz)$  y entonces se obtienen los ceros de  $G_n(z)$  multiplicando los de  $H_n(z)$  por  $i$ . Eso implica que como  $G_n(z)$  tiene sus ceros en una banda crítica paralela al eje imaginario obtenemos por rotación de 90 grados que  $H_n(z)$  tiene su banda crítica paralela al eje de las abscisas. El próximo teorema nos da la existencia de densidad de los ceros de  $H_n(z)$  y luego obtenemos su valor.

**Teorema 10** [41, Th. 2] *Sea  $N_{H_n(z)}$  el número de ceros de  $H_n(z)$  en  $|z| < r$ . Entonces la densidad asociada a  $H_n(z)$ ,*

$$\Delta_{H_n(z)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_{H_n(r)}}{r}$$

*existe.*

Damos una versión un poco modificada de [41, th.3].

**Teorema 11** Si notamos por  $N_{H_n}(0, T)$  el número de ceros de  $H_n(z)$  dentro de la banda crítica acotada por las rectas  $y = 0$  E  $y = T$ , tenemos que

$$\Delta_{H_n}(z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_{H_n}(0, T)}{T} = \frac{\ln n}{2\pi}.$$

**Prueba.** En primer lugar, vamos a demostrar la existencia de la densidad de ceros. La función  $H_n(z)$  es una función entera de orden 1 y de tipo exponencial  $\sigma = \ln n$ , por tanto

$$\alpha = \liminf_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\log M_{H_n}(r)}{r} \right) \leq \ln n.$$

Hemos visto que para todo  $n$ ,  $|H_n(x)| \leq n$ , lo que implica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+ |H_n(x)|}{1+x^2} dx < \infty.$$

Aplicando el teorema de Pfluger [5, Th. 6.3.6] tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log |H_n(x)||}{1+x^2} dx < \infty.$$

Luego, por simetría, como  $H_n(-x) = \overline{H_n(x)} < \infty$ ,  $|H_n(x)|^2 = H_n(x)H_n(-x)$  obtenemos  $\int_0^{+\infty} \frac{\log |H_n(x) \cdot H_n(-x)|}{1+x^2} dx < \infty$ . Utilizando el hecho de que  $H_n(z)$  es de clase  $\mathcal{C}$ , el resultado anterior, junto con [[34], p. 246], nos da la existencia de la densidad.

Ahora consideramos  $y_1, y_2$  dos números reales tales que  $y_1 < 0 < y_2$  y que la banda  $S(y_1, y_2) = \{z \in \mathbb{C}; y_1 < \text{Im } z < y_2\}$  contenga a la banda crítica de  $H_n(z)$ . Vamos, entonces, a calcular la densidad de los ceros de  $H_n(z)$  contenidos en el rectángulo  $[0, T] \times [y_1, y_2]$ .

Si notamos por  $N_{H_n}(0, T, y_1, y_2)$  el número de ceros de  $H_n(z)$  en este rectángulo, hemos demostrado que  $\sigma(y_1, y_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_{H_n}(0, T, y_1, y_2)}{T}$  existe. El hecho de que la banda crítica de  $H_n(z)$  esté contenida en  $S(y_1, y_2)$  implica que  $\sigma(y_1, y_2)$  no depende de  $y_1, y_2$  y

$$\lim_{y_1 \rightarrow -\infty, y_2 \rightarrow +\infty} \sigma(y_1, y_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_{H_n}(0, T)}{T}.$$

Los resultados encontrados en el libro de Levin [34, p. 286] y el hecho de que  $\ln n$  es la longitud del segmento más pequeño incluido en el espectro de  $H_n(x)$  nos dan el resultado que queríamos, es decir,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_{H_n}(0, T)}{T} = \frac{\ln n}{2\pi}.$$

■

Sabiendo que  $H_n(z) = G_n(iz)$ , tenemos el corolario siguiente:

**Corolario 2** Si  $N_{G_n}(0, T)$  es el número de ceros de  $G_n(z)$ , con  $0 \leq \operatorname{Re} z \leq T$ , tenemos que

$$\Delta_{G_n} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_{G_n}(0, T)}{T} = \frac{\ln n}{2\pi}.$$

### 1.3. Aproximaciones de la función zeta de Riemann.

Una serie general de Dirichlet es una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \quad a_n, z \in \mathbb{C}, \quad (1.1)$$

siendo  $\{\lambda_n\}$  una progresión estrictamente creciente de números no negativos que tiende a infinito. Si tomamos  $\lambda_n = \log n$ , obtenemos una serie de Dirichlet ordinaria

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z}.$$

Se define la abscisa de convergencia  $\sigma_c$  de la serie de Dirichlet (1.1) como

$$\sigma_c = \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \text{ converge para todo } z, \text{ con } \operatorname{Re} z > \sigma \right\}.$$

El semi-plano de convergencia está definido por  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > \sigma_c\}$ . De la misma manera, se define la abscisa de convergencia absoluta  $\sigma_a$  como

$$\sigma_a = \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \text{ converge absolutamente para todo } z \text{ con } \operatorname{Re} z > \sigma \right\}.$$



Se pueden definir recta y semi-plano de convergencia absoluta de la misma manera.

La serie de Dirichlet más famosa es la función zeta de Riemann introducida por B. Riemann en 1859 y definida por

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Hay, también, otro ejemplo interesante relacionado con la función zeta de Riemann, la función zeta alternada

$$R(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}$$

cuya relación con  $\zeta(z)$  viene dada por la fórmula

$$R(z) = (1 - 2^{1-z})\zeta(z).$$

Ahora vamos a considerar a la función gamma de Euler,  $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{s-1} du$ , la cual es prolongable de forma meromorfa sobre todo el plano complejo. Tenemos la ecuación funcional de la función zeta de Riemann

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s). \quad (1.2)$$

Volveremos a considerar esta ecuación funcional con la noción de aproximaciones de la función zeta por sus sumas parciales, teoría desarrollada por Spira([59], [60]) y más recientemente por Gonek y Montgomery [20].

La hipótesis de Riemann dice que todos los ceros “no triviales” de  $\zeta(s)$  se encuentran colocados en la recta crítica  $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ .

Existen varias vías para atacar este problema y Balazard en [4] puso una lista de las distintas ramas implicadas en esta conjetura. Una de ellas consiste en encontrar regiones del plano complejo donde la función zeta no se anula. En este sentido, la idea es saber el número de ceros “no triviales” de  $\zeta(s)$  dentro de rectángulos incluidos en la banda crítica  $0 < \sigma < 1$ .

Vamos a enumerar los distintos resultados obtenidos utilizando lo que hizo Laurincikas en [32].

Para  $T > 0$ , sea  $N(T)$  el número de ceros “no triviales” de la función zeta de Riemann en el rectángulo  $0 < \sigma < 1$ ,  $0 < t \leq T$ , y sea  $N_0(T)$  el número de ceros de  $\zeta(s)$  de la forma  $s = \frac{1}{2} + it$ ,  $0 < t < T$ . Entonces

- En 1895 H. von Mangoldt demostró que

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T), T \rightarrow \infty.$$

- En 1914, G. H. Hardy probó que  $N_0(T) > cT$ ,  $c > 0$ , para  $T \geq T_0$ .
- En 1942, A. Selberg demostró que  $N_0(T) > cT \log T$ ,  $c > 0$ , para  $T \geq T_0$ .
- En 1974, N. Levinson probó que  $N_0(T) \geq \frac{1}{3}N(T)$ .
- En 1983, J. B. Conrey consiguió mostrar que  $N_0(T) \geq \frac{2}{5}N(T)$ .

### 1.3.1. Una familia de aproximaciones de la zeta de Riemann

Una de las muchas ideas para encontrar una fórmula para enumerar ceros es el uso de aproximaciones de la función zeta como, por ejemplo, sus sumas parciales. En efecto, sea  $s = \sigma + it$ , en el semi-plan  $\sigma > 1$  tenemos [36, p. 56]:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} + O\left(\frac{n^{1-\sigma}}{\sigma-1}\right).$$

Se puede, entonces, ver que esta suma parcial es una buena aproximación de  $\zeta(s)$  en el semi-plano derecho. Si nos concentramos en este semi-plano derecho de la banda crítica tenemos

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} + O\left(\frac{n^{1-\sigma}}{\sigma-1}\right) + O(n^{-\sigma}),$$

con la condición de que  $n \gg t$ .

Si  $n = t$  obtenemos

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^t \frac{1}{k^s} + O(t^{-\sigma}).$$

Esta última igualdad nos permite decir que la aproximación de la función zeta por secciones en la banda crítica tiene que ser de dimensión  $t$ .

En la introducción dimos una ecuación funcional que se puede encontrar en el artículo de Spira. Esta ecuación funcional, así como (1.2), se pueden escribir de otra forma (Titchmarsh [63]):

$$\zeta(s) = \sum_{k \leq \sqrt{|t|/2\pi}} \frac{1}{k^s} + \chi(s) \sum_{k \leq \sqrt{|t|/2\pi}} \frac{1}{k^{1-s}} + O(|t|^{-\frac{\sigma}{2}})$$

donde  $s = \sigma + it$ ,  $|t| \geq 1$ ,  $|\sigma - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ , y

$$\chi(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}.$$

En [21], Gonek introduce una familia de aproximaciones de  $\zeta(s)$  utilizando secciones del producto de Euler y, según las ideas de Spira [59] y [60], publica, con Montgomery, en [20], un estudio de los ceros de aproximaciones de la función zeta de Riemann utilizando las sumas parciales de  $\zeta(s)$ .

Siguiendo las ideas de [20], para  $N \geq 1$  y  $s \in \mathbb{C}$ , notamos  $F_N(s) = \sum_{k \leq N} k^{-s}$  y definimos las aproximaciones de la función zeta como

$$\zeta_N(s) = F_N(s) + \chi(s)F_N(1-s).$$

Gonek y Montgomery señalan en su artículo que  $\zeta_N(s)$  satisface la ecuación funcional  $\zeta_N(s) = \chi(s)\zeta_N(1-s)$ .

La familia de aproximaciones considerada por Gonek y Montgomery tiene las siguientes propiedades:

- La hipótesis de Riemann se cumple también para  $\zeta_N(s)$  en el sentido de que cada cero de la banda crítica con parte imaginaria estrictamente mayor que 10 en valor absoluto está en la recta  $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ .
- Si la hipótesis de Riemann se cumple para  $\zeta(s)$  y si  $N$  no es demasiado grande, entonces  $\zeta_N(s)$  tiene aproximadamente el mismo número de ceros que  $\zeta(s)$  en la recta crítica, y, además, son todos simples.

Enunciamos el principal teorema que obtuvieron Gonek y Montgomery en [20, Theorem 1.5] y luego daremos las principales consecuencias.

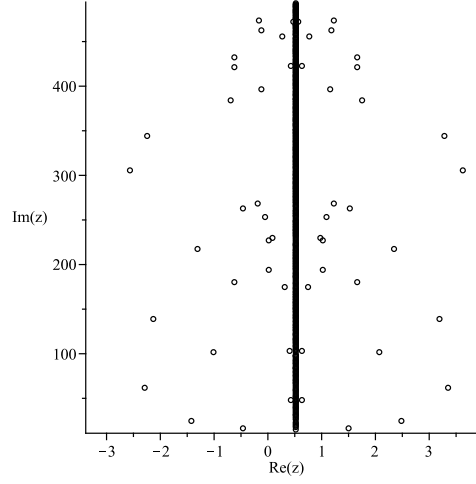


Figura 1.1: roots of  $\zeta_7(s)$

En [20, Theorem 1.4], se ha demostrado la existencia de una constante  $T_0$  tal que si  $N \geq 1$ ,  $U \geq 2$  y  $T \geq \max(2\pi N^2, T_0)$  entonces

$$N(T+U) - N(T) = \frac{T+U}{2\pi} \log \frac{T+U}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{U}{2\pi} + O(\log(T+U)).$$

**Teorema 12** [20, Theorem 1.5] *Sean  $N \geq 1$  y  $T \geq \max(2\pi N^2, T_0)$ , donde  $T_0$  es la constante anterior. Supongamos que el número de ceros de  $F_N(s)$  con parte imaginaria dentro de  $(0, T]$  y parte real mayor que  $\frac{1}{2}$  es menor que  $\frac{aT}{2\pi} \log N + O(N)$ , con  $0 \leq a \leq 1$ . Entonces, si  $U \geq 2$ , tenemos*

1.  $N_0(T+U) - N_0(T) \geq \frac{T+U}{2\pi} \log \frac{T+U}{2\pi N^{2a}} - \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi N^{2a}} - \frac{U}{2\pi} + O(N).$

2. *La cantidad que está en la parte derecha es un cota inferior del número de ceros distintos de  $\zeta_N(s)$  en la recta, lo que nos da, en particular,*

$$N_0(T+U) - N_0(T) \geq N(T+U) - N(T) + O(U \log N) + O(N).$$

3. *Finalmente, si  $2 \leq U \ll T$  y si  $N = (\frac{T}{2\pi})^\theta$ , con  $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$ , entonces*

$$N_0(T+U) - N_0(T) \geq (1 - 2a\theta) \frac{U}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} + O(U^2 T^{-1}) + O(T^\theta).$$

Como consecuencia, esta nueva familia de aproximaciones de la zeta de Riemann considerada por Gonek y Montgomery satisface que si  $N$  no es mucho más mayor que  $T$ , entonces una proporción positiva de ceros de  $\zeta_N(s)$  está en la recta  $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ . También tenemos que si  $1 \leq N \leq T^{o(1)}$ , entonces todos los ceros cuyas ordenadas están entre 0 y  $T$  son simples y situados en la recta crítica.

Terminaremos este capítulo dando un último resultado que se puede encontrar en [42]. Allí se utiliza la función  $H_n(z)$  y el hecho de que sea una función de clase  $\mathcal{C}$  mejora los resultados obtenidos sobre los ceros de las sumas parciales de la zeta de Riemann dentro de rectángulos incluidos en la banda crítica.

### 1.3.2. Una clase de funciones casi-periódicas conteniendo las sumas parciales de la zeta de Riemann.

Consideramos la clase de funciones casi-periódicas  $f(z)$  con espectro acotado tales que existe un valor de  $y = \operatorname{Im} z$ , notado  $y_0$ , de tal forma que o  $\operatorname{Re} f(x, y_0) \neq 0$  o  $\operatorname{Im} f(x, y_0) \neq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . En [42], los autores llaman  $\mathcal{A}_S$  a tal familia. Podemos decir que para todo  $n \geq 2$ , las aproximaciones de la función zeta de Riemann

$$G_n(z) = 1 + 2^z + \dots + n^z$$

en el semi-plano  $\operatorname{Re} z < -1$  pertenecen a la clase  $\mathcal{A}_S$ . Además, ya sabemos que, para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $z \in \mathbb{C}$ ,  $G_n(z) = \zeta_n(-z)$ , lo que significa que lo que vamos a exponer para  $G_n(z)$  se aplica directamente a  $\zeta_n(z)$ .

En [42], los autores han demostrado la existencia de una familia de rectángulos notada por  $\{S_k : k \in \mathbb{N}\}$ . Cada rectángulo  $S_k$  tiene como propiedad que  $\operatorname{Im} f(z) > 0$  en los lados paralelos al eje real y  $f(z) \neq 0$  en los lados paralelos al eje imaginario. Si, ahora, consideramos la intersección de cada  $S_k$  con la banda crítica de  $f(z)$ , obtenemos una nueva familia de rectángulos  $\{R_k : k \in \mathbb{N}\}$ .

Tenemos, entonces, todas las condiciones para enunciar el resultado que queremos.

**Teorema 13** [42, Corollary 9] *La banda crítica asociada a cada aproximación de la función zeta de Riemann en el semi-plano  $\operatorname{Re} z < -1$ ,  $G_n(z) = 1 + 2^z + \dots + n^z$ , puede ser particionada en una infinidad de rectángulos  $\{R_k : k \in \mathbb{N}\}$  tal que el número de ceros incluido en cada rectángulo  $R_k$ ,  $N(G_n(z); R_k)$  satisface:*

$$\left| N(G_n(z); R_k) - \frac{h_k \ln n}{2\pi} \right| < 2,$$

donde  $h_k$  es la altura de  $R_k$ .

## Capítulo 2

# Densidad de los ceros de las sumas parciales de la zeta de Riemann.

**Sumario.** Las sumas parciales de la función zeta de Riemann  $\zeta_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^z}$ , siendo polinomios de Dirichlet, tienen sus ceros situados en una banda vertical llamada banda crítica. Demostramos en este capítulo que para  $n$  primo, los ceros son simples y que las partes reales de tales ceros son densas dentro de intervalos incluidos en la banda crítica.

---

**Abstract.** The partial sums of the Riemann zeta function  $\zeta_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^z}$ , being Dirichlet polynomials, have their zeros located in a vertical strip called critical strip. In this chapter we will show that, for  $n$  prime, the zeros are simple and the real parts of these zeros are dense in intervals included in the critical strip.

## 2.1. Introducción

Vimos en la introducción que uno de los matemáticos que empezó el estudio de los ceros de polinomios exponenciales fue Pólya [48]. Centró después su trabajo en el caso particular de los polinomios de Dirichlet con la meta de comprender mejor la distribución de los ceros de las sumas parciales de la función zeta de Riemann.

Hay relaciones entre los ceros de  $\zeta(z)$  en la banda crítica y los ceros de las sumas parciales  $\zeta_n(z)$  como se puede ver en el dibujo siguiente obtenido con Maple.

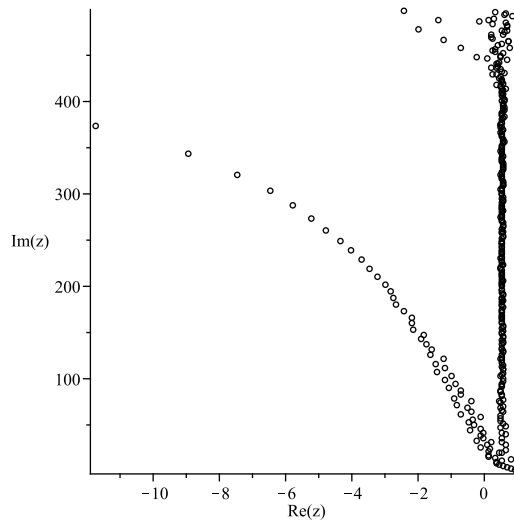


Figura 2.1: ceros de  $\zeta_{70}(z)$

Como hemos visto en el primer capítulo, parece, entonces, natural conocer la distribución de los ceros de las sumas parciales de la función zeta de Riemann porque son buenas aproximaciones de la zeta de Riemann.

Spira, en su artículo [57], escribió la igualdad siguiente

$$\zeta(z) = \zeta_{n-1}(z) + n^{-z} + \frac{n^{1-z}}{z-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (\prod_{j=0}^{2k-2} (z+j)) n^{1-z-2k} + R,$$

donde los  $B_k$  son los números de Bernoulli.

Esta igualdad muestra que  $\zeta(z)$  está aproximada por  $\zeta_n(z)$ ,  $z = \sigma + it$ ,



cerca de la recta crítica  $\sigma = \frac{1}{2}$ , para  $t < 2\pi n$ , pero con un  $t$  suficientemente grande para que  $\frac{\sqrt{n}}{t}$  sea pequeño.

El estudio de la densidad de las partes reales de los ceros de polinomios exponenciales ha sido estudiado por Moreno en [46] en el caso particular de frecuencias linealmente independientes.

El uso de la equivalencia de Bohr para tener información en la densidad de las partes reales de ceros de polinomios de Dirichlet se utilizó también en el artículo de Spira [58], donde introduce una función *adjunta* a las sumas parciales de la función zeta. En cierto modo, lo hicimos también en [14] usando la función *adjunta* que aparece en el artículo de Avellar y Hale [2].

Sea  $p_j$  el  $j$ -ésimo primo entonces  $p_1 = 2$ . Para  $n > 1$  consideramos  $r_{n,j}$  la máxima potencia del  $p_j$  tal que  $p_j^{r_{n,j}}$  divida  $n$ , y sea  $q_n$  el índice del máximo primo dividiendo  $n$ . Si denotamos  $\zeta_N(s) = \sum_{n=1}^N n^{-s}$  las sumas parciales de la función zeta de Riemann, entonces obtenemos

$$\zeta_N(s) = \sum_{n=1}^N n^{-\sigma} \exp(-it(r_{n,1} \log 2 + r_{n,2} \log 3 + \dots + r_{n,q_n} \log p_{q_n})),$$

donde la suma dentro del paréntesis se puede interpretar como 0 cuando  $n = 1$ . Con las nuevas variables  $x_j = t \log p_j$ , Spira construyó la función *adjunta* a  $\zeta_N(s)$

$$F_N = F_N(\sigma, x_1, x_2, \dots) = \sum_{n=1}^N n^{-\sigma} \exp(-i(r_{n,1}x_1 + r_{n,2}x_2 + \dots + r_{n,q_n}x_{q_n})).$$

Spira hizo la reflexión siguiente: “Since the  $\log p_j$  are linearly independent over the rationals, and the  $r_{n,j}$  are integers, we can apply generalizations of theorems of Bohr. We can conclude first of all the set of values of  $\zeta_N(s)$ ...is identical with the set of values of  $F_N(\sigma, x_1, x_2, \dots)$ .”

Para más detalles, ponemos ahora una cita de [58, p.165] donde aparece una conjetura sobre la densidad de la parte real de los ceros de las sumas parciales de la zeta de Riemann dentro de intervalos incluidos en el intervalo crítico:

“If  $F_N(\sigma, x_1, \dots) = 0$ , and if the appropriate Jacobian does not vanish, we can solve the equation for  $\sigma$ , and thus obtain a  $\sigma$  interval in which  $F_N$

vanishes. The zeros of  $\zeta_N(s)$  will have real parts dense in this interval. The empirical results suggest the conjecture that to each  $\zeta_N(s)$  there is a single such interval, though it could possibly arise from overlapping  $F_N$   $\sigma$ -intervals”.

En este capítulo se estudiará la proyección sobre el eje real de los ceros simples de  $G_n(z) = \zeta_n(-z) = 1 + 2^z + \dots + n^z$ , sumas parciales de la zeta de Riemann.

Definimos los conjuntos

$$R_n := \overline{\{Re\ z : G_n(z) = 0\}}, \quad n > 2. \quad (2.1)$$

Cada  $G_n(z)$ ,  $n \geq 2$ , siendo una función entera de orden 1, de tipo exponencial  $\log n$ , sus ceros están colocados en una banda vertical  $S_n$ , llamada banda crítica, definida como  $S_n := \{z = \sigma + it : a_n \leq \sigma \leq b_n\}$ , donde

$$a_n := \inf\{Re\ z : G_n(z) = 0\} \quad (2.2)$$

$$b_n := \sup\{Re\ z : G_n(z) = 0\} \quad (2.3)$$

se expresan como  $a_n = -1 - (\frac{4}{\pi} - 1 + o(1)) \frac{\log \log n}{\log n}$  y  $b_n = n \log 2 + o(1)$ . Estas fórmulas se encuentran en los artículos de Montgomery [37] y de Balazard y Velásquez-Castañón [3]. La cotas (2.2) y (2.3) definen el intervalo crítico  $[a_n, b_n]$  de cada  $G_n(z)$ ,  $n \geq 1$ .

Utilizando el concepto de curva de nivel, vamos a demostrar la existencia de ceros simples de la función  $G_n(z) = \zeta_n(-z) = 1 + 2^z + \dots + n^z$  para  $n \in \mathbb{N}$  y  $z \in \mathbb{C}$ . Después mostraremos que el conjunto definido por las proyecciones reales de los ceros simples de  $G_n(z)$  tiene puntos de acumulación, lo que es equivalente a que, dada una recta vertical  $x = \sigma$  contenida en la banda crítica de  $G_n(z)$  se puede encontrar una infinidad de ceros cerca de esta recta.

Un primer resultado sobre la densidad de las partes reales de ceros de funciones enteras se puede encontrar en el artículo de Moreno [46]. En él, Moreno trabaja con polinomios exponenciales con coeficientes complejos y frecuencias reales linealmente independientes sobre los racionales. Van der Poorten, en [66], generalizó este trabajo demostrando que se cumple la propiedad de densidad para frecuencias complejas.

En el caso de la función  $G_n(z) = \sum_{k=1}^n e^{z \ln k}$ , las frecuencias no son linealmente independientes (por ejemplo  $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$ ) lo que implica que no

se puede aplicar stricto sensu las ideas que Moreno desarrolló en su famoso artículo y cuyo resultado más importante se puede encontrar en [46, p.73].

Como hemos dicho, hay que tener una caracterización de  $R_n$  para luego estudiar la densidad de las partes reales de los ceros simples de las  $G_n(z)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Utilizando una idea similar a la de Spira [58, p.165], necesitamos trabajar con una función adjunta que notaremos  $F_n$ . Hemos utilizado el artículo de Avellar y Hale [2] para obtener esta función adjunta y veremos que eso, con la noción de curva de nivel, nos ha permitido dar una caracterización de  $R_n$ .

Las sumas parciales de la zeta de Riemann, como polinomio de Dirichlet, estando relacionadas también con la teoría de los números, no sorprende saber que las nociones claves de estos resultados son la casi-periodicidad y el teorema de Kronecker, como lo podremos averiguar en las pruebas.

El punto clave de nuestro trabajo es la introducción de una función *auxiliar*  $G_n^*(z)$  tal como la haremos en la Definición 8 con el propósito de estudiar la curva de nivel  $|G_n^*(z)| = p_{k_n}^\sigma$ , con  $\sigma \in \mathbb{R}$  (recordamos que  $p_{k_n}$  es el último primo tal que  $p_{k_n} \leq n$ ).

Teniendo en cuenta esta meta, introduciremos la función

$$A_n(x, y) = |G_n^*(x + iy)| - p_{k_n}^x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

y son las propiedades de esta función las que nos darán el principal resultado que exponemos por primera vez:

**Teorema 14** ([14, Th. 4]) *Sea  $z_0 = x_0 + iy_0$  un cero simple de  $G_n(z)$ ,  $n > 2$ . Entonces, existen  $\epsilon_1, \epsilon_2$  con  $\epsilon_1 + \epsilon_2 > 0$ , tales que  $[x_0 - \epsilon_1, x_0 + \epsilon_2] \subset R_n$ .*

## 2.2. Densidad de los ceros simples de

$$\zeta_n(-z) = 1 + 2^z + \dots + n^z.$$

**Definición 8** *Para todo entero  $n \geq 2$  se definen*

$$x_{n,0} := \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : 1 \leq 2^\sigma + \dots + n^\sigma\}$$

y

$$x_{n,1} := \sup\{\sigma \in \mathbb{R} : 1 + 2^\sigma + \dots + (n-1)^\sigma \geq n^\sigma\}.$$

**Lema 2** ([14, Lemma 1])

Para todo  $n \geq 2$ , tenemos  $R_n \subset [a_n, b_n] \subset [x_{n,0}, x_{n,1}]$ .

**Prueba.** Usando (2.1), (2.2) y (2.3), tenemos  $R_n \subset [a_n, b_n]$ , para todo  $n \geq 2$ . Nos falta demostrar la inclusión siguiente  $[a_n, b_n] \subset [x_{n,0}, x_{n,1}]$ . Los ceros de  $G_2(z)$  son imaginarios lo que implica que  $a_2 = b_2 = x_{2,0} = x_{2,1} = 0$ . Podemos entonces suponer que  $n > 2$ . En el caso que  $b_n > x_{n,1}$ , por (2.3) existe un cero de  $G_n(z)$  notado  $\omega = a + ib$  con  $a > x_{n,1}$  y con la Definición 8 se puede escribir

$$1 + 2^a + \dots + (n-1)^a < n^a. \quad (2.5)$$

Además, siendo  $\omega$  un cero de  $G_n(z)$ , tenemos  $1 + 2^\omega + \dots + (n-1)^\omega = -n^\omega$  y, tomando el módulo, tenemos  $n^a \leq 1 + 2^a + \dots + (n-1)^a$ , lo que contradice (2.5). Obtenemos entonces  $b_n \leq x_{n,1}$ .

Nos falta demostrar que  $a_n \geq x_{n,0}$ . Si suponemos que  $a_n < x_{n,0}$  entonces por (2.2) existe un cero de  $G_n(z)$ ,  $k = c + id$ , con  $c < x_{n,0}$ . Utilizando la Definición 8 tenemos

$$1 > 2^c + \dots + n^c. \quad (2.6)$$

Como  $k$  es un cero de  $G_n(z)$ , tenemos  $2^k + \dots + n^k = -1$  y, tomando de nuevo el módulo, obtenemos  $1 \leq 2^c + \dots + n^c$ , lo que contradice 2.6. Finalmente,  $a_n \geq x_{n,0}$ , que es lo que queríamos. ■

Ahora, vamos a definir la función *adjunta* que nos ayudará a caracterizar  $R_n$  a través de las curvas de nivel. Lo que vamos a exponer es una versión ad hoc de un teorema de Avellar y Hale [2, th 3.1].

**Teorema 15** Para  $n > 2$ , definimos  $\{p_1, \dots, p_{k_n}\}$  como el conjunto de números primos menores o iguales a  $n$ . Para todo  $1 \leq m \leq n$ , sea  $c_m$  un vector cuyas componentes son enteros positivos tales que  $\log m = \langle c_m, \mathbf{p} \rangle$ , donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto escalar en  $\mathbb{R}^{k_n}$  y  $\mathbf{p} = (\log p_1, \dots, \log p_{k_n})$ . Se define una función  $F_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k_n} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$F_n(\sigma, \mathbf{x}) = \sum_{m=1}^n n^\sigma e^{\langle c_m, \mathbf{x} \rangle}, \sigma \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{k_n}. \quad (2.7)$$

Entonces  $\sigma \in R_n$  si, y solo si, existe un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{k_n}$  tal que  $F_n(\sigma, \mathbf{x}) = 0$ .

Para demostrar este resultado se necesita el lema siguiente, donde la noción de casi-periodicidad tiene un papel importante.

**Lema 3** ([14, lemma 3]) Sean  $\sigma_0 \in [a_n, b_n]$ ,  $n \geq 2$ , y  $(T_j)_{j=1,2,\dots}$  una progresión de reales tales que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} G_n(\sigma_0 + iT_j) = 0.$$

Entonces  $\sigma_0 \in R_n$ .

**Prueba.** En primer lugar, estudiamos el caso  $n = 2$ . Ya sabemos que los ceros de  $G_2(z)$  pertenecen al eje imaginario, lo que implica que su banda crítica se reduce a una recta de ecuación  $x = 0$  y tenemos  $|G_2(z)| \leq 2$ ,  $\forall z \in S_2$ .

Además, todo segmento de longitud  $l > \frac{2\pi}{\log 2}$  de la recta  $x = 0$  contiene un punto  $iT$  con  $T = \frac{2k\pi}{\log 2}$  para un  $k \in \mathbb{Z}$ , de tal forma que  $|G_2(iT)| \geq 2$ . Para el caso  $n > 2$ , siendo  $G_n(z)$  una función entera de tipo exponencial casi-periódica [6, p. 101] tenemos dos consecuencias:

- $G_n(z)$  es, en particular, acotada en su banda crítica  $S_n$ .
- Además, como  $G_n(\sigma_0)$  es positivo, tomando  $\delta = \frac{G_n(\sigma_0)}{2}$ , esto nos asegura la existencia de un número real dependiente de  $\delta$ , que notaremos  $l$ , tal que cada intervalo de longitud  $l$  del eje imaginario contiene al menos un número  $iT$  asociado a  $\delta$ , de tal forma que  $|G_n(z + iT) - G_n(z)| \leq \delta$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

Cuando  $z = \sigma_0$ , tenemos  $|G_n(\sigma_0 + iT) - G_n(\sigma_0)| \leq \delta$  y, por definición de  $\delta$ , se llega a  $|G_n(\sigma_0 + iT)| \geq \delta$ .

Entonces, la función  $G_n(z)$  tiene las propiedades necesarias para aplicar el resultado de Moreno [46, Lemma p.73] y, como consecuencia,  $G_n(z)$  tiene ceros en toda banda de la forma  $S_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}; \sigma_0 - \epsilon < \text{Re}(z) < \sigma_0 + \epsilon\}$ , para todo  $\epsilon > 0$ , y finalmente  $\sigma_0 \in R_n$ . ■

Pasamos ya a demostrar el Teorema 11 con la ayuda del teorema de Kronecker.

**Prueba.** Para cualquier cero  $z = \sigma + it$  de  $G_n(z)$  se tiene

$$0 = G_n(z) = \sum_{m=1}^n e^{\langle c_m, p \rangle z} = \sum_{m=1}^n e^{\langle c_m, p \rangle \sigma} e^{\langle c_m, p \rangle it} =$$

$$= \sum_{m=1}^n m^\sigma e^{\langle c_m, t\mathbf{p} \rangle i} = F_n(\sigma, t\mathbf{p}). \quad (2.8)$$

Si  $\sigma \in R_n$ , entonces existe una progresión  $(z_j = \sigma_j + it_j)_{j=1,2,\dots}$  de ceros de  $G_n(z)$  tal que  $\sigma = \lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_j$  y con (2.8) obtenemos  $F_n(\sigma_j, t_j\mathbf{p}) = 0$ , para todo  $j = 1, 2, \dots$ . La utilización de (2.7) equivale a escribir

$$0 = \sum_{m=1}^n m^{\sigma_j} e^{\langle c_m, t_j\mathbf{p} \rangle i} \text{ para todo } j = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Para completar la demostración de la primera implicación debemos demostrar que  $F_n(\sigma, \theta) = 0$  para un cierto vector  $\theta$  que tenemos que definir. Por eso, en primer lugar, vamos a empezar con dos casos particulares.

Si  $m = 2$ , la sucesión  $(e^{\langle c_2, t_j\mathbf{p} \rangle i})_{j=1,2,\dots}$  del círculo unidad está acotada, lo que implica que existe una subsucesión  $(e^{\langle c_2, t_{j_h,2}\mathbf{p} \rangle i})_{h=1,2,\dots}$  convergente a un punto  $e^{\theta_2 i}$  para un cierto  $\theta_2 \in [0, 2\pi)$ .

En el caso  $m = 3$ , a partir de la subsucesión  $(e^{\langle c_3, t_{j_h,2}\mathbf{p} \rangle i})_{h=1,2,\dots}$  podemos construir otra  $(e^{\langle c_3, t_{j_h,3}\mathbf{p} \rangle i})_{h=1,2,\dots}$  que converge a un  $e^{\theta_3 i}$  para un cierto  $\theta_3 \in [0, 2\pi)$ , y este razonamiento lo podemos hacer para todo primo del conjunto  $\{p_1, p_2, \dots, p_{k_n}\}$ .

Si  $m \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_{k_n}\}$ , entonces  $c_m$  se escribe como combinación lineal de vectores  $c_l$  con  $l \in \{p_1, p_2, \dots, p_{k_n}\}$ , como por ejemplo

$$c_1 = (0, \dots, 0), \quad c_4 = 2c_2, \quad c_6 = c_2 + c_3, \dots \quad (2.10)$$

Considerando la relación (2.9), para  $j \in \{j_{h,p_{k_n}}\}_{h=1,2,\dots}$ , y tomando el límite cuando  $h$  tiende a infinito obtenemos lo que queremos

$$0 = \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n m^{\sigma_{j_{h,p_{k_n}}}} e^{\langle c_m, t_{j_{h,p_{k_n}}}\mathbf{p} \rangle i},$$

es decir,

$$0 = 1 + 2^\sigma e^{\theta_2 i} + 3^\sigma e^{\theta_3 i} + 4^\sigma e^{2\theta_2 i} + 5^\sigma e^{\theta_5 i} + 6^\sigma e^{(\theta_2 + \theta_3) i} + \dots$$

$$0 = 1 + 2^\sigma e^{\langle c_2, \theta \rangle i} + 3^\sigma e^{\langle c_3, \theta \rangle i} + \dots + n^\sigma e^{\langle c_n, \theta \rangle i} = F_n(\sigma, \theta),$$

con  $\theta := (\theta_2, \theta_3, \theta_5, \dots, \theta_{p_{k_n}})$ .

Ahora vamos a demostrar la otra implicación. Entonces supondremos que  $F_n(\sigma, \mathbf{x}) = 0$  para un número real  $\sigma$  y un vector  $\mathbf{x}$  de  $\mathbb{R}^{k_n}$ .

Necesitamos probar la existencia de los  $t_j$  que utilizamos anteriormente en la demostración de la primera implicación. Como hemos dicho, el resultado clave que nos dará lo que queremos es uno de los famosos resultados de Kronecker. En efecto, los componentes del vector  $\frac{1}{2\pi}\mathbf{p} = (\frac{1}{2\pi}\log p_1, \dots, \frac{1}{2\pi}\log p_{k_n})$  son linealmente independientes sobre los racionales y si consideramos los números  $\frac{1}{2\pi} \langle c_{p_1}, \mathbf{x} \rangle, \dots, \frac{1}{2\pi} \langle c_{p_{k_n}}, \mathbf{x} \rangle$ ,  $T = 1$  y  $\frac{\epsilon}{2^j 2\pi}$ , con  $\epsilon > 0$ , entonces aplicando el teorema de Kronecker [23, p.382], para todo  $j = 1, 2, \dots$ , existen  $T_j > 1$  y enteros  $(N_{j,l})_{l=1,2,\dots,k_n}$  tales que para todo  $j = 1, 2, \dots$ , deducimos que

$$|T_j \frac{1}{2\pi} \log p_l - \frac{1}{2\pi} \langle c_{p_l}, \mathbf{x} \rangle - N_{j,l}| < \frac{\epsilon}{2^j 2\pi} \text{ para todos } l = 1, 2, \dots, k_n. \quad (2.11)$$

Ahora que tenemos los  $T_j$ , vamos a modificar un poco la relación que acabamos de obtener. Si multiplicamos por  $2\pi$  y sustituimos  $\log p_l$  por  $\langle c_{p_l}, \mathbf{p} \rangle$ , la desigualdad (2.11) se escribe

$$| \langle c_{p_l}, T_j \mathbf{p} - \mathbf{x} \rangle - 2\pi N_{j,l} | < \frac{\epsilon}{2^j} \text{ para todos } l = 1, 2, \dots, k_n.$$

Esto implica que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} e^{\langle c_{p_l}, \mathbf{x} - T_j \mathbf{p} \rangle} = 1 \text{ para todos } l = 1, 2, \dots, k_n. \quad (2.12)$$

De las relaciones (2.10) y (2.12) se llega a

$$\lim_{j \rightarrow \infty} e^{\langle c_m, \mathbf{x} - T_j \mathbf{p} \rangle} = 1 \text{ para todo } m = 1, 2, \dots, n.$$

Esta última igualdad nos permite concluir. En efecto, para demostrar que la implicación se cumple tenemos que aplicar el resultado del Lema 3. Tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} G_n(\sigma + iT_j) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n e^{\langle c_m, \mathbf{p} \rangle \sigma} e^{\langle c_m, \mathbf{p} \rangle iT_j} e^{\langle c_m, \mathbf{x} - T_j \mathbf{p} \rangle} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n e^{\langle c_m, \mathbf{p} \rangle \sigma} e^{\langle c_m, \mathbf{x} \rangle} \\ &= \sum_{m=1}^n m^\sigma e^{\langle c_m, \mathbf{x} \rangle} \\ &= F_n(\sigma, \mathbf{x}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si ahora aplicamos el Lema 14, tenemos  $\sigma \in R_n$  y el teorema queda demostrado. ■

Vamos a definir la noción de curva de nivel y luego expondremos resultados generales sobre tales curvas, que aplicaremos a la caracterización de la función  $A_n(z)$  tal como la hemos definido en (2.4).

**Definición 9** ([63, p. 121]) Sean  $f(z)$ , para  $z = x + iy$ , una función entera y  $k$  una constante no nula. Las curvas definidas por

$$|f(x + iy)| = k$$

se llaman curvas de nivel de orden  $k$ .

Para  $k = 0$  tenemos los ceros de  $f(z)$ , pues supondremos que  $k > 0$ . De los próximos resultados se puede deducir que existe una curva de nivel  $L$  pasando por un punto  $z_0$  tal que  $f'(z_0) \neq 0$  y que, entonces, es localmente una curva de Jordan. Sin embargo, en el caso que  $z_0$  sea un punto crítico de  $f$  (es decir que  $f'(z_0) = 0$ ) entonces la curva de nivel que pasa por  $z_0$  tiene, al menos, cuatro ramas.

**Lema 4** ([14, Prop. 2]) Sea  $f(z)$  una función entera que no sea constante. Para todo  $k > 0$ , la curva de nivel  $|f(z)| = k$  contiene al menos un punto  $z_0$  tal que  $f'(z_0) \neq 0$ .

**Lema 5** ([14, Lemma 5]) Sean  $f(z)$  una función entera y  $z_0$  un punto de la curva de nivel  $L_k \equiv |f(z)| = k > 0$ . Entonces, si  $f'(z_0) \neq 0$ ,  $L_k$  contiene solamente una curva simple que tiene a  $z_0$  como punto interior relativo.

**Lema 6** [14, Prop. 3] Sean  $f(z)$  una función entera y  $z_0$  un punto de la curva de nivel  $L_k \equiv |f(z)| = k > 0$  tal que  $f'(z_0) = 0$ , y  $m$  el orden de  $z_0$ . Entonces, existe un disco  $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$  dividido en  $2(m + 1)$  sectores, que notamos  $S_{r,j}$ ,  $j = 1, \dots, 2(m + 1)$  de radio  $r$  y ángulo  $\frac{\pi}{m + 1}$ , tales que  $L_k$  contiene al menos una curva de Jordan en el interior de cada subsector  $S_{\rho,j}$  de radio  $0 < \rho \leq r$ .

**Definición 10** Para todo entero  $n > 2$  definimos

$$G_n^*(z) := G_n(z) - p_{k_n}^z, \quad z = \sigma + it,$$

donde  $p_{k_n}$  es el último número primo tal que  $p_{k_n} \leq n$ .



Podemos ahora expresar  $R_n$  con la ayuda de las curvas de nivel.

**Teorema 16** ([14, Th. 2]) *Un número real  $\sigma \in R_n$ , para  $n > 2$ , si, y sólo si, la curva de nivel  $|G_n^*(z)| = p_{k_n}^\sigma$  corta la recta vertical  $x = \sigma$ .*

**Prueba.** Si  $z = \sigma + it$  es un punto de la curva de nivel  $|G_n^*(z)| = p_{k_n}^\sigma$  entonces  $|G_n^*(\sigma + it)| = p_{k_n}^\sigma$ , lo que implica que existe un  $\theta \in [0, 2\pi)$  tal que  $G_n^*(\sigma + it) = p_{k_n}^\sigma e^{i\theta}$ . Tenemos

$$1 + 2^{\sigma+it} + 3^{\sigma+it} + \dots + (p_{k_n} - 1)^{\sigma+it} - p_{k_n}^\sigma e^{i\theta} + \dots + n^{\sigma+it} = 0. \quad (2.13)$$

Si tomamos el vector  $x = (t \log 2, t \log 3, \dots, t \log p_{k_n-1}, \theta + \pi)$ , entonces la función  $F_n(\sigma, x)$  que hemos definido antes en (2.7) se anula y sabemos que esto es un condición suficiente para concluir que  $\sigma \in R_n$ .

Recíprocamente, vamos a suponer que  $\sigma \in R_n$ . Por definición de  $R_n$ , eso supone la existencia de una sucesión de ceros  $(z_m = \sigma_m + it_m)_{m=1,2,\dots}$  de  $G_n(z)$  tal que  $\sigma = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m$ . Con la Definición 10, tenemos que  $G_n^*(z_m) = -p_{k_n}^{z_m}$  y, para todo  $m = 1, 2, \dots$ , obtenemos

$$|1 + 2^{\sigma_m + it_m} + \dots + (p_{k_n} - 1)^{\sigma_m + it_m} + \dots + n^{\sigma_m + it_m}| = p_{k_n}^{\sigma_m}. \quad (2.14)$$

La progresión  $(e^{itm})_m = 1, 2, \dots$ , que está contenida en el círculo unidad, es acotada y se puede extraer una progresión  $(e^{itm_j})_j = 1, 2, \dots$  tal que tengamos  $\lim_{j \rightarrow \infty} e^{itm_j} = e^{i\lambda}$  para un  $\lambda \in [0; 2\pi)$ . Si utilizamos (2.14) con los valores  $m_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  y si pasamos al límite cuando  $j \rightarrow \infty$  obtenemos

$$|1 + 2^\sigma e^{i\lambda \log 2} + \dots + (p_{k_n} - 1)^\sigma e^{i\lambda \log(p_{k_n} - 1)} + \dots + n^\sigma e^{i\lambda \log n}| = p_{k_n}^\sigma,$$

lo que equivale a decir que  $|G_n^*(\sigma + i\lambda)| = p_{k_n}^\sigma$ . Eso significa que la curva de nivel  $|G_n^*(z)| = p_{k_n}^\sigma$  corta a la recta vertical  $x = \sigma$  en el punto  $\sigma + i\lambda$ , lo que termina la prueba. ■

Podemos dar una caracterización de  $R_n$  en términos de  $A_n(x, y)$  tal como la hemos definido en (2.4).

**Teorema 17** ([14, Th. 3]) *Un número real  $x$  pertenece a  $R_n$ , para  $n > 2$ , si, y solo si,  $A_n(x, y) = 0$  para un  $y \in \mathbb{R}$ . Además,*

$$A_n(x, 0) \geq 0 \text{ para todo } x \in [a_n, b_n]. \quad (2.15)$$

Con esta caracterización estamos en condiciones de probar que existen ceros simples para la función entera  $G_n(z)$  con  $n > 2$ . Para ello introducimos el resultado siguiente:

**Proposición 18** Sean  $n > 2$  un número primo,  $b_n = \sup\{Re z : G_n(z) = 0\}$  y  $b'_n = \sup\{Re z : G'_n(z) = 0\}$ . Entonces  $b'_n < b_n$ .

**Prueba.** Sea  $n > 2$  un número primo dado y sean las funciones reales crecientes

$$f(x) = 1 + 2^x + \dots + (n-1)^x,$$

$$g(x) = \frac{\log 2}{\log n} 2^x + \frac{\log 3}{\log n} 3^x + \dots + \frac{\log(n-1)}{\log n} (n-1)^x,$$

y

$$h(x) = n^x.$$

Sea  $b_{n,1} := \sup\{x \in \mathbb{R} : f(x) = h(x)\}$ . Como para todo  $x \in \mathbb{R}$  tenemos  $h(x), f(x) > 0$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{f(x)} = 0$ , por la continuidad de  $\frac{h(x)}{f(x)}$ , entonces podemos decir que  $b_{n,1}$  existe y  $b_{n,1} \leq x_0$ . Además, usando la definición de  $b_{n,1}$  y el teorema del valor medio obtenemos

$$h(x) > f(x) \quad \forall x > b_{n,1}. \quad (2.16)$$

Dado  $x > b_{n,1}$ , para un  $y$  cualquiera, tenemos

$$|G_n(x+iy)| \geq |n^{x+iy}| - |1 + 2^{x+iy} + \dots + (n-1)^{x+iy}| \geq h(x) - f(x) > 0.$$

Esto implica que el conjunto  $\{z : Rez > b_{n,1}\}$  no tiene ceros de  $G_n(z)$ . Como consecuencia

$$b_n \leq b_{n,1}. \quad (2.17)$$

Sabiendo que  $n$  es un número primo, podemos escribir  $p_{k_n} = n$  y, entonces,  $f(x) = G_n^*(x)$  y  $h(x) = p_{k_n}$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Como  $f(b_{n,1}) = h(b_{n,1})$ , mediante (2.4), conseguimos las igualdades siguientes

$$A_n(b_{n,1}, 0) = |G_n^*(b_{n,1})| - p_{k_n}^{b_{n,1}} = f(b_{n,1}) - h(b_{n,1}) = 0,$$

lo que implica, por el teorema 17, que  $b_{n,1} \in R_n$ . Por el Lema 2, se obtiene que  $b_{n,1} \in [a_n, b_n]$ , y así  $b_{n,1} \leq b_n$ . Finalmente, con la desigualdad anterior, tenemos lo que queríamos, es decir,

$$b_n = b_{n,1}. \quad (2.18)$$

De la misma manera, tenemos  $b'_{n,1} = b'_n$  con  $b'_{n,1} := \{x \in \mathbb{R} : g(x) = h(x)\}$  y deducimos que

$$f(b_n) = h(b_n), \quad g(b'_n) = h(b'_n). \quad (2.19)$$

Como  $f(x) > g(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , con las igualdades precedentes (2.19) podemos deducir que  $b'_n \neq b_n$ . Si suponemos que  $b'_n > b_n$ , con (2.18) tenemos  $b'_n > b_n = b_{n,1}$  y por (2.16) y (2.19) llegamos a una contradicción

$$h(b'_n) > f(b'_n) > g(b'_n) = h(b'_n).$$

En conclusión,  $b'_n < b_n$  y obtenemos el resultado. ■

Una consecuencia directa es la existencia de bandas críticas para la  $G_n(z)$  en las cuales tenemos ceros simples. Lo exponemos en el corolario siguiente.

**Corolario 3** Sean  $n > 2$  un número primo,  $b_n := \sup\{\operatorname{Re} z : G_n(z) = 0\}$  y  $b'_n := \sup\{\operatorname{Re} z : G'_n(z) = 0\}$ . Las bandas verticales  $\{z \in \mathbb{C} : b'_n < \operatorname{Re} z \leq b_n\}$  contienen ceros de  $G_n(z)$  y, además, son todos simples.

Ahora tenemos la existencia de ceros simples en las bandas críticas de las  $G_n(z)$  para  $n > 2$ . Vamos a exponer algunas propiedades de  $G_n(z)$  que nos ayudarán a demostrar el teorema principal de este capítulo. Como dijimos, y como lo vamos a averiguar en las pruebas, serán las propiedades de la función  $A_n(x, y)$  las que permiten la obtención de tales resultados.

**Lema 7** ([14, Lema 7]) Sea  $z_0$  un cero de  $G_n(z)$ . Existe un  $r > 0$  tal que

$$\frac{\partial \arg G_n^*(z)}{\partial x} = -\frac{1}{|G_n^*(z)|} \frac{\partial |G_n^*(z)|}{\partial y} \quad \text{para todo } |z - z_0| < r. \quad (2.20)$$

**Prueba.** Sabiendo que  $G_n(z_0) = 0$ , tenemos que  $G_n^*(z_0) = -p_{k_n}^{z_0} \neq 0$  y entonces existe un disco abierto  $D(z_0, r) := \{z; |z - z_0| < r\}$  tal que para todo  $z \in D(z_0, r)$ ,  $G_n^*(z) \neq 0$ .

Como el disco  $D(z_0, r)$  es simplemente conexo, existe un logaritmo analítico definido en  $D(z_0, r)$  tal que  $\log G_n^*(z) = \ln |G_n^*(z)| + i \arg G_n^*(z)$ . Con las ecuaciones de Cauchy-Riemann obtenemos la formula (2.20) que queríamos.

■

**Lema 8** ([14, Lema 8]) *Sea  $z_0 = x_0 + iy_0$  un cero de  $G_n(z)$  con  $x_0 \in (a_n, b_n)$ . Si para todo  $\epsilon > 0$  existen un  $x_1 \in (x_0 - \epsilon, x_0)$  y un  $x_2 \in (x_0, x_0 + \epsilon)$  que satisfacen que, para todo  $y \in \mathbb{R}$ ,  $A_n(x_1, y)$ ,  $A_n(x_2, y) \neq 0$ , entonces*

$$\frac{\partial |G_n^*(z)|}{\partial x}(z_0) = p_{k_n}^{x_0} \log p_{k_n}. \quad (2.21)$$

**Prueba.** En primer lugar tenemos  $y_0 \neq 0$ , porque si no fuera el caso tendríamos  $z_0$  real y sabemos que para cualquier  $z \in \mathbb{R}$ ,  $G_n(z) > 0$ , lo que implicaría que  $z_0$  no sería un cero.

Además, sabemos que la función  $G_n(z)$  cumple la igualdad  $G_n(\bar{z}) = \overline{G_n(z)}$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ , lo que implica que podemos suponer que  $y_0 > 0$ .

El hecho de que  $G_n(z_0) = 0$  implica, por (2.4), que  $A_n(x_0, y_0) = 0$ . Podemos suponer que  $\frac{\partial A_n}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{A_n(x_0 + x, y_0)}{x} < 0$ , lo que implica que existe  $0 < \delta_1 < b_n - x_0$  tal que  $A_n(x_0 + x, y_0) < 0$ , para todo  $x \in (0, \delta_1)$ . Utilizando (2.15) tenemos  $A_n(x_0 + x, 0) \geq 0$  para todo  $x \in (0, \delta_1)$  y, por continuidad, para todo  $x \in (0, \delta_1)$  existe  $y_x \in (0, y_0)$  tal que  $A_n(x_0 + x, y_x) = 0$ , lo que contradice la hipótesis. Por tanto  $\frac{\partial A_n}{\partial x}(x_0, y_0) \geq 0$ .

Si, ahora, asumimos que  $\frac{\partial A_n}{\partial x}(x_0, y_0) > 0$  con la expresión siguiente

$$\frac{\partial A_n}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{A_n(x_0 - x, y_0)}{-x},$$

igual que antes, tenemos  $0 < \delta_2 \leq x_0 - a_n$  de tal forma que  $A_n(x_0 - x, y_0) < 0$  para todo  $x \in (0, \delta_2)$ . Con los mismos argumentos que antes podemos contradecir la hipótesis, lo que significa que  $\frac{\partial A_n}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$  y por (2.4) obtenemos la fórmula que queríamos  $\frac{\partial |G_n^*(z)|}{\partial x}(z_0) = p_{k_n}^{x_0} \log p_{k_n}$ . ■

**Lema 9** ([14, Lema 4]) *Sea  $\sigma$  un número real. Entonces*

$$\max\{|G_n(z)|; \operatorname{Re} z \leq \sigma\} = G_n(\sigma), \quad n \geq 2.$$

*Si  $n > 2$ , el máximo se alcanza únicamente en  $\sigma$ .*

**Prueba.** Para todo  $z = x + iy$ , con  $x \leq \sigma$ , tenemos que  $|G_n(z)| \leq G_n(x) \leq G_n(\sigma)$ , lo que implica que  $\max\{|G_n(z)|; \operatorname{Re} z \leq \sigma\} = G_n(\sigma)$ . Nos falta demostrar que  $z = \sigma$  es el único punto en el cual se alcanza el máximo.

Tenemos

$$|1 + 2^{\sigma+it} + 3^{\sigma+it}| = \left| \frac{1}{2} + 2^{\sigma+it} + \frac{1}{2} + 3^{\sigma+it} \right| \leq \left| \frac{1}{2} + 2^{\sigma+it} \right| + \left| \frac{1}{2} + 3^{\sigma+it} \right|.$$

Supongamos que existan dos números positivos  $\lambda$  y  $\mu$  tales que  $2^{\sigma+it} = \frac{\lambda}{2}$  y  $3^{\sigma+it} = \frac{\mu}{2}$ . Entonces existen dos números enteros no nulos  $k, l$  tales que  $\frac{\log 2}{\log 3} = \frac{k}{l}$ , lo que es imposible porque  $\log 2$  y  $\log 3$  son linealmente independientes sobre los racionales.

Al final, eso implica que o  $\left| \frac{1}{2} + 2^{\sigma+it} \right| < \frac{1}{2} + 2^\sigma$  o  $\left| \frac{1}{2} + 3^{\sigma+it} \right| < \frac{1}{2} + 3^\sigma$ . Teniendo una de estas desigualdades estrictas obtenemos que

$$|1 + 2^{\sigma+it} + 3^{\sigma+it}| < 1 + 2^\sigma + 3^\sigma, \text{ para todo real } t \neq 0,$$

lo que significa que el máximo se alcanza únicamente en  $z = x$ . ■

Podemos subrayar, como consecuencia, que si una curva de nivel  $L$  de  $G_n(z)$ , para  $n > 2$ , corta el eje real en un  $x_0$ , entonces cualquier punto  $z$  de  $L$  distinto de  $x_0$  cumple  $\operatorname{Re} z > x_0$ .

Tenemos, finalmente, todas las herramientas para demostrar el teorema principal de este capítulo sobre la densidad de las partes reales de los ceros de  $G_n(z)$  y lo que es equivalente de las sumas parciales de la zeta de Riemann.

Sabiendo que existen ceros simples para  $G_n(z)$ , enunciamos de nuevo el teorema y, con el apoyo de las curvas de nivel y de las funciones auxiliar y adjunta, expondremos su demostración.

**Teorema 19** ([14, theorem 4]) *Sea  $z_0 = x_0 + iy_0$  un cero simple de  $G_n(z)$  para  $n > 2$ . Entonces, existen dos números positivos  $\epsilon_1, \epsilon_2$ , con  $\epsilon_1 + \epsilon_2 > 0$ , tales que  $[x_0 - \epsilon_1, x_0 + \epsilon_2] \subset R_n$ .*

**Prueba.** El caso  $n = 3$ , se obtiene directamente del teorema principal del artículo de Moreno [46]. Supondremos, entonces que  $n > 3$  y, como en el lema anterior, también que  $y_0 > 0$ .

Siendo el punto  $z_0$  un cero de  $G_n(z)$ , tenemos  $|G_n^*(z_0)| = p_{k_n}^{x_0}$  y entonces la curva de nivel  $L_0 \equiv |G_n^*(z)| = p_{k_n}^{x_0}$  pasa por el punto  $z_0$ .

Definimos  $P_0 := \{\operatorname{Re} z; z \in L_0\}$  y vamos a demostrar que  $P_0$  contiene un intervalo propio con  $x_0$  dentro.

En efecto, si  $z \in L_0$  es un punto de la recta  $x = x_0$  de tal forma que  $(G_n^*)'(z) = 0$ , obtenemos del Lema 6 que la proyección de  $L_0$  en el eje real contiene un intervalo con  $x_0$  como punto interior. Eso es exactamente lo que queríamos y además  $(G_n^*)'(z_0) = 0$ .

Sea  $M_0$  la componente arco-conexa de  $L_0$  que pasa por el punto  $z_0$ . Si  $M_0$  no está contenida en la recta  $x = x_0$ , entonces  $P_0$  contiene un intervalo propio conteniendo  $x_0$ . Si no fuera el caso, es decir, que  $M_0$  estuviera contenida en  $x = x_0$ , entonces aplicando el Lema 9 a  $G_n^*(z)$  obtenemos que  $x_0$  no está en  $L_0$ . Eso implica que existe un punto, que llamaremos  $\omega_0 = x_0 + iu_0$  de  $M_0$ , tal que

$$u_0 = \min\{t > 0; x_0 + it \in M_0\}. \quad (2.22)$$

y en este caso tenemos  $G_n^*(\omega_0) = 0$  y obtenemos lo que queríamos.

De otro lado, si  $G_n^*(\omega_0) \neq 0$ , por el Lema 5, el punto  $\omega_0$  hubiera sido un punto relativo interior de  $M_0$ , lo que contradice (2.22). Finalmente, existen  $\delta_1, \delta_2 \geq 0$ , con  $\delta_1 + \delta_2 > 0$ , tales que

$$[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2] \subset P_0 \cap [a_n, b_n]. \quad (2.23)$$

Si  $\delta_2 > 0$ , sea  $x \in (x_0, x_0 + \delta_2)$ . Entonces, por (2.23) podemos decir que  $x \in P_0$  y que existe un punto  $z = x + iy \in L_0$ . Esto nos da que  $|G_n^*(z)| = p_{k_n}^{x_0}$  y como  $x_0 < x$ , obtenemos  $|G_n^*(z)| = p_{k_n}^{x_0} < p_{k_n}^x$ , lo que implica, por (2.4), que  $A_n(x, y) < 0$ .

Por otra parte, como  $x \in [a_n, b_n]$ , por (2.15), tenemos  $A_n(x, 0) \geq 0$  y, por continuidad, existe un  $y_x$  tal que  $A_n(x, y_x) = 0$ . El Teorema 17 conduce a  $x \in R_n$  y obtenemos lo que queríamos tomando  $\epsilon_1 = 0$  y  $\epsilon_2 = \delta_2$ .

Vamos a suponer ahora que  $\delta_2 = 0$ . En este caso, y por (2.23), obtenemos

$$(x_0 - \delta_1, x_0) \subset P_0 \cap [a_n, b_n], \quad \delta_1 > 0.$$

Supongamos la existencia de un  $\epsilon_1 \in (0, \delta_1]$  tal que para todo  $x \in (x_0 - \epsilon_1, x_0)$  existe un  $y_x \in \mathbb{R}$  tal que  $A_n(x, y_x) < 0$ . Si elegimos  $\epsilon_1 = \delta_1$  y  $\epsilon_2 = 0$ , con los mismos argumentos que para el caso  $\delta_2 > 0$  conseguimos demostrar el teorema. Nos queda, entonces, justificar la existencia de tal  $\epsilon_1$ . Si no fuera el caso, para todo  $\epsilon \in (0, \delta_1]$  existiría un  $x_\epsilon \in (x_0 - \epsilon, x_0)$  tal que

$$A_n(x_\epsilon, y) \geq 0 \text{ para todo } y \in \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

Para un  $m$  suficientemente grande, dado  $\epsilon = \frac{1}{m}$  existe  $x_m \in (x_0 - \frac{1}{m}, x_0)$  tal que  $A_n(x_m, y) \geq 0$  para todo  $y \in \mathbb{R}$ . Así, para todo  $y \in \mathbb{R}$  dado obtenemos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_n(x_m, y) = A_n(x_0, y) \geq 0. \quad (2.25)$$

Además, como  $|G_n^*(z_0)| = p_{k_n}^{x_0} \neq 0$ , la función  $A_n(x, y)$  es diferenciable en un entorno de  $(x_0, y_0)$ . Como  $A_n(x_0, y_0) = 0$  y por (2.25) se puede escribir

$$\frac{\partial A_n}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{A_n(x_0, y_0 + y)}{y} \geq 0$$

y

$$\frac{\partial A_n}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{A_n(x_0, y_0 + y)}{y} \leq 0,$$

lo que implica que  $\frac{\partial A_n}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ .

Por (2.4) esto significa que  $\frac{\partial |G_n^*(x + iy)|}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$  y por (2.20) tenemos

$$\frac{\partial \arg G_n^*(z_0)}{\partial x} = 0. \quad (2.26)$$

Finalmente, como

$$\frac{\partial G_n(z)}{\partial x} = \frac{\partial G_n^*(z)}{\partial x} + \frac{\partial p_{k_n}^z}{\partial x},$$

obtenemos

$$\frac{\partial G_n(z)}{\partial x} = e^{i \arg G_n^*(z)} \frac{\partial |G_n^*(z)|}{\partial x} + i G_n^*(z) \frac{\partial \arg G_n^*(z)}{\partial x} + p_{k_n}^z \log p_{k_n}.$$

Ahora utilizando (2.26) y (2.21), llegaremos a una contradicción. En efecto,

$$G_n'(z_0) = \frac{\partial G_n(z_0)}{\partial x} = e^{i \arg G_n^*(z_0)} p_{k_n}^{x_0} \log p_{k_n} + p_{k_n}^{z_0} \log p_{k_n}.$$

Obtenemos, finalmente,

$$G_n'(z_0) = (G_n^*(z_0) + p_{k_n}^{z_0}) \log p_{k_n} = G_n(z_0) \log p_{k_n} = 0,$$

y esto es una contradicción, porque  $z_0$  es un cero simple de  $G_n(z)$ , lo que concluye la demostración. ■

Mientras se estaba redactando esta tesis, Gaspar Mora publicó en [43] un resultado más general, probando que, a partir de un cierto rango, hay densidad de las partes reales de cualquier cero (no únicamente simple) de la función  $G_n(z)$  en intervalos incluidos en su banda crítica.





## Capítulo 3

# Clases de equivalencia de Bohr de polinomios de Dirichlet.

**Sumario.** Se propone, en este capítulo, demostrar que el teorema de equivalencia de Bohr se puede aplicar a los polinomios de Dirichlet dentro de bandas verticales incluidas en las bandas críticas de estos polinomios. Utilizamos nociones de aritmética, como las funciones completamente multiplicativas, para transportar una propiedad de densidad de los ceros de polinomios de Dirichlet y presentamos un método explícito para construir polinomios de Dirichlet que comparten una propiedad topológica llama  $\mathcal{D}$ -propiedad. Damos algunas aplicaciones, como por ejemplo una demostración diferente a la de [17] sobre la densidad de los ceros de las sumas parciales de la función alternada de la zeta de Riemann.

---

**Abstract.** We show, in this chapter, that the Bohr's equivalence theorem can be applied to Dirichlet polynomials within vertical strips included in the critical strips of these polynomials. We use arithmetic notions, such as completely multiplicative functions, to transport a property of density of zeros of Dirichlet polynomials and present an explicit method for constructing Dirichlet polynomials sharing a topological property called  $\mathcal{D}$ -property. We give some applications, such as a proof, which different from that given by [17], on the density of the zeros of the partial sums of the Dirichlet eta function.

### 3.1. Introducción

En el segundo capítulo hemos demostrado que las partes reales de los ceros de las aproximaciones de la zeta de Riemann del tipo  $G_n(z) = \zeta_n(-z)$  cumplen una propiedad de densidad dentro de intervalos incluidos en el intervalo crítico. Las funciones enteras del tipo  $G_n(z)$  pertenecen a la familia de los polinomios de Dirichlet.

En su artículo [17], Farag demuestra que a partir de un cierto rango  $n_0$ , los polinomios de Dirichlet de la forma  $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^z}$ , para  $n \geq n_0$ , sumas parciales de la función eta de Riemann, tienen sus ceros que cumplen la misma propiedad de densidad que los de  $G_n(z)$  en del intervalo  $(0, 1)$ .

Los autores de [30], M. Lapidus y M. Van Frankenhuysen, estudiaron otros polinomios de Dirichlet relacionados con cuerdas fractales y constataron numéricamente que las partes reales de sus ceros tienen también esta propiedad de densidad y lo enunciaron en forma de conjeturas.

En su estudio de la función zeta de Riemann, H. Bohr [6] introdujo una relación de equivalencia entre series de Dirichlet y demostró que si dos series de Dirichlet son equivalentes entonces tienen el mismo conjunto de valores dentro de semi-planos abiertos contenidos en el plano complejo.

Como se dijo en capítulos anteriores, Túran y Spira usaron este resultado para dar condiciones suficientes para la demostración de la hipótesis de Riemann.

Más recientemente, Balazard y Velázquez-Castañón, en [3], mencionaron, sin demostrarla, la posibilidad de utilizar la equivalencia de Bohr para polinomios de Dirichlet.

Con objeto de entender mejor a la función zeta de Riemann, se consideró también la función eta de Riemann

$$R(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z},$$

que converge en  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ . De hecho, hay una relación estrecha entre las dos funciones que se expresa con la igualdad siguiente

$$R(z) = (1 - 2^{1-z})\zeta(z).$$

En este capítulo, vamos a dar una prueba de un resultado expuesto sin demostración en [3]. En efecto, se mostrará que el teorema de equivalencia de Bohr para series de Dirichlet dentro de semi-planos abiertos del plano complejo es también cierta para polinomios de Dirichlet en de bandas verticales incluidas en las bandas críticas.

Utilizando el resultado principal del capítulo anterior, mostraremos que se puede trasladar una propiedad topológica de los ceros de ciertos polinomios de Dirichlet y que además tenemos un método explícito para construir tales polinomios. Daremos una prueba diferente a la de Farag para algunos valores concretos de  $n$  y, en estos casos, aprovecharemos para ampliar el intervalo, demostrando que la propiedad de densidad se cumple en todo el intervalo crítico y no únicamente en  $(0, 1)$ .

## 3.2. El teorema de equivalencia de Bohr.

Si consideramos la suma parcial de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ , con  $a_n, z \in \mathbb{C}$ , obtenemos un polinomio de Dirichlet que es una clase particular de polinomios exponenciales. Ahora, vamos a dar una definición que se puede encontrar en [1, p. 166].

**Definición 11** Sea  $\Lambda = \{\lambda_n\}$  una sucesión infinita de números reales distintos. Diremos que la sucesión finita o infinita numerable  $\{\beta_n\}$  de números reales es una base del conjunto  $\Lambda$  si se cumplen las siguientes condiciones:

1. La sucesión  $\{\beta_n\}$  es linealmente independiente sobre los racionales;
2. Cada  $\{\lambda_n\}$  se puede expresar como una combinación lineal finita de términos de  $\{\beta_n\}$ ;
3. Cada  $\beta_n$  se puede escribir como una combinación lineal finita de términos de  $\Lambda$ .

Por ejemplo, si consideramos  $\Lambda = \{\log n\}$ , entonces tenemos el siguiente resultado:

**Lema 10** Sean  $n$  un número entero mayor que 2 y  $\{p_1, p_2, \dots, p_{k_n}\}$  el conjunto de todos los números primos menores o iguales que  $n$ . Entonces, el conjunto

$$\{\log p_1, \log p_2, \dots, \log p_{k_n}\}$$

es linealmente independiente, es decir, la combinación lineal  $n_1 \log p_1 + n_2 \log p_2 + \dots + n_{k_n} \log p_{k_n} = 0$ , con números enteros  $n_1, n_2, \dots, n_{k_n}$ , implica que  $n_1 = n_2 = \dots = n_{k_n} = 0$ .

Además, podemos encontrar enteros  $\{c_{m,j} : m = 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k_n\}$  de tal forma que

$$\log m = \sum_{j=1}^{k_n} c_{m,j} \log p_j, \quad (2.1)$$

para todo  $m = 2, \dots, n$ .

Como conclusión, el conjunto  $\{\log p_n\}$ , siendo  $p_n$  el  $n$ -ésimo primo, es una base de  $\Lambda$ , y si tomamos  $m$  y  $l$  tales que  $ml \leq n$ , entonces tenemos  $c_{ml,j} = c_{m,j} + c_{l,j}$ .

Ahora consideramos dos series generales de Dirichlet con las mismas sucesiones de exponentes  $\Lambda = \{\lambda_n\}$ , es decir,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n z}.$$

Suponemos, además, que  $\{\beta(n)\}$  es una base para  $\Lambda$ . Entonces podemos escribir

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^{q(n)} r_{n,k} \beta(k),$$

donde los  $r_{k,n}$  son racionales y la suma total  $q(n)$  depende de  $n$ .

**Definición 12** Decimos que las dos series  $f(z)$  y  $g(z)$  son equivalentes respecto de la base  $\{\beta(n)\}$ , y lo notaremos por  $f(z) \sim g(z)$ , si para una sucesión de números reales  $(y_n)$  se cumple la propiedad

$$b_n = a_n \exp \left( i \sum_{k=1}^{q(n)} r_{n,k} y_k \right).$$

Se puede aplicar esta definición, mutatis mutandi, a polinomios de Dirichlet. Las propiedades siguientes se pueden encontrar en [1, Theorem 8.10] y [1, Theorem 8.11]:

**Remark 1** *La relación  $\sim$  que hemos expuesto en la definición anterior es independiente de la base. Además, es una relación de equivalencia, es decir, es reflexiva, simétrica y transitiva.*

Ahora singularizamos la definición 12 a las series de Dirichlet cuya sucesión de exponentes  $\Lambda$  está formada por  $\{\log n\}$ . Entonces, consideramos a la definición siguiente:

**Definición 13** *Dos series de Dirichlet ordinarias*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-z}$$

*son Bohr-equivalentes si, y sólo si, existe una función completamente multiplicativa  $\chi$  tal que*

1.  $b_n = \chi(n)a_n$ ;
2.  $|\chi(p)| = 1$  siempre y cuando  $a_n \neq 0$  y  $p$  es un divisor primo de  $n$ .

**Definición 14** *Se define la abscisa de convergencia de una serie de Dirichlet como la intersección del eje real con la recta vertical en el plano complejo, de tal forma que hay convergencia por la derecha de esta misma recta y divergencia por la izquierda.*

Los dos teoremas siguientes se pueden encontrar en [1, Theorem 8.10], y [1, Theorem 8.16]:

**Teorema 20** *Dos series equivalentes tienen la misma abscisa de convergencia absoluta.*

**Teorema 21 (Teorema de equivalencia de Bohr)** *Consideramos a  $f(z)$  y  $g(z)$  dos series de Dirichlet equivalentes con abscisa de convergencia absoluta  $\sigma_a$ . Entonces las funciones  $f(z)$  y  $g(z)$  tienen el mismo conjunto de valores en cada semi-plano abierto  $\sigma > \sigma_1 \geq \sigma_a$ .*

Lo que se propone a continuación es enunciar un resultado similar al teorema de equivalencia de Bohr, pero en el caso de polinomios de Dirichlet, y demostrar que en lugar de trabajar en semi-planos abiertos se puede hacer en bandas verticales.

**Proposición 22** *Se consideran dos polinomios de Dirichlet ordinarios*

$$P(z) = 1 + \sum_{m=2}^n a_m m^{-z} \quad y \quad Q(z) = 1 + \sum_{m=2}^n b_m m^{-z}.$$

Se dice que son Bohr-equivalentes si, y solo si, se puede encontrar una función  $\chi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

1.  $\chi(1) = 1$  y  $\chi(ml) = \chi(m)\chi(l)$ , para cualquier par de enteros positivos  $m$  y  $l$  cumpliendo  $ml \leq n$ ;
2.  $b_m = \chi(m)a_m$ , para todo  $m = 2, \dots, n$ ;
3.  $|\chi(p)| = 1$  siempre y cuando  $a_m \neq 0$  y  $p$  es un divisor primo de  $m$ .

**Prueba.** Si  $P(z)$  y  $Q(z)$  son Bohr-equivalentes, entonces, por la definición 12, existe un conjunto de números reales  $\{y_1, y_2, \dots, y_{k_n}\}$  tal que

$$b_m = a_m \exp\left(i \sum_{j=1}^{k_n} c_{m,j} y_j\right), \text{ para todo } m = 2, \dots, n,$$

donde los enteros  $c_{m,j}$  son los que se han considerado en (2.1).

Se define ahora una función  $\chi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$\chi(m) = \exp\left(i \sum_{j=1}^{k_n} c_{m,j} y_j\right), \text{ para todo } m = 2, \dots, n.$$

Entonces tenemos que  $\chi(1) = 1$ ,  $\chi(ml) = \chi(m)\chi(l)$ , para cualquiera de los enteros positivos  $m$  y  $l$  cumpliendo que  $ml \leq n$ . Finalmente,  $|\chi(m)| = 1$  y  $b_m = \chi(m)a_m$ , para todo  $m = 2, \dots, n$ , lo que implica que las condiciones expuestas en la proposición se cumplen.

Recíprocamente, si asumimos la existencia de la función  $\chi$  satisfaciendo las tres condiciones de la proposición y si consideramos  $m \in \{2, \dots, n\}$

tal que  $a_m \neq 0$ , entonces del hecho de que la función sea completamente multiplicativa podemos escribir que

$$\chi(m) = \prod_{j=1}^{k_n} f(m, j),$$

con

$$f(m, j) = \begin{cases} \chi(p_j)^{c_{m,j}}, & \text{si } p_j | m \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además, la condición 3) de la proposición implica que  $|\chi(p_j)| = 1$ , para cualquier  $p_j$  divisor primo de  $m$ . En consecuencia, para tales números primos podemos escribir que  $\chi(p_j) = e^{iy_j}$  con  $y_j = \arg(\chi(p_j))$ , donde  $\arg$  representa el argumento principal.

Entonces  $f(m, j) = e^{ic_{m,j}y_j}$ , para todo  $j = 1, \dots, k_n$  y podemos escribir  $\chi(m) = \exp(i \sum_{j=1}^{k_n} c_{m,j} y_j)$ , lo que implica que la Definición 12 se cumple para los  $m$  tales que  $a_m \neq 0$  y tenemos la proposición demostrada. En el caso que  $a_m = 0$ , con la condición 2), tendríamos  $b_m = 0$ , lo que representa un caso trivial. ■

Después de recordar algunos resultados sobre los caracteres de Dirichlet, damos un primer ejemplo de Bohr-equivalencia de series de Dirichlet, series que tienen un papel importante en la teoría analítica de los números. Luego exponemos un ejemplo de dos polinomios de Dirichlet que no son Bohr-equivalentes.

**Definición 15** [16, definición 10.14 p.217] *Dado  $q \in \mathbb{N}^*$ , sea  $G = U(\frac{\mathbb{Z}}{q\mathbb{Z}})$  y consideramos un carácter  $\chi \in \hat{G}$ . Se puede extender  $\chi$  a una función  $\chi_q$  en  $\mathbb{N}$  poniendo*

$$\chi_q = \begin{cases} \chi(n \pmod{q}), & \text{si } n \text{ es coprimo con } q. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

*La función  $\chi_q$  se llama carácter de Dirichlet módulo  $q$ .*

A cada carácter de Dirichlet  $\chi$  módulo  $q$  se le puede asociar la función L de Dirichlet

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

**Proposición 23** [16, teorema 10.16 p. 217] *Un carácter de Dirichlet módulo  $q$  es completamente multiplicativo.*

**Prueba.** Sea  $\chi_q$  un carácter de Dirichlet módulo  $q$ . Dados dos enteros  $m, n$ , si al menos uno de ellos no es coprimo con  $q$ , entonces tampoco lo es el producto  $mn$ . Lo que nos da  $\chi_q(mn) = 0 = \chi_q(m)\chi_q(n)$ . Si por otra parte,  $m$  y  $n$  son coprimos con  $q$ , entonces  $(m \bmod q) \cdot (n \bmod q) = (mn \bmod q)$  por definición, y usando el hecho de que  $\chi_q$  en el sentido original es un carácter de grupo, tenemos  $\chi_q(mn) = \chi_q(m)\chi_q(n)$ . ■

**Ejemplo 24** [1, Teorema 8.17, p. 184]. *Sea  $k \geq 1$  un número entero y  $\chi$  un carácter de Dirichlet módulo  $k$ . Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  una serie de Dirichlet con  $(n, k) = 1$  ( $n$  y  $k$  son coprimos en el sentido común) en el caso que  $a_n \neq 0$ . Entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)a_n}{n^s}$  son Bohr-equivalentes.*

**Ejemplo 25** *Para  $n \geq 4$ , las funciones  $L_n(-z) := 1 - 2^{-z} - \dots - n^{-z}$  y  $G_n(-z) := 1 + 2^{-z} + \dots + n^{-z}$  no son Bohr-equivalentes. En efecto, se puede observar que*

$$L_n(-z) = \sum_{k=1}^n b_k k^{-z} \quad y \quad G_n(-z) = \sum_{k=1}^n a_k k^{-z},$$

con  $b_0 = a_0 = 1$  y  $b_k = -1$ ,  $a_k = 1$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Dado  $n \geq 4$ , supongamos, por reductio ad absurdum, que  $L_n(-z)$  y  $G_n(-z)$  son Bohr-equivalentes. Entonces existe una función completamente multiplicativa  $\chi$  tal que, en particular,  $b_k = \chi(k)a_k$ , para  $k = 0, \dots, 4$ . Teniendo en cuenta el valor de los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$ , obtenemos  $\chi(2) = -1$  y  $\chi(4) = -1$ . Pero con la condición de ser completamente multiplicativa, tenemos que

$$-1 = \chi(4) = \chi(2) \cdot \chi(2) = -1 \cdot (-1) = 1,$$

que es imposible.

El siguiente resultado permite construir de forma explícita polinomios de Dirichlet Bohr-equivalentes. Vamos a considerar secciones de funciones  $L$  de Dirichlet.



**Proposición 26** Dado un número entero  $n \geq 2$ , sea  $\{a_2, \dots, a_n\}$  un conjunto de números complejos con  $a_n \neq 0$  y sea  $\chi_p : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  un carácter de Dirichlet módulo  $p$ , con  $p$  un número primo mayor que  $n$ . Entonces los polinomios de Dirichlet siguientes

$$P(z) = 1 + \sum_{m=2}^n a_m m^{-z} \quad y \quad P_{\chi_p}(z) = 1 + \sum_{m=2}^n \chi_p(m) a_m m^{-z}$$

son Bohr-equivalentes.

**Prueba.** El hecho de que  $\chi_p$  sea un carácter de Dirichlet implica que es una función completamente multiplicativa. Además, si  $m$  es un número primo tal que  $m \leq n$ , entonces  $(m, p) = 1$  y, utilizando el teorema de Euler, tenemos que  $m^{\varphi(p)} \equiv 1[p]$ , donde  $\varphi$  representa la función de Euler. Entonces

$$\chi_p(m)^{\varphi(p)} = \chi_p(m^{\varphi(p)}) = \chi_p(1) = 1,$$

lo que implica que  $|\chi_p(m)| = 1$ . Si nos restringimos al conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\chi_p$  se cumplen las tres condiciones de la Proposición 22, lo que implica que los polinomios de Dirichlet considerados son Bohr-equivalentes. ■

En el próximo resultado vamos a mostrar que la propiedad de Bohr-equivalencia se transporta también a las derivadas de polinomios de Dirichlet.

**Proposición 27** Sean  $P(z)$  y  $Q(z)$  dos polinomios de Dirichlet Bohr-equivalentes con las mismas frecuencias  $\lambda_k$ .

Entonces sus sucesivas derivadas  $P^{(m)}(z)$  y  $Q^{(m)}(z)$  son también polinomios Bohr-equivalentes.

**Prueba.** Tomemos  $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k e^{\lambda_k z}$  y  $Q(z) = \sum_{k=0}^n b_k e^{\lambda_k z}$ , con  $b_k = \chi(k) a_k$  y  $\chi$  una función completamente multiplicativa. Entonces, para todo entero  $n$ , tenemos  $P^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^n c_k e^{\lambda_k z}$  y  $Q^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^n d_k e^{\lambda_k z}$ , con  $c_k = a_k (\lambda_k)^m$  y  $d_k = b_k (\lambda_k)^m$ . Entonces se cumple el resultado. ■

Veremos a continuación casos particulares de caracteres de Dirichlet, como por ejemplo el símbolo de Legendre. Pondremos también de relieve que puede ser suficiente considerar funciones completamente multiplicativas tomando únicamente como valores  $-1$  y  $1$  para generar polinomios de Dirichlet Bohr-equivalentes. Daremos ejemplos de tales funciones.

### 3.3. Una propiedad topológica de los ceros.

#### 3.3.1. La $\mathcal{D}$ -propiedad.

En este apartado se considerarán polinomios de Dirichlet ordinarios. Los mismos resultados se pueden obtener con polinomios de Dirichlet generales de la forma  $P(z) = 1 + \sum_{j=1}^n m_j e^{-\omega_j z}$ , con  $\omega_j$  positivo para  $j = 1, \dots, n$ , y  $\omega_1 < \dots < \omega_n$ .

Tenemos ahora  $P(z) = 1 + \sum_{m=2}^n a_m m^{-z}$ , y se cumplen

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x + iy) = 1$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x + iy)}{a_n n^{-x - iy}} = 1.$$

Entonces existen  $x_1 < 0 < x_2$  tales que

$$\left| \frac{P(z)}{a_n n^{-z}} - 1 \right| < 1, \text{ para todo } z \text{ con } \operatorname{Re} z \leq x_1,$$

y

$$|P(z) - 1| < 1, \text{ para todo } z \text{ con } \operatorname{Re} z \geq x_2.$$

Eso implica que  $P(z)$  no tiene ceros en el semi-plano  $\operatorname{Re} z \leq x_1$  y tampoco en el semi-plano  $\operatorname{Re} z \geq x_2$ . En consecuencia, todos los ceros están colocados en la banda

$$x_1 < \operatorname{Re} z < x_2.$$

Podemos enunciar la existencia de números reales  $a_P$  y  $b_P$  tales que:

$$a_P := \inf \{ \operatorname{Re} z : P(z) = 0 \}$$

y

$$b_P := \sup \{ \operatorname{Re} z : P(z) = 0 \}.$$

Se define un intervalo  $I_P := [a_P, b_P]$ , llamado intervalo crítico de  $P(z)$ .

De la misma manera que se hizo en el capítulo anterior, notaremos

$$R_P := \overline{\{ \operatorname{Re} z : P(z) = 0 \}}$$

y trabajaremos con el Teorema 15 como caracterización de los conjuntos  $R_P$ .

**Teorema 28** Sean  $P(z) = 1 + \sum_{m=2}^n a_m m^{-z}$  y  $Q(z) = 1 + \sum_{m=2}^n b_m m^{-z}$  dos polinomios de Dirichlet ordinarios Bohr-equivalentes, entonces  $R_P = R_Q$ .

**Prueba.** El hecho de que  $P(z)$  y  $Q(z)$  sean Bohr-equivalentes implica que existe un vector de números reales  $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_{k_n}\}$  cuyos componentes aparecen en la definición de la función  $\chi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\chi(m) = \exp\left(i \sum_{j=1}^{k_n} c_{m,j} y_j\right) = e^{\langle \mathbf{c}_m, \mathbf{y} \rangle i} \text{ para todo } m = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

con  $\mathbf{c}_m = (c_{m,1}, \dots, c_{m,k_n})$  el vector con componentes enteros que aparece en el Teorema 15. Esta función cumple que  $b_m = \chi(m)a_m$  y  $|\chi(m)| = 1$ , para todo  $m = 2, \dots, n$ .

Por otro lado, si  $t \in R_P$ , entonces por el Teorema 15 podemos decir que existe un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{k_n}$  tal que  $F_P(t, \mathbf{x}) = 1 + \sum_{m=2}^n m^{-t} e^{\langle \mathbf{c}_m, \mathbf{x} \rangle i} = 0$ .

Si ahora ponemos  $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{k_n}$  y utilizamos (3.1) obtenemos

$$\begin{aligned} F_Q(t, \mathbf{z}) &= 1 + \sum_{m=2}^n b_m m^{-t} e^{\langle \mathbf{c}_m, \mathbf{z} \rangle i} \\ &= 1 + \sum_{m=2}^n \chi(m) a_m m^{-t} e^{\langle \mathbf{c}_m, \mathbf{x} \rangle i} e^{-\langle \mathbf{c}_m, \mathbf{y} \rangle i} \\ &= 1 + \sum_{m=2}^n a_m m^{-t} e^{\langle \mathbf{c}_m, \mathbf{x} \rangle i} = 0, \end{aligned}$$

y entonces  $t \in R_Q$ .

Recíprocamente, si  $t \in R_Q$  y tomamos  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{k_n}$  tal que  $F_Q(t, \mathbf{z}) = 0$ , entonces  $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{y}$  es tal que  $F_P(t, \mathbf{x}) = 0$ , y el teorema está demostrado. ■

Ahora podemos, a partir del teorema anterior, enunciar dos resultados que van a ser claves para nuestro propósito.

**Corolario 4** Sean  $P(z)$  y  $Q(z)$  dos polinomios de Dirichlet ordinarios Bohr-equivalentes, entonces  $\alpha_P = \alpha_Q$  y  $\beta_P = \beta_Q$ . Esto significa que tienen el mismo intervalo crítico.

Es decir, estos polinomios de Dirichlet Bohr-equivalentes tienen la misma banda crítica. Ahora, se presenta el resultado que permitirá desarrollar la propiedad topológica de los ceros de tales polinomios de Dirichlet.

**Corolario 5** Sean  $P(z)$  y  $Q(z)$  dos polinomios de Dirichlet ordinarios Bohr-equivalentes. Entonces, para cada cero  $z_0 = \sigma_0 + it_0$  de  $P(z)$  y para todo  $\epsilon > 0$ , se puede encontrar un cero  $z'_0 = \sigma'_0 + it'_0$  de  $Q(z)$  tal que  $\sigma_0 - \epsilon < \sigma'_0 < \sigma_0 + \epsilon$ .

**Definición 16** Sea  $P(z)$  un polinomio de Dirichlet y

$$S_{(a,b)} \equiv \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} z < b\}$$

una banda vertical abierta contenida en la banda crítica de  $P(z)$ . Se dice que  $P(z)$  tiene la  $\mathcal{D}$ -propiedad en  $S_{(a,b)}$  si  $P(z)$  tiene ceros cerca de cualquier recta paralela al eje imaginario incluido en la banda  $S_{(a,b)}$ .

Si  $P(z)$  es un polinomio de Dirichlet, decir que *tiene ceros cerca de cualquiera recta incluida en una banda de tipo  $S_{(a,b)}$*  significa que dados  $\sigma_2$  con  $a < \sigma_2 < b$  y  $\epsilon > 0$  se puede encontrar  $z^* = \sigma^* + it^*$  tal que  $\sigma_2 - \epsilon < \sigma^* < \sigma_2 + \epsilon$  y  $P(z^*) = 0$ .

De manera equivalente, eso significa que el conjunto  $\{\operatorname{Re} z : P(z) = 0\}$  es denso en el intervalo  $[a, b]$ , es decir,  $R_P = [a, b]$ .

El teorema siguiente es una forma distinta de escribir el Corolario 5 y pone en relieve la propiedad topológica de los ceros de polinomios de Dirichlet Bohr-equivalentes.

**Teorema 29 ( $\mathcal{D}$ -propiedad)** Sea  $S_{(a,b)}$  una banda vertical abierta donde el polinomio de Dirichlet  $P(z)$  tiene la  $\mathcal{D}$ -propiedad. Si  $Q(z)$  es un polinomio de Dirichlet Bohr-equivalente a  $P(z)$ , entonces  $Q(z)$  también tiene la  $\mathcal{D}$ -propiedad.

En [14, Theorem 23] se demostró que los ceros simples de la función entera casi-periódica de tipo exponencial  $G_n(z) = 1 + 2^z + \dots + n^z$  tienen sus partes reales que no son puntos aislados del conjunto  $\overline{\{\operatorname{Re} s : G_n(s) = 0\}}$ . Además, en ese artículo subrayamos que  $\zeta_n(z) = G_n(-z)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $z \in \mathbb{C}$ . Borwein *et al.* demostraron en [9] que todos los ceros de  $\zeta_3(z)$  son simples y por simetría podemos decir que todos los ceros de  $G_3(z)$  son simples. De hecho, todos los ceros de  $G_2(z)$ ,  $G_3(z)$  y  $G_4(z)$  son simples (véase [14, p18]).

Antes de exponer el próximo teorema, hay que añadir que el polinomio de Dirichlet  $G_n(z)$  tiene ceros simples, lo que significa que en algunos intervalos incluidos en su banda crítica tiene la  $\mathcal{D}$ -propiedad. Con la meta de encontrar un polinomio de Dirichlet con la  $\mathcal{D}$ -propiedad, exponemos un resultado importante que se puede encontrar en [14, Corollary 25, p. 19] y que vimos en el capítulo anterior.

**Proposición 30** Sean  $n > 2$  un número primo,  $b_n \equiv \sup\{\operatorname{Re} s : G_n(s) = 0\}$  y  $b'_n \equiv \sup\{\operatorname{Re} s : G'_n(s) = 0\}$ . Entonces todos los ceros de  $G_n(s)$  incluidos en la banda vertical  $\{z \in \mathbb{C} : b'_n < \operatorname{Re} s < b_n\}$  son simples.

Como se ha convenido, indicaremos por  $S_{(b'_n, b_n)} \equiv \{z \in \mathbb{C} : b'_n < \operatorname{Re} s < b_n\}$  la banda vertical donde todos los ceros de  $G_n(z)$ ,  $n \geq 2$ , son simples.

**Teorema 31** Sea  $\chi : \mathbb{N}^* \rightarrow \{\pm 1\}$  una función completamente multiplicativa que cumple las condiciones de la Proposición 22. Entonces todo polinomio de Dirichlet de la forma  $Q_n(z) = \sum_{k=1}^n \chi(k)k^z$ ,  $n \geq 2$ , tiene la  $\mathcal{D}$ -propiedad para cada  $S_{(b'_n, b_n)}$ .

**Prueba.** Consideramos  $G_n(z) = \sum_{k=1}^n e^{(\log k)z}$ , entonces  $Q_n(z)$  y  $G_n(z)$  son Bohr-equivalentes porque la función completamente multiplicativa  $\chi$  satisface la igualdad  $1 = \chi(k)\chi(k)$ , para todo  $k = 1, \dots, n$ , y  $|\chi(j)| = 1$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Ahora, aplicando [14, Theorem 4], si  $z_0 = \sigma_0 + it_0$  es un cero simple de  $G_n(z)$  (cuya existencia está asegurada por [14, Corollary 3]), existen dos números no negativos  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ , con  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$ , tales que  $G_n(z)$  tiene ceros cerca de cualquiera recta paralela al eje imaginario dentro de la banda vertical  $\{z \in \mathbb{C} : \sigma_0 - \varepsilon_1 \leq \operatorname{Re} z \leq \sigma_0 + \varepsilon_2\}$ .

Entonces, existen  $a < b$ , con  $a > \sigma_0 - \varepsilon_1$  y  $b < \sigma_0 + \varepsilon_2$ , tales que  $G_n(z)$  cumple la  $\mathcal{D}$ -propiedad en  $S_{(a, b)}$ . Finalmente, teniendo en cuenta el Teorema 29, obtenemos el resultado.

Ahora, por el Corolario 5, para cada cero  $z_0 = \sigma_0 + it_0$  de  $G_n(z)$  y para todo  $\epsilon > 0$ , podemos encontrar un cero  $z'_0 = \sigma'_0 + it'_0$  de  $Q_n(z)$  tal que  $\sigma_0 - \epsilon < \sigma'_0 < \sigma_0 + \epsilon$  y  $t'_0 \in \mathbb{R}$ . Aplicando [14, Theorem 26], tenemos el resultado que queríamos. ■

Una cuestión importante es saber si todos los polinomios de Dirichlet cuyos ceros están cerca de cada recta vertical incluida en sus bandas críticas son Bohr-equivalentes. La respuesta es claramente negativa.

**Proposición 32** Sean  $P(z)$  y  $Q(z)$  dos polinomios de Dirichlet con las mismas frecuencias  $\log k$  con  $k = 1, \dots, n$  y que satisfacen el hecho de tener unas bandas abiertas

$$S_{(a,b)} \equiv \{s \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} s < b\}$$

en su banda crítica, conteniendo sus ceros simples, con la  $\mathcal{D}$ -propiedad. Entonces  $P(z)$  y  $Q(z)$  no son Bohr-equivalentes.

**Prueba.** Para  $n \geq 2$ , como la función  $G_n(-z) = 1 + 2^{-z} + \dots + n^{-z}$  satisface las condiciones de la Proposición ([14], Theorem 23), la idea de la prueba es hallar un polinomio de Dirichlet con las mismas propiedades de tal forma que no sea Bohr-equivalente a  $G_n(-z)$ . Para ello, utilizaremos la suma parcial de la función zeta alternada

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^z} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} e^{-(\log k)z}.$$

Farag demostró que este polinomio de Dirichlet tiene sus ceros cerca de cada recta vertical en su banda crítica (véase [17, Theorem 1]).

Por otro lado, no es difícil ver que la función  $n \mapsto (-1)^{n-1}$  no es completamente multiplicativa. Entonces hemos encontrado dos polinomios de Dirichlet que no son Bohr-equivalentes y que tienen sus ceros cerca de cada recta vertical incluida en sus bandas críticas. ■

Como hemos visto en el Teorema 31, se necesita una función completamente multiplicativa que cumpla los requisitos de la Proposición 22. Damos un primer ejemplo de tal función y deducimos otro resultado.

La función de Liouville, definida por

$$\begin{cases} \lambda(1) & = & 1, \\ \lambda(p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}) & = & (-1)^{r_1+r_2+\dots+r_k}, \end{cases}$$

donde los  $p_j$  son números primos y  $r_j$  son enteros.

Se puede añadir que los polinomios de Dirichlet

$$f(z) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-\lambda_k z} \text{ y } g(z) = \sum_{k=1}^n b_k e^{-\lambda_k z},$$

con  $\lambda_k = \log k$  para  $k = 1, \dots, n$ , son Bohr-equivalentes en el caso de que tengamos  $a_1 = b_1$ ,  $a_k = -b_k$  para  $k$  primo y  $a_j = b_j = 0$  para que  $j$  no sea primo. Hemos visto en el Ejemplo 25 que, para  $n \geq 4$ , las funciones  $L_n(z) = 1 - 2^z - \dots - n^z$  y  $G_n(z) = 1 + 2^z + \dots + n^z$  no son Bohr-equivalentes. Ahora, con el uso de la función de Liouville, se puede enunciar el resultado siguiente:

**Proposición 33** *Dados un número entero  $n$  y  $p_k$  siendo el  $k$ -ésimo primo, las funciones  $1 - \sum_{k=1}^n e^{z \log p_k}$  y  $1 + \sum_{k=1}^n e^{z \log p_k}$  son Bohr-equivalentes.*

Los polinomios  $L_n(z) = 1 - 2^z - \dots - n^z$  tienen un papel importante con relación a las curvas fractales, como se verá en el capítulo siguiente (véase también [13]).

### 3.3.2. Algunos ejemplos de polinomios de Dirichlet con la $\mathcal{D}$ -propiedad.

Para poder aplicar los resultados del párrafo anterior, necesitamos entonces polinomios que ya tengan la  $\mathcal{D}$ -propiedad, pero también funciones completamente multiplicativas que cumplen las condiciones expuestas en la Proposición 22.

Es lo que se propone en este párrafo. Vamos a utilizar polinomios de Dirichlet que ya sabemos que tienen la  $\mathcal{D}$ -propiedad como polinomios *base* para *generar* otros polinomios de Dirichlet cuyos ceros tengan esta propiedad topológica.

Dicho de otra forma, podemos dar un método explícito para crear polinomios de Dirichlet con la  $\mathcal{D}$ -propiedad.

En este momento merece la pena hacer un par de comentarios:

- (i) Según una observación de Balazard y Velásquez-Castañón [3, p.344],

podemos considerar una función completamente multiplicativa  $\chi$  tal que  $|\chi(m)| = 1$  para todos  $m \geq 1$ .

Entonces, trabajaremos con funciones completamente multiplicativas con valores en el conjunto  $\{-1, +1\}$ .

- (ii) Como hemos visto antes, la función de Liouville es una buena candidata y se van presentar otras.

Hay que añadir que las funciones que cumplen estos requisitos se pueden generar de forma aleatoria eligiendo al azar los valores que toma la función para números primos. En efecto, si  $X(p_j)$ , con  $p_j$  un número primo, representan variables aleatorias independientes, tomando los valores 1 y  $-1$  con la misma probabilidad y si ponemos  $X(1) = 1$  y  $X(m) = \prod_{j=1}^{k_m} X(p_j)^{c_{m,j}}$ , con  $m = \prod_{j=1}^{k_m} p_j^{c_{m,j}}$ , entonces esta construcción nos da todas las posibles funciones candidatas para la Proposición 22.

Veamos ejemplos de tales funciones que se puedan utilizar en el Teorema 29.

1. Sea  $p$  un número primo. El símbolo de Legendre módulo  $p$  se define como

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } q \text{ no es un residuo cuadrático módulo } p, \\ -1, & \text{si } q \text{ es un residuo cuadrático módulo } p, \\ 0, & \text{si } q \equiv 0[p]. \end{cases}$$

Se dice que  $q$  es un residuo cuadrático módulo  $p$  si  $q \equiv k^2[p]$  para un número entero  $k$  de tal forma que  $k \not\equiv 0[p]$ .

2. Podemos crear funciones completamente multiplicativas con valores en el conjunto  $\{-1, +1\}$  utilizando la función de Liouville y el símbolo de Legendre.

Vamos a exponer un resultado que se puede encontrar en [8, p. 7].

Sea  $\Omega_p(n)$  el número de factores primos  $q$  de  $n$  con  $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ , es decir que los factores primos no son residuos cuadráticos modulo  $p$ .

Tenemos,

$$\Omega_p(n) = \text{card}\{q : q \text{ es primo}, q|n \text{ y } \left(\frac{q}{p}\right) = -1\}.$$



**Definición 17** La función de Liouville modificada módulo  $p$  se define como

$$\lambda_p(n) = (-1)^{\Omega_p(n)}.$$

Para el caso que nos interesa, los resultados más importantes son los siguientes lemas [8, Lemma 1 p. 7].

**Lema 11** La función  $\lambda_p(n)$  es la única función completamente multiplicativa definida por  $\lambda_p(p) = 1$ , y para primos  $q \neq p$  por  $\lambda_p(q) = \left(\frac{q}{p}\right)$ .

Sea  $\Omega'_p(n)$  el número de factores primos  $q$  de  $n$  con  $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ , es decir,

$$\Omega'_p(n) = \text{Card}\{q : q \text{ es primo, } q|n \text{ y } \left(\frac{q}{p}\right) = 1\}.$$

**Lema 12** La función  $\lambda'_p(n)$  es la única función completamente multiplicativa definida por  $\lambda'_p(p) = 1$ , y para primos  $q \neq p$  por  $\lambda'_p(q) = -\left(\frac{q}{p}\right)$ .

Podemos descomponer la función de Liouville en términos de funciones de Liouville modificadas.

**Teorema 34** Si  $\lambda(n)$  es la función de Liouville, entonces

$$\lambda(n) = (-1)^k \cdot \lambda_p(n) \cdot \lambda'_p(n),$$

donde  $p^k | n$  y  $p^{k+1} \nmid n$ .

Ahora que sabemos que existen funciones completamente multiplicativas cumpliendo los requisitos de la Proposición 22, para poder aplicar el Teorema 29 hay que disponer de antemano de polinomios de Dirichlet que tengan la  $\mathcal{D}$ -propiedad.

En su famoso artículo de Compositio Mathematica, [46, p.77], Moreno demostró que las sumas parciales  $\sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j^z}$  ( $n \geq n_0$ ) tienen la  $\mathcal{D}$ -propiedad en la banda  $S_{(0,1)}$ . Basándose en este resultado, si notamos por  $A = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ , con  $n \geq 2$ , el conjunto de números de complejos tales

que  $|m_j| = 1$ , para  $j = 1, \dots, n$ , y si consideramos  $\{p_1, \dots, p_n\}$  el conjunto ordenado de  $n$  números primos, los autores de [45, Theorem 10] demostraron que los polinomios de Dirichlet

$$P_A(z) := 1 + \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{p_j^z}$$

tienen la  $\mathcal{D}$ -propiedad en bandas incluidas en la banda crítica.

A partir de este resultado, se puede enunciar la propiedad siguiente:

**Proposición 35** *Sean  $n$  un número entero y  $\{p_1, \dots, p_{k_n}\}$  el conjunto de los números primos menores o iguales que  $n$ . Entonces los polinomios de Dirichlet*

$$P_A(z) = 1 + \sum_{m=1}^{k_n} \frac{a_m}{p_m^z},$$

siendo  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{k_n}\}$  un conjunto de números complejos del círculo unidad, tienen la  $\mathcal{D}$ -propiedad en sus bandas críticas respectivas  $S(\alpha_{P_A}, \beta_{P_A})$ .

**Prueba.** En primer lugar, para aplicar el Teorema 29, se define la función completamente multiplicativa  $\chi_A : \{1, \dots, k_n\} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\chi_A(1) = 1$ ,  $\chi_A(p_m) = a_m$ , para todo  $m = 1, 2, \dots, k_n$ , y  $\chi_A(m) = 0$  si  $m$  no es un número primo.

Tal función cumple las condiciones de la Proposición 22. Si  $A_1$  y  $A_2$  son dos conjuntos distintos de números complejos perteneciendo al círculo unidad entonces  $P_{A_1}$  y  $P_{A_2}$  son Bohr-equivalentes.

Finalmente, si aplicamos [45, Theorem 10] al polinomio  $P_A(-z) = 1 + \sum_{m=1}^{k_n} a_m e^{z \log p_m}$ , se puede deducir que  $P_A(z)$  tiene la  $\mathcal{D}$ -propiedad en todas sus bandas críticas  $S(\alpha_{P_A}, \beta_{P_A})$ . ■

Ahora, para valores grandes de  $n$ , se van a utilizar las secciones de la función zeta alternada para generar polinomios de Dirichlet que tengan la  $\mathcal{D}$ -propiedad en  $S_{(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ .

**Proposición 36** *Sean  $n$  un número entero y  $p$  un número primo impar de tal forma que  $p > n$ .*

Entonces todos los polinomios de Dirichlet  $\sum_{k=1}^n \frac{\psi_p(k)(-1)^{k-1}}{k^z}$ , donde

$$\psi_p(k) = \begin{cases} \lambda'_p(k), \\ \lambda_p(k), \\ \phi_p(k) = \left(\frac{k}{p}\right), \\ \lambda(k), \end{cases}$$

tienen la  $\mathcal{D}$ -propiedad en  $S_{(0,1)}$ .

Para la demostración, recordamos los resultados siguientes:

**Teorema 37 (Criterio de Euler)** Sea  $p$  un número primo impar, entonces para todo  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right)[p]$ .

**Lema 13 (Lema de Gauss)** Sean  $p$  un primo impar,  $a$  un entero coprimo con  $p$  y  $R = \{k : -\frac{p-1}{2} \leq k \leq \frac{p-1}{2}\}$ . Sean

$$S = \{a, 2a, 3a, \dots, \frac{p-1}{2}a\}$$

y  $S' \subseteq R$  el correspondiente conjunto de representantes módulo  $p$ . Si la cantidad de enteros negativos en  $S'$  es  $n$ , entonces

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^n,$$

donde  $\left(\frac{a}{p}\right)$  es el símbolo de Legendre.

Ahora podemos demostrar la proposición anterior.

**Prueba.** Los dos primeros casos y el cuarto son inmediatos usando las definiciones de la función de Liouville.

Veamos el tercero. Con la condición  $p > n$ , utilizando el Lema de Gauss y la definición del símbolo de Legendre, podemos concluir que  $\sum_{k=1}^n \frac{\phi_p(k)(-1)^{k-1}}{k^z}$  son Bohr-equivalentes a las sumas parciales de la función zeta de Riemann alternada.

En su artículo [17, Theorem 1], Farag demuestra que existe un número entero  $n_0$  tal que para todo  $n \geq n_0$ , las sumas parciales de la función zeta de

Riemann alternada  $R_n$  tienen la  $\mathcal{D}$ -propiedad en la banda  $S_{(0,1)} \subset S_{(\alpha_{R_n}, \beta_{R_n})}$ . Esto nos permite concluir la demostración.

■

Antes de dar un último ejemplo de cómo crear de forma explícita polinomios de Dirichlet con la  $\mathcal{D}$ -propiedad vamos a utilizar los resultados de este párrafo en dos direcciones:

- Para dar una demostración distinta a la que propuso Farag en [17] para los casos  $n = 2, 3, 4, 5$ .
- Para probar que para  $n = 2, 3, 4$ , la  $\mathcal{D}$ -propiedad no está únicamente en la banda vertical  $S_{(0,1)}$  como demostró Farag, sino en toda la banda crítica notada  $S_{(\alpha_{R_n}, \beta_{R_n})}$ .

Lo expondremos en la próxima proposición, pero antes necesitamos un lema.

**Lema 14** *Los polinomios de Dirichlet*

$$R_n(z) = 1 + \sum_{m=2}^n \frac{(-1)^{m-1}}{m^z}$$

y

$$L_n(z) = 1 - \sum_{m=2}^n \frac{1}{m^z}$$

son Bohr-equivalentes para  $n = 2, 3, 4, 5$ .

**Prueba.** Utilizamos la función de Liouville modificada  $\lambda_2(m) = (-1)^{\Omega_2(m)}$ , donde  $\Omega_2(m)$  es el número de factores primos  $q$  de un número entero  $m$  tal que el símbolo de Legendre módulo 2 satisfaga  $\psi_2(q) = 1$ .

Entonces tenemos que  $\Omega_2(1) = 0, \Omega_2(2) = 0, \Omega_2(3) = 1, \Omega_2(5) = 1$ , lo que significa que  $\lambda_2(1) = 1, \lambda_2(2) = 1, \lambda_2(3) = -1, \lambda_2(5) = -1$ . Tenemos, también,  $\lambda_2(4) = \lambda_2(2 \times 2) = \lambda_2(2)^2 = 1$ . La función completamente multiplicativa  $\lambda_2 : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \mathbb{C}$  cumple, entonces, las condiciones de la Proposición 22, lo que nos permite obtener el resultado buscado. ■

Para el caso  $n = 2$ , tenemos  $R_2(z) = L_2(z) = 1 - 2^{-z}$  y es inmediato que los ceros están situados en el eje imaginario y la banda crítica se reduce a este eje.

**Proposición 38** *Los polinomios de Dirichlet*

$$R_n(z) = 1 + \sum_{m=2}^n \frac{(-1)^{m-1}}{m^z}$$

y

$$L_n(z) = 1 - \sum_{m=2}^n \frac{1}{m^z}$$

tienen la  $\mathcal{D}$ -propiedad en toda la banda crítica  $S_{(\alpha_{R_n}, \beta_{R_n})}$ , para  $n = 3, 4$ .

**Prueba.** Vamos a usar el lema anterior. Hemos demostrado que  $R_n(z)$  y  $L_n(z)$  son Bohr-equivalentes para  $n = 3, 4$ . Utilizando [13, Section 3], sabemos que  $L_n(z)$  tiene la  $\mathcal{D}$ -propiedad en toda la banda crítica  $S_{(\alpha_{L_n}, \beta_{L_n})}$  para  $n = 3, 4$ . El Teorema 29 permite concluir. ■

Terminaremos este apartado empleando [14].

**Proposición 39** *Sean  $n > 2$  un número primo y  $\chi_p : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  cualquier carácter de Dirichlet módulo  $p$  con  $p$  un número primo mayor que  $n$ .*

*Sea  $\chi : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 1\}$  una función completamente multiplicativa. Entonces podemos asegurar la existencia de bandas abiertas  $S_{(a_j, b_j)}$  en las cuales los polinomios de Dirichlet ordinarios siguientes*

$$\zeta_{n, \chi_p} = 1 + \frac{\chi_p(2)}{2^z} + \dots + \frac{\chi_p(n)}{n^z}$$

y

$$\zeta_{n, \chi} = 1 + \frac{\chi(2)}{2^z} + \dots + \frac{\chi(n)}{n^z}$$

tienen la  $\mathcal{D}$ -propiedad.

**Prueba.** Sean  $n > 2$  un número primo y  $p$  un número primo mayor que  $n$ . Por la Proposición 22, podemos decir que  $\zeta_n(z)$ ,  $\zeta_{n, \chi_p}$  y  $\zeta_{n, \chi}$  son Bohr-equivalentes.

Además, [14, Corollary 3] nos asegura la existencia de ceros simples de  $\zeta_n(z)$  en una cierta banda vertical incluida en la su banda crítica. Finalmente, utilizando [14, Theorem 4], se pueden asociar a estos ceros simples unas bandas abiertas  $S_{(a_j, b_j)}$ , donde  $\zeta_n(z)$  tiene la  $\mathcal{D}$ -propiedad, y por el Teorema 29 los polinomios de Dirichlet  $\zeta_{n, \chi_p}$  y  $\zeta_{n, \chi}$  tienen también la  $\mathcal{D}$ -propiedad, lo que acaba la prueba. ■

## 3.4. Clases de equivalencia.

### 3.4.1. Principales propiedades

**Definición 18** Sean  $P_n(z)$  y  $Q_n(z)$  dos polinomios de Dirichlet de la forma

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^n a_k k^{-z} \quad Q_n(z) = \sum_{k=1}^n b_k k^{-z}.$$

Diremos que  $P_n(z)$  y  $Q_n(z)$  son Bohr-coprimos si no existe una función completamente multiplicativa  $\chi$  de tal forma que  $b_k = \chi(k)a_k$ , para todo  $k = 1, \dots, n$ .

**Proposición 40** Sea  $\mathcal{DP}$  el conjunto de todos los polinomios de Dirichlet que tienen la misma banda que  $P_n(z)$  y con la  $\mathcal{D}$ -propiedad. Definimos

$$\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(P_n(z)) = \{Q_n(z) \in \mathcal{DP} \text{ tal que } Q_n(z) \text{ es Bohr-equivalente a } P_n(z)\}.$$

Entonces  $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$  es una clase de equivalencia dentro de la familia  $\mathcal{DP}$ .

**Remark 2** Se considera el polinomio de Dirichlet

$$F_0(z) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k-1} (-1)^{k-1}}{k^z},$$

tal que para todo  $k = 1, \dots, n$ ,  $\chi(k) = (-1)^{2k-1} = -1$ . Podemos ver que tal función  $\chi$  no es completamente multiplicativa.

Por definición tenemos  $F_0(z) \in \mathcal{DP}$ , pero  $F_0(z) \notin \mathcal{C}_{\mathcal{B}}(F_n(z))$ . Con el método utilizado, podemos crear una clase de equivalencia de  $F_0$ , que notaremos por  $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(F_0(z))$  de tal forma que  $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(F_0(z)) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{B}}(F_n(z)) = \emptyset$ .

Entonces podemos enunciar el resultado siguiente:

**Proposición 41** Sean  $P_n(z)$  and  $Q_n(z)$  dos polinomios de Dirichlet Bohr-coprimos en  $\mathcal{DP}$ . Entonces  $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(P_n(z)) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{B}}(Q_n(z)) = \emptyset$ .

### 3.4.2. Una aplicación: las ecuaciones funcionales

En 2009, con el propósito de encontrar las soluciones de la ecuación funcional  $f(x) + f(2x) + \dots + f(nx) = 0$ , se estudió la ecuación funcional  $F(z) + \dots + F(nz) = 0$  para  $z \in \mathbb{C}$  y se publicó el artículo [40]. Se puso en relación, con el uso del operador de Euler, las soluciones de la ecuación  $F(z) + \dots + F(nz) = 0$  con los ceros de la función  $G_n(z) = 1 + 2^z + \dots + n^z$ .

Consideramos ecuaciones funcionales de esta forma

$$w_1F(z) + w_2F(2z) + \dots + w_nF(nz) = 0,$$

con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z \in \mathbb{C}$  y para todo  $i = 1, \dots, n$ ,  $w_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Definición 19** Sean dos ecuaciones funcionales  $w_1F(z) + \dots + w_nF(nz) = 0$  y  $v_1F(z) + v_2F(2z) + \dots + v_nF(nz) = 0$  tal como las definimos antes.

Diremos que son Bohr-equivalentes si existe una función completamente multiplicativa  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que

- i)  $v_k = \phi(k)w_k$ , para todo  $k = 1, \dots, n$ ;
- ii)  $|\phi(p)| = 1$ , siempre cuando  $w_n \neq 0$  y  $p$  es un número primo divisor de  $n$ .

**Proposición 42** La relación que acabamos de exponer en la definición anterior es una relación de equivalencia.

**Prueba.** Supongamos que  $w_1F(z) + w_2F(2z) + \dots + w_nF(nz) = 0$  y  $v_1F(z) + v_2F(2z) + \dots + v_nF(nz) = 0$  son Bohr-equivalentes. Vamos a demostrar que es reflexiva, simétrica y transitiva.

- Reflexiva. Es inmediato tomando  $\phi$  como aplicación identidad.
- Simétrica. Podemos definir otra función completamente multiplicativa considerando  $\chi : m \mapsto \frac{1}{\phi(m)}$ . Tenemos, entonces, que  $w_k = \chi(k)v_k$  y obtenemos el resultado querido.

- Transitiva. Si suponemos que existe una tercera ecuación funcional  $v'_1F(z) + v'_2F(2z) + \dots + v'_nF(nz) = 0$  que sea Bohr-equivalente a la ecuación  $v_1F(z) + v_2F(2z) + \dots + v_nF(nz) = 0$ , tenemos que demostrar que es Bohr-equivalente a  $w_1F(z) + w_2F(2z) + \dots + w_nF(nz) = 0$ .

En efecto, utilizando la definición, existen dos funciones completamente multiplicativas  $\phi$  y  $\chi$  tales que para todo  $k = 1, \dots, n$ ,  $v_k = \phi(k)w_k$  y  $v'_k = \chi(k)v_k$ . Si definimos  $\Omega : k \mapsto \Omega(k) = \phi(k).\chi(k)$  y consideramos  $v'_k = \Omega(k)w_k$ , es trivial que esta función tiene las propiedades queridas y obtenemos el resultado.

■

Y ahora un resultado directo:

**Proposición 43** *Dos ecuaciones funcionales tal como las hemos definido antes son Bohr-equivalentes si, y solo si, sus polinomios de Dirichlet característicos respectivos son Bohr-equivalentes.*

De la misma forma cómo hemos definido en el párrafo anterior, podemos hablar de clases de equivalencia de ecuaciones funcionales de la forma  $w_1F(z) + w_2F(2z) + \dots + w_nF(nz) = 0$ .

### 3.4.3. Preguntas y conjetura.

Terminaré este capítulo con algunas preguntas, que podrían llevar a una futura investigación, y una conjetura.

- ¿Qué podemos decir de las soluciones analíticas de estas ecuaciones funcionales?
- ¿Hasta qué punto el hecho que haya Bohr-equivalencia puede darnos una cierta información sobre las soluciones de tales ecuaciones funcionales?
- En este capítulo hemos hablado de la Bohr-equivalencia de polinomios de Dirichlet cuyos coeficientes pertenecen a  $\mathbb{C}$ .

¿Se podría obtener un resultado similar al Teorema 29 con los coeficientes en otro conjunto, como por ejemplo, los cuerpos numéricos o



cuerpos de clases? Se puede consultar [33] para un trabajo sobre ceros de tales polinomios.

Como vimos, se ha demostrado que la suma parcial de la función zeta alternada para algunos valores de  $n$  tiene la  $\mathcal{D}$ -propiedad en toda la banda crítica. Cabe formular la siguiente:

**Conjetura 44** *La suma parcial de la función zeta alternada*

$$R_n(z) = 1 + \sum_{m=2}^n \frac{(-1)^{m-1}}{m^z}$$

*tiene la  $\mathcal{D}$ -propiedad en toda la banda crítica para todo entero  $n > 1$ .*

# Capítulo 4

## Una aplicación a la teoría de las cuerdas fractales.

**Sumario.** En este capítulo presentamos la noción de cuerdas fractales auto-similares non-lattice, las cuales están relacionadas con polinomios de Dirichlet. Utilizamos entonces resultados del Capítulo 2 para demostrar conjeturas enunciadas por M. Lapidus y M. Van Frankenhuisen en [30] respecto de ciertas cuerdas, como la de oro, de oro+ o de Bessel.

---

**Abstract.** In this chapter we present the notion of self-similar non-lattice fractal strings. They are related to Dirichlet polynomials and so we use results from Chapter 2 to prove conjectures stated by M. Lapidus and M. Van Frankenhuisen in [30] regarding some strings such as gold, gold+ or Bessel ones.

### 4.1. Introducción.

Mientras estaba buscando la demostración del resultado sobre la densidad de las partes reales de los ceros simples dentro de intervalos incluidos en los intervalos críticos de cada  $G_n(z)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , encontré el artículo de M. Lapidus y M. Van Frankenhuisen. Este artículo está relacionado con las cuerdas fractales y, en particular, con las que son auto-similares. Los autores

se interesan por la densidad de las partes reales de los ceros de polinomios exponenciales que llaman *dimensiones complejas* y que están, como lo veremos, relaciones con la geometría de tales cuerdas.

En su artículo, Lapidus y Van Frankenhuysen exponen varias conjeturas relacionadas con la densidad de las partes reales de ceros de polinomios de Dirichlet asociados a ciertas cuerdas fractales non-lattice auto-similares.

Después de todo, no es extraño ver que hay relaciones entre las cuerdas fractales, los polinomios de Dirichlet y las sumas parciales de la zeta de Riemann. En el libro de Marcus du Sautoy [65], se explica muy bien la relación que existe entre la teoría de los números, la hipótesis de Riemann, la física y los tambores cuánticos. Es estudiando la vibración de un tambor cuando se relacionaron estos temas con las cuerdas fractales y, luego, con las membranas fractales.

Quería utilizar el resultado expuesto en el Capítulo 2, pero, como vimos,  $G_n(z)$  y  $L_n(z)$  no son Bohr-equivalentes para todo  $n > 3$ . Utilizando técnicas expuestas en ese capítulo, relacionadas con las curvas de nivel y un teorema de Avellar y Hale [2], hemos conseguido con J. M Sepulcre contestar a algunas de estas conjeturas, demostrando, en particular, que el conjunto de dimensión de fractabilidad de las cuerdas de oro, de oro+ y de Bessel coincide con sus intervalos críticos asociados.

En este capítulo estudiaremos algunos resultados generales sobre las dimensiones complejas y el conjunto de las dimensiones de fractabilidad, considerando funciones asociadas a la 2-3-...- $n$  cuerda de factores de escala  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$ , es decir, para las funciones  $L_n(z)$ ,  $n \geq 2$ . Para estas funciones, también daremos una caracterización, en general, del conjunto de puntos cuyas partes reales son densas, utilizando el conjunto de las curvas de nivel de una función auxiliar, y daremos también unos métodos para obtener tales puntos. El procedimiento utilizado es similar al que hemos empleado para la función  $G_n(z)$  [14]. Luego ampliaremos estos resultados a otras cuerdas, como por ejemplo, la cuerda de oro, la de oro+ y la cuerda de Bessel, lo que nos dará la oportunidad de contestar a algunas conjeturas expuestas en [30].

Finalmente, mientras se estaba escribiendo esta tesis, la gran mayoría de los resultados expuestos en este capítulo fueron enviados a publicar y se encuentran recogidos en el artículo [13].

## 4.2. Cuerdas fractales non-lattice y dimensiones complejas.

### 4.2.1. Cuerda de Cantor y generalidades.

Empezamos este apartado con un ejemplo: la cuerda de Cantor. La podemos definir como

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right) \cup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right) \cup \dots$$

y la notamos  $CS$ .

Se puede observar que cada intervalo tiene una anchura  $\frac{1}{3^{j+1}}$  para  $j \geq 1$ , contado con una multiplicidad  $\omega_j = 2^j$ . Se puede entonces definir una función meromorfa asociada a  $CS$  cuya imagen es  $\frac{3^{-s}}{1 - 2 \times 3^{-s}}$ . Si estudiamos los polos de tal función vemos que tienen la forma  $\log_3 2 + in \frac{2\pi}{\log 3}$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

El conjunto  $\{\log_3 2 + in \frac{2\pi}{\log 3}; n \in \mathbb{Z}\}$  se llama el conjunto de las dimensiones complejas de la cuerda de Cantor.

Vamos presentar de manera más general las cuerdas fractales. Para más detalles se puede consultar, por ejemplo, [31].

**Definición 20** [31, section 1.1 p. 9] *Una cuerda fractal ordinaria  $\mathcal{L}$  es a subconjunto abierto acotado  $\Omega$  de  $\mathbb{R}$ . Tal conjunto se puede escribir como una reunión contable de intervalos abiertos. Las anchuras de cada uno se escriben  $l_1, l_2, \dots$  y se llaman anchuras de la cuerda. Se asume sin pérdida de generalidad que*

$$l_1 \geq l_2 \geq \dots > 0$$

donde cada anchura está contada con su multiplicidad.

Se puede entonces escribir

$$\mathcal{L} = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j).$$

Además tenemos  $\sum_{j=1}^{\infty} l_j < \infty$  y es igual a la medida de Lebesgue de  $\Omega$ . Notaremos  $l_j$ , para  $j \geq 1$ , la anchura del intervalo  $(a_j, b_j)$  y entonces podemos escribir  $\mathcal{L} = \{l_j\}_{j \geq 1}$ .

**Definición 21** Denotamos por  $\partial\mathcal{L}$  la frontera de la cuerda fractal ordinaria  $\mathcal{L}$ . Para un  $\epsilon > 0$  dado, sea  $V(\epsilon)$  el volumen del tubo interior cerca de  $\partial\mathcal{L}$  de radio  $\epsilon$  y lo definimos por

$$V(\epsilon) = \text{vol}_1\{x \in \mathcal{L} : d(x, \partial\mathcal{L}) < \epsilon\},$$

donde  $\text{vol}_1$  es la medida de Lebesgue de dimensión 1 en  $\mathbb{R}$  y  $d(x, A) := \inf\{d(x, y), y \in A \subset \mathbb{R}\}$ .

**Definición 22** La dimensión de la cuerda fractal  $\mathcal{L}$  corresponde a la dimensión de Minkowski de  $\partial\mathcal{L}$ , es decir,

$$D = \inf\{\alpha \geq 0 : V(\epsilon) = O(\epsilon^{1-\alpha}), \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0^+\}.$$

En el caso de la cuerda de Cantor, su dimensión de Minkowski es la parte real de los polos es decir  $\log_3 2$ .

**Definición 23** En general, el volumen del entorno tubular de la frontera de  $\mathcal{L}$  viene dado por

$$V(\epsilon) = \sum_{j:l_j \geq 2\epsilon} 2\epsilon + \sum_{j:l_j < 2\epsilon} l_j.$$

Por ejemplo, si aplicamos la fórmula del volumen, obtenemos para la cuerda de Cantor, y para  $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$ ,

$$V_{CS}(\epsilon) = 2\epsilon(2^n - 1) + \sum_{k=n}^{\infty} 2^k 3^{-k-1} = 2\epsilon 2^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\epsilon,$$

donde  $n$  es tal que  $3^{-n} \geq 2\epsilon > 3^{-n-1}$ .

### 4.2.2. Cuerdas auto-similares. Dimensiones complejas.

Consideramos ahora polinomios de Dirichlet, que son funciones que pueden ser normalizadas, respecto a los ceros, de la forma siguiente

$$f(z) = 1 + \sum_{j=1}^n m_j r_j^z = 1 + \sum_{j=1}^n m_j e^{z \log r_j}, \quad (1.1)$$

donde  $m_1, \dots, m_n$  son números complejos y  $r_1 > \dots > r_n > 0$ .

Si un cociente  $\frac{\log r_j}{\log r_1}$ ,  $j \geq 2$ , es irracional, estos polinomios se llaman *polinomios de Dirichlet non-lattice*. En el caso contrario, cuando  $r_j = r^{k_j}$  son potencias de una base común  $r$ , se llaman *polinomios de Dirichlet lattice*.

Los ceros de los polinomios de Dirichlet están relacionados con el concepto de banda fractal [30]: un conjunto que se escribe como una unión disjunta de intervalos abiertos cuyas longitudes forman una sucesión  $\mathcal{L} = l_1, l_2, \dots$  de longitud total finita  $\sum_{j=1}^{\infty} l_j$ .

Una información importante sobre la geometría de  $\mathcal{L}$  es contenida en su *función zeta geométrica*, que se puede definir como

$$\zeta_{\mathcal{L}}(z) := \sum_{j=1}^{\infty} l_j^z. \quad (1.2)$$

Si definimos  $\sigma$  como el valor  $\inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \sum_{j=1}^{\infty} l_j^\alpha < \infty \right\}$ , entonces  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \sigma\}$  es el semi-plano más ancho abierto en el cual la serie (1.2) converge. Es decir,  $0 \leq \sigma \leq 1$ .

A partir de ahora, consideraremos únicamente el caso de cuerdas fractales auto-similares.

Se definen considerando un intervalo cerrado  $I$  de anchura  $L$ . Sea  $N$  un entero mayor o igual a 2 y sean  $\Phi_1, \dots, \Phi_N$  aplicaciones contractivas de  $I$  en sí mismo, con factores de escala respectivos  $r_1, \dots, r_N$  que satisfacen la siguiente propiedad:

$$1 > r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_N > 0.$$

Además asumimos que

$$\sum_{j=1}^N r_j < 1,$$

y las imágenes  $\Phi_j(I)$ , para  $j = 1, \dots, n$  no se superponen.

Luego hay que subdividir el intervalo  $I$  en los trozos  $\Phi_j(I)$  y las piezas que quedan entre los intervalos tienen una anchura de  $l_k = g_k L$ , para  $k = 1, \dots, K$ , donde los factores de escala  $g_1, \dots, g_K$  de los agujeros cumplen:

$$1 > g_1 \geq \dots \geq g_K > 0$$

y

$$\sum_{j=1}^N r_j + \sum_{k=1}^K g_k = 1.$$

Después se repite el proceso con los  $\Phi_j(I)$  para  $j = 1, \dots, N$ . Informaciones y ejemplos de dichas cuerdas si pueden encontrar en [31, chapter 2, p.33].

Los polos de la prolongación meromorfa de la función zeta geométrica (que son ceros de un polinomio de Dirichlet) son llamados *dimensiones complejas* de  $\mathcal{L}$  [30, Corollary 5.3]. Por ejemplo, en el caso de cuerdas auto-similares con factores de escala  $r_1, r_2, \dots, r_N$  y agujeros  $g_1, \dots, g_K$ , se escribe

$$\zeta_{\mathcal{L}}(z) = \frac{L^z \sum_{k=1}^K g_k^z}{1 - \sum_{j=1}^N r_j^z},$$

donde  $L$  es la longitud total de  $\mathcal{L}$  [30, Theorem 5.2].

Además, la función zeta geométrica tiene una relación con la función zeta de Riemann [31, p. 2].

En efecto si definimos el espectro de la cuerda fractal como la sucesión de las frecuencias  $f = k.l_j^{-1}$  con  $k, j = 1, 2, \dots$  entonces la función zeta espectral de la cuerda  $\mathcal{L}$  es

$$\zeta_{\nu}(s) = \sum_f f^{-s}.$$

Al final tenemos:

$$\zeta_{\nu}(s) = \zeta_{\mathcal{L}}(s) \cdot \zeta(s).$$

Concentraremos nuestro estudio en el caso de las cuerdas fractales auto-similares non-lattice y nos centraremos, en particular, en las funciones

$L_n(z) := 1 - 2^z - \dots - n^z$ , para  $n \geq 3$ , funciones que son prototipos de polinomios de Dirichlet non-lattice. Para el caso  $n = 3$ ,  $L_3(-z)$  es la función obtenida directamente teniendo en cuenta la *2-3 cuerda*  $\mathcal{L}$  de factores de escala  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{3}$ , un único agujero, y de longitud total 6 [31, p. 47]. El caso  $n = 4$  se puede encontrar en [31, p. 66] o en [30, Sección 2.2.4]. Lapidus y Van Frankenhuisen observan, con este ejemplo, la propiedad siguiente: “We observe the interesting phenomenon that the complex roots of the nongeneric non-lattice equation  $f(s) = 0$  tend to be denser at the boundaries  $\operatorname{Re} s = 1,082$  and  $\operatorname{Re} s = -1,731$  of the critical strip, and around  $\operatorname{Re} s = 0$ .”

Además, para  $n$  dado,  $L_n(-z)$  es la función obtenida directamente teniendo en cuenta la *2-3-...-n cuerda* con factores de escala  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$ .

La función  $L_n(z) = 1 - 2^z - \dots - n^z$  es un polinomio de Dirichlet. En efecto, basta tomar  $p_1(z) = 1$ ,  $p_k(z) = -1$ ,  $k = 2, \dots, n$  y  $\alpha_j = \log j$  para  $j = 1, \dots, n$ .

De forma general, la función entera  $L_n(z)$  pertenece al conjunto de las funciones casi-periódicas [6], cuyo espectro es  $\{\log 1, \log 2, \dots, \log n\}$ , y algunas de sus propiedades intrínsecas son semejantes a las aproximaciones de la función zeta de Riemann en el semi-plano  $\operatorname{Re} z < -1$ , es decir, tenemos  $G_n(z) = 1 + 2^z + \dots + n^z$ .

Estas funciones son enteras de tipo exponencial  $\log n$  y podemos asegurar la existencia de dos números reales  $x_1$  y  $x_2$  tales que todos los ceros de  $L_n(z)$  se sitúan en la banda vertical definida por

$$\{z \in \mathbb{C} : x_1 < \operatorname{Re} z < x_2\}.$$

(Véase, por ejemplo, [42, Lemma 5], Lemma 5). Esto nos permite definir un intervalo  $[a_n^L; b_n^L]$ , llamado intervalo crítico, que contiene las proyecciones reales de todos los ceros de cada función  $L_n(z)$ , donde  $a_n^L := \inf\{\operatorname{Re} z : L_n(z) = 0\}$  y  $b_n^L := \sup\{\operatorname{Re} z : L_n(z) = 0\}$ .

La relación directa entre estas dos funciones es  $G_n(z) + L_n(z) = 2$ . Además, tenemos que  $G'_n(z) = -L'_n(z)$ , lo que nos permite decir que las derivadas de todos los órdenes de  $G_n(z)$  y  $L_n(z)$  comparten los mismos ceros.

Por otro lado, se demostró en [42] que el número medio de ceros de  $G_n(z)$  es  $\frac{\log n}{2\pi}$ , y utilizando [56, Theorem 3.2], podemos decir que este resultado es el mismo para la función  $L_n(z)$ .



Además, de [56, Theorem 5.2], podemos añadir que la función  $L_n(z)$  tiene un número de ceros menor que  $n$  en una banda horizontal de anchura menor que  $\frac{2\pi}{\log n}$ .

Teniendo en cuenta [42, Lemma 5 y Theorem 8], para  $n = 2, 3$ , sabemos que existen una infinidad de rectángulos  $\{R_k\}$  dentro de la banda crítica de  $L_n(z)$  tales que el número de ceros  $N(L_n(z); R_k)$  dentro de cada rectángulo  $R_k$  cumple

$$\left| N(L_n(z); R_k) - \frac{h_k \log n}{2\pi} \right| < 2,$$

donde  $h_k$  es la altura de  $R_k$ .

En [30] los autores definen el conjunto of *dimensiones de fractalidad* de una cuerda fractal como la clausura del conjunto de las partes reales de sus dimensiones complejas y proponen varias conjeturas relacionadas con este conjunto.

En la teoría de las cuerdas auto-similares, la parte geométrica de las dimensiones complejas tiene su importancia, porque aparece en la fórmula explícita del volumen  $V(\epsilon)$  de la frontera de  $\mathcal{L}$ , que recordamos la fórmula que se puede encontrar en [30, p.42]:

$$V(\epsilon) = \sum_{\omega} \frac{(2\epsilon)^{1-\omega}}{\omega(1-\omega)} \text{res}(\zeta_{\mathcal{L}}(z); \omega) + 2\epsilon\zeta_{\mathcal{L}}(0) + o(\epsilon),$$

donde  $\epsilon$  representa el radio del tubo y  $\omega$  pertenece al conjunto de las dimensiones complejas de  $\mathcal{L}$ . Además, las propiedades del conjunto de las dimensiones de fractalidad están relacionadas con la noción de *oscilación*. Para ser más preciso, las partes reales de las dimensiones complejas definen la amplitud de estas oscilaciones.

Para justificar la reflexión anterior, si consideramos a  $\omega = D$  como una dimensión compleja, la fórmula del volumen se puede escribir como la suma del primer término  $\frac{(2\epsilon)^{1-D}}{D(1-D)} \text{res}(\zeta_{\mathcal{L}}(z); D)$  de orden  $\epsilon^{1-D}$  y de los *términos oscilatorios*  $c_{\omega}\epsilon^{1-\omega}$  para algunos coeficientes  $c_{\omega}$ . Podemos ver que las oscilaciones son de orden  $\epsilon^{1-\text{Re}\omega}$ . Entonces, es importante tener información sobre las partes reales de las dimensiones complejas de  $\mathcal{L}$  para entender el fenómeno oscilatorio.

### 4.3. Las proyecciones reales de los ceros de la función $L_n(z)$ .

#### 4.3.1. Primeras consideraciones.

A partir de ahora utilizaremos el teorema siguiente, que podemos encontrar en [2, Theorem 3.1], y que aplicaremos directamente a la función  $L_n(z)$ .

**Teorema 45** Sean  $L_n(z) = 1 - 2^z - \dots - n^z$ ,  $n \geq 2$  y a  $B = \{\log p_j\}_{j=1}^{k_n}$ , siendo  $p_{k_n}$  el mayor primo menor o igual que  $n$ . Sean  $b = (\log p_1, \log p_2, \dots, \log p_{k_n})$  y  $c_m$  el único vector con componentes enteras que cumplen la condición  $\log m = \langle c_m, b \rangle$ ,  $1 \leq m \leq n$ , donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa el producto escalar.

Si definimos la función

$$F_n^L : \mathbb{R} \times [0, 2\pi)^{k_n} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$(t, x_1, \dots, x_{k_n}) \mapsto 1 - \sum_{m=2}^n m^t e^{\langle c_m, (x_1, \dots, x_{k_n}) \rangle i},$$

entonces  $t \in \overline{\{\operatorname{Re} z : L_n(z) = 0\}}$  si, y sólo si, existe  $x \in [0, 2\pi)^{k_n}$  tal que  $F_n^L(t, x) = 0$ .

**Notación 46** Para  $n \geq 2$ , escribimos

$$R_n^L := \overline{\{\operatorname{Re} z : L_n(z) = 0\}}. \quad (3.1)$$

Así,  $R_n^L$  coincide con la definición del conjunto de las dimensiones de fractalidad de la banda fractal auto-similar de factores de escala  $\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}\}$  cf [30, p. 66].

#### 4.3.2. Los extremos de la banda crítica.

Antes de dar algunos resultados sobre la densidad de las proyecciones reales de los ceros de las funciones  $L_n(z)$ , formularemos algunos resultados sobre los extremos de sus bandas críticas.

En primer lugar, consideramos a la función  $L_n(x) = 1 - 2^x - \dots - n^x$  para valores reales de  $x$ . Entonces  $L_n(x)$  tiene un único cero. En efecto, podemos ver que  $L'_n(x) = -(\log 2)2^x - \dots - (\log n)n^x < 0$  y, entonces, es estrictamente decreciente. Ahora, si consideramos que  $L_n(x) \rightarrow -\infty$ , cuando  $x \rightarrow +\infty$ , y  $L_n(x) \rightarrow 1$ , cuando  $x \rightarrow -\infty$ , la propiedad se cumple. Entonces, podemos considerar la notación siguiente:

**Notación 47** Notamos por  $a_{n,1}^L$  el único punto que satisface la igualdad  $L_n(x) = 0$  y  $b_{n,1}^L$  representa el valor  $\sup\{x \in \mathbb{R} : 1 + 2^x + \dots + (n-1)^x \leq n^x\}$ .

**Proposición 48** [13, Proposition 2.1] Sean  $n \in \mathbb{N}$  y

$$a_n^L = \inf\{x \in \mathbb{R} : L_n(x + iy) = 0 \text{ para uno } y \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces  $a_n^L = a_{n,1}^L$ .

**Prueba.** Como  $L_n(a_{n,1}^L + i0) = 0$ , utilizando la definición de  $a_n^L$  obtenemos que  $a_{n,1}^L \geq a_n^L$ . Por otro lado, para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  se satisface que

$$|L_n(x + iy)| = |1 - 2^{x+iy} - \dots - n^{x+iy}| \geq 1 - |2^{x+iy} + \dots + n^{x+iy}| \geq 1 - 2^x - \dots - n^x.$$

En efecto  $|2^{x+iy} + \dots + n^{x+iy}| \leq 2^x + \dots + n^x$ . Ahora, habida cuenta que  $L_n(x) = 0$  tiene una única solución y que  $L_n(x) \rightarrow 1$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ , tenemos

$$|L_n(x + iy)| > 0, \text{ para todo } x < a_{n,1}^L.$$

Entonces,  $a_n^L \geq a_{n,1}^L$  y obtenemos

$$a_n^L = a_{n,1}^L.$$

■

Además, podemos dar un valor límite para el supremo:

**Proposición 49** [13, Proposition 2.2] Sean  $n$  un número entero y

$$b_n^L = \sup\{x \in \mathbb{R} : L_n(x + iy) = 0, \text{ para uno } y \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces  $b_n^L \leq b_{n,1}^L$ .

**Prueba.** Podemos observar que, para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ , tenemos

$$|L_n(x+iy)| \geq n^x - |1 - 2^{x+iy} - \dots - (n-1)^{x+iy}| \geq n^x - (1+2^x+\dots+(n-1)^x),$$

porque  $|1 - 2^{x+iy} - \dots - (n-1)^{x+iy}| \leq 1 + |2^{x+iy}| + \dots + |(n-1)^{x+iy}| = 1 + 2^x + \dots + (n-1)^x$ . Como consecuencia, se obtiene

$$|L_n(x+iy)| > 0 \quad \text{para todo } x > b_{n,1}^L.$$

En conclusión,  $b_n^L \leq b_{n,1}^L$ . ■

### 4.3.3. Los casos $n = 2$ y $n = 3$ .

Para el caso  $n = 2$ , todos los ceros de la función  $L_2(z)$  están colocados en el eje imaginario y entonces  $R_2^L = \{0\}$ .

Para  $n = 3$ , el ínfimo, notado  $a_3^L$ , se obtiene aplicando la Proposición 48, entonces

$$a_3^L \approx -0,7878849109.$$

Por otro lado, el supremo de la banda crítica, notado  $b_3^L$ , por la Proposición 49, está acotado por la solución de  $1 + 2^x = 3^x$ , es decir,  $x = 1$ . Además, como  $F_3^L(1, \pi, 0) = 1 - 2^1 e^{i\pi} - 3^1 e^{i0} = 0$ , entonces  $1 \in R_3^L$  y, por tanto,  $1 \leq b_3^L$ . Finalmente,  $b_3^L = 1$ .

**Proposición 50** *Los ceros de  $L_3(z)$  tienen sus partes reales densas en su intervalo crítico  $[a_3^L, b_3^L]$ .*

**Prueba.** Para demostrar este resultado, utilizamos [46, Main Theorem]. Sea  $g(z) := L_3(z) \cdot e^{z \log 5} = e^{z \log 5} - e^{z(\log 2 + \log 5)} + e^{z(\log 3 + \log 5)}$ . Se observa que  $\{\log 5, \log 2 + \log 5, \log 3 + \log 5\}$  son linealmente independientes sobre  $\mathbb{Q}$ . En efecto, si  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , entonces

$$a \log 5 + b(\log 2 + \log 5) + c(\log 3 + \log 5) = 0$$

es equivalente a

$$(a + b + c) \log 5 + b \log 2 + c \log 3 = 0$$

y, por el Lema 10, se concluye que  $a = b = c = 0$ .

Vamos a comprobar si  $g(z)$  cumple la condición de [46, Main Theorem] y tiene sus ceros cerca de cualquier recta paralela al eje imaginario dentro de la banda crítica, es decir,

$$1 \leq e^{\sigma \log 2} + e^{\sigma \log 3}, \quad (3.2)$$

$$e^{\sigma \log 2} \leq 1 + e^{\sigma \log 3}, \quad (3.3)$$

$$e^{\sigma \log 3} \leq 1 + e^{\sigma \log 2}, \quad (3.4)$$

para todo  $\sigma$  en la banda crítica. Las desigualdades (3.2) y (3.4) se cumplen para todo  $\sigma$  dentro de la banda crítica, porque  $a_3^L = a_{3,1}^L$  y  $b_3^L = b_{3,1}^L$ . Por otro lado, (3.3) se cumple para todo real  $\sigma$ . Obtenemos entonces el resultado que queremos. ■

En la terminología de las cuerdas fractales, la proposición anterior se puede traducir en los términos siguientes: el conjunto de las dimensiones de fractalidad de la *2-3 cuerda* de factores de escala  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{3}$  coincide en su conjunto con el intervalo  $[a_3^L, b_3^L]$ .

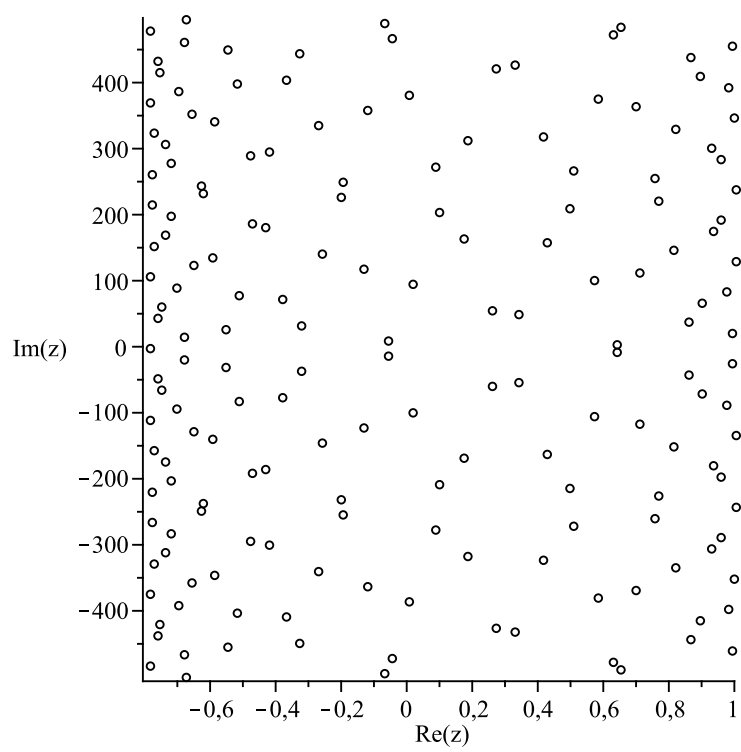


Figura 4.1: ceros de  $L_3(z)$

#### 4.3.4. Los casos $n = 4$ y $n = 5$ .

Con la función completamente multiplicativa de Liouville se puede demostrar que  $L_2(z)$  y  $L_3(z)$  son Bohr-equivalentes a  $G_2(z)$  y  $G_3(z)$ . Como muestra el siguiente resultado, no podemos utilizar la Proposition 33 para demostrar, por ejemplo, que  $L_4(z)$  es Bohr-equivalente a  $G_4(z)$ .

**Proposición 51** *Para  $n \geq 4$ , las funciones  $L_n(z)$  y  $G_n(z)$  no son Bohr-equivalentes.*

**Prueba.** Podemos ver que

$$L_n(z) = \sum_{k=0}^n b_k e^{(\log k)z} \text{ y } G_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k e^{(\log k)z},$$

con  $b_0 = a_0 = 1$  y  $b_k = -1$ ,  $a_k = 1$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Dado  $n \geq 4$ , suponemos, “by reductio ad absurdum”, que  $L_n(z)$  y  $G_n(z)$  son Bohr-equivalentes. Entonces, existe una función completamente multiplicativa  $\chi$  tal que, en particular,  $b_k = \chi(k)a_k$ , para  $k = 0, \dots, 4$ . Entonces, teniendo en cuenta el valor de los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$ , tenemos que  $\chi(2) = -1$  y  $\chi(4) = -1$ . Pero la condición de ser completamente multiplicativa conduce a

$$-1 = \chi(4) = \chi(2) \cdot \chi(2) = (-1) \cdot (-1) = 1,$$

que es imposible. ■

Por eso, vamos a trabajar con el Teorema 45, por lo que es necesario considerar lo siguiente

$$\begin{aligned} F_4^L : \mathbb{R} \times [0, 2\pi)^2 &\rightarrow \mathbb{C}, \\ (t, x_1, x_2) &\mapsto 1 - 2^t e^{x_1 i} - 3^t e^{x_2 i} - 4^t e^{2x_1 i}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} F_5^L : \mathbb{R} \times [0, 2\pi)^3 &\rightarrow \mathbb{C}, \\ (t, x_1, x_2, x_3) &\mapsto 1 - 2^t e^{x_1 i} - 3^t e^{x_2 i} - 4^t e^{2x_1 i} - 5^t e^{x_3 i}, \end{aligned}$$

es decir, son las funciones que aparecen en el Teorema 45, aplicadas a las funciones  $L_4(z)$  y  $L_5(z)$ . Vamos a demostrar que las partes reales de los ceros

de  $L_4(z)$  y  $L_5(z)$  cumplen la propiedad de densidad en un intervalo ancho donde las partes reales de sus ceros están colocadas.

Se puede observar que, utilizando la Proposición 48, obtenemos numéricamente los valores  $a_{4,1}^L \approx -1,082131498$  y  $a_{5,1}^L \approx -1,234844354$ . Además, los supremos se obtienen como soluciones de las ecuaciones  $1 + 2^x + 3^x = 4^x$  y  $1 + 2^x + 3^x + 4^x = 5^x$ , al conocer  $b_{4,1}^L$  y  $b_{5,1}^L$ , es decir, aproximadamente 1,7305074 y 2,4260127. En efecto, como  $b_{4,1}^L \in R_4^L$  y  $b_{5,1}^L \in R_5^L$  (porque  $F_4^L(b_{4,1}^L, \pi, \pi) = 0$  y  $F_5^L(b_{5,1}^L, \pi, \pi, \pi) = 0$ ), entonces  $b_{4,1}^L \leq b_4^L$  y  $b_{5,1}^L \leq b_5^L$ . Además, teniendo en cuenta la Proposición 49, se obtiene que  $b_4^L \leq b_{4,1}^L$  y  $b_5^L \leq b_{5,1}^L$ .

Ahora, demostramos el resultado siguiente:

**Teorema 52** [13, Theorem 3.1] *La proyección de los ceros de  $L_4(z)$  es densa en su intervalo crítico  $[a_4^L, b_4^L]$ .*

**Prueba.** Consideramos la función

$$\begin{aligned} f_4^L : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{C}, \\ (t, x_1) &\mapsto 1 - 2^t e^{x_1 i} - 4^t e^{2x_1 i}. \end{aligned}$$

Podemos ver que, dado  $t$  real,  $x_1 \mapsto f_4^L(t, x_1)$  es una función continua. Consideramos también la función distancia  $d(\cdot, 0)$  y obtenemos algunas desigualdades que necesitaremos para demostrar el resultado:

(i) Para todo real  $t$ , se satisface

$$\begin{aligned} d(f_4^L(t, 3\pi/2), 0) &= |1 + i2^t + 4^t| = \sqrt{(1 + 4^t)^2 + 4^t} = \\ &= \sqrt{4^{2t} + 3 \cdot 4^t + 1} > 3^t, \end{aligned}$$

es decir

$$d(f_4^L(t, 3\pi/2), 0) - 3^t > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

(ii) Tomando  $x_1 = \pi$ , obtenemos también

$$d(f_4^L(t, \pi), 0) = |1 + 2^t - 4^t|.$$

Por consiguiente,

$$d(f_4^L(t, \pi), 0) < 3^t$$



si y sólo si

$$(1 + 2^t - 4^t)^2 < 9^t.$$

Ahora, como la ecuación  $(1 + 2^t - 4^t)^2 - 9^t = 0$ , que es equivalente a  $(1 + 2^t - 4^t - 3^t) \cdot (1 + 2^t - 4^t + 3^t) = 0$ , tiene dos ceros reales,  $t_1 = 0$  y  $t_2 = b_4^L \approx 1,7305074$ , y  $(1 + 2^t - 4^t)^2 - 9^t < 0$  si  $t \in (t_1, t_2)$ , obtenemos

$$d(f_4^L(t, \pi), 0) - 3^t < 0 \quad \text{si } t \in (t_1, t_2). \quad (3.6)$$

(iii) Ahora, cogiendo  $x_1 = 0$ , se satisface también

$$d(f_4^L(t, 0), 0) = |1 - 2^t - 4^t|.$$

Por consiguiente,

$$d(f_4^L(t, 0), 0) - 3^t < 0$$

si y sólo si

$$(1 - 2^t - 4^t)^2 - 9^t < 0.$$

En este caso,  $(1 - 2^t - 4^t)^2 - 9^t = (1 - 2^t - 4^t - 3^t) \cdot (1 - 2^t - 4^t + 3^t)$  se anula por  $t_3 = a_4^L \approx -1,082131498$  y  $t_4 = 0$ . Como  $(1 - 2^t - 4^t)^2 - 9^t < 0$  en  $(t_3, t_4)$ , se obtiene

$$d(f_4^L(t, 0), 0) - 3^t < 0 \quad \text{si } t \in (t_3, t_4). \quad (3.7)$$

Como conclusión, de (3.5) y (3.6), (3.7), y utilizando la continuidad de la función distancia, para todo  $t$ , con  $t \in (t_3, t_2)$ , existe  $x_1^t \in [0, 2\pi)$  tal que

$$d(f_4^L(t, x_1^t), 0) - 3^t = 0,$$

es decir,

$$f_4^L(t, x_1^t) = 3^t e^{iA_t} \quad \text{para algunos } A_t \in [0, 2\pi).$$

Finalmente,

$$1 - 2^t e^{x_1^t i} - 3^t e^{iA_t} - 4^t e^{2x_1^t i} = 0,$$

o equivalentemente,

$$F_4^L(t, x_1^t, A_t) = 0.$$

Teniendo en cuenta el Teorema 45, tenemos la densidad de la proyección de los ceros de  $L_4(z)$  en el intervalo crítico  $[a_4^L, b_4^L]$ , que es lo que queríamos probar. ■

De la misma manera, podemos demostrar el resultado siguiente para el caso  $n = 5$ :

**Teorema 53** [13, Theorem 3.2] *La proyección de los ceros de  $L_5(z)$  es densa en el intervalo*

$$[a_5^L; -0,851212) \cup (-0,563367; 2,3118).$$

**Prueba.** Si

$$\begin{aligned} f_5^L : \mathbb{R} \times [0, 2\pi)^2 &\rightarrow \mathbb{C}, \\ (t, x_1, x_2) &\mapsto 1 - 2^t e^{x_1 i} - 3^t e^{x_2 i} - 4^t e^{2x_1 i}, \end{aligned}$$

entonces, resolviendo numéricamente las ecuaciones obtenemos:

- $d(f_5^L(t, \frac{3\pi}{2}, 0), 0) - 5^t = |1 + 3^t + 4^t + i2^t| - 5^t > 0$  si  $t \in [a_5^L; 2,133035)$ ;
- $d(f_5^L(t, 0, 0), 0) - 5^t = |1 - 2^t - 3^t - 4^t| - 5^t > 0$  si  $t \in (-0,851212; 2,3118)$ ;
- $d(f_5^L(t, 0, 0), 0) - 5^t = |1 - 2^t - 3^t - 4^t| - 5^t < 0$  si  $t \in (a_5^L; -0,851212)$ ;
- $d(f_5^L(t, 0, \pi), 0) - 5^t = |1 - 2^t + 3^t - 4^t| - 5^t < 0$  si  $t \in (-0,563367; b_5^L]$ .

Entonces, utilizando la continuidad de la función distancia, para todo  $t$ , con  $t \in [a_5^L; -0,851212) \cup (-0,563367; 2,3118)$ , existe  $x_1^t, x_2^t \in [0, 2\pi)$  tal que

$$d(f_5^L(t, x_1^t, x_2^t), 0) - 5^t = 0,$$

es decir,

$$f_5^L(t, x_1^t, x_2^t) = 5^t e^{iBt} \text{ para alguno } B_t \in [0, 2\pi),$$

y entonces

$$1 - 2^t e^{x_1^t i} - 3^t e^{x_2^t i} - 4^t e^{2x_1^t i} - 5^t e^{iBt} = 0,$$

o de forma equivalente

$$F_5^L(t, x_1^t, x_2^t, B_t) = 0.$$

Teniendo en cuenta el Teorema 45, obtenemos lo que queríamos. ■

### 4.3.5. El caso general.

Vamos a estudiar algunas propiedades del caso general relacionadas con el Teorema 45.

**Teorema 54** *Sea  $z_0 := t_0 + iy_0$  un cero de  $L_n(z)$ . Entonces, considerando  $\mathbf{x} = y_0 \mathbf{p}$ , se cumple que  $F_n^L(t_0, \mathbf{x}) = 0$ , donde  $\mathbf{p} = (\log 2, \log 3, \dots, \log p_{k_n})$ .*

**Prueba.** Si  $z_0 := t_0 + iy_0$  es un cero de  $L_n(z)$ , entonces

$$1 - 2^{t_0} 2^{iy_0} - 3^{t_0} 3^{iy_0} - \dots - n^{t_0} n^{iy_0} = 0.$$

Vamos a demostrar que existen  $x_1, x_2, \dots, x_{k_n}$  tales que

$$F_n^L(t_0, x_1, x_2, \dots, x_{k_n}) = 0,$$

donde  $k_n$  es el número de primos menores o iguales a  $n$ . En efecto, si tomamos

$$\begin{aligned} x_1 &= y_0 \cdot \log 2, \\ x_2 &= y_0 \cdot \log 3, \\ x_3 &= y_0 \cdot \log 5, \\ &\dots \quad \dots \\ x_{k_n-1} &= y_0 \cdot \log p_{k_n-1}, \\ x_{k_n} &= y_0 \cdot \log p_{k_n}, \end{aligned}$$

entonces

$$F_n^L(t_0, x_1, x_2, \dots, x_{k_n}) = 1 - 2^{t_0} 2^{iy_0} - 3^{t_0} 3^{iy_0} - \dots - n^{t_0} n^{iy_0} = 0,$$

y por el Teorema 45,  $t_0 \in R_n^L$ . ■

Ahora vamos a generalizar el teorema utilizando el lema siguiente (podemos observar que un cero de  $L_n(z)$  cumple la condición del lema).

**Notación 55** *Sea  $L_n^*(z) := L_n(z) + p_{k_n}^z$ , con  $p_{k_n}$  siendo el mayor primo menor o igual que  $n$ .*

**Lema 15** [13, Proposition 4.3] *Sea  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que existe  $y_0 \in \mathbb{R}$  tal que*

$$|L_n^*(t_0 + iy_0)| = p_{k_n}^{t_0}.$$

*Entonces,  $t_0 \in R_n^L$ , es decir,  $F_n^L(t_0, \mathbf{x}) = 0$  para alguno  $\mathbf{x}$ .*

**Prueba.** Se considera la función

$$f_n^L(t_0, x_1, x_2, \dots, x_{k_n-1}) = 1 - \sum_{m=2, m \neq p_{k_n}}^n m^t e^{\langle c_m, (x_1, \dots, x_{k_n-1}) \rangle}.$$

Si  $t_0$  y  $y_0$  satisfacen

$$|L_n^*(t_0 + iy_0)| = p_{k_n}^{t_0},$$

tomando

$$\begin{aligned} x_1 &= y_0 \cdot \log 2 \\ x_2 &= y_0 \cdot \log 3 \\ x_3 &= y_0 \cdot \log 5 \\ &\dots \quad \dots \\ x_{k_n-1} &= y_0 \cdot \log p_{k_n-1}, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} |f_n^L(t_0, x_1, x_2, \dots, x_{k_n-1})| &= |1 - 2^{t_0} 2^{iy_0} - 3^{t_0} 3^{iy_0} - \dots - n^{t_0} n^{iy_0} + p_{k_n}^{t_0} p_{k_n}^{iy_0}| = \\ &|L_n^*(t_0 + iy_0)| = p_{k_n}^{t_0}, \end{aligned}$$

es decir,

$$f_n^L(t_0, x_1, x_2, \dots, x_{k_n-1}) = p_{k_n}^{t_0} e^{iA_{t_0}}, \quad \text{para algún } A_{t_0} \in [0, 2\pi).$$

Luego, tomando  $x_{k_n} = A_{t_0}$ , tenemos

$$F_n^L(t_0, x_1, x_2, \dots, x_{k_n}) = 0,$$

y, por tanto,  $t_0 \in R_n^L$ . ■

El recíproco del lema anterior también es cierto.

**Lema 16** [13, Proposition 4.4] *Dado  $t_0 \in R_n^L$ , existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que*

$$|L_n^*(t_0 + i\lambda)| = p_{k_n}^{t_0}.$$

**Prueba.** Si  $t_0 \in R_n^L$ , existe una sucesión de ceros  $(s_m = \sigma_m + it_m)_{m=1,2,\dots}$  de  $L_n(z)$  tal que

$$t_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m.$$

Teniendo en cuenta la definición de  $L_n^*(z)$ , cada cero  $s_m$  de  $L_n(z)$  satisface  $L_n^*(s_m) = p_{k_n}^{\sigma_m}$ . Para cada  $m = 1, 2, \dots$ , tenemos

$$|1 - 2^{\sigma_m + it_m} - 3^{\sigma_m + it_m} - \dots - p_{k_n-1}^{\sigma_m + it_m} - \dots - n^{\sigma_m + it_m}| = p_{k_n}^{\sigma_m}. \quad (3.8)$$

Se puede observar que la sucesión  $(e^{it_m})_{m=1,2,\dots}$  está acotada, entonces se puede encontrar una subsucesión  $(e^{it_{m_j}})_{j=1,2,\dots}$  tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} e^{it_{m_j}} = e^{i\lambda}, \text{ para algún } \lambda \in [0, 2\pi).$$

Considerando la igualdad (3.8) para  $m_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , y tomando  $j \rightarrow \infty$ , tenemos

$$|1 + 2^{t_0} e^{i\lambda \log 2} + 3^{t_0} e^{i\lambda \log 3} + \dots + p_{k_n-1}^{t_0} e^{i\lambda \log p_{k_n-1}} + \dots + n^{t_0} e^{i\lambda \log n}| = p_{k_n}^{t_0},$$

o de manera equivalente

$$|L_n^*(t_0 + i\lambda)| = p_{k_n}^{t_0}.$$

■

En consecuencia, hemos demostrado el siguiente resultado que caracteriza los puntos del conjunto  $R_n^L$ :

**Teorema 56** [13, Theorem 4.5] *Un número real  $\sigma$  pertenece a*

$$R_n^L \equiv \overline{\{\operatorname{Re} z : L_n(z) = 0\}}$$

*si, y sólo si, la curva de nivel  $|L_n^*(z)| = p_{k_n}^\sigma$  corta a la recta vertical  $x = \sigma$ .*

Ahora, vamos a demostrar el teorema siguiente que nos permite determinar algunos puntos del conjunto  $R_n^L$ .

**Teorema 57** [13, Corollary 4.6] *Sea  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq 4$ , y sea  $z_0$  un cero de  $L_n^*(z)$  con  $\operatorname{Re} z \geq 0$ . Entonces podemos obtener  $\varepsilon > 0$  tal que*

$$(\operatorname{Re}(z_0) - \varepsilon, \operatorname{Re}(z_0) + \varepsilon) \subset R_n^L.$$

**Prueba.** Sea  $z_0 := t_0 + iy_0$  un cero de  $L_n^*(z)$ , con  $t_0 \geq 0$ , es decir,

$$1 - 2^{t_0} 2^{iy_0} - 3^{t_0} 3^{iy_0} - \dots - n^{t_0} n^{iy_0} + p_{k_n}^{t_0} p_{k_n}^{iy_0} = 0.$$

Se considera la función

$$f_n^L(t_0, x_1, x_2, \dots, x_{k_n-1}) = 1 - \sum_{m=2, m \neq p_{k_n}}^n m^t e^{\langle c_m, (x_1, \dots, x_{k_n-1}) \rangle i}.$$

Se puede observar que si tomamos  $x_1 = x_2 = \dots = x_{k_n-1} = 0$ , entonces

$$|f_n^L(t_0, x_1, x_2, \dots, x_{k_n-1})| = |1 - 2^{t_0} - \dots - n^{t_0} + p_{k_n}^{t_0}| = |-r^2 - 3^{t_0} - \dots - n^{t_0} + p_{k_n}^{t_0}|,$$

donde  $r \in \mathbb{R}$  es tal que  $1 - 2^{t_0} = -r^2$  (hay que recordar que  $t_0 \geq 0$ ). Entonces,

$$|f_n^L(t_0, 0, 0, \dots, 0)| = |r^2 + 3^{t_0} + \dots + n^{t_0} - p_{k_n}^{t_0}| > p_{k_n}^{t_0}.$$

Por otro lado, tomando

$$\begin{aligned} x_1 &= y_0 \cdot \log 2, \\ x_2 &= y_0 \cdot \log 3, \\ x_3 &= y_0 \cdot \log 5, \\ &\dots \quad \dots \\ x_{k_n-1} &= y_0 \cdot \log p_{k_n-1}, \\ x_{k_n} &= y_0 \cdot \log p_{k_n}, \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} F_n^L(t_0, x_1, x_2, \dots, x_{k_n}) &= \\ 1 - 2^{t_0} e^{ix_1} - 3^{t_0} e^{ix_2} - \dots - p_{k_n}^{t_0} e^{ix_{k_n}} - \dots - n^{t_0} e^{\langle c_n, (x_1, \dots, x_{k_n}) \rangle i} &= \\ 1 - 2^{t_0} 2^{iy_0} - 3^{t_0} 3^{iy_0} - \dots - p_{k_n}^{t_0} e^{ix_{k_n}^{t_0}} - \dots - n^{t_0} n^{iy_0} + p_{k_n}^{t_0} p_{k_n}^{iy_0} &= -p_{k_n}^{t_0} e^{ix_{k_n}^{t_0}}. \end{aligned}$$

Eso nos lleva a

$$f_n^L(t_0, x_1, x_2, \dots, x_{k_n-1}) = F_n^L(t_0, x_1, x_2, \dots, x_{k_n}) + p_{k_n}^{t_0} e^{ix_{k_n}^{t_0}} = 0.$$

Usando la continuidad, podemos decir que existe  $(x_1^{t_0}, \dots, x_{k_n-1}^{t_0}) \in \mathbb{R}^{k_n-1}$  tal que

$$|f_n^L(t_0, x_1^{t_0}, x_2^{t_0}, \dots, x_{k_n-1}^{t_0})| = p_{k_n}^{t_0},$$

es decir,

$$f_n^L(t_0, x_1^{t_0}, x_2^{t_0}, \dots, x_{k_n-1}^{t_0}) = p_{k_n}^{t_0} e^{iA_{t_0}}, \quad \text{para algùn } A_{t_0} \in [0, 2\pi).$$

Ahora, tomando  $x'_{k_n} = A_{t_0}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} F_n^L(t_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_{k_n}, x'_{k_n+1}) &= f_n^L(t_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_{k_n-1}) - p_{k_n}^{t_0} e^{ix'_{k_n}} = \\ &= p_{k_n}^{t_0} e^{iA_{t_0}} - p_{k_n}^{t_0} e^{iA_{t_0}} = 0, \end{aligned}$$

y, en consecuencia,  $t_0 \in R_n^L$ .

■

**Proposición 58** [13, Corollary 4.7] *Sea  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq 2$ . Sean  $a_{n,1}^L$  la única solución de  $L_n(x) = 0$  y  $D$  el conjunto de las soluciones de la ecuación*

$$-1 + 2^x + \dots + (p_{k_n} - 1)^x - p_{k_n}^x + (p_{k_n} + 1)^x + \dots + n^x = 0.$$

*Entonces  $a_{n,1}^L$  pertenece  $R_n^L$  y  $d$  es un elemento de  $R_n^L$ , para todo  $d \in D$ .*

**Prueba.**

Sabemos ya que la función  $L_n(x)$  tiene un único cero, que notamos por  $a_{n,1}^L$ .

Por otro lado, el número de ceros de la función

$$g(x) := -1 + 2^x + \dots + (p_{k_n} - 1)^x - p_{k_n}^x + (p_{k_n} + 1)^x + \dots + n^x$$

depende del valor de  $n$ . En efecto:

- Si  $n$  no es un número primo, entonces la derivada de  $g(x)$  viene dada por  $2^x \log 2 + \dots + (p_{k_n} - 1)^x \log(p_{k_n} - 1) - p_{k_n}^x \log p_{k_n} + (p_{k_n} + 1)^x \log(p_{k_n} + 1) + \dots + n^x \log n$ , que es estrictamente positiva y, entonces,  $g(x)$  es estrictamente creciente.

Como hemos hecho antes, teniendo en cuenta que  $g(x) \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow +\infty$  y  $g(x) \rightarrow -1$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ , entonces  $g(x)$  tiene un único cero.

- Si  $n$  es un número primo, entonces  $g(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow +\infty$  y  $g(x) \rightarrow -1$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ . Además,  $g'(x)$  puede tomar el valor 0 y, entonces, la función  $g(x)$  no es monótona.

Notamos por  $D$  el conjunto de las soluciones de  $g(x) = 0$ .

Ahora podemos observar que  $a_{n,1}^L$  y los puntos de  $D$  cumplen  $L_n^*(x) = p_{k_n}^x$  y  $-L_n^*(x) = p_{k_n}^x$  respectivamente, es decir,  $|L_n^*(x)| = p_{k_n}^x$ . Aplicando el Teorema 56, se obtiene el resultado. ■

**Remark 3** Dado  $n \geq 2$ , el valor  $a_{n,1}^L$  coincide con  $a_n^L = \inf\{x \in \mathbb{R} : L_n(x + iy) = 0, \text{ para algún } y \in \mathbb{R}\}$  (véase la Proposición 48). Entonces, la proposición anterior demuestra parcialmente la conjetura que M. Lapidus y M. Van Frankenhuysen formularon en [31, p.68] usando experimentos numéricos para  $n = 4$ .

## 4.4. Aplicaciones a otras cuerdas non-lattice.

### 4.4.1. La cuerda de oro.

Una de las cuerdas non-lattice más sencillas es la cuerda de oro [31, p.50], con factores de escala  $r_1 = \frac{1}{2}$  y  $r_2 = \frac{1}{2^\phi}$ , donde  $\phi$  es el número áureo dado por

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ahora, sea  $GS(z)$  la función entera  $1 - 2^z - 2^{\phi z}$ , es decir,  $GS(z) = 1 - e^{z \log 2} - e^{z \log 2^\phi}$ . Podemos observar que  $\log 2$  y  $\log 2^\phi$  son linealmente independientes sobre  $\mathbb{Q}$ . En efecto, si  $a$  y  $b$  son números racionales distintos de 0, entonces

$$a \log 2 + b \log 2^\phi = a \log 2 + b \log \left( 2^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \right) = \left[ a + \frac{b}{2} + \frac{b\sqrt{5}}{2} \right] \log 2,$$

y  $a \log 2 + b \log 2^\phi$  es igual a 0 si, y solo si,  $\frac{a}{b} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , lo que es imposible porque el término de izquierda es racional y el de la derecha no lo es. Por tanto  $a = b = 0$  y como consecuencias  $\log 2$  y  $\log 2^\phi$  son linealmente independientes sobre  $\mathbb{Q}$ .

Sea  $[a^{GS}, b^{GS}]$  la banda crítica del polinomio exponencial  $GS(z)$  y consideremos los números

$$x_0^{GS} := \inf \{ \sigma \in \mathbb{R} : 1 \leq 2^\sigma + 2^{\sigma\phi} \}$$



y

$$x_1^{GS} := \sup \{ \sigma \in \mathbb{R} : 1 + 2^\sigma \geq 2^{\sigma\phi} \}.$$

Se tiene que  $x_0^{GS} < x_1^{GS}$ . Por otro lado, la relación entre el nuevo intervalo  $[x_0^{GS}, x_1^{GS}]$  y el intervalo crítico  $[a^{GS}, b^{GS}]$  viene dada en el siguiente resultado.

**Lema 17** *Se verifica que  $[a^{GS}, b^{GS}] \subset [x_0^{GS}, x_1^{GS}]$ .*

**Prueba.** En primer lugar, vamos a probar que  $b^{GS} \leq x_1^{GS}$ . En efecto, como

$$b^{GS} := \sup \{ \operatorname{Re} z : GS(z) = 0 \},$$

asumiendo que  $b^{GS} > x_1^{GS}$ , existe  $w = r + is$  un cero de  $GS(z)$  con  $r > x_1^{GS}$ . Entonces, de la definición de  $x_1^{GS}$  tenemos

$$1 + 2^r < 2^{r\phi}. \quad (4.1)$$

Por otro lado, como  $GS(w) = 0$ , podemos escribir

$$1 - 2^w = 2^{w\phi},$$

y tomando el módulo obtenemos

$$2^{r\phi} \leq 1 + 2^r,$$

lo que contradice (4.1).

Finalmente, tenemos lo que queríamos, es decir,  $b^{GS} \leq x_1^{GS}$ .

En segundo lugar, vamos a demostrar que  $a^{GS} \geq x_0^{GS}$ .

Si no fuese el caso,  $a^{GS} < x_0^{GS}$ , y añadiendo el hecho que

$$a^{GS} := \inf \{ \operatorname{Re} z : GS(z) = 0 \},$$

existe  $v = t + iu$  un cero de  $GS(z)$  con  $t < x_0^{GS}$ . Entonces, de la definición de  $x_0^{GS}$ , tenemos

$$1 > 2^t + 2^{t\phi}. \quad (4.2)$$

Ahora, como  $GS(v) = 0$ , se obtiene

$$2^v + 2^{v\phi} = 1$$

y tomando el módulo podemos escribir

$$1 = |2^v + 2^{v\phi}| \leq 2^t + 2^{t\phi},$$

lo que contradice (4.6). Entonces  $a^{GS} \geq x_0^{GS}$ , y se llega a

$$[a^{GS}, b^{GS}] \subset [x_0^{GS}, x_1^{GS}],$$

lo que demuestra el lemma. ■

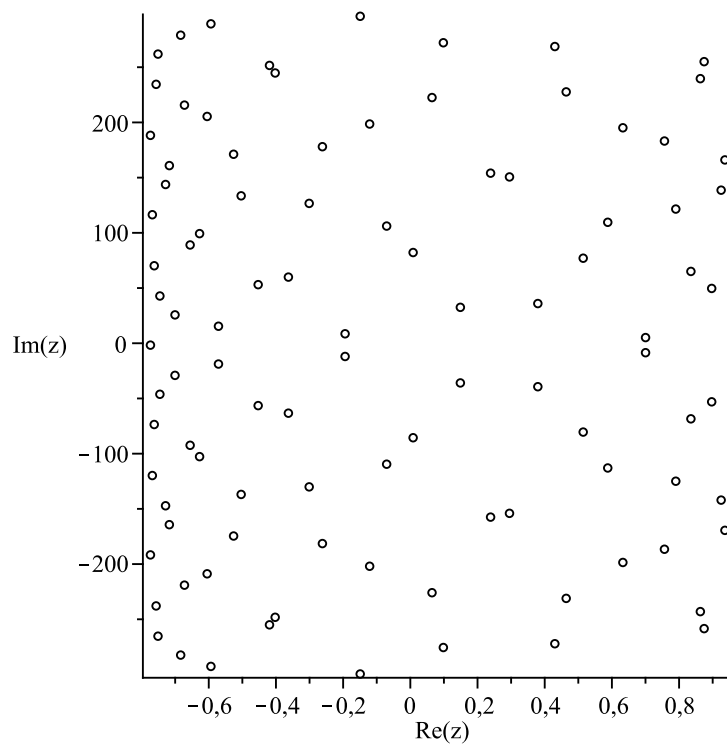


Figura 4.2: ceros de  $GS(z)$

**Teorema 59** *La proyección real de los ceros de  $GS(z)$  es densa en el intervalo  $[a^{GS}, b^{GS}]$ .*

**Prueba.** Hemos verificado ya que la función  $GS(z) = 1 - e^{z \log 2} - e^{z\phi \log 2}$  tiene sus frecuencias  $\{\log 2, \log 2^\phi\}$  linealmente independientes sobre los racionales.

En lugar de utilizar [46, Main Theorem], consideramos

$$f(z) = GS(z) \cdot e^{z \log 3} = e^{z \log 3} - e^{z(\log 2 + \log 3)} - e^{z(\log 2^\phi + \log 3)}.$$

Se puede observar que

$$\{1, \log 3, \log 2 + \log 3, \log 2^\phi + \log 3\}$$

son linealmente independientes sobre  $\mathbb{Q}$  y las funciones  $GS(z)$  y  $f(z)$  tienen el mismo conjunto de ceros. Entonces, se puede utilizar [46, Main Theorem] y obtener, para  $\sigma \in \mathbb{R}$ , las desigualdades

$$1 \leq e^{\sigma \log 2} + e^{\sigma \log 2^\phi}, \quad (4.3)$$

$$e^{\sigma \log 2^\phi} \leq 1 + e^{\sigma \log 2} \quad (4.4)$$

y

$$e^{\sigma \log 2^\phi} \leq 1 + e^{\sigma \log 2}. \quad (4.5)$$

Ahora, teniendo en cuenta el anterior lemma, las desigualdades (4.3) y (4.5) se cumplen para todo  $\sigma$ , con  $\sigma + it$  en la banda crítica. Además, (4.4) se cumple para todo real  $\sigma$ . En consecuencia, la condición para  $GS(z)$  (que es la misma para  $f(z)$ ) de tener ceros cerca de cualquier recta paralela al eje imaginario dentro de la banda crítica se cumple y tenemos lo que queríamos.

■

#### 4.4.2. La cuerda de oro+

Ahora vamos a considerar la cuerda de oro+, la cual se define como una cuerda non lattice y no genérica con factores de escala  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2^\phi}$  y  $\frac{1}{2^2}$  (véase [31, p. 71]). Entonces, tenemos

$$GS_+(z) = 1 - 2^z - 2^{\phi z} - 2^{2z}.$$

Para este caso, como las frecuencias no son linealmente independientes sobre los racionales, utilizaremos el Teorema 45 para hallar intervalos de densidad. En concreto, vamos a utilizar las ideas empleadas para la función  $L_4(z)$ .

Sea

$$F_{GS_+} : \mathbb{R} \times [0, 2\pi)^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(t, x_1, x_2) \mapsto 1 - 2^t e^{x_1 i} - 2^{\phi t} e^{x_2 i} - 4^t e^{2x_1 i}$$

la función que aparece en el Teorema 45, pero que ajustamos a la función  $GS_+(z)$ .

Sea  $[a^{GS_+}, b^{GS_+}]$  la banda crítica del polinomio exponencial  $GS_+(z)$  y consideramos los números

$$x_0^{GS_+} := \inf \{ \sigma \in \mathbb{R} : 1 \leq 2^\sigma + 2^{\sigma\phi} + 2^{2\sigma} \}$$

y

$$x_1^{GS_+} := \sup \{ \sigma \in \mathbb{R} : 1 + 2^\sigma + 2^{\sigma\phi} \geq 2^{2\sigma} \}.$$

**Lema 18** *Se cumplen  $a^{GS_+} = x_0^{GS_+}$  y  $b^{GS_+} = x_1^{GS_+}$ .*

**Prueba.** En primer lugar demostraremos que  $b^{GS_+} \leq x_1^{GS_+}$ . En efecto, si  $z = x + iy$ , con  $x > x_1^{GS_+}$ , entonces

$$2^{2x} > 1 + 2^x + 2^{\phi x} \geq |1 + 2^z + 2^{\phi z}|$$

lo que nos dice que  $GS_+(z) \neq 0$  para  $x > x_1^{GS_+}$  y obtenemos el resultado deseado.

Por otro lado, podemos observar que

$$F_{GS_+}(x_1^{GS_+}, \pi, \pi) = 1 + 2^\sigma + 2^{\sigma\phi} - 2^{2\sigma} = 0,$$

es decir,  $x_1^{GS_+}$  es un punto del conjunto formado por la clausura de las partes reales de los ceros de  $GS_+(z)$ , lo que implica  $x_1^{GS_+} \leq b^{GS_+}$ .

Ahora vamos a probar que  $a^{GS_+} \geq x_0^{GS_+}$ . De lo contrario,  $a^{GS_+} < x_0^{GS_+}$ , y considerando

$$a^{GS_+} := \inf \{ \operatorname{Re} z : GS_+(z) = 0 \},$$

existe  $v = t + iu$  un cero de  $GS_+(z)$  con  $t < x_0^{GS_+}$ . Entonces, de la definición de  $x_0^{GS_+}$ , tenemos

$$1 > 2^t + 2^{t\phi} + 2^{2t}. \quad (4.6)$$

Como  $GS_+(v) = 0$ , tenemos

$$2^v + 2^{v\phi} + 2^{2v} = 1$$

y tomando el módulo podemos escribir

$$1 = |2^v + 2^{v\phi} + 2^{2v}| \leq 2^t + 2^{t\phi} + 2^{2t},$$

lo que contradice (4.6).

En conclusión,  $a^{GS_+} \geq x_0^{GS_+}$ , como dijimos antes y, además, como  $GS_+(x_0^{GS_+} + i0) = 0$ , deducimos que  $a^{GS_+} \leq x_0^{GS_+}$ , lo que nos da el resultado.

■

Numéricamente, los límites del intervalo crítico vienen dados por  $a^{GS_+} = -1,074468745$  y  $b^{GS_+} = 1,780371302$ .

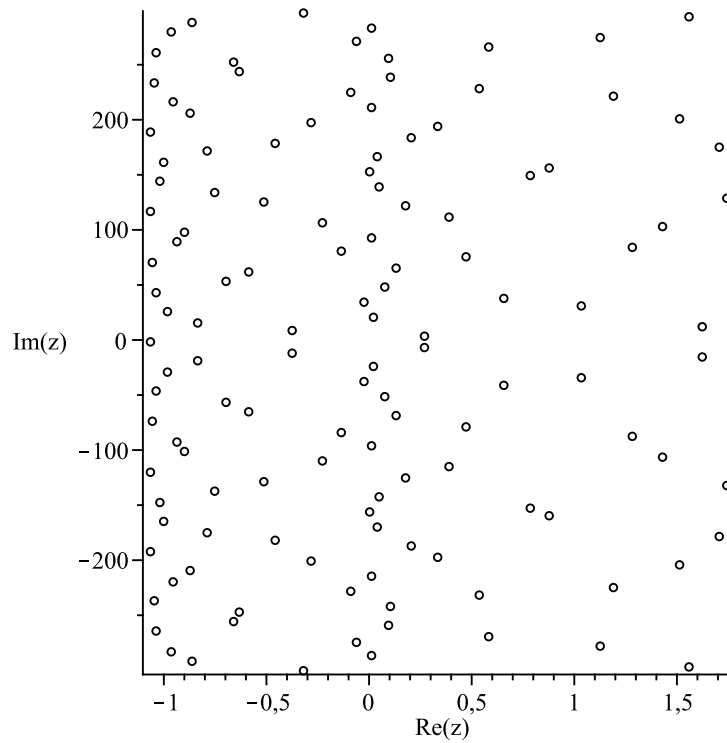


Figura 4.3: ceros de  $GS_+(z)$

**Teorema 60** [13, Theorem 5.2] *Las partes reales de las dimensiones complejas de la cuerda de oro+ son densas en su intervalo crítico  $[a^{GS_+}, b^{GS_+}]$ .*

**Prueba.** Como antes, sea

$$\begin{aligned}
 F_{GS_+} : \mathbb{R} \times [0, 2\pi)^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\
 (t, x_1, x_2) &\mapsto 1 - 2^t e^{x_1 i} - 2^{\phi t} e^{x_2 i} - 4^t e^{2x_1 i}
 \end{aligned}$$

la función que aparece en el Teorema 45, ajustada a la función  $GS_+(z)$ .

Consideramos también a la función

$$\begin{aligned}
 f_{GS_+} : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{C} \\
 (t, x_1) &\mapsto 1 - 2^t e^{x_1 i} - 4^t e^{2x_1 i}.
 \end{aligned}$$

Tenemos las siguientes desigualdades:

(i) Para todo real  $t$ , se cumple

$$d(f_{GS_+}(t, 3\pi/2), 0) = |1 + i2^t + 4^t| = \sqrt{(1 + 4^t)^2 + 4^t} = \sqrt{4^{2t} + 3 \cdot 4^t + 1} > 2^{\phi t},$$

es decir,

$$d(f_{GS_+}(t, 3\pi/2), 0) - 2^{\phi t} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.7)$$

(ii) Tomando  $x_1 = \pi$ , se cumple también que

$$d(f_{GS_+}(t, \pi), 0) = |1 + 2^t - 4^t|.$$

Lo que nos da

$$d(f_{GS_+}(t, \pi), 0) - 2^{\phi t} < 0$$

si, y sólo si,

$$(1 + 2^t - 4^t)^2 - 2^{2\phi t} < 0.$$

Como  $(1 + 2^t - 4^t)^2 - 2^{2\phi t} = (1 + 2^t - 4^t - 2^{\phi t}) \cdot (1 + 2^t - 2^{2t} + 2^{\phi t})$  tiene dos ceros reales,  $t_1 = 0$  y  $t_2 = b^{GS_+}$ . Como  $(1 + 2^t - 4^t)^2 - 2^{2\phi t} < 0$  si  $t \in (t_1, t_2)$ , obtenemos

$$d(f_{GS_+}(t, \pi), 0) - 2^{\phi t} < 0 \quad \text{si } t \in (t_1, t_2). \quad (4.8)$$

(iii) Ahora, cogiendo  $x_1 = 0$ , se cumple también que

$$d(f_{GS_+}(t, 0), 0) = |1 - 2^t - 4^t|.$$

Como consecuencia,

$$d(f_{GS_+}(t, 0), 0) - 2^{\phi t} < 0$$

si, y sólo si,

$$(1 - 2^t - 4^t)^2 - 2^{2\phi t} < 0.$$

En este caso, se obtiene que

$$(1 - 2^t - 4^t)^2 - 2^{2\phi t} = (1 - 2^t - 4^t - 2^{\phi t})(1 - 2^t - 4^t + 2^{\phi t})$$

que se anula para  $t_3 = a^{GS+}$  y  $t_4 = 0$ .

Por consiguiente, como  $(1 - 2^t - 4^t)^2 - 2^{2\phi t} < 0$  si  $t \in (t_3, t_4)$ , se puede escribir que

$$d(f_{GS_+}(t, 0), 0) - 2^{\phi t} < 0 \text{ si } t \in (t_3, t_4), \quad (4.9)$$

es decir,  $t \in (a^{GS+}, 0)$ .

Ahora, utilizando (4.7), (4.8) y (4.9), y la continuidad de la función distancia, para todo  $t$ , con  $t \in (a^{GS+}, b^{GS+})$ , existe  $x_1^t \in [0, 2\pi)$  tal que

$$d(f_{GS_+}(t, x_1^t), 0) - 2^{\phi t} = 0,$$

lo que significa que

$$f_{GS_+}(t, x_1^t) = 2^{\phi t} e^{iA_t} \text{ para alguno } A_t \in [0, 2\pi).$$

Finalmente

$$1 - 2^t e^{x_1^t i} - 2^{\phi t} e^{iA_t} - 4^t e^{2x_1^t i} = 0,$$

que es equivalente

$$F_{GS_+}(t, x_1^t, A_t) = 0.$$

Teniendo en cuenta el Teorema 45, podemos decir que hay densidad de la proyección de los ceros de  $GS_+(z)$  en  $[a^{GS+}, b^{GS+}]$ , como hemos dicho antes.

■

### 4.4.3. La cuerda de Bessel.

Finalizamos considerando la cuerda de Bessel, definida como la cuerda no genérica non-lattice con factores de escala  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{2^\alpha}$ , donde  $\alpha$  es el número real positivo con la fracción continua  $[[1, 2, 3, 4, \dots]]$  (véase [31, p. 104]). Entonces, tenemos

$$Be(z) = 1 - 2^z - 2^{\alpha z}.$$



Podemos observar que  $\alpha$  no es un número racional, porque la fracción continua que lo representa no es finita.

Como la cuerda de Bessel es similar a la de oro, los argumentos que utilizaremos serán análogos.

En primer lugar, demostramos que  $\log 2$  y  $\log 2^\alpha$  son linealmente independientes sobre  $\mathbb{Q}$ . En efecto, si  $a$  y  $b$  son números racionales distintos de 0, entonces

$$a \log 2 + b \log 2^\alpha = a \log 2 + b\alpha \log 2 = [a + b\alpha] \log 2.$$

Obtenemos que  $a \log 2 + b \log 2^\alpha$  es igual a 0 si, y sólo si,  $\frac{a}{b} = -\alpha$ , lo que no es posible porque el término de la izquierda es racional y el de la derecha no lo es. Entonces,  $a = b = 0$  y  $\log 2$  y  $\log 2^\alpha$  son linealmente independientes sobre  $\mathbb{Q}$ .

En segundo lugar, repitiendo verbatim el argumento del caso de la cuerda de oro, tenemos el lema siguiente:

**Lema 19** *Se cumple que*

$$[a^{Be}, b^{Be}] \subset [x_0^{Be}, x_1^{Be}],$$

donde  $[a^{Be}, b^{Be}]$  es la banda crítica de  $Be(z)$ , siendo

$$x_0^{Be} := \inf \{ \sigma \in \mathbb{R} : 1 \leq 2^\sigma + 2^{\sigma\alpha} \}$$

y

$$x_1^{Be} := \sup \{ \sigma \in \mathbb{R} : 1 + 2^\sigma \geq 2^{\sigma\alpha} \}.$$

Finalmente, podemos de nuevo demostrar el resultado de densidad de las partes reales en toda la banda crítica de  $Be(z)$  repitiendo el argumento del Teorema 59:

**Teorema 61** *La proyección real de los ceros de  $Be(z)$  es densa en su banda crítica  $[a^{Be}, b^{Be}]$ .*

Recordamos que, en la terminología de las cuerdas fractales, todo lo que hemos puesto en esta sección es equivalente a decir que el conjunto de las dimensiones de fractalidad de las cuerdas de *oro*, de *oro+* y de *Bessel* coincide enteramente con sus intervalos críticos.

## Capítulo 5

# Estabilidad de ecuaciones en diferencias de tipo neutro.

**Sumario.** En este capítulo, utilizando el hecho que las sumas parciales de la zeta de Riemann son funciones media-periódicas, las relacionamos con las ecuaciones en diferencias de tipo neutro y estudiamos sus estabilidad. Además, utilizando los resultados del tercer capítulo, mostramos cómo se puede construir de forma explícita una ecuación diferencial inestable y se construyen clases de equivalencia de tales ecuaciones diferenciales. Terminamos con un problema abierto y una posible relación entre ecuación funcional, ecuaciones en diferencias y polinomios de Dirichlet.

---

**Abstract.** In this chapter, using the fact that the partial sums of the Riemann zeta are mean-periodic functions, we relate them to the difference equations of neutral type and study their stability. Furthermore, using the results from the third chapter, we present an explicit method to construct an unstable differential equation and equivalence classes of such differential equations. We finish with an open problem and a possible relationship between functional equation, difference equations and Dirichlet polynomials.

## 5.1. Introducción

En los capítulos anteriores se han utilizado las distintas propiedades de una clase de aproximaciones de la zeta de Riemann, como son las sumas parciales. En particular, se ha trabajado con  $G_n(z) = \zeta_n(-z)$ .

En el primer capítulo se empleó el hecho de que es una función entera de clase  $\mathcal{C}$ . Luego, en el segundo, hemos utilizado, entre otros, el hecho de que sea una función analítica casi-periódica en el sentido de Bohr. En el tercero y cuarto, hemos subrayado que pertenecen a una subfamilia de polinomios exponenciales, que son los polinomios de Dirichlet.

Finalmente, en este último capítulo, como  $G_n(z)$  es también una función media-periódica en el sentido de L. Schwartz [53] o de J. P. Kahane [25], vamos a poner en relieve que, siendo un polinomio de Dirichlet, se puede ver también como el polinomio característico de una ecuación en diferencias de tipo neutro.

Como vimos en el primer capítulo, los ceros de  $G_n(z)$  están colocados cerca del eje imaginario (eso viene de que  $G_n(iz) = H_n(z)$  y que  $H_n(z)$  es una función entera de clase  $\mathcal{C}$ ). Si consideramos  $G_n(z)$ , con  $n$  *pequeño* (es decir con una gran presencia de primos), la distribución de los ceros parece *caótica*, pero si  $n$  es *grande* (por ejemplo  $n \geq 70$ ) vemos aparecer un cierto orden con una extraña estructura respecto a los ceros en el plano complejo. Parece que la presencia de las combinaciones lineales de los primos pusiera una cierta estructura en la distribución de los ceros. Veremos que, en el lenguaje de la teoría de la estabilidad, es como si pasaríamos de una fuerte inestabilidad hacia una fuerte estabilidad de los ceros de un cierto polinomio característico de una ecuación en diferencias de tipo neutro.

Quise poner en relieve el efecto de la presencia de las combinaciones lineales de los logaritmos (es decir, sumas parciales con frecuencias linealmente dependientes) y en las siguientes figuras, obtenidas con el programa Maple, aparece la forma tan especial de la distribución de los ceros cuando se añaden valores de  $n$  que no son primos.

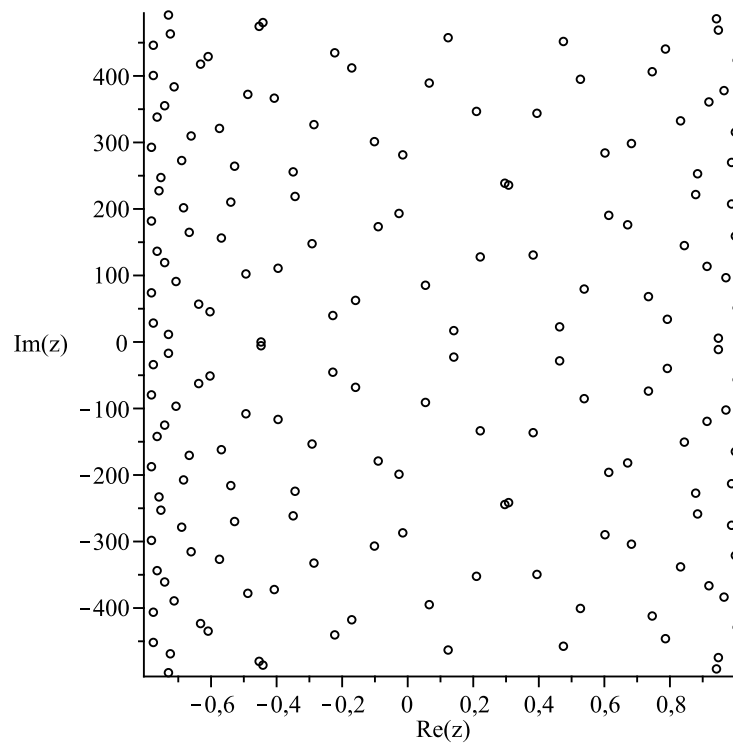


Figura 5.1: ceros de  $G_3(z)$

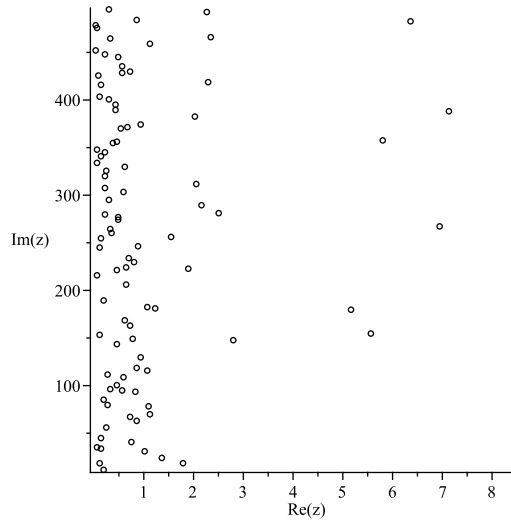


Figura 5.2: ceros de  $G_{70}(z)$  con frecuencias independientes

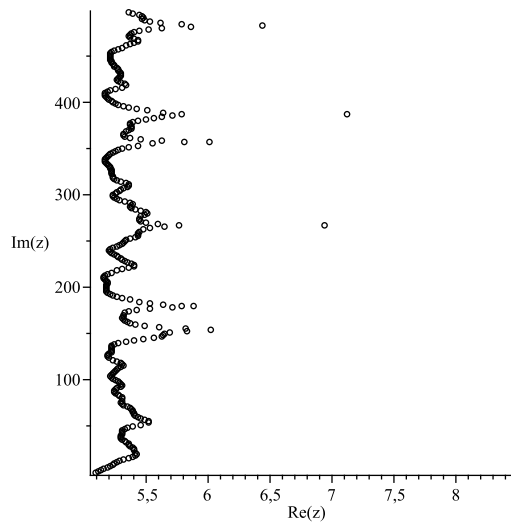


Figura 5.3: ceros de  $G_{70}(z)$  sumando los números no primos de 6 à 26

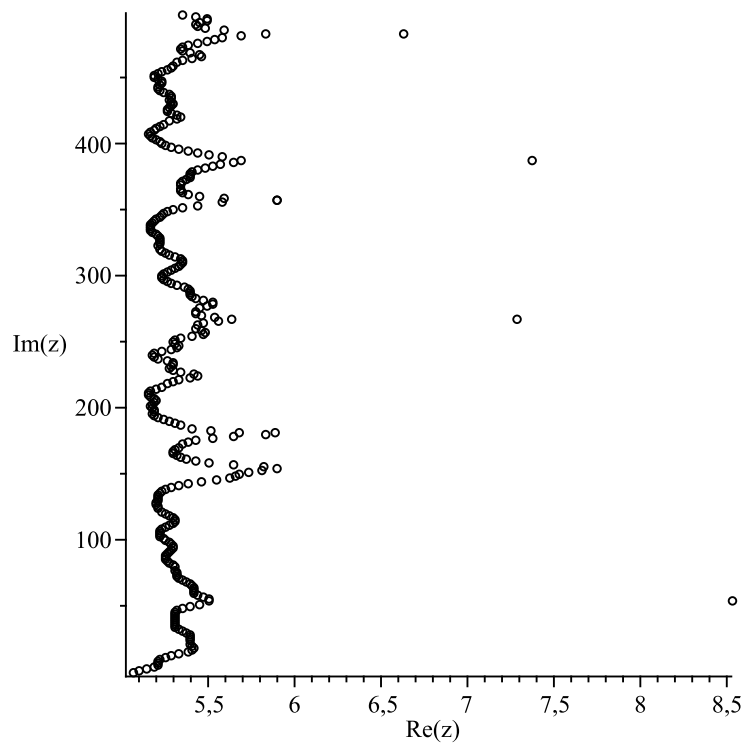


Figura 5.4: ceros de  $G_{70}(z)$  sumando los números no primos de 6 à 42

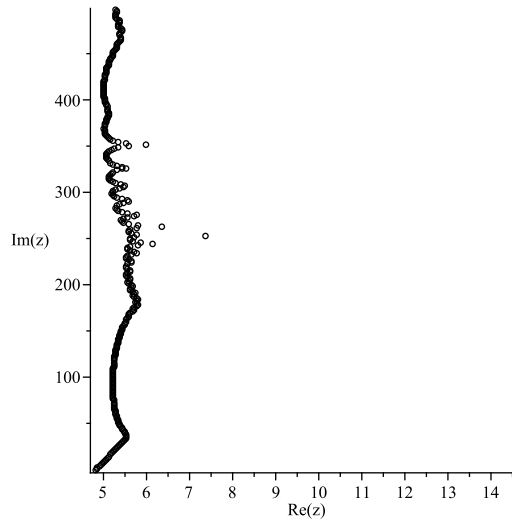


Figura 5.5: ceros de  $G_{70}(z)$  sumando los números no primos de 6 à 70

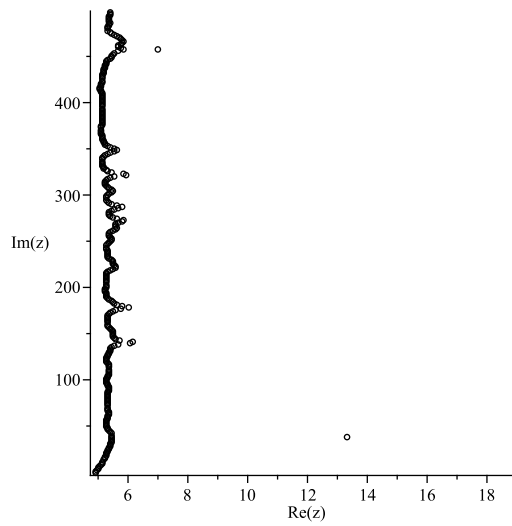


Figura 5.6: ceros de  $G_{70}(z)$  sumando quitando todos los primos de 2 hasta 67

Podríamos clasificar los ceros en dos categorías:

- (a) Los que están dentro de una banda situada en un entorno de la recta  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$  o  $-\frac{1}{2}$  en el caso de  $G_n(z)$  (esto no sorprende si pensamos en la hipótesis de Riemann).
- (b) Unos ceros que se alejan de esta banda formando una curva de tipo “logaritmo”.

¿Cómo se interpreta tal distribución?

Mi meta era contestar a la pregunta anterior y, como  $G_n(z)$  pertenece a la familia de los polinomios exponenciales, empecé a buscar en esta dirección.

Son muchos los artículos que mencionan esta rara repartición, podemos citar, por ejemplo a Borwein en [9].

Descubrí un artículo de Allan M. Krall [28] que menciona unos resultados sobre la distribución de los ceros de polinomios exponenciales y, en particular, los trabajos de Bellman y Cooke [10] y los de Pontrjagin [50].

El estudio de los ceros de polinomios exponenciales ha sido considerado de forma intensa en los campos de análisis complejo, teoría de números, teoría de control, ecuaciones diferenciales (parciales o en diferencias) y teoría de la estabilidad.

El estudio de los ceros de  $G_n(z)$  empezó porque se quería comprender la distribución de átomos de hidrógeno de un combustible. Sabiendo que las ecuaciones en diferencias se utilizan en la ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica y modelos de combustión [47], el origen del estudio de  $G_n(z)$  no es sorprendente. Los que algunos llaman *polinomios exponenciales*, otros, como los de la teoría de la estabilidad o de teoría de control, les llaman *casi-polinomios* y cada campo ha hecho, con su vocabulario relacionado a sus propios problemas, descubrimientos similares o que pueden servir de herramienta los unos a los otros.

En este capítulo trataré de los siguientes puntos:

- (1) A través del análisis complejo, veremos que las funciones enteras del tipo  $G_n(z)$  cumplen unos requisitos que las relacionan con ciertas ecuaciones diferenciales.



- (2) Con la noción de estabilidad asociada a la teoría de las ecuaciones diferenciales, y con lo que se sabe sobre la distribución de los ceros de  $G_n(z)$ , veremos que las ecuaciones diferenciales que tienen a  $G_n(z)$  como polinomio característico son inestables. Acabaremos este utilizando la Bohr-equivalencia para crear clases de equivalencia de ecuaciones diferenciales inestables y con algunas preguntas relacionadas con este tema y que podrían ser objetos de futuras investigaciones.

En este capítulo, no damos una respuesta a la pregunta sobre la repartición de los ceros pero se propone un ángulo de ataque a este problema. Esperamos poder dar una solución completa en futuras investigaciones.

## 5.2. La función $G_n(z)$ como función media-periódica y su relación con las ecuaciones diferenciales

La teoría de funciones media-periódicas partió de un trabajo de Delsarte en 1935. Su importancia, aparte del hecho de que se relaciona con la teoría de las ecuaciones de convolución, viene de que las funciones media-periódicas se encuentran en la confluencia de numerosas ramas matemáticas como, entre otras, análisis armónico, series de Fourier, y, en nuestro caso, las funciones casi-periódicas.

En primer lugar, voy a recordar algunas definiciones y propiedades de las funciones media-periódicas y luego las relacionaré con las funciones casi-periódicas y veremos que  $G_n(z) = 1 + 2^z + \dots + n^z$  se puede ver como una función media-periódica.

Lo que sigue se puede encontrar en [25, Lecture 1].

Se considera  $f(x)$  como una función periódica de período  $a$ , definida en  $\mathbb{R}$  que satisface la ecuación  $f(x) = f(x - a) = 0$ . Esto se puede escribir

$$\int f(x - y) d\mu(y) = 0 \quad (5.1)$$

donde  $d\mu(x)$  es una medida que se escribe como diferencia entre las medidas de Dirac en 0 y  $a$ . Vamos entonces a considerar funciones continuas con valores complejos que cumplen la igualdad (5.1).

**Definición 24** *Se dice de una función que es mean-periódica si es una solución continua con valores complejos de una ecuación del tipo (5.1).*

Notamos por  $\mathcal{C}$  el espacio vectorial topológico de las funciones continuas con valores complejos con la topología de la convergencia compacta. Las soluciones de (5.1) forman, entonces, un subconjunto cerrado de  $\mathcal{C}$ . Exponemos ahora el resultado principal de este párrafo que relaciona los polinomios exponenciales con las funciones media-periódicas. Se puede ver, además, como una caracterización de tales funciones.

**Definición 25** [25, Def. 2, p. 4, Lecture 1] *Las funciones media-periódicas son límites en  $\mathcal{C}$  de combinaciones lineales de polinomios exponenciales que son ortogonales con respecto a medidas de soporte compacto.*

Se puede encontrar el mismo resultado, pero escrito de forma distinta, en [62, Th. 1 p. 269], donde se expone que los polinomios exponenciales son típicas funciones media-periódicas.

Podemos entonces escribir el resultado inmediato siguiente:

**Proposición 62** *La función  $G_n(z) = \sum_{k=1}^n e^{z \ln k}$  es una función media-periódica.*

Hubiéramos podido presentarlo de otra forma utilizando lo que sabemos de la función  $G_n(z)$ , es decir, que es una función casi-periódica y utilizar la relación que hay entre las funciones casi-periódicas y media-periódicas. Antes de escribir esta relación tenemos que recordar varias definiciones de la casi-periodicidad.

**Definición 26** [25, p. 42]

(1) **Definición de Bohr.**

*Sea  $\epsilon > 0$ , se dice que  $\tau$  es un casi-período de  $f \in \mathcal{C}$  si  $|f_{\tau} - f| < \epsilon$ .*

*Una función es casi-periódica en el sentido de Bohr, si para todo  $\epsilon > 0$ , los casi-períodos de  $f$  forman un conjunto relativamente denso, lo que es equivalente a que  $f$  sea límite uniforme en  $\mathbb{R}$  de una progresión de polinomios trigonométricos  $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$  con las frecuencias  $\lambda_n$  reales.*

(2) **Definición de Besicovitch.**

*Una función acotada  $f \in \mathcal{C}$  es casi-periódica si pertenece al subconjunto cerrado generado por  $\{e^{i\lambda x}\}$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . La clausura depende de la*

*métrica  $D(f) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^2 dx$ .*

*Besicovitch demostró que si  $\sum |a(\lambda)|^2 < \infty$ , entonces existe una función  $f$  que se puede escribir de la forma  $\sum a(\lambda) e^{ix\lambda}$ .*

(3) **Definición de Schwartz.**

Se considera el conjunto  $\mathcal{B}$  de las funciones de clase  $C^\infty$  cuyas derivadas están acotadas. Una función  $f \in \mathcal{B}$  es  $\mathcal{B}$ -casi-periódica (notado  $\mathcal{B}.A.P$ ) si el conjunto de sus traslaciones forma un conjunto relativo compacto en  $\mathcal{B}$ . Estas funciones  $f \in \mathcal{B}$  son casi-periódicas en el sentido de Bohr como también sus derivadas.

Notaremos  $M.P$  el conjunto de las funciones media-periódicas. Podemos, entonces, enunciar el resultado que relaciona las funciones media-periódicas con las casi-periódicas:

**Teorema 63** [25, Lecture 1, Theorem p. 42]

$$M.P \cap \mathcal{B} = M.P \cap \mathcal{B}.A.P.$$

Como hemos visto en los capítulos anteriores, la función  $G_n(z)$  cumple todas las condiciones. Podemos verla, pues, como una función media-periódica.

En su famoso artículo (donde expone una conjetura sobre el cociente de polinomios exponenciales), Shapiro [55], pone en relieve la relación que hay entre funciones media-periódicas y ecuaciones diferenciales.

Se introduce un operador de diferencias llamado  $T$  definido por:

$$Tf(z) = \sum_{i=1}^n P_i\left(\frac{d}{dz}\right)f(z + \alpha_i),$$

donde los  $P_i(t)$  son polinomios con coeficientes complejos y los  $\alpha_i$  son números complejos. En este artículo [55], Shapiro busca a las funciones enteras que cumplen la ecuación funcional homogénea

$$Tf = 0$$

y demuestra que estas funciones deben ser media-periódicas. No es sorprendente, entonces, que las funciones del tipo  $G_n(z) = \sum_{k=1}^n e^{z \ln k}$  tengan una cierta relación con ecuaciones diferenciales.

### 5.3. Ecuaciones en diferencias

En esta sección no vamos a desarrollar la inmensa teoría de las ecuaciones en diferencias. Para más información se pueden consultar [10], [35], [29], [61] y [22].

Vamos a presentar lo que son ecuaciones en diferencias y sus relaciones con los polinomios de Dirichlet, llamados “polinomios característicos”, o también quasipolinomios [10]. Damos, en primer lugar, la definición de una ecuación en diferencias.

**Definición 27** Una ecuación en diferencias es una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0x(t) + \sum_{i=1}^n A_i x(t - \tau_i), \quad (5.2)$$

donde  $x(t)$  se llama variable de estado de dimensión  $n$  y  $A_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  es una matriz cuadrada de dimensión  $n$  con coeficientes reales. Los  $\tau_i$  son números reales estrictamente positivos llamados retardos.

**Definición 28** La ecuación característica de (5.2) viene dada por

$$f(s; \tau_1, \dots, \tau_n) := \det \left[ sI - A_0 - \sum_{i=1}^n A_i e^{-s\tau_i} \right] \quad (5.3)$$

donde  $I$  es la matriz unidad.

Debido a la presencia de funciones exponenciales, estamos en presencia de un quasipolinomio y la ecuación tiene una infinidad de raíces llamadas *raíces características*.

Para un conjunto de retardos dado, se dice que (5.2) es *asíntoticamente estable* (nosotros diremos simplemente *estable*) si, y solo, si todos los ceros del polinomio característico están colocados en el semi-plano abierto izquierdo del plano complejo. En el caso contrario se dice que es *inestable*.

En función de la distribución de los ceros (raíces características) del polinomio característico, se pueden distinguir dos categorías de ecuaciones en diferencias. Las que son de tipo retardado o las que son de tipo neutro (véase

[10]). Los ceros de las ecuaciones en diferencias de tipo neutro están repartidos en bandas verticales y pueden tener partes reales positivas como negativas, que es lo que nos interesa.

Con el propósito de entender mejor a estas ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones a la física, hay una amplia literatura sobre el estudio de la distribución de los ceros de polinomios del tipo (5.3). Sin embargo, si los retardos son linealmente dependientes y si el cociente  $\frac{\tau_j}{\tau_i}$  para  $i \neq j$  no es racional, poco se sabe en cuanto a esa distribución.

En [35] se estudia el comportamiento de los ceros de

$$H(\lambda) = 1 - \sum_{j=1}^n a_j e^{-\lambda\tau_j}$$

con los  $\tau_j \in \mathbb{R}^+$ ,  $a_j \in \mathbb{R}$  para  $j = 1, \dots, n$ .

En el plano complejo, la ecuación  $H(\lambda) = 0$  es la ecuación característica de la ecuación en diferencias

$$x(t) = \sum_{j=1}^n a_j x(t - \tau_j),$$

la cual está relacionada con la ecuación en diferencias de tipo neutro

$$\frac{d}{dt}(x(t) - \sum_{j=1}^n a_j x(t - \tau_j)) = b_0 x(t) - \sum_{j=1}^n b_j x(t - \tau_j),$$

siendo los  $b_j$  reales para todo  $j = 1, \dots, n$ .

Basándose en el artículo de Avellar y Hale [2], los autores de [35] se preguntan cómo se ve afectada la distribución de los ceros si se modifican los retardos. Es decir, se estudian nuevos retardos de la forma  $\tau_j + \epsilon$  y hacen tender  $\epsilon$  hacia 0.

Los polinomios que estudiamos, es decir,  $G_n(z)$  son de la forma  $H(\lambda)$ , con los  $a_j = -1$  para todo  $j = 1, \dots, n$ , y los  $\tau_j = \ln j$ . Podemos, entonces, decir que  $G_n(z)$  es un polinomio característico de una ecuación en diferencias de tipo neutro.

Son muchos los artículos que hablan de tales ecuaciones diferenciales pero debido al hecho de que los logaritmos son linealmente dependientes y el cociente de  $\frac{\ln k}{\ln j}$ , para  $k \neq j$ , muchas veces es irracional, no se ha encontrado

todavía un estudio completo de la distribución de los ceros de estos polinomios de Dirichlet.

Pienso que la comprensión de la distribución de los ceros de las sumas parciales de la zeta de Riemann podría pasar por el uso de ecuaciones en diferencias de tipo neutro utilizando como base al artículo [35].

Se puede encontrar en [22, page 4] una forma distinta de introducir las ecuaciones diferenciales. Los autores utilizan la noción de semi-grupos, operadores lineales y espectro esencial. Es muy interesante ver cómo, a través de métodos distintos, como por ejemplo, operadores compactos y radios del espectro, los autores Hale y Verduyn Lunel [22, p.8-11] vuelven a presentar resultados obtenidos con técnicas del análisis complejo.

## 5.4. Clases de equivalencia de ecuaciones en diferencias con retardo de tipo neutro.

En este último párrafo vamos a utilizar los datos que tenemos sobre los ceros de  $G_n(z)$  y que hemos expuesto en el Capítulo 2 y los vamos a relacionar con las ecuaciones diferenciales.

Sea  $\mathcal{S}_N$  la clase de todas las ecuaciones en diferencias de tipo neutro estables. Tenemos un primer resultado.

**Proposición 64** *Sean  $E^{(n)}(z)$  y  $F^{(n)}(z)$  dos ecuaciones en diferencias de tipo neutro cuyos polinomios característicos respectivos son los polinomios de Dirichlet  $P_n(z)$  y  $Q_n(z)$ . Si  $P_n(z)$  y  $Q_n(z)$  son Bohr-equivalentes, entonces tenemos la equivalencia siguiente*

$$E^{(n)}(z) \in \mathcal{S}_N \Leftrightarrow F^{(n)}(z) \in \mathcal{S}_N.$$

**Prueba.** Teniendo en cuenta las propiedades de la Bohr-equivalencia, bastará probar una implicación.

Como la ecuación diferencial  $E^{(n)}(z)$  es estable, los ceros de su polinomio (de Dirichlet) característico  $P_n(z)$  tienen todas sus partes reales en el semi-plano abierto izquierdo del plano complejo. Sabemos que  $Q_n(z)$ , polinomio característico de  $F^{(n)}(z)$ , es Bohr-equivalente a  $P_n(z)$ , lo que implica que sus ceros no pueden tener sus partes reales en el semi-plano abierto derecho del

plano complejo y como consecuencia es un polinomio *estable*, lo que implica que  $F^{(n)}(z)$  también lo es. ■

Si notamos, ahora,  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}^c$  el conjunto de las ecuaciones en diferencias de tipo neutro que son inestables y  $\mathcal{E}_{G_n}$  el conjunto de las ecuaciones en diferencias de tipo neutro que tienen al polinomio de Dirichlet  $G_n(z) = \sum_{k=1}^n e^{(\ln k)z}$  como polinomio característico, podemos escribir lo siguiente:

**Teorema 65**  $\mathcal{E}_{G_n} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{N}}^c$ .

**Prueba.** G. Mora demostró en [41, th. 2 p. 6] que las sumas parciales de la zeta de Riemann  $\zeta_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^z}$  tienen infinitos ceros en cada semi-plano  $\{z; \operatorname{Re} z < 0\}$  y  $\{z; \operatorname{Re} z > 0\}$ . Sabemos que  $G_n(z) = \zeta_n(-z)$  para todo  $n > 2$  y  $z \in \mathbb{C}$ , lo que implica que  $G_n(z)$  es un polinomio de Dirichlet inestable. ■

Y de forma más general, si notamos  $\mathcal{BE}_{G_n}$  el conjunto de todas las ecuaciones en diferencias de tipo neutro cuyo polinomio característico es Bohr-equivalente a  $G_n(z)$ , podemos escribir:

**Corolario 6**  $\mathcal{BE}_{G_n} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{N}}^c$ .

**Prueba.** Es una aplicación directa del hecho que  $G_n(z)$  sea un polinomio de Dirichlet inestable y de la proposición anterior. ■

Terminaré con dos preguntas que podrían dar ideas para futuros trabajos:

- (a) ¿Se podría explicar, con el uso de las ecuaciones en diferencias de tipo neutro, la extraña distribución en el plano complejo de los ceros de las sumas parciales de la zeta de Riemann como se puede ver en las siguientes figuras?



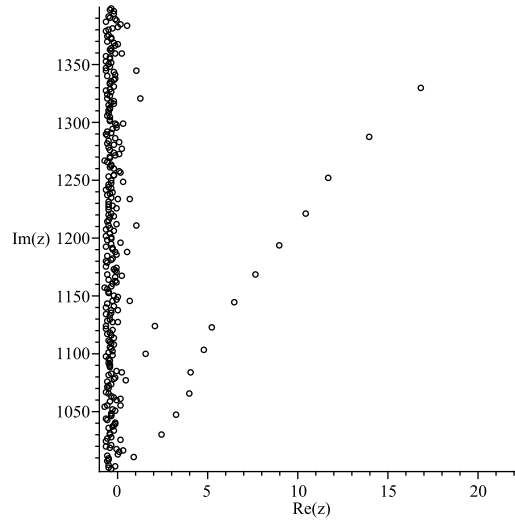


Figura 5.7: ceros de  $G_{80}(z)$

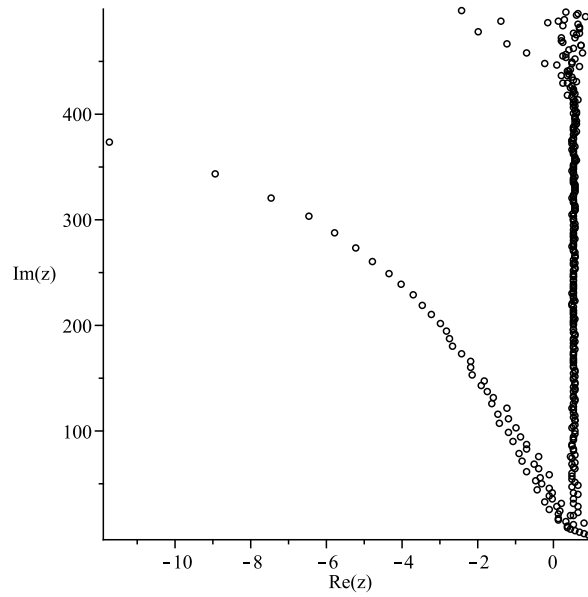
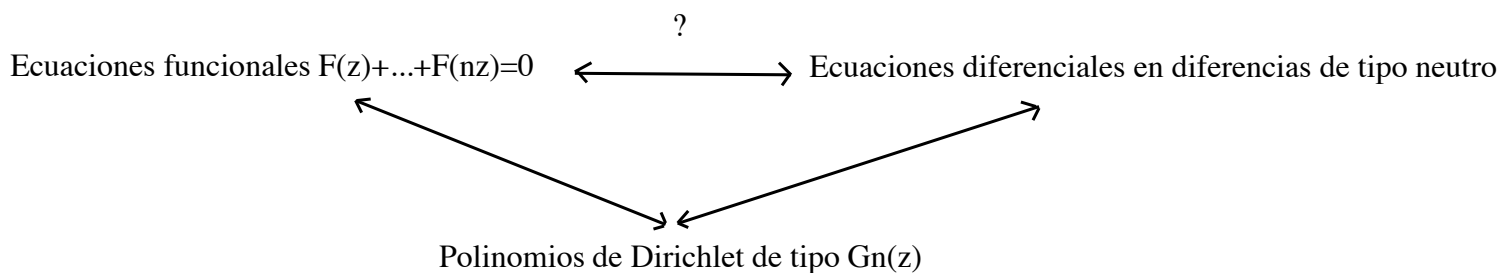


Figura 5.8: ceros de  $\zeta_{70}(z)$

- (b) Hemos visto que las aproximaciones de la zeta de Riemann de la forma  $G_n(z) = 1 + 2^z + 3^z + \dots + n^z$  tienen un papel importante en el estudio directo de los ceros de la función zeta de Riemann, pero también que son polinomios característicos de ecuaciones funcionales del tipo  $F(z) + F(2z) + \dots + F(nz) = 0$  o de ecuaciones en diferencias de tipo neutro. ¿Podrían ser la piedra angular entre estas teorías? Es decir, ¿podrían dar informaciones directas entre las soluciones de cada ecuación, formar un puente entre las dos teorías? Dicho de otra forma con un lenguaje algebraico, ¿es conmutativo el siguiente diagrama?



# Bibliografía

- [1] Apostol, T. M.: Modular functions and Dirichlet series in number theory, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [2] Avellar, C. E.; Hale, J. K.: On the Zeros of Exponential Polynomials. Journal of Mathematical Analysis and Applications **73**, (1980) 434-452.
- [3] Balazard, M.; Velásquez-Castañón, O.: Sur l'infimum des parties réelles des zéros des sommes partielles de la fonction zêta de Riemann. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347, (2009) 343-346.
- [4] Balazard, M: Un siècle et demi de recherches sur l'hypothèse de Riemann. SMF-Gazette-126, octobre 2010.
- [5] Boas, R. P. Jr: Entire functions. Academic Press. New York. 1954
- [6] Bohr, H.: Almost Periodic Functions, Chelsea Publ. Comp., New York, 1947.
- [7] Bombieri, E.; Friedlander, J. B.: Dirichlet polynomial approximations to zeta functions, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 22, numéro 3 (1995), p.517-544.
- [8] Borwein, P., Choi, S. K. K. and Coons, M.: Completely multiplicative functions taking values in  $\{-1, 1\}$ , Trans. Amer. Math. Soc., 362 2010, 12 6279-6291
- [9] Borwein, P.; Fee, G.; Ferguson, R.; Van der Waall, A.: Zeros of partial sums of the Riemann zeta-function. Exp.Math. 16, 21-40 (2007)
- [10] Bellman, R.; Cooke, K. L.: Differential-difference equations. Academic Press, New York, 1963.

- [11] Cartwright, M. L.: On functions which are regular and of finite order in an angle. Proc.London Math.Soc.(2) 38 (1934/35), 158-179.
- [12] Delsarte, J.: Les fonctions moyenne-périodiques, J. Maths.Pures Appl. (9) 14(1935) p 403-453.
- [13] Dubon, E.; Sepulcre, J. M: On the zeros of Dirichlet polynomials and their applications to the non-lattice fractal strings. Experimental Mathematics, 23(1):13-24, 2014. DOI:10.1080/10586458.2013.853630
- [14] Dubon, E.; Mora, G.; Sepulcre, J. M.; Ubeda J. I.; Vidal, T.: On the real projection of the zeros of  $1 + 2^s + \dots + n^s$ . RACSAM, September 2014, Volume 108, Issue 2, pp 317-333.
- [15] Erdős, P.:Some personal reminiscences of the mathematical work of Paul Turán. Acta Arithmetica XXXVII (1980).
- [16] Everest, G.; Ward, T.: An Introduction to Number Theory. Springer-Verlag London Limited 2005.
- [17] Farag, H. M.: Dirichlet truncations of the Riemann zeta-function in the critical strip possess zeros near every vertical line. International J. Number Theory 4 No.4, (2008) 653-662.
- [18] Fioravanti, A. R:  $\mathcal{H}_\infty$  analysis and control of time-delay systems by methods in frequency domain. Thèse de Doctorat de l'Université Paris-Sud XI 2011.
- [19] Frasson, M. V. S.: On the dominance of roots of characteristic equations for neutral functional differential equations.
- [20] Gonek, S.M. and Montgomery H. L.: Zeros of a family of approximations of the Riemann Zeta-Function. International Mathematics Research Notices (2012), rns187, 22 pages. doi:10.1093/imrn/rns187
- [21] Gonek, S. M.: Finite Euler products and the Riemann hypothesis. Transactions of the American Mathematical Society 364, no.4 (2012): 2157-91.
- [22] Hale, J. K; Verduyn Lunel, S. M.: Effects of small delays on stability and control. Operator Theory: Advances and Applications Volume 122, 2001, pp 275-301.

- [23] Hardy, G. H.; Wright, E. M.: An introduction to the theory of numbers. Oxford University Press, 1968.
- [24] Haselgrove, C. B.: A disproof of a conjecture of Pólya. *Mathematika* 5, 141-145 (1958).
- [25] Kahane, J. P.: Lectures on mean periodic functions, Tata institute of fundamental research, Bombay, 1958.
- [26] Katsnel'son, V. E.: Entire functions of Cartwright class with irregular behavior. *Functional analysis*, vol.10, No.4,(1976) p.35-44.
- [27] Koosis, P.: Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin. Les publications CRM, Montréal.
- [28] Krall, A. M.: On the real parts of zeros of exponential polynomials.
- [29] Langer, R. E: On the zeros of exponential sums and integrals. *Bull. Amer. Math. Soc.* **37** (4): 213-239, 1931.
- [30] Lapidus, M. L.; Van Frankenhuysen, M.: Complex dimensions of self-similar fractal strings and Diophantine Approximation. *Experimental Mathematics* 12, No.1, (2003), 41-69.
- [31] Lapidus, M. L.; Van Frankenhuysen, M.: Fractal geometry, complex dimensions and zeta functions: Geometry and Spectra of Fractal Strings. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2006.
- [32] Laurincikas, A: The Riemann Zeta-function: Approximation of Analytic Functions. *Advances in Applied analysis*, Trends in Mathematics, 95-114 2012 Springer Basel.
- [33] Ledoan, A.; Roy, A.; Zaharescu, A.: Zeros of partial sums of the Dedekind zeta function of a cyclotomic field. *Journal of Number Theory*. Volume 136, March 2014, Pages 118-133.
- [34] Levin, B. J. A.: Distribution of zeros of entire functions. American Mathematical Society, Providence Rhode Island, 1972.
- [35] Michaels, W.; Engelborghs, K.; Roose, D. and Dochain, D.: Sensitivity to infinitesimal delays in neutral equations. *SIAM J. Control Optim.*, 40(4), 1134-1158.

- [36] Miller, Steven J.: 2009 Graduate Workshop on Zeta functions, L-functions and their applications. Utah Valley University, USA, 2009.
- [37] Montgomery, H.L.: Zeros of approximations to the zeta function. *Studies in Pure Mathematics*, Birkhäuser, Basel, 1983, 497-506.
- [38] Montgomery, H. L.: Polynomials in many variables. In *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 17e année (1975/76), Théorie des nombres: Fasc.1, Exp. No. 7*, p.6. Secrétariat Math., Paris, 1977.
- [39] Montgomery, H. L.; Vaughan, R. C.: Mean values of multiplicative functions. *Period. Math. Hungar.* 43, 199-214 (2001).
- [40] Mora, G.: A note on the functional equation  $F(z) + F(2z) + \dots + F(nz) = 0$  *J. Math. Anal. Appl.* **350**, (2008).
- [41] Mora, G.; Sepulcre, J. M.: On the distribution of zeros of a sequence of entire functions approaching the Riemann zeta function. *J. Math. Anal. Appl*, vol(350), (2009) p.409-415.
- [42] Mora, G.; Sepulcre, J. M.: The critical strips of the sums  $1 + 2^z + \dots + n^z$ , *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2011, Article ID 909674, 15 pages, 2011. doi:10.1155/2011/909674.
- [43] Mora, G.: On the asymptotically uniform distribution of the zeros of the partial sums of the Riemann zeta function. *J. Math. Anal. Appl*, vol(403), issue 1, 2013, p.120-128.
- [44] Mora, G.: On the topology of the sets of the real projections of the zeros of exponential polynomials. J.C. Ferrando and M. López-Pellicer (eds), *Descriptive Topology and Functional Analysis*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 80, DOI:10.1007/978-3-319-05224-3-3, Springer International Publishing Switzerland 2014.
- [45] Mora, G.; Sepulcre, J. M.; Vidal, T.: On the existence of exponential polynomials with prefixed gaps. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 45 (6), 2013, 1148-1162.
- [46] Moreno, C. J.: The zeros of exponential polynomials (I), *Compositio Mathematica*, tome 26, No.1 (1973), p.69-78.

- [47] Murray, R. M. ; Jacobson, C. A.; Casas, R.; Khibnik, A. I.; Johnson, C. R. Jr; Bitmead, R. ; Peracchio, A.A., and Proscia, W.M.: System identification for limit cycling systems: a case study for combustion instabilities. Technical Report cds97-012, Caltech, 1997.
- [48] Pólya, G.: Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen gewisser ganzer Transzendenten Funktionen; Münch. Sitzungsber., 50, 285-290 (1920).
- [49] Pólya, G.: Verschiedene Bemerkungen zur Zahlentheorie, Jahresbericht der deutschen Math.-Vereinigung, 28 (1919) pp. 31-40.
- [50] Pontrjagin, L. S.: On the zeros of some elementary transcendental functions. **2**, 1 (1995), 95-110.
- [51] Rassias, M.Th.: Problem-Solving and Selected Topics in Number Theory. Springer, New York, 2011.
- [52] Riemann, B.: Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Monatsberichte der Berliner Akademie. In Gesammelte Werke, Teubner, Leipzig (1892).
- [53] Schwartz, L.: Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques, Ann.of Math.(2) 48(1947) p857-929.
- [54] Sepulcre Martinez, J. M: Sobre las funciones  $1 + 2^z + \dots + n^z$  como aproximantes de la zeta de Riemann, la distribución de sus ceros y su relación con las ecuaciones funcionales  $f(x) + f(2x) + \dots + f(nx) = 0$ . Tesis Doctoral de la Universidad de Alicante. 2008.
- [55] Shapiro, H.S.: The Expansion of Mean-Periodic Functions in Series of Exponentials, Communications on pure and applied mathematics, vol. XI, 1-21 (1958).
- [56] Soprunova, E.: Exponential Gelfond-Khovanskii formula in dimension one. Proceedings of the American Mathematical Society, vol 136, n° 1, (2008) 239-247.
- [57] Spira, R.: Zeros of sections of the zeta function. I Math.Comp., 20:542-550, 1966.

- [58] Spira, R.: Zeros of sections of the zeta function. II Mathematics of Computation. Vol. 22, No.101 (Jan., 1968), pp 163-173.
- [59] Spira, R.: Approximate Functional Approximations and the Riemann Hypothesis. Proceedings of the American Mathematical Society 17, no. 2(1966): 314-7.
- [60] Spira, R.: Zeros of Approximate Functional Approximations. Mathematics of Computation 21, no. 97(1967): 41-8.
- [61] Stépán, G.: Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions. Pitman Research Notes in Mathematics Series.
- [62] Székelyhidi, L.: Fourier Transform for Mean Periodic Functions. Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 35 (2011), 267-283.
- [63] Titchmarsh, E. C.: The theory of the Riemann Zeta-function, 2nd ed. (revised by D.R.Heath-Brown). New York: Oxford University Press, The Clarendon Press, 1986.
- [64] Túran, P.: On somme approximative Dirichlet polynomials in the theory of the zeta-function of Riemann. Danske Vid. Selsk. Mat. Fys. Medd., 24(17):36, 1948.
- [65] du Sautoy, M.: La música de los números primos. Edición Acantilado.
- [66] Van der Poorten, A. J.: A note on the zeros of exponential polynomials. Compositio Mathematica, vol 31, Fasc. 2, 1975, pag. 109-113.
- [67] Velásquez Castañon, O. J.: Sur la répartition des zéros de certaines fonctions méromorphes liées à la fonction zêta de Riemann. Thèse de Doctorat de l'Université de Bordeaux 1. 2008.
- [68] Voronin, S. M.: On the zeros of partial sums of the dirichlet series for the Riemann zeta-function. Dolk.Akad. Nauk. SSSR. 216, 964-967 (1974) (Trans. Soviet. Math. Doklady 15, 900-903, 1974).
- [69] Wilder, C. E.: Expansion problems of ordinary linear differential equations with auxiliary conditions at more than two points. Trans. Amer. Math. Soc. 18, 415-442 (1917).