

Representación del efecto Doppler relativista en el modelo no euclideo de Poincare. Mediciones en el ábaco de Smith

J. C. Sánchez-Mayendia
Facultad de Bellas Artes. Universidad del País Vasco
Leioa (Vizcaya)

Recibido: 29-1-88
Aceptado: 13-10-88

*Representation of the relativist doppler effect in pointcare's non-euclidean
model. Measurements by Smith's plotter*

Summary: The relativist DOPPLER effect defines the frequency relationship of a light wave measured on two reference systems moving at a relative speed. Based on the concept of Quickness associated to a speed it is possible to represent this phenomenon on POINCARÉ'S circular model of the LOBACHEWSKI plane, thereby obtaining the same expression through geometric reasoning on the model as through the application of restricted relativity. The work also shows that in the particular event of the observation being performed along the direction of movement of the light surface, the result of the frequency relationship measured on the two reference systems can be directly measured on the SMITH diagram.

Key words: Doppler effect representation.

INTRODUCCIÓN

El efecto Doppler relativista consiste en la dilatación de frecuencia que sufre una onda luminosa al ser medida respecto a dos sistemas de referencia. El objetivo de este trabajo será demostrar que este fenómeno es posible representarlo en el modelo no euclideo de POINCARÉ desarrollado por COXETER¹ a través del concepto de Rapidez Asociada a una velocidad (Rap V) que es introducida en el lenguaje relativista por ROOB² y VARÍČAK³ y definido por SILBERSTEIN⁴ mediante la expresión: $Rap V = \operatorname{argth} V/c$, siendo V la velocidad de una partícula y c la velocidad de la luz.

Obtendremos una expresión para la relación de frecuen-

cias medidas en los sistemas de referencia mediante la aplicación de las leyes geométricas del modelo, idéntica a la obtenida mediante razonamientos relativistas.

Completaremos el trabajo midiendo en el ábaco de SMITH la relación de frecuencias al cumplir el diagrama desde el punto de vista geométrico las condiciones necesarias para ser un espacio hiperbólico. SÁNCHEZ-MAYENDIA⁵.

EFEECTO DOPPLER RELATIVISTA

Consideramos una superficie luminosa de frecuencia propia ν_0 . Este valor representa el número de pulsaciones emitidas por la superficie por unidad de tiempo propio t' , tiempo del sistema S' solidario con la superficie.

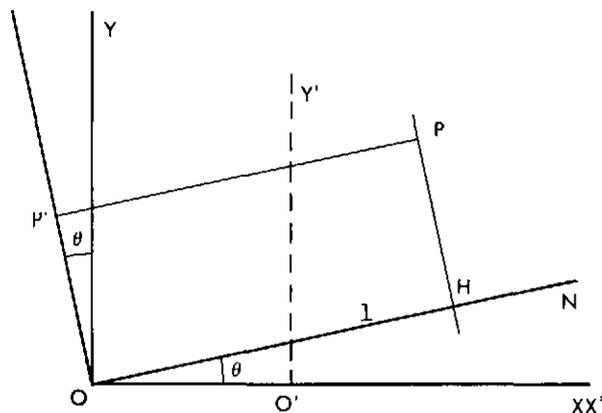


FIGURA 1

Supongamos que la superficie luminosa se desplaza siguiendo el eje X y que la dirección de observación sea ON siendo ésta normal en el punto O a la onda plana emitida por la superficie luminosa (figura 1). Los frentes de ondas están representados en la figura por las rectas OP' y HP, perpendiculares a la dirección de observación.

El observador P ligado al sistema S(OX, OY) tiene por coordenadas x e y respecto a este sistema y x' e y' respecto al sistema S' (O'X', O'Y') solidario con la superficie luminosa.

Supondremos que en el origen de tiempos ($t = t' = 0$) los sistemas S y S' coinciden y que el sistema S' se moverá deslizando el eje O'X' sobre el eje OX con velocidad V.

Mediante la transformación de LORENTZ. (HAGEDORN⁶) determinaremos las coordenadas de un punto en el sistema S respecto al sistema S'.

$$x = \frac{x' + Vt'}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \quad y = y' \quad t = \frac{t' + \frac{\beta}{c} x'}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \quad \beta = \frac{V}{c} \quad (1)$$

Sea $\overline{P'P} = l$

El tiempo que tarda el primer frente de ondas en recorrer la distancia l será (MAURIDES⁷):

$$t_1 = \frac{l}{c} = \frac{x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta}{c}$$

El número de ondas que han llegado a P en el instante t del sistema S será:

$$n = v(t - t_1)$$

Evidentemente, n, es independiente del sistema de referencia empleado, pudiendo en consecuencia enunciar.

$$v \left(t - \frac{l}{c} \right) = v' \left(t' - \frac{l'}{c} \right) \quad (2)$$

v' será la frecuencia de las ondas determinada en el sistema S' solidario con la superficie luminosa. En consecuencia $v' = v_0$, l'/c será el tiempo que tarda la primera

onda en recorrer la distancia OP medido en el sistema S'. Si se denomina x' e y' las coordenadas de P en S' tendremos:

$$\frac{l'}{c} = \frac{x' \cos \theta' + y' \operatorname{sen} \theta'}{c}$$

siendo θ' un ángulo a determinar.

Sustituyendo en la expresión (2) los valores de l/c y l'/c tendremos:

$$v \left(t - \frac{x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta}{c} \right) = v_0 \left(t' - \frac{x' \cos \theta' + y' \operatorname{sen} \theta'}{c} \right) \quad (3)$$

En la expresión (3) sustituiremos los valores x, y, t por sus valores dados por la transformación de LORENTZ (1) obteniendo

$$v \left\{ \frac{t' + V/c x'}{[1 - \beta^2]^{1/2}} - \frac{\frac{x' + Vt'}{[1 - \beta^2]^{1/2}} \cos \theta + y' \operatorname{sen} \theta}{c} \right\} = v_0 \left[t' - \frac{x' \cos \theta' + y' \operatorname{sen} \theta'}{c} \right]$$

operando convenientemente llegamos a:

$$v_0 [1 - \beta^2]^{1/2} = v \left\{ 1 - \beta \cos \theta + \frac{(x' \cos \theta' + y' \operatorname{sen} \theta') (1 - \beta \cos \theta)}{ct' - (x' \cos \theta' + y' \operatorname{sen} \theta')} + \frac{x' - x' \cos \theta}{ct' - (x' \cos \theta' + y' \operatorname{sen} \theta')} - \frac{y' [1 - \beta^2]^{1/2} \operatorname{sen} \theta}{ct' - (x' \cos \theta' + y' \operatorname{sen} \theta')} \right\} \quad (4)$$

La igualdad (4) deberá ser satisfecha para cualquier punto P elegido. En consecuencia la relación entre v y v₀ deberá ser independiente de x' e y'. Transformando la expresión (4) e identificando coeficientes de t', x' e y' obtendremos.

$$v = \frac{v_0 (1 - \beta^2)^{1/2}}{1 - \beta \cos \theta} \quad (5)$$

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}$$

$$\operatorname{sen} \theta' = \frac{(1 - \beta^2)^{1/2} \operatorname{sen} \theta}{1 - \beta \cos \theta}$$

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{(1 - \beta^2)^{1/2} \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta - \beta} \quad (6)$$

La fórmula (5) expresa el cambio de frecuencias cuando existe movimiento relativo superficie observador denominándose este fenómeno EFECTO DOPPLER RELATIVO.

La expresión (6) denota un fenómeno de ABERRACIÓN. Existe modificación de la dirección de los rayos luminosos respecto al observador. Veamos a continuación dos casos particulares:

- a) Si la observación se realiza siguiendo la dirección del movimiento de la superficie luminosa.

$$\theta = \theta' = 0 \quad v = v_0 \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{1/2}$$

En este caso ha desaparecido el fenómeno de Aberración.

- b) Si la dirección de observación es perpendicular al movimiento de la superficie.

$$\theta = \pi/2 \quad \cos \theta' = -\beta \quad v = v_0 (1-\beta^2)^{1/2}$$

REPRESENTACIÓN EN EL MODELO DE POINCARÉ

Puesto que el efecto DOPPLER lleva consigo el fenómeno de Aberración expresado en la fórmula (6) demostraremos la validez de la representación del fenómeno en el modelo de POINCARÉ o espacio hiperbólico.

El problema queda planteado como sigue: Dadas la velocidad V del sistema S' respecto al S, y la velocidad c (velocidad de la luz) del frente de ondas que forma un ángulo θ con la dirección de V, se trata de determinar la variación angular que experimentan los rayos luminosos cuando existe movimiento relativo entre los sistemas S y S'.

Sea el círculo absoluto Γ , el espacio hiperbólico figura 2 en el que hemos representado:

\vec{AO} = Rapidez asociada a la velocidad de la luz respecto al sistema S.

\vec{OB} = Rapidez asociada a la velocidad V del sistema S' respecto al sistema S.

θ = Ángulo que forman las direcciones de los vectores \vec{AO} y \vec{OB} .

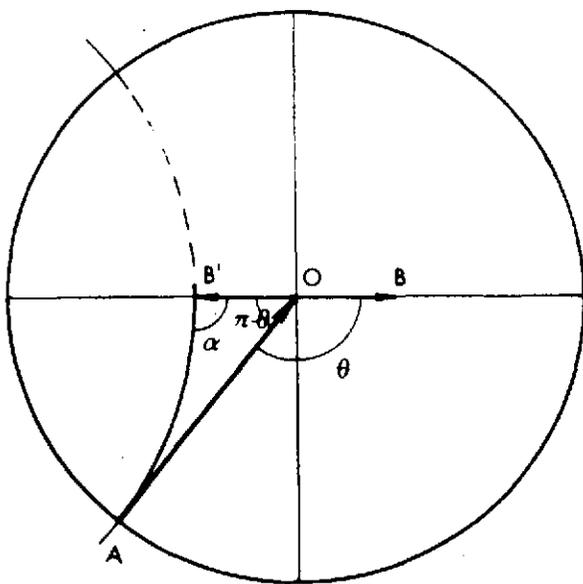


FIGURA 2

De acuerdo con la ley de composición de Rapideces asociadas a velocidades (SÁNCHEZ-MAYENDIA⁸⁾) se trazará el vector simétrico del \vec{OB} respecto al punto O obteniendo el punto B'. La h-recta que pase por A y B' será la rapidez asociada a la velocidad de la luz respecto al sistema S'.

Sea el h-triángulo de vértices O, B' y A del que se conoce: \vec{AO} = Rapidez asociada a la velocidad de la luz.

\vec{OB}' = -Rap V -Rap (-v).

$\pi - \theta$

Si en un h-triángulo se conocen dos lados y el ángulo comprendido, la expresión que determine cualquiera de los otros ángulos está determinada. (SÁNCHEZ-MAYENDIA⁸⁾). Aplicando esta expresión al h-triángulo OB'A se determinará el ángulo α .

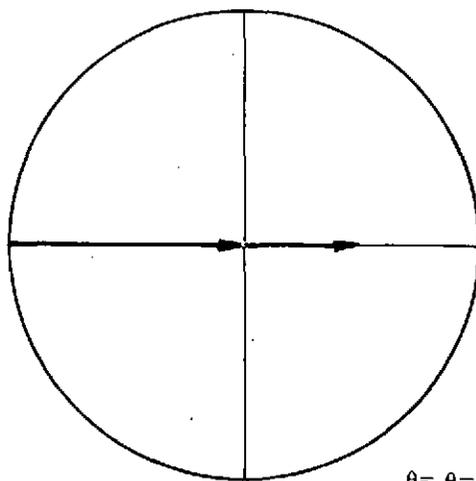
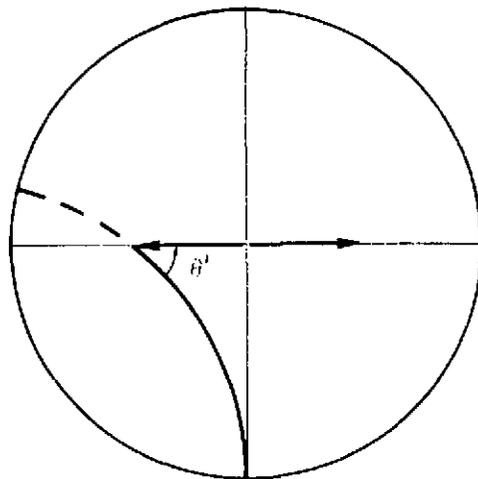


FIGURA 3



$$\theta = \pi/2 \quad \cos \theta' = -\beta$$

FIGURA 4



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{c \operatorname{sen}(\pi - \theta) [c^2 - (-V)^2]^{1/2}}{c - V - c \cos(\pi - \theta)} = \frac{\operatorname{sen}(c^2 - v^2)^{1/2}}{-V + c \cos \theta} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \theta [1 - (V/c)^2]^{1/2}}{\cos \theta - V/c} = \frac{\operatorname{sen} \theta (1 - \beta^2)^{1/2}}{\cos \theta - \beta} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\operatorname{sen} \theta (1 - \beta^2)^{1/2}}{\cos \theta - \beta} \end{aligned} \quad (7)$$

La identidad de las expresiones (6) y (7) demuestran que $\alpha = \theta'$ y que la representación realizada en el modelo de POINCARÉ es correcta.

La representación de los dos casos particulares ya indicados están representados en las figuras 3 y 4.

DIAGRAMA DE SMITH
IMPEDANCE OR ADMITTANCE COORDINATES

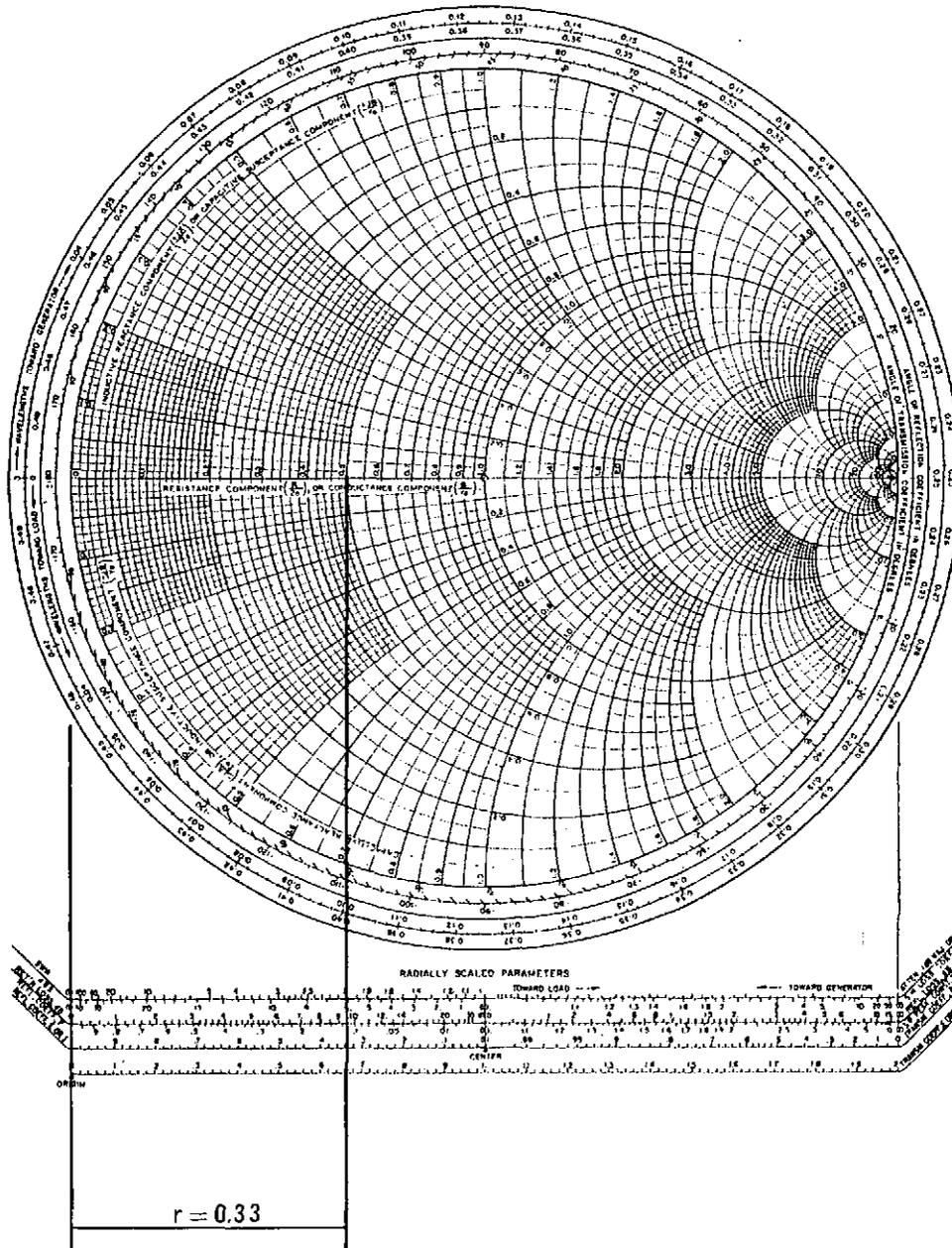


FIGURA 5



MEDICIÓN EN EL DIAGRAMA DE SMITH

La fórmula obtenida para el cambio de frecuencias en el caso particular en que la dirección de observación coincide con la del movimiento relativo es la siguiente.

$$\frac{v}{v_0} = \left[\frac{1+\beta}{1-\beta} \right]^{1/2} \Rightarrow \left[\frac{v}{v_0} \right]^2 = \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad (8)$$

La expresión (8) tiene gran similitud formal con aquella que determina el coeficiente de reflexión en una guía de ondas (BLAKE⁹).

$$r = \frac{Z-1}{Z+1} \quad (Z = \text{impedancia normalizada})$$

El coeficiente r se puede medir en la tercera escala inferior del diagrama de Smith. (REFL. COEF. E. ORI) figura 5.

Veamos como es posible medir en esta misma escala el cuadrado de la relación de frecuencias correspondientes a la expresión (8).

Puesto que consideramos el conjunto $Z [0,1]$ y efectuamos una aplicación biunívoca del conjunto $Z [0,1]$ en el $\beta = v/c$.

$$Z [0,1] \Leftrightarrow \beta$$

$$\left(\frac{v}{v_0} \right)^2 = \frac{1+\beta}{1-\beta} \Rightarrow \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 = \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

Mediante la aplicación efectuada en la escala de los coe-

ficientes de reflexión r podemos medir la valor de las expresiones $(v_0/v)^2$. Por ejemplo para $Z=0,5$, obtendríamos

$$r = \frac{0,5-1}{0,5+1} = \frac{1}{3} = -0,33$$

El signo (-) indica que existe cambio en la dirección de reflexión. A los efectos de medición de la relación de frecuencias, $|r| = 0,33$. Este valor es directamente medible en el diagrama de SMITH como se indica en la figura 4 y de acuerdo con la aplicación efectuada será $(v_0/v)^2 = 0,33 \Rightarrow v_0/v = 0,577$.

BIBLIOGRAFÍA

- 1 COXETER, H. S. M.: Non Euclidean Geometry (University of Toronto Press, Canadá) 1961.
- 2 ROOB A. A.: Optical Geometry of Motion (Cambridge W. Hefner and Sons) 1911.
- 3 VARICAK, V. Phys Zeitschrift. Vol II págs. 93, 287, 587 (1910).
- 4 SILBERSTEIN, L.: The Theory of relativity (Mac. Millan and Co. London) 1924.
- 5 SÁNCHEZ-MAYENDIA, J. C.: Dos estudios sobre el fenómeno de la Aberración de la luz. Rev. DYNA 1979.
- 6 HAGEDORN, R.: Relativistic Kinematics (W. A. Benjamin, Inc. New York) 1964.
- 7 MAURICES, S.: L'Univers Relativiste (Masson et cie. Paris) 1973.
- 8 SÁNCHEZ-MAYENDIA, J. C.: Representación de aspectos cinemáticos y dinámicos relativistas en el modelo circular de Poincaré del plano de Lobachewski y sus conexiones con el diagrama de SMITH. (Tesis Doctoral) 1976.
- 9 BLAKE, L. V.: Transmission Lines and Waveguides. (John, Wiley and Sons, Inc, New York, London) 1969.