ANALES DE CIENCIAS. VOL. XLVI. NÚMS. 1 - 4, 1987: 29-33
SECRETARIADO DE PUBLICACIONES - UNIVERSIDAD DE MURCIA

Sobre una clase de funciones uniformemente continuas

José A. Fernández Viña
Departamento de Matemáticas. Universidad de Murcia

Recibido: 28-10-87
Aceptado: 30-11-87

A class of uniformly continuous functions

Summary. We study a class of uniformly continuous functions. Some algebraic and topological properties are established for this class. Also a condition for f (uniformily continuous function) belongs to this class, is given. Finally some more general classes with the same properties are introduced.

Key-words: Uniformly continuous functions.

DEFINICIÓN

Sean (E,d) y (E',d') dos espacios métricos y M un conjunto no vacío de E. Diremos que una aplicación f de M en E' tiene la propiedad (P) cuando para todo número real positivo ε existe otro número real positivo α tal que

$$d'(f(x),f(y)) \leq \varepsilon+\alpha d(x,y), \quad \forall x,y\in M \tag{1}$$

Existen funciones que verifican esta propiedad. Las funciones constantes son el ejemplo más sencillo, pero cualquier función de Lipschitz también la verifica evidentemente. Denotaremos por $\mathcal{P}$ al conjunto formado por todas las aplicaciones que tienen la propiedad (P).

TEOREMA 1

Las funciones de la clase $\mathcal{P}$ son uniformemente continuas.

En efecto, fijemos arbitrariamente el número real ε. La propiedad (P) nos asegura la existencia de otro número α tal que se verifica (1). Sea

$$\eta=\frac{\varepsilon}{\alpha}>0$$

Es claro que si $d(x,y)\leq\eta$ entonces $d'(f(x),f(y))\leq 2\,\varepsilon$ así que la aplicación f es uniformemente continua en M.

NOTA Y CONTRAEJEMPLO

Vamos a comprobar que existen funciones uniformemente continuas que no verifican la propiedad (P), es decir, que en general la clase $\mathcal{P}$ está estrictamente contenida en la de las aplicaciones uniformemente continuas de M en E'.

Supongamos que los espacios métricos de la definición son ambos iguales a la recta real con la distancia habitual; sea $M=[0,+\infty[$ y f la función definida por $f(x)=\sqrt{x}$.

Esta función es uniformemente continua en el intervalo compacto [0,1]. Por otra parte la desigualdad

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}|=\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leq\frac{1}{2}|x-y|$$

válida para $x,y\in[1,+\infty[$ permite ver fácilmente que f es uniformemente continua en este intervalo. Un sencillo razonamiento nos conduce a probar que entonces f es uniformemente continua en la reunión de los dos intervalos mencionados, que es M.

Veamos que esta función no verifica la propiedad (P).

Para $x,y\in M$ podemos poner $x=X^2$, $y=Y^2$ con $X,Y\in M$. Consideremos en particular puntos tales que sea $X>Y$. Si la función f verificase la propiedad (P), fijado cualquier número real $\varepsilon>0$ existiría otro $\alpha>0$ cumpliendo

$$X-Y\leq\varepsilon+\alpha(X^2-Y^2)$$

es decir,

$$\alpha(X-Y)(X+Y)-(X-Y)+\varepsilon\geq 0$$

para todo par de números $X\geq 0$, $Y\geq 0$, con $X>Y$. Haciendo $X-Y=u>0$, y $X+Y=v>0$, la desigualdad anterior se escribe así:

$$\alpha uv-u+\varepsilon\geq 0,\ \text{para todos } u,v>0 \qquad (2)$$

La función

$$F(u,v)=\alpha uv-u+\varepsilon$$

es continua en $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ y eligiendo $u_o>\varepsilon$ se observa que $F(u_o,0)<0$. Existe entonces un entorno V del punto $(u_o,0)$ tal que $F(u,v)<0$ cualquiera que sea $(u,v)\in V$. Ahora bien, en el entorno V hay siempre puntos (u,v) con $u>0$ y $v>0$ lo cual contradice la desigualdad (2). Así pues la función f elegida es uniformemente continua pero no verifica la propiedad (P).

A continuación estudiaremos las propiedades topológicas y algebraicas de la clase $\mathcal{P}$ y daremos un teorema según el cual, bajo ciertas hipótesis, la clase $\mathcal{P}$ coincide con la de todas las aplicaciones uniformemente continuas de M en E'.

TEOREMA 2

Sea (f_n) una sucesión de funciones de la clase $\mathcal{P}$ que converge uniformemente hacia una aplicación f de M en E'. Entonces $f\in\mathcal{P}$.

Empecemos escribiendo la desigualdad evidente

$$d'(f(x),f(y))\leq$$
$$\leq d'(f(x),f_n(x))+d'(f_n(x),f_n(y))+d'(f_n(y),f(y))$$

y fijemos arbitrariamente el número real $\varepsilon>0$. Por la condición de la convergencia uniforme se puede elegir un subíndice p tal que

$$d'(f(x),f_p(x))\leq\frac{\varepsilon}{3}\quad \text{y}$$
$$d'(f_p(y),f(y))\leq\frac{\varepsilon}{3},\quad \text{para todos } x,y\in M$$

así que

$$d'(f(x),f(y))\leq\frac{2\varepsilon}{3}+d'(f_p(x),f_p(y))$$

Como f_p verifica la propiedad (P), para el número $\varepsilon/3$ existe otro número $\alpha>0$ tal que

$$d'(f_p(x),f_p(y))\leq\frac{\varepsilon}{3}+\alpha d(x,y),\quad \text{para todos } x,y\in M$$

De las dos desigualdades precedentes deducimos que

$$d'(f(x),f(y))\leq\varepsilon+\alpha d(x,y),\quad \text{para todos } x,y\in M$$

luego la función límite f pertenece a la clase $\mathcal{P}$.

El teorema que acabamos de establecer puede enunciarse también de este modo:

TEOREMA 2'

La clase $\mathcal{P}$ constituye un conjunto cerrado (no vacío) en el espacio de las aplicaciones de M en E' dotado de la topología de la convergencia uniforme.

A continuación estudiamos la estructura algebraica de la clase $\mathcal{P}$ en el caso en que el espacio métrico (E',d') sea un espacio vectorial normado, a cuya norma denotaremos por $\|\ \ \|$.

TEOREMA 3

En el caso señalado en el párrafo anterior, la suma de dos funciones de la clase $\mathcal{P}$ pertenece también a esta clase, y el producto de un número por una función de $\mathcal{P}$ pertenece igualmente a $\mathcal{P}$.

Sean f y g dos funciones de $\mathcal{P}$. Escribamos la desigualdad evidente

$$\|(f+g)(x)-(f+g)(y)\|\leq$$
$$\leq\|f(x)-f(y)\|+\|g(x)-g(y)\|$$

para todos $x,y\in M$. Fijemos arbitrariamente un número real $\varepsilon>0$. Por hipótesis existen entonces dos números $\alpha_1>0$ y $\alpha_2>0$ tales que

$$\|f(x)-f(y)\|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\alpha_1 d(x,y),$$
$$\|g(x)-g(y)\|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\alpha_2 d(x,y)$$

para todos $x,y\in M$. Poniendo $\alpha=\sup(\alpha_1,\alpha_2)$ se obtiene en consecuencia que

$$\|(f+g)(x)-(f+g)(y)\|\leq\varepsilon+\alpha d(x,y)$$

para todos $x,y \in M$

luego $f+g \in \mathcal{P}$ como queríamos demostrar.

Sea ahora $f \in \mathcal{P}$ y λ un número (real o complejo, según sea el cuerpo base del espacio vectorial E'). Si $\lambda=0$ la función λf es constante, así que pertenece a la clase $\mathcal{P}$. Supongamos $\lambda \neq 0$. Escribamos la igualdad

$$\|(\lambda f)(x)-(\lambda f)(y)\| = |\lambda| \, \|f(x)-f(y)\|$$

válida para todos $x,y \in M$. Fijemos arbitrariamente el número real $\varepsilon>0$. Para el número

$$\frac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$$

existe otro número $\alpha'>0$ tal que

$$\|f(x)-f(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|} + \alpha' d(x,y),$$

para todos $x,y \in M$

Poniendo $\alpha = |\lambda|\alpha'$ se obtiene, en consecuencia, que

$$\|(\lambda f)(x)-(\lambda f)(y)\| \leq \varepsilon + \alpha d(x,y),$$

para todos $x,y \in M$

luego $\lambda f \in \mathcal{P}$ como queríamos demostrar.

El teorema que acabamos de establecer puede enunciarse también de este modo:

TEOREMA 3'

La clase $\mathcal{P}$ forma un subespacio vectorial del espacio vectorial de todas las aplicaciones de M en el espacio normado $(E', \| \quad \|)$.

Supongamos que el espacio E' es de Banach. Entonces el espacio de todas las aplicaciones acotadas de M en E' es también de Banach si se le dota con la norma del supremo, es decir, la topología de la convergencia uniforme. Apoyándonos en este teorema bien conocido y utilizando los teoremas 2' y 3' podemos concluir lo siguiente:

TEOREMA 4

Cuando E' es de Banach, el espacio $\mathcal{P} \cap \mathcal{B}(M,E')$ de las aplicaciones de la clase $\mathcal{P}$ que son acotadas, dotado de la norma del supremo, es también de Banach.

NOTAS

El producto de dos funciones de la clase $\mathcal{P}$ con valores reales no pertenece, en general, a esta clase ya que, como es sabido, el producto de dos funciones uniformemente continuas no es siempre una función uniformemente continua.

Supongamos que el espacio métrico E es un espacio vectorial normado al igual que el E'. Como las aplicaciones lineales continuas de E en E' son de Lipschitz ellas formarán un subespacio del espacio $\mathcal{P}$. Esta inclusión es estricta, evidentemente.

Estudiemos ahora la transitividad de la propiedad (P).

TEOREMA 5

Sean (E,d), (E',d') y (E'',d'') tres espacios métricos y M un conjunto no vacío del primero. Sea f una aplicación de M en E' que verifica la propiedad (P) y sea g una aplicación de $M'=f(M)$ en E'' que también cumple dicha propiedad. Entonces la función compuesta $F=g \circ f$ verifica igualmente la propiedad (P).

Fijemos el número real $\varepsilon>0$. Tomemos cualquier otro ε' tal que $0<\varepsilon'<\varepsilon$. Para este número ε' y por verificar g la propiedad (P) existe $\alpha'>0$ tal que

$$d''(g(f(x)),g(f(y))) \leq \varepsilon' + \alpha' d'(f(x),f(y)),$$

para todos $x,y \in M$

Consideremos el número positivo

$$\varepsilon'' = (\varepsilon-\varepsilon')/\alpha' > 0$$

Para este número y por verificar f la propiedad (P) existe $\alpha''>0$ tal que

$$d'(f(x),f(y)) \leq \varepsilon'' + \alpha'' d(x,y),$$

para todos $x,y \in M$.

De las dos desigualdades obtenidas se deduce

$$d''(F(x),F(y)) \leq \varepsilon + \alpha d(x,y),$$

para todos $x,y \in M$

donde $\alpha = \alpha'\alpha'' > 0$, lo cual prueba el teorema.

Vamos ahora a caracterizar las funciones de la clase $\mathcal{P}$ por sus módulos de continuidad.

Como es sabido, un módulo de continuidad para la aplicación $\varphi : \bar{\mathbf{R}}_+ \to \bar{\mathbf{R}}_+$ creciente, continua en 0 por la derecha, tal que $\varphi(0)=0$ y que verifique la condición

$$d'(f(x),f(y)) \leq \varphi(d(x,y)),$$

para todos $x,y \in M$.

Para las aplicaciones uniformemente continuas se obtiene un módulo de continuidad considerando la función φ definida así

$$\varphi(u) = \sup\{d'(f(x),f(y)) \in \mathbf{R};\ d(x,y) \leq u\}$$

Si la función f pertenece a la clase $\mathcal{P}$ fijado cualquier número $\varepsilon>0$ existe otro $\alpha>0$ tal que se verifica (1) y por tanto, si $d(x,y) \leq u$, es claro que

$$\varphi(u) \leq \varepsilon + \alpha u, \quad \text{para todo } u \geq 0 \tag{3}$$

Recíprocamente, supongamos que la función uniformemente continua f admite un módulo de continuidad que verifica (3). Aplicando la definición de módulo de continuidad y haciendo $u=d(x,y)$ se obtiene la desigualdad (1) así que $f \in \mathcal{P}$.

Podemos enunciar, pues, el siguiente

TEOREMA 6

Una aplicación uniformemente continua de M en E' pertenece a la clase $\mathcal{P}$ si y sólo si admite un módulo de continuidad φ que verifica la propiedad: cualquiera que sea $\varepsilon>0$ existe $\alpha>0$ tal que se tiene (3).

Para terminar demostraremos un teorema que expresa una condición suficiente para que una función uniformemente continua tenga la propiedad (P). En este caso el espacio $\mathcal{P}$ coincidirá con el de todas las aplicaciones uniformemente continuas de M en E'.

TEOREMA 7

Si el conjunto M es compacto en el espacio métrico E toda función uniformemente continua verifica la propiedad (P).

Supongamos que nuestra función no verificase la citada propiedad. Entonces existiría un número real $\varepsilon_o>0$ tal que para cualquier $\alpha>0$ existirían al menos dos puntos x_α, y_α en M verificándose

$$d'(f(x_\alpha),f(y_\alpha))>\varepsilon_o+\alpha d(x_\alpha,y_\alpha)$$

Dando a α los valores de la sucesión de los números naturales construimos dos sucesiones (x_n), (y_n) de puntos de M que cumplen

$$d'(f(x_n),f(y_n))>\varepsilon_o+nd(x_n,y_n), \quad \text{para todo } n \in \mathbf{N} \tag{4}$$

Por ser M compacto, de la sucesión (x_n) puede extraerse una subsucesión (x_{n_k}) convergente hacia un punto $x_o \in M$. De la sucesión (y_{n_k}) de puntos de M puede extraerse análogamente una subsucesión

$$(y_{n_{k_h}})$$

convergente hacia un punto $y_o \in M$. Es claro que

$$(x_{n_{k_h}})$$

converge hacia x_o. Para abreviar la notación vamos a denotar a las dos últimas sucesiones escritas por (x_m) e (y_m) que convergen respectivamente hacia x_o e y_o. Si en la desigualdad (4) sustituimos n por $m=n_{k_h}$ tendremos

$$d'(f(x_m),f(y_m))>\varepsilon_o+md(x_m,y_m) \quad \text{para todo } m \in \mathbf{N} \tag{5}$$

Cuando h tiende hacia $+\infty$ se tiene

$$\text{lím } d(x_m,y_m)=d(x_o,y_o)$$

mientras que

$$\text{lím } n_{k_h}=+\infty$$

y por consiguiente

$$\text{lím } [\varepsilon_o+md(x_m,y_m)]=+\infty$$

Por otra parte al ser f continua en M se verifica

$$\text{lím } d'(f(x_m),f(y_m))=d'(f(x_o),f(y_o)) \in \mathbf{R}$$

Al tomar límites en la desigualdad (5) se llega, pues, a una contradicción. En el transcurso de la demostración anterior hemos admitido implícitamente que $d(x_o,y_o)\neq 0$. Si $d(x_o,y_o)=0$ entonces $x_o=y_o$ y por tanto

$$\text{lím } d'(f(x_m),f(y_m))=o$$

En lugar de tomar límites ordinarios en la desigualdad (5) tomamos límites superiores obteniéndose

$$0\geq\varepsilon_o+\overline{\text{lím}}[md(x_m,y_m)]=\varepsilon_o+\mu$$

donde μ es un cierto elemento de $\hat{\mathbf{R}}_+$, lo cual es una contradicción.

Aplicando el conocido teorema de la continuidad uniforme podemos enunciar el anterior de un modo aparentemente más general:

TEOREMA 7'

Si el conjunto M es compacto en el espacio E, toda aplicación continua de M en el espacio E' verifica la propiedad (P).

GENERALIZACIÓN DE LOS RESULTADOS PRECEDENTES

Sea r un número real positivo. En la situación general en que venimos trabajando, diremos que la aplicación f tiene la propiedad (P_r) si para todo número real positivo ε existe otro número real positivo α tal que

$$d'(f(x),f(y))\leq\varepsilon+\alpha[d(x,y)]^r \tag{6}$$

cualesquiera que sean los puntos $x,y \in M$. Denotaremos por $\mathcal{P}_r$ al conjunto de todas las funciones f que verifican esta propiedad.

Para r=1 la propiedad (P_r) y la clase $\mathcal{P}_r$ son respectivamente la propiedad (P) y la clase $\mathcal{P}$ que hemos estudiado anteriormente.

La clase $\mathcal{P}_r$ no es vacía pues a ella pertenecen las funciones constantes y, en general, las que verifican una condición de Hölder de orden r (las cuales tienen especial interés cuando $0<r\leq 1$, como es sabido).

a) Las funciones que cumplen la propiedad (6) son uniformemente continuas lo que se comprueba fácilmente siguiendo la misma idea de la prueba del teorema 1. Se obtiene así una generalización de este teorema.

b) Los teoremas 2', 3' y 4 se generalizan igualmente a la clase $\mathcal{P}_r$ con demostraciones enteramente similares a las de aquellos. Lo mismo ocurre con el teorema 7, que es más destacado que los otros.

c) Subsiste la siguiente caracterización de la clase $\mathcal{P}_r$ por los módulos de continuidad: una aplicación uniformemente continua de M en E' pertenece al espacio $\mathcal{P}_r$ si y sólo si admite un módulo de continuidad φ que verifica la propiedad de que para todo $\varepsilon>0$ existe $\alpha>0$ tal que

$$\varphi(u)\leq\varepsilon+\alpha u^r$$

cualquiera que sea $u\geq 0$.

d) El problema de averiguar si un determinado espacio $\mathcal{P}_r$ coincide con el de todas las funciones uniformemente continuas se resuelve por la negativa y a este fin puede utilizarse la misma función $f(x)=\sqrt{x}$, $M=[0,+\infty[$ que nos sirvió para estudiar esta cuestión en la clase $\mathcal{P}$. Siguiendo la misma pauta en los cálculos y razonamientos el problema se lleva a decidir si existe algún par de números reales $u>0$, $v>0$ tales que sea

$$F(u,v)=\alpha u^r v^r - u + \varepsilon < 0$$

donde $\varepsilon>0$ y $\alpha>0$ son constantes.

Elegido un número $u_o>\varepsilon$ es claro que $F(u_o,0)<0$. Como F es una función real continua en $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ existe un entorno V del punto $(u_o,0)$ tal que es $F(u,v)<0$ para todos $u,v\in V$. Ahora bien, en V hay siempre puntos (u,v) con $u>0$ y $v>0$ alcanzándose así la conclusión deseada.

NOTA

Los espacios vectoriales $\mathcal{P}_r$, cerrados en el espacio $\mathcal{U}$ de las aplicaciones uniformemente continuas de M en E' dotado de la topología de la convergencia uniforme, forman una familia creciente pues si $r<r'$ se tiene $\mathcal{P}_r\subset\mathcal{P}_{r'}$ evidentemente, y la inclusión

$$\bigcup_{r>0}\mathcal{P}_r\subset\mathcal{U}$$

es, pues, estricta.

BIBLIOGRAFÍA

SCHWARTZ, L.: «Coursd'Analyse», vol. I. Hermann. Paris, 1976.