ANALES DE CIENCIAS, VOL. XLV. NÚMS. 1 - 4. 1986: 33-37
SECRETARIADO DE PUBLICACIONES - UNIVERSIDAD DE MURCIA

Función de índices de concentración por truncamiento por la derecha. Relación con su función de distribución

José Candel y Noemí Zoroa
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. Facultad de Ciencias (Químicas y Matemáticas). Universidad de Murcia

Recibido: 25-11-86
Aceptado: 5-2-86

Function of concentration indexes by truncation on the right. Relation with its distribution function

Summary. In this paper we introduce the concepts of curve and index of concentration for right truncated random variables. We study the problem of obtaining the distribution function through its index of concentration function. The distribution function is characterized using the index of concentration function and means function.

Keywords: Index function, concentration, truncated, characterization.

1. PRELIMINARES

Sea $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria real

$$X : \Omega \rightarrow R$$

con función de distribución F, definida por

$$F(x) = P(\{w: X(w) \leq x\})$$

Para cada x tal que $F(x) > 0$, el conjunto

$$A = \{w \epsilon \Omega : X(w) \leq x\} \epsilon \mathfrak{A}$$

posee una probabilidad positiva $P(A) = F(x) > 0$, luego se puede considerar el nuevo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{A}, P_A)$, donde para cada $C \epsilon \mathfrak{A}$, se define

$$P_A(C) = P(A \cap C)/P(A)$$

Con este espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{A}, P_A)$, la función de distribución de $X = X(w)$, que ahora puede recibir el nombre de $U = U(w)$, es:

$$F(u/x) = \begin{cases} F(u)/F(x) & \text{si} \quad u \leq x \\ 1 & \text{si} \quad u \geq x \end{cases} \tag{1.1}$$

Esta función de distribución $F(u/x)$ definida por (1.1) para $F(x) > 0$, diremos que es la función de distribución de la variable aleatoria X truncada por la derecha en el punto x.

La condición $F(x) > 0$ utilizada para definir $F(u/x)$, determina el conjunto

$$\mathfrak{D} = \{x : F(x) > 0\} \tag{1.2}$$

donde puede variar el parámetro x que interviene en $F(u/x)$.

La siguiente Proposición caracteriza al dominio $\mathfrak{D}$.

Proposición 1.1

Sea X una variable aleatoria positiva. Entonces
1) Si X es continua el dominio $\mathfrak{D}$ es de la forma

$$\mathfrak{D} = (\alpha, \infty) \quad \text{con} \quad \alpha \geq 0$$

2) Si X es discreta el dominio $\mathfrak{D}$ es de la forma

$$\mathfrak{D} = (\alpha, \infty) \quad \text{con} \quad \alpha > 0$$

Demostración

Resulta inmediata.

2. CURVA Y FUNCIÓN DE ÍNDICES DE CONCENTRACIÓN TRUNCADAS POR LA DERECHA

En lo que sigue de este trabajo nos referiremos siempre a una variable aleatoria continua y positiva con función de distribución F y función de densidad f. También se supondrá que dicha variable aleatoria posee media finita.

CURVA DE CONCENTRACIÓN

Definición 2.1

Se llama función de concentración de la variable aleatoria X truncada por la derecha en el punto x, a la curva de ecuación p(q), con

$$p(u/x) = F(u/x) = \int_0^u f(t/x)dt \tag{2.1}$$

$$q(u/x) = \frac{1}{m(x)} \int_0^u t\, f(t/x)dt \tag{2.2}$$

donde f(t/x) es la función de densidad de X truncada por la derecha en x, que viene dada por

$$f(t/x) = \begin{cases} f(t)/F(x) & \text{si} \quad t \leq x \\ 0 & \text{si} \quad t \geq x \end{cases} \tag{2.3}$$

y m(x) es la función de medias (por truncamiento por la derecha), cuya expresión viene dada por:

$$m(x) = \int_0^x u d_u(F(u/x)) = \int_0^x uf(u)du/F(x) \tag{2.4}$$

Proposición 2.1

La curva de concentración tiene la concavidad hacia las q positivas.

Demostración

Resulta evidente ya que

$$\frac{d^2p}{dq^2} = -\frac{m^2(x)}{u^3 f(u/x)}$$

es siempre negativa.

FUNCIÓN DE ÍNDICES DE CONCENTRACIÓN

Se define el índice de concentración truncado por la derecha, como el doble del área comprendida entre la curva de concentración truncada por la derecha y la primera bisectriz.

Por tanto, si representamos con i(x) dicho índice, se verifica:

$$\frac{i(x)+1}{2} = \int_0^1 p(u/x)dq(u/x) =$$

$$= \frac{1}{m(x)} \int_0^x uf(u/x)F(u/x)du$$

o lo que es lo mismo

$$i(x) = -1 + \frac{1}{m(x)} \int_0^x u d_u(F^2(u/x)) \tag{2.5}$$

donde la expresión (2.5) evidentemente depende de x, el punto de truncamiento, por lo que (2.5) define una función i con dominio $\mathfrak{D}$ que en lo sucesivo será llamada función de índices de concentración por truncamiento por la derecha de la función F(x), o más brevemente: «función de índices de concentración».

Se puede establecer de modo formal lo anterior como sigue

Definición 2.2

Llamaremos función de índices de concentración (por truncamiento por la derecha) de F(x) a la función i definida para $x \in \mathfrak{D}$, por:

$$i(x) = -1 + \frac{1}{m(x)} \cdot (x - \int_0^x F^2(u)du/F^2(x)) \tag{2.6}$$

Sustituyendo en (2.6), m(x) por su valor dado en (2.4), resulta también que i(x) se puede poner en la forma:

$$i(x) = -1 + \int_0^x 2uf(u)F(u)du/F(x) \int_0^x uf(u)du \tag{2.7}$$

3. ESTUDIO DE W

Consideremos el conjunto $\mathfrak{F}$ de las funciones de distribución que admiten hasta la derivada de segundo orden, para las que existe la función de índices de concentración i(x).

Y con $\mathfrak{I}$ representaremos el conjunto de las funciones i(x), es decir:

$\mathfrak{I}=\{i:i(x)=-1+\int_0^x 2uf(u)F(u)du/F(x)\int_0^x uf(u)du, x \in \mathfrak{D}$
$F \in \mathfrak{F}\}$

Consideremos también la aplicación w

$$\begin{aligned} w: \mathfrak{F} &\rightarrow \mathfrak{I} \\ F &\rightarrow w(F)=i \end{aligned} \qquad (3.1)$$

En este apartado, nos ocuparemos de obtener explícitamente w^{-1}, es decir $F=w^{-1}(i)$.

Proposición 3.1

Si $i=w(F)$. Entonces se verifica:

$$A(x)F^2(x)F'(x)+B(x)F(x)F'^2(x)+C(x)F^2(x)F''(x)+D(x)F'^3(x)=0 \qquad (3.2)$$

con

$$A(x)=i''(x)i(x)x-xi''(x)-i'(x)i(x)+i'(x)-2xi'^2(x) \qquad (3.3)$$

$$B(x)=1-i^2(x)-4xi'(x)-2xi(x)i'(x) \qquad (3.4)$$

$$C(x)=(1-i(x))xi'(x) \qquad (3.5)$$

$$D(x)=-2xi(x)(1+i(x)) \qquad (3.6)$$

Demostración

Transformando (2.7) en

$$\int_0^x 2uf(u)F(u)du = (i(x)+1)F(x)\int_0^x uf(u)du$$

y derivando la igualdad anterior respecto de x, se obtiene

$$\int_0^x uf(u)du=(1-i(x))xF'(x)F(x)/(i'(x)F(x)+(1+i(x))F'(x)) \qquad (3.7)$$

derivando de nuevo en (3.7), queda la igualdad (3.2), donde $F=w^{-1}(i)$ es la solución de la ecuación diferencial no lineal (3.2).

Proposición 3.2

La solución de la ecuación diferencial (3.2), con $A(x) \neq 0$, $B(x) \neq 0$, $C(x) \neq 0$ y $D(x) \neq 0$, viene dada por la expresión

$$F(x)=\exp\{-\int_x^\infty \frac{1}{w(x,k_1)} \exp(-\int_{x_0}^x A(t)/C(t)dt)dx\},\ x \in \mathfrak{D} \qquad (3.8)$$

donde $w(x,k_1)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$(Q(x)h(x)w(x)+R(x))dx+h^2(x)w(x)dw(x)=0$$

con

$$h(x)=\exp(-\int_{x_0}^x P(t)dt)\ ,$$

$$Q(x)=-\frac{B(x)+C(x)}{C(x)}\ ,\ R(x)=-\frac{D(x)}{C(x)}\quad y\quad P(x)=-\frac{A(x)}{C(x)}$$

Demostración

La expresión (3.2) es una ecuación diferencial de segundo orden homogénea, que se reduce a una de primer orden con el cambio

$$F'(x)/F(x) = u(x)$$

resultando

$$u'(x)=-\frac{A(x)}{C(x)}u(x)-\frac{B(x)+C(x)}{C(x)}u^2(x)-\frac{D(x)}{C(x)}u^3(x)$$

y llamando

$P(x)=-A(x)/C(x)$, $Q(x)=-(B(x)+C(x))/C(x)$, $R(x)=-D(x)/C(x)$

queda

$$u'(x) = P(x)u(x)+Q(x)u^2(x)+R(x)u^3(x) \qquad (3.9)$$

La ecuación (3.9) con el cambio

$$u(x) = 1/v(x)$$

se transforma en

$$v'(x)+P(x)v(x) = -Q(x)-R(x)/v(x) \qquad (3.10)$$

Por otro lado, si en (3.10) realizamos el cambio

$$v(x) = z(x)w(x)$$

se obtiene

$$w(x)(z'(x)+P(x)z(x))+z(x)w'(x)=-Q(x)-R(x)/z(x)w(x) \qquad (3.11)$$

Elegimos z(x) tal que

$$z'(x)+P(x)z(x) = 0$$

$$z(x) = \exp(-\int_{x0}^x P(t)\,dt) = h(x)$$

con lo cual (3.11), se transforma en

$$h(x)w'x) = -Q(x)-R(x)/w(x)h(x) \qquad (3.12)$$

Ahora la ecuación dada por (3.12), es equivalente a

$$w'=g(x,w)=D(x)/h^2(x)C(x)w(x)+(B(x)+C(x))/h(x)C(x)$$

siendo g una función continua en el recinto U(x>0, w>0) y *tiene en él derivada acotada, por tanto*, para cada punto (x_0, w_0) de U, pasa una y solo una curva integral de la ecuación diferencial $w' = g(x, w)$, y como consecuencia, existe un factor integrante para la misma.

La ecuación (3.12) se puede escribir ahora en la forma

$$(Q(x)h(x)w(x)+h^2(x)w(x)dw(x)=0$$

que en función de los coeficientes iniciales, queda

$$\left(-\frac{B(x)+C(x)}{C(x)}\quad w(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{A(t)}{C(t)}\,dt\right)-\frac{D(x)}{C(x)}\right)\,dx+$$

$$+\exp\left(2\int_{x_0}^{x}\frac{A(t)}{C(t)}\,dt\right)w(x)dw(x)=0 \tag{3.13}$$

La naturaleza de los coeficientes A(x), B(x), C(x) y D(x) determinará la mayor o menor dificultad de hallar un factor integrante de la ecuación (3.13), no obstante, una vez conocido $w(x)=w(x,k_1)$, se tiene

$$v(x)=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{A(t)}{C(t)}\,dt\right)w(x,k_1)$$

$$u(x)=\frac{1}{w(x,k_1)}\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{A(t)}{C(t)}\,dt\right)$$

y puesto que $u'(x) = F'(x)/F(x)$, se obtiene

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{1}{w(x,k_1)}\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{A(t)}{C(t)}\,dt\right)$$

integrando en $(a,b)\subset\mathfrak{D}$, y haciendo a=x y b tender a ∞, se tiene (3.8), como se quería demostrar.

4. RELACIÓN ENTRE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN Y LAS FUNCIONES DE MEDIAS E ÍNDICES DE CONCENTRACIÓN

Observemos que la función de distribución F(x) depende de la solución $w(x,k_1)$.

Sin embargo esta dificultad se evita si se considera también la función de medias de la distribución truncada por la derecha. Quedando en este caso, totalmente caracterizada la función de distribución F(x), mediante la Proposición siguiente.

Proposición 4.1

Sea $i \in \mathfrak{I}$, m(x) la función de medias y $u(v) = m(x)(i(x) + 1)$. Entonces se verifica:

$$F(x)=\exp\left(-1/2\int_{x}^{\infty}\frac{u'(x)}{x-u(x)}dx\right),\ x\in\mathfrak{D} \tag{4.1}$$

Demostración

La expresión (2.6), se puede poner en la forma siguiente

$$(i(x)+1)m(x)=x-\int_0^x F^2(u)du/F^2(x) \tag{4.2}$$

derivando respecto de x la expresión (4.2), queda

$$i'(x)m(x)+(i(x)+1)m'(x)=2F(x)F'(x)\int_0^x F^2(u)du/F^4(x) \tag{4.3}$$

llamando

$$G(x) = \int_0^x F^2(u)du$$

la expresión (4.3) se transforma en

$$i'(x)m(x)+(i(x)+1)m(x)=G''(x)G(x)/G'^2(x) \tag{4.4}$$

Introduciendo en la expresión (4.2), la función G(x), tenemos que

$$G'(x)/G(x)=\frac{1}{x-m(x)(i(x)+1)} \tag{4.5}$$

entonces de (4.4) y (4.5), se obtiene

$$G''(x)/G'(x)=\frac{i'(x)m(x)+m'(x)(i(x)+1)}{x-m(x)(i(x)+1)} \tag{4.6}$$

Integrando (4.6) en $(a,b)\subset\mathfrak{D}$, nos dá

$$L\ \frac{G'(b)}{G'(a)}=\int_a^b\frac{i'(x)m(x)+m'(x)(i(x)+1)}{x-m(x)(i(x)+1)}\,dx \tag{4.7}$$

y haciendo en (4.7), a=x y b tender a ∞, se obtiene

$$G'(x)=\exp\left(-\int_x^{\infty}\frac{i'(x)m(x)+m'(x)(i(x)+1)}{x-m(x)(i(x)+1)}\,dx\right)$$

o lo que es lo mismo

$$F(x)=\exp\left(-1/2\int_x^{\infty}\frac{i'(x)m(x)+m'(x)(i(x)+1)}{x-m(x)(i(x)+1)}\,dx\right)=$$

$$=\exp\left(-1/2\int_x^{\infty}\frac{u'(x)}{x-u(x)}\,dx\right)$$

como queríamos demostrar.

La Proposición siguiente nos da una relación entre m(x) e i(x).

Proposición 4.2

La función $i(x) \in \mathfrak{I}$ verifica:

$$i'(x)+P(x)i(x)=Q(x)$$

con

$$P(x)=\frac{m'(x)}{m(x)}\cdot\frac{x+m(x)}{x-m(x)}$$

y

$$Q(x)=m'(x)/m(x)$$

Demostración

De (4.1) y II.3.8 de (2) se obtiene

$$i'(x)m(x)(x-m(x))+m'(x)((i(x)+1)(x-m(x))-2x)=0$$

que a su vez puede escribirse como

$$i'(x)+\frac{m'(x)}{m(x)}\cdot\frac{x+m(x)}{x-m(x)}=\frac{m'(x)}{m(x)}$$

y la proposición queda demostrada.

EJEMPLO

A la variable aleatoria X con función de medias

$$m(x)=2(x^2+x+1)/3(x+1)$$

le corresponde la función de índices

$$i(x)=(x^3+2x^2-2x-1)/(5x^3+10x^2+10x+5)$$

para $1<x\leq 2$. Por la Proposición 4.1 la función de distribución correspondiente viene dada por:

$$F(x)=\begin{cases}(x^2-1)/3 & 1<x\leq 2\\ 1 & x\geq 2\end{cases}$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 GASTWIRTH, J. L.: A. general definition of the Lorenz Curve. Econometrica, vol. 39, n.º 6 (1971).

2 ZOROA, P.; RUIZ, J. M.: Propiedades de las funciones de medias de las distribuciones truncadas. Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa. Vol. XXXII (1981).

3 ZOROA, P.; RUIZ, J. M.: Distribuciones truncadas y sus funciones de medias. Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa. Vol. XXXIV (1982).