# UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Condiciones Suficientes para Criterios de
Comparación Estocástica

**Dña. Carolina Martínez Riquelme**
**2014**

# Índice general

# Summary

One of the main objectives of statistics is the comparison of random quantities. These comparisons are mainly based on the comparison of some measures associated to these random quantities. For example, it is very common to compare two random variables in terms of their means, medians or variances. In some situations, the comparisons based only on two single measures are not very informative. The necessity of providing more informative comparisons of two random quantities has motivated the development of the theory of the stochastic orders, which has grown significantly during last 40 years (see Shaked and Shanthikumar, 2007). This theory is composed of different criteria classified by the characteristic they are comparing. Basically, this characteristics are the residual lifetimes, the location, the variability and the concentration of the random variables and they are measured by several functions of interest in reliability, risks and economy. In some cases, these functions are defined in terms of certain incomplete integrals of the distribution, survival or quantile functions. Unfortunately, these integrals can not be given in an explicit way in most cases, therefore we can not check directly these orders by their definitions. Even though we can verify some stronger orders or stronger conditions in this kind of situation, there are lots of cases which are not covered by any tool in the literature. Due to this fact, it is of interest to study sufficient conditions for these orders, easy to verify, when the strongest ones do not hold and this is one of the main areas of research on this topic. For instance, the well-known increasing convex order holds when the incomplete integrals of the survival functions are ordered. However, there are loads of situations where these integrals do not have any explicit expression, which makes difficult to verify the order. A solution in this case is to verify the stochastic order, which is stronger than the increasing convex order, The stochastic order holds when the survival functions are ordered, which is a simple condition to verify as long as the survival functions have an explicit expression. Even if this does not occurs, there exists a sufficient condition for the stochastic order in terms of the density functions. However, there are lots of situations where the random variables are not ordered in the stochastic order. Luckily, to check the increasing convex order in this cases, there exist the renowned Karlin-Novikov conditions established in terms of crossings among the survival, quantile and density functions, therefore these conditions can be always verified. Nevertheless, this set of conditions is just sufficient, not necessary, therefore there are still situations not covered by this result. Hurlimann (1998) gave a characterization of the increasing convex order in this direction, he considered the case of $n > 1$ crossing points among the survival functions, but his proof has a mistake. One of the goals of this thesis is to give a right proof for this result, which also inspired us to establish

characterizations for other orders (more details will be given later).

Our main purpose in this thesis is to continue this line of research for some of the main orders in the different sorts of comparisons of this theory: residual lifetimes, location, variability and concentration. Down to the last detail, we consider the situation where the strongest order is no more verified; and is defined by a simple condition in terms of the survival or the quantile functions. The strongest orders for each kind of comparison are the hazard rate, the stochastic, the dispersive and the star shaped orders, respectively. We seek an intermediate condition between the strongest order and the corresponding weaker order giving several sets of sufficient condition in terms of the distribution, the survival or the quantile function of the random variables or even, when it is possible, in terms of the density functions, since last ones are always available.

In particular, we initiate the study with the comparison of residual lifetimes in Chapter 2. First of all, we consider the mean residual life order playing the role of the weaker order and the hazard rate order as the stronger one, as we have mentioned above. This stronger criteria is characterized by the monotonicity of the ratio of the survival functions. However, this ratio is not monotone in many cases and the hazard rate order does not hold. The aim is to prove that this non monotonicity can be still enough to guarantee the mean residual life order, under some additional mild conditions. We consider a less restrictive condition, and we assume that the ratio of the survival functions is initially decreasing and later is increasing. To conclude with the sufficient conditions for the mean residual life order, and inspired by our right proof for the result given by Hurlimann (1998), we consider the general case where there are $n > 1$ changes in the monotonicity of the ratio of the survival functions. Next we consider in Chapter 3 the comparison in the total time on test transform order, which has been used in reliability to compare two random lifetimes. This comparison has a particular interest when the stochastic order does not hold, since in reliability the stochastic order is the main tool to select which unit or system has larger lifetime. Then, we provide sufficient conditions for the total time on test transforms order in this kind of situations, where the survival functions cross each other, at least, once. To finish we consider again the generalizations of the main results. Below, in Chapter 4 we deal with the excess wealth and the expected proportional shortfall order. On the one hand, we consider comparisons of random variables in terms of their variability. In particular, we study the excess wealth order playing the role of the weaker order. The strongest order in this sort of comparison is the dispersive order, as we have mentioned above. Recurrently, we consider situations where the dispersive order does not hold. It is well-known that the dispersive order holds when the difference of the quantile functions is monotone, therefore we assume that this difference is not monotone. Moreover, in this case we consider a more general case where there can be more than one changes in the monotonicity of the difference of the quantiles functions, and in this case it is necessary that the last change occurs from decreasing to increasing. On the other hand, we consider comparisons of random variables in terms of their concentration. In particular, we consider the expected proportional shortfall order, playing the role of the weaker order, and the star order, as the stronger one. We give several sets of sufficient conditions when the star order does not hold. We consider situations where the ratio of the quantile functions is not monotone, in an analogous way to the case of the mean residual life order by replacing the survival functions by the quantiles ones. In addition, we establish a set of conditions under which the expected proportional shortfall is no more verified. We also manage to establish a set of sufficient conditions in terms of the density functions. Encore, to finish with the sufficient conditions, we establish generalizations of the main results on sufficient conditions, where we assume that the number of changes in the monotonicity is greater than one.

Furthermore, we apply along every chapter the provided results to compare some well-known parametric models of distributions. In particular, we consider during the thesis the normal, the gamma and the lognormal families with no closed expressions for their distribution, survival and quantiles functions; the Weibull and the Pareto families with explicit expressions for all of their associated functions; and the Davies, the Govindarajulu and the Tukey families which are defined in terms of their quantile functions and with no explicit expression for the distribution (survival) function. Other contribution of this thesis is to give an interpretation to the total time on test transform order. Despite being used widely in reliability, it is not very clear in which sense are being compared the random variables. We provide a characterization of this order which reveals the true nature of this comparison. We prove that this order is equivalent to compare the means of the lower tails of the random variables, thereupon we give an interpretation of this order in reliability and actuarial context as well. Moreover, in every chapter we consider the duals of the previous orders, giving the analogous versions of every result. When it is possible we prove the result by means of the relationship among each order and its dual or by a detailed proof otherwise. These duals are the mean inactivity time for the mean residual life, the dual total test on transform order and the location independent riskier for the excess wealth order.

The stochastic comparison of ordered data is another of the most important areas of research in this topic. There are a lot of results for the case of the generalized order statistics (GOS's). This model includes, as a particular case, order statistics for independent and identically distributed (i.i.d.) observations and record vales. In general, GOS's provide a framework to obtain results that can be applied to the particular cases mentioned previously. Most results in the literature are devoted to the comparison of the GOS's in terms of the stochastic, the likelihood ratio, the hazard rate and the dispersive orders. However, there are only a few results for other stochastic orders like the total time on test transform order and the excess wealth order. In the Chapter 3 we provide some results for the comparison of generalized order statistics in the total time on test transform order. We also provide results for the comparison of generalized order statistics in the excess wealth order along Chapter 4. These results improve some previous results in the literature.

Now, we turn around inside the topic to talk about another branch of this topic, the joint stochastic orders. Since all of the previous orders share the feature of not taking into account the dependence among the two random variables which are being compared, the topic of joint stochastic orders is an emergent area of research. There are several contexts where it is important to take into account the dependence among the random variables. For example, if we are interested in comparing two units which are aging in the same environment and both depend on this environment, it would be suitable to involve, in some way, this fact in the comparison. Therefore, in this branch of the stochastic orders, the criteria are defined in terms of the joint functions associated to the random vector $(X, Y)$ instead of the marginal ones. This line of investigation is still initiating and, consequently, there exist only a few tools in this context to compare two random variables. There are just some versions of the likelihood ratio, the stochastic order and the hazard rate order so far. Along Chapter 5 we work on the joint stochastic orders providing some contributions to this area. We define a new notion for the comparison of the residual lifetimes of two random variables taking into account their dependence structure in order to be able to keep comparing the random variables in these terms when the stronger notion (the one already defined) it is no more satisfied, since there are lots of situations of this kind and there is no any other criteria in the literature to keep comparing the random variables in terms of their residual lifetimes. The new notion is defined in a simple, and easily to check, way. Furthermore, we establish the relationship between the previous joint orders in the literature and the new one, which we call the weak hazard rate joint order, as well as we give conditions in a way that we can check the strong hazard rate joint order by means of the weak hazard rate joint order. Thus these conditions are established by the crossing points of the joint density functions of the random vectors $(X, Y)$ and $(Y, X)$, and we can apply this result to order any pair of random variables. In particular, through this set of conditions we order the bivariate normal distributed family in the strong hazard rate order. This is the beginning of a larger study on the comparison of residual lifetimes taking into account the mutual dependence of the random variables. In fact we have initiated the study of a possible extension for the mean residual life order to keep comparing the two random variables in terms of their residual lifetimes even when the new weak joint hazard rate order does not hold.

We want to mention that a part of this thesis has been published in Belzunce and Martínez-Riquelme (2014) and Belzunce, Martínez-Riquelme and Ruiz (2013, 2014).

# Capítulo 1

# Introducción a las comparaciones estocásticas

## 1.1. Introducción

La comparación de variables aleatorias es uno de los principales objetivos de la Probabilidad y la Estadística. Estas comparaciones están basadas principalmente en medidas asociadas a dichas variables como pueden ser la media, la mediana o la varianza de dichas variables. El problema de estos criterios es que no resultan muy informativos al reducirse a la simple comparación de dos números. La necesidad de establecer criterios de comparación más detallados de las variables ha motivado el desarrollo de la teoría de "ordenaciones estocásticas"que ha tenido un gran desarrollo a lo largo de los últimos 40 años. Esta teoría tiene diversas aplicaciones en distintos campos como fiabilidad, riesgos, finanzas, seguros, epidemiología, economía, etc., y consta de diferentes criterios de comparación de variables aleatorias, cuyo objetivo es seleccionar cual de ellas es mayor de acuerdo a su dispersión, concentración, tiempo de vida residual, etc. En este capítulo de la memoria estableceremos en primer lugar la notación que se seguirá a lo largo de la misma y definiremos en la Sección 1.1 las funciones que permiten establecer los distintos criterios de comparación estocásticos. Posteriormente, se darán los principales modelos paramétricos de distribuciones de probabilidad, los cuáles se ordenarán en algunos de los distintos criterios tratados en esta memoria en función de sus parámetros. Como hemos indicado en el resumen, en esta memoria se obtienen resultados para la comparación de modelos de variables ordenadas. Por ello se dará la definición de varios modelos de variables ordenadas como los estadísticos ordenados usuales o los valores récord y el modelo de los estadísticos ordenados generalizados que engloba los modelos anteriores, entre otros muchos. Por último en la Sección 1.2 se darán las definiciones de ordenaciones estocásticas que usaremos en esta memoria y los principales resultados que se utilizarán en el resto de capítulos.

A lo largo de esta memoria usaremos la siguiente notación. Dado un espacio de probabilidad, $(\Omega, A, P)$ y una variable aleatoria definida sobre el mismo, $X : \Omega \to \mathbb{R}$, denotamos su función de distribución como $F(x) = P(X \leq x)$. Los puntos para los cuales $F(x)$ es estrictamente creciente forman lo que se conoce como el soporte de $X$, el cuál denotaremos por $S_X$; el punto ínfimo [supremo] de este conjunto lo representaremos por $l_X$ $[u_X]$. Dado un suceso $A$, la variable $\{X|A\}$ denotará la variable $X$ condicionada al suceso $A$. En esta memoria utilizaremos los términos "creciente" o "decreciente" para referirnos a una función "no decreciente" o "no creciente", respectivamente. Por último, denotaremos por $(x)_+$ a la función definida de la siguiente forma

$$(x)_+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

De forma análoga se define la función $(x)_-$ como sigue

$$(x)_- = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0, \\ x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Fijada esta notación general, pasamos ahora a la definición de distintas funciones que serán utilizadas para la comparación de variables aleatorias.

### 1.1.1. Funciones de interés en fiabilidad, riesgos y economía

Una de las funciones más conocidas en fiabilidad y supervivencia asociada a una variable $X$ es la función de **supervivencia**, denotada por $\overline{F}(x)$, que se define como $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$. Su interpretación es sencilla. En fiabilidad y supervivencia, por ejemplo, donde se trabaja con variables aleatorias que representan tiempos de vida de mecanismos o individuos, la función de supervivencia representa la probabilidad de que un mecanismo (individuo) siga funcionando (vivo) después de $x$ unidades de tiempo. En teoría de riesgos, donde $X$ representa la pérdida para la compañía aseguradora que suponen las reclamaciones de un cierto individuo, la función de supervivencia nos da la probabilidad de que ésta suponga un gasto mayor o igual que $x$.

Para variables aleatorias continuas, con $l_X$ finito, existe una expresión de su esperanza, denotada por $E(X)$, en términos de la función de supervivencia que viene dada por

$$E(X) = \int_{l_X}^{\infty} \overline{F}(x)dx + l_X. \tag{1.1}$$

A partir de la función de distribución se define también la función cuantil como su inversa. Siguiendo el convenio ínf $\{\emptyset\} = \infty$, esta función se define como sigue.

**Definición 1.1.1.** *Sea $X$ una variable aleatoria con función de distribución $F$. Se define su función* ***cuantil****, denotada por $F^{-1}$, como*

$$F^{-1}(p) = \text{ínf} \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p\}, \text{ para todo } p \in (0, 1],$$

*y* $F^{-1}(0) = \text{ínf} \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) > 0\}$.

Esta definición permite construir la inversa de la función de distribución incluso en los puntos donde ésta no sea estrictamente creciente, siendo así $F^{-1}$ continua por la izquierda, definida obviamente sobre el intervalo $(0,1)$ y con imagen $S_X$, esta última propiedad se puede probar sin dificultad. La función cuantil en teoría de riesgos también se conoce como el valor en riesgo, denotándose por $VaR_X(p)$ en este contexto, y representa el límite máximo de las pérdidas que se producen en el $100p\,\%$ de los casos. El valor en riesgo se ha convertido en una de las medidas de referencia en el mundo financiero y actuarial.

Para variables aleatorias continuas con función de densidad $f$, en el contexto de fiabilidad y supervivencia es de gran interés también la función razón de fallo. Esta función, como su propio nombre indica, mide la "probabilidad"de que el individuo o mecanismo falle en un determinado instante.

**Definición 1.1.2.** *Sea $X$ una variable aleatoria continua con función de densidad $f$ y función de supervivencia $\overline{F}$. Se define la función* ***razón de fallo*** *como*

$$r(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)}, \ \textit{para todo } t < u_X.$$

Esta función no es realmente una probabilidad, pero en el contexto de fiabilidad se puede interpretar como un indicador de la probabilidad de fallo instantáneo.

Otra función relevante en teoría de fiabilidad es la conocida como función de vida media residual. Esta función está definida a partir de la variable aleatoria condicionada $X_t = \{X - t \mid X > t\}$.

**Definición 1.1.3.** *Sea $X$ una variable aleatoria con media finita. Se define la función* ***vida media residual*** *como*

$$m(t) = E(X_t), \ \textit{para todo } t < u_X.$$

La razón por la cual esta función recibe el nombre de función vida media residual es la interpretación que se le da en fiabilidad y supervivencia. En este contexto, la variable $X_t$ representa el tiempo de vida restante de un individuo a tiempo $t$, por lo que $m(t)$ representa la vida media que le resta a un individuo a tiempo $t$. La función de distribución de la variable $X_t$, denotada por $F_{X_t}(x)$, viene dada por el siguiente cociente

$$F_{X_t}(x) = P(X - t \leq x \mid X > t) = \frac{F(x+t) - F(t)}{\overline{F}(t)}, \ \text{para todo } x \geq 0, \tag{1.2}$$

siendo nula en otro caso. A partir de (1.1) y de (1.2) la función vida media residual se puede reescribir como

$$m(t) = \frac{\int_t^\infty \overline{F}(x)dx}{\overline{F}(t)}, \ \text{para todo } t < u_X.$$

La integral que aparece en la expresión anterior corresponde a la esperanza de una función ampliamente conocida en teoría de riesgos que definimos a continuación.

**Definición 1.1.4.** *Sea $X$ una variable aleatoria con media finita. Se define la función* ***stop-loss*** *como*

$$\pi_X(t) = E((X - t)_+), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Veamos la interpretación que se da a esta función en el contexto de reaseguros. Un reaseguro es una operación por la cual un asegurador distribuye sus riesgos, cediendo parte de los mismos a otra u otras entidades reaseguradoras con el objetivo de reducir el volumen de pérdidas a unos límites soportables por la entidad aseguradora. La parte de riesgo transferida se denomina *cesión* y la no cedida *pleno o retención*. Un reaseguro excess loss es una modalidad de reaseguro por la cual el reasegurador cubre la parte del siniestro que excede del pleno fijado por la cedente para el siniestro, la cantidad $t$. Por lo que la empresa reaseguradora cubre $(X - t)_+$. Para más detalles ver Sarabia, Gómez, Vázquez (2007). Por tanto la función stop-loss mide el promedio del riesgo cubierto por la empresa reaseguradora. La función stop-loss se puede reescribir a partir de (1.1) como

$$\pi_X(t) = \int_t^\infty \overline{F}(x)dx, \tag{1.3}$$

de donde se obtiene otra forma de expresar la función vida media residual en términos de la función stop-loss, en concreto se tiene que

$$m(t) = \frac{\pi_X(t)}{\overline{F}(t)}, \text{ para todo } t < u_X.$$

De forma análoga a las funciones razón de fallo y vida media residual se definen la función razón de fallo inversa y tiempo medio de inactividad.

**Definición 1.1.5.** *Sea $X$ una variable aleatoria continua con funcion de densidad $f$ y función de distribución $F$. Se define la función* ***razón de fallo inversa*** *como*

$$\tilde{r}(t) = \frac{f(t)}{F(t)}, \text{ para todo } t > l_X.$$

*Para cualquier variable aleatoria $X$ se define la función* ***tiempo medio de inactividad*** *como*

$$\tilde{m}(t) = E(X_{(t)}), \text{ para todo } t > l_X,$$

*donde $X_{(t)} = \{t - X \mid X < t\}$.*

La función razón de fallo inversa es un indicador de la probabilidad de que un mecanismo falle en el instante $t$ dado que en ese instante ya no funcionaba, de forma análoga a la función razón de fallo.

Para la función tiempo medio de inactividad tenemos que si $X$ representa el tiempo de vida de un mecanismo o individuo, la función $\tilde{m}(t)$ mide el tiempo medio que lleva el mecanismo sin funcionar dado que el mecanismo ha sobrevivido menos de $t$ unidades de tiempo.

Recordamos que en teoría de riesgos y finanzas el valor en riesgo, $VaR$, es una de las funciones más utilizadas. Sin embargo, presenta un inconveniente: aunque proporciona información sobre el porcentaje de casos en los que se sobrepasa una cierta cantidad, no informa sobre la amplitud del intervalo, en términos probabilísticos, de los valores que quedan a la derecha del $VaR$. Por ello se utilizan otras medidas en términos de la función cuantil, las cuáles recordamos a continuación.

**Definición 1.1.6.** *Sea $X$ una variable aleatoria con función cuantil $F^{-1}$. Se define la* ***cola del valor en riesgo*** *como*

$$TVaR_X(p) = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR_X(u)du, \text{ para todo } p \in (0,1).$$

Esta medida puede interpretarse como la "media aritmética" de todos los valores en riesgo de $X$, de $p$ en adelante. Otra forma de medir la "amplitud"del intervalo $(VaR_X(p), \infty)$ es a través de la función excess wealth, también conocida como la función right spread (ver Fernández-Ponce, Infante-Macías y Muñoz-Pérez, 1996).

**Definición 1.1.7.** *Sea $X$ una variable aleatoria con función cuantil $F^{-1}$ y media finita. Se define la función* ***excess wealth*** *como*

$$W_X(p) = E\left(\left(X - F^{-1}(p)\right)_+\right), \text{ para todo } p \in (0,1).$$

A partir de (1.1) podemos expresar la función excess wealth como

$$W_X(p) = \int_{F^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}(x)dx, \text{ para todo } p \in (0,1)\,. \tag{1.4}$$

Esta medida aparece de forma natural en los contextos de fiabilidad y seguros. En fiabilidad es común utilizar técnicas de "burn-in"para eliminar fallos tempranos (ver Jensen y Petersen, 1983). Consideremos un sistema que produce unidades (bombillas, circuitos, etc) con tiempo de vida aleatorio y consideremos que las unidades se ponen en funcionamiento, antes de salir a la venta, hasta que el $100p\,\%$ de las unidades falle. Esta técnica evita que salgan a la venta unidades con tiempos de fallo muy bajos provocando futuras reclamaciones, ocasionando costes y mala imagen para la empresa. El tiempo de vida esperado de las unidades que sí salen a la venta viene dado por $W_X(p)$. En teoría de riesgos, en un contrato de reaseguros puede fijarse el pleno, $t$, en términos de la función cuantil, cediendo el $100(1-p)\,\%$ de las reclamaciones, por lo que $t = F^{-1}(p)$. En este contexto $W_X(p)$ se conoce como la función expected shortfall, $ES_X(p)$.

Cuando la variable aleatoria representa los ingresos familiares anuales en una determinada población, la función excess wealth ha sido utilizada como una medida de desigualdad (ver Fagioulli, Pellerey y Shaked, 1999). Sin embargo, esta función presenta el problema de que no es invariante por cambios de escala, lo que supone una limitación en el estudio de la desigualdad. Para salvar este inconveniente Belzunce et al. (2012) introdujeron una nueva medida, la función expected proportional shortfall, definida como la media de la variable $(X - F^{-1}(p))_+/F^{-1}(p)$ en lugar de $(X - F^{-1}(p))_+$.

**Definición 1.1.8.** *Sea $X$ una variable aleatoria con función cuantil $F^{-1}$ y media finita. Se define la función **expected proportional shortfall** como*

$$EPS_X(p) = E\left(\frac{(X - F^{-1}(p))_+}{F^{-1}(p)}\right), \text{ para todo } p \in (0,1) \text{ tal que } F^{-1}(p) > 0.$$

De la definición resulta trivial la igualdad

$$EPS_X(p) = \frac{W_X(p)}{F^{-1}(p)}. \tag{1.5}$$

La función anterior también se puede aplicar en el contexto de reaseguros y tiene en cuenta la magnitud del $VaR$ respecto del cual se toma la diferencia. Otra función para estudiar la desigualdad en distribuciones de ingresos es la curva de Lorenz.

**Definición 1.1.9.** *Sea $X$ una variable aleatoria no negativa con función cuantil $F^{-1}$ y media finita. Se define su **curva de Lorenz** como*

$$L_X(p) = \frac{1}{E(X)} \int_0^p F^{-1}(u)du, \text{ para todo } p \in [0,1]. \tag{1.6}$$

En economía, la curva de Lorenz tiene la siguiente interpretación: si $X$ representa la distribución de ingresos de una población, entonces $L_X(p)$ indica la proporción de los ingresos totales que recibe el $100p\,\%$ de los individuos más pobres. Por tanto, cuanto más cerca de la diagonal del cuadrado unidad esté la curva de Lorenz, más repartida estará la riqueza entre toda la población. En el negocio de los seguros, $L_X(p)$ puede interpretarse como la proporción de todas las cantidades reclamadas ocasionadas por el $100p\,\%$ de las reclamaciones de menor cuantía.

Observemos que (1.6) puede reescribirse como

$$L_X(p) = \int_0^p F^{-1}_{\frac{X}{E(X)}}(u)du,$$

donde $F^{-1}_{\frac{X}{E(X)}}$ denota la función cuantil asociada a la variables aleatoria $\frac{X}{E(X)}$. Si en lugar de integrar la función cuantil asociada a esta variable aleatoria normalizada, utilizamos la correspondiente a la variable centralizada, $X - E(X)$, obtenemos la función conocida como curva de dilatación definida por Belzunce, Candel y Ruiz (2000).

**Definición 1.1.10.** *Sea $X$ una variable aleatoria no negativa con función cuantil $F^{-1}$ y media finita. Se define su **curva de dilatación** como*

$$D_X(p) = \int_0^p F^{-1}_{X-E(X)}(u)du, \text{ para todo } p \in [0,1].$$

Esta función guarda relación con el llamado **capital económico**, un concepto utilizado en teoría de riesgos para cuantificar el margen de capital que tanto las compañías de seguros como los bancos deberían tener disponible para hacer frente a pérdidas inesperadas. Si $X$

es la variable aleatoria que representa la pérdida total de la compañía, el capital económico basado en una medida de riesgo determinada $\rho$ se define como

$$EC_X = \rho\,(X) - E(X).$$

En el caso particular de que la medida de riesgo empleada sea el $TVaR_X\,(p)$, el capital económico puede escribirse en términos de la curva de dilatación, concretamente se tiene la siguiente igualdad

$$EC_X\,(p) = -\frac{D_X\,(p)}{1-p}.$$

Por último, existe otra medida asociada a las funciones de supervivencia y cuantil de una variable, la función TTT transformada. Esta función no ha sido muy utilizada en teoría de fiabilidad (su uso es más de tipo teórico que aplicado puesto que no se le ha dado una interpretación clara dentro de este contexto) y uno de los aportes de esta memoria, como veremos en el Capítulo 3, es la interpretación de esta medida tanto en teoría de fiabilidad como en riesgos. Barlow et al. (1972) definieron dicha función para variables aleatorias no negativas como sigue.

**Definición 1.1.11.** *Sea $X$ una variable aleatoria con función cuantil $F^{-1}$, función de supervivencia $\overline{F}$ y media finita. Se define la función* ***TTT transformada*** *de $X$ como*

$$TTT_X(p) = \int_0^{F^{-1}(p)} \overline{F}(x)dx, \ \text{para todo } p \in [0,1]\,.$$

Hu, Wang y Zhuang (2012) extendieron esta medida al caso de variables aleatorias cualesquiera, no necesariamente no negativas, introduciendo la siguiente función.

**Definición 1.1.12.** *Sea $X$ una variable aleatoria con media finita $E(X)$. Se define la función* ***T transformada*** *de $X$ como*

$$T_X(p) = E(X) - \int_{F^{-1}(p)}^{+\infty} \overline{F}(x)dx, \ \text{para todo } p \in [0,1]\,.$$

En particular, cuando el extremo inferior del soporte de la variable es finito, la transformada $T_X(p)$ se puede reescribir para variables continuas como sigue

$$T_X(p) = \int_{l_X}^{F^{-1}(p)} \overline{F}(x)dx + l_X, \ \text{para todo } p \in (0,1). \tag{1.7}$$

Si $l_X = 0$, entonces $T_X$ se reduce a la TTT transformada de $X$. Nótese también que en el caso de variables aleatorias continuas se tiene que $\overline{F}(l_X) = 1$. Por lo tanto cuando las variables aleatorias son no negativas las definiciones 1.1.11 y 1.1.12 coinciden.

### 1.1.2. Modelos paramétricos de distribuciones

Como hemos señalado en el resumen, los resultados obtenidos en esta memoria se han aplicado a distintos modelos paramétricos. A continuación fijamos la definición y notación de los modelos que consideraremos a lo largo de la memoria. En primer lugar, damos la definición de distintos modelos para los que no hay expresión explícita para su función de distribución ni para su función cuantil pero sí para su función de densidad. Comenzamos con la familia normal.

**Definición 1.1.13.** *Se dice que una variable aleatoria $X$ sigue una distribución **normal** de media $\mu \in \mathbb{R}$ y desviación típica $\sigma > 0$, denotándolo por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si la función de densidad viene dada por*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Asociada a esta familia, mediante el cambio de variable $\exp\{X\}$ tenemos la familia lognormal.

**Definición 1.1.14.** *Se dice que una variable aleatoria $X$ sigue una distribución **lognormal** de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$, denotándolo por $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$, si la función de densidad viene dada por*

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log x-\mu)^2\right\}, \text{ para todo } x \in (0, \infty).$$

Otra familia que viene definida en términos de su función de densidad es la familia gamma. Este modelo ha sido ampliamente utilizado para modelizar el tiempo de funcionamiento de una unidad en fiabilidad.

**Definición 1.1.15.** *Se dice que una variable aleatoria $X$ sigue una distribución **gamma** de parámetros de forma $\alpha > 0$ y escala $\beta > 0$, denotándolo por $X \sim G(\alpha, \beta)$, si la función de densidad viene dada por*

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}\exp\{-x/\beta\}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}, \text{ para todo } x \in (0, \infty),$$

*donde $\Gamma(\cdot)$ denota la función gamma.*

La siguiente familia, la gamma generalizada, ha sido aplicada para modelizar distribuciones de ingresos (ver por ejemplo McDonald, 1984 y Bandourian, McDonald y Turley, 2004).

**Definición 1.1.16.** *Se dice que una variable aleatoria $X$ sigue una distribución **gamma generalizada** de parámetros de forma $\alpha, p > 0$ y escala $\beta > 0$, denotándolo por $X \sim GG(\alpha, \beta, p)$, si la función de densidad viene dada por*

$$f(x) = \alpha\frac{x^{\alpha p-1}\exp\{-(x/\beta)^\alpha\}}{\beta^{\alpha p}\Gamma(p)}, \text{ para todo } x \in (0, \infty).$$

Usualmente, si el modelo tiene expresión explícita para la función de distribución, o equivalentemente, de supervivencia, éste se presenta en términos de las mismas. Veamos a continuación la definición de varios de estos modelos. Consideramos en primer lugar la familia Pareto que ha sido aplicada en fiabilidad y teoría de riesgos (ver por ejemplo Seal, 1980, Kleiber y Kotz, 2003 y Boland, 2007).

**Definición 1.1.17.** *Se dice que una variable aleatoria $X$ sigue una distribución* ***Pareto*** *de parámetros de forma $a > 0$ y escala $k \in \mathbb{R}$, denotándolo por $X \sim P(a, k)$, si la función de supervivencia viene dada por*

$$\overline{F}(x) = \left(\frac{k}{x}\right)^a, \; \textit{para todo } x \in (k, \infty).$$

*Su función cuantil viene dada por*

$$F^{-1}(p) = \frac{k}{(1-p)^{\frac{1}{a}}}, \; \textit{para todo } p \in (0, 1).$$

Otro ejemplo de familia paramétrica con expresión explícita tanto para la función de supervivencia como la cuantil es la familia Weibull. Esta familia ha sido ampliamente utilizada en fiabilidad y ha sido aplicada también en el contexto de riesgos (ver Beirlant y Teugels, 1992, Kleiber y Kotz, 2003 y Boland 2007).

**Definición 1.1.18.** *Se dice que una variable aleatoria $X$ sigue una distribución* ***Weibull*** *de parámetros de forma $\beta > 0$ y escala $\alpha > 0$, denotándolo por $X \sim W(\alpha, \beta)$, si la función de supervivencia viene dada por*

$$\overline{F}(x) = \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right\}, \; \textit{para todo } x \in (0, \infty).$$

*Su función cuantil viene dada por*

$$F^{-1}(p) = \alpha(-\log(1-p))^{\frac{1}{\beta}}, \; \textit{para todo } p \in (0, 1).$$

*Un caso particular dentro de la familia Weibull es el caso $c = 1$ que es el caso de la distribución* ***exponencial*** *y lo denotaremos por $X \sim Exp(1/\alpha)$.*

A continuación presentamos tres familias definidas en términos de sus funciones cuantiles, las cuáles no tienen expresión explícita para las funciones de distribución ni supervivencia. La primera de ellas, la familia Govindarajulu, fue introducida por Govindarajulu (1977) y ha sido aplicada en fiabilidad (ver Nair, Sankaran y Vineshkumar, 2012)

**Definición 1.1.19.** *Se dice que una variable aleatoria $X$ sigue una distribución* ***Govindarajulu*** *de parámetros de forma $\beta > 0$, escala $\sigma > 0$ y posición $\theta \geq 0$, denotándolo por $X \sim G(\beta, \sigma, \theta)$, si la función cuantil viene dada por*

$$F^{-1}(p) = \theta + \sigma((\beta+1)p^\beta - \beta p^{\beta+1}), \; \textit{para todo } p \in (0, 1).$$

La siguiente familia paramétrica, el modelo Tukey, fue introducida por Freimer et al. (1988) y ha sido aplicada en carteras (ver Pfaff, 2013).

**Definición 1.1.20.** *Se dice que una variable aleatoria $X$ sigue una distribución* ***Tukey*** *de parámetros de forma $\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, escala $\lambda_2 > 0$ y posición $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, denotándolo por $X \sim T(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, si la función cuantil viene dada por*

$$F^{-1}(p) = \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{p^{\lambda_3} - 1}{\lambda_3} - \frac{(1-p)^{\lambda_4} - 1}{\lambda_4}\right), \text{ para todo } p \in (0,1).$$

La siguiente familia paramétrica, el modelo Davies, fue introducida por Hankin y Lee (2006) y ha sido aplicada para el ajuste de datos en fiabilidad así como en hidrología (ver Nair y Vineshkumar, 2010).

**Definición 1.1.21.** *Se dice que una variable aleatoria $X$ sigue una distribución* ***Davies*** *de parámetros de forma $\lambda_1, \lambda_2$ no negativos no pudiéndose anular los dos a la vez y escala $C > 0$, denotándolo por $X \sim D(C, \lambda_1, \lambda_2)$, si la función cuantil viene dada por*

$$F^{-1}(p) = C\frac{p^{\lambda_1}}{(1-p)^{\lambda_2}}, \text{ para todo } p \in (0,1).$$

### 1.1.3. Modelos de variables ordenadas

La comparación estocástica de datos ordenados es uno de los tópicos más estudiados dentro de la teoría de ordenaciones estocásticas. Podemos ver distintas revisiones del tema en Boland, Shaked y Shanthikumar (1998) y Boland et al. (2002) para el caso de los estadísticos ordenados usuales; en Belzunce et al. (2007) para el caso de los valores récord y en Belzunce (2013) para la comparación multivariante de distintos modelos de datos ordenados. En particular, ha sido ampliamente estudiado el caso de los estadísticos ordenados generalizados. Este modelo incluye, como casos particulares, los estadísticos ordenados de observaciones independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) y los valores récord. En general, los estadísticos ordenados generalizados proporcionan un contexto donde obtener resultados que puedan ser aplicados a los casos particulares mencionados previamente. Pueden verse resultados para los estadísticos ordenados generalizados en Franco, Ruiz y Ruiz (2002), Belzunce, Mercader y Ruiz (2005), Khaledi (2005), Hu y Zhuang (2005a, 2005b), Khaledi y Kochar (2005), Qiu y Wang (2007) y Xie y Hu (2009, 2010).

La variedad de situaciones prácticas que modelizan estos vectores es enorme y de ahí el intento de encontrar condiciones bajo las cuales estos modelos pueden ser comparados de acuerdo a los criterios que se describen en la Sección 1.2. Recordamos a continuación las definiciones formales de estos modelos.

Los estadísticos ordenados aparecen en un gran número de aplicaciones de la estadística y juegan un papel importante en distintos modelos probabilísticos. Sea $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio $n-$dimensional y sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una observación de dicho vector aleatorio. Denotemos por $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$, los valores anteriores ordenados de menor a mayor, es decir, $x_{(1)} = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $x_{(2)}$ es el segundo valor más pequeño de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y así sucesivamente, siendo $x_{(n)} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Consideraremos variables aleatorias continuas por lo que no hay posibilidad de empate.

**Definición 1.1.22.** *La función $X_{(k)}$ de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ que toma el valor $x_{(k)}$ en cada posible secuencia de valores $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se conoce como el $k-$ésimo estadístico ordenado. Así, $(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$ es el conjunto de **estadísticos ordenados** de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.*

Cuando se introducen los estadísticos ordenados, las variables aleatorias subyacentes no están sujetas a ninguna restricción, aunque normalmente suele considerarse el caso en el que son i.i.d., caso que supondremos de ahora en adelante. Bajo este supuesto y considerando que las variables $X_1, \ldots, X_n$ tienen una función de distribución absolutamente continua $F$ con función de densidad $f$, se tiene que la densidad conjunta de los estadísticos ordenados correspondientes, $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$, viene dada por

$$f_{X_{(1)},\ldots,X_{(n)}}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r-1} f(x_i) \overline{F}(x_r)^{n-r} f(x_r), \tag{1.8}$$

para todo $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ en el soporte de $X$.

Algunas de las aplicaciones de los estadísticos ordenados son las siguientes:

(a) Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria simple de $X$, entonces $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ es la **muestra ordenada**.

(b) Otra aplicación de estos estadísticos se encuentra en la teoría de la fiabilidad, y en concreto, en el modelo **$k$-out-of-$n$**. El estadístico ordenado $k$-ésimo, $X_{(k)}$, en una muestra de tamaño $n$ representa el tiempo de vida de un sistema $(n-k+1)$-out-of-$n$. Este sistema consiste en $n$ componentes del mismo tipo con tiempos de vida i.i.d.. Todas las componentes comienzan a trabajar simultáneamente y el sistema falla si fallan $k$ componentes o más. Dicho de otro modo, son necesarias $n-k+1$ componentes para que el sistema funcione. Para el caso en que $k = 1$, obtenemos los sistemas en serie y el caso $k = n$ corresponde al caso de los sistemas en paralelo.

Pasamos ahora a definir el modelo de los valores récord. Motivados por algunas condiciones extremas del tiempo, los valores récord fueron definidos por Chandler (1952) como un modelo para valores extremos en una sucesión de variables aleatorias i.i.d.. También puede ser útil como un modelo para conocer los niveles de precipitaciones más altos o las temperaturas más elevadas. Así pues, los valores récord aparecen en situaciones de nuestra vida cotidiana, así como en diversas aplicaciones estadísticas y en teoría de la fiabilidad.

Como veremos a continuación, los valores récord se definen a partir de los tiempos récord, es decir, aquellos instantes de tiempo en los que aparecen los valores más altos.

**Definición 1.1.23.** *Dada $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución continua, las variables aleatorias*

$$L(1) = 1,$$

$$L(n+1) = \text{mín}\{j > L(n) | X_j > X_{L(n)}\}, \; \textit{para todo } n \in \mathbb{N},$$

*son los **tiempos récord** y*

$$X_{L(n)}, \; \textit{para todo } n \in \mathbb{N},$$

*son los **valores récord**.*

Si nos basamos en una sucesión de variables aleatorias $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. con función de distribución $F$ absolutamente continua y densidad $f$, la densidad conjunta de los $n$ primeros valores récord $X_{L(1)}, \dots, X_{L(n)}$ viene dada por

$$f_{X_{L(1)},\dots,X_{L(n)}}(x_1, \dots, x_n) = \left( \prod_{i=1}^{n-1} \frac{f(x_i)}{F(x_i)} \right) f(x_n), \tag{1.9}$$

para todo $x_1 \leq \dots \leq x_n$ en el soporte de $X$.

El caso de los $k-$récord es en el que los valores que resultan de interés no son los valores más elevados de una sucesión, sino los segundos o terceros valores más altos. Observando los $k-$ésimos valores sucesivos más grandes, Dziubdziela y Kopocinski (1976), propusieron el siguiente modelo de los valores $k$ récord. Sea pues $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con distribución continua. Para $k \in \mathbb{N}$, la sucesión

$$\{X_{j-k+1,j}\}_{j=k,k+1,\dots}$$

del $k-$ésimo estadístico ordenado más alto es no decreciente, y la manera intuitiva de introducir el $k-$ésimo récord es la siguiente: eliminar todas las repeticiones en esta sucesión para obtener una subsucesión estrictamente creciente cuyos elementos se llaman valores récord $k-$ésimos.

La manera formal de introducir este modelo es definiendo previamente los tiempos $k-$récord.

**Definición 1.1.24.** *Dada $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución continua y $k$ un entero positivo, las variables $L^{(k)}(n)$ dadas por*

$$L^{(k)}(1) = 1,$$
$$L^{(k)}(n+1) = \text{mín}\{j \in \mathbb{N} | X_{j,j+k-1} > X_{L^{(k)}(n),L^{(k)}(n)+k-1}\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

*son los $k-$**ésimos tiempos récord** y las cantidades*

$$X_{L^{(k)}(n),L^{(k)}(n)+k-1},$$

*que denotaremos por $X_{L^k(n)}$ para $n \in \mathbb{N}$, serán los **valores récord** $k-$**ésimos**.*

Obviamente, los valores récord ordinarios se obtienen en el caso en que $k = 1$.

Si $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con función de distribución $F$ absolutamente continua y función de densidad $f$, la densidad conjunta de los $k-$récords $X_{L^{(k)}(1)}, \dots, X_{L^{(k)}(n)}$ vendrá dada por

$$f_{X_{L^{(k)}(1)},\ldots,X_{L^{(k)}(n)}}(x_1,\ldots,x_n) = k^n \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{f(x_i)}{F(x_i)}\right) F(x_n)^{k-1} f(x_n), \tag{1.10}$$

para todo $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ en el soporte de $X$.

Kamps (1995a y 1995b) definió un modelo que generaliza los modelos de datos ordenados anteriores entre otros muchos que existen en la literatura. Siguiendo Kamps (1995a y 1995b), damos a continuación la definición de estadísticos ordenados generalizados uniformes para, posteriormente, definir los estadísticos ordenados generalizados basados en una función de distribución arbitraria $F$.

**Definición 1.1.25.** *Sea $n \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $m_1,\ldots,m_{n-1} \in \mathbb{R}$, $M_r = \sum_{j=r}^{n-1} m_j$, $1 \leq r \leq n-1$, parámetros tales que $\gamma_r = k + n - r + M_r \geq 1$ para todo $r \in 1,\ldots,n-1$, y sea $\widetilde{m} = (m_1,\ldots,m_{n-1})$, si $n \geq 2$ ($\tilde{m} \in \mathbb{R}$ arbitrario, si $n = 1$). Llamaremos estadísticos ordenados generalizados uniformes al vector aleatorio $(U_{(1,n,\tilde{m},k)},\ldots,U_{(n,n,\tilde{m},k)})$ con función de densidad conjunta*

$$h(u_1,\ldots,u_n) = k\left(\prod_{j=1}^{n-1}\gamma_j\right)\left(\prod_{j=1}^{n-1}(1-u_j)^{m_j}\right)(1-u_n)^{k-1},$$

*para todo $0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_n \leq 1$. Llamaremos **estadísticos ordenados generalizados** basados en una función de distribución $F$ al vector aleatorio*

$$(X_{(1,n,\tilde{m},k)},\ldots,X_{(n,n,\tilde{m},k)}) \equiv \left(F^{-1}(U_{(1,n,\tilde{m},k)}),\ldots,F^{-1}(U_{(n,n,\tilde{m},k)})\right).$$

Si $F$ es una distribución absolutamente continua con función de densidad $f$, la función de densidad conjunta de $(X_{(1,n,\tilde{m},k)},\ldots,X_{(n,n,\tilde{m},k)})$ viene dada por

$$f(x_1,\ldots,x_n) = k\left(\prod_{j=1}^{n-1}\gamma_j\right)\left(\prod_{j=1}^{n-1}\bar{F}(x_j)^{m_j}f(x_j)\right)\bar{F}(x_n)^{k-1}f(x_n), \tag{1.11}$$

para todo $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ en el soporte de $X$. Siguiendo la notación de Cramer y Kamps (2003), la función de supervivencia de $X_{(r,n,\tilde{m}_n,k)}$ tiene la siguiente expresión

$$\overline{F}_{*,r}(t) = H_r(\overline{F}(t)), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}, \tag{1.12}$$

donde $H_r$ viene dada por

$$H_r(z) = \left(\prod_{j=1}^{r}\gamma_j\right)\int_0^z G_{r,r}^{r,0}\left[s \,\middle|\, \begin{matrix}\gamma_1,\ldots,\gamma_r\\ \gamma_1-1,\ldots,\gamma_r-1\end{matrix}\right]ds, \text{ para todo } z \in (0,1)$$

y $G$ es una $G-$función de Meijer.

El modelo de los estadísticos ordenados generalizados incluye como casos particulares a los estadísticos ordenados usuales así como a los valores récord y otros modelos como describimos a continuación.

(a) Si $m_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$, y $k = 1$, entonces la expresión (1.11) se convierte en (1.8) y obtenemos los **estadísticos ordenados**.

(b) Si $m_i = -1$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$, y $k = 1$, entonces (1.11) resulta ser (1.9), con lo que obtenemos los **valores récord**.

(c) Si $m_i = -1$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$, y $k \in \mathbb{N}$, entonces (1.11) nos da (1.10), y así obtenemos los **valores $k-$récord**.

(d) Si tomamos

$$m_i = \frac{n-i+1}{v_{i-1}} - \frac{n-i}{v_i}, \text{ para todo } 1 \leq i-1 \leq n-1 \text{ y } k = \frac{1}{v_{n-1}},$$

donde $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ son números reales positivos y $F(x) = 1 - e^{-x}$, $x > 0$, entonces la densidad conjunta de los correspondientes estadísticos ordenados generalizados es la densidad de la **distribución exponencial multivariante de Weinman**, es decir,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{v_{n-1}} \left( \prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j \right) \prod_{j=1}^{n-1} (1 - e^{-x})^{\frac{n-i+1}{v_{i-1}} - \frac{n-i}{v_i}} e^{-x_j} (1 - e^{-x_n})^{\frac{1}{v_{n-1}} - 1} e^{-x_n},$$

para todo $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ en el soporte de $X$, donde $\gamma_j = k + n - j + \frac{n-j+1}{v_{j-1}} - \frac{1}{v_{j-1}}$.

(e) Si $m_j = (n-j+1)p_j - (n-j)p_{j+1} - 1$ y $k = p_n$, obtenemos el modelo de **estadísticos ordenados bajo reparación imperfecta multivariante**. Consideremos la siguiente política de reparación mínima introducida por Shaked y Shanthikumar (1986). En el instante inicial $n$ items comienzan a funcionar. Bajo fallo, un item se repara. Si $i$ items ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) ya se han desechado, entonces, con probabilidad $p_{i+1}$, la reparación fracasa y el item también se deshecha y con probabilidad $1 - p_{i+1}$, la reparación funciona y es mínima.

Consideremos ahora $n$ items con tiempos de vida aleatorios i.i.d. $T_1, \ldots, T_n$ con la misma distribución $F$ y función de densidad $f$. Sean $(T_{(1)}, \ldots, T_{(n)})$ los tiempos de vida aleatorios ordenados que resultan de $T_1, \ldots, T_n$ bajo una política de reparación mínima como antes. Entonces la densidad conjunta multivariante de $(T_{(1)}, \ldots, T_{(n)})$ viene dada por

$$f(t_1, \ldots, t_n) = n! \prod_{j=1}^{n} p_j f(t_j) F(t_j)^{(n-j+1)p_j - (n-j)p_{j+1} - 1}, \text{ para todo } t_1 < \cdots < t_n,$$

en el soporte de $F$. Esta densidad es un caso particular de la densidad (1.11) con los parámetros ya mencionamos anteriormente.

Este modelo ha sido ampliamente estudiado en la literatura por diversos autores con el principal objetivo de ordenar valores de estadísticos ordenados generalizados en los distintos criterios de ordenación estocástica. En esta memoria se establecen diversos resultados en esta línea de investigación para los cuales serán de gran utilidad los siguientes resultados. En primer lugar, recordamos la siguiente representación del vector de estadísticos ordenados generalizados dada por Cramer y Kamps (2003).

**Teorema 1.1.26.** *Sea* $(X_{(1,n,\tilde{m},k)}, \ldots, X_{(n,n,\tilde{m},k)})$ *un vector de estadísticos ordenados generalizados basado en una función de distribución continua* $F$ *y sean* $B_1, \ldots, B_n$ *variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetros* $1/\gamma_1, \ldots, 1/\gamma_n$*, respectivamente, donde* $\gamma_n = k$*. Entonces*

$$(X_{(1,n,\tilde{m},k)}, X_{(2,n,\tilde{m},k)}, \ldots, X_{(n,n,\tilde{m},k)}) =_{st} \left( H_F(B_1), H_F(B_1 + B_2), \ldots, H_F\left(\sum_{i=1}^{n} B_i\right)\right),$$

*donde* $H_F(x) = F^{-1}(1 - \exp(-x))$ *para algún* $x \in \mathbb{R}_+$*.*

En segundo lugar, Hu y Zhuang (2005b) demostraron que el vector de estadísticos ordenados generalizados tiene la siguiente propiedad.

**Lema 1.1.27.** *Sean* $l, n \in \mathbb{N}$*,* $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{\text{máx}\{l,n\}-1} \in \mathbb{R}$ *y* $m_i \geq -1$ *para todo* $i$*. Sea* $X_{(i,j,\tilde{m}_j,k)}$ *el* $i$*-ésimo estadístico generalizado basado en una función de distribución continua* $F$*, donde* $j = n$ *ó* $l$*. Si* $s \geq r \in \mathbb{N}$ *y* $s - r \geq l - n$ *entonces*

$$\frac{\overline{F}_{*',s}(t)}{\overline{F}_{*,r}(t)} \text{ es creciente en } t,$$

*para todo* $t$ *tales que* $\overline{F}_{*,r}(t) > 0$*, donde* $\overline{F}_{*,r}$ *y* $\overline{F}_{*',s}$ *denotan las funciones de supervivencias de* $X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}$ *y* $X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}$*, respectivamente.*

## 1.2. Criterios de comparación estocástica

Como ya dijimos en la introducción, el objetivo de la teoría de ordenaciones estocástica es la comparación de variables aleatorias para poder identificar cuál es mayor según ciertos criterios. Estos criterios están basados en la comparación de las funciones asociadas a las variables aleatorias que hemos definido en la sección anterior. El campo de aplicación de estas funciones determina el contexto donde estos criterios tienen mayor interés. La referencia básica en el estudio de la ordenación de distribuciones es el libro de Shaked y Shanthikumar (2007). La gran mayoría de los resultados y definiciones que se dan a lo largo de esta sección están recogidas en este libro, indicándose expresamente las referencias en otro caso.

### 1.2.1. El orden estocástico

El criterio más conocido es el orden estocástico. Este es el criterio más intuitivo en fiabilidad y supervivencia, ya que compara las probabilidades de que dos mecanismos o individuos sigan funcionando después de $x$ unidades de tiempo, siendo la mayor la que tiene mayor función de supervivencia en toda la recta real.

**Definición 1.2.1.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución $F$ y $G$, respectivamente. Se dice que $X$ es menor que $Y$ en el* ***orden estocástico****, denotándolo por $X \leq_{\text{st}} Y$, si se verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes:*

*i)* $\overline{F}(x) \leq \overline{G}(x)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

*ii)* $F(x) \geq G(x)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

*iii)* $F^{-1}(p) \leq G^{-1}(p)$, *para todo* $p \in (0,1)$.

De manera indistinta usaremos el subíndice de la desigualdad para referirnos al orden, por ejemplo hablaremos del orden estocástico o del orden st. Este comentario se aplica al resto de órdenes considerados en esta memoria. Este orden se puede caracterizar a partir de la Definición 1.2.1 en términos de las variables aleatorias $\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}$ y $\text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}$. El siguiente resultado no se encuentra en la literatura.

**Teorema 1.2.2.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente. Entonces $X \leq_{\text{st}} Y$ sí, y sólo sí,*

$$\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\} \leq \text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}, \text{ para todo } p \in (0,1).$$

**Demostración:**

Para la prueba basta tener en cuenta el apartado iii) de la Definición 1.2.1 y que la función cuantil de la variable $\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}$, denotada por $F_p^{-1}(q)$, viene dada por

$$F_p^{-1}(q) = \begin{cases} F^{-1}(q) & \text{si } 0 < q < p, \\ F^{-1}(p) & \text{si } p \leq q < 1. \end{cases} \tag{1.13}$$

■

Una de las caracterizaciones más conocidas de este criterio es la ordenación de las medias de todas las transformaciones crecientes de las variables aleatorias. De hecho, podemos encontrar en la literatura autores que utilizan esta caracterización para definir este orden.

**Teorema 1.2.3.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias. Entonces $X \leq_{\text{st}} Y$ sí, y sólo sí,*

$$E(\phi(X)) \leq E(\phi(Y)),$$

*para toda función $\phi$ creciente para la cual existan las esperanzas anteriores.*

**Observación 1.2.4.** *En particular, tomando la identidad como función creciente en este teorema, se tiene que*

$$X \leq_{\text{st}} Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y). \tag{1.14}$$

*Por lo que este criterio compara la localización de las variables.*

En general, dadas dos variables aleatorias, éstas no tienen porque estar ordenadas en el orden estocástico, por lo que resulta una ordenación parcial. Este comentario se aplica al resto de órdenes que consideraremos a lo largo de la memoria. Como ejemplo de variables que no están ordenadas en el orden estocástico tenemos el caso de la familia Weibull, donde no se verifica el orden estocástico, salvo que los parámetros de forma sean iguales. En concreto se tiene el siguiente resultado (ver Lisek, 1978).

**Proposición 1.2.5.** *Sean $X \sim W(\alpha_1, \beta_1)$ e $Y \sim W(\alpha_2, \beta_2)$ con $\beta_1 \neq \beta_2$. Entonces no se verifica $X \leq_{\rm st} Y$ ni $X \geq_{\rm st} Y$.*

A pesar de la simplicidad de la definición del orden estocástico, en muchas ocasiones no resulta sencillo verificarlo. La razón es que para muchas variables aleatorias no se conoce una expresión explícita para la función de distribución, por lo que obviamente tampoco para la función de supervivencia. Recordamos a continuación una condición suficiente para este criterio en términos de las funciones de densidad de las variables aleatorias. Para presentar este resultado tenemos que definir previamente los cambios de signo de una función.

**Definición 1.2.6.** *Definimos el número de cambios de signo de una función real de variable real $f$ en $I \subseteq \mathbb{R}$ como*

$$S^-(f) = \sup\{S^-[f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m)]\}$$

*donde $S^-[y_1, y_2, \ldots, y_m]$ es el número de cambios de signo en dicha secuencia y el supremo se toma sobre todos los posibles conjuntos de puntos ordenados de $I$, $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Veamos entonces una condición suficiente para el orden estocástico en términos de las funciones de densidad de las variables.

**Teorema 1.2.7.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de densidad $f$ y $g$, respectivamente. Si*

$$S^-(g - f) = 1 \text{ con la secuencia } -, +,$$

*entonces $X \leq_{\rm st} Y$.*

Karlin (1968) generalizó este teorema al caso en el que el número de cambios de signo de la diferencia $g - f$ es mayor que uno. Recordamos previamente el concepto de función totalmente positiva.

**Definición 1.2.8.** *Sea una función $K : A \times B \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Se dice que $K$ es totalmente positiva de orden $r$, denotado por $TP_r$, si para todo $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$, $y_1 < y_2 < \cdots < y_m$, donde $x_i \in A$, $y_i \in B$, $1 \leq m \leq r$, se tiene que*

$$\begin{vmatrix} K(x_1, y_1) & K(x_1, y_2) & \cdots & K(x_1, y_m) \\ K(x_2, y_1) & K(x_2, y_2) & \cdots & K(x_2, y_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K(x_m, y_1) & K(x_m, y_2) & \cdots & K(x_m, y_m) \end{vmatrix} \geq 0. \tag{1.15}$$

Podemos establecer ahora el siguiente teorema.

**Teorema 1.2.9.** *Sean $K : A \times B \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ una función $TP_r$, $f$ una función acotada y medible Borel sobre $B$ y consideremos la transformación*

$$g(x) = \int_B K(x,y)f(y)dy.$$

*Si $\int_B K(x,y)dy$ existe para todo $x \in A$ y $S^-(f) \leq r-1$, entonces $S^-(g) \leq S^-(f)$.*

El Teorema 1.2.7 se sigue como un caso particular de éste tomando $f(y)$ como la diferencia de las densidades (por lo que está acotada) y $K(x,y) = 1$, para todo $y > x$ y cero en otro caso. En la literatura existen caracterizaciones de distintas propiedades en términos de los cambios de signo. Por ejemplo, se puede caracterizar la propiedad de que una función tenga un único máximo en términos de los cambios de signo.

**Teorema 1.2.10.** *Sean $f$ y $g$ dos funciones tales que $\{x|f(x) > 0\} \subseteq \{x|g(x) > 0\}$. El cociente $f(x)/g(x)$ tiene un único extremo relativo, siendo éste un máximo, sí, y sólo sí, para todo $c > 0$*

$$S^-(cf(\cdot) - g(\cdot)) \leq 2 \text{ en } \{x|g(x) > 0\},$$

*con la secuencia de signos $-, +, -$ cuando se da la igualdad.*

Veamos a continuación una aplicación del Teorema 1.2.7 para ordenar estocásticamente dos variables aleatorias pertenecientes a la familia gamma generalizada.

**Proposición 1.2.11.** *Sean $X \sim GG(\alpha_1, \beta_1, p_1)$ e $Y \sim GG(\alpha_2, \beta_2, p_2)$. Si se verifican las siguientes desigualdades:*

*(i)* $\alpha_1 \geq \alpha_2$,

*(ii)* $\alpha_1 p_1 \leq \alpha_2 p_2$,

*(iii)* $\alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 \geq m^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}} \left[ \frac{\alpha_1}{\beta_1^{\alpha_1}} - m^{-1} \frac{\alpha_2}{\beta_2^{\alpha_2}} \right]$,

*donde $m = \alpha_2^2 \beta_1^{\alpha_1} / \alpha_1^2 \beta_2^{\alpha_2}$, entonces $X \leq_{\mathrm{st}} Y$.*

**Demostración:**

Estudiar los cambios de signo de $g(x) - f(x)$ equivale a estudiar los cambios de $h(x) = \log g(x) - \log f(x)$, por lo tanto estudiaremos los cambios de signo de

$$h(x) = \log K + (\alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2) \log x - \left( \frac{x}{\beta_1} \right)^{\alpha_1} + \left( \frac{x}{\beta_2} \right)^{\alpha_2},$$

donde $K$ es constante. Encontrar los cambios de signo de $h(x)$ no resulta sencillo directamente, por ello estudiamos el comportamiento de esta función. Derivamos $h(x)$ y multiplicamos por $x$, lo cuál no afecta al signo de la expresión ya que el soporte de las variables es $(0, \infty)$, y se tiene que

$$xh'(x) = (\alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2) - \alpha_1 \left( \frac{x}{\beta_1} \right)^{\alpha_1} + \alpha_2 \left( \frac{x}{\beta_2} \right)^{\alpha_2}.$$

Para ver los ceros de esta función estudiamos de nuevo su derivada

$$(xh'(x))' = -\frac{\alpha_1^2}{\beta_1^{\alpha_1}}x^{\alpha_1-1} + \frac{\alpha_2^2}{\beta_2^{\alpha_2}}x^{\alpha_2-1}.$$

Es fácil ver que esta función sólo se anula en el punto $x_0 = (\alpha_2^2\beta_1^{\alpha_1}/\alpha_1^2\beta_2^{\alpha_2})^{1/(\alpha_1-\alpha_2)}$, siendo la secuencia de signos $+, -$, ya que $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Por lo tanto $xh'(x)$ tiene un máximo y, combinando las hipótesis (i), (ii) y (iii) tenemos que $xh'(x)$ toma valores negativos en todo el intervalo.

En resumen, hemos probado que

$$h'(x) \leq 0, \text{ para todo } x \geq 0,$$

o equivalentemente $h(x)$ es decreciente en todo el soporte. Bajo las condiciones (i), (ii) y (iii), esta función empieza tomando valores positivos y termina tomando valores negativos, por lo tanto tiene un cambio de signo con la secuencia de signos $+, -$. Aplicando el Teorema 1.2.7 tenemos que $X \leq_{\text{st}} Y$.

■

### 1.2.2. El orden creciente convexo y creciente cóncavo

Como vimos en el Teorema 1.2.3, el orden estocástico se caracteriza por la ordenación de las medias de todas las transformaciones crecientes de las variables. Para definir un nuevo criterio se restringe ese conjunto al de todas las transformaciones crecientes y convexas, o bien al de las transformaciones crecientes y cóncavas. Recordamos las definiciones de dichos órdenes.

**Definición 1.2.12.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias. Se dice que $X$ es menor o igual que $Y$ en el **orden creciente convexo** [**orden creciente cóncavo**], denotándolo por $X \leq_{\text{icx[icv]}} Y$, si*

$$E(\phi(X)) \leq E(\phi(Y)),$$

*para toda función $\phi$ creciente y convexa [creciente y cóncava] para la que existan las esperanzas anteriores.*

El orden creciente convexo [creciente cóncavo] implica la ordenación de las medias en el sentido $E(X) \leq E(Y)$, ya que la identidad es una función creciente y convexa (creciente y cóncava). A partir de la siguiente caracterización se puede interpretar fácilmente este criterio en el contexto de riesgos.

**Teorema 1.2.13.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución $F$ y $G$ y funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente.*

- *Tenemos que $X \leq_{\text{icx}} Y$ sí, y sólo sí,*

$$\pi_X(x) \leq \pi_Y(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

*o equivalentemente, si se cumple*

$$TVaR_X(p) \leq TVaR_Y(p), \text{ para todo } p \in (0,1).$$

- *Tenemos que $X \leq_{\text{icv}} Y$ sí, y sólo sí,*

$$\int_{-\infty}^{x} F(t)dt \geq \int_{-\infty}^{x} G(t)dt, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

*o equivalentemente, si se cumple*

$$\int_{0}^{p} F^{-1}(u)du \leq \int_{0}^{p} G^{-1}(u)du, \text{ para todo } p \in (0,1).$$

Por lo que el orden creciente convexo tiene una clara aplicación en teoría de riesgos a partir de la interpretación de las funciones stop-loss y $TVaR_X$. El orden creciente convexo y el orden creciente cóncavo están relacionados, puesto que $\phi(x)$ es creciente y convexa (creciente y cóncava) sí, y sólo sí, $-\phi(-x)$ es creciente y cóncava (creciente y convexa). En concreto se tiene que

$$X \leq_{\text{icx}} Y \Leftrightarrow -X \geq_{\text{icv}} -Y. \tag{1.16}$$

De forma trivial tenemos que la relación del orden creciente convexo (creciente y cóncavo) con el estocástico es la siguiente

$$X \leq_{\text{st}} Y \Rightarrow X \leq_{\text{icx}} [\leq_{\text{icv}}]Y. \tag{1.17}$$

Recordamos a continuación una condición suficiente para los órdenes creciente convexo y creciente cóncavo en términos de cambios de signo.

**Teorema 1.2.14.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución $F$ y $G$ y funciones de densidad $f$ y $g$, respectivamente y con medias finitas tales que $E(X) \leq E(Y)$. Entonces $X \leq_{\text{icx}} Y$ $[X \leq_{\text{icv}} Y]$ si se da alguna de las condiciones siguientes:*

*(i)* $S^-(G-F) \leq 1$ *con la secuencia de signos* $+,-\,[-,+]$, *cuando se da la igualdad .*

*(ii)* $S^-(\overline{G}-\overline{F}) \leq 1$ *con la secuencia de signos* $-,+\,[+,-]$, *cuando se da la igualdad .*

*(iii)* $S^-(g-f) \leq 2$ *con la secuencia de signos* $+,-,+\,[-,+,-]$, *cuando se da la igualdad.*

*Siendo (i) y (ii) equivalentes.*

El conjunto de condiciones (i) del teorema se conoce como las condiciones de Karlin-Novikov. La familia Weibull es un ejemplo donde se aplica este resultado (ver Lisek, 1978). Este comentario será recordado en el Capítulo 2.

Hurlimann (1998) estableció una generalización del teorema anterior para el orden creciente convexo, suponiendo que el número de puntos de corte es mayor o igual que uno.

**Teorema 1.2.15.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de supervivencia $\overline{F}$ y $\overline{G}$, respectivamente y medias finitas. Supongamos que $\overline{F}$ y $\overline{G}$ tienen $n \geq 1$ puntos de cortes en los puntos $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Entonces $X \leq_{\text{icx}} Y$ sí, y sólo sí, se satisface uno de los siguientes conjuntos de condiciones:*

*(i) El número de puntos de corte es par, $n = 2m$, siendo el primer cambio de signo de $+$ a $-$ y se cumple, para $j = 1, \ldots, m$, la siguiente desigualdad*

$$\pi_X(t_{2j-1}) \leq \pi_Y(t_{2j-1}).$$

*(ii) El número de puntos de corte es impar, $n = 2m + 1$, siendo el primer cambio de signo de $-$ a $+$, los extremos inferiores de los soportes son finitos, se cumple, para $j = 1, \ldots, m$, la siguiente desigualdad*

$$\pi_X(t_{2j}) \leq \pi_Y(t_{2j})$$

*y además $E(X) \leq E(Y)$.*

A lo largo de la prueba, Hurlimann (1998) asume que el conjunto de condiciones (i) del teorema anterior es equivalente al siguiente conjunto:

$$\begin{cases} \pi_X(t_{2j-1}) - \pi_Y(t_{2j-1}) \leq \pi_X(t_{2j+1}) - \pi_Y(t_{2j+1}) & j = 1, .., m-1, \\ \pi_X(t_{2m-1}) \leq \pi_Y(t_{2m-1}). \end{cases}$$

Sin embargo, esta equivalencia no es cierta como muestra el siguiente contraejemplo.

**Ejemplo 1.2.16.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de supervivencia $\overline{F}$ y $\overline{G}$, respectivamente, definidas como sigue*

$$\overline{F}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < 0, \\ 0.9 & si\ 0 \leq x \leq 0.6, \\ 4.5 - 6x & si\ 0.6 \leq x \leq 2/3, \\ 0.5 & si\ 2/3 \leq x \leq 1.1, \\ 6 - 5x & si\ 1.1 \leq x \leq 1.2, \\ 0 & si\ x \geq 1.2, \end{cases}$$

*y*

$$\overline{G}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < 0, \\ 1 - \frac{x}{2} & si\ 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & si\ x \geq 2. \end{cases}$$

*Es fácil ver que $\overline{F}$ y $\overline{G}$ tienen cuatro puntos de corte en $t_1 = 0.2$, $t_2 = 0.6\hat{3}$, $t_3 = 1$ y $t_4 = 1.\hat{1}$, siendo el primer cambio de signo de $+$ a $-$ (ver Figura 1.1). Definimos ahora la función $h(t) = \int_t^{\infty}(\overline{G}(x) - \overline{F}(x))dx$. Como se puede ver en la Figura 1.1, se tiene que $h(t_1) \leq h(t_3)$, por lo que no se verifica la equivalencia anterior.*

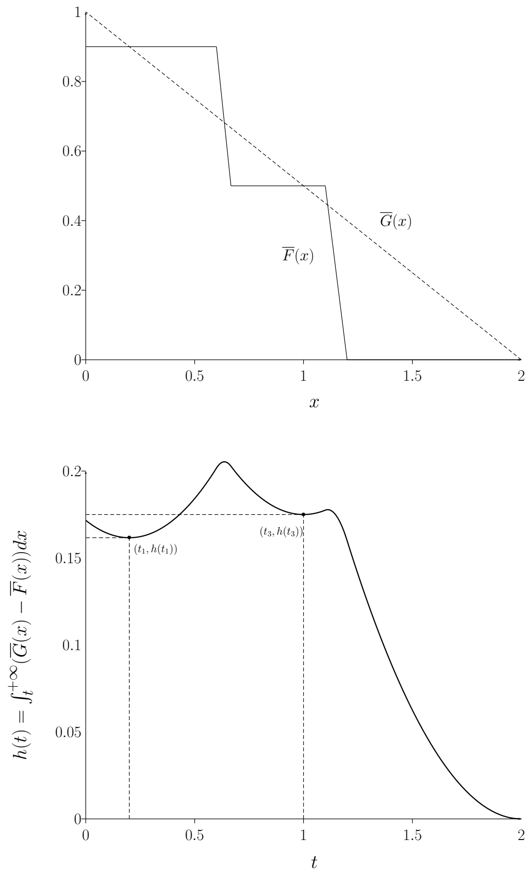



Figura 1.1: *Gráficas de las funciones de supervivencia $\overline{G}$ y $\overline{F}$ (arriba) y de la función $h(t)$ (abajo) para las variables $X$ e $Y$ dadas en el Ejemplo 1.2.16.*

El argumento dado por Hurlimann para la prueba del caso (ii) contiene una errata análoga. A continuación proporcionamos una prueba válida para el teorema así como varios comentarios al respecto.

**Prueba del Teorema 1.2.15**.

**Demostración:**

Consideramos la función $h(t)$ como en el ejemplo anterior,

$$h(t) = \pi_Y(t) - \pi_X(t) = \int_t^{\infty} (\overline{G}(x) - \overline{F}(x))dx.$$

A partir del apartado (i) del Teorema 1.2.13, se tiene que $X \leq_{\text{icx}} Y$ sí, y sólo sí, $h(t) \geq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Tenemos que probar que bajo los conjuntos de condiciones (i) y (ii) se verifica $h(t) \geq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

De forma trivial se tiene que el comportamiento de esta función es el siguiente: $h(t)$ es creciente en los tramos donde la diferencia de las funciones de supervivencia $\overline{G}(x) - \overline{F}(x)$

es negativa y es decreciente donde la diferencia es positiva. Por lo tanto será suficiente que la función $h(t)$ sea positiva en los puntos mínimos para demostrar que es positiva. Los puntos mínimos de $h(t)$ son los puntos de cambio de signo de $\overline{G}(x)-\overline{F}(x)$ con la secuencia $+,-$, los cuáles variarán de acuerdo con la distinción hecha en los apartados (i) y (ii) del enunciado. Observar que bajo ambos supuestos la diferencia $\overline{G}(x)-\overline{F}(x)$ termina negativa, es decir, $h(t)$ termina creciendo y por lo tanto $h(t) \geq 0$ para todo $t \in (t_n, \infty)$, puesto que en ambos casos $t_n$ es un mínimo. Por otro lado, en el caso en el que $\overline{G}(x)-\overline{F}(x)$ empieza negativa, $h(t)$ empieza creciendo y por lo tanto necesitamos la hipótesis adicional de que $\lim_{t\to \min\{l_X,l_Y\}} h(t) \geq 0$, o equivalentemente, $E(X) \leq E(Y)$. El inverso es trivial ya que si se verifica el orden en todos los puntos de manera obvia se verifica en un subconjunto de puntos. ■

Análogamente se puede sustituir la condición de los puntos de corte de las funciones de supervivencia en el teorema anterior por la equivalente en términos de las funciones cuantiles. Esta caracterización será de utilidad cuando se disponga de expresión explícita para las funciones cuantiles pero no para las funciones de distribución.

**Teorema 1.2.17.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas. Supongamos que las funciones cuantiles tienen $n \geq 1$ puntos de corte en los puntos $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$. Entonces $X \leq_{\text{icx}} Y$ sí, y sólo sí, se da uno de los conjuntos de condiciones siguientes:*

*(i) El número de puntos de corte es par, $n = 2m$, siendo el primer cambio de signo de $+$ a $-$ y se cumple, para $j = 1, \ldots, m$, la siguiente desigualdad*

$$TVaR[X; p_{2j-1}] \leq TVaR[Y; p_{2j-1}].$$

*(ii) El número de puntos de corte es impar, $n = 2m + 1$, siendo el primer cambio de signo de $-$ a $+$, se cumple, para $j = 1, \ldots, m$, la siguiente desigualdad*

$$TVaR[X; p_{2j}] \leq TVaR[Y, p_{2j}]$$

*y además $E(X) \leq E(Y)$.*

Para aquellas situaciones en las que no se dispone de expresión explícita ni para las funciones de distribución ni para las funciones cuantiles, a partir del Teorema 1.2.8 podemos establecer el siguiente resultado en términos de los puntos de corte de las funciones de densidad de las variables. En este caso, se puede dar una condición suficiente.

**Teorema 1.2.18.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de densidad $f$ y $g$, respectivamente y medias finitas. Supongamos que las funciones de densidad se cortan $n \geq 1$ veces en los puntos $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Supongamos que se cumple alguno de los conjuntos de condiciones siguientes:*

*(i) El número de puntos de corte es impar, $n = 2m + 1$, siendo el primer cambio de signo de $-$ a $+$ y se cumple, para $j = 1, \ldots, m$, la siguiente desigualdad*

$$\pi_X(t_{2j-1}) \leq \pi_Y(t_{2j-1}).$$

*(ii) El número de puntos de corte es par, $n = 2m$, siendo el primer cambio de signo de $+$ a $-$, los extremos inferiores de los soportes son finitos, se cumple, para $j = 1, \ldots, m$, la siguiente desigualdad*

$$\pi_X(t_{2j}) \leq \pi_Y(t_{2j}],$$

*y además $E(X) \leq E(Y)$.*

*Entonces $X \leq_{\mathrm{icx}} Y$.*

### 1.2.3. Ordenación de tiempos de vida residuales

Como dijimos en la Sección 1.1, existen funciones que miden la vida residual de las variables a partir de un instante de tiempo $t$ y, a partir de estas funciones, se definen distintos criterios de ordenación estocástica. A partir de la función razón de fallo se tiene el orden razón de fallo aunque este criterio no se define directamente a partir de dichas funciones ya que no estaría definido para aquellas variables que no son absolutamente continuas.

**Definición 1.2.19.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de supervivencia $\overline{F}$ y $\overline{G}$, respectivamente. Se dice que $X$ es menor que $Y$ en el **orden razón de fallo**, denotándolo por $X \leq_{\mathrm{hr}} Y$, si*

$$\frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} \text{ es creciente en } x \in (-\infty, \max(u_X, u_Y)),$$

*donde $a/0$ se toma por convenio igual a $\infty$ siempre que $a > 0$.*

La Definición 1.2.19 se puede reescribir en términos de las funciones razón de fallo de las variables aleatorias cuando sus funciones de distribución son absolutamente continuas, proporcionando una interpretación de este orden en este caso.

**Teorema 1.2.20.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones razón de fallo $r$ y $s$, respectivamente. Entonces $X \leq_{\mathrm{hr}} Y$ sí, y sólo sí,*

$$r(x) \geq s(x), \text{ para todo } x \text{ tal que } \overline{F}(x), \overline{G}(x) > 0.$$

La interpretación de este criterio no resulta obvia a partir de la definición cuando las variables no son absolutamente continuas. La siguiente caracterización en cambio resulta interesante desde este punto de vista, ya que proporciona una interpretación del orden sea cual sea la naturaleza de las variables aleatorias.

**Teorema 1.2.21.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de supervivencia $\overline{F}$ y $\overline{G}$, respectivamente. Entonces $X \leq_{\mathrm{hr}} Y$ sí, y sólo sí,*

$$\{X - x \mid X > x\} \leq_{st} \{Y - x \mid Y > x\}, \text{ para todo } x \text{ tal que } \overline{F}(x), \overline{G}(x) > 0.$$

Por lo que si dos variables aleatorias están ordenadas en el orden hr, en el contexto de fiabilidad y supervivencia, se interpretará de forma obvia que todas las vidas residuales de las variables están ordenadas estocásticamente. En particular, se tiene que el orden hr es más fuerte que el orden st, es decir,

$$X \leq_{\mathrm{hr}} Y \Rightarrow X \leq_{\mathrm{st}} Y. \tag{1.18}$$

Este orden también se puede verificar gráficamente. Para presentar este resultado son necesarias algunas definiciones previas.

**Definición 1.2.22.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de supervivencia continuas $\overline{F}$ y $\overline{G}$, respectivamente. El gráfico formado por todos los puntos de la forma $\left(\overline{F}(x), \overline{G}(x)\right)$ se conoce como el gráfico $\overline{P} - \overline{P}$. El epígrafo de este gráfico es el conjunto formado por todos los puntos de la forma $\left\{(\overline{F}(x), y) \mid y \geq \overline{G}(x)\right\}$. Análogamente, se define el hipografo como el conjunto $\left\{(\overline{F}(x), y) \mid y \leq \overline{G}(x)\right\}$.*

**Definición 1.2.23.** *Un subconjunto $A$ de un espacio Euclídeo se dice estrellado respecto a un punto $s \in A$ si para todo $x \in A$ se tiene $tx + (1-t)s \in A$, para todo $t \in (0,1)$, es decir, $A$ contiene el segmento que une $s$ con $x$. Una función $f$ se dice estrellada respecto a un punto $(a,b)$ si su epígrafo es estrellado respecto a $(a,b)$. Análogamente, una función se dice anti-estrellada respecto a $(a,b)$ si su hipografo es estrellado respecto a $(a,b)$.*

Müller y Stoyan (2002) a partir de esta propiedad presentaron una caracterización del orden hr en términos del gráfico $\overline{P} - \overline{P}$, proporcionando así una manera de verificar el orden gráficamente. En concreto se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 1.2.24.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de supervivencia $\overline{F}$ y $\overline{G}$, respectivamente. Entonces $X \leq_{\mathrm{hr}} Y$ sí, y sólo sí, el gráfico $\overline{P} - \overline{P}$ es estrellado respecto al origen.*

Análogamente al orden hr se define el orden razón de fallo inverso, considerando el cociente de las funciones de distribución en lugar de las de supervivencia.

**Definición 1.2.25.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución $F$ y $G$, respectivamente. Se dice que $X$ es menor que $Y$ en el* ***orden razón de fallo inverso****, denotándolo por $X \leq_{\mathrm{rhr}} Y$, si*

$$\frac{G(x)}{F(x)} \text{ es creciente en } x \in (\min(l_X, l_Y), \infty).$$

La Definición 1.2.25 se puede reescribir en términos de las funciones razón de fallo inversas de las variables aleatorias cuando sus funciones de distribución son absolutamente continuas, proporcionando una interpretación de este orden en este caso.

**Teorema 1.2.26.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones razón de fallo inversas $\tilde{r}$ y $\tilde{s}$, respectivamente. Entonces $X \leq_{\mathrm{rhr}} Y$ sí, y sólo sí,*

$$\tilde{r}(x) \leq \tilde{s}(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } F(x), G(x) > 0.$$

De forma análoga al orden hr se establece el siguiente resultado.

**Teorema 1.2.27.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución $F$ y $G$, respectivamente. Entonces $X \leq_{\text{rhr}} Y$ sí, y sólo sí,*

$$\{x - X \mid X \leq x\} \geq_{st} \{x - Y \mid Y \leq x\}, \text{ para todo } x \text{ tal que } F(x), G(x) > 0.$$

Por lo que si dos variables aleatorias están ordenadas en el orden rhr, en el contexto de la fiabilidad y supervivencia se interpretará de forma obvia que los tiempos de inactividad están ordenados estocásticamente. En particular, se tiene que el orden rhr es más fuerte que el orden st, es decir,

$$X \leq_{\text{rhr}} Y \Rightarrow X \leq_{\text{st}} Y.$$

Otra forma de verificar el orden rhr es a través del gráfico $P - P$. Este gráfico se define de forma análoga al gráfico $\overline{P} - \overline{P}$, sustituyendo las funciones de supervivencia por las de distribución.

**Definición 1.2.28.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución $F$ y $G$, respectivamente. El gráfico formado por todos los puntos de la forma $(F(x), G(x))$ se conoce como el gráfico $P - P$.*

A continuación recordamos el resultado que permite verificar el orden gráficamente.

**Teorema 1.2.29.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución $F$ y $G$, respectivamente. Entonces $X \leq_{\text{rhr}} Y$, sí, y sólo sí, el gráfico $P - P$ es estrellado respecto al origen.*

En muchos casos el orden hr no se verifica en ningún sentido (ver ejemplos en el Capítulo 2); a pesar de ello es posible seguir comparando dos variables aleatorias en términos de sus vidas residuales a través de otros criterios de comparación más débiles, como por ejemplo el orden vida media residual. Este criterio compara dos variables aleatorias en términos de sus vidas medias residuales.

**Definición 1.2.30.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de supervivencia $\overline{F}$ y $\overline{G}$, respectivamente. Se dice que $X$ es menor que $Y$ en el* ***orden vida media residual****, denotándolo por $X \leq_{\text{mrl}} Y$, sí, y sólo sí, se da una de las siguientes condiciones equivalentes:*

*(i)* $\frac{\int_x^{+\infty} \overline{G}(t)dt}{\int_x^{+\infty} \overline{F}(t)dt}$ *es creciente en $x$ tal que* $\int_x^{+\infty} \overline{F}(t)dt > 0$.

*(ii)* $E(X - x \mid X > x) \leq E(Y - x \mid Y > x)$, *para todo $x$ tal que* $\overline{F}(x), \overline{G}(x) > 0$.

Trivialmente a partir del Teorema 1.2.21 y (1.14) tenemos que el orden hr es más fuerte que el mrl, es decir,

$$X \leq_{\text{hr}} Y \Rightarrow X \leq_{\text{mrl}} Y. \tag{1.19}$$

En el Capítulo 2 veremos que efectivamente hay situaciones en las que no se verifica el orden hr pero sí se da el orden mrl, siendo uno de los objetivos de esta memoria el estudio de este tipo de situaciones.

De forma análoga al orden mrl, se define el orden tiempo medio de inactividad.

**Definición 1.2.31.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución continuas $F$ y $G$, respectivamente. Se dice que $X$ es menor o igual que $Y$ en el orden* ***tiempo media de inactividad****, denotándolo por $X \leq_{\text{mit}} Y$, si*

$$E(x - X|X \leq x) \geq E(x - Y|Y \leq x), \text{ para todo } x \text{ tal que } F(x), G(x) > 0.$$

Por lo que la interpretación en fiabilidad y supervivencia de este criterio es obvia a partir de la definición: si se verifica el orden mit los tiempos medio de inactividad de las variables están ordenados. Para ver con más detalle la definición y propiedades de este criterio se puede consultar Kayid y Ahmad (2004), Ahmad y Kayid (2005) y Ahmad, Kayid y Pellerey (2005). Este criterio está relacionado con el orden rhr, de manera análoga a la relación que existe entre el orden hr y el mrl.

En particular, se tiene que el orden rhr es más fuerte que el orden mit, es decir,

$$X \leq_{\text{rhr}} Y \Rightarrow X \leq_{\text{mit}} Y. \tag{1.20}$$

### 1.2.4. El orden cociente de verosimilitudes

Los criterios anteriores que comparan las vidas residuales de las variables están definidos en términos de las funciones de distribución o supervivencia cuando no disponemos de expresión analítica para la función de distribución (ni para la de supervivencia), el orden que se define a continuación permite establecer una condición suficiente para estos criterios.

**Definición 1.2.32.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de densidad o funciones puntuales de probabilidad $f$ y $g$, respectivamente. Se dice que $X$ es menor o igual que $Y$ en el* ***orden cociente verosimilitudes****, denotándolo por $X \leq_{\text{lr}} Y$, sí, y sólo sí,*

$$\frac{g(x)}{f(x)} \text{ es creciente en } x \in S_X \cup S_Y.$$

Como resumen de las relaciones entre los órdenes vistos hasta este momento, tenemos las siguientes implicaciones

$$\begin{array}{ccccc} X \leq_{\text{lr}} Y & \Rightarrow & X \leq_{\text{hr}} Y & \Rightarrow & X \leq_{\text{mrl}} Y \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ X \leq_{\text{rhr}} Y & \Rightarrow & X \leq_{\text{st}} Y & \Rightarrow & X \leq_{\text{icx}} Y \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ X \leq_{\text{mit}} Y & \Rightarrow & X \leq_{\text{icv}} Y & \Rightarrow & E(X) \leq E(Y). \end{array} \tag{1.21}$$

Por lo que podremos verificar el orden cociente verosimilitudes para comparar variables aleatorias en los criterios razón de fallo, razón de fallo inversa, vida media residual y tiempo medio de inactividad cuando no dispongamos de expresión explícita para la función de distribución de alguna de las variables.

### 1.2.5. Órdenes en dispersión

Dentro de la teoría de ordenaciones estocásticas existen distintos criterios para comparar variables aleatorias según su dispersión. En esta subsección se tratarán algunos de ellos, definiendo en primer lugar el más fuerte.

**Definición 1.2.33.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente. Se dice que $X$ es menor o igual que $Y$ en el* ***orden en dispersión****, denotándolo por $X \leq_{\text{disp}} Y$, sí, y sólo sí,*

$$G^{-1}(p) - F^{-1}(p) \text{ es creciente en } p \in (0,1).$$

Intuitivamente está claro que el orden en dispersión se corresponde con una comparación de las variables en términos de su variabilidad dado que comparamos intervalos donde $X$ e $Y$ acumulan la misma probabilidad $q - p$.

**Observación 1.2.34.** *A partir de la definición se sigue trivialmente que este orden es invariante por cambios de escala, es decir,*

$$X \leq_{\text{disp}} Y \Rightarrow X + c \leq_{\text{disp}} Y \ (X \leq_{\text{disp}} Y + c) \text{ para todo } c \in \mathbb{R}.$$

El orden en dispersión puede caracterizarse en términos de los cambios de signo de las funciones de distribución como recordamos a continuación.

**Teorema 1.2.35.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución $F$ y $G$, respectivamente. Entonces $X \leq_{\text{disp}} Y$, sí, y sólo sí,*

$$S^{-}(F(\cdot - c) - G(\cdot)) \leq 1, \text{ para todo } c \in (0, \infty)$$

*siendo la secuencia de signos $-, +$ en caso de igualdad.*

A partir de este resultado y del Teorema 1.2.9 se puede establecer una condición suficiente para el orden en dispersión en términos de las funciones de densidad de las variables.

**Teorema 1.2.36.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de densidad $f$ y $g$, respectivamente. Se cumple $X \leq_{\text{disp}} Y$, sí, y sólo sí,*

$$S^{-}(f(\cdot - c) - g(\cdot)) \leq 2, \text{ para todo } c \in (0, \infty)$$

*siendo la secuencia de signos $-, +, -$ en caso de igualdad.*

Además el orden en dispersión puede caracterizarse en términos del orden st, como vemos en el siguiente teorema.

**Teorema 1.2.37.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente. Entonces $X \leq_{\text{disp}} Y$, sí, y sólo sí,*

$$(X - F^{-1}(p))_{+} \leq_{\text{st}} (Y - G^{-1}(p))_{+}, \text{ para todo } p \in (0,1).$$

Cuando dos variables aleatorias no estén ordenadas en dispersión, existe la posibilidad de seguir comparándolas según su variabilidad mediante otros criterios más débiles. En concreto a partir de la Definición 1.1.7, un criterio más débil resulta de la comparación de las funciones excess wealth.

**Definición 1.2.38.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones excess wealth $W_X$ y $W_Y$, respectivamente. Se dice que $X$ es menor o igual que $Y$ en el* ***orden excess wealth****, denotándolo por $X \leq_{\text{ew}} Y$, sí, y sólo sí,*

$$W_X(p) \leq W_Y(p), \text{ para todo } p \in (0,1).$$

La siguiente caracterización será de interés a lo largo del Capítulo 4 de la memoria.

**Teorema 1.2.39.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente. Se cumple $X \leq_{\text{ew}} Y$ sí, y sólo sí,*

$$\int_p^1 \left(F^{-1}(q) - F^{-1}(p)\right) dq \leq \int_p^1 \left(G^{-1}(q) - G^{-1}(p)\right) dq, \text{ para todo } p \in (0,1)\,.$$

Tanto de este teorema, como de la combinación de la Definición 1.4 con el Teorema 1.2.37 y (1.1), se sigue que el orden en dispersión es más fuerte que el orden ew. Además es conocido que el orden ew es más fuerte que el orden creciente convexo si $l_X = l_Y$. En resumen tenemos la siguiente cadena de implicaciones

$$X \leq_{\text{disp}} Y \Rightarrow X \leq_{\text{ew}} Y \Rightarrow X \leq_{\text{icx}} Y. \tag{1.22}$$

Jewitt (1989) definió el orden dual del orden ew, el orden location independent riskier. Su definición surge de forma natural ya que habrá situaciones en las que sea de interés la comparación de las colas inferiores de las variables en lugar de las superiores. Por ejemplo, para aquellos inversores que prefieren evitar riesgos, el que las colas inferiores tengan mayor peso es una propiedad no deseable.

**Definición 1.2.40.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución $F$ y $G$, respectivamente. Se dice que $X$ es menor o igual que $Y$ en el* ***orden location independent riskier****, denotándolo por $X \leq_{\text{lir}} Y$, si*

$$\int_{-\infty}^{F^{-1}(p)} F(x)dx \leq \int_{-\infty}^{G^{-1}(p)} G(x)dx, \text{ para todo } p \in (0,1).$$

**Observación 1.2.41.** *De forma análoga al orden ew, se tiene que $X \leq_{\text{lir}} Y$ sí, y sólo sí,*

$$E((F^{-1}(p) - X)_+) \leq E((G^{-1}(p) - Y)_+), \text{ para todo } p \in (0,1).$$

Jewitt (1989) dio la siguiente caracterización del orden lir.

**Teorema 1.2.42.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias. Entonces $X \leq_{\text{lir}} Y$ sí, y sólo sí,*

$$E(F^{-1}(p) - X | X \leq F^{-1}(p)) \leq E(G^{-1}(p) - Y | Y \leq G^{-1}(p)), \text{ para todo } p \in (0,1).$$

La relación que existe entre el orden ew y su dual es la siguiente

$$X \leq_{\text{lir}} Y \Leftrightarrow -X \leq_{\text{ew}} -Y. \tag{1.23}$$

Existe otro criterio más débil para comparar variables aleatorias según su variabilidad cuando no se dan ninguno de los anteriores. Recordamos a continuación la definición del orden en dilatación.

**Definición 1.2.43.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con media finitas. Se dice que $X$ es menor o igual que $Y$ en el* ***orden en dilatación****, denotándolo por $X \leq_{\text{dil}} Y$, si*

$$D_X(p) \geq D_Y(p), \text{ para todo } p \in (0,1).$$

Trivialmente a partir de la Definición 1.1.10 el orden en dilatación se puede reescribir de las siguientes formas.

**Teorema 1.2.44.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con media finitas. Entonces $X \leq_{\text{dil}} Y$ sí, y sólo sí, se da alguna de las siguientes condiciones equivalentes:*

*(i)* $X - E(X) \leq_{\text{icx}} Y - E(Y)$.

*(ii)* $E(\phi(X - E(X))) \leq E(\phi(Y - E(Y)))$ *para toda función $\phi$ convexa para la que existan las esperanzas anteriores.*

A partir del teorema anterior, tomando $\phi(x) = x^2$ se tiene lo siguiente

$$X \leq_{\text{dil}} Y \Rightarrow Var(X) \leq Var(Y).$$

Dado que el orden ew es más fuerte que el orden en dilatación se puede establecer la siguiente cadena de implicaciones

$$X \leq_{\text{disp}} Y \Rightarrow X \leq_{\text{ew}} Y \Rightarrow X \leq_{\text{dil}} Y \Rightarrow Var(X) \leq Var(Y). \tag{1.24}$$

En muchas situaciones, como ocurría con el orden hr y el mrl, el orden ew (así como el orden en dilatación) no es fácil de verificar porque no se dispone de expresión explícita para las funciones excess wealth (o las curvas de dilatación). Una posibilidad es intentar verificar un criterio más fuerte como es el orden en dispersión; sin embargo, éste no se verifica en ningún sentido en muchos casos, es decir, $X \nleq_{\text{disp}} Y$ y $X \ngeq_{\text{disp}} Y$. En el Capítulo 4 de esta memoria se darán conjuntos de condiciones suficientes para estos órdenes bajo el supuesto adicional de que no se verifica el orden en dispersión.

### 1.2.6. Órdenes en concentración

Otro grupo importante de órdenes son aquellos que comparan las variables en términos de su concentración. En esta subsección se tratarán algunos de ellos, definiendo en primer lugar el más fuerte.

**Definición 1.2.45.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente. Se dice que $X$ es menor o igual que $Y$ en el* ***orden estrella****, denotándolo por $X \leq_\star Y$, sí, y sólo sí,*

$$G^{-1}(p)F^{-1}(q) \leq G^{-1}(q)F^{-1}(p), \text{ para todo } 0 < p < q < 1. \tag{1.25}$$

El nombre que recibe este criterio se debe a la equivalencia de la condición que aparece en la definición anterior con que la función $G^{-1}F(x)$ sea estrellada en $x$ respecto al $(0,0)$ (ver Definición 1.2.23).

A continuación recordamos una caracterización del orden en términos de los cambios de signo de las funciones de distribución de las variables.

**Teorema 1.2.46.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución $F$ y $G$, respectivamente. Se cumple $X \leq_\star Y$, sí, y sólo sí,*

$$S^-(F(\cdot) - G(c\cdot)) \leq 1, \text{ para todo } c \geq 0$$

*siendo la secuencia de cambios de signo $-,+$ en caso de igualdad.*

Cuando no se de el orden estrella podemos seguir comparando dos variables aleatorias según su concentración mediante otros criterios más débiles. Un primer criterio es el que se basa en la comparación de las funciones expected proportional shortfall.

**Definición 1.2.47.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas. Se dice que $X$ es menor o igual que $Y$ en el* ***orden expected proportional shortfall****, denotándolo por $X \leq_{\text{eps}} Y$, sí, y sólo sí,*

$$EPS_X(p) \leq EPS_Y(p), \text{ para todo } p \in (0,1) \text{ tal que } F^{-1}(p), G^{-1}(p) > 0.$$

A partir de (1.4) y (1.5) se tiene que la condición del orden eps es equivalente a la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{F^{-1}(p)} \int_{F^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}(x)dx \leq \frac{1}{G^{-1}(p)} \int_{G^{-1}(p)}^{\infty} \overline{G}(x)dx, \text{ para todo } p \in (0,1). \tag{1.26}$$

Belzunce et al. (2012) caracterizaron este criterio como sigue.

**Teorema 1.2.48.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente. Se verifica $X \leq_{\text{eps}} Y$, sí, y sólo sí,*

$$\frac{\int_q^1 F^{-1}(u)du}{F^{-1}(p)} \leq \frac{\int_q^1 G^{-1}(u)du}{G^{-1}(p)}, \text{ para todo } 0 < p < q < 1 \text{ tales que } F^{-1}(p), G^{-1}(p) > 0.$$

Incluso cuando el orden eps no se verifica en ningún sentido podemos seguir comparando dos variables aleatorias según su concentración en el siguiente criterio.

**Definición 1.2.49.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con medias finitas. Se dice que $X$ es menor o igual que $Y$ en el* ***orden Lorenz****, denotándolo por $X \leq_{\text{Lorenz}} Y$, si*

$$L_X(p) \geq L_Y(p) \text{ para todo } p \in [0,1]$$

Entre estos criterios existe la siguiente relación

$$X \leq_* Y \Rightarrow X \leq_{\text{eps}} Y \Rightarrow X \leq_{\text{L}} Y. \tag{1.27}$$

De forma análoga a lo comentado anteriormente para otros órdenes, el orden eps no es fácil de verificar cuando no se dispone de expresión explícita para las funciones expected proportional shortfall. Una posibilidad es verificar un criterio más fuerte, el orden estrella, sin embargo éste no se verifica en ningún sentido en muchos casos. En el Capítulo 4 de esta memoria también se darán conjuntos de condiciones suficientes para el orden eps bajo el supuesto adicional de que no se verifica el orden estrella.

### 1.2.7. El orden ttt

El orden total time on test transform (ttt) fue introducido por Kochar, Li y Shaked (2002) para comparar variables aleatorias no negativas a partir de las funciones TTT transformadas de dichas variables. A partir de la transformada $T_X(p)$, Hu, Wang y Zhuang (2012) definen el orden ttt para dos variables $X$ e $Y$ cualesquiera con medias finitas.

**Definición 1.2.50.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con medias finitas. Se dice que $X$ es menor o igual que $Y$ en el orden ttt, denotándolo por $X \leq_{\text{ttt}} Y$, si*

$$T_X(p) \leq T_Y(p), \text{ para todo } p \in (0,1).$$

Hu, Wang y Zhuang (2012) dieron también la siguiente caracterización del orden a la que haremos referencia más adelante.

**Teorema 1.2.51.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas. Entonces $X \leq_{\text{ttt}} Y$ sí, y sólo sí,*

$$\frac{1}{1-p}\int_0^p (G^{-1}(u) - F^{-1}(u))du \text{ es creciente en } p \in (0,1).$$

Una propiedad interesante de este criterio es la relación con el orden st, en concreto el orden st es más fuerte que el orden ttt, es decir,

$$X \leq_{\text{st}} Y \Rightarrow X \leq_{\text{ttt}} Y. \tag{1.28}$$

Hu, Wang y Zhuang (2012) definieron el orden dual ttt para variables aleatorias no necesariamente no negativas.

**Definición 1.2.52.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas. Se dice que $X$ es menor o igual que $Y$ en el* ***orden dual ttt****, denotándolo por $X \leq_{\mathrm{dttt}} Y$, si*

$$\frac{1}{p}\int_p^1 (G^{-1}(u) - F^{-1}(u))du \text{ es creciente en } p \in (0,1).$$

Entre el orden ttt y su dual existe la siguiente relación

$$X \leq_{\mathrm{dttt}} Y \Leftrightarrow -X \leq_{\mathrm{ttt}} -Y. \tag{1.29}$$

Estos criterios no tienen hasta ahora una interpretación clara. En el Capítulo 3 uno de los objetivos es dar una interpretación en los contextos de fiabilidad y riesgos. Otro objetivo del Capítulo 3 será dar condiciones suficientes para estos ordenes cuando el orden st no se verifica, ya que en muchas situaciones no existe expresión explícita para las transformaciones $T_X$ y $T_Y$ y no existen herramientas en la literatura para abordar el problema cuando no se verifica el orden st.

# Capítulo 2

# Condiciones suficientes para los órdenes mrl y mit

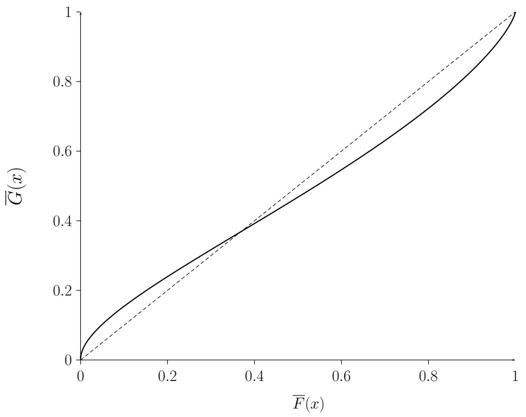
## 2.1. Introducción

Como vimos en el Capítulo 1, para poder verificar el orden mrl es necesario evaluar las funciones stop-loss de las variables, es decir, las integrales incompletas de las funciones de supervivencia. En muchas situaciones, estas integrales no tienen expresión explícita, por lo que a priori resulta complicado ordenarlas. Las distribuciones normal, gamma o Weibull son ejemplos de esta situación. A partir de (1.19), se tiene que el orden hr es una condición suficiente para el orden mrl, por lo que podemos intentar verificarlo a través del orden hr, que sólo requiere de las funciones de supervivencia. Sin embargo, podría darse que el orden hr no se verifique pero sí se verifique el orden mrl. A continuación vamos a ver dos ejemplos donde parece darse esa situación. El primer ejemplo es teórico y el segundo parte de dos muestras de datos. Como herramienta para estudiar el orden hr, en ambos casos, utilizaremos los gráficos $\overline{P}-\overline{P}$. Recordemos que por el Teorema 1.2.24, el orden hr se da si el gráfico $\overline{P}-\overline{P}$ es estrellado respecto del origen.

Veamos el primer ejemplo donde consideramos dos variables con distribuciones Weibull.

**Ejemplo 2.1.1.** *Sean $X \sim W(1,4)$ e $Y \sim W(1,3)$. En la Figura 2.1 se muestra el gráfico $\overline{P}-\overline{P}$ de las variables. Este gráfico no es estrellado respecto al origen, por lo que no se verifica el orden hr. Para verificar el orden mrl necesitamos calcular las integrales incompletas de las funciones de supervivencia de las variables pero en este caso, al igual que en otras muchas situaciones, no tienen expresión explícita. Si representamos el cociente $\pi_Y(x)/\pi_X(x)$, calculado mediante integración numérica, como se puede ver en la Figura 2.1, la gráfica sugiere que las variables $X$ e $Y$ están ordenadas en el orden mrl.*

El ejemplo anterior es bastante significativo puesto que la distribución Weibull es uno de los modelos más utilizados en fiabilidad y, sin embargo, no se ordena en el orden hr. El ejemplo anterior parece indicar que se ordena en el orden mrl. Veamos ahora un ejemplo de esta situación con un conjunto de datos reales.



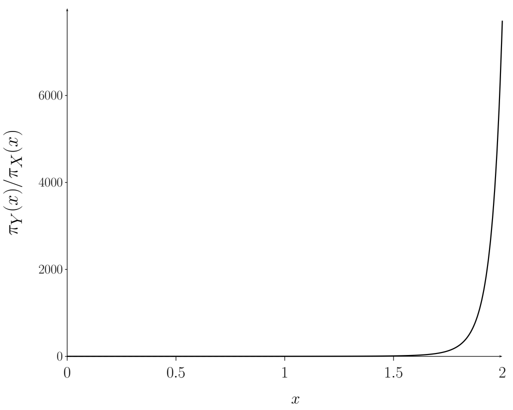




Figura 2.1: *Gráfico* $\overline{P}-\overline{P}$ *(arriba) y gráfica de* $\pi_Y(x)/\pi_X(x)$ *(abajo) para* $X \sim W(1,4)$ *e* $Y \sim W(1,3)$ .

**Ejemplo 2.1.2.** *Consideremos los retornos diarios de las acciones de una compañía eléctrica española (Iberdrola) y los retornos diarios de las acciones de una entidad bancaria española (Santander). Denotaremos por* $I$ *y* $S$ *las compañías y por* $R_I$ *y* $R_S$ *las variables que denotan los retornos diarios de dichas compañías, respectivamente. Los datos son de acceso público y pueden verse en Yahoo! Finance. Para el ejemplo hemos tomado dos muestras de tamaño 500. La Figura 2.2 corresponde al gráfico* $\overline{P}-\overline{P}$ *empírico de las dos muestras, es decir, se representan los pares de puntos* $(\overline{F}_n(x), \overline{G}_n(x))$*, donde* $F_n$ *y* $G_n$ *son las funciones de distribución empíricas de las muestras de* $R_I$ *y* $R_S$*, respectivamente.*

*Al igual que en el Ejemplo 2.1.1, este gráfico no es estrellado respecto al origen por lo que las variables no están ordenadas en el orden hr. Para verificar el orden mrl representaremos los pares de puntos* $(\pi_{R_I,n}(x), \pi_{R_S,n}(x))$*, donde* $\pi_{R_I,n}(x) = \int_x^{+\infty} \overline{F}_n(u)du$ *y* $\pi_{R_S,n}(x) = \int_x^{+\infty} \overline{G}_n(u)du$ *son las funciones stop-loss empíricas de las muestras de* $R_I$ *y* $R_S$*, respectivamente. Si siguiéramos el esquema del Ejemplo 2.1.1, representando el cociente* $\pi_{R_S,n}(x)/\pi_{R_I,n}(x)$*, tendríamos el siguiente problema. Cuando* $x$ *toma valores grandes el*

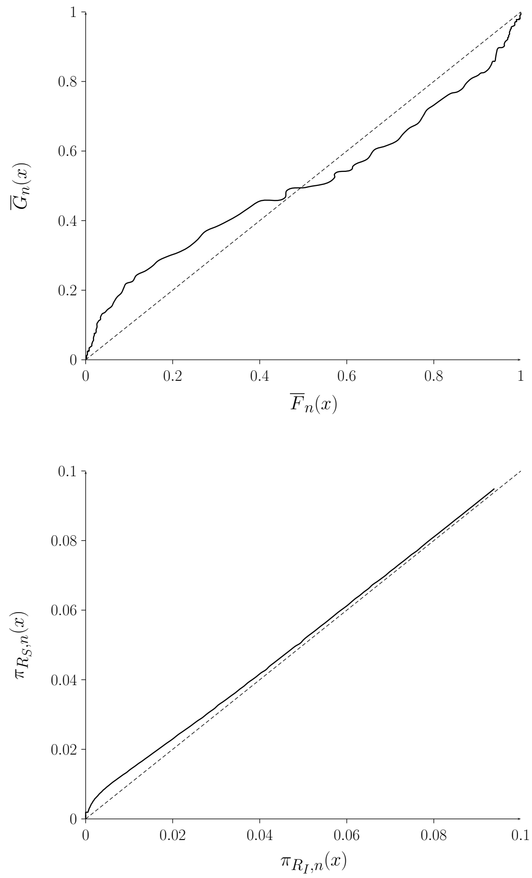



Figura 2.2: *Gráfico $\overline{P}-\overline{P}$ de los retornos diarios $R_I$ y $R_S$ (arriba) y gráfico de las funciones stop-loss empíricas de $R_I$ frente a la de $R_S$ (abajo).*

*denominador toma valores muy pequeños lo que hace que el cociente tome valores muy altos y distorsione el comportamiento que queremos estimar. Este problema es muy conocido y surge por ejemplo en la estimación no paramétrica de la función vida media residual (ver Csörgo y Zitikis, 1996 y Abdous y Berred, 2005). Para salvar esta dificultad sugerimos considerar el gráfico de los pares de puntos $(\pi_{R_I,n}(x), \pi_{R_S,n}(x))$. Como muestra la Figura 2.2, las pendientes de las rectas que unen el origen con cada uno de los puntos del gráfico corresponden al cociente de las funciones stop-loss empíricas de las variables y, efectivamente, crecen cuando x crece. Por lo tanto en este ejemplo el gráfico también sugiere que las variables se ordenan en el orden mrl (aunque no se ordenen en el orden hr).*

Como hemos visto en los dos ejemplos anteriores, por un lado estamos en condiciones de asegurar que el orden hr no es apropiado para comparar las variables aleatorias y, por otro lado, tenemos información gráfica que sugiere que el orden mrl sí sería apropiado. Por tanto, es de interés estudiar este tipo de situaciones y el objetivo de este capítulo es dar condiciones suficientes para poder asegurar analíticamente que las variables se ordenan en el orden mrl cuando el orden hr no se verifica. En los dos ejemplos anteriores se puede observar que las pendientes de los segmentos que unen el origen y los pares de puntos $(\overline{F}(x), \overline{G}(x))$ no son decrecientes (propiedad que se verificaría si las variables estuvieran ordenadas en el orden hr) sin embargo, verifican la siguiente propiedad: son inicialmente crecientes y posteriormente decrecientes como función de $x$. Dichas tangentes corresponden al cociente $\overline{G}(x)/\overline{F}(x)$. Por lo tanto los ejemplos anteriores comparten la siguiente propiedad: el cociente $\overline{G}(x)/\overline{F}(x)$ decrece en $x$ hasta un punto y después crece. La cuestión ahora es si esta propiedad es una condición suficiente para el orden mrl, como parecen indicar las gráficas. La Sección 2.2 está dedicada a responder a esta pregunta dando distintos conjuntos de condiciones suficientes para el orden mrl así como ejemplos donde éstos se aplican y generalizaciones de los mismos. En la Sección 2.3 se darán resultados análogos para el orden mit, definido por analogía al orden mrl.

## 2.2. Condiciones suficientes para el orden mrl

### 2.2.1. Resultados generales

A continuación damos respuesta positiva a la pregunta que se acaba de plantear en la introducción de esta sección, estableciendo como condición suficiente para el orden mrl la propiedad de que el cociente de las funciones de supervivencia tenga un mínimo y la hipótesis adicional de que las medias estén ordenadas. La ordenación de las medias no supone realmente una restricción puesto que esta condición es necesaria para que se verifique el orden mrl. El siguiente teorema es el resultado principal de este capítulo.

**Teorema 2.2.1.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de supervivencia continuas $\overline{F}$ y $\overline{G}$, respectivamente y medias finitas tales que $E(X) \leq E(Y)$. Si existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{F}(x)\overline{G}(y) \leq \overline{F}(y)\overline{G}(x)$, para $x < y \leq x_0$ y $\overline{F}(x)\overline{G}(y) \geq \overline{F}(y)\overline{G}(x)$, para $y \geq x \geq x_0$, entonces*

$$X \leq_{\mathrm{mrl}} Y.$$

**Demostración:**

Por hipótesis, tenemos que $\overline{F}(x)\overline{G}(y) \geq \overline{F}(y)\overline{G}(x)$, para todo $x_0 \leq x < y$, integrando respecto a $y$ la desigualdad anterior se tiene que

$$\overline{F}(x)\int_x^{\infty}\overline{G}(y)dy \geq \overline{G}(x)\int_x^{\infty}\overline{F}(y)dy, \text{ para todo } x > x_0. \tag{2.1}$$

Consideremos ahora $x \leq y \leq x_0$. Por hipótesis tenemos que $\overline{F}(x)\overline{G}(y) \leq \overline{F}(y)\overline{G}(x)$. Tomando límites cuando $x$ tiende a $-\infty$ se tiene que

$$\overline{F}(y) \geq \overline{G}(y), \text{ para todo } y \leq x_0, \tag{2.2}$$

lo que es equivalente a que $\min\{y, X\} \geq_{\mathrm{st}} \min\{y, Y\}$, para todo $y \leq x_0$. A partir de 1.14 se tiene que

$$E(\min\{y, X\}) \geq E(\min\{y, Y\}), \text{ para todo } y \leq x_0.$$

Sustituyendo $\min\{y, X\} = X - (X - y)_+$ (y análogamente para $Y$) se obtiene a partir de la última desigualdad que

$$E(X - (X - y)_+) \geq E(Y - (Y - y)_+), \text{ para todo } y \leq x_0.$$

Puesto que estamos suponiendo que $E(X) \leq E(Y)$, debe cumplirse $E((X - y)_+) \leq E((Y - y)_+)$, para todo $y \leq x_0$, y combinándo esta desigualdad con (2.2) se tiene que

$$\frac{E((X - y)_+)}{F(y)} \leq \frac{E((Y - y)_+)}{G(y)}, \text{ para todo } y \leq x_0. \tag{2.3}$$

Combinando (2.1) y (2.3) se llega al resultado.

■

Las hipótesis del teorema anterior se pueden reescribir en términos de la monotonía del cociente $\overline{H}(x) = \overline{G}(x)/\overline{F}(x)$. El motivo de enunciar el teorema de esa forma es evitar los ceros en el denominador. En particular, se darán las condiciones anteriores sí, y sólo sí, $\overline{H}(x)$ tiene un único extremo relativo en $x_0$, siendo $x_0$ un mínimo. Esta propiedad puede verificarse en términos del gráfico $\overline{P} - \overline{P}$, la función $\overline{H}(x)$ es inicialmente decreciente y posteriormente creciente sí, y sólo sí, el epígrafo del gráfico $\overline{P} - \overline{P}$ es antiestrellado respecto al origen, desde el origen hasta $(\overline{F}(x_0), \overline{G}(x_0))$, y estrellado respecto al origen, desde $(\overline{F}(x_0), \overline{G}(x_0))$ hasta el punto $(1, 1)$. Como podemos ver en el Ejemplo 2.1.2, el gráfico $\overline{P} - \overline{P}$ empírico tiene esta propiedad. El test $t$-Student confirma que los dos conjuntos de datos tienen la misma media y por lo tanto podemos afirmar que las variables aleatorias se ordenan en el orden mrl. Respecto al Ejemplo 2.1.1, haremos más tarde una discusión para la familia paramétrica Weibull donde daremos condiciones sobre los parámetros para que dos variables se ordenen en el orden mrl, siendo este ejemplo un caso particular de dicha discusión. A continuación aplicamos el Teorema 2.2.1 a varias familias paramétricas.

**Ejemplo 2.2.2. *Familia Pareto***

*Sean $X \sim P(a_1, k_1)$ e $Y \sim P(a_2, k_2)$, donde $a_1, a_2 \geq 1$ con el fin de que las medias sean finitas. A partir de la Definición 1.1.17 se tiene que la función*

$$\overline{H}(x) = \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} = \left(\frac{k_2^{a_2}}{k_1^{a_1}}\right) x^{a_1 - a_2}$$

*es creciente en $x \in (\max\{k_1, k_2\}, \infty)$, siempre que $a_1 \geq a_2$. Veamos como se comporta $\overline{H}(x)$ para $x \leq \max\{k_1, k_2\}$. Tendremos que distinguir dos casos*

$$H(x) = \begin{cases} \frac{1}{\overline{F}(x)} & \text{si } k_1 < k_2, \\ \\ \overline{G}(x) & \text{si } k_2 \leq k_1. \end{cases}$$

*Por lo tanto, si $k_2 \leq k_1$ y $E(X) = a_1 k_1/(a_1 - 1) \leq E(Y) = a_2 k_2/(a_2 - 1)$, la función $\overline{H}(x)$ es decreciente en $x \in (\max\{k_1, k_2\}, \infty)$ y por el Teorema 2.2.1 se verifica el orden mrl pero no se cumple el orden hr. Por otro lado, si $k_1 < k_2$, entonces $\overline{H}(x)$ es creciente en $x \in (-\infty, \max\{k_1, k_2\})$ y en este caso se verifica el orden hr. Podemos entonces establecer el siguiente resultado.*

**Proposición 2.2.3.** *Sean $X \sim P(k_1, a_1)$ e $Y \sim P(k_2, a_2)$. Si se cumplen las siguientes desigualdades:*

*(i)* $a_1 \geq a_2$,

*(ii)* $E(X) = a_1 k_1/(a_1 - 1) \leq E(Y) = a_2 k_2/(a_2 - 1)$,

*(iii)* $k_2 \leq k_1$,

*entonces* $X \leq_{\text{mrl}} Y$, $X \not\leq_{\text{hr}} Y$ *y* $X \not\geq_{\text{hr}} Y$

*La Figura 2.3 muestra un ejemplo del resultado anterior para $X \sim P(2, 3/2)$ e $Y \sim P(3/2, 4/5)$.*

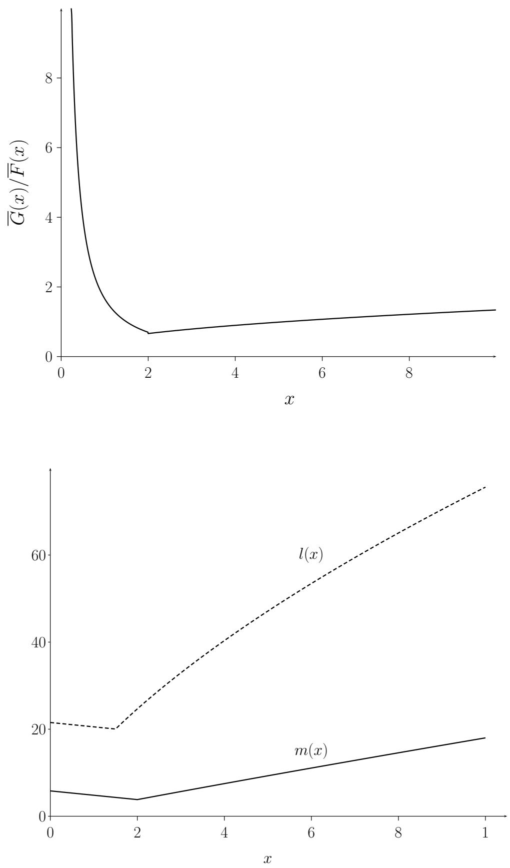



Figura 2.3: *Gráficas del cociente de las supervivencias (arriba) y de las vidas medias residuales (abajo) para $X \sim P(2, 3/2)$ e $Y \sim P(3/2, 4/5)$.*

La condición del enunciado sobre el mínimo del cociente de las funciones de supervivencia de dos variables aleatorias ha sido considerada y estudiada con anterioridad. En concreto, la Proposición 2.2.b de Metzger y Rüschendorf (1991) relaciona dicha propiedad con el cruce de las funciones razón de fallo de las variables. En particular, probaron el siguiente resultado.

**Teorema 2.2.4.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de supervivencia absolutamente continuas $\overline{F}$ y $\overline{G}$ y funciones razón de fallo $r$ y $s$, respectivamente. El cociente $\overline{G}(x)/\overline{F}(x)$ es inicialmente decreciente y posteriormente creciente, en los $x$ tales que $\overline{F}(x) > 0$, sí, y sólo sí, existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $r(x) \leq s(x)$, para todo $x \leq x_0$ tal que $\overline{F}(x), \overline{G}(x) > 0$ y $r(x) \geq s(x)$, para todo $x \geq x_0$ tal que $\overline{F}(x), \overline{G}(x) > 0$.*

Por lo que podemos reescribir el Teorema 2.2.1 en términos de los puntos de corte de las funciones razón de fallo como sigue.

**Teorema 2.2.5.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con distribuciones absolutamente continuas con funciones razón de fallo $r$ y $s$, respectivamente y medias finitas tales que $E(X) \leq E(Y)$. Si existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $r(x) \leq s(x)$, para todo $x < x_0$ tal que $\overline{G}(x), \overline{F}(x) > 0$ y $r(x) \geq s(x)$, para todo $x_0 < x$ tal que $\overline{G}(x), \overline{F}(x) > 0$, entonces*

$$X \leq_{\mathrm{mrl}} Y.$$

Que las funciones razón de fallo de dos variables aleatorias se crucen en un punto es una propiedad de gran interés en fiabilidad y supervivencia. Esta situación se presenta en casos de tratamientos que son efectivos en las primeras etapas de cierta enfermedad pero, a largo plazo, no suponen mejoras en los enfermos cuando se comparan sus tiempos de supervivencia con los de un grupo de control. También se presenta esta situación en el caso opuesto, es decir, en los que un tratamiento supone mejoras a largo plazo pero, sin embargo, puede incrementar el riesgo al comienzo de la enfermedad. Para una discusión más detallada y referencias de este tópico se pueden ver los trabajos de Liu, Qiu y Sheng (2007) y Cheng et.al. (2009). El enunciado del teorema anterior conlleva implícitamente que las variables no se ordenan en el orden hr, por lo que las vidas residuales no se ordenan en el orden st (ver Teorema 1.2.21), sin embargo las vidas medias residuales sí se ordenan. Por lo que, en cierto sentido, podemos seguir comparando las vidas residuales de las variables. A continuación aplicamos este resultado para ordenar la familia parámetrica Weibull.

**Ejemplo 2.2.6.** ***Familia Weibull***
*Sean $X \sim W(\alpha_1, \beta_1)$ e $Y \sim W(\alpha_2, \beta_2)$. Si $r$ y $s$ denotan las funciones razón de fallo de $X$ e $Y$, respectivamente, entonces $r(t) = s(t)$ sí, y sólo sí,*

$$t = \frac{\beta_2 \alpha_1^{\beta_1}}{\beta_1 \alpha_2^{\beta_2}}^{\beta_1 - \beta_2} \geq 0.$$

*Por lo tanto, las razones de fallo de cualquier par de variables pertenecientes a la familia Weibull se cortan en un punto, o equivalentemente, no se ordenan en el orden hr. Sin embargo, sí se ordenan en el orden mrl. Distinguiremos tres casos.*

*a)* $\beta_1 > \beta_2 \geq 1$. *En este caso* $r$ *y* $s$ *son crecientes siendo* $r(t) \geq s(t)$ *para valores grandes de* $t$*, por lo que si* $E(X) \leq E(Y)$*, entonces* $X \leq_{\text{mrl}} Y$.

*b)* $\beta_1 > 1 > \beta_2 \geq 1$. *En este caso* $r$ *es creciente y* $s$ *decreciente, por lo que obviamente* $r(t) \geq s(t)$ *para valores grandes de* $t$ *y entonces se verifica* $X \leq_{\text{mrl}} Y$ *si* $E(X) \leq E(Y)$.

*c)* $1 \geq \beta_1 > \beta_2$. *En este caso* $r$ *y* $s$ *son decrecientes siendo* $r(t) \geq s(t)$ *para valores grandes de* $t$*, por lo que, si* $E(X) \leq E(Y)$*, entonces* $X \leq_{\text{mrl}} Y$.

*En resumen, podemos establecer el siguiente resultado.*

**Proposición 2.2.7.** *Sean* $X \sim W(\alpha_1, \beta_1)$ *e* $Y \sim W(\alpha_2, \beta_2)$*. Si se cumplen las siguientes desigualdades:*

*(i)* $\beta_1 \geq \beta_2$,

*(ii)* $E(X) = \alpha_1\Gamma(1 + 1/\beta_1) \leq \alpha_2\Gamma(1 + 1/\beta_2) = E(Y)$,

*entonces* $X \leq_{\text{mrl}} Y$*,* $X \nleq_{\text{hr}} Y$ *y* $X \ngeq_{\text{hr}} Y$

*El Ejemplo 2.1.1 es un caso particular de este resultado.*

Lisek (1978) probó que si $a_1 > a_2$ y $E(X) = b_1\Gamma(1 + 1/a_1) \leq b_2\Gamma(1 + 1/a_2) = E(Y)$, entonces $X \leq_{\text{icx}} Y$. Por lo tanto este resultado mejora el dado por Lisek (1978).

Los resultados previos pueden ser también utilizados para dar condiciones suficientes para la clase de envejecimiento NBUE [NWUE]. Una variable aleatoria no negativa $X$ se dice NBUE [NWUE] (new better [worst] than used in expectation) si $E(X - x|X > x) \leq [\geq] E(X)$, para todo $x \geq 0$, o equivalentemente, si $X \leq_{\text{mrl}} [\geq_{\text{mrl}}] Y$, donde $Y$ es una variable aleatoria con distribución exponencial de media $E(X)$. Dada una variable aleatoria $X$ con función de supervivencia $\overline{F}$ y función razón de fallo $r$, por el Teorema 2.2.1, se tiene que una condición suficiente para que $X$ sea NBUE [NWUE] es que $-\ln(\overline{F}(x)) - x/E(X)$ sea inicialmente decreciente [creciente] y posteriormente creciente [decreciente] en $x > 0$. Además, en el caso absolutamente continuo, la función razón de fallo corta al menos una vez el valor $1/E(X)$. La razón es que si asumimos que $r$ no corta a ese valor, entonces por (1.18), se tiene que $X \leq_{\text{st}} Y$, donde $Y$ sigue una distribución exponencial de media $E(X)$, pero entonces $X$ sigue también una distribución exponencial. Por lo tanto la función razón de fallo tiene al menos un corte con el valor $1/E(X)$. Si sólo existe un corte, es decir, si para algún $x_0 \in \mathbb{R}_+$, $r(x) \leq [\geq] 1/E(X)$, para todo $0 < x \leq x_0$ y $r(x) \geq [\leq] E(X)$, para todo $x \geq x_0$, entonces, por el Teorema 2.2.5 se tiene que $X \leq_{\text{mrl}} [\geq_{\text{mrl}}] Y$, donde $Y$ sigue una distribución exponencial de media $E(X)$, es decir, $X$ es NBUE [NWUE]. Podemos entonces establecer el siguiente resultado.

**Corolario 2.2.8.** *Sea* $X$ *una variable aleatoria continua con función de supervivencia* $\overline{F}$ *y función razón de fallo* $r$*. Si se verifica una de las dos siguientes condiciones equivalentes:*

*i)* $-\ln(\overline{F}(x)) - x/E(X)$ *es inicialmente decreciente [creciente] y posteriormente creciente [decreciente] en* $x > 0$*,* *ii) Existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $r(x) \leq [\geq] 1/E(X)$, para todo $0 < x < x_0$ y $r(x) \geq [\leq] 1/E(X)$, para todo $x_0 < x$ tal que $\overline{F}(x) > 0$,*

*entonces $X$ es NBUE [NWUE].*

Hasta ahora hemos dado condiciones suficientes para el orden mrl en términos de las funciones de supervivencia de las variables, con el fin de poder verificar el orden cuando las integrales incompletas de las funciones de supervivencia no tienen expresión explícita y no se verifica el orden hr. Sin embargo, las funciones de supervivencia tampoco tienen expresión explícita en muchas ocasiones, como las familias normal o gamma. Siguiendo los argumentos dados en el Teorema 2.3 de Metzger y Rüschendorf (1991), es posible probar que si $X$ e $Y$ tienen funciones de distribución $F$ y $G$ continuas y funciones de densidad $f$ y $g$, respectivamente, tales que el cociente de las funciones de densidad es inicialmente decreciente y posteriormente creciente, entonces el cociente de las funciones de supervivencia tiene el mismo comportamiento. Combinando este resultado con el Teorema 2.2.1, obtenemos un conjunto de condiciones suficientes para el orden mrl en términos de las funciones de densidad de las variables. Establecemos por lo tanto el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.9.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias continuas con funciones de densidad $f$ y $g$, respectivamente y medias finitas tales que $E(X) \leq E(Y)$. Si existe un punto $x_0$ tal que $g(x)/f(x)$ es decreciente en $x \leq x_0$ y creciente en $x \geq x_0$, entonces*

$$X \leq_{\text{mrl}} Y.$$

Este resultado es de gran interés puesto que proporciona un conjunto de condiciones suficientes para el orden mrl que es posible verificar a partir de las funciones de densidad. A continuación se aplica el teorema anterior para ordenar las familias normal y gamma en el orden mrl.

**Ejemplo 2.2.10.** ***Familia normal***

*Sean $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. A partir la Definición 1.1.13, si $f$ y $g$ denotan las funciones de densidad de $X$ e $Y$, respectivamente, se tiene que*

$$g(x)/f(x) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2 + \frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2 \right\}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

*Este cociente presentará un extremo relativo sí, y sólo sí, lo presenta su logaritmo. Por lo que estudiaremos la función*

$$h(x) = \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{(x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

*Esta función es una parábola con vértice en el punto*

$$x^* = \frac{\frac{\mu_2}{\sigma_2^2} - \frac{\mu_1}{\sigma_1^2}}{\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}}.$$

*Tomando límites cuando $x$ tiende a $\pm\infty$ en (2.4), se observa que $h$ tiene un mínimo en $x^*$ sí, y sólo sí, $\sigma_1 < \sigma_2$. Si suponemos además $\mu_1 \leq \mu_2$, aplicando el Teorema 2.2.9, obtenemos el siguiente resultado.*

**Proposición 2.2.11.** *Sean $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Si se cumplen las siguientes desigualdades:*

*(i)* $\mu_1 \leq \mu_2$,

*(ii)* $\sigma_1 < \sigma_2$,

*entonces $X \leq_{\mathrm{mrl}} Y$, $X \not\leq_{\mathrm{hr}} Y$ y $X \not\geq_{\mathrm{hr}} Y$.*

*En la Figura 2.4 podemos ver un ejemplo del comportamiento del cociente de las densidades y de las supervivencias para $X \sim N(2,4)$ e $Y \sim N(4,9)$. A partir del resultado anterior las vidas medias residuales quedan ordenadas como puede verse en la Figura 2.5.*

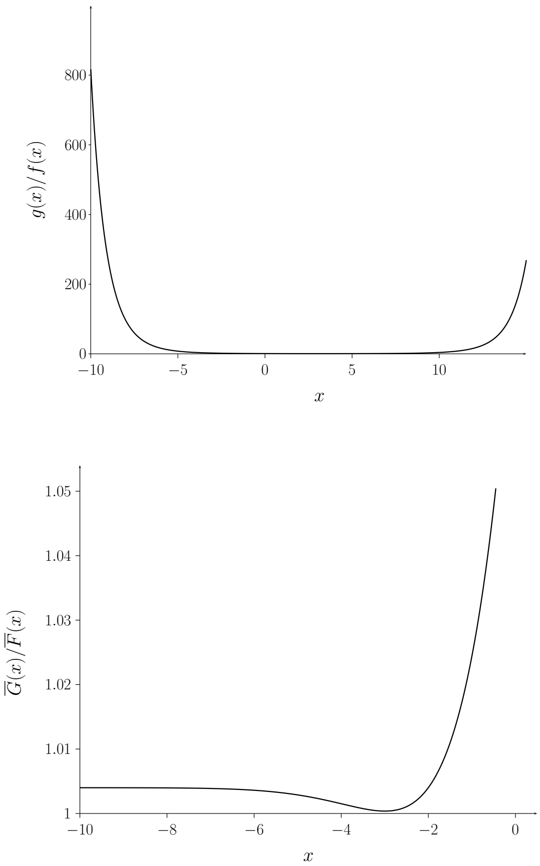



Figura 2.4: *Gráficas del cociente de las densidades (arriba) y del cociente de las supervivencias (abajo) para $X \sim N(2,4)$ e $Y \sim N(4,9)$.*

Taylor (1983) probó que si se cumplen las condiciones de este resultado sobre los parámetros, entonces $X \leq_{\mathrm{icx}} Y$. Con la condición suficiente que hemos establecido para el orden mrl en términos de las funciones de densidad se prueba que, en realidad, las variables se ordenan en este criterio más fuerte que el orden icx.

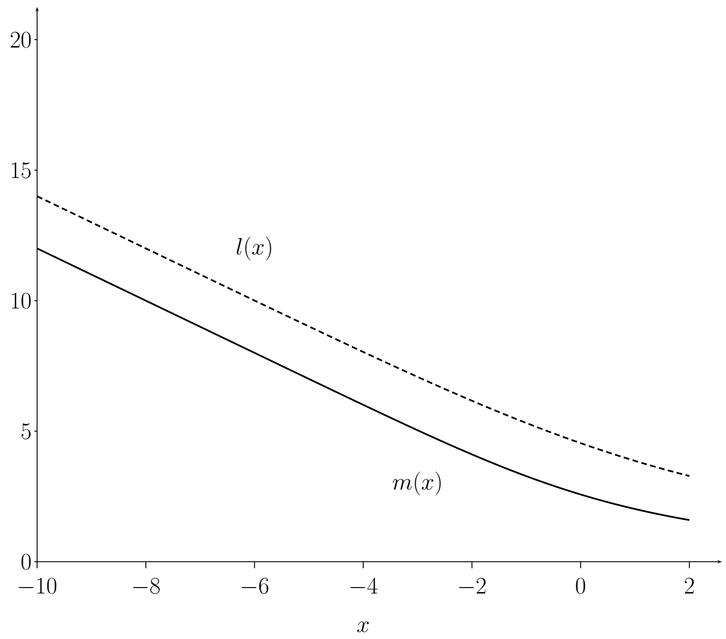



Figura 2.5: *Gráfica de las vidas medias residuales para* $X \sim N(2,2)$ *e* $Y \sim N(4,3)$.

**Ejemplo 2.2.12.** ***Familia gamma***

*Sean* $X \sim G(\alpha_1, \beta_1)$ *e* $Y \sim G(\alpha_2, \beta_2)$. *A partir la Definición 1.1.15, si* $f$ *y* $g$ *denotan las funciones de densidad de* $X$ *e* $Y$, *respectivamente, se tiene que*

$$g(x)/f(x) = \frac{\beta_1^{\alpha_1}\Gamma(\alpha_1)}{\beta_2^{\alpha_2}\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_2-\alpha_1} \exp\left\{\frac{x}{\beta_1} - \frac{x}{\beta_2}\right\}, \text{ para todo } x > 0.$$

*De nuevo tomando logaritmos, estudiaremos el comportamiento de la función*

$$h(x) = (\alpha_2 - \alpha_1)\ln(x) - \frac{x}{\beta_2} + \frac{x}{\beta_1}, \text{ para todo } x > 0. \tag{2.5}$$

*Si derivamos para obtener los extremos relativos de esta función, se prueba fácilmente que el extremo relativo se alcanza en el punto*

$$x^* = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1}}.$$

*Tomando límites cuando* $x$ *tiende a* $+\infty$ *y a* $0$ *en* (2.5), *se obtiene que* $h$ *tiene un mínimo en* $x^*$ *sí, y sólo sí,* $\alpha_1 > \alpha_2$ *y* $\beta_2 > \beta_1$. *Si además suponemos* $E(X) = \alpha_1\beta_1 \leq E(Y) = \alpha_2\beta_2$, *aplicando el Teorema 2.2.9 obtenemos el siguiente resultado.*

**Proposición 2.2.13.** *Sean* $X \sim G(\alpha_1, \beta_1)$ *e* $Y \sim G(\alpha_2, \beta_2)$. *Si se cumplen las siguientes desigualdades:*

*(i)* $\alpha_1 > \alpha_2$,

*(ii)* $\beta_2 > \beta_1$,

*(iii)* $\alpha_1\beta_1 \leq \alpha_2\beta_2$,

*entonces* $X \leq_{\text{mrl}} Y$, $X \not\leq_{\text{hr}} Y$ *y* $X \not\geq_{\text{hr}} Y$.

*En la Figura 2.6 podemos ver un ejemplo del cociente de las densidades y de las supervivencias para* $X \sim G(3,1)$ *e* $Y \sim G(2,3/2)$. *De nuevo, a partir del resultado anterior, las vidas medias residuales quedan ordenadas como puede verse en la Figura 2.7.*

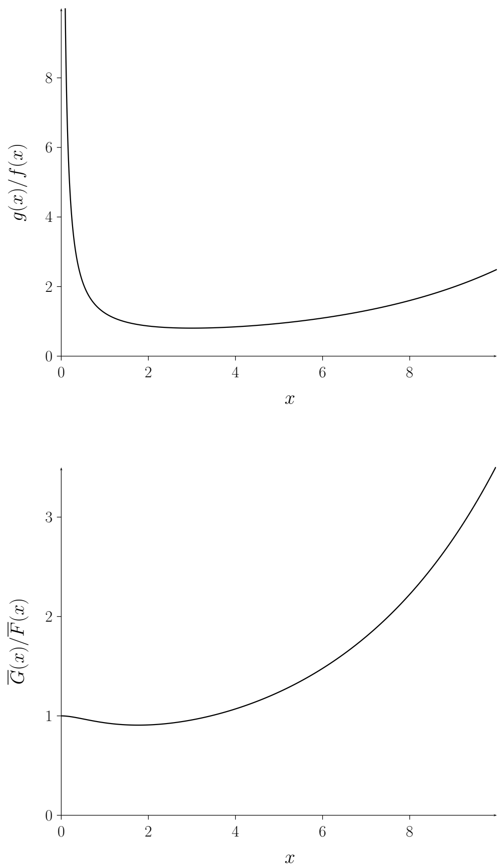



Figura 2.6: *Gráficas del cociente de las densidades (arriba) y del cociente de las supervivencias (abajo) para* $X \sim G(3,1)$ *e* $Y \sim G(2,3/2)$.

De la misma forma que se argumentó en el Ejemplo 2.2.6, para esta familia también se mejora un resultado de Lisek (1978).

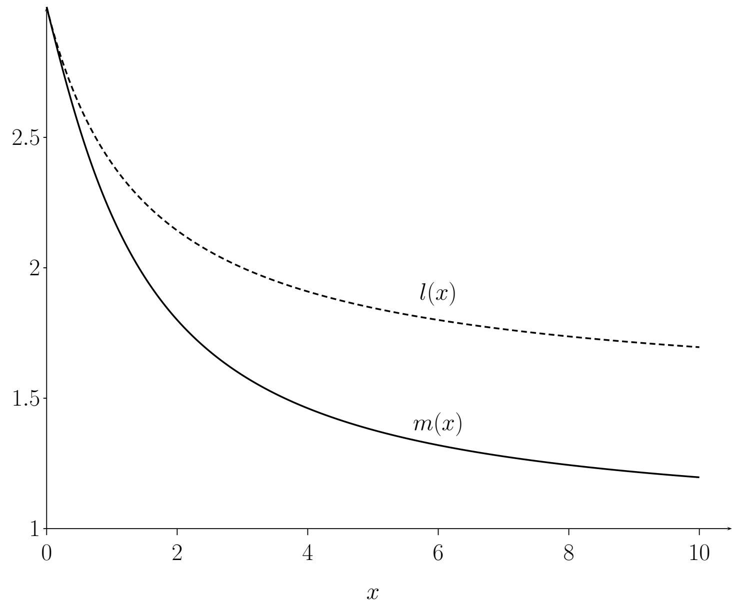



Figura 2.7: *Gráfica de las vidas medias residuales para* $X \sim G(3,1)$ *e* $Y \sim G(2,3/2)$.

**Observación 2.2.14.** *Nótese que bajo transformaciones crecientes de las variables aleatorias, el comportamiento del cociente de las funciones de supervivencia es el mismo que el de las variables transformadas. El razonamiento para probarlo es el siguiente. Consideremos primero una función real estrictamente creciente* $\phi$. *Es fácil ver que para cada* $x \in \mathbb{R}$, *se tiene que* $\{\phi(X) \leq x\} = \{X \leq \phi^{-1}(x)\}$ *y* $\{\phi(Y) \leq x\} = \{Y \leq \phi^{-1}(x)\}$. *Por lo tanto,* $P[\phi(X) > x] = \overline{F}(\phi^{-1}(x))$ *y* $P[\phi(Y) > x] = \overline{G}(\phi^{-1}(x))$. *Si* $\phi$ *es simplemente creciente, el resultado se sigue a partir de la aproximación de la función por funciones estrictamente crecientes, ya que toda función creciente es límite de combinaciones lineales de funciones estrictamente crecientes.*

A partir de la Proposición 2.2.11 y de la observación anterior, podemos establecer condiciones sobre los parámetros de la familia lognormal para ordenarla en el orden mrl.

**Ejemplo 2.2.15.** ***Familia lognormal***

*Sean* $X \sim LN(\mu_1, \sigma_1^2)$ *e* $Y \sim LN(\mu_2, \sigma_2^2)$. *Puesto que* $X = \exp\{X'\}$ *e* $Y = \exp\{Y'\}$, *donde* $X' \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ *e* $Y' \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, *respectivamente, podemos establecer el siguiente resultado.*

**Proposición 2.2.16.** *Sean* $X \sim LN(\mu_1, \sigma_1^2)$ *e* $Y \sim LN(\mu_2, \sigma_2^2)$. *Si se cumplen las siguientes desigualdades:*

*(i)* $\mu_1 \leq \mu_2$,

*(ii)* $\sigma_1 < \sigma_2$,

*entonces* $X \leq_{\mathrm{mrl}} Y$, $X \nleq_{\mathrm{hr}} Y$ *y* $X \ngeq_{\mathrm{hr}} Y$.

*Observar que bajo (i) y (ii) se verifica* $E(X) \leq E(Y)$.

Al igual que en los ejemplos anteriores, este resultado mejora el de Lisek (1978) que establece el orden creciente convexo entre las variables, bajo las mismas condiciones sobre los parámetros.

### 2.2.2. Generalización del resultado principal

A continuación, proporcionamos una generalización del resultado principal de este capítulo, el Teorema 2.2.1. Consideramos el caso en el que el número de extremos relativos del cociente de las funciones de supervivencia es mayor que uno. Aunque podemos encontrar aplicaciones de este resultado, éste tiene mayor interés desde un punto de vista teórico. La principal razón es que se necesitan conocer las funciones vida media residual de las variables en determinados puntos para aplicar el teorema.

**Teorema 2.2.17.** *Sean* $X$ *e* $Y$ *dos variables aleatorias con funciones de supervivencia* $\overline{F}$ *y* $\overline{G}$ *y funciones vida media residual* $m$ *y* $l$*, respectivamente y medias finitas. Supongamos que* $\overline{G}(x)/\overline{F}(x)$ *tiene* $n \geq 1$ *extremos relativos en los puntos* $-\infty < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \max(u_X, u_Y)$. *Entonces* $X \leq_{\mathrm{mrl}} Y$ *sí, y sólo sí, se satisface uno de los siguientes conjuntos de condiciones:*

*i) El número de extremos relativos es par,* $n = 2m$*, siendo* $x_1$ *un máximo y para* $j = 1, \ldots, m$ *se cumplen las desigualdades*

$$m(x_{2j-1}) \leq l(x_{2j-1}).$$

*ii) El número de extremos relativos es impar,* $n = 2m + 1$*, siendo* $x_1$ *un mínimo, para* $j = 1, \ldots, m$ *se cumplen las desigualdades*

$$m(x_{2j}) \leq l(x_{2j})$$

*y además* $E(X) \leq E(Y)$.

**Demostración:**
La implicación directa es trivial, ya que si se verifica el orden mrl en todos los puntos donde $\overline{F}(x), \overline{G}(x) > 0$, en particular se verificará en un subconjunto de puntos. Consideremos ahora el recíproco, veamos que bajo las condiciones i) o ii) se tiene que $X \leq_{\mathrm{mrl}} Y$.

Definimos la función $\delta(x)$ como sigue

$$\delta(x) = \int_x^{+\infty} \left( \overline{G}(u) - \overline{F}(u) \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} \right) du.$$

Nótese que $\delta(x) = \overline{G}(x)(l(x) - m(x))$, por lo que la condición $\delta(x) \geq 0$, para todo $x$ tal que $\overline{F}(x), \overline{G}(x) > 0$ es equivalente a $X \leq_{\text{mrl}} Y$. Para demostrarlo, veremos que el comportamiento de la función $\delta(x)$ es opuesto al del cociente de las funciones de supervivencia, es decir, la función $\delta(x)$ es creciente en los tramos donde el cociente $\overline{G}(x)/\overline{F}(x)$ es decreciente y viceversa. Por lo tanto bastará con que la función $\delta(x)$ sea positiva en los puntos mínimos para demostrar que es positiva. Veamos que efectivamente la función $\delta(x)$ es creciente (decreciente) en los subintervalos donde el cociente $\overline{G}(x)/\overline{F}(x)$ es decreciente (creciente).

Consideremos un intervalo $(x_i, x_{i+1})$ donde el cociente $\overline{G}(x)/\overline{F}(x)$ es creciente y $x \leq y$ pertenecientes a ese intervalo. En este caso se tiene que

$$\begin{aligned}\delta(x) = \int_x^y \left(\overline{G}(u) - \overline{F}(u)\frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)}\right) du + \int_y^{+\infty} \left(\overline{G}(u) - \overline{F}(u)\frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)}\right) du \\ \geq \int_y^{+\infty} \left(\overline{G}(u) - \overline{F}(u)\frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)}\right) du \geq \delta(y),\end{aligned}$$

donde las dos desigualdades se siguen del crecimiento del cociente $\overline{G}(x)/\overline{F}(x)$. Por tanto, $\delta(x)$ es decreciente en los subintervalos donde el cociente $\overline{G}(x)/\overline{F}(x)$ es creciente. De la misma forma invirtiendo las desigualdades obtenemos que $\delta(x)$ es creciente en los subintervalos donde el cociente $\overline{G}(x)/\overline{F}(x)$ es decreciente. Por lo tanto, bastará pedir que $\delta(x)$ sea positiva en los puntos mínimos, los cuales variarán teniendo en cuenta si el número de extremos relativos es par o impar de acuerdo con la distinción hecha en el enunciado del teorema. Para concluir, falta ver qué ocurre en los intervalos $(-\infty, x_1)$ y $(x_n, \infty)$. En ambos casos, $n = 2m$ y $n = 2m + 1$, el cociente $\overline{G}(x)/\overline{F}(x)$ es creciente en $x \geq x_n$, por lo que el integrando es positivo y trivialmente se cumple que $\delta(x) \geq 0$.

En el intervalo $(-\infty, x_1)$, tenemos que distinguir entre el caso de número de extremos relativos par e impar. Si el número de extremos relativos es par, la función $\delta(x)$ tiene un mínimo en $x_1$, por lo que si en $x_1$ es positiva lo será en el intervalo $(-\infty, x_1)$ y por lo tanto $X \leq_{\text{mrl}} Y$. Si el número de extremos relativos es impar la función $\delta(x)$ tiene un máximo en $x_1$, por lo que necesitamos que $\lim_{x\to-\infty} \delta(x)$ sea positivo para que lo sea en el intervalo $(-\infty, x_1)$. La desigualdad se sigue de la ordenación de las medias ya que $\lim_{x\to-\infty} \delta(x) = \lim_{x\to-\infty}(l(x) - m(x)) = E(Y) - E(X) \geq 0$ y por lo tanto $X \leq_{\text{mrl}} Y$. ■

Vemos a continuación un ejemplo donde se verifican las condiciones descritas en el apartado i) del teorema anterior.

**Ejemplo 2.2.18.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de supervivencia*

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{2}\big(\exp\{-30x\} + \exp\{-2x\}\big), \text{ para todo } x > 0$$

*y*

$$\overline{G}(x) = \frac{1}{2}\big(\exp\{-10x\} + \exp\{-x\}\big), \text{ para todo } x > 0,$$

*respectivamente. En la Figura 2.8 tenemos las gráficas del cociente de las supervivencias y de las vidas medias residuales. En este caso el cociente de las funciones de supervivencia tiene dos extremos relativos y en el punto máximo las vidas medias residuales están ordenadas, por tanto se verifica el orden vida media residual de las variables.*

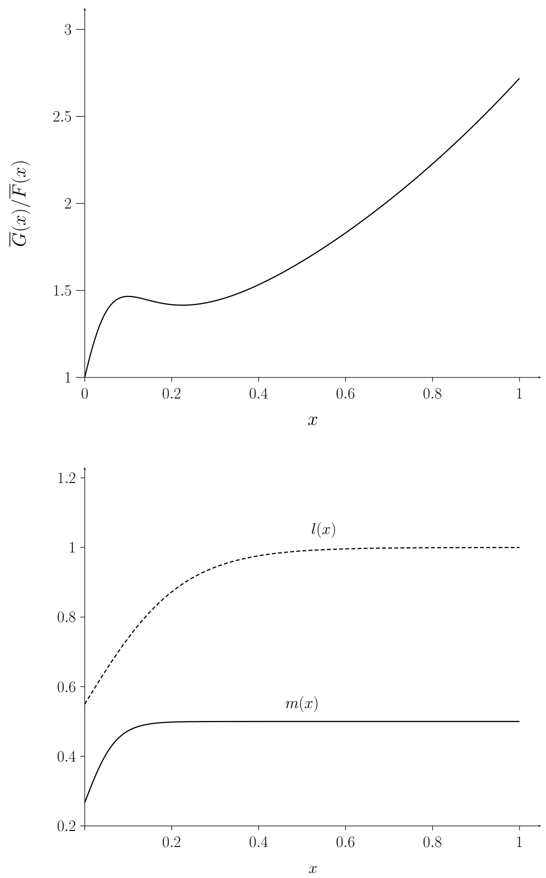



Figura 2.8: *Gráficas del cociente de las supervivencias (arriba) y de las vidas medias residuales (abajo), para $X$ e $Y$ dadas en el Ejemplo 2.2.18.*

# 2.3. Condiciones suficientes para el orden mit

## 2.3.1. Resultados generales

Como vimos en el Capítulo 1, se define el orden mit análogamente al orden mrl. Recordamos que dadas dos variables aleatorias $X$ e $Y$ con funciones de distribución continuas $F$ y $G$, respectivamente, se dice que $X \leq_{\text{mit}} Y$ si

$$E(x - X|X \leq x) \geq E(x - Y|Y \leq x), \text{ para todo } x \text{ tal que } F(x), G(x) > 0.$$

En muchas ocasiones, las esperanzas que aparecen en la definición no tienen expresión explícita, por lo que no es fácil verificar el orden. A partir de (1.20), se tiene que el orden rhr es una condición suficiente para el orden mit, pero éste no siempre se verifica. El objetivo de esta sección será dar condiciones suficientes para el orden mit en términos del comportamiento del cociente de las funciones de distribución, siguiendo el esquema de la sección anterior para el orden mrl. Veamos el teorema principal de esta sección.

**Teorema 2.3.1.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución $F$ y $G$, respectivamente y medias finitas tales que $E(X) \leq E(Y)$. Si existe un punto* $\text{mín}\{l_X, l_Y\} < x_0$ *tal que $G(x)F(y) \leq G(y)F(x)$, para $x < y < x_0$, y $G(x)F(y) \geq G(y)F(x)$, para $x_0 \leq x \leq y$, entones*

$$X \leq_{\text{mit}} Y.$$

**Demostración:**
Por hipótesis, tenemos que $G(u)F(x) \leq G(x)F(u)$, para todo $\text{mín}\{l_X, l_Y\} < u < x < x_0$. Integrando respecto a $u$ la desigualdad anterior se tiene que

$$F(x)\int_{-\infty}^{x} G(u)du \leq G(x)\int_{-\infty}^{x} F(u)du, \text{ para todo } \text{mín}\{l_X, l_Y\} < x < x_0,$$

o equivalentemente

$$\frac{E((x-X)_+)}{F(x)} \geq \frac{E((x-Y)_+)}{G(x)}, \text{ para todo } \text{mín}\{l_X, l_Y\} < x < x_0. \tag{2.6}$$

Consideremos ahora $x_0 \leq x \leq y$. Por hipótesis tenemos que $G(x)F(y) \geq G(y)F(x)$. Tomando límites cuando $y$ tiende a $+\infty$ obtenemos que

$$F(x) \leq G(x), \text{ para todo } x \geq x_0, \tag{2.7}$$

lo que es equivalente a que $\text{máx}\{x, X\} \geq_{\text{st}} \text{máx}\{x, Y\}$, para todo $x \geq x_0$. A partir de (1.14) se tiene que

$$E(\text{máx}\{x, X\}) \geq E(\text{máx}\{x, Y\}), \text{ para todo } x \geq x_0.$$

Observando que $(x-X)_+ = \text{máx}\{x, X\} - X$ (y análogamente para $Y$) se sigue de la última desigualdad que

$$E((x-X)_+ + X) \geq E((x-Y)_+ + Y), \text{ para todo } x \geq x_0.$$

Puesto que estamos suponiendo que $E(X) \leq E(Y)$, debe cumplirse $E((x-X)_+) \geq E((x-Y)_+)$, para todo $x \geq x_0$ y combinando esta última desigualdad con (2.7) se tiene que

$$\frac{E((x-X)_+)}{F(x)} \geq \frac{E((x-Y)_+)}{G(x)}, \text{ para todo } x \geq x_0. \tag{2.8}$$

Combinando (2.6) y (2.8) se llega al resultado.

■

Las hipótesis del teorema anterior se pueden reescribir en términos del cociente $H(x) = G(x)/F(x)$. En particular, se darán las condiciones anteriores sí, y sólo sí, $H(x)$ tiene un único extremo relativo en $x_0$, siendo $x_0$ un máximo. Esta propiedad puede verificarse en este caso en términos del gráfico $P-P$. La función $H(x)$ es inicialmente creciente y posteriormente decreciente sí, y sólo sí, el epígrafo del gráfico $P-P$ es estrellado respecto al origen, desde el origen hasta $(F(x_0), G(x_0))$, y antiestrellado respecto al origen, desde $(F(x_0), G(x_0))$ hasta el punto $(1, 1)$. Esta condición se puede reescribir en términos de los puntos de cortes de las funciones razón de fallo inversas de las variables aleatorias. Para probarlo basta reescribir la monotonía del cociente de las funciones de distribución en términos del signo de su derivada. Podemos entonces establecer el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.2.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias continuas con funciones razón de fallo inversas $\tilde{r}$ y $\tilde{s}$, respectivamente y medias finitas tales que $E(X) \leq E(Y)$. Si existe un punto $x_0$ tal que $\tilde{r}(x) \leq \tilde{s}(x)$, para todo $\text{mín}\{l_X, l_Y\} < x < x_0$ tal que $G(x), F(x) > 0$ y $\tilde{r}(x) \geq \tilde{s}(x)$, para todo $x \geq x_0$ tal que $G(x), F(x) > 0$, entonces*

$$X \leq_{\text{mit}} Y.$$

El enunciado del teorema anterior conlleva implícitamente que las variables no se ordenan en el orden rhr, por lo que los tiempos de inactividad no se ordenan en el orden st (ver Teorema 1.2.27). Sin embargo, los tiempos medios de inactividad sí se ordenan. Por lo que, en cierto sentido, podemos seguir comparando los tiempos de inactividad de las variables.

Como ya se argumentó en la sección anterior, puesto que en muchas ocasiones no se dispone de una expresión explícita para las funciones de distribución de las variables aleatorias, sería de gran interés dar condiciones suficientes para el orden en términos de las funciones de densidad de las variables. La propiedad de que el cociente de las funciones de densidad tenga un extremo relativo implica que el cociente de las funciones de distribución también lo tenga (ver Metzger y Rüschendorf, 1991). Combinando esta propiedad con el Teorema 2.3.1, se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 2.3.3.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias continuas con funciones de densidad $f$ y $g$, respectivamente y medias finitas tales que $E(X) \leq E(Y)$. Si existe un punto $x_0$ tal que $g(x)/f(x)$ es creciente en $x \leq x_0$ y decreciente en $x \geq x_0$, entonces*

$$X \leq_{\text{mit}} Y.$$

Si consideramos dos variables aleatorias pertenecientes a la familia normal, a partir del Ejemplo 2.2.10 podemos establecer condiciones sobre sus parámetros para que dichas variables se ordenen en el orden mit. Para ello, basta con invertir las desigualdades relativas al extremo relativo, el cuál debe ser un máximo en lugar de un mínimo, manteniendo la condición de la ordenación de las medias que se necesita en el mismo sentido. Establecemos entonces el siguiente resultado.

**Proposición 2.3.4.** *Sean $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Si se cumplen las siguientes desigualdades:*

*(i)* $\mu_1 \leq \mu_2$,

*(ii)* $\sigma_1 > \sigma_2$,

*entonces* $X \leq_{\rm mit} Y$, $X \not\leq_{\rm rhr} Y$ *y* $X \not\geq_{\rm rhr} Y$.

De la misma forma podemos establecer el resultado análogo al Ejemplo 2.2.12.

**Proposición 2.3.5.** *Sean* $X \sim G(\alpha_1, \beta_1)$ *e* $Y \sim G(\alpha_2, \beta_2)$. *Si se cumplen las siguientes desigualdades:*

*(i)* $\alpha_1 < \alpha_2$,

*(ii)* $\beta_2 < \beta_1$,

*(iii)* $\alpha_1\beta_1 \leq \alpha_2\beta_2$,

*entonces* $X \leq_{\rm mit} Y$, $X \not\leq_{\rm rhr} Y$ *y* $X \not\geq_{\rm rhr} Y$.

En el siguiente ejemplo consideramos la familia Weibull que ordenamos a través del teorema de las densidades, en lugar de aplicando el teorema principal como hicimos con el orden mrl. La razón es que la expresión de las funciones de distribución complica el estudio de la monotonía del cociente de dichas funciones, siendo mucho más sencillo el estudio del cociente de las funciones de densidad como veremos a continuación.

**Ejemplo 2.3.6. *Familia Weibull.*** *Sean* $X \sim W(\alpha_1, \beta_1)$ *e* $Y \sim W(\alpha_2, \beta_2)$, *estudiaremos la monotonía del logaritmo del cociente de las funciones de densidad*

$$h(x) = \log \frac{g(x)}{f(x)} = \log \frac{\alpha_1^{\beta_1}}{\alpha_2^{\beta_2}} + (\beta_2 - \beta_1)\log x - \left(\frac{x}{\alpha_2}\right)^{\beta_2} + \left(\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\beta_1}, \text{ para todo } x \in (0, \infty).$$

*Esta función tendrá un extremo relativo sí, y sólo sí,*

$$xh'(x) = \beta_2 - \beta_1 - \beta_2 \left(\frac{x}{\alpha_2}\right)^{\beta_2} + \beta_1 \left(\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\beta_1} = 0, \text{ para todo } x \in (0, \infty),$$

*ya que las variables son no negativas. Esta función es una parábola con un máximo si* $\beta_1 < \beta_2$, *siendo* $\lim_{x\to 0} xh'(x) = \beta_2 - \beta_1 > 0$ *y* $\lim_{x\to+\infty} xh'(x) = -\infty$, *por lo tanto tiene un cambio de signo con la secuencia* $+, -$, *o equivalentemente el cociente de las funciones de densidad tiene un máximo, por lo tanto podemos establecer el siguiente resultado.*

**Proposición 2.3.7.** *Sean* $W(\alpha_1, \beta_1)$ *e* $Y \sim W(\alpha_2, \beta_2)$. *Si se cumplen las siguientes desigualdades:*

*(i)* $\beta_1 < \beta_2$,

*(ii)* $E(X) = \alpha_1\Gamma(1 + 1/\beta_1) \leq \alpha_2\Gamma(1 + 1/\beta_2) = E(Y)$,

*entonces* $X \leq_{\rm mit} Y$, $X \not\leq_{\rm rhr} Y$ *y* $X \not\geq_{\rm rhr} Y$.

*Puesto que la condición sobre las medias es tanto suficiente como necesaria y los parámetros de forma van a estar ordenados en uno u otro sentido, no es posible mejorar las condiciones sobre los parámetros mediante los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2. Es decir, aparte de las situaciones en las que no se dispone de expresión explícita para las funciones de distribución, el Teorema 2.3.3 es de gran utilidad para facilitar el estudio en algunos casos.*

### 2.3.2. Generalización del resultado principal

A continuación, damos una generalización del resultado principal de esta sección, el Teorema 2.3.1. Consideramos el caso en el que el número de extremos relativos del cociente de las funciones de distribución es mayor que uno. Aunque podemos encontrar aplicaciones de este resultado, éste tiene mayor interés desde un punto de vista teórico. De nuevo, la principal razón es que se necesitan conocer las funciones tiempo medio de inactividad de las variables en ciertos puntos para aplicar el teorema.

**Teorema 2.3.8.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución continuas $F$ y $G$, funciones tiempo medio de inactividad $\tilde{m}$ y $\tilde{l}$, respectivamente y medias finitas. Supongamos que $G(x)/F(x)$ tiene $n \geq 1$ extremos relativos en los puntos $\min(l_X, l_Y) < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < +\infty$. Entonces se verifica $X \leq_{\text{mit}} Y$ sí, y sólo sí, se satisface uno de los siguientes conjuntos de condiciones:*

*i) El número de extremos relativos es par, $n = 2m$, siendo $x_n$ un mínimo, y para $j = 1, \ldots, m$ se cumplen las desigualdades*

$$\tilde{m}(x_{2j}) \geq \tilde{l}(x_{2j}).$$

*ii) El número de extremos relativos es impar, $n = 2m+1$, siendo $x_n$ un máximo, para $j = 1, \ldots, m$ se cumplen las desigualdades*

$$\tilde{m}(x_{2j}) \geq \tilde{l}(x_{2j})$$

*y además $E(X) \leq E(Y)$.*

**Demostración:**
La implicación directa es trivial, ya que si se verifica el orden mit en todos los puntos tales que $F(x), G(x) > 0$, en particular se verificará en un subconjunto de puntos. Consideremos ahora el recíproco, veamos que bajo las condiciones i) o ii) se tiene que $X \leq_{\text{mit}} Y$.

Definimos la función $\delta(x)$ como sigue

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{x} \left( G(u) - F(u)\frac{G(x)}{F(x)} \right) du.$$

Nótese que $\delta(x) = G(x)(\tilde{l}(x) - \tilde{m}(x))$, por lo que la condición $\delta(x) \leq 0$, para todo $x$ tal que $F(x), G(x) > 0$, es equivalente a $X \leq_{\text{mit}} Y$. Para demostrarlo, veremos que el comportamiento de la función $\delta(x)$ es opuesto al del cociente de las funciones de distribución, es decir, $\delta(x)$ es decreciente en los intervalos donde $G(x)/F(x)$ es creciente y viceversa. Por lo que será suficiente que $\delta(x)$ sea negativa en sus puntos máximos para concluir. Veamos que efectivamente la función $\delta(x)$ es decreciente (creciente) en los subintervalos donde el cociente $G(x)/F(x)$ es creciente (decreciente).

Consideremos un intervalo $(x_i, x_{i+1})$ donde $G(x)/F(x)$ es creciente y $x \leq y$ pertenecientes a dicho intervalo. En este caso se tiene que

$$\begin{aligned}\delta(y) = \int_x^y \left( G(u) - F(u)\frac{G(y)}{F(y)} \right) du &+ \int_{-\infty}^x \left( G(u) - F(u)\frac{G(y)}{F(y)} \right) du \\ &\leq \int_{-\infty}^x \left( G(u) - F(u)\frac{G(y)}{F(y)} \right) du \leq \delta(x),\end{aligned}$$

donde ambas desigualdades se siguen del crecimiento del cociente $G(x)/F(x)$. Por lo que $\delta(x)$ es decreciente en los subintervalos donde el cociente $G(x)/F(x)$ es creciente. De la misma forma invirtiendo las desigualdades obtenemos que $\delta(x)$ es creciente en los subintervalos donde el cociente $G(x)/F(x)$ es decreciente. Por lo tanto, bastará pedir que $\delta(x)$ sea negativa en lo puntos máximos, los cuáles variarán teniendo en cuenta si el número de extremos relativos es par o impar de acuerdo con la distinción hecha en el enunciado. Para concluir, sólo falta por ver qué ocurre en los intervalos $(-\infty, x_1)$ y $(x_n, \infty)$. En ambos casos, $n = 2m$ y $n = 2m + 1$, el cociente $G(x)/F(x)$ es creciente en $x \leq x_1$, por lo que el integrando es negativo y trivialmente se cumple $\delta(x) \leq 0$.

En el intervalo $(x_n, \infty)$ tenemos que distinguir entre el caso de número de extremos relativos es par e impar. Si el número de extremos relativos es par la función $\delta(x)$ tiene un máximo en $x_n$, por lo que si la función es negativa en $x_n$ lo será en el intervalo $(x_n, \infty)$ y por lo tanto $X \leq_{\text{mit}} Y$. Si el número de extremos relativos es impar la función $\delta(x)$ tiene un mínimo en $x_n$, por lo que necesitamos que la función termine negativa, $\lim_{x\to\infty} \delta(x) \leq 0$, lo cuál se verifica ya que $\lim_{x\to\infty} \delta(x) = \lim_{x\to\infty}(\tilde{l}(x) - \tilde{m}(x)) = E(X) - E(Y) \leq 0$ y por lo tanto $X \leq_{\text{mit}} Y$. ■

# Capítulo 3

# Condiciones suficientes para los órdenes ttt y dttt

## 3.1. Introducción

Como se vio en el Capítulo 1, Hu, Wang y Zhuang (2012) definieron, para una variable aleatoria $X$, la transformada $T_X(p)$ para dar una definición del orden ttt que permita comparar dos variables aleatorias cualesquiera, es decir, no necesariamente no negativas. Recordamos que dadas dos variables aleatorias $X$ e $Y$ con medias finitas, se dice que $X \leq_{\text{ttt}} Y$, si

$$T_X(p) \leq T_Y(p), \text{ para todo } p \in (0,1).$$

Como se comentó en el Capítulo 1, este orden no tiene una interpretación clara, siendo uno de los objetivos de esta memoria dar una interpretación que permita aplicarlo tanto en fiabilidad como en riesgos.

Para ello, reescribimos en primer lugar la transformada $T_X(p)$. Puesto que $\text{mín}\{x,t\} = x - (x-t)_+$, a partir de la Definición 1.1.12 se tiene que

$$E(\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}) = E(X) - E((X - F^{-1}(p))_+) = T_X(p).$$

Por lo tanto, se tiene que el orden ttt es equivalente a la comparación de las medias de las variables aleatorias $\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}$ y $\text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}$, para todo $p \in (0,1)$, es decir,

$$X \leq_{\text{ttt}} Y \Leftrightarrow E(\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}) \leq E(\text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}), \text{ para todo } p \in (0,1). \tag{3.1}$$

Ahora sí podemos dar una interpretación de esta función en fiabilidad y riesgos. En fiabilidad, como dijimos en el Capítulo 1, es común utilizar técnicas de “burn-in”para eliminar fallos tempranos. Consideremos que las unidades se ponen en funcionamiento antes de salir a la venta, hasta que el $100p\,\%$ de las unidades falle, entonces el tiempo de vida esperado de las unidades que no salen a la venta viene dado por $E(\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\})$. En teoría de riesgos, en el contexto de los reaseguros, si el pleno es $F^{-1}(p)$, entonces $E(\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\})$ es el promedio de las reclamaciones que paga la empresa aseguradora.

La comparación de las variables aleatorias $\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}$ y $\text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}$ también aparece en el orden st. En concreto, el Teorema 1.2.2 establece que $X \leq_{\text{st}} Y$ sí, y sólo sí, se verifica $\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\} \leq_{\text{st}} \text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}$, para todo $p \in (0, 1)$. Este resultado nos lleva a plantearnos si se puede caracterizar de forma análoga el orden ttt mediante la comparación, en algún orden estocástico, de las variables aleatorias $\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}$ y $\text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}$. En la Sección 3.2 damos respuesta positiva a esta cuestión.

Por otro lado, y siguiendo el esquema de trabajo del capítulo anterior, nos planteamos si es posible obtener condiciones suficientes para el orden ttt cuando el orden st no se da, ya que el orden st es condición suficiente para el orden ttt (ver (1.28)). Estas condiciones serán de gran utilidad en aquellas situaciones en las que no existe expresión explícita para las transformadas $T_X$ y $T_Y$ y el orden st no se verifica. En la Sección 3.2 también se presentarán todos los conjuntos de condiciones suficientes que hemos conseguido establecer para el orden ttt así como ejemplos donde se aplican, incluyéndose también una subsección donde se presentan generalizaciones de estos resultados y otra subsección dedicada a la comparación de estadísticos ordenados generalizados en este orden. En la Sección 3.3 se desarrolla el mismo estudio de la sección anterior para el orden dual del orden ttt.

## 3.2. Resultados para el orden ttt

### 3.2.1. Caracterización del orden ttt

En esta sección presentamos el teorema que caracteriza el orden ttt a través de la ordenación en el orden creciente cóncavo de las variables aleatorias $\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}$ y $\text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}$. El resultado que hemos obtenido es el siguiente.

**Teorema 3.2.1.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas. Si $\text{lím}_{p\to 0^+}(G^{-1}(p) - F^{-1}(p))$ es finito, entonces $X \leq_{\text{ttt}} Y$ sí, y sólo sí,*

$$\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\} \leq_{\text{icv}} \text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}, \ \textit{para todo } p \in (0, 1).$$

**Demostración:**
Supongamos primero que

$$\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\} \leq_{\text{icv}} \text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}, \ \text{para todo } p \in (0, 1).$$

Por la preservación de las medias por el orden icv y por (3.1), se tiene que $X \leq_{\text{ttt}} Y$.

Supongamos ahora que $X \leq_{\text{ttt}} Y$, probaremos que

$$\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\} \leq_{\text{icv}} \text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}, \ \text{para todo } p \in (0, 1).$$

Dado $p \in (0, 1)$, denotaremos por $F_p^{-1}$ y $G_p^{-1}$ las funciones cuantiles de $\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}$ y $\text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}$, respectivamente. A partir de la caracterización del orden creciente cóncavo dada en el Teorema 1.2.13, bastará probar que

$$\int_0^q F_p^{-1}(u)du \leq \int_0^q G_p^{-1}(u)du, \ \text{para todo } q \in (0, 1).$$

Tendremos que distinguir los casos $p < q$ y $p > q$, puesto que las expresiones de las funciones cuantiles de las variables mínimo cambian en cada caso.

Consideremos $p > q$ en primer lugar. Por (1.13) se da la siguiente igualdad

$$\int_0^q G_p^{-1}(u)du - \int_0^q F_p^{-1}(u)du = \int_0^q G^{-1}(u)du - \int_0^q F^{-1}(u)du.$$

De acuerdo con el Teorema 1.2.51 y dado que $\text{lím}_{p\to 0^+}\left(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)\right)$ es finito, se tiene para todo $q \in (0,1)$ que

$$\frac{1}{1-q}\int_0^q \left(G^{-1}(u) - F^{-1}(u)\right) du \geq \lim_{p\to 0^+} \frac{1}{1-p}\int_0^p \left(G^{-1}(u) - F^{-1}(u)\right) du = 0.$$

Por lo tanto

$$\int_0^q G_p^{-1}(u)du - \int_0^q F_p^{-1}(u)du \geq 0, \text{ para todo } p > q. \tag{3.2}$$

Consideremos ahora $p \leq q < 1$. En este caso, de nuevo por (1.13), se tiene que la función

$$\begin{aligned} H(p,q) &= \int_0^q G_p^{-1}(u)du - \int_0^q F_p^{-1}(u)du \\ &= \int_0^p \left(G^{-1}(u) - F^{-1}(u)\right) du + (q-p)\left(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)\right) \end{aligned}$$

es lineal en $q \in [p,1)$. Claramente

$$H(p,p) = \int_0^p \left(G^{-1}(u) - F^{-1}(u)\right) du \geq 0,$$

como hemos visto previamente y

$$\lim_{q\to 1^-} H(p,q) = E[\text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}] - E[\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}] \geq 0,$$

donde la desigualdad se sigue trivialmente de la hipótesis $X \leq_{\text{ttt}} Y$. Por lo tanto $H(p,q) \geq 0$, para todo $q \in [p,1)$, o equivalentemente,

$$\int_0^q G_p^{-1}(u)du \geq \int_0^q F_p^{-1}(u)du, \text{ para todo } q \in [p,1). \tag{3.3}$$

El resultado se sigue combinando (3.2) y (3.3). ■

Esta caracterización revela la verdadera naturaleza de la ordenación que se establece mediante el orden ttt: la comparación en el sentido del orden creciente cóncavo de las variables aleatorias $\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}$ y $\text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}$. Por lo tanto el orden ttt puede ser utilizado en cualquier contexto donde el principal interés sea la comparación de las colas inferiores.

Este resultado también muestra las similitudes entre el orden ttt y otros órdenes como el ew, que puede ser caracterizado por la ordenación en el orden creciente convexo de las variables $(X - F^{-1}(p))_+$ y $(Y - G^{-1}(p))_+$.

### 3.2.2. Condiciones suficientes para el orden ttt

En esta subsección establecemos conjuntos de condiciones suficientes para el orden ttt, así como ejemplos donde se pueden aplicar estas condiciones. La motivación del estudio es la misma que en el capítulo anterior. Existen situaciones en las que no se verifica el orden st de las variables en ningún sentido y no se dispone de expresión explícita para las transformadas $T_X$ y $T_Y$, por lo que no resulta sencillo verificar analíticamente el orden ttt. El objetivo será dar conjuntos de condiciones suficientes para verificar el orden ttt en este tipo de situaciones.

**Teorema 3.2.2.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas tales que $E(X) \leq E(Y)$. Si existe un punto de corte $p_0 \in (0,1)$ entre las funciones cuantiles tal que $G^{-1}(p) \geq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (0,p_0)$ y $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es decreciente en $p \in (p_0,1)$, entonces*

$$X \leq_{\text{ttt}} Y.$$

**Demostración:**

Probaremos el resultado a partir de (3.1). Consideremos un valor $p \in (0,p_0)$. Por hipótesis $G^{-1}(p) \geq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (0,p_0)$, lo que, a partir de (1.13), podemos reescribir como $\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\} \leq_{\text{st}} \text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}$, para todo $p \in (0,p_0)$ y a partir de (1.14) se tiene que

$$E(\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}) \leq E(\text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}, \text{ para todo } p \in (0,p_0). \tag{3.4}$$

Consideremos ahora un valor $p \in [p_0,1)$ y la variable $(X - F^{-1}(p))_+$ y análogamente para $Y$. La función cuantil de esta variable, que denotaremos por $F^{-1}_{p^+}$, viene dada por la siguiente expresión (ver Belzunce, Hu y Khaledi, 2003)

$$F^{-1}_{p^+}(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } q < p, \\ F^{-1}(q) - F^{-1}(p) & \text{si } q \geq p. \end{cases} \tag{3.5}$$

Probaremos que $(X - F^{-1}(p))_+ \geq_{\text{st}} (Y - G^{-1}(p))_+$, para todo $p \in (p_0,1)$. Por (3.5) esto es equivalente a probar que

$$F^{-1}(q) - F^{-1}(p) \geq G^{-1}(q) - G^{-1}(p), \text{ para todo } p_0 < p < q < 1,$$

lo que es trivial ya que estamos suponiendo que la diferencia de las funciones cuantiles, $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$, es decreciente en $p \in (p_0,1)$. Por lo tanto $(X - F^{-1}(p))_+ \geq_{\text{st}} (Y - G^{-1}(p))_+$, para todo $p \in (p_0,1)$ y, a partir de (1.14), se tiene que

$$E((X - F^{-1}(p))_+) \geq E((Y - G^{-1}(p))_+), \text{ para todo } p \in (p_0,1).$$

Combinando la hipótesis $E(X) \leq E(Y)$ y la igualdad $\text{mín}\{x,t\} = x - (x-t)_+$ con la desigualdad anterior, se tiene que

$$E(\text{mín}\{F^{-1}(p), X\}) \leq E(\text{mín}\{G^{-1}(p), Y\}), \text{ para todo } p \in (p_0,1). \tag{3.6}$$

El resultado se sigue combinando (3.4) y (3.6). ■

Veamos a continuación un ejemplo donde se aplica este teorema para ordenar la familia normal. Aunque esta familia no suele ser de gran utilidad en el contexto de fiabilidad, consideramos este caso por dos razones. En primer lugar, a partir de resultados que se encuentran en la literatura y el teorema que acabamos de dar, es sencillo establecer un resultado para ordenar esta familia en el orden ttt. En segundo lugar, es un ejemplo donde las variables aleatorias no son no negativas. Más tarde focalizaremos la atención en variables aleatorias no negativas, las cuáles son de mayor interés en el contexto de fiabilidad.

**Ejemplo 3.2.3.** ***Familia normal***
*Sean* $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ *e* $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ *tales que* $\mu_1 \leq \mu_2$ *y* $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$*. Si denotamos sus funciones cuantiles por* $F^{-1}$ *y* $G^{-1}$*, respectivamente, es conocido que si* $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$*, entonces* $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ *es decreciente. Adicionalmente, si* $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$*, entonces* $F^{-1}$ *y* $G^{-1}$ *tienen un punto de corte* $p_0 \in (0, 1)$ *tal que* $G^{-1}(p) \geq F^{-1}(p)$*, para todo* $p \in (0, p_0)$ *(ver Taylor, 1983). Por el teorema anterior, podemos establecer el siguiente resultado.*

**Proposición 3.2.4.** *Sean* $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ *e* $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$*. Si se cumplen las siguientes desigualdades:*

*(i)* $\mu_1 \leq \mu_2$,

*(ii)* $\sigma_1 > \sigma_2$,

*entonces* $X \leq_{\text{ttt}} Y$*,* $X \nleq_{\text{st}} Y$ *y* $X \ngeq_{\text{st}} Y$*.*

*La Figura 3.1 ilustra dicha situación para* $X \sim N(2, 9)$ *e* $Y \sim N(3, 4)$*. El cómputo de las transformadas* $T_X$ *y* $T_Y$ *se ha realizado numéricamente mediante simulación, puesto que no presentan expresión explícita en este caso. Nótese que en el caso de igualdad de varianzas,* $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$*, si* $\mu_1 \leq \mu_2$*, entonces* $X \leq_{\text{st}} Y$ *y trivialmente se tiene que* $X \leq_{\text{ttt}} Y$*.*

Veamos ahora ejemplos de variables aleatorias no negativas. Consideramos en primer lugar la familia Davies.

**Ejemplo 3.2.5.** ***Familia Davies***
*Sean* $X \sim D(\lambda_1, \theta_1, C_1)$ *e* $Y \sim D(\lambda_2, \theta_2, C_2)$*. Supondremos* $\theta_1, \theta_2 < 1$ *para que las medias sean finitas, donde* $E(X) = C_1 B(1 + \lambda_1, 1 - \theta_1)$ *y* $E(Y) = C_2 B(1 + \lambda_2, 1 - \theta_2)$*.*

*En este caso estudiaremos la monotonía del cociente de las funciones cuantiles, puesto que facilita los cálculos y veremos que es suficiente para llegar a una conclusión. Equivalentemente, tomando logaritmos sobre el cociente de las funciones cuantiles, estudiaremos la función*

$$H(p) = (\lambda_2 - \lambda_1) \log(p) - (\theta_2 - \theta_1) \log(1 - p).$$

*Es fácil probar que si* $\lambda_1 \geq \lambda_2$ *y* $\theta_1 \geq \theta_2$*, entonces* $H(p)$ *es decreciente en* $p \in (0, 1)$*, siendo* $\lim_{p \to 0^+} G^{-1}(p)/F^{-1}(p) = +\infty$ *y* $\lim_{p \to 1^-} G^{-1}(p)/F^{-1}(p) = 0$*, por lo que la gráfica del*

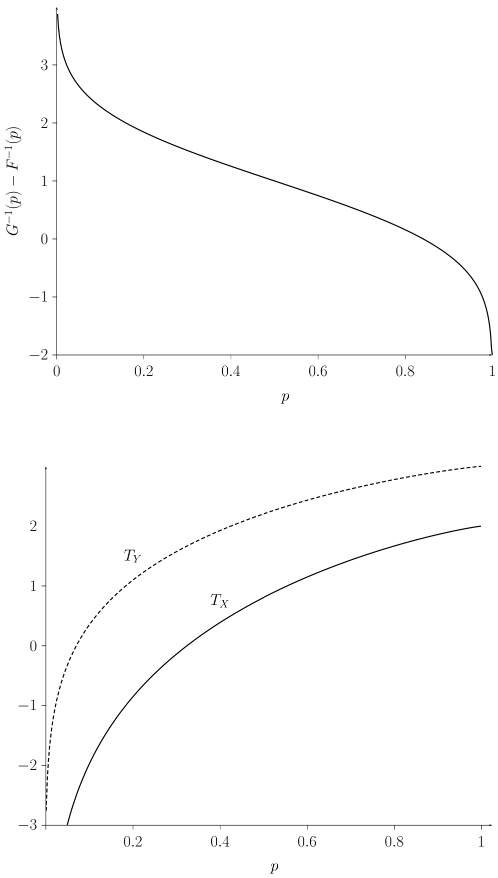



Figura 3.1: *Gráficas de la diferencia de las funciones cuantiles (arriba) y de las transformadas $T_X$ y $T_Y$ (abajo), para $X \sim N(2,9)$ e $Y \sim N(3,4)$.*

*cociente de los cuantiles corta a la recta $y = 1$, es decir, existe un punto $p_0$ tal que $G^{-1}(p) \geq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (0, p_0)$. Puesto que $F^{-1}(p) - G^{-1}(p) = G^{-1}(p)(F^{-1}(p)/G^{-1}(p) - 1)$, tenemos que $F^{-1}(p) - G^{-1}(p)$ es creciente en el intervalo $[p_0, 1)$, al ser producto de dos funciones crecientes y positivas. Por lo tanto, si $E(X) = C_1 B(1 + \lambda_1, 1 - \theta_1) \leq E(Y) = C_2 B(1 + \lambda_2, 1 - \theta_2)$, entonces $X \leq_{\rm ttt} Y$ pero $X \nleq_{\rm st} Y$ y $X \ngeq_{\rm st} Y$. La Figura 3.2 muestra un ejemplo de esta situación para $X \sim D(2, 3/4, 1)$ e $Y \sim D(1, 1/4, 4)$. Podemos entonces establecer el siguiente resultado.*

**Proposición 3.2.6.** *Sean $X \sim D(\lambda_1, \theta_1, C_1)$ e $Y \sim D(\lambda_2, \theta_2, C_2)$ tales que $\theta_1, \theta_2 < 1$. Si se cumplen las siguientes desigualdades:*

*(i)* $\lambda_1 \geq \lambda_2$,

*(ii)* $\theta_1 \geq \theta_2$,

*(iii)* $E(X) = C_1 B(1 + \lambda_1, 1 - \theta_1) \leq E(Y) = C_2 B(1 + \lambda_2, 1 - \theta_2)$,

*entonces* $X \leq_{\text{ttt}} Y$, $X \not\leq_{\text{st}} Y$ *y* $X \not\geq_{\text{st}} Y$.

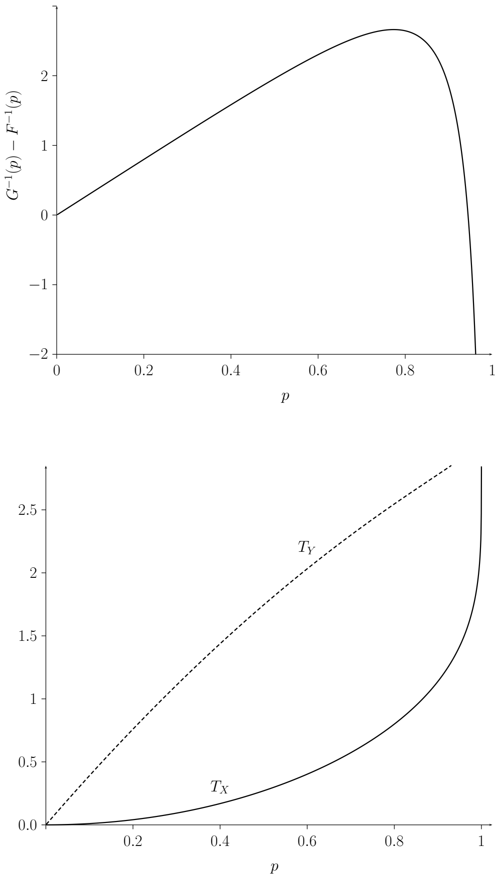



Figura 3.2: *Gráficas de la diferencia de las funciones cuantiles (arriba) y de las transformadas* $T_X$ *y* $T_Y$ *(abajo), para* $X \sim D(2, 3/4, 1)$ *e* $Y \sim D(1, 1/4, 4)$.

En algunas situaciones la diferencia de las funciones cuantiles es inicialmente creciente y posteriormente decreciente, siendo esta propiedad una herramienta de gran interés para verificar el conjunto de condiciones del teorema anterior. Por lo que, a pesar de ser una condición más restrictiva que la que aparece en el enunciado del teorema anterior, el corolario que damos a continuación tiene gran interés.

**Corolario 3.2.7.** *Sean* $X$ *e* $Y$ *dos variables aleatorias con funciones cuantiles* $F^{-1}$ *y* $G^{-1}$, *respectivamente y medias finitas tales que* $E(X) \leq E(Y)$. *Si* $\lim_{p\to 0^+} (G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) \geq 0$, $\lim_{p\to 1^-} (G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) < 0$ *y existe un punto* $p_0 \in (0,1)$ *tal que* $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ *es creciente en* $p \in (0, p_0)$ *y* $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ *es decreciente en* $p \in (p_0, 1)$, *entonces*

$$X \leq_{\text{ttt}} Y.$$

**Observación 3.2.8.** *En el caso en que $F$ y $G$ sean continuas, la condición del corolario anterior para $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$, puede ser escrita en términos de $G^{-1}(F(x)) - x$, es decir, $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es inicialmente decreciente y después creciente sí, y sólo sí, $G^{-1}(F(x)) - x$ tiene el mismo comportamiento.*

A continuación aplicamos este resultado para ordenar las familias Weibull y Pareto.

**Ejemplo 3.2.9.** ***Familia Weibull***
*Sean $X \sim W(\alpha_1, \beta_1)$ e $Y \sim W(\alpha_2, \beta_2)$. De acuerdo con la observación anterior, estudiamos el comportamiento de la función*

$$H(x) = G^{-1}(F(x)) - x = (\alpha_2)^{\frac{1}{\beta_2}} \left(\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_2}} - x, \text{ para todo } x \geq 0.$$

*Derivando, se tiene que si $\beta_1 < \beta_2$, entonces $H(x)$ alcanza un máximo absoluto en el punto*

$$x^* = \alpha_1 \left(\frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_2 \beta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}}.$$

*Puesto que el extremo inferior del soporte de ambas variables es cero, se tiene trivialmente que*
*$\lim_{p \to 0^+}(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) = 0$. Por otro lado es fácil comprobar que*
*$\lim_{p \to 1^-}(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) = -\infty$. Por tanto, si suponemos que $E(X) = \alpha_1 \Gamma\left(\frac{\beta_1+1}{\beta_1}\right) \leq \alpha_2 \Gamma\left(\frac{\beta_2+1}{\beta_2}\right) = E(Y)$, entonces $X \leq_{\text{ttt}} Y$ y además $X \nleq_{\text{st}} Y$ y $X \ngeq_{\text{st}} Y$. La Figura 3.3 ilustra esta situación para $X \sim W\left(1, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ e $Y \sim W(2, 1)$. Podemos entonces establecer el siguiente resultado.*

**Proposición 3.2.10.** *Sean $X \sim W(\alpha_1, \beta_1)$ e $Y \sim W(\alpha_2, \beta_2)$. Si se cumplen las siguientes desigualdades:*

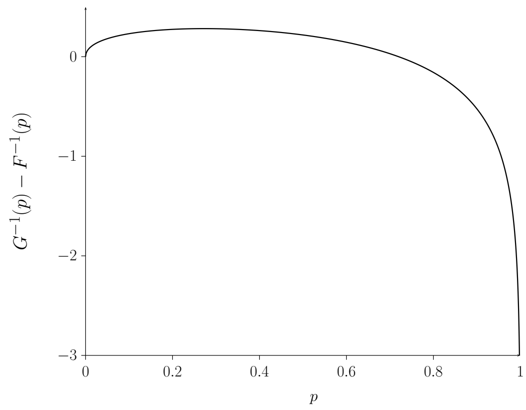
*(i)* $\beta_1 < \beta_2$,

*(ii)* $E(X) = \alpha_1 \Gamma\left(\frac{\beta_1+1}{\beta_1}\right) \leq \alpha_2 \Gamma\left(\frac{\beta_2+1}{\beta_2}\right) = E(Y)$,

*entonces $X \leq_{\text{ttt}} Y$, $X \nleq_{\text{st}} Y$ y $X \ngeq_{\text{st}} Y$.*

**Ejemplo 3.2.11.** ***Familia Pareto***
*Sean $X \sim P(a_1, k_1)$ e $Y \sim P(a_2, k_2)$. Dado que las medias deben ser finitas, asumimos $a_1, a_2 \geq 1$. Estudiamos el comportamiento de*

$$H(p) = G^{-1}(p) - F^{-1}(p) = \frac{k_2}{(1-p)^{1/a_2}} - \frac{k_1}{(1-p)^{1/a_1}}, \text{ para todo } x \geq 0.$$



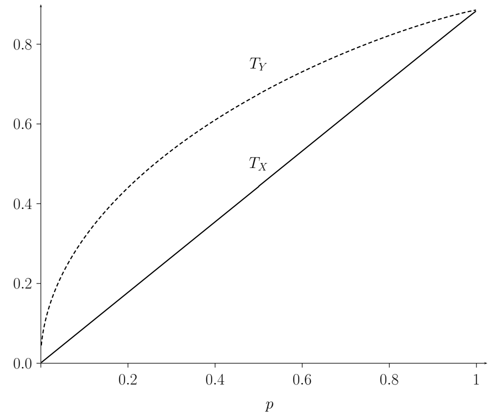




Figura 3.3: *Gráficas de la diferencia de las funciones cuantiles (arriba) y de las transformadas $T_X$ y $T_Y$ (abajo), para $X \sim W\left(1, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ e $Y \sim W(2,1)$.*

*Derivando observamos que $H(p)$ alcanza un máximo absoluto en el punto*

$$p_0 = 1 - \left(\frac{a_1 k_2}{a_2 k_1}\right)^{\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)^{-1}}.$$

*Siempre que $a_1 < a_2$ y $k_1 a_2 < k_2 a_1$, se tiene que $p_0 \in (0,1)$. Combinando las dos desigualdades, se tiene que $\lim_{p \to 0^+} G^{-1}(p) - F^{-1}(p) = k_2 - k_1 \geq 0$ y por otro lado $\lim_{p \to 1^-} G^{-1}(p) - F^{-1}(p) = -\infty$. Bajo el supuesto adicional $E(X) = k_1 a_1/(a_1 - 1) \leq E(Y) = k_2 a_2/(a_2 - 1)$, se tiene que $X \leq_{\text{ttt}} Y$ y además $X \not\leq_{\text{st}} Y$ y $X \not\geq_{\text{st}} Y$. La Figura 3.4 muestra un ejemplo de esta situación para $X \sim P(2,1)$ e $Y \sim P(3, 1.75)$.*

*En el caso $a_1 < a_2$, $k_1 a_2 \geq k_2 a_1$ y $k_2 > k_1$ la función $H(p)$ es decreciente, siendo además inicialmente positiva y $\lim_{p \to 1^-} G^{-1}(p) - F^{-1}(p) = -\infty$. Bajo el supuesto $E(X) = k_1 a_1/(a_1 - 1) \leq E(Y) = k_2 a_2/(a_2 - 1)$, entonces $X \leq_{\text{ttt}} Y$ y además $X \not\leq_{\text{st}} Y$ y $X \not\geq_{\text{st}} Y$.*

*Podemos entonces establecer el siguiente resultado.*

**Proposición 3.2.12.** *Sean* $X \sim P(a_1, k_1)$ *e* $Y \sim P(a_2, k_2)$ *tales que* $1 < a_1 < a_2$ *y* $E(X) = k_1 a_1/(a_1 - 1) \leq E(Y) = k_2 a_2/(a_2 - 1)$. *Si se cumplen alguno de los siguientes conjuntos de desigualdades:*

*(i)* $k_1 a_2 < k_2 a_1$,

*(ii)* $k_1 a_2 \geq k_2 a_1$ *y* $k_2 > k_1$,

*entonces* $X \leq_{\mathrm{ttt}} Y$, $X \not\leq_{\mathrm{st}} Y$ *y* $X \not\geq_{\mathrm{st}} Y$.

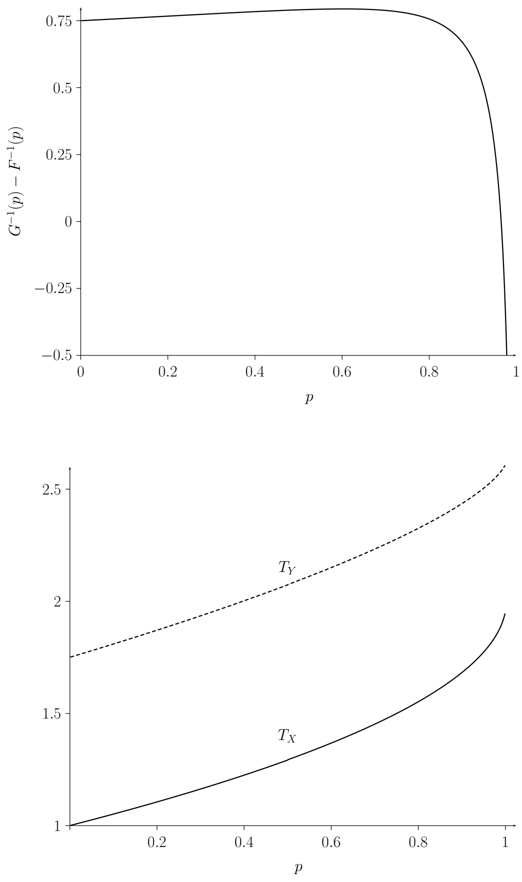
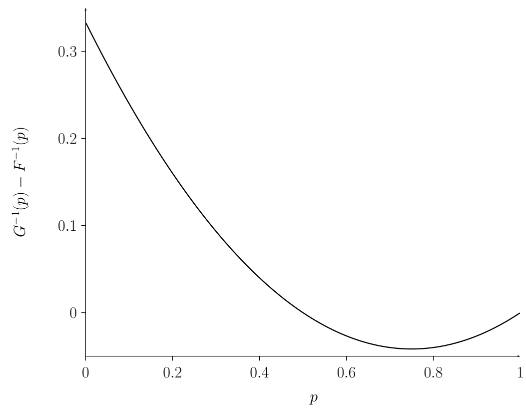



Figura 3.4: *Gráficas de la diferencia de las funciones cuantiles (arriba) y de las transformadas* $T_X$ *y* $T_Y$ *(abajo), para* $X \sim P(2, 1)$ *e* $Y \sim P(3, 1.75)$.

A continuación exponemos un caso de dos variables aleatorias que no verifican los conjuntos de condiciones suficientes anteriores pero, sin embargo, se ordenan en el orden ttt. Este ejemplo motiva la búsqueda de otros conjuntos de condiciones suficientes para el orden ttt.

**Ejemplo 3.2.13.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}(p) = p$ y $G^{-1}(p) = \frac{2}{3}p^2 + \frac{1}{3}$. En la Figura 3.5 podemos ver que en este caso no se verifican las condiciones del Teorema 3.2.2 pero, sin embargo, se da el orden ttt, como puede probarse analíticamente.*



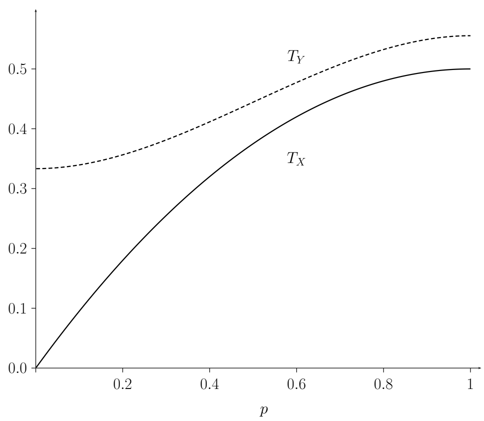




Figura 3.5: *Gráficas de la diferencia de las funciones cuantiles (arriba) y de las transformadas $T_X$ y $T_Y$ (abajo), para $X$ e $Y$ dadas en el Ejemplo 3.2.13.*

Establecemos el nuevo conjunto de condiciones suficientes para el orden ttt, de nuevo bajo el supuesto adicional de que no se verifica el orden st.

**Teorema 3.2.14.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas. Si existe un punto de corte $p_0 \in (0, 1)$ entre las funciones cuantiles tal que $G^{-1}(p) \geq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (0, p_0)$ y $\sup_{p\in(p_0,1)}\{F^{-1}(p) - G^{-1}(p)\} \leq E(Y) - E(X)$, entonces*

$$X \leq_{\text{ttt}} Y.$$

**Demostración:**

Consideremos un valor $p \in (0, p_0)$. Por hipótesis $G^{-1}(p) \geq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (0, p_0)$, o equivalentemente, a partir de (1.13), se tiene que $\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\} \leq_{\text{st}} \text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}$, para todo $p \in (0, p_0)$. A partir de (1.14) se obtiene que

$$E(\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}) \leq E(\text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}), \text{ para todo } p \in (0, p_0). \tag{3.7}$$

Consideremos ahora un valor $p \in [p_0, 1)$ y las variables aleatorias $\text{máx}\{X, F^{-1}(p)\}$ y $\text{máx}\{Y, G^{-1}(p)\}$. Análogamente a (1.13), se tiene que la expresión de su función cuantil, la cual denotaremos por $F_p^{-1}$, viene dada por

$$F_p^{-1}(q) = \begin{cases} F^{-1}(p) & \text{si } 0 < q < p, \\ F^{-1}(q) & \text{si } p \leq q < 1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Por hipótesis $G^{-1}(p) \leq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (p_0, 1)$, lo que es equivalente a que $\text{máx}\{X, F^{-1}(p)\} \geq_{st} \text{máx}\{Y, G^{-1}(p)\}$, para todo $p \in (p_0, 1)$, a partir de (3.8). Por lo tanto, se tiene trivialmente que

$$E(\text{máx}\{X, F^{-1}(p)\}) \geq E(\text{máx}\{Y, G^{-1}(p)\}), \text{ para todo } p \in (p_0, 1).$$

Por hipótesis $\sup_{p \in (p_0, 1)}\{F^{-1}(p) - G^{-1}(p)\} \leq E(Y) - E(X)$, entonces, para todo $p \in [p_0, 1)$, se tiene que

$$E(X) + F^{-1}(p) \leq E(Y) + G^{-1}(p)$$

y combinando esta desigualdad con la igualdad $\text{mín}\{x, t\} = x + t - \text{máx}\{x, t\}$ se tiene que

$$E(\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}) \leq E(\text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}), \text{ para todo } p \in [p_0, 1), \tag{3.9}$$

El resultado se sigue combinando (3.7) y (3.9). ■

El ejemplo anterior verifica este nuevo conjunto de condiciones suficientes. En concreto, el punto de corte de las funciones cuantiles es $p_0 = 0.5$ y $\sup_{p \in (p_0, 1)}\{F^{-1}(p) - G^{-1}(p)\}$ se alcanza en $p = 0.75$, donde $\sup_{p \in (p_0, 1)}\{F^{-1}(p) - G^{-1}(p)\} = \frac{1}{24} \leq E(Y) - E(X) = \frac{1}{18}$.

### 3.2.3. Generalizaciones

En esta subsección se caracteriza el orden ttt generalizando los teoremas 3.2.2 y 3.2.7. Consideramos el caso en el que el número de extremos relativos de la diferencia de las funciones cuantiles es mayor que uno. Aunque podemos encontrar aplicaciones de este resultado, éste tiene mayor interés desde un punto de vista teórico. La principal razón es que se necesitan evaluar las transformadas $T_X$ y $T_Y$ en ciertos puntos.

**Teorema 3.2.15.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$ y transformadas $T_X$ y $T_Y$, respectivamente. Si existe un punto $p_0 \in (0, 1)$ tal que $G^{-1}(p) \geq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (0, p_0)$ y $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ tiene $n \geq 1$ extremos relativos en los puntos $p_0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n < 1$. Entonces $X \leq_{\text{ttt}} Y$ sí, y solo sí, $E(X) \leq E(Y)$, el número de extremos relativos es par, $n = 2m$, siendo $p_n$ un máximo y para $j = 1, \ldots, m$ se cumplen las desigualdades*

$$T_X(p_{2j-1}) \leq T_Y(p_{2j-1}).$$

**Demostración:**

La implicación directa es trivial, ya que si se verifica el orden ttt en todos los puntos, en particular se verificará en un subconjunto de puntos. Consideremos ahora el recíproco, veamos que bajo las condiciones del enunciado se tiene que $X \leq_{ttt} Y$. A partir de (3.1) se sigue que $X \leq_{\text{ttt}} Y$ sí, y sólo sí,

$$E(\text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}) - E(\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}) \geq 0, \text{ para todo } p \in (0,1).$$

A partir de la igualdad $E(X) = \int_0^1 F^{-1}(p)dp$ y de (3.5) se tiene que

$$E(\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}) = E(X) - \int_p^1 \left(F^{-1}(q) - F^{-1}(p)\right) dq.$$

Por lo tanto, verificar si se cumple el orden ttt será equivalente a estudiar si

$$E(\text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}) - E(\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}) =$$

$$= E(Y) - E(X) + \int_p^1 \left(G^{-1}(p) - F^{-1}(p) - (G^{-1}(q) - F^{-1}(q))\right) dq \geq 0,$$

para todo $p \in (0,1)$. Definimos la funciones $\delta(p)$ y $\tilde{\delta}(p)$ como sigue

$$\delta(p) = \int_p^1 \left(G^{-1}(p) - F^{-1}(p) - (G^{-1}(q) - F^{-1}(q))\right) dq$$

y

$$\tilde{\delta}(p) = E(\text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}) - E(\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}) = E(Y) - E(X) + \delta(p).$$

Tenemos que probar que $\tilde{\delta}(p)$ es positiva para todo $p \in (0,1)$. Para probarlo, veremos que el comportamiento de la función $\delta(p)$ es el mismo que el de la diferencia de las funciones cuantiles, por lo que también lo es el de la función $\tilde{\delta}(p)$. Veamos que la función $\delta(p)$ es creciente (decreciente) en los intervalos donde la función $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es creciente (decreciente).

Consideremos un intervalo $(p_i, p_{i+1})$ donde $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es creciente y sean $q_1 \leq q_2$ pertenecientes a dicho intervalo. En este caso se tiene que

$$\begin{aligned} \delta(q_1) = &\int_{q_1}^{q_2} \left(G^{-1}(q_1) - F^{-1}(q_1) - (G^{-1}(q) - F^{-1}(q))\right) dq \\ &+ \int_{q_2}^1 \left(G^{-1}(q_1) - F^{-1}(q_1) - (G^{-1}(q) - F^{-1}(q))\right) dq \leq \\ &\leq \int_{q_2}^1 \left(G^{-1}(q_1) - F^{-1}(q_1) - (G^{-1}(q) - F^{-1}(q))\right) dq \leq \delta(q_2), \end{aligned}$$

donde ambas desigualdades se siguen del crecimiento de $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$. Equivalentemente, se tiene que $\tilde{\delta}(q_1) \leq \tilde{\delta}(q_2)$ para todo $q_1 \leq q_2$ tal que $q_1, q_2 \in (p_i, p_{i+1})$. Por lo que $\tilde{\delta}(p)$ es creciente en los intervalos donde $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es creciente. De la misma forma invirtiendo las desigualdades, obtenemos que $\tilde{\delta}(p)$ es decreciente en los intervalos donde $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es decreciente. Por lo tanto, los puntos mínimos de la función $\tilde{\delta}(p)$ son los mismos que los de $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$, es decir, los puntos impares serán los mínimos al ser $p_{2m}$ un máximo. Puesto que las desigualdades que aparecen en el enunciado del teorema son equivalentes a que $\tilde{\delta}(p) \geq 0$ en los puntos mínimos, se tiene que $\tilde{\delta}(p) \geq 0$, para todo $p \in (p_0, p_n)$. Por otro lado, siguiendo la demostración del Teorema 3.2.2 se tiene que la función $\tilde{\delta}(p)$ es positiva en los intervalos $(0, p_0)$ y $(p_n, 1)$. Por lo que queda probado el teorema.

■

**Observación 3.2.16.** *Obsérvese que en el teorema anterior no es necesario distinguir el caso en el que el número de extremos relativos es par con el impar. La razón es que si el número de extremos relativos es impar, tenemos que $p_1$ es un máximo, es decir, la diferencia de las funciones cuantiles es creciente en $p \in (p_0, p_1)$, siendo por hipótesis $G^{-1}(p) \geq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (0, p_0)$. Combinando ambas condiciones se tiene que $G^{-1}(p) \geq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (0, p_1)$ y podemos reducir este caso al caso en el que el número de extremos relativos es par.*

Veamos ahora la generalización del Corolario 3.2.7.

**Teorema 3.2.17.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$ y transformadas $T_X$ y $T_Y$, respectivamente. Supongamos que $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ tiene $n \geq 1$ extremos relativos en los puntos $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n < 1$. Entonces $X \leq_{\text{ttt}} Y$ sí, y sólo sí, $E(X) \leq E(Y)$ y se satisface uno de los siguientes conjuntos de condiciones:*

*i) El número de extremos relativos es impar, $n = 2m + 1$, siendo $p_n$ un máximo, para $j = 1, \ldots, m$ se cumplen las desigualdades*

$$T_X(p_{2j}) \leq T_Y(p_{2j})$$

*y además $\lim_{p \to 0}(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) \geq 0$.*

*ii) El número de extremos relativos es par, $n = 2m$, siendo $p_n$ un máximo y para $j = 1, \ldots, m$ se cumplen las desigualdades*

$$T_X(p_{2j-1}) \leq T_Y(p_{2j-1}).$$

**Demostración:**

La demostración se sigue trivialmente a partir del teorema anterior con la salvedad de que tenemos que distinguir el caso en el que el número de extremos relativos es par con el impar. La razón es que los mínimos de la función $\tilde{\delta}(p)$, definida en el teorema anterior, varían teniendo en cuenta este hecho, ya que para que se verifique el orden ttt tenemos que exigir que el último extremo relativo sea un máximo. En el caso impar, la función $\tilde{\delta}(p)$ empieza creciendo, por lo que hay que exigirle que empiece positiva, o equivalentemente, $\lim_{p\to 0}(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) \geq 0$.

■

### 3.2.4. Comparación de estadísticos ordenados generalizados

La mayoría de resultados sobre ordenación de estadísticos ordenados generalizados que se encuentran en la literatura están dedicados a la comparación de los mismos en el orden estocástico usual, el orden cociente verosimilitudes, los órdenes razón de fallo y razón de fallo inverso y el orden en dispersión. Sin embargo, existen muy pocos resultados para otros órdenes estocásticos como el ttt. En concreto, Kochar, Li y Shaked (2002) dieron el siguiente resultado. Sean $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_n$ dos conjuntos de variables aleatorias i.i.d., si $X_1 \leq_{\text{ttt}} Y_1$, entonces $\min\{X_1, \ldots, X_n\} \leq_{\text{ttt}} \min\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, en el caso en que $X_1$ e $Y_1$ son no negativas. Posteriormente, Li y Yam (2005) probaron que si $X_1$ e $Y_1$ son no negativas y se verifica $\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leq_{\text{ttt}} \max\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, entonces $X_1 \leq_{\text{ttt}} Y_1$. Otros resultados para estadísticos ordenados pueden verse en Li y Shaked (2004) y Wang (2009) y para estadísticos ordenados generalizados en Qiu y Wang (2007). El objetivo de esta sección es dar nuevos resultados en esta línea de investigación, los cuáles se pueden combinar con otros ya existentes proporcionando a su vez nuevos resultados. Recordamos a continuación un resultado de Barlow y Proschan (1975) que usaremos a lo largo de esta subsección.

**Lema 3.2.18.** *Sea $W$ una medida sobre el intervalo $(a, b)$ no necesariamente no negativa, donde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Sea $h$ una función no negativa definida sobre el intervalo $(a, b)$.*

*a) Si $\int_t^b dW(u) \geq 0$, para todo $t \in (a, b)$ y $h$ es creciente, entonces $\int_a^b h(u)dW(u) \geq 0$, para todo $t \in (a, b)$.*

*b) Si $\int_a^t dW(x) \geq 0$, para todo $t \in (a, b)$ y $h$ es decreciente, entonces $\int_a^b h(u)dW(u) \geq 0$, para todo $t \in (a, b)$.*

El siguiente teorema se sigue trivialmente a partir del Teorema 3.9 de Belzunce, Mercader y Ruíz (2005), el cuál también se aplicará en esta memoria.

**Teorema 3.2.19.** *Sean $(X_{(1,n,\tilde{m},k)}, \ldots, X_{(n,n,\tilde{m},k)})$ y $(X_{(1,n,\tilde{m}',k')}, \ldots, X_{(n,n,\tilde{m}',k')})$ dos vectores de estadísticos ordenados generalizados basados en una misma función de distribución continua $F$ con parámetros $k$ y $m_i$, $i = 1, \ldots, n-1$ y $k'$ y $m'_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, respectivamente. Si $k \geq k'$ y $m_i \geq m'_i$, para $i = 1, \ldots, n-1$, entonces $X_{(r,n,\tilde{m},k)} \leq_{\text{st}} X_{(r,n,\tilde{m}',k')}$.*

Presentamos en primer lugar el teorema principal de esta sección.

**Teorema 3.2.20.** *Sean $l, n \in \mathbb{N}$, $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{\text{máx}\{l,n\}-1} \in \mathbb{R}$ y $m_i \geq -1$, para todo $i$. Denotamos por $X_{(i,j,\widetilde{m}_j,k)}$ e $Y_{(i,j,\widetilde{m}_j,k)}$ los $i$-ésimos estadísticos ordenados generalizados basados en dos funciones de distribución continuas $F$ y $G$, respectivamente, con extremos inferiores del soporte finitos e iguales, que denotaremos por $a$, donde el tamaño de muestra, $j$, es $n$ ó $l$. Si existe $1 \leq r \leq n$ tal que $X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{ttt}} Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}$, entonces*

$$X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)} \leq_{\text{ttt}} Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}, \text{ para todo } s \leq r, \ l - s \geq n - r.$$

**Demostración:**

Sean $s \leq r$ y $l - s \geq n - r$. Denotaremos por $\overline{F}_{*,r}$ y $\overline{F}_{*,r}^{-1}$ la funciones de supervivencia de $X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}$ y su inversa, respectivamente y por $\overline{F}_{*',s}$ y $\overline{F}_{*',s}^{-1}$ la funciones de supervivencia de $X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}$ y su inversa, respectivamente y análogamente para $Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}$ y $Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}$ reemplazando $F$ por $G$. Por (1.7), se tiene que $X(r,n,\widetilde{m}_n,k) \leq_{\text{ttt}} Y(r,n,\widetilde{m}_n,k)$ es equivalente a

$$\int_a^{\overline{F}_{*,r}^{-1}(p)} \overline{F}_{*,r}(u)du \leq \int_a^{\overline{G}_{*,r}^{-1}(p)} \overline{G}_{*,r}(u)du, \text{ para todo } p \in (0,1).$$

Haciendo el cambio de variable $u = \overline{G}_{*,r}^{-1}\overline{F}_{*,r}(u')$ en la integral de la derecha se tiene que

$$\int_a^{\overline{F}_{*,r}^{-1}(p)} \overline{F}_{*,r}(u)du \leq \int_a^{\overline{F}_{*,r}^{-1}(p)} \overline{F}_{*,r}(u')d\left[\overline{G}_{*,r}^{-1}(\overline{F}_{*,r}(u'))\right], \text{ para todo } p \in (0,1),$$

o equivalentemente,

$$\int_a^{\overline{F}_{*,r}^{-1}(p)} \overline{F}_{*,r}(u)d\left[\overline{G}_{*,r}^{-1}(\overline{F}_{*,r}(u)) - u\right] \geq 0, \text{ para todo } p \in (0,1).$$

Por (1.12), se tiene que $\overline{G}_{*,r}^{-1}(\overline{F}_{*,r}(u)) = \overline{G}^{-1}(\overline{F}(u)) = \overline{G}_{*',s}^{-1}(\overline{F}_{*',s}(u))$, por lo que podemos reescribir la desigualdad anterior como sigue

$$\int_a^{\overline{F}_{*,r}^{-1}(p)} \overline{F}_{*,r}(u)d\left[\overline{G}_{*',s}^{-1}(\overline{F}_{*',s}(u)) - u\right] \geq 0, \text{ para todo } p \in (0,1).$$

Consideramos ahora la función $h(u) = \overline{F}_{*',s}(u)/\overline{F}_{*,r}(u)$. Por el Lema 1.1.27, la función $h(u)$ es decreciente, por lo que aplicando el Lema 3.2.18 se tiene que

$$\int_a^{\overline{F}_{*,r}^{-1}(p)} \overline{F}_{*',s}(u)d\left[\overline{G}_{*',s}^{-1}(\overline{F}_{*',s}(u)) - u\right] \geq 0, \text{ para todo } p \in (0,1).$$

Tomando $p = \overline{F}_{*,r}(\overline{F}_{*',s}^{-1}(q))$ en la última desigualdad se obtiene que

$$\int_a^{\overline{F}_{*',s}^{-1}(q)} \overline{F}_{*',s}(u)du \leq \int_a^{\overline{G}_{*',s}^{-1}(q)} \overline{G}_{*',s}(u)du, \text{ para todo } p \in (0,1),$$

que es equivalente a $X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)} \leq_{\text{ttt}} Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}$ a partir de (1.7). ■

Este resultado es una generalización, por un lado, del Teorema 3.1 de Qiu y Wang (2007), quienes establecieron el resultado para tamaños de muestra iguales y, por otro lado, del Teorema 3.1 (1) de Wang (2009), quien estableció el resultado para los estadísticos ordenados usuales.

Este resultado se puede combinar con el Teorema 3.2.19, para establecer un nuevo resultado que permite comparar estadísticos ordenados generalizados basados en distribuciones distintas y con distintos parámetros.

**Teorema 3.2.21.** *Sean $l, n \in \mathbb{N}$, $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{\text{máx}\{l,n\}-1} \in \mathbb{R}$. Denotaremos por $X_{(i,n,\widetilde{m}_n,k)}$ y $Y_{(i,n,\widetilde{m}_n,k)}$ los i-ésimos estadísticos ordenados generalizados basados en dos funciones de distribución continuas $F$ y $G$, respectivamente, con extremos inferiores del soporte finitos e iguales, que denotaremos por $a$. Sea $X_{(i,l,\widetilde{m}'_l,k')}$ $\left(Y_{(i,l,\widetilde{m}'_l,k')}\right)$ el i-ésimo estadístico ordenado generalizado basado en la función de distribución continua $F$ $(G)$ con parámetros $k'$ y $m'_i$, $i = 1, \ldots, l-1$, tal que $k' \geq (\leq) k$ y $m'_i \geq (\leq) m_i$, para todo $i = 1, \ldots, l-1$. Si existe $1 \leq r \leq n$ tal que $X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{ttt}} Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}$, entonces*

$$X_{(s,l,\widetilde{m}'_l,k')} \leq_{\text{ttt}} Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)} \left(X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)} \leq_{\text{ttt}} Y_{(s,l,\widetilde{m}'_l,k')}\right), \text{ para todo } s \leq r,\ l-s \geq n-r.$$

**Demostración:**

Sean $s \leq r$, $l-s \geq n-r$, $k' \geq k$ y $m'_i \geq m_i$, para todo $i = 1, \ldots, l-1$ (el otro caso se sigue invirtiendo las desigualdades). Por el teorema anterior se tiene que

$$X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)} \leq_{\text{ttt}} Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}. \tag{3.10}$$

Por otro lado de las hipótesis y del Teorema 3.2.19 se observa que $X_{(s,l,\widetilde{m}'_l,k')} \leq_{\text{st}} X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}$, lo que implica, a partir de (1.28), que

$$X_{(s,l,\widetilde{m}'_l,k')} \leq_{\text{ttt}} X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}. \tag{3.11}$$

Combinando (3.10) y (3.11) se concluye que

$$X_{(s,l,\widetilde{m}'_l,k')} \leq_{\text{ttt}} Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}.$$

■

A continuación se describen algunas consecuencias del Teorema 3.2.20. Consideremos los primeros estadísticos ordenados generalizados, es decir, tomamos $r = n = 1$ y $s = 1 \leq l$ en el Teorema 3.2.20 y establecemos el siguiente corolario.

**Corolario 3.2.22.** *Sean $\mathbf{X} = (X_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}, ..., X_{(n,n,\widetilde{m}_n,k)})$ e $\mathbf{Y} = (Y_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}, ..., Y_{(n,n,\widetilde{m}_n,k)})$ los vectores de estadísticos ordenados generalizados basados en dos funciones de distribución continuas $F$ y $G$, respectivamente con extremos inferiores del soporte finitos e iguales. Si $X_{(1,1,m,k)} \leq_{\text{ttt}} Y_{(1,1,m,k)}$, entonces*

$$X_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{ttt}} Y_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)},$$

*para todo $\widetilde{m}_n = (m_1, m_2, ..., m_{n-1})$ tal que $m_1 = m$, $m_i$ es decreciente en $i$ y $m_i \geq -1$, para todo $i$.*

El siguiente lema será utilizado para dar un resultado general donde se demuestra que la ordenación de las variables de partida en el orden ttt implica la ordenación de los mínimos de los vectores de estadísticos ordenados generalizados.

**Lema 3.2.23.** *Sean $X_{(1,1,m,k)}$ e $Y_{(1,1,m,k)}$ los primeros estadísticos ordenados generalizados basados en dos funciones de distribución continuas $F$ y $G$, respectivamente, con extremos inferiores del soporte finitos e iguales. Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución $F$ y $G$, respectivamente. Si $X \leq_{\text{ttt}} Y$, entonces $X_{(1,1,m,k)} \leq_{\text{ttt}} Y_{(1,1,m,k)}$.*

**Demostración:**

En este caso particular se tiene que $\overline{F}_{X_{(1,1,m,k)}}(x) = \left(\overline{F}(x)\right)^k$, por lo que la condición $X_{(1,1,m,k)} \leq_{\text{ttt}} Y_{(1,1,m,k)}$, es equivalente a que

$$\int_a^{\overline{F}^{-1}(p^{1/k})} \left(\overline{F}(x)\right)^k d\left(\overline{G}^{-1}(\overline{F}(x)) - x\right) \geq 0, \text{ para todo } p \in (0,1). \tag{3.12}$$

Por (1.7) la condición $X \leq_{\text{ttt}} Y$ es equivalente a

$$\int_a^{\overline{F}^{-1}(q)} \overline{F}(x) d\left(\overline{G}^{-1}(\overline{F}(x)) - x\right) \geq 0, \text{ para todo } p \in (0,1).$$

Consideramos la función $h(x) = \left(\overline{F}(x)\right)^{k-1}$. Tomando $q = p^{1/k}$ en la última desigualdad y aplicando el Lema 3.2.18 se tiene (3.12). ■

Combinando los dos últimos resultados podemos establecer el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.24.** *Sean $\mathbf{X} = (X_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}, ..., X_{(n,n,\widetilde{m}_n,k)})$ e $\mathbf{Y} = (Y_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}, ..., Y_{(n,n,\widetilde{m}_n,k)})$ dos vectores de estadísticos ordenados generalizados basados en dos funciones de distribución continuas $F$ y $G$, respectivamente. Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución $F$ y $G$, respectivamente. Si $X \leq_{\text{ttt}} Y$, entonces*

$$X_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{ttt}} Y_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)},$$

*donde $m_i$ es decreciente en $i$ y verifica $m_i \geq -1$, para todo $i$.*

Este resultado es una generalización del Teorema 5.i) de Kochar, Li y Shaked (2002), que hemos mencionado en la introducción de esta sección, en el que se establece el resultado para los estadísticos ordenados usuales. Desafortunadamente, para el teorema en esta misma línea, que vimos en la introducción, dado por Li y Yam (2005), no existe hasta ahora una versión para los estadísticos ordenados generalizados, siendo todavía una cuestión abierta. Nosotros hemos probado el resultado para el caso de los valores récord, el cuál se sigue como caso particular del siguiente teorema.

**Teorema 3.2.25.** *Sean $\mathbf{X} = (X_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}, ..., X_{(n,n,\widetilde{m}_n,k)})$ e $\mathbf{Y} = (Y_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}, ..., Y_{(n,n,\widetilde{m}_n,k)})$ dos vectores de estadísticos ordenados generalizados basados en dos funciones de distribución continuas $F$ y $G$, respectivamente, con extremos inferiores del soporte finitos e iguales, que denotaremos por $a$. Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución $F$ y $G$, respectivamente. Si $X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{ttt}} Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}$, donde $\widetilde{m}_{n_i} = -1$, para todo $i, n \in N$ y $k = 1$, entonces $X \leq_{\text{ttt}} Y$.*

**Demostración:**

A lo largo de esta demostración seguiremos la misma notación que en la prueba del Teorema 3.2.20. De forma análoga a este teorema, se tiene que $X_{(r,n,\tilde{m}_n,k)} \leq_{\text{ttt}} Y_{(r,n,\tilde{m}_n,k)}$ es equivalente a

$$\int_a^{\overline{F}_{*,r}^{-1}(p)} \overline{F}_{*,r}(u)d\left[\overline{G}^{-1}(\overline{F}(u)) - u\right] \geq 0, \text{ para todo } p \in (0,1). \tag{3.13}$$

Consideremos la función $h(u) = \frac{\overline{F}(u)}{\overline{F}_{*,r}(u)}$, si demostramos que $h(u)$ es decreciente y tomamos $p = \overline{F}_{*,r}(\overline{F}^{-1}(q))$ en (3.13), aplicando el Lema 3.2.18 obtenemos que

$$\int_a^{\overline{F}^{-1}(q)} \overline{F}(u)d\left[\overline{G}^{-1}(\overline{F}(u)) - u\right] \geq 0, \text{ para todo } p \in (0,1),$$

lo que concluye la prueba. Veamos que efectivamente $h(u)$ es decreciente. Teniendo en cuenta la representación de los estadísticos ordenados generalizados dada en el Teorema 1.1.26, se tiene que

$$h(u) = \frac{\overline{F}(u)}{\overline{L}_r(-log(\overline{F}(u)))},$$

donde recordamos que $\overline{L}_r$ es la función de supervivencia de la convolución de las $r$ primeras variables aleatorias independientes $B_j \sim Exp(\gamma_j)$, es decir $\sum_{j=1}^r B_j$, donde en este caso particular $\gamma_j = 1$, para $j = 1, \ldots, r$. La función $h(u)$ será decreciente sí, y sólo sí, $h(u') = \frac{u'}{\overline{L}_r(-log(u'))}$ es creciente en $u' \in (0,1)$, donde $u' = \overline{F}(u)$. Derivando obtenemos que esta condición es equivalente a

$$\overline{L}_r(-log(u')) \geq -\overline{L}'_r(-log(u')), \text{ para todo } u' \in (0,1),$$

lo que es equivalente a que la razón de fallo de la convolución $\sum_{j=1}^r B_j$, que denotaremos por $r_{*,r}$, sea menor o igual que 1. Dado que la convolución de variables IFR es IFR (ver Barlow y Proschan, 1975) entonces $r_{*,r}$ es creciente. Además se verifica $\lim_{x\to\infty} r_{*,r}(x) = 1$, por lo tanto $r_{*,r}(x) \leq 1$, para todo $x \in (0, \infty)$. ■

**Observación 3.2.26.** *La prueba del teorema anterior puede ser reescrita fuera del contexto de los estadísticos ordenados generalizados, particularizando al caso de los valores récord. Sin embargo, hemos escrito el resultado de esta forma para resaltar que la esencia de la demostración radica en el hecho de que la razón de fallo de la convolución* $\sum_{j=1}^r B_j$ *es menor o igual que uno. Por tanto esta demostración será válida para todos aquellos casos de estadísticos ordenados generalizados en los que se verifique esta propiedad. En general, la razón de fallo de la convolución de exponenciales independientes es siempre creciente, como mencionamos en la prueba, y tiende al mínimo de los parámetros de éstas,* $\min(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ *(ver Boland, El-Neweihi y Proschan, 1994). Por lo tanto, siempre que para algún* $1 \leq i \leq n$ *se verifique* $\gamma_i \leq 1$*, entonces la razón de fallo de la convolución* $\sum_{j=1}^r B_j$ *será menor o igual* *que uno en todo el soporte para todo $r \geq i$. Éste es el caso del teorema anterior en el que $\gamma_i = 1$, para todo $i = 1, \ldots, n$, o el caso de los máximos para los estadísticos ordenados usuales, donde $\gamma_n = 1$, dado por Li y Yam (2005).*

## 3.3. Resultados para el orden dual ttt

### 3.3.1. Caracterización del orden dual ttt

Recordamos que Hu, Wang y Zhuang (2012) definieron el orden dual ttt para variables aleatorias no necesariamente no negativas (ver Definición 1.2.52). De forma análoga al orden ttt, a partir de (3.8) se puede definir el orden dual ttt como sigue.

**Definición 3.3.1.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente. Se dice que $X$ es menor o igual que $Y$ en el orden dual ttt, denotándolo por $X \leq_{\text{dttt}} Y$, si*

$$E(\text{máx}\{X, F^{-1}(p)\}) \geq E(\text{máx}\{Y, G^{-1}(p)\}), \text{ para todo } p \in (0,1).$$

Los resultados dados en las secciones anteriores de este capítulo para el orden ttt pueden ser reescritas fácilmente para su dual, a partir de la relación (1.29), la cuál recordamos que establece lo siguiente

$$X \leq_{\text{dttt}} Y \Leftrightarrow -X \leq_{\text{ttt}} -Y.$$

Combinando esta relación con los resultados anteriores estableceremos los resultados análogos para el orden dual ttt.

**Teorema 3.3.2.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas. Si $\text{lím}_{p \to 0^+}(G^{-1}(p) - F^{-1}(p))$ es finito, entonces $X \leq_{\text{dttt}} Y$ sí, y sólo sí,*

$$\text{máx}\{X, F^{-1}(p)\} \geq_{\text{icx}} \text{máx}\{Y, G^{-1}(p)\}, \text{ para todo } p \in (0,1).$$

**Demostración:**

Denotaremos por $F_-^{-1}$ la función cuantil de $-X$ y análogamente para $-Y$. Tenemos entonces, a partir de (1.29), que $X \leq_{\text{dttt}} Y$ sí, y sólo sí, $-X \leq_{\text{ttt}} -Y$, lo que por el Teorema 3.2.1 es equivalente a que

$$\text{mín}\{-X, F_-^{-1}(p)\} \leq_{\text{icv}} \text{mín}\{-Y, G_-^{-1}(p)\}, \text{ para todo } p \in (0,1).$$

Se prueba de forma sencilla que la última desigualdad es equivalente a

$$-\text{máx}\{X, \overline{F}^{-1}(p)\} \leq_{\text{icv}} -\text{máx}\{Y, \overline{G}^{-1}(p)\}, \text{ para todo } p \in (0,1),$$

y a partir de (1.16) y de $\overline{F}^{-1}(p) = F^{-1}(1-p)$ se tiene que

$$\text{máx}\{X, F^{-1}(p)\} \geq_{\text{icx}} \text{máx}\{Y, G^{-1}(p)\}, \text{ para todo } p \in (0,1).$$

■

### 3.3.2. Condiciones suficientes para el orden dual ttt

A continuación, establecemos un resultado en el que se recogen todos los conjuntos de condiciones suficientes para el orden dttt a partir de los establecidos para el orden ttt en la Sección 3.2.

**Teorema 3.3.3.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$ respectivamente y medias finitas. Supongamos que se verifica alguno de los siguientes conjuntos de condiciones:*

*a) Si existe un punto $p_0 \in (0,1)$ tal que $G^{-1}(p) \leq F^{-1}(p)$, para todo $p \in [p_0, 1)$ y $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es decreciente en $p \in (0, p_0)$ y además $E(X) \geq E(Y)$,*

*b) Si existe un punto $p_0 \in (0,1)$ tal que $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es creciente en $p \in [p_0, 1)$ y $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es decreciente en $p \in (0, p_0)$ y además $E(X) \geq E(Y)$,*

*c) Si existe un punto $p_0 \in (0,1)$ tal que $G^{-1}(p) \leq F^{-1}(p)$, para todo $p \in [p_0, 1)$ y además $\sup_{p \in (0,p_0)}\{G^{-1}(p) - F^{-1}(p)\} \leq E(X) - E(Y)$,*

*entonces*

$$X \leq_{\text{dttt}} Y.$$

**Demostración:**

Probaremos primero que se verifica $X \leq_{\text{dttt}} Y$ bajo el conjunto de condiciones descrito en a). Combinando (1.29), el Teorema 3.2.2 y el hecho de que $F_{-}^{-1}(p) = -F^{-1}(1-p)$, se tiene que si $E(-X) \leq E(-Y)$ y existe un punto $p_0 \in (0,1)$ tal que $-G^{-1}(1-p) \geq -F^{-1}(1-p)$, para todo $p \in (0, p_0)$ y $-G^{-1}(1-p) + F^{-1}(1-p)$ es decreciente en $p \in (p_0, 1)$, entonces $-X \leq_{\text{ttt}} -Y$, o equivalentemente, $X \leq_{\text{dttt}} Y$. Se prueba de forma sencilla que estas condiciones son equivalentes a las del enunciado a). El apartado b) se obtiene trivialmente como corolario del apartado a).

Consideremos ahora el conjunto de condiciones c). Combinando (1.29) y el Teorema 3.2.14, tenemos que si existe un punto $p_0 \in (0,1)$ tal que $G_{-}^{-1}(p) \geq F_{-}^{-1}(p)$, para todo $p \in (0, p_0)$ y $\sup_{p \in (p_0, 1)}\{F_{-}^{-1}(p) - G_{-}^{-1}(p)\} \leq E(-Y) - E(-X)$, entonces $X \leq_{\text{dttt}} Y$. De nuevo de forma sencilla se prueba que este conjunto de condiciones es equivalente al que aparece en el enunciado c). ■

### 3.3.3. Generalizaciones

A continuación proporcionamos una generalización de los apartados a) y b) del Teorema 3.3.3, como hicimos para el orden ttt. Consideramos el caso en el que el número de extremos relativos de la diferencia de las funciones cuantiles es mayor que uno. Este resultado tiene mayor interés desde un punto de vista teórico como ocurría para el orden ttt.

**Teorema 3.3.4.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y transformadas $T_X$ y $T_Y$. Si existe un punto $p_{n+1} \in (0,1)$ tal que $G^{-1}(p) \leq$*

*$F^{-1}(p)$, para todo $p \in (p_{n+1}, 1)$ y $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ tiene $n \geq 1$ extremos relativos en los puntos $p_1 < p_2 < \cdots < p_n < p_{n+1} < 1$. Entonces $X \leq_{\text{dttt}} Y$ sí, y sólo sí, $E(X) \geq E(Y)$, el número de extremos relativos es par, $n = 2m$, siendo $p_1$ un mínimo y para $j = 1, \ldots, m$ se cumplen las desigualdades*

$$T_X(p_{2j-1}) \leq T_Y(p_{2j-1}).$$

**Demostración:**

En este caso, dada la complejidad de la demostración, reescribiremos la prueba al no ser tan fácil obtener el conjunto de condiciones análogas a partir del teorema correspondiente para el orden ttt. En primer lugar, reescribiremos la definición del orden dttt en términos de las funciones cuantiles de las variables. A partir de (3.3.1), se tiene que $X \leq_{\text{dttt}} Y$ sí, y sólo sí,

$$E(\text{máx}\{X, F^{-1}(p)\}) - E(\text{máx}\{Y, G^{-1}(p)\}) \geq 0, \text{ para todo } p \in (0, 1).$$

A partir de la igualdad $E(X) = \int_0^1 F^{-1}(p)dp$ y de la expresión de la función cuantil de la variable $\text{máx}\{X, F^{-1}(p)\}$ y de $\text{máx}\{Y, G^{-1}(p)\}$, ver (3.8), se tiene que

$$E(\text{máx}\{X, F^{-1}(p)\}) = pF^{-1}(p) + \int_p^1 F^{-1}(q)dq = E(X) + \int_0^p (F^{-1}(p) - F^{-1}(q))dq.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$E(\text{máx}\{X, F^{-1}(p)\}) - E(\text{máx}\{Y, G^{-1}(p)\}) =$$

$$= E(X) + \int_0^p (F^{-1}(p) - F^{-1}(q))dq - E(Y) - \int_0^p (G^{-1}(p) - G^{-1}(q))dq =$$

$$= E(X) - E(Y) + \int_0^p ((F^{-1}(p) - F^{-1}(q)) - (G^{-1}(p) - G^{-1}(q)))dq,$$

para todo $p \in (0, 1)$. Definimos la funciones $\delta(p)$ y $\tilde{\delta}(p)$ como sigue

$$\delta(p) = \int_0^p ((F^{-1}(p) - F^{-1}(q)) - (G^{-1}(p) - G^{-1}(q)))dq$$

y

$$\tilde{\delta}(p) = E(\text{máx}\{X, F^{-1}(p)\}) - E(\text{máx}\{Y, G^{-1}(p)\}) = E(X) - E(Y) + \delta(p).$$

Tenemos que probar que $\tilde{\delta}(p)$ es positiva para todo $p \in (0, 1)$. Para probarlo, veremos que el comportamiento de la función $\delta(p)$ es el opuesto al de la diferencia de las funciones cuantiles. Es decir, veamos que la función $\delta(p)$ es decreciente (creciente) en los intervalos donde la función $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es creciente (decreciente).

Consideremos un intervalo $(p_i, p_{i+1})$ donde $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es creciente y $q_1 \leq q_2$ pertenecientes a dicho intervalo. En este caso se tiene que

$$
\begin{aligned}
\delta(q_2) = \int_0^{q_1} & \big((F^{-1}(q_2) - F^{-1}(q)) - (G^{-1}(q_2) - G^{-1}(q))\big)\, dq \\
& + \int_{q_1}^{q_2} \big((F^{-1}(q_2) - F^{-1}(q)) - (G^{-1}(q_2) - G^{-1}(q))\big)\, dq \leq \\
& \leq \int_0^{q_1} \big((F^{-1}(q_2) - F^{-1}(q)) - (G^{-1}(q_2) - G^{-1}(q))\big)\, dq \leq \delta(q_1),
\end{aligned}
$$

donde ambas desigualdades se siguen del crecimiento de $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$. Por lo que $\delta(p)$ es decreciente en los intervalos donde $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es creciente. De la misma forma invirtiendo las desigualdades obtenemos que $\delta(p)$ es decreciente en los intervalos donde $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es decreciente. Obviamente, el comportamiento de la función $\tilde{\delta}(p)$ es el mismo que el de la función $\delta(p)$. Por lo tanto, los puntos mínimos de la función $\tilde{\delta}(p)$ son los máximos de $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$, es decir, los puntos impares serán los máximos de la diferencia de los cuantiles, al ser $p_0$ un mínimo. Puesto que las desigualdades que aparecen en el enunciado del teorema son equivalentes a que $\tilde{\delta}(p) \geq 0$ en los puntos máximos, se tiene que $\tilde{\delta}(p) \geq 0$, para todo $p \in (p_1, p_{n+1})$. Por otro lado, a partir del apartado a) del Teorema 3.3.3, se tiene que la función $\tilde{\delta}(p)$ es positiva en los intervalos $(0, p_1)$ y $(p_{n+1}, 1)$. Por lo que queda probado el teorema.

La implicación directa es trivial, ya que si se verifica el orden dual ttt en todos los puntos, en particular se verificará en un subconjunto de puntos.

■

**Observación 3.3.5.** *De forma análoga al correspondiente resultado para el orden ttt, en el teorema anterior no es necesario distinguir el caso en el que el número de extremos relativos es par con el impar. La razón es que si el número de extremos relativos es impar, tenemos que $p_n$ es un mínimo, es decir, la diferencia de las funciones cuantiles es creciente en $p \in (p_n, p_{n+1})$, siendo por hipótesis $G^{-1}(p) \leq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (p_{n+1}, 1)$. Combinando ambas condiciones se tiene que $G^{-1}(p) \geq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (p_n, 1)$ y podemos reducir este caso al caso en el que el número de extremos relativos es par.*

Veamos ahora la generalización del apartado b) del Teorema 3.3.3.

**Teorema 3.3.6.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y transformadas $T_X$ y $T_Y$. Supongamos que $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ tiene $n \geq 1$ extremos relativos en los puntos $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n < 1$. Entonces $X \leq_{\mathrm{dttt}} Y$ sí, y sólo sí, $E(X) \geq E(Y)$ y se satisface uno de los siguientes conjuntos de condiciones:*

*i) El número de extremos relativos es impar, $n = 2m + 1$, siendo $p_1$ un mínimo, para $j = 1, \ldots, m$ se cumplen las desigualdades*

$$T_X(p_{2j-1}) \leq T_Y(p_{2j-1})$$

*y además* $\lim_{p \to 1}(F^{-1}(p) - G^{-1}(p)) \geq 0$.

*ii) El número de extremos relativos es par, $n = 2m$, siendo $p_1$ un mínimo y para $j = 1, \dots, m$ se cumplen las desigualdades*

$$T_X(p_{2j-1}) \leq T_Y(p_{2j-1}).$$

**Demostración:**

La demostración se sigue trivialmente a partir del teorema anterior con la salvedad de que tenemos que distinguir el caso en el que el número de extremos relativos es par del impar. La razón es que los máximos de la función $\tilde{\delta}(p)$, definida en el teorema anterior, varían teniendo en cuenta este hecho, ya que para que se verifique el orden dual ttt tenemos que exigir que el primer extremo relativo sea un mínimo. En el caso impar, la función $\tilde{\delta}(p)$ termina decreciendo, por lo que hay que exigirle que termine positiva, o equivalentemente, $\lim_{p\to 1}(F^{-1}(p) - G^{-1}(p)) \geq 0$.

■

### 3.3.4. Comparación de estadísticos ordenados generalizados

En esta subsección damos resultados para ordenar dos vectores de estadísticos ordenados generalizados en el orden dual ttt a partir de (1.29) y los correspondientes resultados para el orden ttt de la Sección 3.3.

**Teorema 3.3.7.** *Sean $l, n \in \mathbb{N}$, $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{\text{máx}\{l,n\}-1} \in \mathbb{R}$ y $m_i \geq -1$, para todo $i$. Denotamos por $X_{(i,j,\widetilde{m}_j,k)}$ e $Y_{(i,j,\widetilde{m}_j,k)}$ los $i$-ésimos estadísticos ordenados generalizados basados en dos funciones de distribución continuas $F$ y $G$, respectivamente, siendo los extremos superiores del soporte finitos e iguales, donde el tamaño de muestra, $j$, es $n$ ó $l$. Si existe $1 \leq r \leq n$ tal que $X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{dttt}} Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}$, entonces*

$$X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)} \leq_{\text{dttt}} Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}, \text{ para todo } s \geq r,\ l - s \leq n - r.$$

**Demostración:**

Supongamos que existe $1 \leq r \leq n$ tal que $X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{dttt}} Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}$, o equivalentemente, por (1.29), $-(X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}) \leq_{\text{ttt}} -(Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)})$, lo que es equivalente a partir de que $-(X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}) = (-X)_{(n-r+1,n,\widetilde{m}_n,k)}$ y análogamente para $-(Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)})$, a $(-X)_{(n-r+1,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{ttt}} (-Y)_{(n-r+1,n,\widetilde{m}_n,k)}$. Aplicando el Teorema 3.2.20 se tiene que

$$(-X)_{(l-s+1,l,\widetilde{m}_l,k)} \leq_{\text{ttt}} (-Y)_{(l-s+1,l,\widetilde{m}_l,k)}, \text{ para todo } s \geq r,\ l - s \leq n - r,$$

o equivalentemente,

$$-(X_{(s,l,\widetilde{m}_n,k)}) \leq_{\text{ttt}} -(Y_{(s,l,\widetilde{m}_n,k)}), \text{ para todo } s \geq r,\ l - s \leq n - r,$$

y de nuevo por (1.29), se tiene que

$$X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)} \leq_{\text{dttt}} Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}, \text{ para todo } s \geq r,\ l - s \leq n - r.$$

Por lo que el teorema queda demostrado.

■

Este resultado se puede combinar con el Teorema 3.2.19 para dar un nuevo resultado que permite comparar estadísticos ordenados generalizados con distintos parámetros y basados en distribuciones distintas.

**Teorema 3.3.8.** *Sean $l, n \in \mathbb{N}$, $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{\text{máx}\{l,n\}-1} \in \mathbb{R}$. Denotaremos por $X_{(i,n,\widetilde{m}_n,k)}$ y $Y_{(i,n,\widetilde{m}_n,k)}$ los i-ésimos estadísticos ordenados generalizados basados en dos funciones de distribución continuas $F$ y $G$, respectivamente, con extremos superiores del soporte finitos e iguales. Sea $X_{(i,l,\widetilde{m}'_l,k')}$ $\left(Y_{(i,l,\widetilde{m}'_l,k')}\right)$ el i-ésimo estadístico ordenado generalizado basado en la función de distribución continua $F$ $(G)$ con parámetros $k'$ y $m'_i$, $i = 1,\ldots,l-1$, tal que $k' \geq (\leq) k$ y $m'_i \geq (\leq) m_i$, para todo $i = 1,\ldots,l-1$. Si existe $1 \leq r \leq n$ tal que $X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{dttt}} Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}$, entonces*

$$X_{(s,l,\widetilde{m}'_l,k')} \leq_{\text{dttt}} Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)} \left(X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)} \leq_{\text{dttt}} Y_{(s,l,\widetilde{m}'_l,k')}\right), \text{ para todo } s \geq r,\ l-s \leq n-r.$$

**Demostración:**

Supongamos que existe $1 \leq r \leq n$ tal que $X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{dttt}} Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}$, o equivalentemente por (1.29), $-(X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}) \leq_{\text{ttt}} -(Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)})$, es decir, $(-X)_{(n-r+1,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{ttt}} (-Y)_{(n-r+1,n,\widetilde{m}_n,k)}$, aplicando el Teorema 3.2.21 se tiene que

$$(-X)_{(l-s+1,l,\widetilde{m}'_l,k')} \leq_{\text{ttt}} (\geq_{\text{ttt}})(-Y)_{(l-s+1,l,\widetilde{m}_l,k)}, \text{ para todo } s \geq r,\ l-s \leq n-r,$$

o equivalentemente,

$$-(X_{(s,l,\widetilde{m}'_n,k')}) \leq_{\text{ttt}} (\geq_{\text{ttt}}) - (Y_{(s,l,\widetilde{m}_n,k)}), \text{ para todo } s \geq r,\ l-s \leq n-r,$$

y por (1.29) se tiene equivalentemente que

$$X_{(s,l,\widetilde{m}'_l,k')} \leq_{\text{dttt}} (\geq_{\text{ttt}}) Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}, \text{ para todo } s \geq r,\ l-s \leq n-r.$$

Por lo que el teorema queda demostrado.

■

De forma análoga a los teoremas 3.3.7 y 3.2.25 se pueden probar los siguientes teoremas.

**Teorema 3.3.9.** *Sean $\mathbf{X} = (X_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)},...,X_{(n,n,\widetilde{m}_n,k)})$ e $\mathbf{Y} = (Y_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)},...,Y_{(n,n,\widetilde{m}_n,k)})$ dos vectores de estadísticos ordenados generalizados basados en dos funciones de distribución continuas $F$ y $G$, respectivamente y sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución $F$ y $G$, respectivamente. Si $X \leq_{\text{dttt}} Y$, entonces*

$$X_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{dttt}} Y_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)},$$

*donde $m_i$ es decreciente en $i$ y verifica $m_i \geq -1$, para todo $i$.*

**Teorema 3.3.10.** *Sean $\mathbf{X} = (X_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)},...,X_{(n,n,\widetilde{m}_n,k)})$ e $\mathbf{Y} = (Y_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)},...,Y_{(n,n,\widetilde{m}_n,k)})$ dos vectores de estadísticos ordenados generalizados basados en dos funciones de distribución continuas $F$ y $G$, respectivamente y sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución $F$ y $G$, respectivamente. Si existe $1 \leq r \leq n$ tal que $X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{dttt}} Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}$, donde $\widetilde{m}_{n_i} = -1$ para todo $i, n \in N$ y $k = 1$, entonces $X \leq_{\text{dttt}} Y$.*

# Capítulo 4

# Condiciones suficientes para los ordenes ew, lir y eps

## 4.1. Introducción

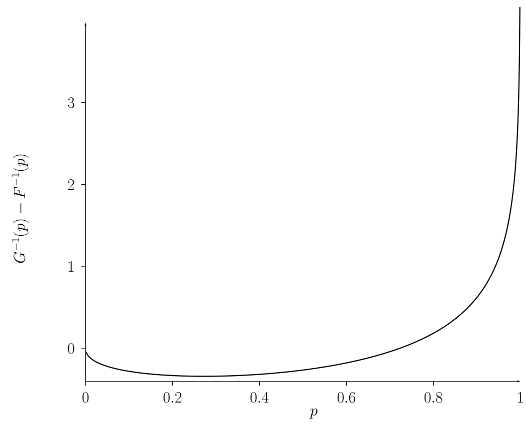
Como se vio en el Capítulo 1 los órdenes en dispersión, excess wealth y en dilatación son ordenaciones que comparan la dispersión de dos variables. Mientras que el orden en dispersión solo necesita de las funciones cuantiles o de las funciones de distribución, los órdenes excess wealth y en dilatación necesitan de la evaluación de integrales incompletas de las funciones cuantiles, lo cual en muchos casos no es posible. En estos casos, y puesto que el orden en dispersión es más fuerte que los órdenes excess wealth y en dilatación (ver (1.24)), podríamos verificar el orden en dispersión como condición suficiente para los órdenes excess wealth y en dilatación. Sin embargo, esto no siempre es factible como vemos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.1.1.** *Consideremos $X$ e $Y$ dos variables aleatorias no negativas con funciones de distribución $F(x) = 1 - \exp\{-x^2\}$ y $G(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{2}{\sqrt{\pi}}x\right\}$, respectivamente. La Figura 4.1 muestra que $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ no es monótona, por lo que $X \nleq_{\text{disp}} Y$ y $X \ngeq_{\text{disp}} Y$. Sin embargo, las funciones excess wealth de las variables quedan ordenadas (el computo de las funciones excess wealth se ha realizado numéricamente), lo que sugiere que $X \leq_{\text{ew}} Y$, y por lo tanto también $X \leq_{\text{dil}} Y$.*

El ejemplo anterior motiva el estudio de condiciones suficientes para los órdenes excess wealth y en dilatación, cuando no se cumple el orden en dispersión y no se pueden verificar directamente a partir de sus definiciones. En el caso del orden en dilatación, es sencillo establecer un conjunto de condiciones suficientes a partir de las condiciones de Karlin-Novikov como vemos a continuación.

**Teorema 4.1.2.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución $F$ y $G$, respectivamente y medias finitas. Si $S^-(F^{-1}(\cdot) - E(X) - (G^{-1}(\cdot) - E(Y))) = 1$ en $(0, 1)$, con la secuencia de signos $+, -$, entonces*

$$X \leq_{\text{dil}} Y.$$



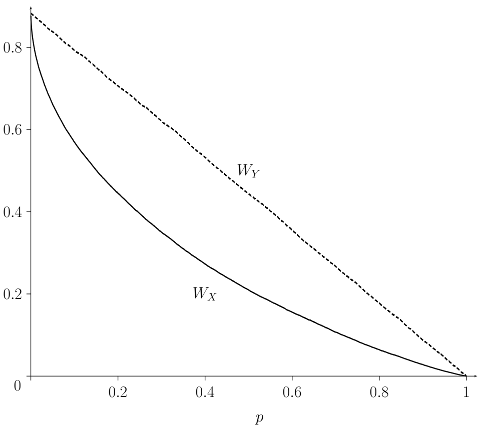




Figura 4.1: *Gráficas de la diferencia de las funciones cuantiles (arriba) y de las funciones excess wealth (abajo) para las variables $X$ e $Y$ dadas en el Ejemplo 4.1.1.*

**Demostración:**

Consideremos las variables aleatorias $X' = X - E(X)$ e $Y' = Y - E(Y)$, denotando sus funciones cuantiles por $F'^{-1}$ y $G'^{-1}$, respectivamente. Es fácil ver que $F'^{-1}(p) = F^{-1}(p) - E(X)$ y análogamente $G'^{-1}(p) = G^{-1}(p) - E(Y)$, para las que trivialmente se cumple $E(X') = E(Y') = 0$. Por el Teorema 1.2.14, si $S^-(F'^{-1}(\cdot) - G'^{-1}(\cdot)) = S^-(F^{-1}(\cdot) - E(X) - G^{-1}(\cdot) + E(Y)) = 1$ en $(0, 1)$, con la secuencia $+, -$, entonces $X' \leq_{\text{icx}} Y'$, o equivalentemente, a partir del Teorema 1.2.44, $X \leq_{\text{dil}} Y$. ■

Nótese que la hipótesis de este resultado es más débil que la de la definición del orden en dispersión, es decir, el crecimiento de la diferencia de las funciones cuantiles.

En el caso del orden ew, no resulta tan obvio que condiciones suficientes se pueden establecer cuando no se verifica el orden en dispersión. Uno de los objetivos de este capítulo es estudiar conjuntos de condiciones suficientes para el orden ew. Además y siguiendo el estudio iniciado en el capítulo anterior, damos resultados para la comparación de estadísticos ordenados generalizados en el orden ew. Todo el estudio anterior se llevará cabo a lo largo de la Sección 4.2. De forma análoga al orden ew, llevaremos a cabo un estudio para el orden lir en la Sección 4.3.

Dadas las similitudes entre los órdenes excess wealth y en dilatación con los órdenes expected proportional shortfall y Lorenz, surge de forma natural el considerar el estudio de condiciones suficientes para estos dos últimos órdenes, cuando no se verifica el orden estrella. En el caso del orden Lorenz, Arnold (1987) resuelve el problema dando el siguiente conjunto de condiciones.

**Teorema 4.1.3.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias no negativas con funciones de distribución $F$ y $G$, respectivamente y medias finitas. Si $S^-(F^{-1}(\cdot)/E(X) - G^{-1}(\cdot)/E(Y)) = 1$ en $(0,1)$, con la secuencia de signos $+, -$, entonces*

$$X \leq_{\text{Lorenz}} Y.$$

Igual que en el caso anterior, no es tan sencillo establecer un conjunto de condiciones suficientes para el orden eps y en la Sección 4.4.1 abordaremos este problema.

Pasamos a ver los distintos resultados que hemos obtenido.

## 4.2. Resultados para el orden ew

### 4.2.1. Condiciones suficientes para el orden ew

Establecemos el primer conjunto de condiciones suficientes.

**Teorema 4.2.1.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas tales que $E(X) \leq E(Y)$. Si existe un punto $p_0 \in (0,1)$ tal que $G^{-1}(p) \leq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (0, p_0)$ y $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es creciente en $p \in [p_0, 1)$, entonces*

$$X \leq_{\text{ew}} Y.$$

**Demostración:**

Consideremos $p \in [p_0, 1)$ y las variables aleatorias $(X - F^{-1}(p))_+$ y $(Y - G^{-1}(p))_+$. A partir de (3.5), se tiene que la función cuantil de $(X - F^{-1}(p))_+$, que denotamos por $F_{p^+}^{-1}(q)$, viene dada por

$$F_{p^+}^{-1}(q) = \left(F^{-1}(q) - F^{-1}(p)\right)_+, \text{ para todo } q \in (0,1),$$

y análogamente para $(Y - G^{-1}(p))_+$. Dado que $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es creciente en $p \in [p_0, 1)$, se tiene que

$$(X - F^{-1}(p))_+ \leq_{\text{st}} (Y - G^{-1}(p))_+, \text{ para todo } p \in [p_0, 1),$$

y por lo tanto, a partir de (1.14), se tiene que

$$E((X - F^{-1}(p))_+) \leq E((Y - G^{-1}(p))_+), \text{ para todo } p \in [p_0, 1). \tag{4.1}$$

Consideremos ahora un valor $p \in (0, p_0)$ y las variables aleatorias $\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}$ y $\text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}$. Por hipótesis $G^{-1}(p) \leq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (0, p_0)$, lo que es equivalente, a partir de (1.13), a que $\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\} \geq_{\text{st}} \text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}$, para todo $p \in (0, p_0)$. De nuevo por (1.14), se tiene que

$$E(\text{mín}\{X, F^{-1}(p)\}) \geq E(\text{mín}\{Y, G^{-1}(p)\}), \text{ para todo } p \in (0, p_0).$$

Como ya se indicó en demostraciones anteriores, $(x-t)_+ = x - \text{mín}\{x, t\}$. Combinando esta igualdad con la desigualdad anterior y el hecho de que $E(X) \leq E(Y)$, se tiene que

$$E((X - F^{-1}(p))_+) \leq E((Y - G^{-1}(p))_+), \text{ para todo } p \in (0, p_0). \tag{4.2}$$

El resultado se sigue combinando (4.1) y (4.2). ■

Nótese que la condición de la hipótesis es más débil que el orden en dispersión. Si se verifica el orden en dispersión entonces se verifica el conjunto de condiciones anteriores donde $p_0 = 0$; sin embargo, esta condición no implica, obviamente, el orden en dispersión. Por lo tanto, este resultado proporciona una condición intermedia entre los órdenes excess wealth y en dispersión. A continuación ordenamos varias familias paramétricas aplicando este resultado.

**Ejemplo 4.2.2.** ***Familia Pareto***
*Sean $X \sim P(a_1, k_1)$ e $Y \sim P(a_2, k_2)$, asumimos $a_1, a_2 \geq 1$ para que las medias sean finitas. Como vimos en el Ejemplo 3.2.11, si $a_1 > a_2$ y $k_1 a_2 > k_2 a_1$, entonces $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es inicialmente decreciente y después creciente, siendo $\text{lím}_{p \to 0^+} G^{-1}(p) - F^{-1}(p) = k_2 - k_1 \leq 0$. Si adicionalmente suponemos $E(X) = k_1 a_1/(a_1 - 1) \leq E(Y) = k_2 a_2/(a_2 - 1)$, entonces $X \leq_{\text{ew}} Y$ y además $X \nleq_{\text{disp}} Y$ ni $X \ngeq_{\text{disp}} Y$. Podemos entonces establecer el siguiente resultado.*

**Proposición 4.2.3.** *Sean $X \sim P(a_1, k_1)$ e $Y \sim P(a_2, k_2)$ con $a_1 > a_2 \geq 1$. Si se cumplen las siguientes desigualdades:*

*(i)* $k_1 a_2 > k_2 a_1$,

*(ii)* $E(X) = k_1 a_1/(a_1 - 1) \leq E(Y) = k_2 a_2/(a_2 - 1)$,

*entonces $X \leq_{\text{ew}} Y$, $X \nleq_{\text{disp}} Y$ y $X \ngeq_{\text{disp}} Y$.*

A continuación aplicamos el teorema anterior a la familia Davies.

**Ejemplo 4.2.4.** ***Familia Davies***
*Sean $X \sim D(\lambda_1, \theta_1, C_1)$ e $Y \sim D(\lambda_2, \theta_2, C_2)$, asumimos $\theta_1, \theta_2 < 1$ para que las medias sean finitas. Como vimos en el Ejemplo 3.2.5, si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\theta_1 \leq \theta_2$, entonces existe un punto $p_0$ tal que $G^{-1}(p) \leq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (0, p_0)$ y $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es creciente en $p \in [p_0, 1)$. Por lo tanto si $E(X) = C_1 B(1 + \lambda_1, 1 - \theta_1) \leq E(Y) = C_2 B(1 + \lambda_2, 1 - \theta_2)$, se tiene que $X \leq_{\text{ew}} Y$. Es posible ver también que, bajo las condiciones previas sobre los parámetros, $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es decreciente en $p \in (0, p_0)$ y por lo tanto $X \nleq_{\text{disp}} Y$ y $X \ngeq_{\text{disp}} Y$. Podemos entonces establecer el siguiente resultado.*

**Proposición 4.2.5.** *Sean $X \sim D(\lambda_1, \theta_1, C_1)$ e $Y \sim D(\lambda_2, \theta_2, C_2)$ con $\theta_1 \leq \theta_2 < 1$. Si se cumplen las siguientes desigualdades:*

*(i)* $\lambda_1 \leq \lambda_2$,

*(ii)* $E(X) = C_1 B(1 + \lambda_1, 1 - \theta_1) \leq E(Y) = C_2 B(1 + \lambda_2, 1 - \theta_2)$,

*entonces $X \leq_{\text{ew}} Y$, $X \nleq_{\text{disp}} Y$ y $X \ngeq_{\text{disp}} Y$.*

En ambos ejemplos la diferencia de las funciones cuantiles verifica en realidad una condición más fuerte que la que aparece en el enunciado del teorema; dicha diferencia es inicialmente decreciente y luego creciente. Siguiendo el mismo esquema que en los capítulos anteriores establecemos el siguiente corolario.

**Corolario 4.2.6.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas tales que $E(X) \leq E(Y)$. Si $\lim_{p \to 0^+} (G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) \leq 0$ y existe un punto $p_0 \in (0, 1)$ tal que $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es decreciente en $p \in (0, p_0)$ y $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es creciente en $p \in [p_0, 1)$, entonces*

$$X \leq_{\text{ew}} Y.$$

La hipótesis que aparece en este resultado es más restrictiva que la del Teorema 4.2.1, sin embargo es más útil. La razón es que la condición del corolario anterior es más fácil de verificar analíticamente en muchas situaciones. Veremos a continuación otra familia que verifica esta propiedad, la familia Weibull.

**Ejemplo 4.2.7.** ***Familia Weibull***

*Sean $X \sim W(\alpha_1, \beta_1)$ e $Y \sim W(\alpha_2, \beta_2)$. Como vimos en el Capítulo 2, si $\beta_2 < \beta_1$, entonces $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es inicialmente creciente y después decreciente, siendo $\lim_{p \to 0^+} (G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) = 0$ y $\lim_{p \to 1^-} (G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) = +\infty$. Por lo que si suponemos $E(X) = \alpha_1 \Gamma\left(\frac{\beta_1+1}{\beta_1}\right) \leq \alpha_2 \Gamma\left(\frac{\beta_2+1}{\beta_2}\right) = E(X)$, entonces $X \leq_{\text{ew}} Y$ y además $X \nleq_{\text{disp}} Y$ y $X \ngeq_{\text{disp}} Y$. Podemos establecer entonces el siguiente resultado.*

**Proposición 4.2.8.** *Sean $X \sim W(\alpha_1, \beta_1)$ e $Y \sim W(\alpha_2, \beta_2)$. Si se cumplen las siguientes desigualdades:*

*(i)* $\beta_2 < \beta_1$,

*(ii)* $E(X) = \alpha_1 \Gamma\left(\frac{\beta_1+1}{\beta_1}\right) \leq \alpha_2 \Gamma\left(\frac{\beta_2+1}{\beta_2}\right) = E(Y)$,

*entonces $X \leq_{\text{ew}} Y$, $X \nleq_{\text{disp}} Y$ y $X \ngeq_{\text{disp}} Y$.*

*El ejemplo dado en la introducción es un caso particular en el que se verifican las condiciones de la proposición anterior.*

En el caso de variables aleatorias absolutamente continuas, cuyos soportes son intervalos, el resultado anterior se puede reescribir de la siguiente forma.

**Corolario 4.2.9.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias absolutamente continuas con funciones de distribución $F$ y $G$, funciones de densidad $f$ y $g$, respectivamente y medias finitas tales que $E(X) \leq E(Y)$. Si $\lim_{p\to 0^+}(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) \leq 0$ y existe un punto $p_0 \in (0,1)$ tal que $g(G^{-1}(p)) \geq f(F^{-1}(p))$, para todo $p \in (0,p_0)$ y $g(G^{-1}(p)) \leq f(F^{-1}(p))$, para todo $p \in [p_0,1)$, entonces*

$$X \leq_{\text{ew}} Y.$$

**Demostración:**

Basta observar que $\frac{\partial}{\partial p}(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) = (g(G^{-1}(p)))^{-1} - (f(F^{-1}(p)))^{-1}$.

■

A continuación ordenamos la familia Govindarajulu aplicando este resultado.

**Ejemplo 4.2.10.** ***Familia Govindarajulu***

*Sean $X \sim G(\beta_1,\sigma_1,\theta_1)$ e $Y \sim G(\beta_2,\sigma_2,\theta_2)$ con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$ y funciones de densidad $f$ y $g$, respectivamente. Estudiamos la monotonía de la diferencia $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ en términos de los puntos de corte de $f(F^{-1}(p))$ y $g(G^{-1}(p))$, o equivalentemente, de las funciones razón de fallo de las variables evaluadas en sus respectivos cuantiles.*

*Es fácil ver que las funciones $f(F^{-1}(p))$ y $g(G^{-1}(p))$ tienen un cambio de signo en $\mathbb{R}$ en el punto*

$$p_0 = \left(\frac{(\beta_2+1)\beta_2\sigma_2}{(\beta_1+1)\beta_1\sigma_1}\right)^{\frac{1}{\beta_1-\beta_2}},$$

*con la secuencia $-,+$. Si se verifican las desigualdades $\beta_1 < \beta_2$ y $(\beta_2+1)\beta_2\sigma_2 > (\beta_1+1)\beta_1\sigma_1$, se tiene que $p_0 \in (0,1)$. Necesitamos además $\theta_2 \leq \theta_1$ ya que $\lim_{p\to 0^+}(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) = \theta_2 - \theta_1$. Podemos entonces establecer el siguiente resultado.*

**Proposición 4.2.11.** *Sean $X \sim G(\beta_1,\sigma_1,\theta_1)$ e $Y \sim G(\beta_2,\sigma_2,\theta_2)$. Si se cumplen las siguientes desigualdades:*

*(i)* $\beta_2 > \beta_1$,

*(ii)* $(\beta_2+1)\beta_2\sigma_2 > (\beta_1+1)\beta_1\sigma_1$,

*(iii)* $\theta_2 \leq \theta_1$,

*(iv)* $E(X) = \theta_1 + \sigma_1\left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_1+2}\right) \leq \theta_2 + \sigma_2\left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_2+2}\right) = E(Y)$,

*entonces $X \leq_{\text{ew}} Y$, $X \nleq_{\text{disp}} Y$ y $X \ngeq_{\text{disp}} Y$.*

*Nótese que bajo los supuestos $\beta_1 \leq (>)\beta_2$ y $(\beta_1+1)\beta_1\sigma_1 \geq (<)(\beta_2+1)\beta_2\sigma_2$, entonces $X \geq_{\text{disp}} Y$ ($X \leq_{\text{disp}} Y$). La Figura 4.2 muestra las funciones razón de fallo evaluadas en los cuantiles y las funciones excess wealth para $X \sim G(1,1/4,1/2)$ e $Y \sim G(2,1,1/3)$.*

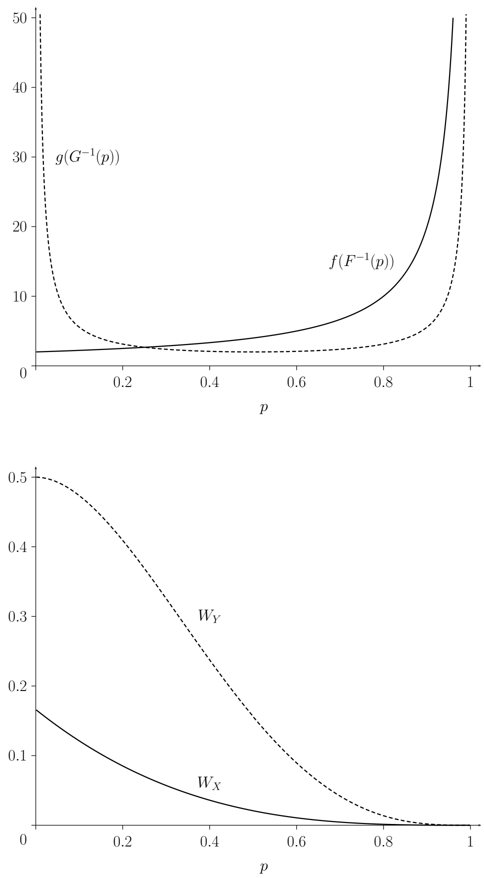



Figura 4.2: *Gráficas de $f(F^{-1}(p))$ y $g(G^{-1}(p))$ (arriba) y de las funciones excess wealth (abajo), para $X \sim G(1, 1/4, 1/2)$ e $Y \sim G(2, 1, 1/3)$.*

A continuación damos otro conjunto de condiciones suficientes para el orden ew menos restrictivo. En este caso no es necesario asumir que las medias de las variables aleatorias estén ordenadas en un sentido específico. En este caso, a diferencia de los Capítulos 2 y 3, la ordenación de las medias no es una condición necesaria para que se verifique el orden ew y será de interés cuando los extremos inferiores de los soportes no sean iguales.

**Teorema 4.2.12.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución $F$ y $G$, respectivamente y medias finitas tales que $\lim_{p\to 0^+}(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) \leq E(Y) - E(X)$. Si existe un punto $p_0 \in (0,1)$ tal que $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es decreciente en $p \in (0, p_0)$ y $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es creciente en $p \in [p_0, 1)$, entonces*

$$X \leq_{\mathrm{ew}} Y.$$

**Demostración:**
Consideremos primero $p \in [p_0, 1)$. Para este caso basta seguir la demostración del

Teorema 4.2.1 para concluir que

$$E((X - F^{-1}(p))_+) \leq E((Y - G^{-1}(p))_+), \text{ para todo } p \in [p_0, 1). \tag{4.3}$$

Consideremos ahora $p \in (0, p_0)$. Combinando las hipótesis se tiene que

$$G^{-1}(p) - F^{-1}(p) \leq \lim_{p \to 0^+} (G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) \leq E(X) - E(X). \tag{4.4}$$

Sean las variables aleatorias $(X - F^{-1}(p))_-$ y $(Y - G^{-1}(p))_-$, denotaremos sus funciones cuantiles por $F_{p^-}^{-1}(q)$ y $G_{p^-}^{-1}(q)$, respectivamente. Es fácil ver que

$$F_{p^-}^{-1}(q) = (F^{-1}(q) - F^{-1}(p))_-, \text{ para todo } q \in (0, 1),$$

y de forma análoga para $(Y - G^{-1}(p))_-$. Dado que $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es decreciente en $p \in (0, p_0)$, se tiene que $(X - F^{-1}(p))_- \geq_{\text{st}} (Y - G^{-1}(p))_-$, para todo $p \in (0, p_0)$ y por lo tanto, a partir de (1.14), se tiene que

$$E((X - F^{-1}(p))_-) \geq E((Y - G^{-1}(p))_-), \text{ para todo } p \in (0, p_0). \tag{4.5}$$

Combinando la igualdad $(x)_+ = x - (x)_-$ con (4.4) y (4.5), se tiene que

$$E((X - F^{-1}(p))_+) \leq E((Y - G^{-1}(p))_+), \text{ para todo } p \in (0, p_0). \tag{4.6}$$

El resultado se sigue combinando (4.3) y (4.6).

■

A continuación aplicamos este resultado para ordenar la familia Tukey.

**Ejemplo 4.2.13.** ***Familia Tukey***

*Sean $X \sim T(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ e $Y \sim T(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \lambda'_4)$. Estudiamos a continuación la monotonía de $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$, o equivalentemente, tomando derivadas estudiaremos el signo de la función*

$$h(p) = h_G(p) - h_F(p) = \frac{1}{\lambda'_2}\left(p^{\lambda'_3 - 1} + (1-p)^{\lambda'_4 - 1}\right) - \frac{1}{\lambda_2}\left(p^{\lambda_3 - 1} + (1-p)^{\lambda_4 - 1}\right),$$

*donde $h_G(p) = (g(G^{-1}(p)))^{-1}$ y $h_F(p) = (f(F^{-1}(p)))^{-1}$ y $f$ y $g$ denotan las funciones de densidad de $X$ e $Y$, respectivamente.*

*Exponemos a continuación distintas situaciones en las que se puede aplicar el teorema anterior para ordenar dos variables aleatorias pertenecientes a la familia Tukey en el orden ew. Este estudio no es exhaustivo y puede haber más situaciones aparte de las dadas en las que se verifique el orden.*

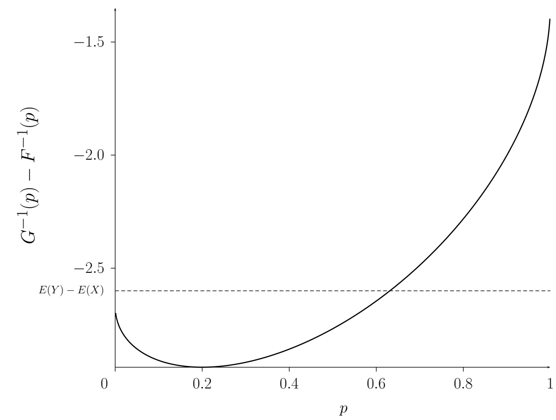
***Caso a)***

*Bajo los supuestos $\{\lambda'_3 \geq 1, \lambda'_4 \leq 1\}$ y $\{0 \leq \lambda_3 \leq 1, \lambda_4 \geq 1\}$, es fácil ver que $h(p)$ es creciente, siendo $\lim_{p\to 0^+} h(p) = -\infty$ y $\lim_{p \to 1^-} h(p) = \infty$. Por lo tanto $h(p)$ tiene un* *cambio de signo en el intervalo* $(0,1)$ *con la secuencia* $-,+$. *Si además* $\lim_{p\to 0^+}(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) \leq E(Y) - E(X)$, *o equivalentemente*

$$(\lambda_2\lambda_3(\lambda_3+1))^{-1} - (\lambda_2'\lambda_3'(\lambda_3'+1))^{-1} \leq (\lambda_2'(\lambda_4'+1))^{-1} - (\lambda_2(\lambda_4+1))^{-1}, \tag{4.7}$$

*entonces, por el Teorema 4.2.12, se tiene que* $X \leq_{\text{ew}} Y$.

*La Figura 4.3 muestra la diferencia de las funciones cuantiles y las funciones excess wealth para* $X \sim T(5,2,1/2,3/2)$ *e* $Y \sim T(2,1,3/2,1/2)$. *Es interesante observar que en este caso particular* $E(Y) < E(X)$, *y por lo tanto esta situación no está cubierta por el Teorema 4.2.1.*



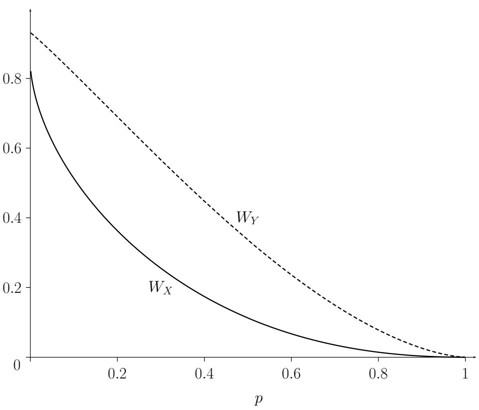
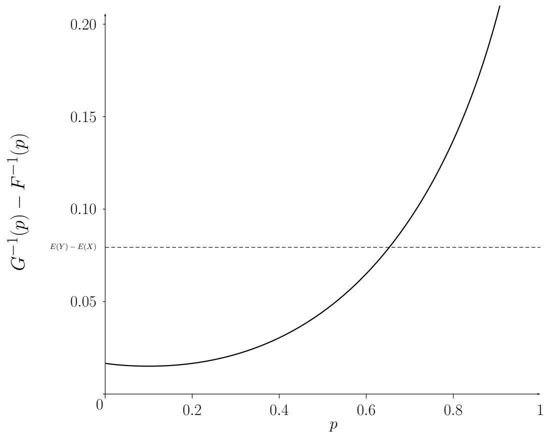




Figura 4.3: *Gráficas de la diferencia de las funciones cuantiles (arriba) y de las funciones excess wealth (abajo), para* $X \sim T(5,2,1/2,3/2)$ *e* $Y \sim T(2,1,3/2,1/2)$. *La línea discontinua de la gráfica superior señala la diferencia de las medias* $E(Y) - E(X)$.

***Caso b)***

*En este caso suponemos el conjunto de condiciones* $\{\lambda_3' \geq 1, \lambda_4' \leq 1\}$, $\{1 \leq \lambda_3 \leq 2, 1 \leq \lambda_4 \leq 2\}$ *y* $\{\lambda_2 \leq \lambda_2'\}$. *Es fácil ver que* $h(p)$ *es convexa, por lo que tiene a lo sumo dos* *cambios de signo. Puesto que $lim_{p\to 0^+}h(p) < 0$ y $lim_{p\to 1^-}h(p) > 0$, entonces $h(p)$ tiene un cambio de signo en el intervalo $(0, 1)$ con la secuencia $(-, +)$. Si se satisface la condición (4.7), por el Teorema 4.2.12 se tiene que $X \leq_{\text{ew}} Y$.*

*La Figura 4.4 muestra la diferencia de las funciones cuantiles y las funciones excess wealth para $X \sim T(1, 5/2, 3/2, 3/2)$ e $Y \sim T(1, 3, 4/3, 1/2)$. En este caso la diferencia de las funciones cuantiles empieza positiva y, por lo tanto, no esta cubierto por el Teorema 4.2.1.*



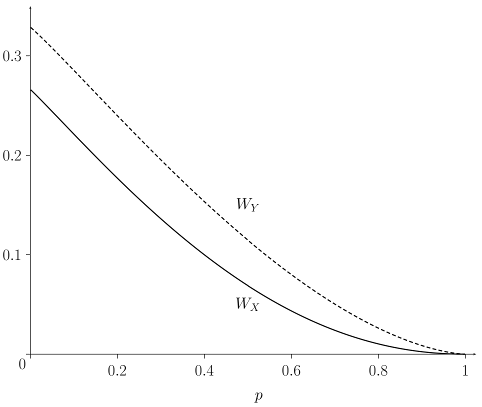




Figura 4.4: *Gráficas de la diferencia de las funciones cuantiles (arriba) y de las funciones excess wealth (abajo), para $X \sim T(1, 5/2, 3/2, 3/2)$ e $Y \sim T(1, 3, 4/3, 1/2)$. La línea discontinua de la gráfica superior señala la diferencia de las medias $E(X) - E(X)$.*

*Podemos establecer por lo tanto el siguiente resultado.*

**Proposición 4.2.14.** *Sean $X \sim T(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ e $Y \sim T(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3', \lambda_4')$ tales que $(\lambda_2\lambda_3(\lambda_3 +1))^{-1} - (\lambda_2'\lambda_3'(\lambda_3' + 1))^{-1} \leq (\lambda_2'(\lambda_4' + 1))^{-1} - (\lambda_2(\lambda_4 + 1))^{-1}$. Si se cumple alguno de los siguientes conjuntos de condiciones:*

*(i)* $\{\lambda_3' \geq 1, \lambda_4' \leq 1\}$ *y* $\{0 \leq \lambda_3 \leq 1, \lambda_4 \geq 1\}$,

*(ii)* $\{\lambda_3' \geq 1, \lambda_4' \leq 1\}$, $\{1 \leq \lambda_3 \leq 2, 1 \leq \lambda_4 \leq 2\}$ *y* $\{\lambda_2 \leq \lambda_2'\}$,

*entonces* $X \leq_{\text{ew}} Y$, $X \nleq_{\text{disp}} Y$ *y* $X \ngeq_{\text{disp}} Y$.

### 4.2.2. Generalizaciones

A continuación, establecemos una generalización de los corolarios 4.2.6 y 4.2.12 siguiendo la línea de los capítulos anteriores. Consideramos el caso en el que el número de extremos relativos de la diferencia de las funciones cuantiles es mayor que uno. Pese a que podemos encontrar aplicaciones de este resultado, éste tiene mayor interés desde un punto de vista teórico. La principal razón es que para poder aplicarlos se necesita evaluar las funciones excess wealth en ciertos puntos y el desconocimiento de éstas en muchas situaciones es lo que motiva el estudio que hemos llevado a cabo.

**Teorema 4.2.15.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas. Supongamos que existe un punto $p_0 \in (0,1)$ tal que $G^{-1}(p) \leq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (0, p_0)$ y $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ tiene $n \geq 1$ extremos relativos en los puntos $p_0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n < 1$. Entonces $X \leq_{\text{ew}} Y$ sí, y sólo sí, $E(X) \leq E(Y)$, el número de extremos relativos es par, $n = 2m$, siendo $p_1$ un máximo y para $j = 1, \ldots, m$ se cumplen las desigualdades*

$$E((X - F^{-1}(p_{2j}))_+) \leq E((Y - G^{-1}(p_{2j}))_+).$$

**Demostración:**

Probamos en primer lugar la implicación reversa. Consideramos la función $\delta(p)$, definida como sigue

$$\delta(p) = W_Y(p) - W_X(p) = \int_p^1 (G^{-1}(q) - F^{-1}(q) - (G^{-1}(p) - F^{-1}(p)))dq,$$

donde la segunda igualdad se sigue trivialmente a partir del Teorema 1.2.39. Por lo tanto, tenemos que probar que $\delta(p) \geq 0$, para todo $p \in (0,1)$. Para demostrarlo veremos que el comportamiento de $\delta(p)$ es opuesto al de la diferencia de los cuantiles $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$, es decir, la función $\delta(p)$ es creciente en los intervalos donde $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es decreciente y viceversa.

Consideremos un intervalo $(p_i, p_{i+1})$ donde $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es creciente y $q_1 \leq q_2$ pertenecientes a dicho intervalo. En este caso se tiene que

$$\delta(q_1) = \int_{q_1}^{q_2} \left(G^{-1}(q) - F^{-1}(q) - (G^{-1}(q_1) - F^{-1}(q_1))\right) dq +$$
$$\int_{q_2}^{1} \left(G^{-1}(q) - F^{-1}(q) - (G^{-1}(q_1) - F^{-1}(q_1))\right) dq$$

$$\geq \int_{q_2}^{1} \left(G^{-1}(q) - F^{-1}(q) - (G^{-1}(q_1) - F^{-1}(q_1))\right) dq \geq \delta(q_2),$$

donde ambas desigualdades se siguen del crecimiento $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$. Por lo tanto, la función $\delta(p)$ es decreciente en los intervalos donde $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es creciente. Análogamente, invirtiendo las desigualdades se tiene que $\delta(p)$ es creciente en los intervalos donde la diferencia de los cuantiles es decreciente. Por lo tanto, los puntos mínimos de la función $\delta(p)$ son los máximos de $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$, es decir, los puntos impares serán los mínimos de $\delta(p)$, al ser $p_1$ un máximo. Puesto que las desigualdades que aparecen en el enunciado del teorema son equivalentes a que $\delta(p) \geq 0$ en los puntos mínimos, se tiene que $\delta(p) \geq 0$, para todo $p \in (p_0, p_n)$. Por otro lado, siguiendo la demostración del Teorema 4.2.1 se tiene que la función $\delta(p)$ es positiva en los intervalos $(0, p_0)$ y $(p_n, 1)$.

La implicación directa es trivial, ya que si se verifica el orden ew en todos los puntos de la unión de los soportes, en particular, se verificará en un subconjunto de puntos.

■

**Observación 4.2.16.** *Nótese que en el Teorema 4.2.15 no es necesario distinguir el caso en el que el número de extremos relativos es par con el impar. La razón es la misma que en el capítulo anterior. Si el número de extremos relativos es impar, se tiene que $p_1$ es un mínimo, es decir, la diferencia de las funciones cuantiles es decreciente en $p \in (p_0, p_1)$, siendo por hipótesis $G^{-1}(p) \leq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (0, p_0)$. Combinando ambas condiciones se tiene que $G^{-1}(p) \leq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (0, p_1)$ y podemos reducir este caso al caso en el que el número de extremos relativos es par.*

Consideramos ahora la extensión del segundo corolario.

**Teorema 4.2.17.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas. Supongamos que $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ tiene $n \geq 1$ extremos relativos en los puntos $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n < 1$. Entonces, $X \leq_{\mathrm{ew}} Y$ sí, y sólo sí, se satisface uno de los siguientes conjuntos de condiciones:*

*i) El número de extremos relativos es par, $n = 2m$, siendo $p_1$ un máximo y para $j = 1, \ldots, m$ se cumplen las desigualdades*

$$E((X - F^{-1}(p_{2j-1}))_+) \leq E((Y - G^{-1}(p_{2j-1}))_+).$$

*ii) El número de extremos relativos es impar, $n = 2m + 1$, siendo $p_1$ un mínimo y para $j = 1, \ldots, m$ se cumplen las desigualdades*

$$E((X - F^{-1}(p_{2j}))_+) \leq E((Y - G^{-1}(p_{2j}))_+)$$

*y además $\lim_{p \to 0^+}(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) \leq E(X) - E(X)$.*

**Demostración:**

La demostración se sigue trivialmente a partir del teorema anterior con la salvedad de que se tiene que distinguir el caso en el que el número de extremos relativos es par del impar. La razón es que los mínimos de la función $\delta(p)$, definida en el teorema anterior, varían teniendo en cuenta este hecho, ya que para que se verifique el orden ew se tiene que exigir que el último extremo relativo sea un mínimo. En el caso impar la función $\delta(p)$ empieza creciendo, por lo que hay que exigirle que empiece positiva, o equivalentemente, $\lim_{p\to 0^+}(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) \leq E(X) - E(X)$.

■

Veamos a continuación un ejemplo donde se aplica el resultado anterior.

**Ejemplo 4.2.18.** *Sean $X \sim T(2, 10, 2, 3)$ y $Y \sim T(5, 7, 3, 3)$. Estudiaremos el número de extremos relativos de la diferencia $G^{-1}(p)-F^{-1}(p)$ en el intervalo $(0, 1)$, o equivalentemente los puntos para los que la función*

$$h(p) = h_G(p) - h_F(p) = \frac{13}{70}p^2 - \frac{13}{70}p + \frac{3}{70},$$

*tiene un cambio de signo. En este caso se tiene dos cambios de signo ya que es una parábola en $p$. Dichos puntos son*

$$p_1 = \frac{26 - \sqrt{52}}{52} \text{ y } p_2 = \frac{26 + \sqrt{52}}{52}.$$

*Puesto que $h(0) > 0$ y $p_1, p_2 \in (0, 1)$, se tiene que $h(p)$ tiene dos cambios de signo con la secuencia $+, -, +$ en el intervalo $(0, 1)$, es decir, $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ tiene $n = 2$ extremos relativos siendo $p_1$ un máximo con $W_Y(p_1) - W_X(p_1) = 0.0003361214 \geq 0$. Por el Teorema 4.2.17, se tiene que $X \leq_{\text{ew}} Y$. La Figura 4.5 muestra la diferencia de las funciones cuantiles y las funciones excess wealth de $X$ e $Y$.*

### 4.2.3. Comparación de estadísticos ordenados generalizados

Como dijimos en el Capítulo 3, la mayoría de resultados sobre ordenación de estadísticos ordenados generalizados en términos de la dispersión que se encuentran en la literatura están dedicados a la comparación de los mismos en el orden en dispersión (el cuál hemos visto que no se verifica en muchas situaciones). Sin embargo, existen muy pocos resultados para otros órdenes como el ew. A continuación proporcionamos nuevos resultados en esta línea de investigación, los cuáles se pueden combinar con otros ya existentes proporcionando a su vez nuevos resultados.

**Teorema 4.2.19.** *Sean $l, n \in \mathbb{N}$, $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{\text{máx}\{l,n\}-1} \in \mathbb{R}$ y $m_i \geq -1$, para todo $i$. Denotamos por $X_{(i,j,\widetilde{m}_j,k)}$ e $Y_{(i,j,\widetilde{m}_j,k)}$ los $i$-ésimos estadísticos ordenados generalizados basados en dos funciones de distribución continuas $F$ y $G$, respectivamente donde el tamaño de muestra, $j$, es $n$ ó $l$. Si existe $1 \leq r \leq n$ tal que $X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{ew}} Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}$, entonces*

$$X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)} \leq_{\text{ew}} Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}, \text{ para todo } s \geq r,\ s - r \geq l - n.$$

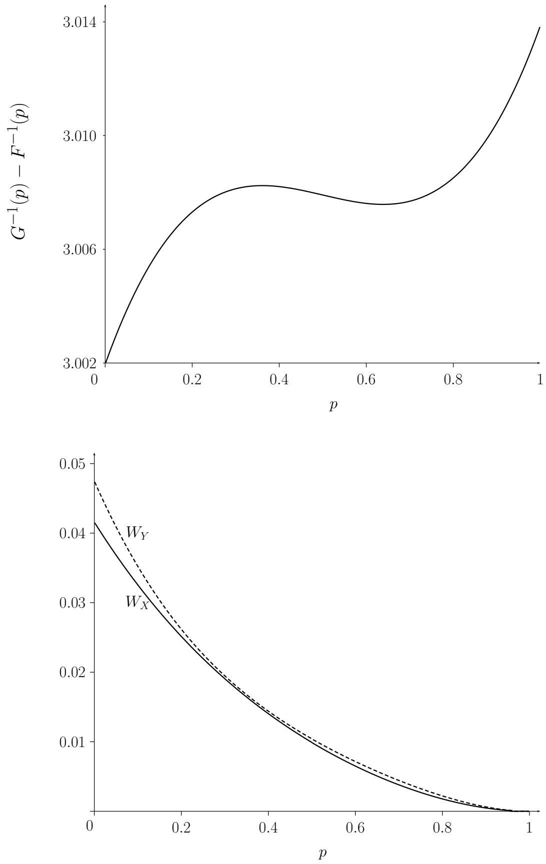



Figura 4.5: *Gráficas de la diferencia $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ (abajo) y de las funciones excess wealth (abajo), para $X \sim T(2, 10, 2, 3)$ e $Y \sim T(5, 7, 3, 3)$.*

**Demostración:**

Sean $s \geq r$ y $s - r \geq l - n$. Denotaremos por $\overline{F}_{*,r}$ y $\overline{F}_{*,r}^{-1}$ las funciones de supervivencia y cuantil de $X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}$ y por $\overline{F}_{*',s}$ y $\overline{F}_{*',s}^{-1}$ las funciones de supervivencia y cuantil de $X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}$, respectivamente y análogamente para $Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}$ e $Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}$ reemplazando $F$ por $G$. Por definición, la desigualdad $X(r, n, \widetilde{m}_n, k) \leq_{\text{ew}} Y(r, n, \widetilde{m}_n, k)$ es equivalente a

$$\int_{\overline{F}_{*,r}^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}_{*,r}(u)du \leq \int_{\overline{G}_{*,r}^{-1}(p)}^{\infty} \overline{G}_{*,r}(u)du, \text{ para todo } p \in (0, 1).$$

Haciendo el cambio de variable $u = \overline{G}_{*,r}^{-1}\overline{F}_{*,r}(u')$ en la integral de la derecha de la desigualdad anterior, se tiene que

$$\int_{\overline{F}_{*,r}^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}_{*,r}(u)du \leq \int_{\overline{F}_{*,r}^{-1}(p)}^{\infty} \overline{G}_{*,r}(u')d\left[\overline{G}_{*,r}^{-1}(\overline{F}_{*,r}(u'))\right], \text{ para todo } p \in (0, 1),$$

o equivalentemente,

$$\int_{\overline{F}_{*,r}^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}_{*,r}(u) d\left[\overline{G}_{*,r}^{-1}(\overline{F}_{*,r}(u)) - u\right] \geq 0, \text{ para todo } p \in (0,1).$$

Teniendo en cuenta que $\overline{G}_{*,r}^{-1}(\overline{F}_{*,r}(u)) = \overline{G}^{-1}(\overline{F}(u)) = \overline{G}_{*',s}^{-1}(\overline{F}_{*',s}(u))$ por (1.12), podemos reescribir la última desigualdad como sigue

$$\int_{\overline{F}_{*,r}^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}_{*,r}(u) d\left[\overline{G}_{*',s}^{-1}(\overline{F}_{*',s}(u)) - u\right] \geq 0, \text{ para todo } p \in (0,1).$$

Consideramos la función $h(u) = \overline{F}_{*',s}(u)/\overline{F}_{*,r}(u)$, la cuál es creciente por el Lema 1.1.27. Si aplicamos el Lema 3.2.18, se tiene a partir de la última desigualdad que

$$\int_{\overline{F}_{*,r}^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}_{*',s}(u) d\left[\overline{G}_{*',s}^{-1}(\overline{F}_{*',s}(u)) - u\right] \geq 0, \text{ para todo } p \in (0,1),$$

o equivalentemente, tomando $p = \overline{F}_{*,r}(\overline{F}_{*',s}^{-1}(q))$ se obtiene que

$$\int_{\overline{F}_{*',s}^{-1}(q)}^{\infty} \overline{F}_{*',s}(u) du \leq \int_{\overline{G}_{*',s}^{-1}(q)}^{\infty} \overline{G}_{*',s}(u) du, \text{ para todo } q \in (0,1),$$

es decir, $X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)} \leq_{\text{ew}} Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}$. ■

Este resultado es una generalización, por un lado, del Teorema 3.3 de Qiu y Wang (2007), quienes establecieron el resultado para tamaños de muestra iguales y, por otro lado, del Teorema 3.1 (2) de Wang (2009), quien estableció el resultado para los estadísticos ordenados usuales.

Este resultado se puede combinar con el Teorema 3.2.19, para establecer un nuevo resultado que permite comparar estadísticos ordenados generalizados con distintos parámetros y basados en distribuciones distintas.

**Teorema 4.2.20.** *Sean $l, n \in \mathbb{N}$, $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{\text{máx}\{l,n\}-1} \in \mathbb{R}$. Denotaremos por $X_{(i,n,\widetilde{m}_n,k)}$ y $Y_{(i,n,\widetilde{m}_n,k)}$ los i-ésimos estadísticos ordenados generalizados basados en dos funciones de distribución continuas $F$ y $G$, respectivamente. Sea $X_{(i,l,\widetilde{m}'_l,k')}$ $\left(Y_{(i,l,\widetilde{m}'_l,k')}\right)$ el i-ésimo estadístico ordenado generalizado basado en la función de distribución continua $F$ $(G)$ con parámetros $k'$ y $m'_i$, $i = 1, \ldots, l-1$, tal que $k' \geq (\leq) k$ y $m'_i \geq (\leq) m_i$, para todo $i = 1, \ldots, l-1$. Si existe $1 \leq r \leq n$ tal que $X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{ew}} Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}$, entonces*

$$X_{(s,l,\widetilde{m}'_l,k')} \leq_{\text{icx}} Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)} \left(X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)} \leq_{\text{icx}} Y_{(s,l,\widetilde{m}'_l,k')}\right), \text{ para todo } s \geq r, \ s - r \geq l - n.$$

**Demostración:**

Sean $s \geq r$, $s-r \geq l-n$, $k' \geq k$ y $m'_i \geq m_i$, para todo $i = 1, \ldots, l-1$ (el otro caso se sigue invirtiendo las desigualdades). Por el teorema anterior, se tiene que $X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)} \leq_{\text{ew}} Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}$, lo que implica por (1.22) que

$$X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)} \leq_{\text{icx}} Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}. \tag{4.8}$$

Por otro lado, de las hipótesis y del Teorema 3.2.19, se observa que $X_{(s,l,\widetilde{m}'_l,k')} \leq_{\text{st}} X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}$ lo que implica por (1.17) que

$$X_{(s,l,\widetilde{m}'_l,k')} \leq_{\text{icx}} X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}. \tag{4.9}$$

Combinando (4.8) y (4.9) se concluye que

$$X_{(s,l,\widetilde{m}'_l,k')} \leq_{\text{icx}} Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}.$$

■

Consideremos ahora los primeros estadísticos ordenados generalizados. Tomando $s = l = 1$ y $r = 1 \leq n$ en el Teorema 4.2.19 establecemos el siguiente corolario.

**Corolario 4.2.21.** *Sean* $\mathbf{X} = (X_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}, ..., X_{(n,n,\widetilde{m}_n,k)})$ *e* $\mathbf{Y} = (Y_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}, ..., Y_{(n,n,\widetilde{m}_n,k)})$ *dos vectores de estadísticos ordenados generalizados basados en dos funciones de distribución continuas* $F$ *y* $G$*, respectivamente. Si* $X_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{ew}} Y_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}$*, entonces*

$$X_{(1,1,m,k)} \leq_{\text{ew}} Y_{(1,1,m,k)},$$

*para todo* $\widetilde{m}_n = (m_1, m_2, ..., m_{n-1})$ *tal que* $m_1 = m$*,* $m_i$ *es decreciente en* $i$ *y* $m_i \geq -1$*, para todo* $i$*.*

Podemos combinar este corolario con el siguiente lemma para demostrar que la ordenación de los mínimos de los vectores de estadísticos ordenados generalizados en el orden ew implica la ordenación de las variables de partida.

**Lema 4.2.22.** *Sean* $X_{(1,1,m,k)}$ *e* $Y_{(1,1,m,k)}$ *los primeros estadísticos ordenados generalizados basados en dos funciones de distribución continuas* $F$ *y* $G$*, respectivamente. Si* $X_{(1,1,m,k)} \leq_{\text{ew}} Y_{(1,1,m,k)}$*, entonces* $X \leq_{\text{ew}} Y$*, donde* $X$ *e* $Y$ *son dos variables aleatorias con funciones de distribución* $F$ *y* $G$*, respectivamente.*

**Demostración:**

En este caso particular se tiene que $\overline{F}_{X_{(1,1,m,k)}}(x) = \left(\overline{F}(x)\right)^k$. Por lo que $X_{(1,1,m,k)} \leq_{\text{ew}} Y_{(1,1,m,k)}$ es equivalente a

$$\int_{\overline{F}^{-1}(p^{1/k})}^{\infty} (\overline{F}(x))^k d\left(\overline{G}^{-1}(\overline{F}(x)) - x\right) \geq 0, \text{ para todo } p \in (0,1).$$

Consideremos la función $h(x) = (\overline{F}(x))^{-k+1}$, la cuál es creciente por definición puesto que $k \geq 1$. Aplicando el Lema 3.2.18 y tomando $p = q^k$, se tiene a partir de la última desigualdad que

$$\int_{\overline{F}^{-1}(q)}^{\infty} \overline{F}(x) d\left(\overline{G}^{-1}(\overline{F}(x)) - x\right) \geq 0, \text{ para todo } p \in (0,1),$$

o equivalentemente, $X \leq_{\text{ew}} Y$. ■

Establecemos ahora el teorema combinando los dos últimos resultados.

**Teorema 4.2.23.** *Sean* $\mathbf{X} = (X_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}, ..., X_{(n,n,\widetilde{m}_n,k)})$ *e* $\mathbf{Y} = (Y_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}, ..., Y_{(n,n,\widetilde{m}_n,k)})$ *dos vectores de estadísticos ordenados generalizados basados en dos funciones de distribución continuas* $F$ *y* $G$*, respectivamente, donde* $m_i$ *es decreciente en* $i$ *y verifica* $m_i \geq -1$*, para todo* $i$ *y sean* $X$ *e* $Y$ *son dos variables aleatorias con funciones de distribución* $F$ *y* $G$*, respectivamente. Si* $X_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{ew}} Y_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}$*, entonces*

$$X \leq_{\text{ew}} Y.$$

Este resultado es una generalización del Teorema 3.3.i) de Li and Yam (2005), quienes establecen este resultado para los estadísticos ordenados usuales. Kochar, Li and Shaked (2002) probaron que si $X \leq_{\text{ew}} Y$, entonces $\max\{X_1, X_2, .., X_n\} \leq_{\text{ew}} \max\{Y_1, Y_2, .., Y_n\}$, para todo $n \geq 1$. Desafortunadamente, la extensión de este resultado al caso de los estadísticos ordenados generalizados es todavía una cuestión abierta.

Es importante observar que en términos de las primeras componentes de dos vectores aleatorios de estadísticos ordenados generalizados podemos establecer comparaciones entre el resto de las componentes. Por ejemplo, tomando $r = 1$ en el Teorema 4.2.19, podemos comparar $X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}$ e $Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}$, para todo $s \geq r$, $s \geq l-n+1$. En este caso sólo necesitamos verificar si $X_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{ew}} Y_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}$. En general, no es fácil verificar el orden ew para los mínimos. Sin embargo, en algunos casos sí lo es a partir de los resultados de la Subsección 4.2.1. Dado que $G_{*,1}^{-1}(F_{*,1}) = G^{-1}(F)$, se tiene que si $F$ y $G$ tienen el comportamiento descrito en el Teorema 4.2.1, entonces lo mismo ocurre para $F_{*,1}$ y $G_{*,1}$. Por lo tanto, si $E(X_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}) \leq E(Y_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)})$, se tiene que $X_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{ew}} Y_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}$.

Un ejemplo de esta situación es la familia Weibull. Si consideramos $X_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}$ e $Y_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}$, para $X \sim W(\alpha_1, \beta_1)$ e $Y \sim W(\alpha_2, \beta_2)$. A partir del Ejemplo 4.2.7, si $\beta_2 \leq \beta_1$ y

$$E\left(X_{(1,n,\widetilde{m},k)}\right) = \gamma_1^{-1/\alpha_1}\alpha_1\Gamma\left(\frac{\beta_1+1}{\beta_1}\right) \leq E\left(Y_{(1,n,\widetilde{m},k)}\right) = \gamma_1^{-1/\alpha}\alpha_2\Gamma\left(\frac{\beta_2+1}{\beta_2}\right),$$

se tiene que $X_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{ew}} Y_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}$.

## 4.3. Resultados para el orden lir

En el Capítulo 1, vimos el orden dual del orden ew, el orden lir. Recordamos que dadas $X$,$Y$ dos variables aleatorias con funciones de distribución $F$,$G$ respectivamente, se dice que $X \leq_{lir} Y$, si

$$\int_{-\infty}^{F^{-1}(p)} F(x)dx \leq \int_{-\infty}^{G^{-1}(p)} G(x)dx, \text{ para todo } p \in (0,1).$$

Existe una estrecha relación entre el orden ew y su dual, de forma análoga a la existente entre el orden ttt y su dual, en concreto se tiene que (ver (1.23)),

$$X \leq_{lir} Y \Leftrightarrow -X \leq_{\text{ew}} -Y.$$

A lo largo de esta sección establecemos para el orden lir los resultados análogos a los dados en la sección anterior para el orden ew. La mayor parte de los resultados se probarán a partir de los correspondientes para el orden ew y (1.23).

### 4.3.1. Condiciones suficientes para el orden lir

En primer lugar establecemos los diversos conjuntos de condiciones suficientes para el orden lir.

**Teorema 4.3.1.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas tales que $E(X) \geq E(Y)$. Si existe un punto $p_0 \in (0,1)$ tal que $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es creciente en $p \in (0, p_0)$ y $G^{-1}(p) \geq F^{-1}(p)$, para todo $p \in [p_0, 1)$, entonces*

$$X \leq_{\text{lir}} Y.$$

**Demostración:**

Consideremos las variables aleatorias $-X$ y $-Y$, denotaremos sus funciones cuantiles por $F_{-}^{-1}$ y $G_{-}^{-1}$, respectivamente. Por el Teorema 4.2.1, se tiene que si $E(-X) \leq E(-Y)$ y existe un punto $p_0$ tal que $G_{-}^{-1}(p) \leq F_{-}^{-1}(p)$, para todo $p \in (0, p_0)$ y $G_{-}^{-1}(p) - F_{-}^{-1}(p)$ es creciente en $p \in [p_0, 1)$, entonces $-X \leq_{\text{ew}} -Y$, lo que es equivalente a que $X \leq_{\text{lir}} Y$ a partir de (1.23). Es fácil ver que $F_{-}^{-1}(p) = -F^{-1}(1-p)$ y análogamente $G_{-}^{-1}(p) = -G^{-1}(1-p)$, para todo $p \in (0,1)$, por lo que se prueba sin dificultad que el conjunto de condiciones anterior es equivalente al que aparece en el enunciado del teorema.

■

De nuevo como corolario de este teorema establecemos el siguiente resultado.

**Corolario 4.3.2.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas tales que $E(X) \geq E(Y)$. Si $\lim_{p \to 1^-}(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) \geq 0$ y existe un punto $p_0 \in (0,1)$ tal que $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es creciente en $p \in (0, p_0)$ y $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es decreciente en $p \in [p_0, 1)$, entonces*

$$X \leq_{\text{lir}} Y.$$

En el caso de variables aleatorias absolutamente continuas, cuyos soportes son intervalos, el resultado anterior se puede reescribir de la siguiente forma.

**Corolario 4.3.3.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias absolutamente continuas con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$ y funciones de densidad $f$ y $g$, respectivamente y medias finitas tales que $E(X) \geq E(Y)$. Si $\lim_{p \to 1^-}(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) \geq 0$ y existe un punto $p_0 \in (0,1)$ tal que $g(G^{-1}(p)) \leq f(F^{-1}(p))$, para todo $p \in (0, p_0)$ y $g(G^{-1}(p)) \geq f(F^{-1}(p))$, para todo $p \in [p_0, 1)$, entonces*

$$X \leq_{\text{lir}} Y.$$

Consideremos ahora el conjunto de condiciones suficientes en el que no aparece la condición de que las medias estén ordenadas.

**Teorema 4.3.4.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas tales que* $\lim_{p\to 1^-}(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) \geq E(Y) - E(X)$. *Si existe un punto $p_0 \in (0,1)$ tal que $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es creciente en $p \in (0, p_0)$ y $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es decreciente en $p \in [p_0, 1)$, entonces*

$$X \leq_{\text{lir}} Y.$$

**Demostración:**
Es trivial a partir del Teorema 4.2.12 y de (1.23) de la misma forma que argumentamos la prueba del Teorema 4.3.1. ■

Combinando estos resultados con los ejemplos dados en la Sección 4.2.1 se pueden dar ejemplos triviales de variables aleatorias que se ordenan en el orden lir. Sin embargo, estos ejemplos carecen de interés ya que las variables aleatorias que resultan al considerar $-X$ y $-Y$ no pertenecen a familias paramétricas conocidas, al ser las familias estudiadas en los ejemplos de dicha sección no negativas.

### 4.3.2. Generalizaciones

A continuación establecemos una generalización de los resultados 4.3.2 y 4.3.4. Consideramos el caso en el que el número de extremos relativos de la diferencia de las funciones cuantiles es mayor que uno. Pese a que podemos encontrar aplicaciones de este resultado, éste tiene mayor interés desde un punto de vista teórico como hemos mencionado anteriormente.

**Teorema 4.3.5.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas. Si existe un punto $p_{n+1} \in (0,1)$ tal que $G^{-1}(p) \geq F^{-1}(p)$, para todo $p \in [p_{n+1}, 1)$ y $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ tiene $n \geq 1$ extremos relativos en los puntos $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n < p_{n+1}$. Entonces $X \leq_{\text{lir}} Y$ sí, y sólo sí, $E(X) \geq E(Y)$, el número de extremos relativos es par, n=2m, siendo $p_1$ un máximo y para $j = 1, \ldots, m$ se cumplen las desigualdades*

$$E[(F^{-1}(p_{2j}) - X)_+] \leq E[(G^{-1}(p_{2j}) - Y)_+].$$

**Demostración:**
En este caso, dada la complejidad de la demostración, reescribiremos la prueba al no ser tan fácil dilucidar cuál es el conjunto de condiciones análogas a las del Teorema 4.2.15. Demostraremos en primer lugar la implicación indirecta. Para ello definimos en primer lugar la función $\delta(p)$ de forma análoga al Teorema 4.2.15

$$\begin{aligned}\delta(p) = E((G^{-1}(p) - Y)_+) - E((F^{-1}(p) - X)_+) = \\ = \int_0^p (G^{-1}(p) - F^{-1}(p) - (G^{-1}(q) - F^{-1}(q)))dq,\end{aligned}$$

para todo $p \in (0,1)$, donde la segunda igualdad se sigue combinando el hecho de que la función cuantil de la variable $(F^{-1}(p) - X)_+$ es $(F^{-1}(p) - F^{-1}(q))_+$ (ver (3.5)) con la igualdad $E(X) = \int_0^1 F^{-1}(p)dp$ y análogamente para la variable $(G^{-1}(p) - Y)_+$.

Por lo tanto tenemos que probar que $\delta(p) \geq 0$, para todo $p \in (0,1)$. Para demostrarlo veremos que el comportamiento de esta función es el mismo que el de la diferencia de los cuantiles $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$, es decir, la función $\delta(p)$ es creciente en los tramos donde la diferencia de los cuantiles $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es creciente y viceversa.

Consideremos un intervalo $(p_i, p_{i+1})$ donde $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ es creciente y $q_1 \leq q_2$ pertenecientes a dicho intervalo. En este caso se tiene que

$$\begin{aligned}
\delta(q_2) = \int_0^{q_1} &\left(G^{-1}(q_2) - F^{-1}(q_2) - (G^{-1}(q) - F^{-1}(q))\right) dq + \\
&\int_{q_1}^{q_2} \left(G^{-1}(q_2) - F^{-1}(q_2) - (G^{-1}(q) - F^{-1}(q))\right) dq \\
&\qquad \geq \int_0^{q_1} \left(G^{-1}(q_2) - F^{-1}(q_2) - (G^{-1}(q) - F^{-1}(q))\right) dq \geq \delta(q_1),
\end{aligned}$$

donde ambas desigualdades se siguen del crecimiento de $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$. Por lo tanto la función $\delta(p)$ es creciente en los intervalos donde la diferencia de los cuantiles es creciente. Análogamente, invirtiendo las desigualdades se tiene que $\delta(p)$ es decreciente en los intervalos donde la diferencia de los cuantiles es decreciente. Por lo tanto, los puntos mínimos de la función $\delta(p)$ son los mínimos de $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$, es decir, los puntos pares serán los mínimos de $\delta(p)$, al ser $p_1$ un máximo. Puesto que las desigualdades que aparecen en el enunciado del teorema son equivalentes a que $\delta(p) \geq 0$ en los puntos mínimos, se tiene que $\delta(p) \geq 0$, para todo $p \in (p_1, p_{n+1})$. Por otro lado, siguiendo la demostración del Teorema 4.2.1 se tiene que la función $\delta(p)$ es positiva en los intervalos $(0, p_1)$ y $(p_{n+1}, 1)$.

La implicación directa es trivial.

■

**Observación 4.3.6.** *Nótese que en el teorema 4.3.5 no es necesario distinguir el caso en el que el número de extremos relativos es par con el impar por la misma razón que para el orden ew. Si el número de extremos relativos es impar, n=2m+1, se tiene que $p_n$ es un máximo, es decir, la diferencia de las funciones cuantiles es decreciente en el tramo $(p_n, p_{n+1})$, siendo por hipótesis $G^{-1}(p) \geq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (p_{n+1}, 1)$. Combinando ambas condiciones se tiene que $G^{-1}(p) \geq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (p_n, 1)$ y podemos reducir este caso al caso en el que el número de extremos relativos es par.*

Consideramos ahora la extensión del segundo corolario.

**Teorema 4.3.7.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas. Supongamos que $G^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ tiene $n \geq 1$ extremos relativos en los puntos $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n < 1$. Entonces, se tiene que $X \leq_{\text{lir}} Y$ sí, y sólo sí, se satisface uno de los siguientes conjuntos de condiciones:*

*i) El número de extremos relativos es par, $n = 2m$, siendo $p_1$ un máximo y para $j = 1, \ldots, m$ se cumplen las desigualdades*

$$E((F^{-1}(p_{2j}) - X)_+) \leq E((G^{-1}(p_{2j}) - Y)_+).$$

*ii) El número de extremos relativos es impar, $n = 2m + 1$, siendo $p_1$ un máximo, para $j = 1, \ldots, m$ se cumplen las desigualdades*

$$E((X - F^{-1}(p_{2j}))_+) \leq E((Y - G^{-1}(p_{2j}))_+)$$

*y además* $\lim_{p \to 1^-}(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) \geq E(Y) - E(X)$.

**Demostración:**

La demostración se sigue trivialmente a partir del teorema anterior con la salvedad de que tenemos que distinguir el caso en el que el número de extremos relativos es par del impar. La razón es que los mínimos de la función $\delta(p)$ definida en el teorema anterior, varían teniendo en cuenta este hecho, ya que para que se verifique el orden lir tenemos que exigir que el primer extremo relativo sea un máximo. En el caso impar la función $\delta(p)$ termina decreciendo, por lo que hay que exigirle que termine positiva, o equivalentemente, $\lim_{p \to 1^-}(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) \geq E(Y) - E(X)$.

■

## 4.3.3. Comparación de estadísticos ordenados generalizados

Por último presentamos los resultados análogos sobre la ordenación de estadísticos ordenados generalizados en el orden lir.

**Teorema 4.3.8.** *Sean $l, n \in \mathbb{N}$, $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{\text{máx}\{l,n\}-1} \in \mathbb{R}$ y $m_i \geq -1$, para todo $i$. Denotamos por $X_{(i,j,\widetilde{m}_j,k)}$ e $Y_{(i,j,\widetilde{m}_j,k)}$ los $i$-ésimos estadísticos ordenados generalizados basados en dos funciones de distribución continuas $F$ y $G$ respectivamente, donde el tamaño de muestra, $j$, es $n$ ó $l$. Si existe $1 \leq r \leq n$ tal que $X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{lir}} Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}$, entonces*

$$X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)} \leq_{\text{lir}} Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}, \text{ para todo } s \leq r, \ s - r \leq l - n.$$

**Demostración:**

Supongamos que existe $1 \leq r \leq n$ tal que $X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{lir}} Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}$, o equivalentemente por (1.23), $-(X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}) \leq_{\text{ew}} -(Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)})$. Obsérvese que $-(X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}) = (-X)_{(n-r+1,n,\widetilde{m}_n,k)}$ y análogamente para $-(Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)})$, por lo que la condición anterior es equivalente a que

$$(-X)_{(n-r+1,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{ew}} (-Y)_{(n-r+1,n,\widetilde{m}_n,k)},$$

aplicando el Teorema 4.2.19, se tiene que

$$(-X)_{(l-s+1,l,\widetilde{m}_l,k)} \leq_{\text{ew}} (-Y)_{(l-s+1,l,\widetilde{m}_l,k)}, \text{ para todo } s \leq r, \ s - r \leq l - n,$$

o equivalentemente,

$$-(X_{(s,l,\widetilde{m}_n,k)}) \leq_{\text{ew}} -(Y_{(s,l,\widetilde{m}_n,k)}), \text{ para todo } s \leq r, \ s - r \leq l - n,$$

y de nuevo por (1.23), se tiene que

$$X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)} \leq_{\text{lir}} Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}, \text{ para todo } s \leq r, \ s - r \leq l - n.$$

Por lo que el teorema queda demostrado. ■

**Teorema 4.3.9.** *Sean* $l, n \in \mathbb{N}$, $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{\text{máx}\{l,n\}-1} \in \mathbb{R}$. *Denotaremos por* $X_{(i,n,\widetilde{m}_n,k)}$ *y* $Y_{(i,n,\widetilde{m}_n,k)}$ *los i-ésimos estadísticos ordenados generalizados basados en dos funciones de distribución continuas* $F$ *y* $G$ *respectivamente. Sea* $X_{(i,l,\widetilde{m}'_l,k')}$ $\left(Y_{(i,l,\widetilde{m}'_l,k')}\right)$ *el i-ésimo estadístico ordenado generalizado basado en la función de distribución continua* $F$ $(G)$ *con parámetros* $k'$ *y* $m'_i$, $i = 1, \ldots, l-1$, *tal que* $k' \geq (\leq) k$ *y* $m'_i \geq (\leq) m_i$, *para todo* $i = 1, \ldots, l-1$. *Si existe* $1 \leq r \leq n$ *tal que* $X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{lir}} Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}$, *entonces*

$$X_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)} \leq_{\text{icv}} Y_{(s,l,\widetilde{m}'_l,k')} \left(X_{(s,l,\widetilde{m}'_l,k')} \leq_{\text{icv}} Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}\right), \text{ para todo } s \leq r, \; s-r \leq l-n.$$

**Demostración:**
Supongamos que existe $1 \leq r \leq n$ tal que $X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{lir}} Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}$, o equivalentemente por (1.23), $-(X_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)}) \leq_{\text{ew}} -(Y_{(r,n,\widetilde{m}_n,k)})$. De nuevo esta condición es equivalente que $(-X)_{(n-r+1,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{ew}} (-Y)_{(n-r+1,n,\widetilde{m}_n,k)}$. Aplicando el Teorema 4.2.20 se tiene que

$$(-X)_{(l-s+1,l,\widetilde{m}'_l,k')} \leq_{\text{icx}} (-Y)_{(l-s+1,l,\widetilde{m}_l,k)}, \text{ para todo } s \leq r, \; s-r \leq l-n,$$

o equivalentemente,

$$-(X_{(s,l,\widetilde{m}'_l,k')}) \leq_{\text{icx}} -(Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}), \text{ para todo } s \leq r, \; s-r \leq l-n,$$

y por (1.16) se tiene que

$$X_{(s,l,\widetilde{m}'_l,k')} \geq_{\text{icv}} Y_{(s,l,\widetilde{m}_l,k)}, \text{ para todo } s \leq r, \; s-r \leq l-n.$$

Por lo que el teorema queda demostrado. ■

A partir del Teorema 4.2.23 establecemos el siguiente resultado para ordenar dos poblaciones a partir de la ordenación de los máximos.

**Teorema 4.3.10.** *Sean* $\mathbf{X} = (X_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}, ..., X_{(n,n,\widetilde{m}_n,k)})$ *e* $\mathbf{Y} = (Y_{(1,n,\widetilde{m}_n,k)}, ..., Y_{(n,n,\widetilde{m}_n,k)})$ *dos vectores de estadísticos ordenados generalizados basados en dos funciones de distribución continuas* $F$ *y* $G$ *respectivamente, donde* $m_i$ *es decreciente en* $i$ *y verifica* $m_i \geq -1$, *para todo* $i$ *y sean* $X$ *e* $Y$ *dos variables aleatorias con funciones de distribución* $F$ *y* $G$, *respectivamente. Si* $X_{(n,n,\widetilde{m}_n,k)} \leq_{\text{lir}} Y_{(n,n,\widetilde{m}_n,k)}$, *entonces*

$$X \geq_{\text{lir}} Y.$$

**Demostración:**
Se sigue de manera análoga a la demostración del Teorema 4.3.8. ■

## 4.4. Resultados para el orden eps

Como hemos dicho en el Capítulo 1, hay muchas situaciones en las que las funciones expected proportional shortfall no tienen expresión explícita, por lo que el orden eps no se puede verificar directamente. Una posibilidad es estudiar si las variables se ordenan en el orden estrella, que es un criterio más fuerte, ver (1.27). Sin embargo, en muchos casos el orden estrella no se verifica en ningún sentido. El objetivo de esta sección es dar conjuntos de condiciones suficientes para que se verifique el orden eps en este tipo de situaciones en las que no se verifica el orden estrella. Recordamos que dadas dos variables aleatorias $X$ e $Y$ con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas, se dice que $X \leq_{\star} Y$, si

$$G^{-1}(p)F^{-1}(q) \leq G^{-1}(q)F^{-1}(p), \text{ para todo } 0 < p < q < 1.$$

Dadas dos variables aleatorias $X$ e $Y$ con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas, se dice que $X \leq_{\text{eps}} Y$, si

$$EPS_X(p) = \int_p^1 \left(F^{-1}(q) - F^{-1}(p)\right) dq \leq \int_p^1 \left(G^{-1}(q) - G^{-1}(p)\right) dq = EPS_Y(p),$$

para todo $p \in (0,1)$.

La organización de esta sección sigue la misma línea de los capítulos anteriores. En primer lugar damos diversos conjuntos de condiciones suficientes y aplicaciones de estos resultados y, por último, generalizaciones de algunos de estos resultados.

## 4.4.1. Condiciones suficientes para el orden eps

A continuación presentamos el primer conjunto de condiciones. A lo largo de esta sección asumimos que las variables son no negativas.

**Teorema 4.4.1.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas tales que $E(X) \leq E(Y)$. Si existe un punto $p_0 \in (0,1)$ tal que $G^{-1}(p) \leq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (0, p_0)$ y $G^{-1}(p)/F^{-1}(p)$ es creciente en $p \in [p_0, 1)$, entonces*

$$X \leq_{\text{eps}} Y.$$

**Demostración:**

Consideremos $p \in [p_0, 1)$ y las variables aleatorias $\left(\frac{X - F^{-1}(p)}{F^{-1}(p)}\right)_+$ y $\left(\frac{Y - G^{-1}(p)}{G^{-1}(p)}\right)_+$. Es fácil ver que la función cuantil de $\left(\frac{X - F^{-1}(p)}{F^{-1}(p)}\right)_+$, que denotaremos por $F_{p^*}^{-1}$, viene dada por

$$F_{p^*}^{-1}(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < q < p, \\ \frac{F^{-1}(q)}{F^{-1}(p)} - 1 & \text{si } p \leq q < 1, \end{cases} \tag{4.10}$$

y análogamente para $\left(\frac{Y - G^{-1}(p)}{G^{-1}(p)}\right)_+$. Puesto que $G^{-1}(p)/F^{-1}(p)$ es creciente en $p \in [p_0, 1)$, se tiene trivialmente, a partir de (4.10), que

$$\left(\frac{X - F^{-1}(p)}{F^{-1}(p)}\right)_+ \leq_{st} \left(\frac{Y - G^{-1}(p)}{G^{-1}(p)}\right)_+, \text{ para todo } p \in [p_0, 1),$$

y por lo tanto, a partir de (1.14), se tiene que

$$E\left(\left(\frac{X-F^{-1}(p)}{F^{-1}(p)}\right)_+\right) \leq E\left(\left(\frac{Y-G^{-1}(p)}{G^{-1}(p)}\right)_+\right), \text{ para todo } p \in [p_0, 1). \tag{4.11}$$

Consideremos ahora $p \in (0, p_0)$. Siguiendo la demostración del Teorema 4.2.1, se tiene que

$$W_X(p) \leq W_Y(p), \text{ para todo } p \in (0, p_0).$$

Combinando esta desigualdad con la hipótesis $G^{-1}(p) \leq F^{-1}(p)$, para todo $p \in (0, p_0)$ y con (1.5) se tiene que

$$EPS_X(p) \leq EPS_Y(p), \text{ para todo } p \in (0, p_0). \tag{4.12}$$

El resultado se sigue combinando (4.11) y (4.12). ■

Como en los capítulos anteriores, establecemos el siguiente corolario en el que se establece un conjunto de condiciones más restrictivo pero más sencillo de verificar.

**Corolario 4.4.2.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas tales que $E(X) \leq E(Y)$. Si $\lim_{p\to 0^+}(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) \leq 0$ y existe un punto $p_0 \in (0, 1)$ tal que $G^{-1}(p)/F^{-1}(p)$ es decreciente en $p \in (0, p_0)$ y $G^{-1}(p)/F^{-1}(p)$ es creciente en $p \in [p_0, 1)$, entonces*

$$X \leq_{\text{eps}} Y.$$

Al igual que sucedía para el orden ew, la condición de que las medias estén ordenadas no es una condición necesaria para el orden eps. Veamos un ejemplo en el que no se verifica el orden estrella ni se ordenan las medias en el sentido $E(X) \leq E(Y)$, pero las variables sí se ordenan en el orden eps.

**Ejemplo 4.4.3.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles*

$$F^{-1}(p) = \frac{3}{5}p + \frac{2}{5}, \text{ para } p \in (0, 1)$$

*y*

$$G^{-1}(p) = \begin{cases} \frac{1}{2}p & \text{si } p \in (0, \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{4} & \text{si } p \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), \\ \frac{9}{4}p - \frac{5}{4} & \text{si } p \in (\frac{2}{3}, 1), \end{cases}$$

*respectivamente. Estudiaremos el comportamiento del cociente $G^{-1}(p)/F^{-1}(p)$. La Figura 4.6 muestra que existe un valor $p^* \in (0, 1)$ tal que*

$$G^{-1}(p) \leq F^{-1}(p), \text{ para todo } p \in (0, p^*)$$

*y*

$$\frac{G^{-1}(p)}{F^{-1}(p)} \text{ es creciente en } p \in (p^*, 1).$$

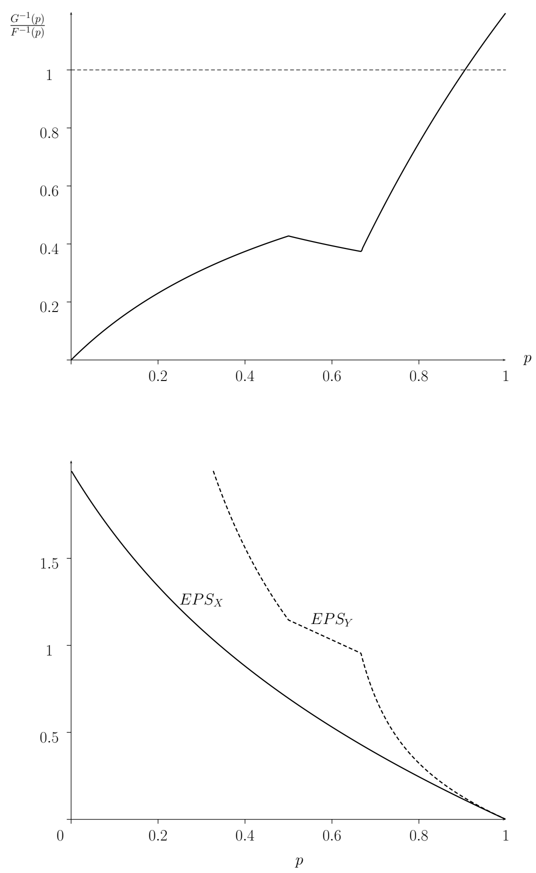



Figura 4.6: *Gráficas del cociente de las funciones cuantiles (arriba) y de las funciones eps (abajo) para las variables $X$ e $Y$ dadas en el Ejemplo 4.4.3.*

*Sin embargo, $E(X) = 0.7 > 0.25 = E(Y)$, por lo que no podemos aplicar ninguno de los resultados dados hasta ahora, pero sí parece verificarse $X \leq_{\text{eps}} Y$ como muestra la Figura 4.6.*

Presentamos a continuación un conjunto de condiciones suficientes que no contiene la condición $E(X) \leq E(Y)$.

**Teorema 4.4.4.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas tales que $\lim_{p\to 0^+} G^{-1}(p)/F^{-1}(p) \leq E(Y)/E(X)$. Si existe un punto $p_0 \in (0,1)$ tal que $G^{-1}(p)/F^{-1}(p)$ es decreciente en $p \in (0,p_0)$ y $G^{-1}(p)/F^{-1}(p)$ es creciente en $p \in [p_0,1)$, entonces*

$$X \leq_{\text{eps}} Y.$$

**Demostración:**
El caso $p \in [p_0,1)$ se sigue de la demostración del Teorema 4.4.1. Consideremos ahora $p \in (0,p_0)$. La línea de la demostración es análoga a la del Teorema 4.2.12. A partir de las

hipótesis se tiene que

$$\frac{G^{-1}(p)}{F^{-1}(p)} \leq \lim_{p\to 0^+} \frac{G^{-1}(p)}{F^{-1}(p)} \leq \frac{E(Y)}{E(X)}. \tag{4.13}$$

Consideremos las variables aleatorias $\left(\frac{X-F^{-1}(p)}{F^{-1}(p)}\right)_-$ y $\left(\frac{Y-G^{-1}(p)}{G^{-1}(p)}\right)_-$. Es fácil ver que sus funciones cuantiles vienen dadas por

$$F_-^{-1}(q) = \left(\frac{F^{-1}(q) - F^{-1}(p)}{F^{-1}(p)}\right)_-, \text{ para } q \in (0,1), \tag{4.14}$$

y de forma análoga para $(Y - G^{-1}(p))_-$. Dado que $G^{-1}(p)/F^{-1}(p)$ es decreciente en $p \in (0, p_0)$, a partir de (4.14), se tiene que

$$\left(\frac{X - F^{-1}(p)}{F^{-1}(p)}\right)_- \geq_{\text{st}} \left(\frac{Y - G^{-1}(p)}{G^{-1}(p)}\right)_-, \text{ para todo } p \in (0, p_0)$$

y por lo tanto, a partir de (1.14), se tiene que

$$E\left(\left(\frac{Y - G^{-1}(p)}{G^{-1}(p)}\right)_-\right) \leq E\left(\left(\frac{X - F^{-1}(p)}{F^{-1}(p)}\right)_-\right), \text{ para todo } p \in (0, p_0). \tag{4.15}$$

Puesto que $(x)_+ = x - (x)_-$, combinando (4.13) y (4.15), concluimos que

$$E\left(\left(\frac{X - F^{-1}(p)}{F^{-1}(p)}\right)_+\right) \leq E\left(\left(\frac{Y - G^{-1}(p)}{G^{-1}(p)}\right)_+\right), \text{ para todo } p \in (0, p_0)$$

■

Veamos ahora un ejemplo donde se aplica este resultado.

**Ejemplo 4.4.5.** ***Familia Govindarajulu.***

*Sean $X \sim G(\beta_1, \sigma_1, \theta_1)$ e $Y \sim G(\beta_2, \sigma_2, \theta_2)$. Puesto que el orden eps es invariante por cambios de escala, asumiremos $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ para simplificar los cálculos. Estudiaremos la monotonía del cociente $G^{-1}(p)/F^{-1}(p)$ que tomando logaritmos y derivando es equivalente a estudiar el signo de la función*

$$h(p) = \theta_1\beta_2(\beta_2 + 1) - \theta_2\beta_1(\beta_1 + 1)p^{\beta_1 - \beta_2} + p^{\beta_1}(\beta_1 - \beta_2)\left[\beta_1\beta_2 p - (\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1)\right],$$

*para todo $p \in (0,1)$. Derivando de nuevo se tiene que si $\beta_1 \leq \beta_2$, entonces*

$$h'(p) = p^{\beta_1 - 1}[\beta_1(\beta_1 + 1)(\beta_2 - \beta_1)\left[\theta_2 p^{-\beta_2} + \beta_2(1-p) + 1\right] > 0,$$

*para todo $p \in (0,1)$. Por lo tanto la función $h(p)$ es creciente en dicho intervalo. Puesto que $\lim_{p\to 0^+} h(p) = -\infty$ y $\lim_{p\to 1^-} h(p) = (\theta_1+1)\beta_2(\beta_2+1) - (\theta_2+1)\beta_1(\beta_1+1)$, si $\beta_1 \leq \beta_2$ y $\theta_2(\beta_2 + 2) \leq \theta_1(\beta_1 + 2)$, aplicando el Teorema 4.4.4, podemos establecer el siguiente resultado.*

**Proposición 4.4.6.** *Sean $X \sim G(\beta_1, \sigma_1, \theta_1)$ e $Y \sim G(\beta_2, \sigma_2, \theta_2)$. Si se cumplen las siguientes desigualdades:*

*(i)* $\beta_1 \leq \beta_2$,

*(ii)* $\theta_2(\beta_2 + 2) \leq \theta_1(\beta_1 + 2)$,

*entonces* $X \leq_{\text{eps}} Y$, $X \nleq_{\star} Y$ *y* $X \ngeq_{\star} Y$.

*La Figura 4.7 muestra un caso particular de esta situación para $X \sim G(1, 1/4, 1/2)$ e $Y \sim G(2, 1, 1/3)$.*

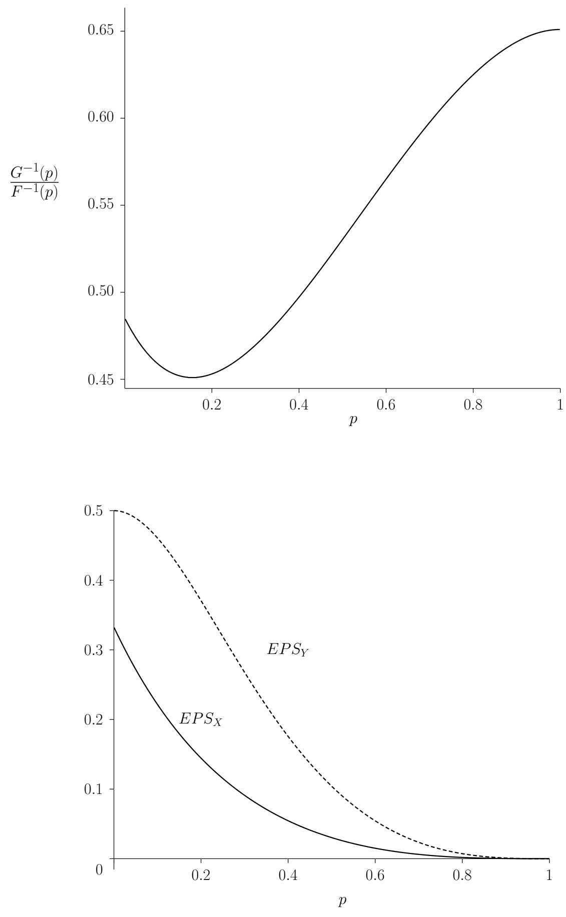



Figura 4.7: *Gráficas del cociente de las funciones cuantiles (arriba) y de las funciones eps (abajo), para $X \sim G(1, 1/4, 1/2)$ e $Y \sim G(2, 1, 1/3)$.*

**Observación 4.4.7.** *Nótese que incluso si $\beta_1 \geq \beta_2$, bajo el supuesto adicional $(\theta_1 + 1)\beta_2(\beta_2 + 1) \leq (\theta_2 + 1)\beta_1(\beta_1 + 1)$, se verifica el orden eps ya que se cumple el orden estrella. Por lo que la condición $\beta_1 \leq \beta_2$ no es necesaria para el orden eps en general.*

La condición $\lim_{p\to 0^+} G^{-1}(p)/F^{-1}(p) \leq E(Y)/E(X)$ sí es necesaria a diferencia de la condición $E(X) \leq E(Y)$ que aparece en los enunciados de los resultados 4.4.1 y 4.4.2. La razón es que esta condición es equivalente a que las funciones expected proportional shortfall empiecen ordenadas, es decir, $\lim_{p\to 0^+}(EPS_Y(p) - EPS_X(p)) = \lim_{p\to 0^+}(E(Y)/G^{-1}(p) - E(X)/F^{-1}(p))$.

Si $\lim_{p\to 0^+} G^{-1}(p)/F^{-1}(p) = +\infty$, no es posible aplicar el teorema anterior. Este restricción parece un inconveniente importante ya que en muchos casos los que los extremos inferiores de los soportes de las variables son iguales a cero. Sin embargo, en este tipo de situaciones, si el cociente de las funciones cuantiles termina creciendo, el orden eps no se verifica. En concreto, se ha probado el siguiente resultado.

**Proposición 4.4.8.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas. Si $\lim_{p\to 0^+} G^{-1}(p)/F^{-1}(p) = +\infty$ y existe un punto $p_0 \in (0,1)$ tal que $G^{-1}(p)/F^{-1}(p)$ es creciente en $p \in [p_0, 1)$, entonces*

$$X \nleq_{\text{eps}} Y \text{ y } X \ngeq_{\text{eps}} Y.$$

**Demostración:**

De la demostración del Teorema 4.4.1, se sigue de las hipótesis que existe un punto $p_0 \in (0,1)$ tal que

$$EPS_X(p) \leq EPS_Y(p), \text{ para todo } p \geq p_0. \tag{4.16}$$

Por otro lado, a partir de la condición $\lim_{p\to 0^+} G^{-1}(p)/F^{-1}(p) = +\infty$, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 0^+}(EPS_X(p) - EPS_Y(p)) &= \lim_{p\to 0^+}\left(\frac{\int_p^1 F^{-1}(q)dq}{F^{-1}(p)} - \frac{\int_p^1 G^{-1}(q)dq}{G^{-1}(p)}\right) = \\ &= \lim_{p\to 0^+}\frac{\int_p^1 F^{-1}(q)dq}{G^{-1}(p)}\left(\frac{G^{-1}(p)}{F^{-1}(p)} - \frac{\int_p^1 G^{-1}(q)dq}{\int_p^1 F^{-1}(q)dq}\right) = +\infty,\end{aligned}$$

por lo que existe un punto $p^* \in (0, p_0)$ tal que

$$EPS_X(p) \geq EPS_Y(p), \text{ para todo } p \leq p^*. \tag{4.17}$$

El resultado se sigue combinando (4.16) y (4.17)

$\blacksquare$

Veamos un ejemplo de la situación expuesta en la proposición anterior.

**Ejemplo 4.4.9. *Familia Davies***

*Sean $X \sim D(C_1, \lambda_1, \theta_1)$ e $Y \sim D(C_2\lambda_2, \theta_2)$. Asumimos que $\theta_1, \theta_2 < 1$ para que las medias sean finitas, donde $E(X) = C_1 B(1+\lambda_1, 1-\theta_1)$ y $E(Y) = C_2 B(1+\lambda_2, 1-\theta_2)$. De nuevo por ser el orden invariante por cambios de escala, tomaremos $C_1 = C_2 = 1$ para simplificar los cálculos.*

*Estudiaremos el comportamiento del logaritmo del cociente de las funciones cuantiles, $H(p) = \log(G^{-1}(p)/F^{-1}(p))$. A partir de la Definición 1.1.21, es fácil ver que si $\lambda_1 \geq \lambda_2$*

*y $\theta_1 \leq \theta_2$, entonces $H(p)$ tiene un mínimo y $\lim_{p\to 0^+}(G^{-1}(p)/F^{-1}(p)) = +\infty$. Aplicando la Proposición 4.4.8 se tiene que el orden eps no se verifica en ningún sentido. Por lo que podemos establecer el siguiente resultado.*

**Proposición 4.4.10.** *Sean $X \sim D(C_1, \lambda_1, \theta_1)$ e $Y \sim D(C_2\lambda_2, \theta_2)$. Si se cumplen las siguientes desigualdades:*

*(i)* $\lambda_1 \geq \lambda_2$,

*(ii)* $\theta_1 \leq \theta_2$,

*entonces $X \not\leq_{\text{eps}} Y$ y $X \not\geq_{\text{eps}} Y$.*

*La Figura 4.8 ilustra esta situación para $X \sim D(1, 2, 0.5)$ e $Y \sim D(1, 1, 0.75)$.*

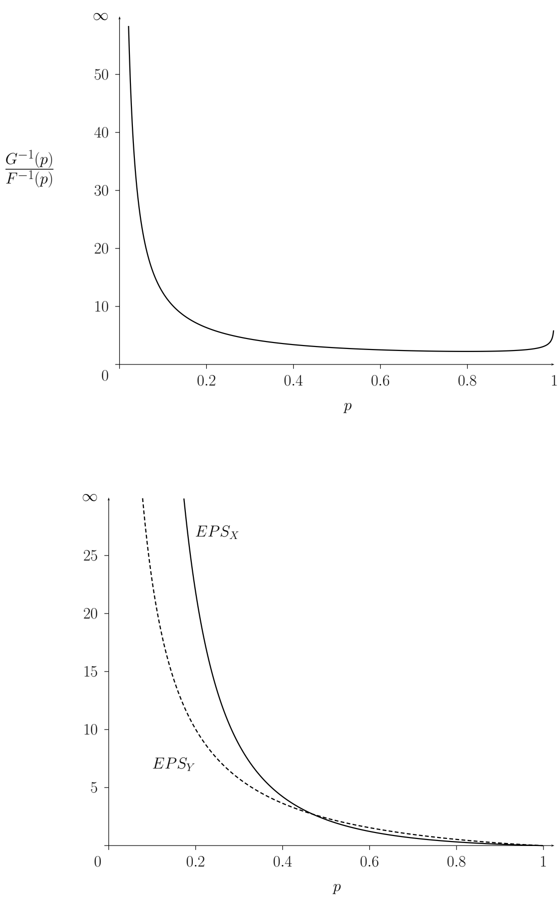



Figura 4.8: *Gráficas del cociente de las funciones cuantiles (arriba) y de las funciones eps (abajo), para $X \sim D(1, 2, 0.5)$ e $Y \sim D(1, 1, 0.75)$.*

En muchos casos, no sólo no se dispone de expresión explícita para las funciones expected proportional shortfall si no que tampoco se dispone de expresión explícita de las funciones cuantiles. En estos casos no se pueden verificar los conjuntos de condiciones suficientes establecidos hasta ahora para el orden eps. A continuación damos un conjunto de condiciones suficientes en términos de las funciones de densidad de las variables, el cuál siempre se puede verificar.

**Teorema 4.4.11.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$ y funciones de densidad $f$ y $g$, respectivamente. Si* $\lim_{p\to 0^+}(G^{-1}(p)/F^{-1}(p)) \leq E(Y)/E(X)$ *y se verifica para todo $c > 0$ que*

$$S^-(g(\cdot) - cf(c\cdot)) \leq 3 \text{ en } S_X \cup S_Y,$$

*con la secuencia de signos $-, +, -, +$ en caso de igualdad, entonces $X \leq_{\text{eps}} Y$.*

**Demostración:**

Sea $c > 0$ y consideramos $cf(cx)$ como función de densidad de una variable aleatoria $X' = X/c$. Se tiene que la función de distribución asociada a $X'$ es $F(cx)$ y la expresión de su función cuantil es $cF^{-1}(p)$. Si aplicamos el Teorema 1.2.9 a las variables $X'$ e $Y$, se tiene que la condición $S^-(g(\cdot) - cf(c\cdot)) \leq 3$ en $S_X \cup S_Y$, con la secuencia de signos $-, +, -, +$ cuando se da la igualdad, implica que

$$S^-(G(\cdot) - F(c\cdot)) \leq 2 \text{ en } S_X \cup S_Y,$$

con la secuencia de signos $-, +, -$ cuando se da la igualdad, o equivalentemente,

$$S^-(G^{-1}(\cdot) - cF^{-1}(\cdot)) \leq 2 \text{ en } (0, 1),$$

con la secuencia de signos $+, -, +$ cuando se da la igualdad. Reescribiendo el Teorema 1.2.10 en términos de las funciones cuantiles de las variables, se tiene que esta condición es equivalente a que el cociente de las funciones cuantiles tenga un mínimo. Nótese que la secuencia de signos es la contraria a la que aparece en el Teorema 1.2.10. Por esta razón, el extremo relativo es un mínimo en lugar de un máximo. Aplicando el Teorema 4.4.4, se tiene que $X \leq_{\text{eps}} Y$.

■

Veamos una aplicación de este resultado al caso de variables aleatorias normales truncadas.

**Ejemplo 4.4.12.** ***Familia normal truncada***

*Sean $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ y consideremos las variables aleatorias truncadas $\{X|X > a_1\}$ e $\{Y|Y > a_2\}$, con $a_1, a_2 > 0$ y funciones de densidad dadas por*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\sigma_1 \overline{F}(a_1)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}, \text{ para todo } x \in (a_1, \infty)$$

*y*

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\sigma_2 \overline{G}(a_2)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}, \text{ para todo } x \in (a_2, \infty),$$

*respectivamente, donde* $\overline{F}$ *y* $\overline{G}$ *denotan las funciones de supervivencia de* $X$ *e* $Y$*, respectivamente. En general, las funciones de densidad monótonas no son apropiadas para el ajuste de datos, por lo que asumimos* $a_i < \mu_i$ *para* $i = 1, 2$.

*Fijado* $c \in (0, \infty)$*, se tiene que estudiar los cambios de signo de las funciones* $g(x)$ *y* $cf(cx)$*. Para todo* $x \in (0, \min\left\{\frac{a_1}{c}, a_2\right\})$*, se tiene que* $g(x) - cf(cx) = 0$*, por lo que estudiaremos el signo de la diferencia* $g(x) - cf(cx)$ *en el intervalo* $(\min\left\{\frac{a_1}{c}, a_2\right\}, \infty)$*. Esto es equivalente a estudiar* $S^-(h_c(\cdot) - 1)$ *en* $(\min\left\{\frac{a_1}{c}, a_2\right\}, \infty)$*, donde la función* $h_c(x) = \frac{g(x)}{cf(cx)}$ *está bien definida para todo* $x \in (\max\left\{\frac{a_1}{c}, a_2\right\}, \infty)$*. Para todo* $x \in (\min\left\{\frac{a_1}{c}, a_2\right\}, \max\left\{\frac{a_1}{c}, a_2\right\})$*, se tiene que*

$$h_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{a_1}{c} \leq a_2, \\ \\ \infty & \text{si } \frac{a_1}{c} \geq a_2. \end{cases} \tag{4.18}$$

*Es fácil ver que* $h_c(x)$ *tiene un extremo absoluto en el punto*

$$x^* = \frac{c\frac{\mu_1}{\sigma_1^2} - \frac{\mu_2}{\sigma_2^2}}{\frac{c^2}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}}. \tag{4.19}$$

*Por lo tanto, a partir de* (4.18)*, se tiene que si* $\frac{a_1}{c} \leq a_2$*, entonces* $S^-(h_c(\cdot) - 1) \leq 2$*. Sin embargo, si* $\frac{a_1}{c} > a_2$ *podría darse* $S^-(h_c(\cdot) - 1) = 3$ *con la secuencia de signos* $+, -, +, -$ *como muestra la Figura 4.9.*

*Para aplicar el Teorema 4.4.11 necesitamos descartar este tipo de situaciones que corresponde al siguiente conjunto de condiciones:*

$$\left\{\begin{array}{cc} a_2 < \frac{a_1}{c} & (1) \\ x^* > \frac{a_1}{c} & (2) \\ h_c(\frac{a_1}{c}) < 1 & (3) \\ x^* \text{ es un máximo} & (4) \\ h_c(x^*) > 1 & (5) \\ \lim_{x\to\infty} h_c(x) < 1 & (6) \end{array}\right.$$

*Definimos los conjuntos*

$$S_i = \{c \in (0, \infty) | (i) \text{ se verifica }\}, \text{ para } i = 1 \ldots 6.$$

*Tenemos que estudiar bajo que condiciones el conjunto*

$$S = \bigcap_{i=1}^{6} S_i = \emptyset.$$

*De forma sencilla se llega a que* $S_1 \cap S_4 \cap S_6 = (0, \min\{\frac{a_1}{a_2}, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\})$*. Sin embargo, no resulta sencillo dilucidar quiénes son los conjuntos* $S_2$*,* $S_3$ *y* $S_5$*. Veremos a continuación que el*

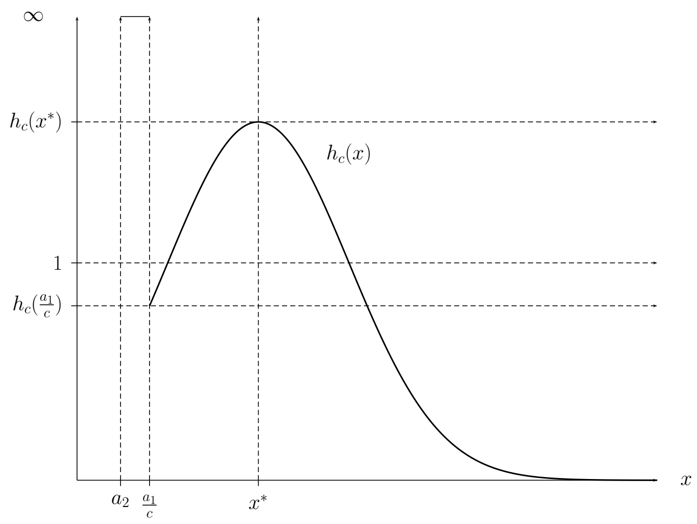



Figura 4.9: *Casos en los que* $S^-(g(\cdot) - cf(c\cdot)) = 3$ *con la secuencia de signos* $+, -, +, -$.

*conjunto* $S_2$ *tiene expresión explícita. A partir de* (4.19)*, se prueba sin dificultad que la desigualdad* $x^* > a_1/c$ *es equivalente a que la siguiente expresión en* $c$

$$c^2(\mu_1 - a_1) - \mu_2\sigma_1^2\sigma_2^2 c + a_1\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2} \tag{4.20}$$

*sea negativa. Los ceros de esta expresión cuadrática son*

$$c_\pm = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{\mu_2\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \pm \sqrt{\mu_2^2\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - 4a_1(\mu_1 - a_1)}}{2(\mu_1 - a_1)},$$

*donde* $c_- < c_+$ *trivialmente puesto que estamos suponiendo* $a_i < \mu_i$ *para* $i = 1, 2$*. Distinguiremos los siguientes casos. Por un lado, si* $(\mu_2\frac{\sigma_1}{\sigma_2})^2 < 4a_1(\mu_1 - a_1)$*, entonces no hay raices reales y* $S_2 = \emptyset$*, lo que implica que* $S = \emptyset$*. Por otro lado, si* $c_- > \text{mín}\{\frac{a_1}{a_2}, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\}$*, entonces también se tiene que* $S_2 = \emptyset$ *(y de nuevo* $S = \emptyset$*). Podemos entonces establecer el siguiente resultado.*

**Proposición 4.4.13.** *Sean* $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ *e* $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ *con funciones razón de fallo* $r$ *y* $s$*, respectivamente. Si* $a_2(\mu_1 + \sigma_1 r(a_1)) \leq a_1(\mu_2 + \sigma_2 s(a_2))$ *y se verifica una de las siguientes desigualdades:*

*(1)* $(\mu_2\frac{\sigma_1}{\sigma_2})^2 < 4a_1(\mu_1 - a_1)$,

*(2)* $c_- > \text{mín}\{\frac{a_1}{a_2}, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\}$,

*donde* $c_- = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{\mu_2\frac{\sigma_1}{\sigma_2}-\sqrt{\mu_2^2\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}-4a_1(\mu_1-a_1)}}{2(\mu_1-a_1)}$, *entonces* $\{X|X>a_1\} \leq_{\text{eps}} \{Y|Y>a_2\}$, *siempre que* $0<a_i<\mu_i$, *para* $i=1,2$.

*Supongamos ahora que no se verifican ninguna de las condiciones de la proposición anterior, entonces se tiene que*

$$S_1 \cap S_2 \cap S_4 \cap S_6 = \left(c_-, \text{mín}\left\{\frac{a_1}{a_2}, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, c_+\right\}\right).$$

*Denotaremos de aquí en adelante por* $\hat{c} = \text{mín}\left\{\frac{a_1}{a_2}, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, c_+\right\}$. *Estudiamos ahora el conjunto* $S_3$. *Consideremos la desigualdad* $h_c(\frac{a_1}{c}) < 1$. *La función* $h_c(\frac{a_1}{c})$ *en este caso sólo depende de* $c$, *la cuál denotaremos por* $l_1(c)$, *y se puede reescribir fácilmente como sigue*

$$l_1(c) = \frac{k'}{c}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{a_1}{c}-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\},$$

*donde* $k' = \frac{\sigma_1\overline{F}(a_1)}{\sigma_2\overline{G}(a_2)}\exp\left\{+\frac{1}{2}\left(\frac{a_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}$. *Es fácil ver analíticamente que tiene un extremo absoluto en el punto*

$$c^*_{(3)} = \frac{a_1}{\sigma_2^2}\left(-\mu_2 + \sqrt{\mu_2^2 + 4\sigma_2^2}\right).$$

*Supongamos que* $c^*_{(3)} \in (c_-, \hat{c})$. *Distinguimos dos casos. Si* $\sigma_2^2 > a_1^2$, *entonces* $c^*_{(3)}$ *es un mínimo y bastará con que* $l_1(c^*_{(3)}) > 1$ *para que* $S = \emptyset$. *Si* $\sigma_2^2 < a_1^2$, *entonces* $c^*$ *es un máximo y bastará con que* $l_1(c_-) > 1$ *y* $l_1(\hat{c}) > 1$ *para que* $S = \emptyset$.

*Supongamos que* $c^*_{(3)} < c_-$. *Distinguimos dos casos. Si* $\sigma_2^2 > a_1^2$, *entonces* $c^*_{(3)}$ *es un mínimo y* $l_1(c)$ *es creciente en* $c \in (c_-, \hat{c})$, *por lo que bastará con que* $l_1(c_-) > 1$ *para que* $S = \emptyset$. *Si* $\sigma_2^2 < a_1^2$, *entonces* $c^*_{(3)}$ *es un máximo y* $l_1(c)$ *es decreciente en* $c \in (c_-, \hat{c})$, *por lo que bastará con que* $l_1(\hat{c}) > 1$ *para que* $S = \emptyset$.

*Supongamos que* $c^*_{(3)} > \hat{c}$. *Distinguimos dos casos. Si* $\sigma_2^2 > a_1^2$, *entonces* $c^*_{(3)}$ *es un mínimo y* $l_1(c)$ *es decreciente en* $c \in (c_-, \hat{c})$, *por lo que bastará con que* $l_1(\hat{c}) > 1$ *para que* $S = \emptyset$. *Si* $\sigma_2^2 < a_1^2$, *entonces* $c^*_{(3)}$ *es un máximo y* $l_1(c)$ *es creciente en* $c \in (c_-, \hat{c})$, *por lo que bastará con que* $l_1(c_-) > 1$ *para que* $S = \emptyset$.

*En resumen, podemos establecer el siguiente resultado.*

**Proposición 4.4.14.** *Sean* $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ *e* $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ *con funciones razón de fallo* $r$ *y* $s$, *respectivamente, tales que no se verifican las condiciones (1) y (2) de la Proposición 4.4.13. Si* $a_2(\mu_1+\sigma_1 r(a_1)) \leq a_1(\mu_2+\sigma_2 s(a_2))$ *y se verifica alguno de los siguientes conjuntos de condiciones:*

*(1)* $c^*_{(3)} \in (c_-, \hat{c})$, $\sigma_2^2 > a_1^2$ *y* $l_1(c^*_{(3)}) > 1$,

*(2)* $c^*_{(3)} \in (c_-, \hat{c})$, $\sigma_2^2 < a_1^2$, $l_1(c_-) > 1$ *y* $l_1(\hat{c}) > 1$,

*(3)* $c^*_{(3)} < c_-$, $\sigma_2^2 > a_1^2$ *y* $l_1(c_-) > 1$,

*(4)* $c^*_{(3)} < c_-$, $\sigma_2^2 < a_1^2$ *y* $l_1(\hat{c}) > 1$,

*(5)* $c^*_{(3)} > \hat{c}$, $\sigma_2^2 > a_1^2$ *y* $l_1(\hat{c}) > 1$,

*(6)* $c^*_{(3)} > \hat{c}$, $\sigma_2^2 < a_1^2$ *y* $l_1(c_-) > 1$,

*donde* $c_- = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{\mu_2\frac{\sigma_1}{\sigma_2}-\sqrt{\mu_2^2\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}-4a_1(\mu_1-a_1)}}{2(\mu_1-a_1)}$, $c^* = \frac{a_1}{\sigma_2^2}(-\mu_2+\sqrt{\mu_2^2+4\sigma_2^2})$ *y* $l_1(c) = k'\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\frac{a_1}{c}-\mu_2}{\sigma_2}\right\}$, *entonces* $\{X|X > a_1\} \leq_{\text{eps}} \{Y|Y > a_2\}$, *siempre que* $0 < a_i < \mu_i$, *para* $i = 1, 2$.

**Observación 4.4.15.** *Nótese que en los casos en los que no se verifican ninguno de los conjuntos de condiciones de la proposición anterior, el conjunto*

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_6 \neq \emptyset.$$

*Observar que el conjunto anterior es de la forma* $(l_{S_3}, u_{S_3})$, *donde* $l_{S_3} > c_-$ *y* $u_{S_3} < \hat{c}$, *o bien de la forma* $(c_-, l_{S_3}) \cup (u_{S_3}, \hat{c})$, *pudiendo ser algún intervalo de la unión vacío. Es posible obtener* $l_{S_3}$ *y* $u_{S_3}$ *mediante métodos numéricos. Estos valores corresponden a las soluciones de la ecuación* $l_1(c) = c$.

*Supongamos que no se verifican ninguno de los conjuntos de condiciones de las proposiciones anteriores. Estudiamos la condición* $h_c(x^*) > 1$ *que corresponde al conjunto* $S_5$. *A partir de* (4.19), *se tiene que*

$$h_c(x^*) = \frac{k}{c}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2}\left(\frac{(\mu_1 - c\mu_2)^2}{c^2 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}\right)\right\},$$

*donde* $k = \frac{\sigma_1\overline{F}(a_1)}{\sigma_2\overline{G}(a_2)}$. *Podemos reescribir la condición* $h_c(x^*) > 1$ *como*

$$c < k\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2}\left(\frac{(\mu_1 - c\mu_2)^2}{c^2 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}\right)\right\} = l_2(c). \tag{4.21}$$

*Es fácil probar que la función* $(\mu_1 - c\mu_2)^2)/(c^2 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})$ *tiene un máximo absoluto en el punto*

$$c^*_{(5)} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2},$$

*o equivalentemente, la función* $l_2(c)$ *tiene un mínimo absoluto en ese punto. Si representamos en el plano la función* $l_2(c)$, *para todo* $c \in (c_-, \hat{c})$, *a partir de* (4.21) *se tiene que la condición* $h_c(x^*) > 1$ *equivale a que el gráfico de la función* $l_2(c)$ *esté por encima de la diagonal principal. Distinguiremos tres casos.*

- *Si* $c^*_{(5)} \in (c_-, \hat{c})$ *y se verifican las desigualdades* $h_{c_-}(x^*) < 1$ *y* $h_{\hat{c}}(x^*) < 1$*, entonces el gráfico esta por debajo de la diagonal principal y* $S = \emptyset$.
- *Si* $c^*_{(5)} < c_-$*, entonces* $l_2(c)$ *es creciente en* $c \in (c_-, \hat{c})$ *y no podemos asegurar que el gráfico esté por debajo de la diagonal principal en ningún caso.*
- *Si* $c^*_{(5)} > \hat{c})$*, entonces* $l_2(c)$ *es decreciente en* $c \in (c_-, \hat{c})$*. Si* $h_{c_-}(x^*) < 1$*, entonces el gráfico esta por debajo de la diagonal principal y* $S = \emptyset$.

*Podemos entonces establecer el siguiente resultado.*

**Proposición 4.4.16.** *Sean* $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ *e* $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ *con funciones razón de fallo* $r$ *y* $s$*, respectivamente, tales que no se verifican las condiciones (1) y (2) de la Proposición 4.4.13 ni las condiciones (1)-(6) de la Proposición 4.4.14. Si* $a_2(\mu_1 + \sigma_1 r(a_1)) \leq a_1(\mu_2 + \sigma_2 s(a_2))$ *y se verifica alguno de los siguientes conjuntos de condiciones:*

*(1)* $c^*_{(5)} \in (c_-, \hat{c})$, $l_2(c_-) < c_-$ *y* $l_2(\hat{c}) < \hat{c}$,

*(2)* $c^*_{(5)} > \hat{c})$ *y* $l_2(c_-) < c_-$,

*donde* $l_2(c) = k \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2}\left(\frac{(\mu_1 - c\mu_2)^2}{c^2 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}\right)\right\}$, $k = \frac{\sigma_1 \overline{F}(a_1)}{\sigma_2 \overline{G}(a_2)})$, $c_- = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{\mu_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \sqrt{\mu_2^2 \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - 4a_1(\mu_1 - a_1)}}{2(\mu_1 - a_1)}$ *y* $\hat{c} = \text{mín}\left\{\frac{a_1}{a_2}, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, c_+\right\}$*, entonces* $\{X|X > a_1\} \leq_{\text{eps}} \{Y|Y > a_2\}$*, siempre que* $0 < a_i < \mu_i$*, para* $i = 1, 2$.

**Observación 4.4.17.** *Nótese que en los casos en los que no se verifica ninguna de las condiciones de la proposición anterior, el conjunto* $S$ *no será vacío y por lo tanto no se puede aplicar el Teorema 4.4.11.*

*La Figura 4.10 muestra un caso particular para* $X \sim N(8, \sqrt{2})$, $Y \sim N(1, 1)$, $a_1 = 2$ *y* $a_2 = \frac{1}{3}$*. Este caso verifica la condición (1) de la Proposición 4.4.13. Se puede ver en la Figura 4.10 que las funciones expected proportional shortfall de las variables se ordenan.*

### 4.4.2. Generalizaciones

Veamos ahora una caracterización del orden eps a partir de la generalización del Teorema 4.4.1.

**Teorema 4.4.18.** *Sean* $X$ *e* $Y$ *dos variables aleatorias con funciones cuantiles* $F^{-1}$ *y* $G^{-1}$*, respectivamente y medias finitas. Supongamos que existe un punto* $p_0 \in (0, 1)$ *tal que* $G^{-1}(p)/E(Y) \leq F^{-1}(p)/E(X)$*, para todo* $p \in (0, p_0)$ *y que* $G^{-1}(p)/F^{-1}(p)$ *tiene* $n \geq 1$ *extremos relativos en los puntos* $p_0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n < 1$*. Entonces* $X \leq_{\text{eps}} Y$ *sí, y sólo sí, el número de extremos relativos es par,* $n = 2m$*, siendo* $p_n$ *un mínimo y para* $j = 1, \ldots, m$ *se cumplen las desigualdades*

$$E\left(\left(\frac{X - F^{-1}(p_{2j-1})}{F^{-1}(p_{2j-1})}\right)_+\right) \leq E\left(\left(\frac{Y - G^{-1}(p_{2j-1})}{G^{-1}(p_{2j-1})}\right)_+\right).$$

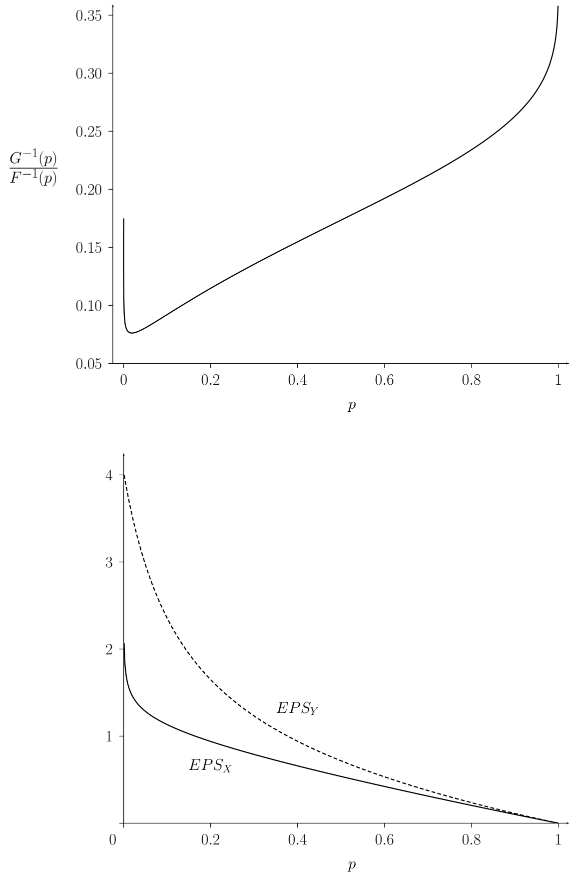



Figura 4.10: *Gráfica del cociente de las funciones cuantiles (arriba) y de las funciones expected proportional shortfall (abajo), para* $\{X|X > 2\}$ *e* $\{Y|Y > 1/3\}$*, donde* $X \sim N(8, \sqrt{2})$ *e* $Y \sim N(1, 1)$*.*

**Demostración:**

Sea $p \in (0, 1)$, definimos la función $\delta(p)$ como sigue

$$\delta(p) = G^{-1}(p)(EPS_Y(p) - EPS_X(p)) = \int_p^1 (G^{-1}(q) - G^{-1}(p)\frac{F^{-1}(q)}{F^{-1}(p)})dq,$$

donde la igualdad se sigue del Teorema 1.2.48. Por lo tanto se tiene que probar que $\delta(p) \geq 0$, para todo $p \in (0, 1)$. Para demostrarlo veremos que el comportamiento de la función $\delta(p)$ es opuesto al del cociente de los cuantiles $\frac{G^{-1}(p)}{F^{-1}(p)}$, es decir, la función $\delta(p)$ es creciente en los intervalos donde $\frac{G^{-1}(p)}{F^{-1}(p)}$ es decreciente y viceversa. Por lo tanto será suficiente que la función $\delta(p)$ sea positiva en sus puntos mínimos para demostrar que es positiva en todo el intervalo.

Consideremos un intervalo $(p_i, p_{i+1})$ donde $G^{-1}(p)/F^{-1}(p)$ es creciente y $q_1 \leq q_2$ pertenecientes a dicho intervalo. En este caso se tiene que

$$\delta(q_1) = \int_{q_1}^{q_2} \left( G^{-1}(q) - G^{-1}(q_1) \frac{F^{-1}(q)}{F^{-1}(q_1)}) \right) dq +$$

$$\int_{q_2}^{1} \left( G^{-1}(q) - G^{-1}(q_1) \frac{F^{-1}(q)}{F^{-1}(q_1)} \right) dq$$

$$\geq \int_{q_2}^{1} \left( G^{-1}(q) - G^{-1}(q_1) \frac{F^{-1}(q)}{F^{-1}(q_1)} \right) dq \geq \delta(q_2),$$

donde ambas desigualdades se siguen del crecimiento $G^{-1}(p)/F^{-1}(p)$. Por lo tanto la función $\delta(p)$ es decreciente en los intervalos donde $G^{-1}(p)/F^{-1}(p)$ es creciente. Análogamente, invirtiendo las desigualdades se tiene que $\delta(p)$ es creciente en los intervalos donde $G^{-1}(p)/F^{-1}(p)$ es decreciente. Por lo tanto, los puntos mínimos de la función $\delta(p)$ son los máximos de la función $G^{-1}(p)/F^{-1}(p)$, es decir, los puntos impares serán los mínimos, al ser $p_{2m}$ un mínimo. Puesto que las desigualdades que aparecen en el enunciado del teorema son equivalentes a que $\delta(p) \geq 0$ en los puntos mínimos, se tiene que $\delta(p) \geq 0$, para todo $p \in (p_0, p_n)$. Por otro lado, siguiendo la demostración del Teorema 4.4.1, se tiene que la función $\delta(p)$ es positiva en los intervalos $(0, p_0)$ y $(p_n, 1)$.

La implicación directa es trivial, ya que si se verifica el orden eps en todos los puntos de la unión de los soportes, en particular, se verificará en un subconjunto de puntos.

■

**Observación 4.4.19.** *Nótese que en el teorema anterior no es necesario distinguir el caso en el que el número de extremos relativos es par con el impar puesto que si el número de extremos relativos es impar, tenemos que $p_1$ es un mínimo, es decir, el cociente $(G^{-1}(p)/E(Y))/(F^{-1}(p)/E(X))$ es decreciente en $p \in (p_0, p_1)$, siendo por hipótesis $G^{-1}(p)/E(Y) \leq F^{-1}(p)/E(X)$, para todo $p \in (0, p_0)$. Combinando ambas condiciones se tiene que $G^{-1}(p)/E(Y) \leq F^{-1}(p)/E(X)$, para todo $p \in (0, p_1)$ y podemos reducir este caso al caso en el que el número de extremos relativos es par.*

De manera similar se puede generalizar el Teorema 4.4.4.

**Teorema 4.4.20.** *Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias con funciones cuantiles $F^{-1}$ y $G^{-1}$, respectivamente y medias finitas. Supongamos que $G^{-1}(p)/F^{-1}(p)$ tiene $n \geq 1$ extremos relativos en los puntos $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n < 1$. Entonces $X \leq_{\text{eps}} Y$ sí, y sólo sí, se satisface uno de los siguientes conjuntos de condiciones:*

*i) El número de extremos relativos es par, $n = 2m$, siendo $p_1$ un máximo y para $j = 1, \ldots, m$ se cumplen las desigualdades*

$$E\left(\left(\frac{X - F^{-1}(p_{2j-1})}{F^{-1}(p_{2j-1})}\right)_+\right) \leq E\left(\left(\frac{Y - G^{-1}(p_{2j-1})}{G^{-1}(p_{2j-1})}\right)_+\right).$$

*ii) El número de extremos relativos es impar, $n = 2m + 1$, siendo $p_1$ un mínimo, para $j = 1, \ldots, m$ se cumplen las desigualdades*

$$E\left(\left(\frac{X - F^{-1}(p_{2j})}{F^{-1}(p_{2j})}\right)_+\right) \leq E\left(\left(\frac{Y - G^{-1}(p_{2j})}{G^{-1}(p_{2j})}\right)_+\right).$$

*y además* $\lim_{p\to 0^+} \frac{G^{-1}(p)}{F^{-1}(p)} \leq \frac{E(Y)}{E(X)}$.

**Demostración:**

La demostración se sigue trivialmente a partir del teorema anterior con la salvedad de que tenemos que distinguir el caso en el que el número de extremos relativos es par del impar. La razón es que los mínimos de la función $\delta(p)$ definida en el teorema anterior, varían teniendo en cuenta este hecho, ya que para que se verifique el orden eps tenemos que exigir que el último extremo relativo sea un mínimo. En el caso impar la función $\delta(p)$ empieza creciendo, por lo que hay que exigirle que empiece positiva, o equivalentemente, $\lim_{p\to 0^+} \frac{G^{-1}(p)}{F^{-1}(p)} \leq \frac{E(Y)}{E(X)}$.

■

# Capítulo 5

# El orden razón de fallo débil conjunto

## 5.1. Introducción

Los criterios de ordenación estocástica vistos hasta ahora comparan variables aleatorias teniendo en cuenta sólo sus distribuciones marginales. Dentro de la teoría de ordenaciones estocásticas hay un grupo de ordenaciones, conocidas como ordenaciones conjuntas, que tienen en cuenta la estructura de dependencia entre las variables. Surge entonces la cuestión de si algunos de los resultados anteriores pueden trasladarse a este contexto. Por ejemplo, podemos estudiar si se puede establecer el Teorema 2.2.1 para una versión conjunta del orden vida media residual. Recordemos que dadas dos variables aleatorias $X$ e $Y$ tenemos que $X \leq_{\mathrm{mrl}} Y$ sí, y solo sí,

$$\int_x^{+\infty} \overline{F}(x)\overline{G}(u)du \geq \int_x^{+\infty} \overline{G}(x)\overline{F}(u)du, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Observamos en la desigualdad anterior que los términos $\overline{G}(u)\overline{F}(x)$ y $\overline{G}(x)\overline{F}(u)$ se corresponden con la función de supervivencia conjunta de $X$ e $Y$, en el caso de que las variables aleatorias fuesen independientes. En el caso en que fuesen dependientes, si queremos tener en cuenta su estructura de dependencia, tendríamos que reemplazarlas por las expresiones $\overline{F}(u,x)$ y $\overline{F}(x,u)$, respectivamente, donde $\overline{F}(x,y)$ denota la función de supervivencia conjunta del vector $(X,Y)$, es decir, deberíamos reemplazar (5.1) por la siguiente condición

$$\int_x^{+\infty} \overline{F}(x,u)du \geq \int_x^{\infty} \overline{F}(u,x)du, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

De forma natural surge también el considerar un orden razón de fallo en términos similares a lo planteado para el orden vida media residual, que vendría dado por la condición

$$\overline{F}(x,y) \geq F(y,x), \text{ para todo } x \leq y \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Los ejemplos siguientes motivan, adicionalmente, el considerar un orden razón de fallo que tenga en cuenta la estructura de dependencia entre las variables.

Sean $X$ e $Y$ los tiempos de vida de dos unidades sujetas a un medio ambiente aleatorio común y supongamos que son independientes por condicionamiento. Sea $\Theta$ la variable que describe el medio ambiente aleatorio, donde $\Theta$ sigue una distribución de Bernoulli de parámetro $p = 1/2$. Supongamos que

$$\{X|\Theta = 0\} \sim Exp(5/6), \qquad \{Y|\Theta = 0\} \sim Exp(5/6)$$

y

$$\{X|\Theta = 1\} \sim Exp(0.5), \qquad \{Y|\Theta = 1\} \sim Exp(2).$$

Denotaremos por $F_X$, $F_Y$ y $F$ las funciones de distribución marginales y la función de distribución conjunta de $X$ e $Y$, respectivamente. La función de supervivencia conjunta de $(X, Y)$, denotada por $\overline{F}$, viene dada por

$$\overline{F}(x, y) = P[X > x, Y > y] = \frac{1}{2}\exp\{-0.6x-1.2y\}+\frac{1}{2}\exp\{-2x-0.5\}, \text{ para todo } x, y > 0,$$

mientras que las funciones de supervivencia marginales, denotadas por $\overline{F}_X$ y $\overline{F}_Y$, tiene las siguientes expresiones

$$\overline{F}_X(x) = P[X > x] = \frac{1}{2}\big(\exp\{-0.6x\} + \exp\{-2x\}\big), \text{ para todo } x > 0$$

y

$$\overline{F}_Y(y) = P[Y > y] = \frac{1}{2}\big(\exp\{-1.2y\} + \exp\{-0.5y\}\big), \text{ para todo } y > 0.$$

Para estudiar si el tiempo de vida de $Y$ es mayor en el orden estocástico a lo largo del tiempo que el de $X$, tenemos que estudiar la comparación estocástica de las siguientes variables aleatorias condicionadas

$$X_t = \{X - t|X > t\} \leq_{\text{st}} \{Y - t|Y > t\} = Y_t, \text{ para todo } t > 0, \tag{5.4}$$

que como vimos en el Capítulo 1, equivale al orden hr de las variables $X$ e $Y$. En particular, (5.4) es equivalente a que $r(t) \geq s(t)$, para todo $t \geq 0$, donde $r$ y $s$ son las razones de fallo de $X$ e $Y$, respectivamente. Se puede ver en la Figura 5.1 que dichas funciones no se cruzan, y se ordenan en el sentido $r(t) \geq s(t)$, para todo $t > 0$.

Sin embargo, si las unidades están sujetas al mismo ambiente y envejecen juntas, deberíamos considerar sus tiempos de vidas de forma conjunta para tener en cuenta la estructura de dependencia entre sus tiempos de vida, es decir, deberíamos comparar las siguientes variables

$$\widetilde{X}_t = [X - t|X > t, Y > t] \leq_{\text{st}} [Y - t|X > t, Y > t] = \widetilde{Y}_t, \text{ para todo } t > 0. \tag{5.5}$$

Sin embargo, esta desigualdad no se verifica (véase la Figura 5.1). Por ejemplo, se puede ver que para $t = 0.7$ y $s = 3$ se tiene que

$$P[\widetilde{X}_t > s] = \frac{\overline{F}(t + s, t)}{\overline{F}(t, t)} = 0.1034 > 0.1017 = \frac{\overline{F}(t, t + s)}{\overline{F}(t, t)} = P[\widetilde{Y}_t > s],$$

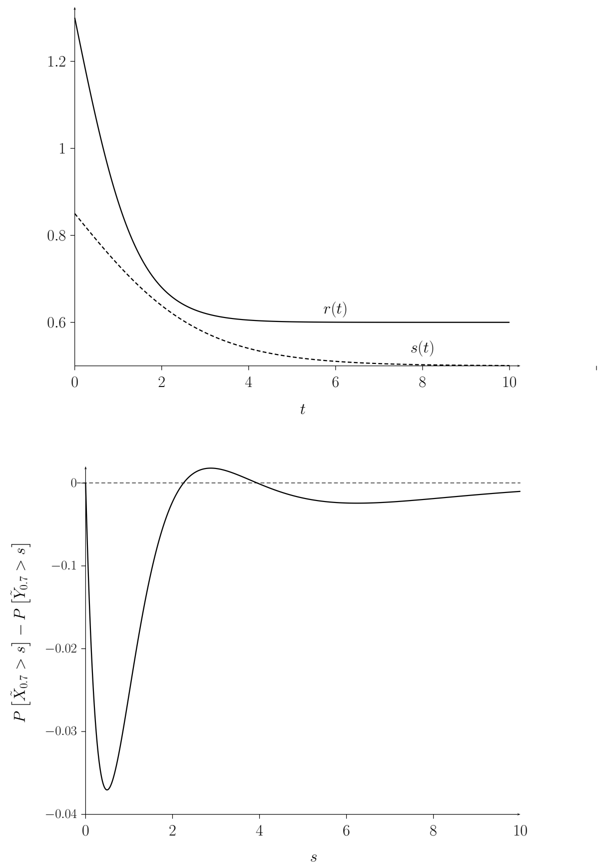



Figura 5.1: *Gráficas de $r(t)$ y $s(t)$ (arriba) y de la diferencia de las funciones de supervivencia de $\widetilde{X}_t$ e $\widetilde{Y}_t$, para $t = 0.7$ (abajo).*

mientras que para $t = 0.7$ y $s = 2$ se tiene que

$$P[\widetilde{X}_t > s] = 0.1937 < 0.1960 = P[\widetilde{Y}_t > s].$$

Puede también suceder lo contrario. Consideremos, como en el caso anterior, dos variables aleatorias $X$ e $Y$ que representan los tiempos de vida de dos unidades sujetas a un ambiente aleatorio común y supongamos que son independientes por condicionamiento. Sea $\Theta$ el ambiente aleatorio, donde $\Theta$ sigue una distribución de Bernoulli de parámetro $p = 1/2$. Supongamos ahora que

$$\{X|\Theta = 0\} \sim Exp(1/30), \qquad \{Y|\Theta = 0\} \sim Exp(0.1)$$

y

$$\{X|\Theta = 1\} \sim Exp(0.5), \qquad \{Y|\Theta = 1\} \sim Exp(1).$$

La función de supervivencia conjunta de $(X, Y)$, denotada por $\overline{F}$, viene dada por

$$\overline{F}(x, y) = \frac{1}{2}\exp\{-30x - 10y\} + \frac{1}{2}\exp\{-2x - y\}, \text{ para todo } x, y > 0,$$

mientras que las funciones de supervivencia marginales, denotadas por $\overline{F}_X$ y $\overline{F}_Y$, tienen las siguientes expresiones

$$\overline{F}_X(x) = \frac{1}{2}\big(\exp\{-30x\} + \exp\{-2x\}\big), \text{ para todo } x > 0$$

y

$$\overline{F}_Y(y) = \frac{1}{2}\big(\exp\{-10y\} + \exp\{-y\}\big), \text{ para todo } y > 0.$$

En este caso, las funciones razón de fallo de las variables tienen dos puntos de corte, como muestra la Figura 5.2, por lo que no se verifica el orden hr y, por lo tanto, no podríamos elegir entre $X$ e $Y$ en términos de este criterio. Sin embargo, si envejecen juntas, entonces se verifica (5.5), lo que se puede probar mediante el Teorema 5.3.10 que veremos más adelante, por lo que $Y$ es mejor que $X$, en este sentido.

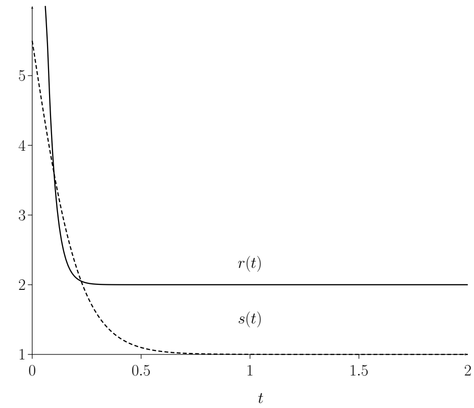



Figura 5.2: *Gráfica de $r(t)$ y $s(t)$.*

En conclusión, si consideramos dos unidades con tiempos de vida dependientes, es más interesante estudiar la comparación (5.5) en lugar de (5.4). Nótese que las condiciones (5.5) y (5.3) son trivialmente equivalentes, en el caso de variables aleatorias no negativas.

Hasta donde conocemos, no existen en la literatura criterios como los mencionados anteriormente, ver (5.2) y (5.3). La comparación de variables aleatorias teniendo en cuenta su estructura de dependencia fue iniciada por Shanthikumar y Yao (1991) y Shanthikumar, Yamazaki y Sakasegawa (1991) y más tarde fue considerada por Aly y Kochar (1993) y Righter y Shanthikumar (1993). Estas nociones son comúnmente conocidas como órdenes estocásticos conjuntos. Recientemente, estos criterios han sido utilizados en diversos problemas de optimización para modelos de utilidad aleatorios, colocación de componentes en problemas de redundancia y selección de carteras, ver Belzunce et al. (2007), Belzunce, Martínez-Puertas y Ruiz (2011) y (2013) y Cai y Wei (2014).

Recordamos a continuación las definiciones de los principales órdenes conjuntos considerados en la literatura. En primer lugar, definimos algunos conjuntos de funciones necesarios para la definición de los órdenes conjuntos dados por Shanthinkumar y Yao (1991), y recordamos también la definición del orden estocástico multivariante que será utilizado en una de las caracterizaciones de dichos órdenes.

**Definición 5.1.1.** *Denotemos por $D$ el conjunto de funciones definidas sobre el plano con imagen real, $D = \{g|g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}\}$. Se definen los siguientes conjuntos de funciones:*

*a)* $G_{\text{lr}} = \{g \in D : g(u,v) \geq g(v,u),\ \textit{para todo } u \leq v\}$.

*b)* $G_{\text{hr}} = \{g \in D : g(u,v) - g(v,u),\ \textit{es creciente en } v,\ \textit{para todo } u \leq v\}$.

*c)* $G_{\text{st}} = \{g \in D : g(u,v) - g(v,u),\ \textit{es creciente en } v,\ \textit{para todo } u\}$.

Para la definición del orden estocástico multivariante, recordamos que un conjunto $U \in \mathbb{R}^n$ se dice que es un *conjunto superior* si $\mathbf{y} \in U$ siempre que $\mathbf{y} \geq \mathbf{x}$ y $\mathbf{x} \in U$, donde $\mathbf{y} \geq \mathbf{x}$ es equivalente a que $y_i \geq x_i$, para todo $i = 1, .., n$. Dados ahora dos vectores aleatorios de dimensión $n$, $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, diremos que $\mathbf{X}$ es más pequeño que $\mathbf{Y}$ en el *orden estocástico usual*, denotado por $\mathbf{X} \leq_{\text{st}} \mathbf{Y}$, si

$$P[\mathbf{X} \in U] \leq P[\mathbf{Y} \in U], \text{ para todo conjunto superior } U \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Damos ahora las definiciones de los órdenes conjuntos y sus principales caracterizaciones (ver Shanthikumar y Yao, 1991).

**Definición 5.1.2.** *Sea $(X, Y)$ un vector aleatorio bivariante con función de supervivencia conjunta $\overline{F}$.*

*a) Se dice que $X$ es menor que $Y$ en el **orden en verosimilitud conjunto**, denotándolo por $X \leq_{\text{lr:j}} Y$, si*

$$E[g(X,Y)] \geq E[g(Y,X)],\ \textit{para todo } g \in G_{\text{lr}},$$

*o equivalentemente, si $(X, Y)$ tiene función de densidad o función puntual de probabilidad $f \in G_{\text{lr}}$.*

*b) Se dice que $X$ es menor que $Y$ en el **orden razón de fallo conjunto**, denotándolo por $X \leq_{\text{hr:j}} Y$, si*

$$E[g(X,Y)] \geq E[g(Y,X)],\ \textit{para todo } g \in G_{\text{hr}},$$

*o equivalentemente, si*

$$\overline{F}(x,y) - \overline{F}(y,x)\ \textit{es decreciente en } x,\ \textit{para todo } x \leq y. \tag{5.6}$$

*c) Se dice que $X$ es menor que $Y$ en el* ***orden estocástico conjunto****, denotándolo por $X \leq_{\mathrm{st:j}} Y$, si*

$$E[g(X,Y)] \geq E[g(Y,X)], \text{ para todo } g \in G_{\mathrm{st}},$$

*o equivalentemente, si $(X,-Y) \leq_{\mathrm{st}} (Y,-X)$.*

Aly y Kochar (1993) definieron el concepto del orden hr:j de forma distinta y llamaron al nuevo orden conjunto el orden hr:j fuerte. Recordamos su definición.

**Definición 5.1.3.** *Sea $(X,Y)$ un vector bivariante con función de supervivencia conjunta $\overline{F}$. Se dice que $X$ es menor que $Y$ en el* ***orden razón de fallo fuerte conjunto****, denotándolo por $X \leq_{\mathrm{hr:sj}} Y$, si*

$$\frac{\overline{F}(x,y)}{\overline{F}(y,x)} \text{ es decreciente en } x,$$

*para todo $(x,y)$ tal que $\overline{F}(x,y) > 0$.*

Ninguna de las condiciones dadas en (5.6), ni la Definición 5.1.3, son equivalentes a la condición (5.5), por lo que parece interesante considerar esta condición, así como la extensión del orden vida media residual comentada (ver (5.2)), como un nuevo criterio de ordenación. Por el momento, hemos llevado a cabo el estudio de un nuevo orden teniendo en cuenta la condición (5.5) y se ha iniciado el estudio de una versión conjunta del orden vida media residual. Este capítulo recoge los resultados obtenidos hasta este momento para la nueva noción de orden razón de fallo conjunto, que llamaremos orden razón de fallo débil conjunto. La organización de este capítulo es la siguiente. En primer lugar, en la Sección 5.2 definimos el nuevo orden y establecemos las relaciones existentes con los órdenes conjuntos mencionados anteriormente. En la Sección 5.3 se introducen las principales propiedades y aplicaciones de este nuevo orden. Por último, en la Sección 5.4 mencionaremos la investigación que pretendemos llevar a cabo en un futuro próximo.

A lo largo de este capítulo, dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$, denotaremos por $\mathbf{1}\{(u,v) \in A\}$ a la función indicadora en el conjunto $A$.

## 5.2. Definición y relaciones

Siguiendo las ideas consideradas en la introducción, se define a continuación una nueva noción para comparar variables aleatorias en razón de fallo, teniendo en cuenta su estructura de dependencia.

**Definición 5.2.1.** *Sea $(X,Y)$ un vector aleatorio bivariante con función de supervivencia conjunta $\overline{F}$. Se dice que $X$ es menor que $Y$ en el* ***orden razón de fallo débil conjunto****, denotándolo por $X \leq_{\mathrm{hr:wj}} Y$, si*

$$\widetilde{X}_t = [X-t|X>t, Y>t] \leq_{\mathrm{st}} [Y-t|X>t, Y>t] = \widetilde{Y}_t, \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ tal que } \overline{F}(t,t) > 0,$$

*o equivalentemente, si*

$$\overline{F}(x,y) \geq \overline{F}(y,x), \text{ para todo } x \leq y \text{ tal que } \overline{F}(x,x) > 0. \tag{5.7}$$

A partir de (5.7), se puede observar que este nuevo orden fue considerado implícitamente y aplicado en Aly y Kochar (1993) y, más recientemente, en Belzunce, Martínez-Puertas y Ruíz (2011), (2013) y Cai y Wei (2014). En las primeras referencias, la desigualdad (5.7) no recibe ningún nombre, simplemente es utilizada como una herramienta, mientras que Cai y Wei (2014) la consideran como una noción de dependencia, llamada UOAI. En este capítulo nos centramos en esta noción pero desde un punto de vista distinto, considerándola un criterio de comparación de variables aleatorias que tiene en cuenta la estructura de dependencia entre las variables.

Vamos ahora a establecer las relaciones existentes entre el nuevo orden hr:wj y dos de los principales órdenes conjuntos que existen en la literatura: el orden st:j y el orden hr:j. En primer lugar, mostramos la relación que existe entre los órdenes hr:j y hr:wj.

**Proposición 5.2.2.** *Sea $(X,Y)$ un vector aleatorio bivariante. Si $X \leq_{\text{hr:j}} Y$, entonces $X \leq_{\text{hr:wj}} Y$.*

**Demostración:**

En el caso absolutamente continuo, el resultado fue probado en la Proposición 2.11 de Belzunce, Martínez-Puertas y Ruiz (2011). Para variables aleatorias cualesquiera, la prueba se sigue observando que la función $g(u,v) = \mathbf{1}u > x, v > y$, para $y \geq x$, pertenece al conjunto de funciones $G_{hr}$. Por lo tanto, si $X \leq_{\text{hr:j}} Y$, entonces $X \leq_{\text{hr:wj}} Y$. ■

La implicación inversa no se satisface, como puede verse en un contraejemplo dado por Cai y Wei (2014) al final de la Sección 4 de su trabajo. A pesar de esto, es posible caracterizar el orden hr:j en términos del orden hr:wj, como probamos a continuación.

**Proposición 5.2.3.** *Sea $(X,Y)$ un vector aleatorio bivariante con función de supervivencia conjunta $\overline{F}$. Entonces se tiene la siguiente equivalencia*

$$X \leq_{\text{hr:wj}} Y \iff \widetilde{X}_t \leq_{\text{hr:wj}} \widetilde{Y}_t \text{ , para todo } \ t \text{ tal que } \overline{F}(t,t) > 0. \tag{5.8}$$

**Demostración:**

Puesto que la implicación inversa es obvia, probaremos la implicación directa. Sea $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{F}(t,t) > 0$, denotamos por $\overline{F}_t(x,y)$ la función de supervivencia conjunta del vector aleatorio $(\widetilde{X}_t, \widetilde{Y}_t) = \{(X-t, Y-t)|\ X, Y > t\}$, es decir, $\overline{F}_t(x,y) = \overline{F}(x+t, y+t)/\overline{F}(t,t)$. Claramente, si $X \leq_{\text{hr:wj}} Y$, o equivalentemente, si $\overline{F}(x,y) - \overline{F}(y,x) \geq 0$, para todo $x \leq y$, se tiene que $\overline{F}(x+t, y+t) - \overline{F}(y+t, x+t) \geq 0$, para todo $x \leq y$, $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\overline{F}_t(x,y) = \frac{\overline{F}(x+t, y+t)}{\overline{F}(t,t)} \geq \frac{\overline{F}(y+t, x+t)}{\overline{F}(t,t)} = \overline{F}_t(y,x), \text{ para todo } x \leq y.$$

■

Nótese que, por definición, $X \leq_{\text{hr:wj}} Y \Longleftrightarrow \widetilde{X}_t \leq_{\text{st}} \widetilde{Y}_t$ para todo $t$ tal que $\overline{F}(t,t) > 0$. Es interesante resaltar que algo similar sucede para el orden hr:j, reemplazando el orden st por el st:j. En concreto, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 5.2.4.** *Sea $(X, Y)$ un vector aleatorio bivariante con función de supervivencia conjunta $\overline{F}$. Entonces se tiene la siguiente equivalencia*

$$X \leq_{\text{hr:j}} Y \Longleftrightarrow \widetilde{X}_t \leq_{\text{st:j}} \widetilde{Y}_t, \text{ para todo } t \text{ tal que } \overline{F}(t,t) > 0.$$

**Demostración:**

Probamos primero la implicación en sentido directo. Para ello observemos en primer lugar que

$$X \leq_{\text{hr:j}} Y \Longleftrightarrow \widetilde{X}_t \leq_{\text{hr:j}} \widetilde{Y}_t \text{ , para todo } t \text{ tal que } \overline{F}(t,t) > 0,$$

y teniendo en cuenta que $X \leq_{\text{hr:j}} Y \Longrightarrow X \leq_{\text{st:j}} Y$, se tiene que

$$\widetilde{X}_t \leq_{\text{st:j}} \widetilde{Y}_t, \text{ para todo } t \text{ tal que } \overline{F}(t,t) > 0.$$

Para probar la implicación en sentido inverso, consideramos la caracterización del orden estocástico en términos del orden estocástico multivariante (ver Definición 5.1.2.c), es decir, se verifica $\widetilde{X}_t \leq_{\text{st:j}} \widetilde{Y}_t$, para todo $t$ tal que $\overline{F}(t,t) > 0$ sí, y sólo sí,

$$(\widetilde{X}_t, -\widetilde{Y}_t) \leq_{\text{st}} (\widetilde{Y}_t, -\widetilde{X}_t), \text{ para todo } t \text{ tal que } \overline{F}(t,t) > 0.$$

Dado que el orden estocástico multivariante implica el orden upper orthant (ver Shaked y Shanthinkumar, 2007), la última desigualdad implica que

$$P((\widetilde{X}_t, -\widetilde{Y}_t) \in (y, \infty) \times (x, \infty)) \leq P((\widetilde{Y}_t, -\widetilde{X}_t) \in (y, \infty) \times (x, \infty)), \text{ para todo } x, y,$$

o equivalentemente,

$$P(\{X > y, Y < x | X > t, Y > t\}) \leq P(\{Y > y, X < x | X > t, Y > t\}), \text{ para todo } x, y. \quad (5.9)$$

Consideremos $x, y > t$ y supongamos $x \notin S_X \cup S_Y$, entonces podemos reescribir (5.9) como sigue

$$P(\{X > y | X > t, Y > t\}) - P(\{X > y, Y > x | X > t, Y > t\}) \leq$$
$$P(\{Y > y | X > t, Y > t\}) - P(\{Y > y, X > x | X > t, Y > t\}),$$

o equivalentemente,

$$\overline{F}(x, y) - \overline{F}(y, x) \leq \overline{F}(t, y) - \overline{F}(y, t), \text{ para todo } x, y > t. \quad (5.10)$$

En el caso en que $x \in S_X \cup S_Y$, podemos llegar a la misma desigualdad considerando una sucesión $\{x_n\}_n$ tal que $x_n \notin S_X \cup S_Y$, $x_n < x$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Si consideramos la misma cadena de equivalencias en términos de $x_n$ en lugar de $x$, se tiene que

$$P(\{X > y | X > t, Y > t\}) - P(\{X > y, Y > x_n | X > t, Y > t\}) \leq$$

$$P(\{Y > y | X > t, Y > t\}) - P(\{Y > y, X > x_n | X > t, Y > t\}), \}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que la función de supervivencia es continua por la izquierda, tomando límites cuando $n \to \infty$ se tiene la desigualdad

$$\overline{F}(x, y) - \overline{F}(y, x) \leq \overline{F}(t, y) - \overline{F}(y, t), \text{ para todo } x, y > t. \tag{5.11}$$

En particular, si tomamos $t < x < y$, se tiene a partir de (5.10) y (5.11) que $\overline{F}(x, y) - \overline{F}(y, x)$ es decreciente en $x$ para todo $x \leq y$, o equivalentemente, $X \leq_{\text{hr:j}} Y$. ■

Veamos ahora que el orden hr:wj no implica el orden estocástico conjunto ni tampoco se verifica lo contrario, es decir, en general no se verifica

$$X \leq_{\text{st:j}} Y \Rightarrow X \leq_{\text{hr:wj}} Y \text{ ó } X \geq_{\text{hr:wj}} Y, \tag{5.12}$$

ni

$$X \leq_{\text{hr:wj}} Y \Rightarrow X \leq_{\text{st:j}} Y \text{ ó } X \geq_{\text{st:j}} Y. \tag{5.13}$$

Lo probaremos mediante dos contraejemplos. En primer lugar vemos que, efectivamente, no se verifica (5.12).

**Ejemplo 5.2.5.** *Sea $(X, Y)$ un vector aleatorio bivariante discreto cuya masa de probabilidad se concentra en los puntos $\{P_1, P_2, P_3, P_4\} = \{(-\frac{4}{5}, 1), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (1, -\frac{4}{5})\}$ como muestra la Figura 5.3. Denotaremos su función puntual de probabilidad conjunta como*

$$\begin{aligned}
p_1 &= P[(X, Y) = P_1] = \frac{1}{3}, \\
p_2 &= P[(X, Y) = P_2] = \frac{1}{6}, \\
p_3 &= P[(X, Y) = P_3] = \frac{1}{3}, \\
p_4 &= P[(X, Y) = P_4] = \frac{1}{6},
\end{aligned}$$

*y por $\overline{F}(x, y)$ su función de supervivencia conjunta. Es fácil ver que no se verifica $X \leq_{\text{hr:wj}} Y$ ni $X \geq_{\text{hr:wj}} Y$, puesto que*

$$\overline{F}(0.2, 0.5) = \frac{1}{6} < \frac{1}{3} = \overline{F}(0.5, 0.2)$$

*y*

$$\overline{F}(-1, 0.2) = \frac{5}{6} > \frac{2}{3} = \overline{F}(0.2, -1).$$

*Sin embargo, se verifica $(X, -Y) \leq_{\text{st}} (Y, -X)$, es decir, las variables aleatorias se ordenan en el orden estocástico conjunto en el sentido $X \leq_{\text{st:j}} Y$. Para demostrarlo, basta verificar que*

$$P[(X, -Y) \in U] \leq P[(Y, -X) \in U], \text{ para cada conjunto superior } U. \tag{5.14}$$

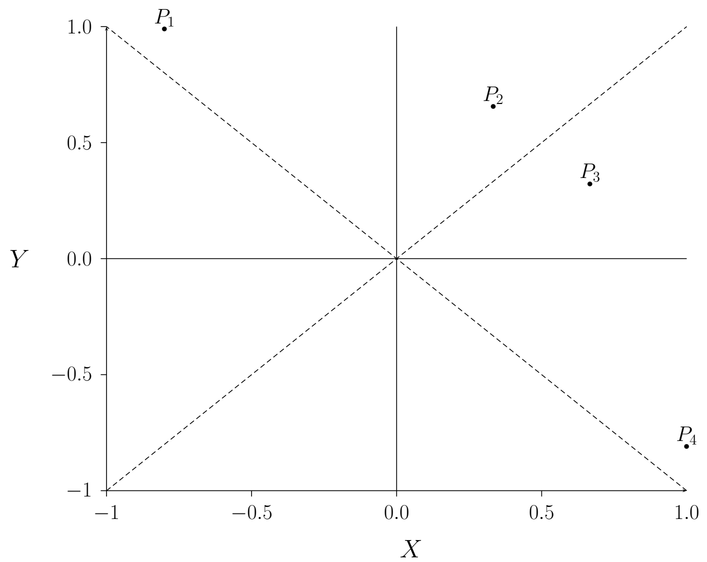



Figura 5.3: *Soporte del vector $(X, Y)$ del Ejemplo 5.2.5.*

*De hecho, teniendo en cuenta las gráficas de las funciones de probabilidad puntuales de los vectores $(X, -Y)$ e $(Y, -X)$ (ver Figura 5.4), así como la definición de conjunto superior y la disposición de los puntos donde se concentra la masa de probabilidad de los vectores (los puntos $P_i$), es fácil ver que la probabilidad de que cada uno de los vectores pertenezca al conjunto $U$ sólo puede tomar cuatro distintos valores, dependiendo de como tomemos dicho conjunto $U$. Las distintas probabilidades se dan ordenadas según se va variando el conjunto $U$ desde la esquina superior derecha hasta la esquina inferior izquierda:*

$$P[(X, -Y) \in U] \in \{p_4, p_3 + p_4, p_2 + p_3 + p_4, 1\} = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$$

*y*

$$P[(Y, -X) \in U] \in \{p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, 1\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 1\right\}.$$

*Así, por ejemplo, si el conjunto superior $U$ es el que está representado en la Figura 5.4, entonces $P[(X, -Y) \in U] = 1/6 \leq P[(Y, -X) \in U] = 1/3$. De forma similar, para todo conjunto superior $U$ se cumple la desigualdad (5.14), es decir, $X \leq_{\text{st:j}} Y$.*

Veamos ahora que tampoco se verifica (5.13).

**Ejemplo 5.2.6.** *Veamos un ejemplo de un vector aleatorio $(X, Y)$ tal que $X \geq_{\text{hr:wj}} Y$ pero no se verifica $X \leq_{\text{st:j}} Y$ ni $X \geq_{\text{st:j}} Y$. Supongamos que la función puntual de probabilidad del vector aleatorio $(X, Y)$ se concentra en los puntos $\{P_1, P_2, P_3\} = \left\{\left(\frac{1}{3}, 1\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(1, \frac{2}{3}\right)\right\}$. De la misma forma que en el ejemplo anterior, denotaremos por $p_i = P[(X, Y) = P_i]$, para $i = \{1, 2, 3\}$ y por $\overline{F}(x, y)$ la función de supervivencia bivariante del vector. Las regiones*

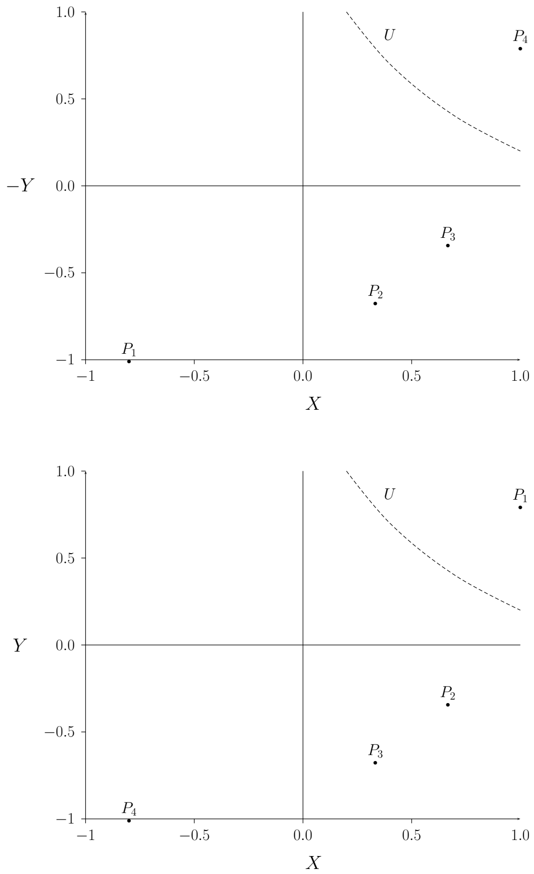



Figura 5.4: *Soportes de los vectores* $(X, -Y)$ *(arriba) e* $(Y, -X)$ *(abajo) del Ejemplo 5.2.5.*

*con distinta función de supervivencia para este vector aleatorio están indicadas en la Figura 5.5.*

*Es fácil verificar mediante la gráfica de la Figura 5.5 que* $X \geq_{\text{hr:wj}} Y$*, es decir, se tiene que* $\overline{F}(x, y) \leq \overline{F}(y, x)$*, para todo* $x \leq y$ *sí, y sólo sí, se satisface el siguiente conjunto de desigualdades*

$$\{p_1 \leq p_3, 0 \leq p_3, p_1 \leq p_2\}. \tag{5.15}$$

*Nótese que la segunda desigualdad fija el sentido en el que se puede establecer el orden hr:wj, es decir,* $X \geq_{\text{hr:wj}} Y$*. Supondremos entonces que se satisface el conjunto de condiciones* (5.15).

*Puesto que* $X \geq_{\text{st:j}} Y$ *sí, y sólo sí,* $(X, -Y) \geq_{\text{st}} (Y, -X)$*, es decir, si la condición* (5.14) *se verifica para todo conjunto superior* $U$*, en particular, se debe verificar que*

$$P[(X, -Y) \in (x, \infty) \times (y, \infty)] \geq P[(Y, -X) \in (x, \infty) \times (y, \infty)], \text{ para todo } x, y$$

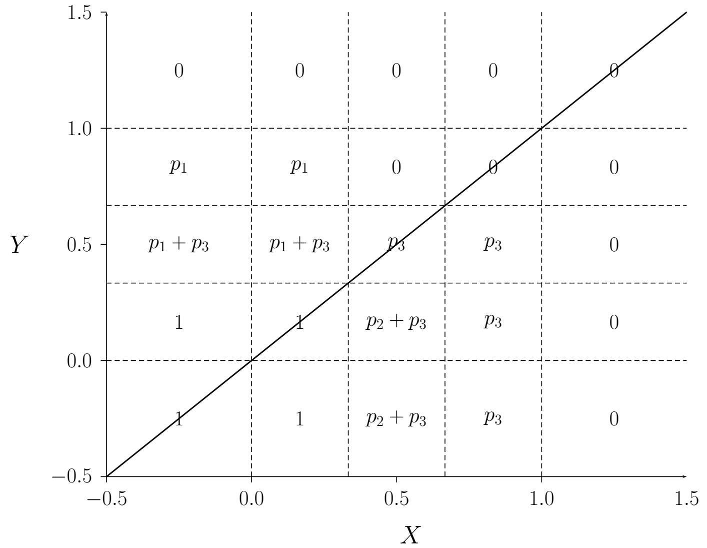



Figura 5.5: *Gráfica de $\overline{F}(x,y)$, para todo $x$ e $y$.*

*o equivalentemente,*

$$P[X \geq x, Y \leq y] \geq P[X \leq y, Y \geq x], \text{ para todo } x, y.$$

*Es fácil ver, mediante la Figura 5.6, que esta condición es equivalente al siguiente conjunto de desigualdades:*

$$\{p_1 \geq p_2, p_1 \geq p_3, p_1 \geq p_3 + p_2, p_1 \geq 0\}. \tag{5.16}$$

*Los conjuntos* (5.15) *y* (5.16) *son incompatibles para todo $p_1, p_2, p_3$ tales que $p_1+p_2+p_3 = 1$ y $p_i > 0$, para todo $i$. Por lo tanto, no se verifica el orden st:j en ningún sentido.*

Por último, observar que si se verifica el orden hr:wj entre la variables, es decir, $X \leq_{\text{hr:wj}} Y$, entonces se cumple el orden st entre las mismas, es decir, $X \leq_{\text{st}} Y$. Basta tomar en la desigualdad (5.7) límites cuando $x$ tiende a $-\infty$.

Teniendo en cuenta estos comentarios, así como los resultados anteriores y otros existentes en la literatura, tenemos el siguiente cuadro de implicaciones entre los principales órdenes conjuntos ya definidos previamente y el nuevo criterio que hemos introducido en este capítulo.

$$\begin{array}{ccccc} & & X \leq_{\text{lr:j}} Y & & \\ & & \Downarrow & & \\ X \leq_{\text{hr:sj}} Y & \Rightarrow & X \leq_{\text{hr:j}} Y & \Rightarrow & X \leq_{\text{hr:wj}} Y \\ & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & X \leq_{\text{st:j}} Y & \Rightarrow & X \leq_{\text{st}} Y. \end{array} \tag{5.17}$$

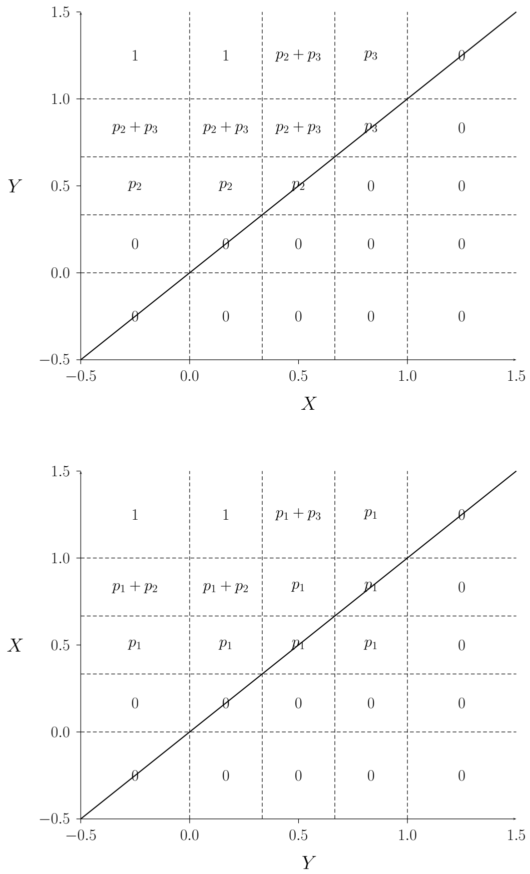



Figura 5.6: *Gráfica de las funciones de supervivencia de los vectores* $(X, -Y)$ *(arriba) e* $(Y, -X)$ *(abajo) del Ejemplo 5.2.6.*

## 5.3. Propiedades y aplicaciones

En esta sección damos algunas propiedades del nuevo orden y aplicaciones de estos resultados.

En primer lugar, damos una caracterización del nuevo orden hr:wj en términos de la ordenación de las esperanzas de cierta clase de transformaciones del vector aleatorio bivariante $(X, Y)$, siguiendo el mismo esquema de trabajo que Shanthinkumar y Yao (1991). A lo largo de la demostración, consideramos el conjunto $D' = \{g \in D : \lim_{x \to -\infty} \Delta g(x, y) = 0\}$, donde $\Delta g(x, y) = g(x, y) - g(y, x)$.

**Teorema 5.3.1.** *Consideremos el conjunto de funciones*

$$G_{\mathrm{hr}}^{w} = \{g \in D' : \Delta g(u, v') - \Delta g(u, v) \textit{ es creciente en } u, \textit{ para todo } u \leq v \leq v'\}.$$

*Entonces* $X \leq_{\mathrm{hr:wj}} Y$ *sí, y sólo sí,* $E[g(X, Y)] \geq E[g(Y, X)]$*, para todo* $g \in G_{hr}^{w}$.

**Demostración:**

En primer lugar, probaremos la implicación directa. Siguiendo la prueba del Teorema 3.17 de Shanthinkumar y Yao (1991) y asumiendo, sin perdida de generalidad, la diferenciabilidad de la función $g(u, v)$, se tiene que

$$E[\Delta g(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}} \int_{u}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v}\Delta g(u,v) \left( \frac{\partial}{\partial v}\overline{F}(v,u) - \frac{\partial}{\partial v}\overline{F}(u,v) \right) dvdu.$$

Intercambiando el orden de integración, se tiene que

$$\begin{aligned} E[\Delta g(X,Y)] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{v} \frac{\partial}{\partial v}\Delta g(u,v) \left( \frac{\partial}{\partial v}\overline{F}(v,u) - \frac{\partial}{\partial v}\overline{F}(u,v) \right) dudv \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{v} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\Delta g(u,v)\big(\overline{F}(u,v) - \overline{F}(v,u)\big) dudv \geq 0, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene integrando por partes y recordando que, por hipótesis, $\lim_{u\to-\infty} \Delta g(u,v) = 0$. La última desigualdad se sigue de $X \leq_{\text{hr:wj}} Y$ y de las propiedades de $\Delta g(u, v)$.

Para probar la implicación en sentido contrario, consideremos la función $g(u, v) = \mathbf{1}\{u \geq x, v \geq y\}$, para $x \leq y$, por lo que $\Delta g(u, v) = \mathbf{1}\{u \geq x, x > v \geq y\}$. Es fácil ver que $g(u, v) \in G^{w}_{\text{hr}}$. Por lo tanto, se tiene que

$$E[\Delta g(X,Y)] = \overline{F}(x,y) - \overline{F}(y,x) \geq 0, \text{ para todo } x \leq y.$$

■

**Observación 5.3.2.** *En relación al resultado anterior podemos hacer las siguientes observaciones:*

*a) En primer lugar, para variables aleatorias con extremo inferior del soporte finito, podemos asumir trivialmente que* $\lim_{x\to-\infty} \Delta g(x, y) = 0$.

*b) Si consideramos una función* $g \in G^{w}_{hr}$*, puesto que* $\Delta g(u, v') - \Delta g(u, v)$ *es creciente en* $u$ *y vale cero cuando* $u$ *tiende a* $-\infty$*, se tiene que* $\Delta g(u, v') \geq \Delta g(u, v)$*, para todo* $u \leq v \leq v'$*, es decir,* $g \in G_{hr}$*. Por lo tanto* $G^{w}_{\text{hr}} \subseteq G_{\text{hr}}$*.*

*c) Por último, nótese que la condición* $\Delta g(u, v') - \Delta g(u, v)$ *creciente en* $u$*, para todo* $u \leq v \leq v'$*, es equivalente a la supermodularidad de* $\Delta g(u, v)$ *en el conjunto* $u \leq v$ *(ver Shaked and Shanthikumar, 2007 para la definición de funciones supermodulares y aplicaciones).*

Veamos un ejemplo en finanzas donde aplicamos el teorema anterior.

**Ejemplo 5.3.3.** *En el problema de selección de carteras en finanzas, un modo usual de comparar dos alternativas es a través de utilidades esperadas: Dadas dos carteras* $Z_1$ *y*

*$Z_2$, un inversor contrario a tomar riesgos prefiere $Z_1$ a $Z_2$ si $E[u(Z_1)] \geq E[u(Z_2)]$, donde $u$ representa su función de utilidad, la cuál se suele asumir creciente y cóncava (ver, por ejemplo, Kijima y Ohnishi, 1996). En particular, se suelen considerar funciones de utilidad logarítmicas, es decir, de la forma $u(z) = \ln(1+z)$.*

*Sean $X$ e $Y$ un par de retornos aleatorios no independientes y no negativos tales que $X \leq_{\text{hr:wj}} Y$. Consideremos entonces las carteras $Z_1 = \alpha Y + (1-\alpha)X$ y $Z_2 = (1-\alpha)Y + \alpha X$, con $\alpha \in [0,1]$, y supongamos que queremos elegir una de las dos carteras de acuerdo al criterio de utilidad esperada. Para ello, definimos $g(x,y) = \ln\big(\alpha y + (1-\alpha)x\big)$, por lo que $\Delta g(x,y) = \ln\big(\alpha y + (1-\alpha)x\big) - \ln\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big)$. Es fácil ver que $\Delta g(x,y)$ es supermodular en el conjunto $x \leq y$ siempre que $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Por lo tanto, por el Teorema 5.3.1, se tiene que $E[g(X,Y)] \geq E[g(Y,X)]$, es decir, la cartera $Z_1$ es preferible a la cartera $Z_2$ de acuerdo al criterio mencionado anteriormente.*

A continuación probamos que, bajo determinadas suposiciones, los órdenes hr:j y hr:wj son equivalentes. El siguiente lema técnico será usado para probar este resultado.

**Lema 5.3.4.** *Sea $(X,Y)$ un vector aleatorio bivariante con función de supervivencia conjunta $\overline{F}$ y función de densidad conjunta $f$. Si $X \leq_{\text{hr:wj}} Y$, entonces*

$$\int_y^\infty f(y,z)dz \geq \int_y^\infty f(z,y)dz, \ \textit{para todo } y \geq 0.$$

**Demostración:**

Primero observamos que $X \leq_{\text{hr:wj}} Y$ es equivalente por definición a

$$\overline{F}(x,y) \geq \overline{F}(y,x), \text{ para todo } x \leq y,$$

o equivalentemente,

$$\overline{F}(x,y) - \overline{F}(y,y) \geq \overline{F}(y,x) - \overline{F}(y,y), \text{ para todo } x \leq y.$$

Por lo tanto, se tiene que $X \leq_{\text{hr:wj}} Y$ implica que

$$\lim_{x \to y^-} \frac{\big(\overline{F}(y,x) - \overline{F}(y,y)\big)}{y-x} \geq \lim_{x \to y^-} \frac{\big(\overline{F}(x,y) - \overline{F}(y,y)\big)}{y-x}, \text{ para todo } x \geq 0,$$

lo que podemos reescribir como sigue

$$\int_y^\infty f(y,z)dz \geq \int_y^\infty f(z,y)dz, \text{ para todo } y \geq 0.$$

■

El siguiente resultado proporciona la clave para probar la equivalencia entre los órdenes hr:j y hr:wj.

**Proposición 5.3.5.** *Sea $(X, Y)$ un vector aleatorio con función de densidad conjunta $f$ tal que, para todo $x$ en la unión de los soportes de $X$ e $Y$, $S^-(f(x,\cdot) - f(\cdot,x)) \leq 1$ en $[x,\infty)$, con la secuencia de signos $-,+$ cuando se da la igualdad. Si*

$$\int_x^\infty f(x,z)dz \geq \int_x^\infty f(z,x)dz, \text{ para todo } x \geq 0, \tag{5.18}$$

*entonces $X \leq_{\text{hr:j}} Y$.*

**Demostración:**

Sea la función

$$h(x,y) = \int_y^\infty \big(f(x,z) - f(z,x)\big)dz.$$

Esta función es decreciente o tiene un máximo en $[x,\infty)$, a partir de las hipótesis y dado que $\frac{\partial}{\partial y}h(x,y) = -f(x,y) + f(y,x)$. Además, $\lim_{y\to\infty} h(x,y) = 0$ y $\lim_{y\to x^+} h(x,y) \geq 0$, donde la última desigualdad se sigue de (5.18). Entonces $h(x,y) \geq 0$, para todo $x \leq y$, o equivalentemente, $X \leq_{\text{hr:j}} Y$. ■

Observamos que bajo la condición del cambio de signo de la diferencia $f(x,y) - f(y,x)$ que aparece en la proposición anterior, el orden hr:wj implica el orden hr:j, es decir,

$$X \leq_{\text{hr:wj}} Y \Rightarrow X \leq_{\text{hr:j}} Y,$$

puesto que $X \leq_{\text{hr:wj}} Y$ implica (5.18) por el Lema 5.3.4. Por lo tanto, podemos establecer el siguiente teorema.

**Teorema 5.3.6.** *Sea $(X, Y)$ un vector aleatorio bivariante con función de densidad conjunta $f$ tal que, para todo $x$ en la unión de los soportes de $X$ e $Y$, $S^-(f(x,\cdot) - f(\cdot,x)) \leq 1$ en $[x,\infty)$, con la secuencia de signos $-,+$ cuando se da la igualdad. Entonces*

$$X \leq_{\text{hr:wj}} Y \Leftrightarrow X \leq_{\text{hr:j}} Y.$$

Veamos un ejemplo donde se cumple la condición de los cambios de signo y podemos aplicar este resultado para ordenar variables aleatorias en el orden hr:j cuando no se verifica el orden lr:j.

**Ejemplo 5.3.7.** *Sea $(X,Y) \sim N((\mu_1,\mu_2),V)$ un vector aleatorio con distribución normal bivariante, donde $V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \\ \rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$, con función de densidad conjunta*

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)\right\},$$

*para todo $x, y \in \mathbb{R}$, donde $\rho$ denota el coeficiente de correlación de $X$ e $Y$. Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces estudiamos para que valores de $y$ se tiene que $f(x,y) - f(y,x) = 0$, o equivalentemente, cuando $h_x(y) = log f(x,y) - log f(y,x) = 0$. Simplificando, se obtiene que*

$$h_x(y) = \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(k_1y^2 + 2k_2y - k_1x^2 - 2k_2x\right),$$

*donde* $k_1 = \sigma_1^{-2} - \sigma_2^{-2}$ *y* $k_2 = \mu_2\sigma_2^{-2} - \mu_1\sigma_1^{-2} + \rho(\mu_2 - \mu_1)\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$. *Por lo que es fácil ver que* $h_x(y)$ *tiene dos ceros en* $\mathbb{R}$ *en los puntos* $y_1 = x$ *e* $y_2 = -2k_2/k_1 - x$. *Distinguiremos dos casos. Por un lado, si* $y_2 < x$, *entonces* $h_x(y)$ *es positiva y se tiene que* $S^-(h_x(\cdot)) = 0$ *en* $(x, \infty)$ *y, por otro lado, si* $y_2 > x$, *entonces* $S^-(h_x(\cdot)) = 1$ *en* $(x, \infty)$, *siendo la secuencia de signos* $-, +[+, -]$ *si* $\sigma_1 < [>]\sigma_2$.

*Por lo tanto, por el Teorema 5.3.6 se tiene que* $X \leq_{\text{hr:j}} Y$ *y además* $X \not\leq_{\text{lr:j}} Y$ *y* $X \not\geq_{\text{lr:j}} Y$. *Podemos entonces establecer el siguiente resultado.*

**Proposición 5.3.8.** *Sea* $(X, Y) \sim N((\mu_1, \mu_2), V)$, *donde* $V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \\ \rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$. *Si* $\sigma_1 < [>]\sigma_2$, *entonces* $X \leq_{\text{hr:j}} [\geq_{\text{hr:j}}] Y$, $X \not\leq_{\text{lr:j}} Y$ *y* $X \not\geq_{\text{lr:j}} Y$.

*La Figura 5.7 muestra un caso particular de esta situación para* $(X, Y) \sim N((1, 0.5), V)$, *donde* $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, *en la que se representa la diferencia* $f(x, y) - f(y, x)$ *para* $x = 0$ *para mostrar un ejemplo donde el cambio de signo se da en el intervalo* $(x, \infty)$. *Por otro lado, se satisface la condición* (5.18) *como muestra la Figura 5.7 (se ha verificado numéricamente). Por lo tanto, por el Teorema 5.3.6 podemos afirmar que* $X \leq_{\text{hr:j}} Y$.

*A partir de la discusión anterior, se puede también establecer un resultado para vectores aleatorios con distribución normal bivariante truncada, es decir, consideremos el vector* $(X, Y | X, Y > l)$. *Si denotamos por* $f'(x, y)$ *la función de densidad conjunta de este vector, se tiene trivialmente que los ceros de la diferencia* $f'(x, y) - f'(y, x)$ *coinciden con* $y_1$ *e* $y_2$. *En aquellos casos en los que* $l > -k_2/k_1$, *se tiene que* $S^-(f'(x, \cdot) - f'(\cdot, x)) = 0$ *en* $(x, \infty)$, *siendo* $+ [-]$ *si* $\sigma_1 < [>]\sigma_2$. *Por otro lado, en aquellos casos en los que* $l < -k_2/k_1$, *se tiene que* $S^-(f'(x, \cdot) - f'(\cdot, x)) \leq 1$ *en* $(x, \infty)$, *siendo la secuencia de signos* $-, + [+, -]$ *en caso de igualdad, si* $\sigma_1 < [>]\sigma_2$. *Podemos entonces establecer el siguiente resultado.*

**Proposición 5.3.9.** *Sea* $(X, Y | X, Y > l)$ *un vector aleatorio tal que* $(X, Y) \sim N((\mu_1, \mu_2), V)$, *donde* $V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \\ \rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$. *Supongamos* $\sigma_1 < [>]\sigma_2$ *y denotemos por* $k_1 = \sigma_1^{-2} - \sigma_2^{-2}$ *y* $k_2 = \mu_2\sigma_2^{-2} - \mu_1\sigma_1^{-2} + \rho(\mu_2 - \mu_1)\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$.

*(i) Si* $u_{(X,Y)} > -k_2/k_1$, *entonces* $X \leq_{\text{lr:j}} [\geq_{\text{lr:j}}] Y$.

*(ii) Si* $u_{(X,Y)} < -k_2/k_1$, *entonces* $X \leq_{\text{hr:j}} [\geq_{\text{hr:j}}] Y$, $X \not\leq_{\text{lr:j}} Y$ *y* $X \not\geq_{\text{lr:j}} Y$.

*Este ejemplo mejora un resultado dado por Shanthinkumar y Yao (1991) para el caso particular en el que las variables aleatorias son no negativas, es decir, consideran* $l = 0$. *Además asumen que* $\mu_1/\mu_2 > \sigma_1^2/\sigma_2^2 > 1$, *por lo que se tiene* $-k_2/k_1 < 0$ *y trivialmente* $l > -k_2/k_1$. *Dicha mejora consiste en que en la proposición anterior se da un estudio completo de las situaciones en las que se verifica el orden lr:j para dos variables aleatorias con distribución conjunta bivariante normal truncada y, además, en los casos en los que éste no se verifica se establece el orden hr:j por el Teorema 5.3.6.*

En el siguiente resultado establecemos condiciones para que se verifique el orden hr:wj bajo mixturas de variables aleatorias. Es interesante observar que esta propiedad no se satisface en general para el orden hr.

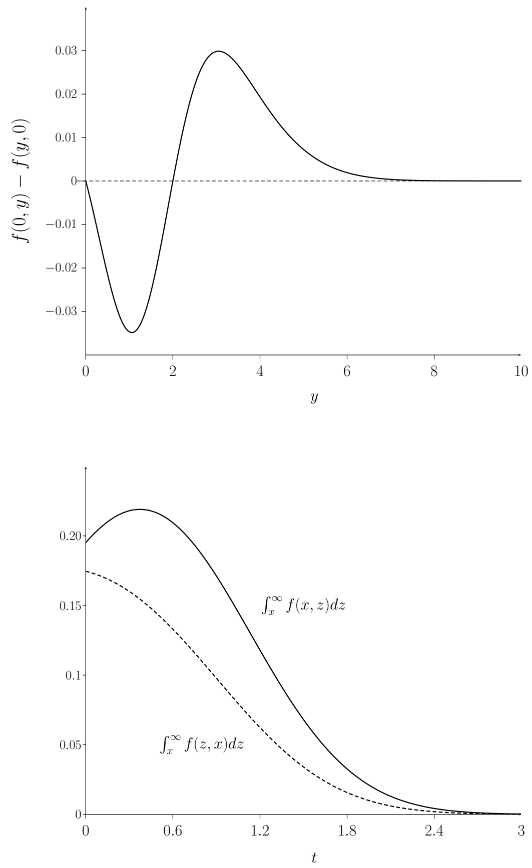



Figura 5.7: *Gráfica de $h_0(y)$ (arriba) y de $\int_x^\infty f(x,z)dz$ y $\int_x^\infty f(z,x)dz$ (abajo), para $X \sim N(2,9)$ e $Y \sim N(3,4)$.*

**Proposición 5.3.10.** *Sea $\Theta$ una variable aleatoria y sea $(X,Y)$ un vector aleatorio bivariante definido como la mixtura de la familia $\{(X,Y)_\theta, \theta \in S_\Theta\}$ con respecto a $\Theta$ (es decir, $\overline{F}(x,y) = \int_{S_\Theta} \overline{F}_\theta(x,y)dP[\Theta=\theta]$). Si $X_\theta \leq_{\text{hr:wj}} Y_\theta$, para todo $\theta \in S_\Theta$, entonces $X \leq_{\text{hr:wj}} Y$.*

**Demostración:**

Dado que $X_\theta \leq_{\text{hr:wj}} Y_\theta$, entonces

$$\overline{F}_\theta(x,y) \geq \overline{F}_\theta(y,x), \text{ para todo } x \leq y.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\overline{F}(x,y) = \int_{S_\Theta} \overline{F}_\theta(x,y)dP[\Theta=\theta] \ \geq \ \int_{S_\Theta} \overline{F}_\theta(y,x)dP[\Theta=\theta] = \overline{F}(y,x), \text{ para todo } x \leq y$$

es decir, $X \leq_{\text{hr:wj}} Y$. ∎

A partir de este resultado podemos dar, de forma sencilla, ejemplos de modelos tales que $X \leq_{\mathrm{hr:wj}} Y$. Veamos dos ejemplos donde se da esta situación. El primero surge en el contexto de modelos de fragilidad.

**Ejemplo 5.3.11.** *Sea* $(X, Y)$ *un vector aleatorio bivariante con función de supervivencia conjunta dada por*

$$\overline{F}(x, y) = \int_{S_\Theta} [\overline{F}_1(x)\overline{F}_2(y)]^\theta dP[\Theta = \theta],$$

*donde* $F_1$ *y* $F_2$ *son las funciones de distribución de dos variables aleatorias* $X_1$ *y* $X_2$*, respectivamente. Si* $X_1 \leq_{\mathrm{hr}} X_2$*, entonces* $X \leq_{\mathrm{hr:wj}} Y$*.*

A continuación describimos una situación similar para el caso de modelos de vida acelerados.

**Ejemplo 5.3.12.** *Consideremos dos unidades con tiempos de vida aleatorios* $S$ *y* $T$*. Supongamos que las unidades están funcionando en un medio ambiente común, el cual es representado por la variable aleatoria* $\Theta$*, independiente de* $S$ *y* $T$ *y que afecta a las unidades en la forma*

$$X = \frac{S}{\Theta} \quad y \quad Y = \frac{T}{\Theta}.$$

*Si* $\Theta$ *tiene soporte en el intervalo* $(1, +\infty)$*, entonces las unidades están trabajando en un ambiente adverso, mientras que si tiene soporte en el intervalo* $(0, 1)$ *las unidades están trabajando en un ambiente favorable (ver Ma, 1999).*

*En este caso la función de supervivencia conjunta de* $(X, Y)$ *está dada por*

$$\overline{F}(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \overline{F}(x\theta)\overline{G}(y\theta) dP[\Theta = \theta],$$

*donde* $\overline{F}$ *y* $\overline{G}$ *son las funciones de supervivencia de* $T$ *y* $S$*, respectivamente. Es claro que si* $S \leq_{\mathrm{hr}} T$*, entonces* $X \leq_{\mathrm{hr:wj}} Y$*.*

## 5.4. Observaciones e investigación futura

Es interesante observar que esta nueva noción puede ser extendida al caso general de $n$ variables no necesariamente independientes, de forma paralela a otras nociones multivariantes dadas por Shanthikumar y Yao (1991) y Belzunce, Martínez-Puertas y Ruiz (2013). A continuación damos esta generalización.

**Definición 5.4.1.** *Dado un vector aleatorio* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$*, decimos que* $X_1 \leq_{\mathrm{hr:wj}} X_2 \leq_{\mathrm{hr:wj}} \ldots \leq_{\mathrm{hr:wj}} X_n$*, si*

$$[X_i - t \mid X_k > t; k \in \{1, 2, ..., n\}] \leq_{\mathrm{st}} [X_j - t \mid X_k > t; k \in \{1, 2, ..., n\}],$$

*para todo* $t$ *tal que* $\overline{F}(t, \ldots, t) > 0$*, y para todo* $i < j$*.*

Es fácil ver que esta noción es equivalente a la noción UOAI dada por Cai y Wei (2014). A partir de los resultados previos es sencillo obtener resultados para el caso general.

También queremos señalar que es posible dar una noción en el caso bivariante reemplazando la función de supervivencia conjunta por la función de distribución conjunta en la definición del orden hr:wj. Esta nueva noción puede considerarse como un orden «razón de fallo inverso conjunto», para el que se podría plantear un estudio similar al llevado cabo en este capítulo.

Por último, recordamos que una de las ideas era plantear un orden vida media residual conjunto a partir de la condición (5.2). Es fácil ver que esta condición equivale a la condición

$$E[\widetilde{X}_t] \leq E[\widetilde{Y}_t], \text{ para todo } t \text{ tal que } \overline{F}(t,t) > 0. \tag{5.19}$$

Esta caracterización también sugiere como posible orden vida media residual conjunto el dado por la condición

$$\widetilde{X}_t \leq_{\text{icx}} \widetilde{Y}_t, \text{ para todo } t \text{ tal que } \overline{F}(t,t) > 0. \tag{5.20}$$

Actualmente, estamos investigando las propiedades de estos dos nuevos criterios para los que hemos obtenido algunos resultados. Este estudio constituye parte de la investigación que nos hemos planteado para un futuro próximo.

# Bibliografía


[1] Abdous, B. and Berred, A. (2005). Mean residual life estimation. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **132**, 3–19.

[2] Ahmad, I.A. and Kayid, M. (2005). Characterizations of the RHR and MIT orderings and the DRHR and IMIT classes of life distributions. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **19**, 447–461.

[3] Ahmad, I.A., Kayid, M. and Pellerey, F. (2005). Further results involving the MIT order and IMIT class. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **19**, 377–395.

[4] Aly, E.E.A. and Kochar, S. (1993). On hazard rate ordering for dependent variables. *Advances in Applied Probability*, **27**, 477–482.

[5] Arnold, B.C. (1987). *Majorization and the Lorenz Order: A Brief Introduction*. Springer, Berlin.

[6] Bandourian, R., McDonald, J. B., Turley, R. S. (2004). A comparison of parametric models of income distribution across countries and over time. *Estadística*, **55**, 127–142.

[7] Barlow, B.C., Bartholomew, D.J., Bremner, J.M. and Brunk, H.D. (1972). *Statistical Inference Under Order Restrictions*. John Wiley and Sons, New York.

[8] Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing. Probability Models*. Holt, Rinehart and Winston, New York.

[9] Beirlant, J. and Teugels, J.L. (1992). Modeling large claims in non-life insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, **11**, 17–29.

[10] Belzunce, F. (2013). Multivariate comparisons of ordered data in *Stochastic Orders in Reliability and Risk*, Lectures Notes in Statistics **208**, Eds. H. Li and X. Li., Springer-Verlag, New York, 83–102.

[11] Belzunce, F., Candel, J. and Ruiz, J. M. (2000). Testing mean residual alternatives by dispersion of residual lives. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **86**, 113-127.

[12] Belzunce, F., Hu, T. and Khaledi, B.-E. (2003). Dispersion-type variability orders. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **17**, 305-334.

[13] Belzunce, F., Lillo, R., Ruiz, J.M. and Shaked, M. (2007). Stochastic ordering of record and inter-record values in *Recent Developments in Ordered Random Variables*, Eds. M. Ahsanullah and M. Raqab, Nova Sci. Publ., New York, 119–137.

[14] Belzunce, F., Martínez-Puertas, H. and Ruiz, J.M. (2011). On optimal allocation of redundant components for series and parallel systems of two dependent components. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141**, 3094–3104.

[15] Belzunce, F., Martínez-Puertas, H. and Ruiz, J.M. (2013). On allocation of redundant components for systems with dependent components. *European Journal of Operational Research*, **230**, 573–580.

[16] Belzunce, F., Martínez-Riquelme, C. (2014). Some results for the comparison of generalized order statistics. *Statistical Papers*. DOI 10.1007/s00362-014-0631-5.

[17] Belzunce, F., Martínez-Riquelme, C. and Ruiz, J.M. (2013). On sufficient conditions for mean residual life and related orders. *Computational Statistics and Data Analysis*, **61**, 199–210.

[18] Belzunce, F., Martínez-Riquelme, C. and Ruiz, J.M. (2014). A characterization and sufficient conditions for the total time on test transform order. *Test*, **23**, 72–85.

[19] Belzunce, F., Mercader, J.A. and Ruiz, J.M. (2005). Stochastic comparisons of generalized order statistics. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **19**, 99–120.

[20] Belzunce, F., Pinar, J.F., Ruiz, J.M. and Sordo, M.A. (2012). Comparisons of risks based on the expected proportional shortfall. *Insurance: Mathematics and Economics*, **51**, 292–302.

[21] Belzunce, F., Ortega, E.M., Pellerey, F. and Ruiz, J.M. (2007). On ranking and top choices in random utility models with dependent utilities. *Metrika*, **66**, 197–212.

[22] Boland, P.J. (2007). *Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science*. Chapman and Hall, Boca Raton.

[23] Boland, P.J., El-Neweihi, E. and Proschan, F. (1994). Schur properties of convolutions of exponential and geometric random variables. *Journal of Multivariate Analysis*, **48**, 157–167.

[24] Boland, P.J., Hu, T., Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (2002). Stochastic ordering of order statistics II in *Modelling Uncertainty: An Examination of Stochastic Theory, Methods and Applications*, Eds. M. Dror, P. L'Ecuyer and F. Szidarovszky, Kluwer, Boston, 607–623.

[25] Boland, P.J., Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (1998). Stochastic ordering of order statistics in *Handbook of Statistics*, Eds. N. Balakrishnan and C.R. Rao, **16**, 89–103.

[26] Cai, J. and Wei, W. (2014). Some new notions of dependence with applications in optimal allocation problems. *Insurance: Mathematics and Economics*, **55**, 200–209.

[27] Chandler, K. N. (1952). The distribution and frequency of record values. *Journal of the Royal Statistical Society Ser. B.*, **14**, 220–228.

[28] Cheng, M.Y., Qiu, P., Tan, X. and Tu, D. (2009). Confidence intervals for the first crossing point of two hazard functions. *Lifetime Data Analysis*, **15**, 441–454.

[29] Cramer, E. and Kamps, U. (2003). Marginal distributions of sequential and generalized order statistics. *Metrika*, **58**, 293–310.

[30] Csörgo, M. and Zitikis, R. (1996). Mean residual life processes. *Annals of Statistics*, **24**, 1717–1739.

[31] Dziubdziela, W. and Kopocinski, B. (1976). Limiting properties of the $k-$th record values. *Applicationes Mathematicae*, **15**, 187-190.

[32] Fagiuoli, E., Pellerey, F. and Shaked, M. (1999). A characterization of the dilation order and its applications. *Statistical Papers*, **40**, 393-406.

[33] Fernández-Ponce, J. M., Infante-Macías, R. y Muñoz-Pérez, J. (1996). Characterization of lifetime distributions based on a quantile dispersion measure. *Computational Statistics and Data Analysis*, **21**, 547-561.

[34] Franco, M., Ruiz, J.M. and Ruiz, M.C. (2002). Stochastic orderings between spacings of generalized order statistics. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **16**, 471–484.

[35] Freimer, M., Kollia, G., Lin, C.T. and Mudholkar, G.S. (1988). A study of the generalized Tukey lambda family. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **17**, 3547–3567.

[36] Govindarajulu, Z. (1977). A class of distributions useful in lifetesting and reliability with applications to nonparametric testing in *Theory and Applications of Reliability*, Vol. **1**, Eds. C.P. Tsokos and I.N. Shimi. Academic Press, New York, 109–130.

[37] Hankin, R.K.S. and Lee, A. (2006). A new family of non-negative distributions. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, **48**, 67–78.

[38] Hu, T., Wang, Y. and Zhuang, W. (2012). New properties of the total time on test transform order. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **26**, 43–60.

[39] Hu, T. and Zhuang, W. (2005a). Stochastic properties of $p$-spacings of generalized order statistics. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **19**, 257–276.

[40] Hu, T. and Zhuang, W. (2005b). A note on stochastic comparisons of generalized order statistics. *Statistics and Probability Letters*, **72**, 163–170.

[41] Hurliman, W. (1998). On stop-loss order and the distortion pricing principle. *ASTIN Bulletin*, **28**, 119–134.

[42] Jensen, F. and Petersen, N.E. (1983). *Burn-In*. John Wiley and Sons, Chichester.

[43] Jewitt, I. (1989). Choosing between risky prospects: The characterization of comparative statics results, and location independent risk. *Management Science*, **35**, 60–70.

[44] Kamps, U. (1995a). A concept of generalized order statistics. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **48**, 1–23.

[45] Kamps, U. (1995b). *A Concept of Generalized Order Statistics*. B.G. Taubner, Stuttgart.

[46] Karlin, S. (1968). *Total Positivity*. Stanford University Press, Palo Alto, California.

[47] Kayid, M. and Ahmad, I.A. (2004). On the mean inactivity time ordering with reliability applications. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **18**, 395–409.

[48] Khaledi, B.E. (2005). Some new results on stochastic comparisons between generalized order statistics. *Journal of the Iranian Statistical Society*, **4**, 35–49.

[49] Khaledi, B.E. and Kochar, S.C. (2005). Dependence orderings of generalized order statistics. *Statistics and Probability Letters*, **73**, 357–367.

[50] Kijima, M. and Ohnishi, M. (1996). Portfolio selection problems via the bivariate characterization of stochastic dominance relations. *Mathematical Finance*, **6**, 237–277.

[51] Kleiber, C. and Kotz, S. (2003). *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*. John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey.

[52] Kochar, S. C., Li, X. and Shaked, M. (2002). The total time on test transform and the excess wealth stochastic orders of distributions. *Advances in Applied Probability*, **34**, 826-845.

[53] Li, X. and Shaked, M. (2004). The observed total time on test and the observed excess wealth. *Statistics and Probability Letters*, **68**, 247–258.

[54] Li, X. and Yam, R. C. M. (2005). Reversed preservation properties of some negative aging conceptions and stochastic orders. *Statistical Papers*, **46**, 65–78.

[55] Lisek, B. (1978). Comparability of special distributions. *Statistics*, **9**, 537–593.

[56] Liu, K., Qiu, P. and Sheng, J. (2007). Comparing two crossing hazard rates by Cox proportional hazards modelling. *Statistics in Medicine*, **26**, 375–391.

[57] Ma, C. (1999). Uniform stochastic ordering on a system of components with dependent lifetimes induced by a common environment. *Sankhyā, Ser. A*, **61**, 218–228.

[58] McDonald, J. B. (1984). Some generalized functions for the size distribution of income. *Econometrica*, **52**, 647-663.

[59] Metzger, C. and Rüschendorf, L. (1991). Conditional variability ordering of distributions. *Annals of Operations Research*, **32**, 127–140.

[60] Müller, A. and Stoyan, D. (2002). *Comparison methods for stochastic models and risks*. John Wiley and Sons, Chichester.

[61] Nair, N. U., Sankaran, P. G. and VineshKumar, B. (2012). Characterization of distributions by properties of truncated Gini index and mean difference. *Metron*, **70**, 173–191.

[62] Nair, N.U. and Vineshkumar, B. (2010). L-moments of residual life. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **140**, 2168–2631.

[63] Pfaff, B. (2013). *Financial Risk Modelling and Portfolio Optimization with* `R`. John Wiley and Sons, Chichester.

[64] Qiu, G. and Wang, J. (2007). Some comparisons between generalized order statistics. *Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities, Series B*, **22**, 325–333.

[65] Righter, R. and Shanthikumar, J.G. (1992). Extension of the bivariate characterization for stochastic orders. *Advances in Applied Probability*, **24**, 506–508.

[66] Sarabia, J. M., Gómez, E., Vázquez, F. J. (2007). *Estadística Actuarial. Teoría y Aplicaciones*. Pearson Educación, Madrid.

[67] Seal, H.L. (1980). Survival probabilities based on Pareto claim distributions. *ASTIN Bulletin*, **11**, 61–71.

[68] Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (1986). Multivariate imperfect repair. *Operations Research*, **34**, 437–448.

[69] Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (2007). *Stochastic Orders*. Springer, New York.

[70] Shanthikumar, J.G., Yamazaki, G. and Sakasegawa, H. (1991). Characterization of optimal order of servers in a tandem queue with blocking. *Operations Research Letters*, **10**, 17–22.

[71] Shanthikumar, J.G. and Yao, D.D. (1991). Bivariate characterization of some stochastic order relations. *Advances in Applied Probability*, **23**, 642–659.

[72] Taylor, J.M. (1983). Comparisons of certain distributions functions. *Statistics*, **14**, 307–408.

[73] Wang, F. (2009). Some results on the generalized TTT transform order for order statistics. *Chinese Journal of Applied Probability*, **25**, 27–37.

[74] Xie, H. and Hu, T. (2009). Ordering $p$-spacings of generalized order statistics revisited. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **23**, 1–16.

[75] Xie, H. and Hu, T. (2010). Some new results on multivariate dispersive ordering of generalized order statistics. *Journal of Multivariate Analysis*, **101**, 964–970.