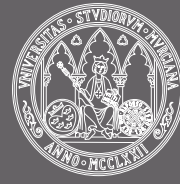


**UNIVERSIDAD DE
MURCIA**



**Universidad de Murcia
Facultad de Economía y Empresa**

Programación Multiobjetivo: Caso práctico aplicado a una compañía aérea

Sebastián Soler Morales

**Trabajo Fin de Grado en Administración y Dirección de Empresas
Curso 2013-2014**

RESUMEN.....	3
1 INTRODUCCIÓN.....	4
2 APLICACIÓN A UNA COMPAÑÍA AÉREA.....	6
2.1 Ofertas	6
2.1.1 Airbus	7
2.1.2 Boeing.....	8
3 RESTRICCIONES.....	8
4 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	9
4.1 Planteamiento de las Restricciones	9
4.2 Planteamiento de los Objetivos	11
4.3 Presentación del problema matemático	12
5 RESOLUCIÓN.....	12
5.1 Soluciones factibles	13
5.1.1 Maximización del Beneficio	14
5.1.2 Minimización del Consumo.....	16
5.1.3 Soluciones eficientes y soluciones óptimas	18
5.2 Técnicas Generadoras.....	21
5.2.1 Método de las ponderaciones.....	21
5.2.2 Método de la restricción	23
5.3 Programación por Metas.....	25
6 CONCLUSIONES.....	28
7 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	30
8 SUMMARY	31
8.1 Approaching the problem.....	31
8.2 Solving the problem	32
8.3 Final thoughts.....	33

RESUMEN

Como comienzo, se presenta una introducción al problema, en la que se detalla en qué consiste la toma de decisiones, en qué ámbitos puede aplicarse, y qué implicaciones empresariales puede tener. Posteriormente se han introducido los métodos matemáticos por los que puede resolverse la toma de decisiones, así como su proceder.

A continuación, se ha formulado el problema aplicado a nuestro caso concreto, y se han detallado las dos funciones objetivo, así como las restricciones que estarán presentes en el problema de optimización, para después detallar los componentes del problema. Luego se ha comenzado su resolución, mostrando, en primer lugar, el conjunto de soluciones factibles, para después, optimizar cada función objetivo por separado, llegando a conseguir las soluciones óptimas para cada problema de programación lineal.

En el siguiente punto, se han aplicado Técnicas Generadoras, mediante dos métodos, siendo uno de ellos el de las Ponderaciones, en el que se le han otorgado unos valores de ejemplo a cada función objetivo, y el otro el de las Restricciones, en el que se ha planteado una simulación de preferencias por parte del decisor. En ambos casos se ha resuelto el problema de programación multiobjetivo, y se han llegado a unos resultados, los cuales han sido comentados, así como unas conclusiones sobre la idoneidad de cada modelo. A continuación, se ha aplicado el Método de Programación por Metas mediante el programa informático LINDO, el cual, a través del establecimiento de una serie de metas, ha dado una solución satisfactoria.

Para finalizar el trabajo, se muestran una serie de conclusiones extraídas del planteamiento y resolución del problema, a través de las cuales se invitará al lector a reflexionar sobre la importancia de una aplicación metódica en la toma de decisiones.

1 INTRODUCCIÓN

Tomar decisiones forma parte de nuestro día a día. Desde la elección de un modelo de coche, los estudios que cursaremos, incluso hechos más cotidianos como qué vestiremos hoy, suponen tomar una decisión. En muchos casos, el proceso de toma de decisiones no conlleva mucho más que unos minutos. En otros casos, es un proceso formal, en el que se deben tener en cuenta muchas variables. La clave está en el riesgo entre tomar unas u otras decisiones. Mientras equivocarse en la elección de vestimenta no supone más problema que coger frío o calor unas horas, un error en la toma de una decisión empresarial puede llevar a reducir drásticamente un beneficio, o incluso a la pérdida de puestos de trabajo.

Es, por tanto, en el entorno empresarial, donde la toma de decisiones adopta su máxima practicidad, siendo en multitud de ocasiones decisiones acompañadas de un gran número de variables a tener en cuenta, donde los simples cálculos no son aplicables, teniendo que recurrir a recursos más complejos.

Como indican Corominas, A., Bautista, J., Oliva, J. (1985), en su estudio, las implicaciones que puede tener la aplicación de un modelo de programación matemática, incluirían desde “la planificación de la actividad productiva, el impacto de las opciones estratégicas o tácticas, o la programación de la producción”. Por ello que se precisa de un proceso formal de toma de decisiones, al menos en la empresa, de forma que no sólo se cubran riesgos, sino que exista la posibilidad de conseguir un óptimo en la toma de esas decisiones.

Así, se antoja necesaria la existencia de métodos para la resolución de problemas de decisión. En todos ellos existirán unos objetivos, acompañados de unas restricciones que el analista deberá tener en cuenta para llegar a conseguir, en un principio, un conjunto de soluciones, las soluciones factibles, para posteriormente determinar la mejor solución. Esos métodos forman la llamada programación matemática.

Los problemas de programación matemática usualmente tienen un solo objetivo, es decir, un único propósito que resolver. Un sólo objetivo en un entorno empresarial tan cambiante, a la par que lleno de oportunidades y amenazas es insuficiente, debido a la complejidad de dicho entorno. Es por ello que se recurre a la programación multiobjetivo.

La programación multiobjetivo se refiere a la posibilidad de resolver problemas de programación matemática, añadiendo a estos un *extra* de complejidad, introduciendo al

problema más de un objetivo que optimizar. Como indica Romero, C. (1993) “constituye un enfoque multicriterio de gran potencialidad cuando el contexto decisional está definido por una serie de objetivos a optimizar que deben satisfacer un determinado conjunto de restricciones”.

El problema en este trabajo aquí planteado estará estructurado de la siguiente forma. En un comienzo, se presentaran los objetivos que tiene la empresa, los cuales responden a sus necesidades. A continuación, se incluirán las restricciones que impone la empresa a estos objetivos. Dichas restricciones serán, en algunos casos, impuestas por un agente externo, otras, preferencias de la empresa, y otras limitaciones físicas e ineludibles. Después, se resolverá el problema siguiendo el método clásico, resolviendo cada problema individualmente, comentando al finalizar sus conclusiones, como si se tratara de un caso de programación lineal clásico. Finalmente, se seguirán métodos más complejos para su resolución, introduciendo simulaciones de datos, de cara a mostrar diferentes situaciones, y su repercusión empresarial.

El problema consiste en la necesidad por parte de la empresa, en determinar el número óptimo de aviones que debe comprar para satisfacer la demanda de nuevas rutas que se ha planteado. Para ello requiere que en la compra se satisfagan dos objetivos. El primero, maximizar en lo posible el beneficio diario, resultante de los ingresos diarios que consigue la empresa en su actividad, minorando de ellos los gastos operativos derivados de la actividad. El segundo objetivo viene dado por la minimización del consumo de combustible. Así, tenemos definidos los dos objetivos. Una vez planteado el problema multiobjetivo de maximización del beneficio y de minimización del consumo, se plantean tres posibilidades de resolución, atendiendo a diferentes métodos.

Primero, se resuelve cada problema por separado, determinando las soluciones individualmente. Esto nos determina las soluciones eficientes que la empresa puede aceptar. Después, se utilizan Técnicas Generadoras, como son la resolución por el Método de las Ponderaciones, en las que la empresa establece unas preferencias en forma de ponderación, y el Método de las Restricciones, en el que la empresa añade cada objetivo como una restricción adicional. Finalmente, se resuelve el problema mediante el método más complejo, como es el de Programación por Metas. En él, la empresa toma las decisiones en base a metas que debe cumplir, y que si, a la finalización del problema, se cumplen, se obtendrá una solución satisfactoria.

2 APLICACIÓN A UNA COMPAÑÍA AÉREA

El problema tratado a continuación, se ha planteado de forma que se aplique en un caso práctico, una serie de técnicas y metodología . En ningún caso se ha formulado para resolver el caso específico de ninguna compañía, si bien su planteamiento responde a necesidades potenciales que cualquier empresa puede tener a lo largo de su actividad, como es la toma de decisiones referentes al funcionamiento de aquella. Aunque los datos no responden a una realidad exacta, en su amplia mayoría responden a especificaciones reales, siendo escogidos en base a una orientación analítica.

Nuestra empresa, una compañía aérea con crecimiento sostenido, se plantea el reto de ampliar su cartera de servicios, teniendo planeado abrir nuevas rutas comerciales, precisando para ello la adquisición de nuevos aparatos. He aquí nuestro problema: **¿cuántos aviones necesita comprar la empresa?** Para resolver este problema, la empresa tendrá en cuenta dos objetivos.

Por un lado, desea que el beneficio que pueda obtener cada día sea el máximo, de forma que pueda continuar ese crecimiento, dado que los accionistas de la empresa se muestran inquietos sobre un cambio de tendencia. Primer objetivo: Maximizar el beneficio, medido en euros, resultado de deducir de los ingresos diarios por la venta de pasajes, los costes diarios de poner en el aire los aviones que adquiera. El segundo objetivo que completa el problema, viene dado por el consumo. Con el precio del queroseno incrementándose cada día, resulta fundamental para mantener en buen estado económico la empresa, reducir el consumo de aquel. Segundo objetivo: Minimizar el consumo, medido en litros por kilómetro recorrido por todos los aviones cada día.

2.1 Ofertas

Para la adquisición de los aviones, la empresa se ha reunido con los representantes de diversas constructoras de aeronaves, y, tras llevar a cabo un análisis de las ofertas, ha decidido que Boeing y Airbus ofrecen los productos que más se ajustan a las necesidades de la compañía. Tras reunirse con ambas empresas constructoras, les ha sido remitido a la compañía aérea un informe detallado con las características técnicas de los aviones que aquellas ofertan.

2.1.1 Airbus

La primera constructora ha mostrado diversos modelos, de los cuales ha recomendado el Airbus A330-300, el cual nombraremos como modelo *a*. A continuación se presenta el informe elaborado por Airbus¹:

El Airbus A300-300 es un reactor bimotor y de fuselaje ancho. Este moderno avión incluye la tecnología *fly-by-wire*, que proporciona mayor confort para la tripulación. Este modelo permite una configuración de motores a gusto del cliente, pudiendo elegir entre los motores GE CF6, P&W PW4000 y RR Trent 700, todos ellos con unas prestaciones y un consumo excelentes.

El Airbus A300-300 permite diversas configuraciones de cabina, siendo la estándar 50 pasajeros en clase *Business* y 285 en clase *Turista*.

Este modelo opera en el rango del medio-largo alcance, llegando a ofrecer un alcance máximo de 10.500 kilómetros.

En cuanto a la autonomía, su consumo medio ronda los 2,9 litros de combustible por pasajero a los 100 kilómetros.

El número de vuelos que calcula la empresa que podría realizar es de 2 vuelos diarios, debido al tiempo necesario para su revisión posterior a cada vuelo.

El coste de adquisición se sitúa en 225.000.000€ cada unidad.

¹ Datos extraídos de <http://www.airbus.com/aircraftfamilies/passengeraircraft/a330family/a330-300/specifications/> y adaptados a nuestro caso.

2.1.2 Boeing

Por su parte, Boeing ha destacado el 787-800, en nuestro problema el modelo *b*, como idóneo para la compañía, haciendo énfasis en su mayor autonomía, pero sobre todo en su menor consumo y precio. El informe que Boeing nos ha remitido dice lo siguiente²:

El Boeing 787-800 se sitúa a la vanguardia en el sector aeronáutico. Con sus 270 asientos, divididos en *Business* (30) y *Turista* (240), permitirá incrementar su capacidad en cada vuelo en comparación con otros modelos con menor número de pasajeros.

El Boeing 787-800 es capaz de dar la vuelta al mundo con una sola escala, situándolo como un referente en cuanto a autonomía, siendo ésta de 11.065 kilómetros.

Ofrecemos este modelo con dos motorizaciones, General Electric o Rolls-Royce, según la necesidad del cliente. Estos motores ofrecen un consumo de tan sólo 2,3 litros por cada pasajero cada 100 kilómetros, siendo un 20% que aviones de la competencia².

Este modelo, al ser el más avanzado del mercado, permite programar hasta 3 vuelos diarios, gracias a su eficiente mantenimiento entre vuelos, ya que permite ahorrar gran cantidad de tiempo. El precio final por avión asciende a 180.000.000€.

3 RESTRICCIONES

Como en todo problema, existen ciertas limitaciones para resolverlo. En la toma de decisiones, nunca se tiene, ni certeza de todas las variables a tener en cuenta, ni todos los recursos disponibles para llevar a cabo la decisión correcta. En nuestra empresa ocurre igual.

Para comenzar, el capital disponible para adquisiciones que ha ido acumulando la empresa, procedente de beneficio de años anteriores, y de amortizaciones acumuladas, se sitúa en la cifra de 1.350.000.000 €

La Unión Europea, en sus medidas de apoyo a la economía comunitaria, establece una serie de subvenciones³ para empresas cuyas adquisiciones de gran valor se realicen dentro de las fronteras europeas. Airbus, perteneciente a *EADS*, está formada por la

² Datos extraídos de <http://www.boeing.es/Productos-y-Servicios/Commercial-Airplanes/787> y adaptados a nuestro caso.

³ Fuente *Expansión.com* <http://www.expansion.com/2010/10/07/empresas/transporte/1286446159.html>

unión de tres empresas: *Aérospatiale-Matra*, de Francia, *Dornier GmbH* y *DaimlerChrysler Aerospace AG*, de Alemania, y la española *CASA*⁴. Para mantener la subvención, la Unión Europea establece que el número mínimo de aeronaves Airbus que se adquieran sea de 2 unidades.

Por último, tras un estudio de la demanda, la compañía cree que podrá cubrirla realizando, diariamente, al menos, 10 vuelos con los aviones que adquiera. Consultando con las compañías constructoras, se establece que el A330-300 es capaz de realizar 2 viajes diarios, mientras que modelo 787-800, requiere de un menor mantenimiento entre vuelo, y podrá realizar 3 trayectos diarios.

4 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

A continuación se muestra una tabla con el resumen de los datos técnicos de ambos modelos. Como podemos observar, el A330, pese a tener una capacidad mayor que el Boeing, presenta un coste de mantenimiento, consumo y coste de adquisición más elevados. Por el contrario, el 787 tiene un menor consumo, pero aún así posee un alcance mayor.

Modelo	Airbus A330-300		Boeing 787-800	
Número de pasajeros	335		270	
Pasajeros (Business/Turista)	50	285	30	240
Autonomía	10.500 kms		11.065 kms	
Consumo (por pasajero)	2,9litros/100 kms		2,3litros/100 kms	
Coste Adquisición	225.000.000€		180.000.000€	
Costes (por pasajero/avión) ⁵	460€	200€	336€	208€

Tabla 1. Resumen de especificaciones.

4.1 Planteamiento de las Restricciones

Definiendo a como el número de aviones Airbus A300-300 que la empresa desea comprar, y b como el número de aviones Boeing B787-800, definimos las siguientes restricciones:

⁴ Fuente *Wikipedia*: http://es.wikipedia.org/wiki/Airbus_Group

⁵ Suponemos que los costes se han tomado en base a la experiencia de la empresa. En ellos se incluyen gastos de *catering* a bordo, gastos de personal y seguro de accidentes.

Restricción 0: El número de aviones que se compren será mayor o igual a cero. Se conoce como restricción de no negatividad. Es lógico pensar que la empresa no puede comprar un número negativo de aviones.

$$a, b \geq 0$$

Restricción 1: El mantenimiento de la subvención supone adquirir, al menos, dos unidades de Airbus.

$$a \geq 2$$

Restricción 2: El presupuesto disponible para la compra de los aparatos se encuentra por debajo de D_1 :

$$[A_1a] + [A_2b] \leq D_1$$

Siendo:

- D_1 el capital máximo disponible para la compra.
- A_1 y A_2 el precio de adquisición del modelo Airbus y Boeing respectivamente.
- a y b el número de aviones Airbus y Boeing respectivamente adquiridos por la empresa.

En nuestro problema:

- $D_1 = 1.350.000.000$ €
- $A_1 = 225.000.000$ €
- $A_2 = 180.000.000$ €
- a, b son las variables.

Sustituyendo tenemos

$$225.000.000a + 180.000.000b \leq 1.350.000.000$$

Restricción 3: El número de viajes que la empresa calcula que debe realizar para satisfacer la demanda debe ser superior a U viajes diarios:

$$V_1a + V_2b \geq U$$

Donde:

- V_1 y V_2 es el número de viajes diarios que puede realizar el modelo a y el modelo b , respectivamente.
- U es el número de viajes diarios que debe hacer la empresa.

Nosotros tenemos

- $V_1 = 2$
- $V_2 = 3$
- $U = 10$

$$2a + 3b \geq 10$$

4.2 Planteamiento de los Objetivos

La empresa obtiene el grueso de su ingresos procedente de la venta de los billetes de los pasajeros. Estos ingresos se medirán en euros, y constituirá el total de billetes vendidos diariamente:

$$a(t_1P_1 + bs_1P_2) + b(t_2P_1 + bs_2P_2)$$

de los cuales para obtener el beneficio hay que minorar los costes operativos:

$$a[C_{TA}t_1 + C_{BA}bs_1] + b[C_{TB}t_2 + C_{BB}bs_2]$$

Siendo:

- t_1, t_2 , el número de pasajeros en clase *turista* transportados en el modelo Airbus y Boeing, respectivamente.
- bs_1, bs_2 , el número de pasajeros en clase *business* transportados en el modelo Airbus y Boeing, respectivamente.
- P_1 y P_2 el precio unitario de cada billete según la clase:

Para el establecimiento del precio unitario de cada pasaje, la empresa ha determinado que este se calcule incrementando un 35% en base a la media del coste según la clase:

$$P_1 = \left[\frac{460 + 336}{2} \right] \times 135\% = 537,3\text{€}$$

$$P_2 = \left[\frac{200 + 208}{2} \right] \times 135\% = 275,4\text{€}$$

- a y b el número de aviones Airbus y Boeing respectivamente adquiridos por la empresa.
- C_{TA}, C_{TB} , el coste por pasajero en clase *turista* en el modelo Airbus y Boeing, respectivamente.
- C_{BA}, C_{BB} , el coste por pasajero en clase *business* en el modelo Airbus y Boeing, respectivamente.

Por tanto, sabiendo que

$$\begin{aligned} \text{Beneficio} &= \text{Ingresos} - \text{Costes} \\ B^0 &= a(t_1 P_1 + bs_1 P_2) + b(t_2 P_1 + bs_2 P_2) - \\ &\quad - a[C_{TA} t_1 + C_{BA} bs_1] + b[C_{TB} t_2 + C_{BB} bs_2] \end{aligned}$$

El segundo objetivo de la empresa consiste en minimizar el consumo de combustible, y que vendrá representado por:

$$[(t_1 + bs_1)c_1]a + [(t_2 + bs)c_2]b$$

Siendo:

- t_1, t_2 e bs_1, bs_2 el número de pasajeros transportados en cada avión según la clase.
- c_1 y c_2 el consumo por pasajero expresado en litros por cada 100 kilómetros.
- a y b el número de aviones Airbus y Boeing respectivamente adquiridos por la empresa.

4.3 Presentación del problema matemático

A continuación, pasamos a completar con valores numéricos:

$$\begin{aligned} \max B^0 &= a(50 \times 537,3 + 285 \times 275,4) + b(30 \times 537,3 + 240 \times 275,4) - \\ &\quad - [460 \times 50 + 200 \times 285]a - [336 \times 30 + 208 \times 240]b \end{aligned}$$

$$\max B^0 = a(105.354) + b(82.215) - 80.000a - 60.000b$$

$$\max B^0 = 25.354a + 22.215b$$

$$\min \text{Consumo} = \left[335 \times \frac{2,9}{100} \right] a + \left[270 \times \frac{2,3}{100} \right] b$$

$$s. a \geq 2$$

$$225.000.000a + 180.000.000b \leq 1.350.000.000$$

$$2a + 3b \geq 10$$

5 RESOLUCIÓN

Comenzaremos la resolución del problema buscando las soluciones factibles que tendrá el problema. De entre todas estas soluciones factibles, comenzaremos buscando las

soluciones óptimas de cada problema por separado. Esto es posible, ya que cada problema es un problema de programación lineal. Según Sydsaeter & Hammond (1996) “Programación Lineal es el nombre que se usa para los problemas en los que el objetivo es maximizar (o minimizar) una función lineal sujeta a restricciones en forma de desigualdades lineales”. Los pasos para la construcción de un modelo de programación matemática, pasan por determinar las variables de decisión, formular las restricciones, y formular la función objetivo (Ortiz Barrios, M.A., 2013). De esta forma nos iremos acercando paulatinamente a la solución óptima, según el método que usemos.

Al tratarse de un problema de programación lineal, el máximo se encontrará en el vértice que tenga mayor valor, y en caso de ser un mínimo, estará en el vértice de la recta que tenga menor valor.

5.1 Soluciones factibles

Según Sydsaeter y Hammond (1996) “En principio, se puede resolver *cualquier* problema de programación lineal, si tiene solución”. Es decir, primero debemos determinar dónde se encontrarían las soluciones factibles a nuestro problema.

El problema se resolverá de manera gráfica, ya que la existencia de únicamente dos variables nos permite movernos en un entorno bidimensional, mostrándose el problema más intuitivo y comprensible de esta manera. Adicionalmente al método gráfico, el problema podría ser resuelto por otros mecanismos, como son el algoritmo SIMPLEX, aunque su comprensión resultaría más compleja.

El primer paso para determinar el conjunto de soluciones factibles será mostrar de forma gráfica las restricciones que tenemos en el problema, es decir, representar mediante ejes cartesianos la región factible donde se encontrarán las soluciones óptimas de nuestro problema. Incluyendo en un mismo gráfico todas las restricciones anteriores, obtenemos:

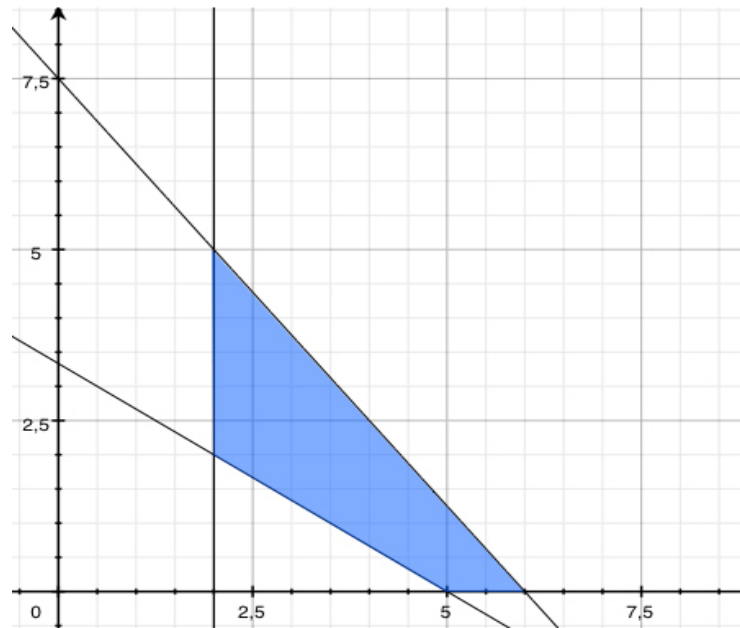


Figura 1. Región factible.

En consecuencia, en la Figura 1 se muestra que las soluciones factibles al problema, dadas las restricciones, se encuentran incluidas en el área coloreada de azul, que está delimitada por los puntos extremos:

$$\begin{aligned}x_1 &= (2, 5) \\x_2 &= (2, 2) \\x_3 &= (6, 0) \\x_4 &= (5, 0)\end{aligned}$$

5.1.1 Maximización del Beneficio

Tras calcular el conjunto de soluciones posibles, lo siguiente será determinar el punto dónde se encuentra el máximo beneficio. Para ello, procederemos a calcular las *curvas de nivel* de la función *beneficio*.

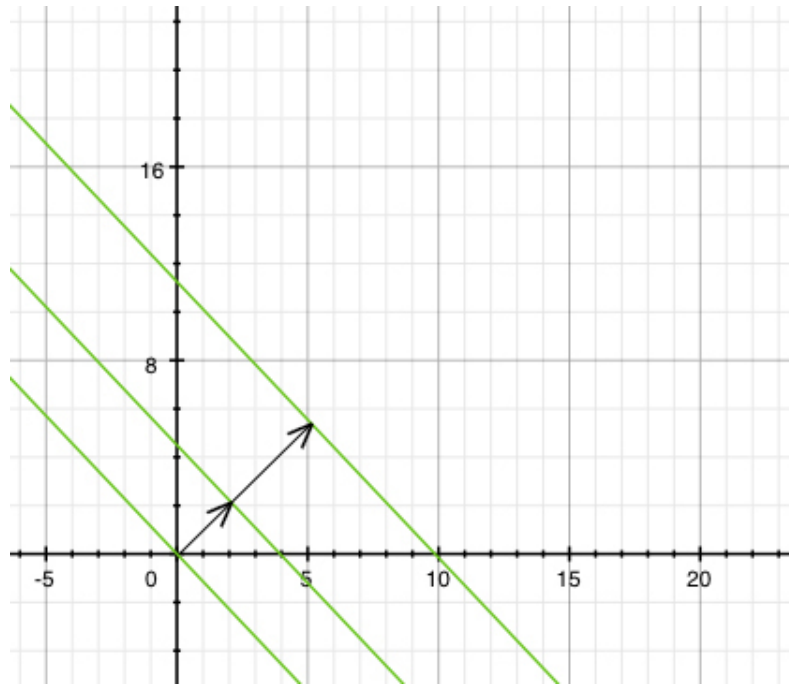


Figura 2.

En la Figura 2 se muestra, a modo de ejemplo, las *curvas de nivel* siendo el beneficio 0€, 100.000€ y 250.000€ representadas desde la ecuación más cercana al origen, a la más alejada respectivamente. Al ser una función objetivo a maximizar, su movimiento será ascendente.

Sin embargo, es posible calcular cuál sería la *curva de nivel* que cumpliría con la solución óptima, siendo la que se encuentre más alejada del origen, hacia la derecha, incluida dentro de la zona factible.

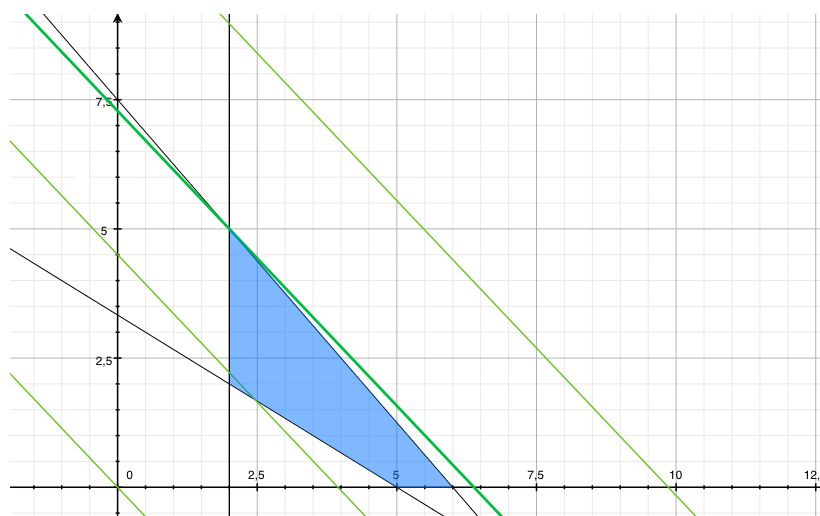


Figura 3.

Como el sentido de crecimiento de las curvas de nivel es hacia la derecha, la curva de nivel que define la solución óptima será la que se encuentre más alejada del origen incluida dentro del área de soluciones factibles.

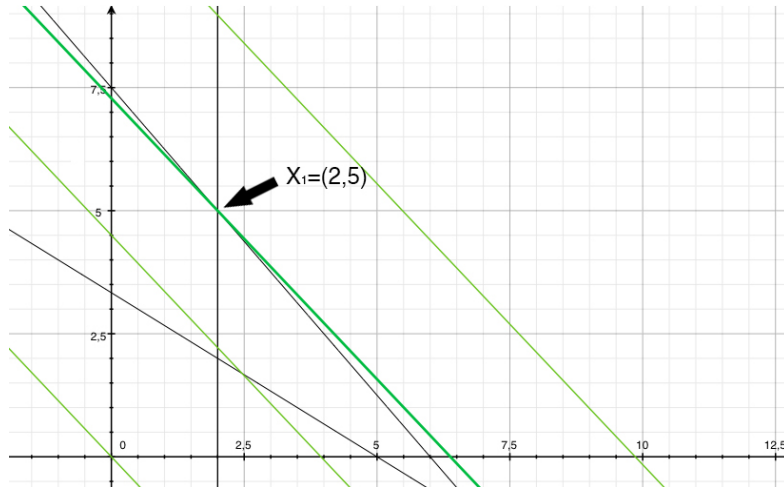


Figura 4.

Tal y como muestran las Figuras 3 y 4, el punto donde se consigue el máximo beneficio estaría en el vértice $x_1 = (2, 5)$. El beneficio en dicho punto sería de:

$$\begin{aligned}
 B^o &= 2 \times (50 \times 537,3 + 285 \times 275,4) + 5 \times (30 \times 537,3 + 240 \times 275,4) - \\
 &\quad - [460 \times 50 + 200 \times 285] \times 2 - [336 \times 30 + 208 \times 240] \times 5 \\
 B^o &= 210.708 + 411.075 - 160.000 - 300.000 = \mathbf{161.783\text{€}}
 \end{aligned}$$

5.1.2 Minimización del Consumo

La segunda función objetivo que debemos optimizar es la del consumo. El procedimiento a seguir será similar al visto en el epígrafe 5.1.1.

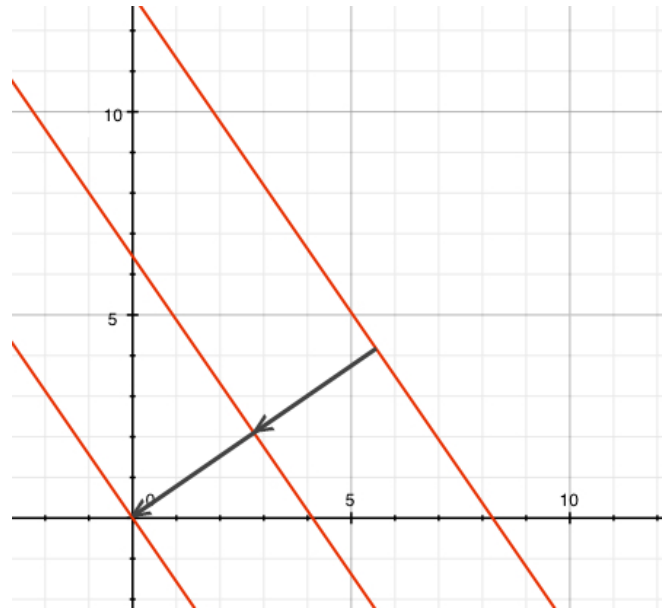


Figura 5.

Al ser una función a minimizar, la *curva de nivel* óptima se situará lo más cercana posible al origen, es decir, el sentido de crecimiento de la función a minimizar es hacia la izquierda. En la Figura 5 se representan las *curvas de nivel* para un consumo de 80, 40, y 0 litros/km por total de aviones, de la más alejada al origen a la más cercana, respectivamente.

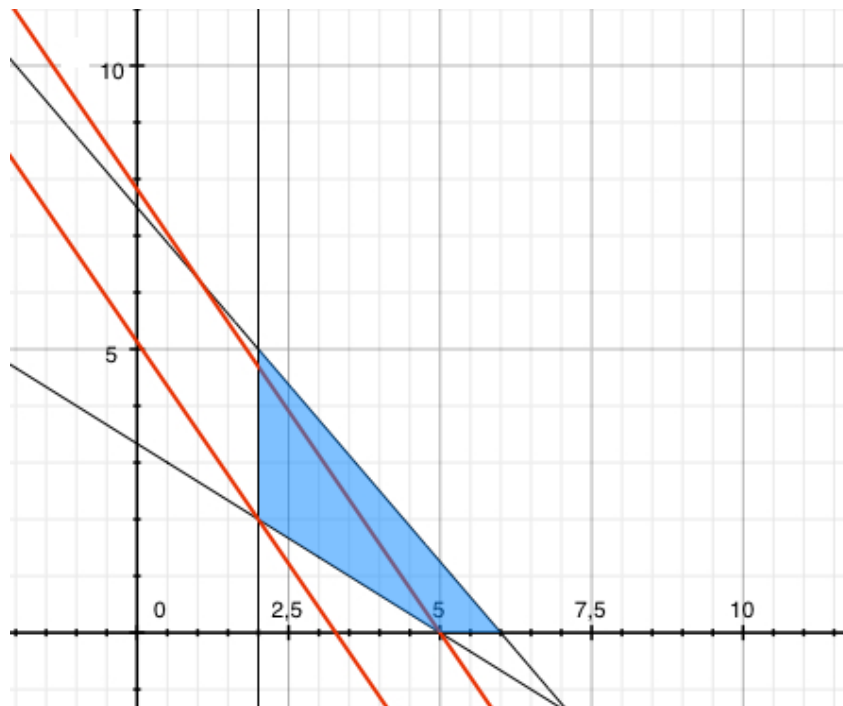


Figura 6.

En la Figura 6 se muestran las *curvas de nivel*, las cuales pasan por (5,0) y (2,2). Comprobamos como la *curva de nivel* en (2,2) cumple la condición de mínimo.

Para ese punto $x_2 = (2,2)$ obtenemos un consumo igual a 31,85 litros/km para los 4 aviones comprados.

$$\text{Consumo} = \left[335 \times \frac{2,9}{100} \right] \times 2 + \left[270 \times \frac{2,3}{100} \right] \times 2$$

$$\text{Consumo} = 19,43 + 12,42$$

$$\text{Consumo} = 31,85 \text{ litros/km}$$

5.1.3 Soluciones eficientes y soluciones óptimas

Entendemos como solución eficiente, aquella que, si bien no cumple el requisito de ser la óptima, se considera aceptable dado el cumplimiento de los objetivos. Según Guerras, L. A. (1989) “[...] una asignación no será Pareto-óptima si se puede aumentar la utilidad de alguien sin reducir la de los demás”. En nuestra resolución por separado, podemos distinguir dos soluciones, atendiendo a la definición anterior.

Resolviendo el problema de maximización del beneficio, la solución óptima pasaría por 2 aviones modelo Airbus, y 5 aviones modelo Boeing. Con esta situación, el beneficio que obtendríamos sería como hemos visto de 161.783€, mientras que el consumo pasaría a ser de 50,48 litros/km.

Atendiendo al problema de minimización del consumo, el número de aviones Airbus que se debería comprar es de 2 unidades, siendo igualmente 2 la cantidad a comprar del modelo de Boeing, siendo ésta la solución óptima. En este caso, el beneficio sería menor, al ser inferior el número de aviones comprados, siendo de 95.138€. El consumo sería de 31,85 litros/km, en el conjunto de los 4 aviones. A continuación se muestra la Matriz de Pagos para las soluciones óptimas

Solución	f =Beneficio (€)	f =Consumo (l/km)
(2,5)	161.783	50,48
(2,2)	95.138	31,85

Tabla 2. Matriz de Pagos para las soluciones óptimas

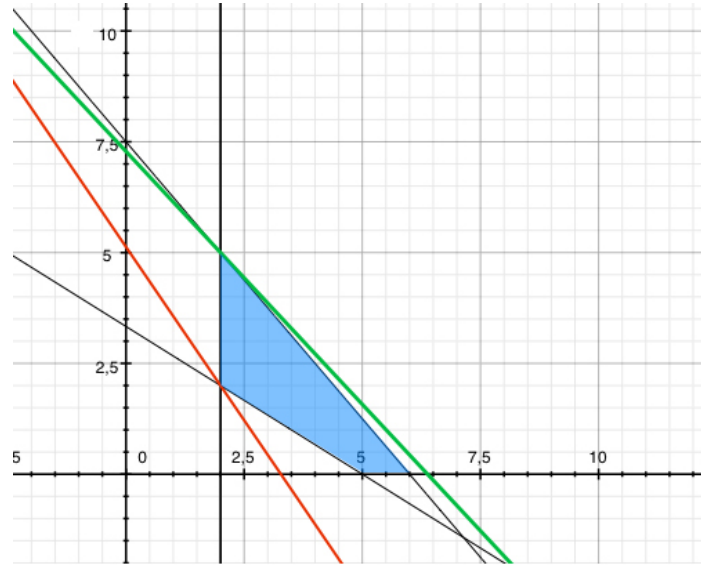


Figura 7.

La recta verde correspondería a la maximización del beneficio, mientras que la roja sería la minimización del consumo.

En palabras de Romero, C. (1993) “la matriz de pagos constituye un útil mecanismo para poder cuantificar el nivel de conflicto existente entre diferentes objetivos”, lo cual es perfectamente observable en nuestro caso. Desde el punto de vista empresarial, la empresa desearía obtener el máximo beneficio (161.783€) teniendo asimismo el mínimo consumo (31,85l/km). Ese *punto ideal* que conlleva ese conflicto que la empresa no puede conseguir, no está incluido dentro del conjunto eficiente de nuestro problema, como se puede observar en la Figura 9, donde tenemos, por un lado en el eje de abscisas la representación del beneficio, y por otro lado, en el eje de ordenadas, el consumo. La matriz de pagos asociada algunas soluciones factibles obtenidas sería la siguiente

Solución	f =Beneficio (€)	f =Consumo (l/km)
(2,5)	161.783	50,48
(2,2)	95.138	31,85
(2,3)	117.353	38,06
(2,4)	139.568	44,27

(6,0)	152.124	58,29
(5,0)	126.770	45,88

Tabla 3. Matriz de Pagos del conjunto de soluciones factibles

Como se observa, los puntos (2,5) y (2,2) corresponden a las soluciones óptimas, al mismo tiempo que son eficientes. Estos puntos son eficientes porque no existe otra solución que mejore a estas en términos de beneficio y consumo a la vez. Si bien, sí existirían soluciones que obtienen un mayor beneficio, incurriendo asimismo en un mayor consumo. Estas soluciones pueden ser mostradas de forma gráfica

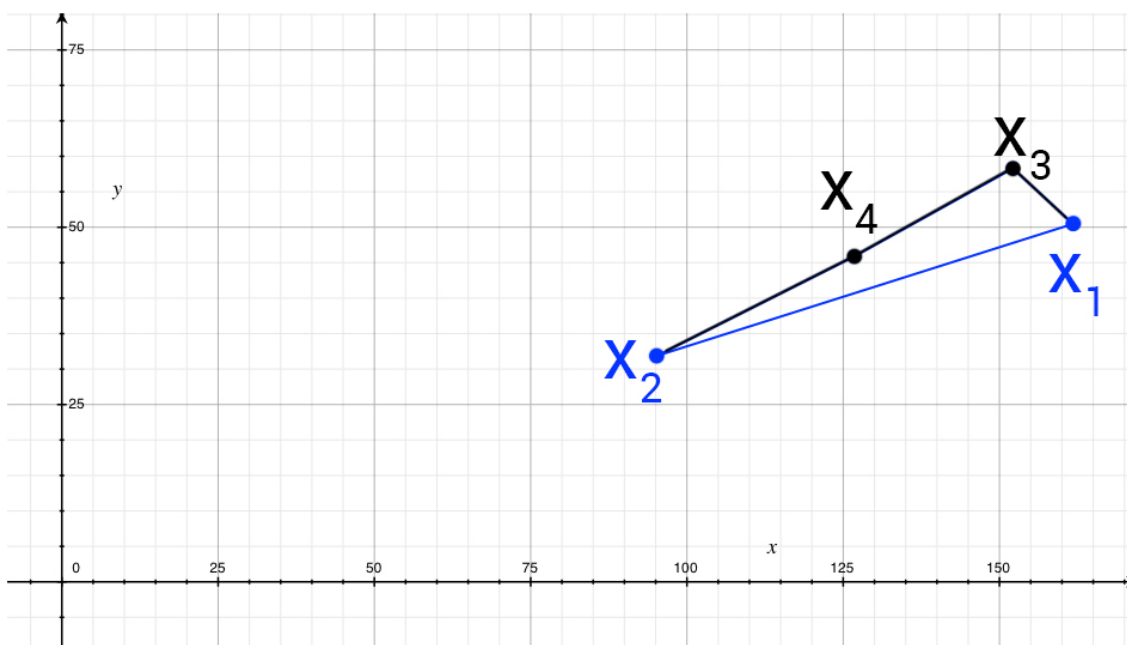


Figura 8.

En la Figura 8 se representa el conjunto eficiente, en términos de beneficio y consumo. En azul, las soluciones óptimas, así como la frontera de soluciones eficientes, siendo x_4 y x_3 los otros puntos extremos del conjunto factible, x_1 el punto óptimo para la función objetivo beneficio y x_2 el óptimo para la función objetivo consumo. Como ejemplo, los puntos eficientes (2,3) y (2,4) estarían incluidos en la recta azul.

El punto ideal corresponde, por un lado, a la cantidad maximizada en el caso del beneficio, y por otro, a la cantidad minimizada en el consumo. En nuestro caso, el *punto ideal* correspondería a un beneficio de 161.783 €, con un consumo de 31,85 l/km., tal y como se muestra en la siguiente figura

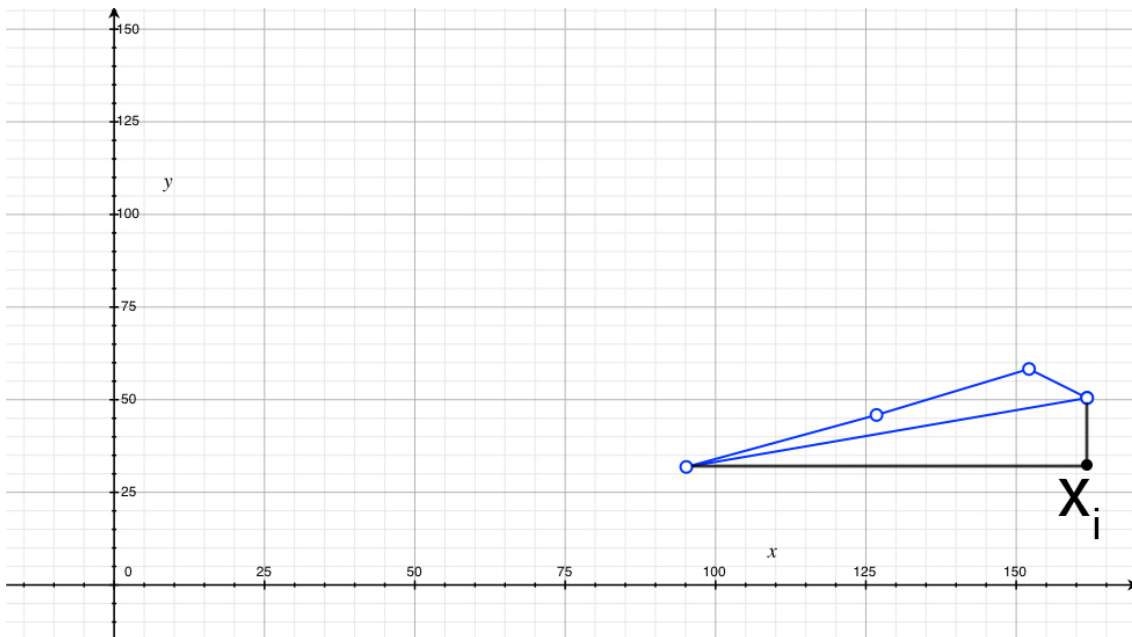


Figura 9.

5.2 Técnicas Generadoras.

Las técnicas generadoras se basan en la obtención de un conjunto completo de soluciones eficientes (Guerras, L.A., 1989). Permiten, como su propio nombre indica, *generar* el panorama de soluciones eficientes.

En estas técnicas, es el analista⁶ el que, tras el estudio del problema y su resolución, proporciona al decisor⁷ la solución para que, en última instancia, sea el último el que tome la decisión correspondiente.

5.2.1 Método de las ponderaciones

El método de las ponderaciones propone, a partir de nuestro problema multiobjetivo, crear problemas monoobjetivos asociados a él. Después, aplicamos a cada función un valor λ (Caballero, R., Gómez, T., González, A., Muñoz, MM., Rey L., Ruiz F., Triguero, F., 1997) . En otras palabras, cada función del problema multiobjetivo es tratada de forma individual. A cada una de estas funciones, se le asigna un valor, de forma que la importancia relativa dentro del problema multiobjetivo sea diferente para

⁶ Analista es, según Guerra, L.A. (1989) “quien proporciona información al decisor sobre la estructura del problema sobre el que se trata de decidir”, además de incorporar al modelo la información subjetiva que le aporte el decisor.

⁷ Decisor, según Chankong & Haimes (citado por Guerra, L.A. (1989)) es “un individuo o grupo de individuos que directa o indirectamente proporciona el juicio de valor final que puede ser usado para jerarquizar las alternativas disponibles para que pueda ser identificada la “mejor” elección”.

cada una de esas funciones. Esta ponderación tiene un carácter subjetivo, y corresponde la elección de los valores al analista, el cual debe estudiar detenidamente las consecuencias de establecer esa valoración. Según Romero (1996), “por medio de la parametrización de los pesos asociados a los objetivos se va aproximando el conjunto eficiente o conjunto de soluciones Pareto óptimas” (p. 38). Tras realizar esta ponderación, se resuelve el problema monoobjetivo resultante.

En esta técnica, debemos tener en cuenta las unidades, ya que en nuestro caso, al ser conceptos tan distintos, convendría además normalizarlas. Por ello, en la función *beneficio*, los valores estarán dados en miles de euros, de forma que ambas funciones se muevan en unos unidades similares. Nuestro problema ponderado es:

$$\begin{aligned} \max & \lambda(25,354a + 22,215b) + (1 - \lambda)(-9,715a - 6,21b) \\ \text{s. a } & a \geq 2 \\ & 225.000.000a + 180.000.000b \leq 1.350.000.000 \\ & 2a + 3b \geq 10 \\ & \lambda \in [0,1] \end{aligned}$$

Para ponderar las funciones objetivo en su conjunto, y optimizar, se ha tenido que convertir la función objetivo consumo en máximo, multiplicando por la unidad negativa la función.

Ponderación	Solución	Beneficio	Consumo
$\lambda = 0$	(2,2)	0 miles €	31,85 l/km
$\lambda = 0,1$	(2,2)	9,51 miles €	28,67 l/km
$\lambda = 0,2$	(2,2)	19,028 miles €	25,48 l/km
$\lambda = 0,3$	(2,5)	48,438 miles €	35,34 l/km
$\lambda = 0,4$	(2,5)	64,713 miles €	30,28 l/km
$\lambda = 0,5$	(2,5)	80,892 miles €	25,24 l/km
$\lambda = 0,6$	(2,5)	97,07 miles €	20,19 l/km
$\lambda = 0,7$	(2,5)	113,246 miles €	15,14 l/km
$\lambda = 0,8$	(2,5)	129,426 miles €	10,10 l/km
$\lambda = 0,9$	(2,5)	145,588 miles €	5,05 l/km
$\lambda = 1$	(2,5)	161,783 miles €	0 l/km

Tabla 4.

Como podemos resaltar en la Tabla 4. se produce un cambio de tendencia para $\lambda = 0,3$, donde el beneficio paulatinamente, debido al incremento de su ponderación, a incrementar su valor. Asimismo, el consumo, por el efecto contrario, es cada vez menor.

La importancia de este método está en la asignación de las ponderaciones. Corre a cargo del analista la decisión de asignar cada una de ellas. Dichas ponderaciones deben estar basadas, si queremos que la solución al problema sea realista, en datos lo

más cercanos a la realidad posible, obtenidos a través de un proceso sistemático Guerras, L.A. (1989, p. 60). Cabe resaltar las siguientes ventajas e inconvenientes de este método:

- Permite, si las ponderaciones están bien asignadas, una solución eficiente.
- Permite establecer varios escenarios según nuestras preferencias. Bastaría con ir *jugando* con los valores de λ .
- Es un método sencillo de aplicar.
- Da una representación aproximada del conjunto de soluciones.
- Es necesario que las funciones se muevan en unidades similares.
- En caso de existir muchas restricciones, conllevaría una gran cantidad de tiempo y recursos llegar a resolver el problema.

5.2.2 Método de la restricción

Este procedimiento consiste, como el método de las ponderaciones, en construir un problema monoobjetivo, fijando una de las funciones, e introduciendo el resto de las funciones objetivo como restricciones. A estas últimas, será necesario imponerles un valor a alcanzar.

Este método no garantiza que las soluciones obtenidas sean soluciones eficientes, salvo que sea una solución única. Estas soluciones se encontrarán en todo caso en un vértice del problema.

En nuestro problema tenemos dos opciones. Por un lado, podemos optimizar el beneficio, convirtiendo el consumo en una restricción, de esta forma, se nos añadiría una restricción más a las ya planteadas en el problema. Esta nueva restricción, como veremos más adelante, no deberá superar un valor preestablecido.

De forma contraria, se puede optimizar el consumo, transformando la función beneficio como una restricción, asignándole también a esta última un valor a alcanzar. Estos valores serán escogidos por el decisor.

A modo de ilustración, se tomará dado el consumo, que será, en todo caso, menor o igual a 38 litros por kilómetro⁸. Es decir, dejaremos fijada la función beneficio, la cual tendremos que maximizar, y añadiremos el consumo como una restricción, la cual no debe superar los 38 litros por kilómetro recorrido.

$$\max B^o = 25.354a + 22.215b$$

$$\text{s.a } a > 2$$

⁸ Este valor ha sido tomado de forma que las soluciones obtenidas sean coherentes. El propósito es asegurar que la empresa tiene una estimación máxima de consumo.

$$225.000.000 \times a + 180.000.000 \times b \leq 1.350.000.000$$

$$2 \times a + 3 \times b \geq 10$$

$$9,715 \times a + 6,21 \times b \leq 38 \text{ litros/km}$$

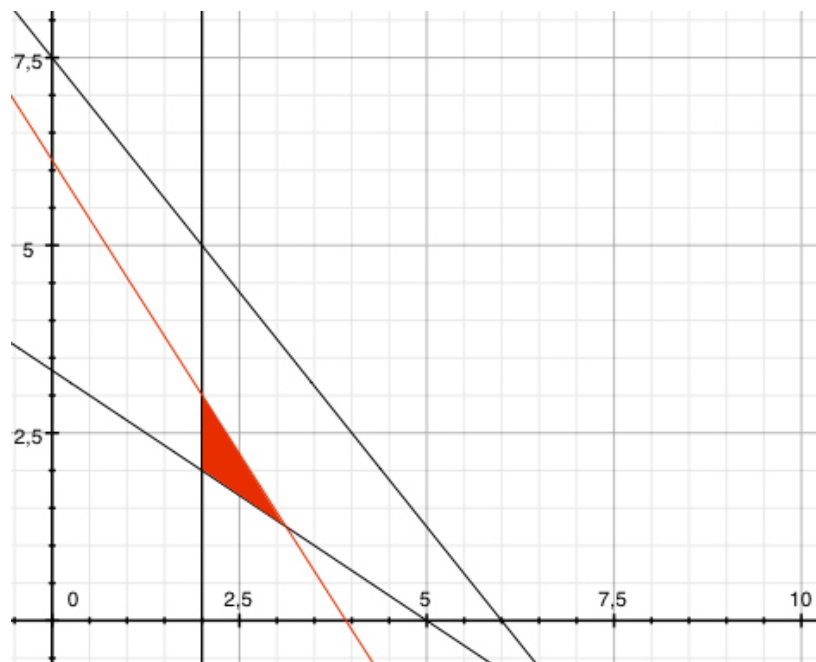


Figura 10.

Por lo que el Beneficio ahora estará sobre el área roja, que es la que viene delimitada por las restricciones, incluida la del consumo.

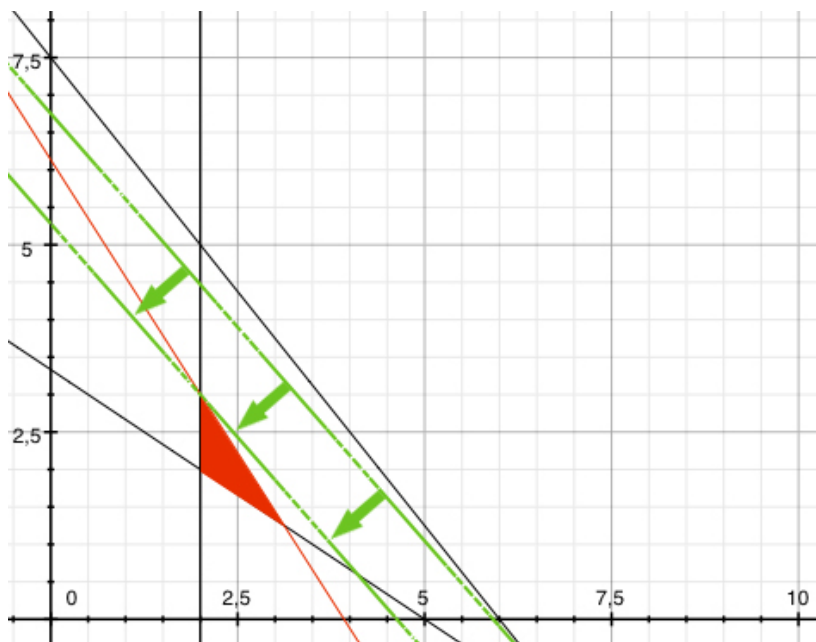


Figura 11.

En la Figura 11. comprobamos cómo la curva de nivel del beneficio pasaría a estar ahora en un nivel inferior, situándose sobre el punto (2,3), que es el máximo

consumo que la empresa está dispuesta a afrontar. En ese punto, el beneficio es de 117.353€, mientras que el consumo es el que impusimos en la restricción, de 38 litros/km.

Como ventajas e inconvenientes del método tenemos:

- Nos permite acotar aún más las soluciones eficientes.
- Las cotas elegidas para las restricciones deben ser lo más objetivas posibles. Corresponde a cargo del analista la estimación de los valores.
- No existe una solución única. Para cada cota existirá una solución diferente.
- Al igual que el método de las ponderaciones, las soluciones generadas son una representación no exacta del conjunto de soluciones.

5.3 Programación por Metas

Mediante esta técnica, la solución se obtendrá en base a la información aportada a priori, es decir, se le da al analista unas *preferencias*, y éste, en base a dichas preferencias, prepara el modelo de optimización. Esto permite que la solución cumpla los requisitos establecidos, dando una solución satisfactoria.

En un primer paso, estableceremos a cada objetivo un valor. Este valor nos indicará qué cantidad se deberá alcanzar como mínimo, en caso de estar maximizando, o que valor máximo, en caso de ser un problema de minimización. A esto se le llama *establecer metas*. A estas nuevas restricciones se les considerará *restricciones blandas*, en contraposición a las *restricciones duras* que son las que originalmente se establecieron (Caballero, R. *et al.* 1997).

Posteriormente, se tiene que establecer un orden de prioridad entre objetivos. Este orden vendrá dado por las preferencias del decisor, siendo un dato subjetivo y tomado en base a las necesidades de la empresa. Obtendremos una solución satisfactoria si, al finalizar de resolver el problema conseguimos una solución, y ésta ha conseguido superar todas las metas impuestas.

Para resolver el problema de optimización bajo este procedimiento, debemos añadir en el modelo dos variables, llamadas *variables de desviación*, una de ellas de signo negativo, n_1 , nos indica qué cantidad necesitamos para llegar a la meta que nos habíamos propuesto. En cambio, la *variable de desviación* p_1 , la cual es positiva, nos proporciona el valor contrario, es decir, en qué cantidad nos hemos excedido de la meta propuesta (Caballero, R., Gómez, T., González, A., Muñoz, MM., Rey L., Ruiz F., Triguero, F., 1997). En nuestra aplicación, resolveremos el problema mediante *metas*

lexicográficas, en el que se establece un orden de prioridad en las metas, siendo la primera meta a alcanzar preferente a las sucesivas. En nuestro problema, la empresa, a través de un análisis realizado, tiene constancia de que podría obtener un beneficio de, al menos 140.000€

$$\begin{aligned} 25.354a + 22.215b &\geq 140.000 \\ 25.354a + 22.215b + n_1 - p_1 &= 140.000 \end{aligned}$$

donde n_1 y p_1 son las variables negativa y positiva, respectivamente, antes mencionadas. La variable no deseada es n_1 , ya que si $p_1 \geq 0$, podemos asegurar que el resultado será, al menos, igual a 140.000 €. Así, tenemos la primera meta.

Además, la empresa ha estudiado que puede llegar a alcanzar como máximo, 47 litros por kilómetro recorrido.

$$\begin{aligned} 9,715 \times a + 6,21 \times b &\leq 47 \\ 9,715 \times a + 6,21 \times b + n_2 - p_2 &= 47 \end{aligned}$$

donde, en este caso, la variable no deseada es p_2 , porque si $n_2 \geq 0$, el resultado conseguido será, como máximo de 47 l/km. Aplicamos la primera meta:

$$\begin{aligned} \min p_1 \\ \text{s. a } 225a + 180b &\leq 1850 \\ 2a + 3b &\geq 10 \\ a &\geq 2 \\ 25.354a + 22.215b + n_1 - p_1 &= 140.000 \end{aligned}$$

Al tener más de dos variables de decisión, este problema lo resolveremos analíticamente. Para ello, utilizaremos el programa LINDO⁹, un algoritmo de programación lineal, con el cual obtenemos el siguiente *output*:

```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP    1
      OBJECTIVE FUNCTION VALUE
          1)  0.0000000E+00
VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
      N1         0.000000         1.000000
       A         5.521811         0.000000
       B         0.000000         0.000000
      P1         0.000000         0.000000
NO. ITERATIONS=      1

```

⁹ <http://www.lindo.com/>

como muestra la salida del programa LINDO, hemos obtenido $n_1 = 0$, indicativo de que se cumple la primera meta, y podemos proseguir con la segunda. Que se haya verificado esta primera meta significa que la función beneficio puede conseguir, al menos, el valor de 140.000 €

$$\begin{aligned} \min p_2 \\ \text{s. a } 225a + 180b &\leq 1850 \\ 2a + 3b &\geq 10 \\ 25.354a + 22.215b + n_1 - p_1 &= 140.000 \\ n_1 &= 0 \\ 9,175a + 6,21b + n_2 - p_2 &= 47 \end{aligned}$$

al resolver el problema, obtenemos

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 0.000000E+00

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
N1	0.000000	1.000000
A	2.000000	0.000000
B	4.019446	0.000000
P1	0.000000	0.000000
N2	3.689238	0.000000
P2	0.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 2

según esto, el punto óptimo estaría en $(2,4^{10})$, el cual podemos afirmar que se trata de una solución válida, puesto que $p_2 = 0$.

Al cumplirse las dos metas, podemos confirmar que nuestra solución al problema mediante el método de programación por metas lexicográficas se encontrará en el punto (2,4). En este punto, obtendremos un beneficio de 140.000¹¹ €, reafirmando que la primera meta se cumple, ya que se estableció que ese debía ser el valor mínimo.

El consumo, por su parte, será de 43,19 l/km, confirmando también que la segunda meta también se cumple, ya que no sobrepasa los 47 l/km que impusimos como máximo.

¹⁰ La solución exacta es 4'019446, pero al tratarse de una limitación del programa no poder establecer números enteros como restricción, se ha procedido a su redondeo a la baja.

¹¹ El redondeo del valor de b provoca que el beneficio real sea de 139.569 €.

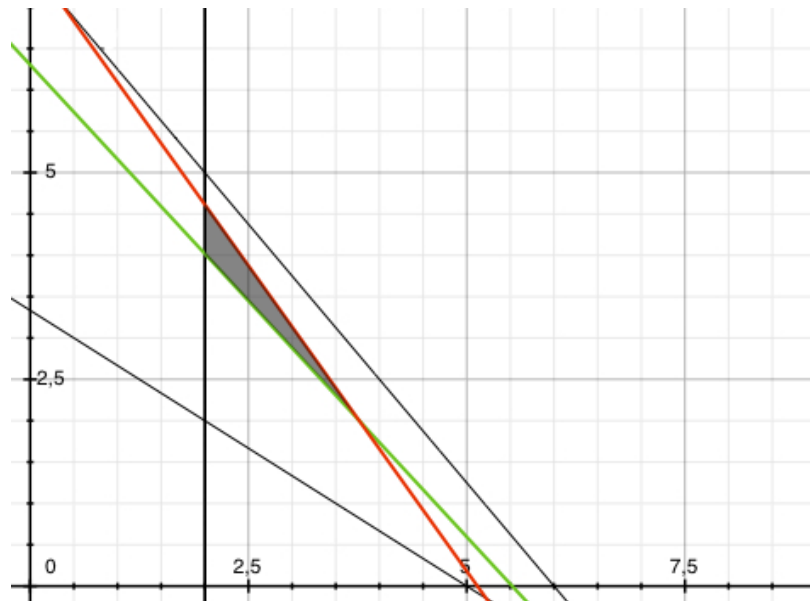


Figura 12.

Gráficamente, en la Figura 12, en el área sombreada, estarían el conjunto de soluciones al problema resuelto por este método, que cumplen las dos metas propuestas.

La línea verde es la función beneficio, en rojo la función consumo. Nuestra solución satisfactoria se encontrará en la intersección de la función beneficio con $a=2$.

Como indica Caballero, R. & Hernández, M. (2010), en este método “se asume que el decisor renuncia a la optimización cuando establece valores para cada objetivo”.

Es por tanto, indicativo que obtendremos una solución óptima, *sesgada* en función de los valores que el decisor haya asignado con anterioridad.

6 CONCLUSIONES

A través del planteamiento y resolución del problema, podemos determinar que, mediante la aplicación de técnicas, que en algunos casos pueden ser sencillas, pero que a su vez son perfectamente válidas en entornos más complejos, se pueden conseguir soluciones a problemas empresariales.

Hemos comprobado como, primeramente, mediante la resolución por separado, obtenemos unas soluciones que son óptimas, siempre con la condición de que son óptimas para la función objetivo maximizada. Este caso sería válido en problemas monoobjetivo de pequeño alcance. En nuestro planteamiento multiobjetivo, si bien nos sirve como introducción al problema, resulta insuficiente una resolución por separado de ambas funciones objetivo.

Es por ello que se han aplicado seguidamente las Técnicas Generadoras. A través de ellas, hemos *recreado* un conjunto de soluciones eficientes. El Método de las Ponderaciones nos ha permitido realizar una simulación dotando a cada función de un peso relativo dentro del problema multiobjetivo, para cada caso. Esto nos ha permitido comprobar que, dependiendo de las preferencias del decisor, se puede llegar a conseguir un resultado u otro, en base a las ponderaciones que se establezcan. Con el Método de las Restricciones, se ha concluido que, mediante la conversión de una función objetivo en restricción, se puede llegar igualmente a conseguir el conjunto de soluciones eficientes, estableciendo cotas a aquellas restricciones.

Finalmente, con el Método de Programación por Metas, el más complejo, se nos ha permitido llegar a una solución satisfactoria, en el que a través de unas preferencias del decisor, se ha llegado a una solución que, si bien no cumple con el óptimo estrictamente, si se ajustan perfectamente a las preferencias que el decisor pueda tener, lo que permite una gran flexibilidad y la posibilidad de establecer multitud de simulaciones en base a diferentes entornos y panoramas.

Por tanto, se ha querido demostrar la aplicación real de una serie de técnicas, en el entorno empresarial, mediante unos datos que en cualquier caso pueden ser tomados y adaptado en base a una realidad por parte de decisores y analistas con suficiente acceso a información interna, que permita la toma de decisiones con un menor nivel de riesgo, y un mayor índice de éxito.

La conclusión global que podemos extraer es que, si bien existe un conjunto de técnicas que permiten asistir a la toma de decisiones, en todas ellas entra en juego las preferencias *humanas* como factor variable en las soluciones. Esto es así debido a la cantidad de variables a tener en cuenta, máxime en un entorno empresarial, en el que resulta imposible técnicamente tener todas las variables parametrizadas. Es por ello, que si bien se pueden modelizar algunas, siempre debe haber un *toque humano* que permita introducir esas variables en los modelos, usualmente desde una perspectiva subjetiva.

7 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Caballero, R., Gómez, T., González, A., Muñoz, MM., Rey L., Ruiz F., Triguero, F. (1997). *Programación matemática para economistas*. Universidad de Málaga/Manuales.
- Caballero, R. & Hernández, M. (2010). Resolution of the linear fractional goal programming problem. *Rect@: Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA*, N°. 11, 2010, 27-40.
- Corominas, A., Bautista, J., Oliva, J. (1985). Planificació de la capacitat i programació de la producció d'una empresa cervesera mitjançant la programació lineal. *Questiíó: Quaderns d'Estadística, Sistemes, Informàtica i Investigació Operativa*, Vol.9 (4), 1985, 267-274.
- Guerras, L.A. (1989). *Gestión de Empresas y Programación Multicriterio*. ESIC Editorial.
- Ortiz Barrios, M.A. (2013). Teoría de restricciones y modelación PL como herramientas de decisión estratégica para el incremento de la productividad en la línea de toallas de una compañía del sector textil y de confecciones. *Prospectiva*. Vol.11, N° 1, Enero – Junio 2013, 21-29.
- Sydsaeter, K. & Hammond, P. (1996). *Matemáticas para el análisis económico*. Prentice Hall. Madrid.

8 SUMMARY

Decision are taken every day by everyone. From choosing the clothes wearing, to choosing where will you live. All those decision should be taken following a methodic process. In our problem, we show a multiobjective problem, in which we should resolve it, through some technics, in order to get the optimal solution.

At first, we'll resolve the problems one by one, in order to get the optimal solutions for each problem. After that, we'll apply some methods that will help us getting the better solution considering both objective functions. Finally, will show some thoughts about the problem.

8.1 Approaching the problem.

Our company, an airline company, are planning to increase their route offer. For that, they consider buying new planes, in order to get that offer satisfied. The company want to satisfy two objectives. The first one, is about profit. We consider the profit as the daily revenue for tickets sold, minus the operative costs. That will be a maximization problem. The second objective to satisfy is relative to the fuel consumption. This will be a minimize problem.

But for resolving the two problems, the company has some restrictions. The first restriction is that the company has a limited inversion budget, estimated in 1.350.000.000€. The second restriction is that in order to keep a subvention given by the European Union, the company should buy, at least, two products from the European company Airbus. The last restriction, is that the company estimates that it could do, at least, 10 trips a day, counting the planes it will buy.

The company asked the two principal plane's manufacturer, Boeing and Airbus, for information about their products. We was replied with the specs of two planes, the Airbus A300-300 and the Boeing 787-800.

The Airbus one, could carry 50 passengers in Tourist Class, and 285 passengers in Business Class. The fuel consumption is 2,9 liters for passenger each 100 kms. The Airbus A300-300 is an medium-large range plane, and it has a range of 10.500 kms. Airbus told us that the plane could travel two times a day, counting the maintenance periods between trips.

Boeing and its 787-800 could transport 240 passenger in Tourist Class, and 30 passengers in Business Class. The range is about 11.065 kms, with a fuel consumption

about 2,3 liters for passenger each 100 kms. This plane could do 3 trips a day, due its low maintenance. The complete specification for each model is shown in *Tabla 1*. In our problem, we'll name *a* the number of Airbus model that our company will consider buying, and *b* the number of Boeing planes that our company want to buy. Next, we'll show the analitic problem, considering the previous:

$$\mathbf{maxProfit} = 25.354a + 22.215b$$

$$\mathbf{minConsumption} = \left[335 \times \frac{2,9}{100} \right] a + \left[270 \times \frac{2,3}{100} \right] b$$

$$\text{subject to } a \geq 2$$

$$225.000.000a + 180.000.000b \leq 1.350.000.000$$

$$2a + 3b \geq 10$$

8.2 Solving the problem

At first, we'll resolve each problem individually. Having the restriction represented in the graphic, as shown in *Figura .*, we have four extreme points. Inside this area we'll have the solution to the problem. But that not means that is the optimal solution. All the points contained in this area are called feasible points.

Maximizing the profit, as shown in *Figura 4*, we have that the optimal solution will be at point $x_1 = (2,5)$, becoming the profit 161.783€. Minimizing the consumption, we'll have the minimum at point $x_2 = (2,2)$, having a consumption of 31,85 litres/km for the four planes bought. At *Tabla 2*, we would see the payoff, showing the different results considering each objective. We should realise that the optimal points obtained refers to each problem solved individually.

Later, we applied *Generation Techniques*. This method treats to generate efficient solution to the problem. Inside this techniques, is contained the Ponderation Method, whereby we weight the objective, establishing a ponderation between them.

At *Tabla 4*, we established weights, from $\lambda = 0$ to $\lambda = 1$. We had that switching from $\lambda = 0,2$ to $\lambda = 0,3$, the solution changed from (2,2) to (2,5). That means that giving the profit objective more importance, we'll get a bigger profit, increasing the consumption, and vice versa.

The *Restrictions Method* transforms one of the objective into a restriction. In our problem, at first, we stated that the consumption shouldn't be upper than 38 l/km,

becoming the consumption objective into a restriction. The efficient solution in this case is the point (2,4).

At least, we applied the most complete method, the Goal Programming, whereby we'll obtain an optimal solution if it accomplishes the goal we want. In this method, we introduce two variables, that will determine the degree of excess or deficiency in that goal, if applied. As said by Caballero, R. & Hernández, M. (2010), "in goal programming (GP) problems it is assumed that the decision-maker gives up optimization while he/she establishes target values for each objective. When the levels are verified, the expectations or desires of the decision-maker are satisfied".

At first, we establish that our company would earn, at least, 140.000€. That's our first goal. Relying in the optimization program LINDO, we had that this first goal is fulfilled. Also, we assume that the consumption shouldn't be upper than 47 l/km, that was also a fulfilled goal. Considering that, we had that the optimal point is (2,4), having a profit of 140.000€ and a consumption of 43,19l/km. At *Figura 12* are shown graphically the solutions.

8.3 Final thoughts.

Through this analysis, we studied that optimization could be a powerful way to take decision. Despite this methods helps in great shape, we couldn't obviate that the final decision should be taken by an human, and the solution should be taken as an help for taken decision, not as the unique solution.

The problems and this resolution allow provide an insight that the optimization could be applied to real cases, despite the difficulty of the problem and the variables considered.

Also we should thoroughly determine, as a previous step to set the problem, the values the company has, in order to get the closest real solutions. Our problem, has been presented as a practical example of optimization methods, and should not be taken as the solution for any real case.