UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Hipersuperficies en los espacios forma pseudo-riemannianos satisfaciendo $L_k\psi = A\psi + b$

D. Héctor Fabián Ramírez Ospina

2014

Dedico este trabajo a mi esposa Carolina,
y a la persona que siempre llevo en mi
corazón, a mi madre Amparo Ospina

Agradecimientos

Inicialmente, agradezco a Dios por haberme guiado y por abrir muchas puertas para llegar hasta aquí.

Agradezco a mi orientador, Pascual Lucas Saorin, por la paciencia, confianza, incentivo y apoyo. Su entendimiento de las matemáticas me ayudó a estudiar este tema con devoción y disfrute.

De manera especial deseo agradecer al Prof. Luis Alías Linares, que desde el primer día que lo conocí me dio la valentía de emprender los estudios de doctorado. Su humanidad, sencillez y su preocupación por el bienestar de las personas que lo rodean, hace que lo considere un modelo a seguir. Adicionalmente, deseo extender esta gratitud a toda su familia por el cariño y cuidado recibido.

También tengo que agradecer enormemente a los profesores Pacelli Bessa, Jorge Herbert Lira de la Universidad Federal del Ceará y Paolo Piccione de la Universidad de São Paulo. Por su cálida hospitalidad, las buenas conversaciones de matemáticas y no matemáticas y, por su puesto por los trabajos logrados durante mi visita.

Antes de finalizar, quiero expresar mi gratitud a mi esposa Carolina, quien me ha acompañado en esta aventura.

En fin, agradezco a todos los que de forma directa o indirecta contribuyeron para que esta etapa de mi vida fuese concluida. Gracias a todos.

Hipersuperficies en los espacios forma pseudo-riemannianos satisfaciendo $L_k\psi = A\psi + b$

Introducción

El clásico y bien conocido artículo de Takahashi, [20], está dedicado al estudio de subvariedades M^n inmersas en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ cuyas funciones coordenadas de la inmersión ψ son funciones propias del operador laplaciano, asociadas todas ellas al mismo valor propio λ. En otras palabras, $\Delta\psi = \lambda\psi$, donde Δ denota el operador laplaciano de la inmersión con respecto a la métrica inducida. En el caso particular en que M^n es una hipersuperficie, el teorema de Takahashi se expresa como sigue.

Teorema 1 (Takahashi, [20])**.** *Si $\psi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ es una hipersuperficie inmersa en $\mathbb{R}^{n+1}$, entonces $\Delta\psi + \lambda\psi = 0$, para alguna constante real λ, si y sólo si se verifica una de las siguientes afirmaciones:*

- *$\lambda = 0$ y M^n es una hipersuperficie minimal.*
- *$\lambda > 0$ y M^n es un trozo abierto de una n-esfera $\mathbb{S}^n(\sqrt{n/\lambda})$.*

El estudio de esta ecuación diferencial ha dado pie a que muchos autores se hayan planteado, en un marco más amplio, el problema de caracterizar y clasificar ciertas hipersuperficies en otros espacios ambientes mediante ecuaciones de este tipo que, en cierta medida, supongan una extensión del citado teorema.

Por ejemplo, Garay estudió en [10] las hipersuperficies del espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+1}$ cuyas funciones coordenadas eran propias para el laplaciano, aunque no necesariamente para el mismo valor propio. Es decir, la ecuación diferencial de su estudio está dada por $\Delta\psi = A\psi$, donde A es una matriz diagonal constante $A = \mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}]$. El resultado que probó es el siguiente:

Teorema 2 (Garay, [10])**.** *Si $\psi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ es una hipersuperficie inmersa en $\mathbb{R}^{n+1}$ entonces $\Delta\psi = A\psi$, donde A es una matriz diagonal constante (con respecto algún sistema coordenado ortonormal) si, y sólo si, se verifica una de las siguientes afirmaciones:*

- *M^n es una hipersuperficie minimal.*
- *M^n es un trozo abierto de una n-esfera $\mathbb{S}^n(r)$.*

- M^n *es un trozo abierto de un cilindro recto generalizado* $\mathbb{S}^m(r) \times \mathbb{R}^{n-m}$.

Sin embargo, Dillen, Pas y Verstraelen señalaron en [9] que la condición de Garay no es todo lo buena que podría desearse, puesto que no es una condición invariante por coordenadas. De hecho, un cilindro circular recto en $\mathbb{R}^3$ sólo la verifica cuando su eje de simetría es, precisamente, uno de los ejes coordenados. Por lo tanto, y con objeto de evitar este inconveniente, los citados autores introdujeron la condición más general $\Delta\psi = A\psi + b$, para superficies inmersas en $\mathbb{R}^3$, donde A es un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ y b es un vector constante de $\mathbb{R}^3$, y establecieron el siguiente resultado.

Teorema 3 (Dillen-Pas-Verstraelen, [9])**.** *Si* $\psi : M^2 \to \mathbb{R}^3$ *es una superficie inmersa en* $\mathbb{R}^3$ *entonces* $\Delta\psi = A\psi + b$*, para alguna matriz constante* $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *y algún vector constante* $b \in \mathbb{R}^3$ *si, y sólo si, se verifica una de las siguientes afirmaciones:*

- M^2 *es una superficie minimal.*
- M^2 *es un trozo abierto de una 2-esfera* $\mathbb{S}^2(r)$.
- M^2 *es un trozo abierto de un cilindro recto generalizado* $\mathbb{S}(r) \times \mathbb{R}$.

Posteriormente, el estudio de esta nueva condición más general $\Delta\psi = A\psi + b$ fue realizado para el caso de hipersuperficies en $\mathbb{R}^{n+1}$, independientemente y simultáneamente por Chen y Petrovic en [7], y por Hasanis y Vlachos en [12]. Estos trabajos han llevado a la caracterización de las hipersuperficies minimales, las n-esferas y los cilindros circulares rectos generalizados como las únicas hipersuperficies de $\mathbb{R}^{n+1}$ que satisfacen la condición en cuestión. Específicamente, ellos lograron el siguiente teorema:

Teorema 4 (Chen-Petrovic, [7], Hasanis-Vlachos, [12])**.** *Sea* $\psi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *una inmersión isométrica. Entonces* $\Delta\psi = A\psi + b$*, para alguna matriz constante* $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ *y algún vector constante* $b \in \mathbb{R}$ *si, y sólo si, se verifica una de las siguientes afirmaciones:*

- M^n *es una hipersuperficie minimal.*
- M^n *es un trozo abierto de una* n*-esfera* $\mathbb{S}^n(r)$.
- M^n *es un trozo abierto de un cilindro recto generalizado* $\mathbb{S}^m(r) \times \mathbb{R}^{n-m}$.

Ahora bien, quedaba por explorar el caso donde el espacio ambiente es un espacio pseudo-riemanniano general. La situación es a priori más rica, puesto que, en primer lugar, el operador forma de una hipersuperficie pseudo-riemanniana general no es necesariamente diagonalizable, propiedad que desempeña un papel fundamental en el estudio de la condición $\Delta\psi = A\psi + b$ en ambientes riemannianos. Los primeros resultados en esta línea se dieron en los espacios de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ y fue obtenidos por Alías, Ferrández y Lucas en [1], donde se estudian y caracterizan las superficies $\psi : M^2_s \to \mathbb{L}^3$ en el espacio de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^3$ satisfaciendo tal condición. Después en [2] (véase también [3]), los mismos autores logran un resultado de clasificación para subvariedades pseudo-riemannianas M^n_s en espacios pseudo-euclideanos $\mathbb{R}^{n+m}_t$ satisfaciendo la condición $\Delta\psi = A\psi + b$, donde A es un endomorfismo constante de $\mathbb{R}^{n+m}_t$ y b es un vector constante en $\mathbb{R}^{n+m}_t$. Para el caso de hipersuperficies, probaron que M^n_s debe ser un trozo abierto de una hipersuperficie minimal, una hipersuperficie totalmente umbilical o un producto pseudo-riemanniano de una subvariedad totalmente umbilical con una totalmente geodésica. Específicamente, lograron el siguiente teorema de clasificación:

Teorema 5 (Alías-Ferrández-Lucas, [3]). *Sea $\psi : M^n_s \to \mathbb{R}^{n+1}_t$ una inmersión isométrica. Entonces $\Delta\psi = A\psi + b$ para alguna matriz constante $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ y algún vector constante $b \in \mathbb{R}^{n+1}_t$ si, y sólo si, se verifica una de las siguientes afirmaciones:*

- *M^n_s es una hipersuperficie minimal.*
- *M^n_s es un trozo abierto de una pseuda-esfera $\mathbb{S}^n_t(r)$ o de un espacio pseudo-hiperbólico $\mathbb{H}^n_{t-1}(-r)$.*
- *M^n_s es un trozo abierto de uno de los cilindros pseudo-riemannianos generalizados $\mathbb{S}^m_u(r) \times \mathbb{R}^{n-m}_{u-t}$ o $\mathbb{H}^m_{t-u-1}(-r) \times \mathbb{R}^{n-m}_u$.*

Como es bien conocido, el operador laplaciano de una hipersuperficie M^n inmersa en $\mathbb{R}^{n+1}$ es un operador diferencial de segundo orden, el cual es intrínsico a la hipersuperficie y aparece naturalmente como el operador linealizado de la primera variación de la curvatura media para variaciones normales de la hipersuperficie. Desde este punto de vista, el operador laplaciano puede ser visto como el primer elemento de una sucesión de n operadores definidos sobre la hipersuperficie, $\Delta = L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$, donde L_k representa el operador linealizado de la primera variación de la $(k+1)$-ésima curvatura media H_{k+1} que se deriva de variaciones normales de la hipersuperficie. Primero, recordemos que la k-énesima curvatura media está definida por la relación $\binom{n}{k} H_k = \mu_k$, donde μ_k es la k-ésima función simétrica elemental de las curvaturas principales. Segundo, Reilly expone en [19] un completo y detallado estudio de las propiedades variacionales de μ_k para hipersuperficies en espacios forma. Asimismo, introduce las k-ésimas transformaciones de Newton P_k asociadas a la segunda forma fundamental de la hipersuperficie. Específicamente, $P_k : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ es un operador definido por

$$P_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \mu_{k-j} S^j,$$

también puede ser definido de manera inductiva por

$$P_0 = I \qquad \text{y} \qquad P_k = \mu_k I - S \circ P_{k-1},$$

donde S es el operador forma de la hipersuperficie. Una propiedad fundamental de P_k es que su divergencia es cero, $\operatorname{div}(P_k) = 0$. Esto permite asociar a cada transformación de Newton P_k un operador diferencial de segundo orden $L_k : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ dado por

$$L_k(f) := \operatorname{div}(P_k(\nabla f)) = \operatorname{tr}(P_k \circ \nabla^2 f),$$

donde $\nabla^2 f$ es el operador lineal auto-adjunto métricamente equivalente al hessiano de f. Cuando $k = 0$, L_0 no es más que Δ; cuando $k = 1$, L_1 es el operador $\Box$ introducido por Cheng y Yau en [8] para el estudio de hipersuperficies de curvatura escalar constante.

Aunque, en general, estos operadores L_k no son elípticos, ellos comparten propiedades agradables con el operador laplaciano de M. Desde este punto de vista e inspirados por la extensión de Garay del teorema de Takahashi, y sus posteriores generalizaciones y extensiones, Alías y Malacarne logran establecer en [4] la correspondiente versión del teorema de Takahashi para operadores L_k:

Teorema 6 (Alías-Malacarne, [4])**.** *Sea $\psi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie orientable inmersa en $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces $L_k\psi + \lambda\psi = 0$ para un $k = 0, 1, \ldots, n-1$ fijo, y algún real constante $\lambda \in \mathbb{R}$ si, y sólo si, se verifica una de las siguientes afirmaciones:*

- *$\lambda = 0$ y M^n es una hipersuperficie k-minimal (esto es, $H_{k+1} = 0$).*
- *$\lambda \neq 0$ y M^n es un trozo abierto de una n-esfera $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con radio $r = \big((n-k)\binom{n}{k}/|\lambda|\big)^{1/(k+2)}$.*

Esta correspondencia motivó posteriores extensiones y generalizaciones de la ecuación de Takahashi para los operadores linealizados L_k de la curvatura media de orden $k+1$.

A) La ecuación $L_k\psi = A\psi + b$ en los espacios pseudo-euclidianos

Alías y Gürbüz emprendieron en [5] el estudio de hipersuperficies inmersas en $\mathbb{R}^{n+1}$ cuyo vector de posición ψ satisface $L_k\psi = A\psi + b$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$ fijo, alguna matriz constante $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ y algún vector constante $b \in \mathbb{R}^{n+1}$. El resultado obtenido por ellos afirma que las únicas hipersuperficies satisfaciendo dicha ecuación son las k-minimales ($H_{k+1} = 0$), las hiperesferas y ciertos cilindros generalizados. Concretamente probaron el siguiente teorema.

Teorema 7 (Alías-Gürbüz, [5])**.** *Sea $\psi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie orientable inmersa en $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces $L_k\psi = A\psi + b$ para un $k = 0, 1, \ldots, n-1$ fijo, alguna matriz constante $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ y algún vector constante $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ si, y sólo si, M^n es una de las siguientes hipersuperficies en $\mathbb{R}^{n+1}$:*

- *una hipersuperficie k-minimal;*
- *un trozo abierto de una n-esfera $\mathbb{S}^n(r)$;*
- *un trozo de un abierto de un cilindro generalizado $\mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{S}^m(r)$, $r > 0$, con $k+1 \leq m \leq n-1$.*

A la vista del este primer resultado para operadores L_k, nos parece interesante plantear el estudio de esta misma condición para hipersuperficies inmersas en el espacio de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$. Surge así la siguiente cuestión:

> *¿Cuales son las hipersuperficies de $\mathbb{L}^{n+1}$ que verifican la condición $L_k\psi = A\psi + b$, para algún $k = 0, 1, \ldots, n-1$ fijo, alguna matriz constante $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ y algún vector constante $b \in \mathbb{L}^{n+1}$?*

El estudio y la respuesta a esta pregunta se resuelve con el siguiente teorema de clasificación, el cual extiende al espacio de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ el resultado de Alías y Gürbüz de [5].

Teorema 8 (Lucas-Ramírez, [16]). *Sea $\psi : M_s^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ una hipersuperficie orientable inmersa en el espacio de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$. Entonces $L_k\psi = A\psi + b$, para un $k = 0, 1, \ldots, n-1$ fijo, alguna matriz constante $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ y algún vector constante $b \in \mathbb{L}^{n+1}$, si y sólo si, M_s^n es una de las siguientes hipersuperficies en $\mathbb{L}^{n+1}$:*

- *una hipersuperficie k-minimal;*
- *un trozo abierto de una hipersuperficie totalmente umbilical: $\mathbb{S}_1^n(r)$ o $\mathbb{H}^n(-r)$;*
- *un trozo de un abierto de un cilindro generalizado: $\mathbb{S}_1^m(r) \times \mathbb{R}^{n-m}$, $\mathbb{H}^m(-r) \times \mathbb{R}^{n-m}$, con $k+1 \leq m \leq n-1$, o $\mathbb{L}^m \times \mathbb{S}^{n-m}(r)$, con $k+1 \leq n-m \leq n-1$.*

Cabe destacar que las hipersuperficies estudiadas por Alías y Gürbüz en [5] son riemannianas, y así sus operadores forma son siempre diagonalizables. Sin embargo, cuando el espacio ambiente es el espacio de Lorentz-Minkowski, el operador forma de la hipersuperficie no necesita ser diagonalizable, condición que juega un papel fundamental en el caso riemanniano. En nuestro caso, el operador forma S de una hipersuperficie inmersa en $\mathbb{L}^{n+1}$ puede ser expresado, en una referencia apropiada, en uno de los siguientes tipos:

$$
\text{I. } S \approx \begin{pmatrix} \kappa_1 & & & \mathbf{0} \\ & \kappa_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \kappa_n \end{pmatrix}; \quad \text{II. } S \approx \left(\begin{array}{cc|ccc} \kappa & -\beta & & \mathbf{0} & \\ \beta & \kappa & & & \\ \hline & & \kappa_3 & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & \kappa_n \end{array}\right), \quad \beta \neq 0;
$$

$$
\text{III. } S \approx \left(\begin{array}{cc|ccc} \kappa & 0 & & \mathbf{0} & \\ 1 & \kappa & & & \\ \hline & & \kappa_3 & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & \kappa_n \end{array}\right); \quad \text{IV. } S \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} \kappa & 0 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & \kappa & 1 & & & \\ -1 & 0 & \kappa & & & \\ \hline & & & \kappa_4 & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & \kappa_n \end{array}\right). \tag{1}
$$

Posteriormente, y como una continuación a los resultados obtenidos en el caso euclidiano y lorentziano, nos propusimos estudiar este problema en los espacios pseudoeuclidianos $\mathbb{R}_t^{n+1}$. Los frutos de esta investigación se materializan en el siguiente teorema:

Teorema 9 (Lucas-Ramírez, [17]). *Sea $\psi : M_s^n \to \mathbb{R}_t^{n+1}$ una hipersuperficie orientable inmersa en $\mathbb{R}_t^{n+1}$. Entonces $L_k\psi = A\psi + b$, para un $k = 0, 1, \ldots, n-1$ fijo, alguna matriz constante $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ y algún vector constante $b \in \mathbb{R}_t^{n+1}$ si, y sólo si, M_s^n es una de las siguientes hipersuperficies en $\mathbb{R}_t^{n+1}$:*

- *una hipersurperfice k-minimal;*
- *un trozo abierto de una hipersuperficie totalmente umbilical:* $\mathbb{S}^n_t(r)$ *o* $\mathbb{H}^n_{t-1}(-r)$*;*
- *un trozo abierto de un cilindro generalizado:* $\mathbb{R}^{n-m}_u \times \mathbb{S}^m_{t-u}(r)$ *o* $\mathbb{R}^{n-m}_u \times \mathbb{H}^m_{t-u-1}(-r)$ *(*$r > 0$*), con* $k+1 \leq m \leq n-1$*.*

Este teorema extiende completamente a los espacios pseudo-euclidianos $\mathbb{R}^{n+1}_t$ los resultados obtenidos en el caso euclidiano [5], o en el caso lorentziano [16]. Aunque los resultados obtenidos son similares, las demostraciones presentadas en el caso euclidiano y lorentziano no son aplicables al caso general. En este trabajo [17] damos una nueva demostración más compacta de muchos de los resultados básicos obtenidos en el caso lorentziano, basada en la complexificación del operador forma de la hipersuperficie. Recordemos que si V es un espacio vectorial real, entonces el conjunto $V^{\mathbb{C}} = V \times V$ de pares ordenados, con las operaciones suma y multiplicación por escalar sobre $\mathbb{C}$ definidas por

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2),$$

$$(\alpha + i\beta)(u, v) = (\alpha u - \beta v, \beta u + \alpha v), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

es un espacio vectorial complejo, llamado la *complexificación de* V.

Es bien conocido [18, pp. 261–262] que un endomorfismo lineal auto-adjunto B sobre un espacio vectorial V determina una descomposición de V como una suma directa de subespacios V_ℓ que son mutuamente ortogonales (y por tanto no-degenerados) y B-invariantes, y cada $B_\ell = B|_{V_\ell}$ tiene una matriz de la forma

$$\text{I.} \begin{pmatrix} \kappa & & & & \mathbf{0} \\ 1 & \kappa & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & \kappa & \\ \mathbf{0} & & & 1 & \kappa \end{pmatrix}$$

relativa a una base $\{E_1, \ldots, E_p\}$ $(p \geq 1)$ tal que

$$\langle E_i, E_j \rangle = \begin{cases} \epsilon = \pm 1 & \text{cuando } i + j = p + 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

o bien

$$\text{II.} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & & & \mathbf{0} \\ -\beta & \alpha & & & & & \\ 1 & 0 & \alpha & \beta & & & \\ 0 & 1 & -\beta & \alpha & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & \alpha & \beta \\ \mathbf{0} & & & 0 & 1 & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad (\beta \neq 0)$$

relativa a una base $\{E_1, \ldots, E_q\}$ ($q \geq 2$ y par) tal que

$$\langle E_i, E_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{cuando } i, j \text{ son impares con } i + j = q \\ -1 & \text{cuando } i, j \text{ son pares con } i + j = q + 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{2}$$

Aquí p, ϵ y q dependen del subespacio V_ℓ. Una matriz de tipo I es un bloque de Jordan correspondiente al valor propio (real) κ, mientras que una matriz de tipo II es un bloque de Jordan correspondiente al valor propio (complejo) $\alpha + i\beta$.

Lo verdaderamente interesante es que los bloques de Jordan de tipo II pueden ser transformados en matrices de tipo I por un proceso de complexificación. En efecto, sea B un endomorfismo lineal auto-adjunto sobre un espacio vectorial V tal que V_ℓ es un subespacio B-invariante y $B_\ell = B|_{V_\ell}$ es un bloque de Jordan de tipo II en una base (2). Sea $V_\ell^{\mathbb{C}}$ la complexificación de V_ℓ y consideremos los siguientes vectores complejos

$$F_j = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}(E_j + iE_{j+1}) & \text{para } j \text{ impar,} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(E_{j-1} - iE_j) & \text{para } j \text{ par.} \end{cases}$$

No es difícil ver que $\{F_1, \ldots F_m\}$ es una base para $V_\ell^{\mathbb{C}}$ y que $B_\ell^{\mathbb{C}}$ tiene una matriz de forma

$$\begin{pmatrix} \kappa & & & & & & & & & \mathbf{0} \\ 0 & \overline{\kappa} & & & & & & & & \\ 1 & 0 & \kappa & & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \overline{\kappa} & & & & & & \\ & & 1 & 0 & \kappa & & & & & \\ & & & 1 & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & & & & \overline{\kappa} & & \\ & & & & & & & 0 & \kappa & \\ \mathbf{0} & & & & & & & 1 & 0 & \overline{\kappa} \end{pmatrix}.$$

Reordenando la base llegamos a que $B_\ell^{\mathbb{C}}$ tiene una matriz de la siguiente forma

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \kappa & & & & & & & \mathbf{0} \\ 1 & \kappa & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \kappa & & & & \\ \hline & & & & \overline{\kappa} & & & \\ & & & & 1 & \overline{\kappa} & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & & 1 & \overline{\kappa} \end{array}\right)$$

donde $\kappa = \alpha + i\beta$ y $\overline{\kappa} = \alpha - i\beta$. Por tanto, cada bloque de Jordan de tipo II puede ser reducido a dos bloques de Jordan de tipo I por el proceso de complexificación.

Este último hecho hace que el estudio del operador forma S de la hipersuperficie sea más manejable y nos permite lograr demostraciones más compactas y elegantes de los resultados.

B) La ecuación $L_k\psi = A\psi + b$ en los espacios pseudo-esféricos y pseudo-hiperbólicos

Con el fin de simplificar la notación y unificar los enunciados de los próximos resultados, denotaremos por $\mathbb{M}_t^{n+1}(c)$ o bien el espacio pseudo-esférico $\mathbb{S}_t^{n+1} \subset \mathbb{R}_t^{n+2}$ de índice $t \geq 0$ si $c = 1$, o el espacio pseudo-hiperbólico $\mathbb{H}_t^{n+1} \subset \mathbb{R}_{t+1}^{n+2}$ de índice $t \geq 0$ si $c = -1$. Cuando $t = 0$, $\mathbb{M}_0^{n+1}(c)$ representa la esfera $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ o el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$. Cuando $t = 1$, $\mathbb{M}_1^{n+1}(c)$ representa el espacio de De-Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$ o el espacio Anti-De-Sitter $\mathbb{H}_1^{n+1} \subset \mathbb{R}_2^{n+2}$.

En [6], y como una continuación natural del estudio iniciado en [5], Alías y Kashani consideran el estudio de hipersuperficies M^n inmersas o bien en la esfera $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ o bien en el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$ cuyo vector posición ψ satisface la condición $L_k\psi = A\psi + b$, para alguna matriz constante $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ y algún vector constante $b \in \mathbb{R}_q^{n+2}$, $q = 0, 1$. Obtienen resultados de clasificación en dos casos: cuando A es una matriz auto-adjunta y $b = 0$, y cuando H_k es constante y $b \neq 0$. Los resultados obtenidos se enuncian a continuación.

Teorema 10 (Alías-Kashani, [6])**.** *Sea $\psi : M^n \to \mathbb{M}_0^{n+1}(c) \subset \mathbb{R}_q^{n+2}$ una hipersuperficie orientable inmersa en el espacio forma $\mathbb{M}_0^{n+1}(c)$. Entonces $L_k\psi = A\psi$, para un $k = 0, 1, \ldots, n-1$ fijo y alguna matriz constante auto-adjunta $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$, si y sólo si, M^n es una de las siguientes hipersuperficies de $\mathbb{M}_0^{n+1}(c)$:*

- *una hipersuperficie k-minimal con H_k constante.*
- *un trozo abierto de un producto estándar riemanniano $\mathbb{S}^n(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, $0 < r < 1$.*
- *un trozo abierto de un producto estándar riemanniano $\mathbb{H}^n(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$, $r > 0$.*

Teorema 11 (Alías-Kashani, [6])**.** *Sea $\psi : M^n \to \mathbb{M}_0^{n+1}(c) \subset \mathbb{R}_q^{n+2}$ una hipersuperficie orientable inmersa en el espacio forma $\mathbb{M}_0^{n+1}(c)$. Supongamos que H_k es constante. Entonces $L_k\psi = A\psi + b$ para un $k = 0, 1, \ldots, n-1$ fijo, alguna matriz constante auto-adjunta $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ y algún vector constante no cero $b \in \mathbb{R}_q^{n+2}$, si y sólo si, M^n es una de las siguientes hipersuperficies de $\mathbb{M}_0^{n+1}(c)$:*

- *un trozo abierto de una n-esfera $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, $0 < r < 1$.*
- *un trozo abierto de una hipersuperficie totalmente umbilical en $\mathbb{H}^{n+1}$: $\mathbb{H}^n(-r)$, $r > 1$; $\mathbb{S}^n(r)$, $r > 0$; $\mathbb{R}^n$.*

Ahora bien, cuando el espacio ambiente es un espacio forma lorentziano es decir, el espacio de De-Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ o el espacio Anti-De-Sitter $\mathbb{H}_1^{n+1}$, el operador forma de la hipersuperfice no necesariamente es diagonalizable. En este caso, sabemos de la expresión (1) que el operador forma S puede ser expresado, en una referencia apropiada, en uno de cuatro posibles tipos.

Los dos siguientes enunciados extienden a los espacios forma lorentzianos, $\mathbb{S}_1^{n+1}$ y $\mathbb{H}_1^{n+1}$, los resultados obtenidos en [6] por Alías y Kashani para hipersuperficies inmersas o bien en la esfera $\mathbb{S}^n$ o bien en el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n$.

Teorema 12 (Lucas-Ramírez, [14]). *Sea $\psi : M_s^n \to \mathbb{M}_1^{n+1}(c) \subset \mathbb{R}_q^{n+2}$ una hipersuperficie orientable inmersa en el espacio forma $\mathbb{M}_1^{n+1}(c)$. Entonces $L_k\psi = A\psi$, para un $k = 0, 1, \ldots, n-1$ fijo y alguna matriz constante auto-adjunta $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ si, y sólo si, M_s^n es una de las siguientes hipersuperficies de $\mathbb{M}_1^{n+1}(c)$:*

- *una hipersuperficie k-minimal con H_k constante.*
- *un trozo abierto de un producto estándar pseudo-riemanniano en $\mathbb{S}_1^{n+1}$: $\mathbb{S}_1^m(r) \times \mathbb{S}^{n-m}(\sqrt{1-r^2})$, $\mathbb{H}^m(-r) \times \mathbb{S}^{n-m}(\sqrt{1+r^2})$, $\mathbb{S}^m(r) \times \mathbb{H}^{n-m}(-\sqrt{r^2-1})$.*
- *un trozo abierto de un producto estándar pseudo-riemanniano en $\mathbb{H}_1^{n+1}$: $\mathbb{H}_1^m(-r) \times \mathbb{S}^{n-m}(\sqrt{r^2-1})$, $\mathbb{S}_1^m(r) \times \mathbb{H}^{n-m}(-\sqrt{1+r^2})$, $\mathbb{H}^m(-r) \times \mathbb{H}^{n-m}(-\sqrt{1-r^2})$.*
- *un trozo abierto de una hipersuperficie cuadrática $\{x \in \mathbb{M}_1^{n+1}(c) : \langle Rx, x\rangle = d\}$, donde R es una matriz constante auto-adjunta cuyo polinomio mínimo es t^2+at+b, $a^2 - 4b \leq 0$.*

Teorema 13 (Lucas-Ramírez, [14]). *Sea $\psi : M_s^n \to \mathbb{M}_1^{n+1}(c) \subset \mathbb{R}_q^{n+2}$ una hipersuperficie inmersa en el espacio forma $\mathbb{M}_1^{n+1}(c)$. Supongamos que H_k es constante. Entonces $L_k\psi = A\psi + b$, para un $k = 0, 1, \ldots, n-1$ fijo, alguna matriz constante auto-adjunta $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ y algún vector constante no cero $b \in \mathbb{R}_q^{n+2}$ si, y sólo si, M_s^n es una de las siguientes hipersuperficies de $\mathbb{M}_1^{n+1}(c)$:*

- *un trozo abierto de una hipersuperficie totalmente umbilical en $\mathbb{S}_1^{n+1}$: $\mathbb{S}^n(r)$, $r > 1$; $\mathbb{H}^n(-r)$, $r > 0$; $\mathbb{S}_1^n(r)$, $0 < r < 1$; $\mathbb{R}^n$.*
- *un trozo abierto de una hipersuperficie totalmente umbilical en $\mathbb{H}_1^{n+1}$: $\mathbb{H}_1^n(-r)$, $r > 1$; $\mathbb{H}^n(-r)$, $0 < r < 1$; $\mathbb{S}_1^n(r)$, $r > 0$; $\mathbb{R}_1^n$.*

Llegados a este punto, nos planteamos como objetivo el estudio de la condición $L_k\psi = A\psi + b$ para hipersuperficies inmersas en espacios forma pseudo-riemanianos de índice $t \geq 0$ de curvatura constante no nula. Es decir, el espacio pseudo-esférico $\mathbb{S}_t^{n+1} \subset \mathbb{R}_t^{n+2}$ para $c = 1$ y el espacio pseudo-hiperbólico $\mathbb{H}_t^{n+1} \subset \mathbb{R}_{t+1}^{n+2}$ para $c = -1$. Surge así un ultimo artículo con un enfoque completamente diferente a los artículos antes citados. Primero, no se asume que la matriz A es auto-adjunta, solo se asume que la k-ésima curvatura media de la hipersuperficie es constante. Segundo, la técnicas desarrolladas en [5],[6],[16] y [17] no son aplicables en el caso general, así que se necesita actuar de una manera distinta. La nueva y más general demostración está basada en la complexificación del operador forma de la hipersuperficie. En este último artículo [15] encontramos los siguientes teoremas de clasificación.

Teorema 14 (Lucas-Ramírez, [15])**.** *Sea $\psi : M_s^n \to \mathbb{M}_t^{n+1}(c) \subset \mathbb{R}_q^{n+2}$ una hipersuperficie orientable inmersa en el espacio forma $\mathbb{M}_t^{n+1}(c)$. Supongamos que H_k es constante. Entonces $L_k\psi = A\psi + b$ para un $k = 0, 1, \ldots, n-1$ fijo, alguna matriz constante $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ y algún vector constante $b \in \mathbb{R}_q^{n+2}$ si, y sólo si, es una de las siguientes hipersuperficies de $\mathbb{M}_t^{n+1}(c)$:*

- *una hipersuperficie k-minimal con H_k constante.*
- *un trozo abierto de una hipersuperficie totalmente umbilical en $\mathbb{S}_t^{n+1}$: $\mathbb{S}_{t-1}^n(r)$, $r > 1$; $\mathbb{S}_t^n(r)$, $0 < r < 1$; $\mathbb{H}_{t-1}^n(-r)$, $r > 0$; $\mathbb{R}_{t-1}^n$.*
- *un trozo abierto de una hipersuperficie totalmente umbilical en $\mathbb{H}_t^{n+1}$: $\mathbb{H}_t^n(-r)$, $r > 1$; $\mathbb{H}_{t-1}^n(-r)$, $0 < r < 1$; $\mathbb{S}_t^n(r)$, $r > 0$; $\mathbb{R}_t^n$.*
- *un trozo abierto de un producto estándar pseudo-riemanniano en $\mathbb{S}_t^{n+1}$: $\mathbb{S}_u^m(r) \times \mathbb{S}_v^{n-m}(\sqrt{1-r^2})$, $\mathbb{H}_{u-1}^m(-r) \times \mathbb{S}_v^{n-m}(\sqrt{1+r^2})$, $\mathbb{S}_u^m(r) \times \mathbb{H}_{v-1}^{n-m}(-\sqrt{r^2-1})$.*
- *un trozo abierto de un producto estándar pseudo-riemanniano en $\mathbb{H}_t^{n+1}$: $\mathbb{H}_u^m(-r) \times \mathbb{S}_v^{n-m}(\sqrt{r^2-1})$, $\mathbb{S}_u^m(r) \times \mathbb{H}_v^{n-m}(-\sqrt{1+r^2})$, $\mathbb{H}_u^m(-r) \times \mathbb{H}_{v-1}^{n-m}(-\sqrt{1-r^2})$.*
- *un trozo abierto de una hipersuperficie cuadrática $\{x \in \mathbb{M}_t^{n+1}(c) : \langle Rx, x\rangle = d\}$, donde R es una matriz constante auto-adjunta cuyo polinomio mínimo es t^2+at+b, $a^2 - 4b \leq 0$.*

Cuando $b = 0$, la condición de que A sea auto-adjunta implica que H_k debe ser constante, y por tanto obtenemos la siguiente consecuencia.

Teorema 15 (Lucas-Ramírez, [15])**.** *Sea $\psi : M_s^n \to \mathbb{M}_t^{n+1}(c) \subset \mathbb{R}_q^{n+2}$ una hipersuperficie orientable inmersa en el espacio forma $\mathbb{M}_t^{n+1}(c)$. Entonces $L_k\psi = A\psi$, para un $k = 0, 1, \ldots, n-1$ fijo y alguna matriz constante auto-adjunta $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ si, y sólo si, M_s^n es una de las siguientes hipersuperficies de $\mathbb{M}_t^{n+1}(c)$:*

- *una hipersuperficie k-minimal con H_k constante;*
- *un trozo abierto de un producto estándar pseudo-riemanniano en $\mathbb{S}_t^{n+1}$: $\mathbb{S}_u^m(r) \times \mathbb{S}_v^{n-m}(\sqrt{1-r^2})$, $\mathbb{H}_{u-1}^m(-r) \times \mathbb{S}_v^{n-m}(\sqrt{1+r^2})$, $\mathbb{S}_u^m(r) \times \mathbb{H}_{v-1}^{n-m}(-\sqrt{r^2-1})$.*
- *un trozo abierto de un producto estándar pseudo-riemanniano en $\mathbb{H}_t^{n+1}$: $\mathbb{H}_u^m(-r) \times \mathbb{S}_v^{n-m}(\sqrt{r^2-1})$, $\mathbb{S}_u^m(r) \times \mathbb{H}_v^{n-m}(-\sqrt{1+r^2})$, $\mathbb{H}_u^m(-r) \times \mathbb{H}_{v-1}^{n-m}(-\sqrt{1-r^2})$.*
- *un trozo abierto de una hipersuperficie cuadrática $\{x \in \mathbb{M}_t^{n+1}(c) : \langle Rx, x\rangle = d\}$, donde R es una matriz constante auto-adjunta cuyo polinomio mínimo es t^2+at+b, $a^2 - 4b \leq 0$.*

Bibliografía

[1] L.J. Alías, A. Ferrández y P. Lucas. Surfaces in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying $\Delta x = Ax + B$, *Pacific J. Math.* **156** (2) (1992), 201–208.

[2] L.J. Alías, A. Ferrández y P. Lucas. Submanifolds in pseudo-Euclidean spaces satisfying the condition $\Delta x = Ax + B$, *Geom. Dedicata* **42** (1992), 345–354.

[3] L.J. Alías, A. Ferrández y P. Lucas. Hypersurfaces in space forms satisfying the condition $\Delta x = Ax + B$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 1793–1801.

[4] L.J. Alías y J.M Malacarne. On the first eigenvalue of the linearized operator of the higher order mean curvatures for closed hypersurfaces in space forms, *Illinois J. Math* **48** (2004), 219–240.

[5] L.J. Alías y N. Gürbüz. An extension of Takahashi theorem for the linearized operators of the higher order mean curvatures, *Geom. Dedicata* **121** (2006), 113–127.

[6] L.J. Alías y S.M.B. Kashani. Hypersurfaces in space forms satisfying the condition $L_k\psi = A\psi + b$, *Taiwanese Journal of Mathematics* **14** (2010), 1957–1978.

[7] B.-Y. Chen y M. Petrovic. On spectral decomposition of immersions of finite type, *Bull. Austral. Math. Soc.* **44** (1991), 117–129.

[8] S.Y. Cheng y S.T. Yau. Hypersurfaces with constant scalar curvature, *Math. Ann.* **225** (1977), 195–204.

[9] F. Dillen, J. Pas y L. Verstraelen. On surfaces of finite type in Euclidean 3-space, *Kodai Math. J.* **13** (1990), 10–21.

[10] O.J. Garay. An extension of Takahashi's theorem, *Geom. Dedicata* **34** (1990), 105–112.

[11] O.J. Garay. On a certain class of finite type surfaces of revolution. *Kodai Math. J.* **11** (1988), 25–31.

[12] T. Hasanis y T. Vlachos. Coordinate finite-type submanifolds. *Geom. Dedicata* **37** (1991), 155–165.

[13] T. Hasanis y T. Vlachos. Hypersurfaces of E^{n+1} satisfying $\Delta x = Ax + B$, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **53** (1992), 377–384.

[14] P. Lucas y H.F. Ramírez-Ospina. Hypersurfaces in non-flat Lorentzian space forms satisfying $L_k\psi = A\psi + b$, *Taiwanese J. Math.* **16** (2012), 1173–1203.

[15] P. Lucas y H.F. Ramírez-Ospina. Hypersurfaces in non-flat pseudo-Euclidean space form satisfying a linear condition in the linearized operator of a higher order mean curvatures. *Taiwanese J. Math.* **17** (2013), 15–45.

[16] P. Lucas y H.F. Ramírez-Ospina. Hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski space satisfying $L_k\psi = A\psi + b$, *Geom. Dedicata* **153** (2011), 151–175.

[17] P. Lucas y H.F. Ramírez-Ospina. Hypersurfaces in pseudo-Euclidean space satisfying a linear condition on the linearized operator of a higher order mean curvatures. *Diff. Geom. and its Appl.* **13** (2013), 175–189.

[18] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, Academic Press, 1983, New York London.

[19] R. Reilly. Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms, *J. Diff. Geom.* **8** (1973), 465–477.

[20] T. Takahashi. Minimal immersions of Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan* **18** (1966), 380–385.

Hipersuperficies en los espacios forma pseudo-riemannianos satisfaciendo $L_k\psi = A\psi + b$

La presente Tesis está diseñada como compendio de publicaciones donde se estudian y se clasifican las hipersuperficies inmersas en los espacios forma pseudo-riemannianos de curvatura constante $c = 0, 1, -1$ satisfaciendo la condición $L_k\psi = A\psi + b$ para alguna matriz constante $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ y algún vector constante $b \in \mathbb{R}_q^{n+2}$, y donde L_k es el operador linealizado de la curvatura media de orden $k + 1$.

La Tesis está avalada por los siguientes cuatro artículos:

1. P. Lucas y H.F. Ramírez-Ospina.
   Hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski space satisfying $L_k\psi = A\psi + b$.
   Geom. Dedicata **153** (2011), 151–175.

2. P. Lucas y H.F. Ramírez-Ospina.
   Hypersurfaces in pseudo-Euclidean space satisfying a linear condition on the linearized operator of a higher order mean curvatures.
   Diff. Geom. and its Appl. **13** (2013), 175–189.

3. P. Lucas y H.F. Ramírez-Ospina.
   Hypersurfaces in non-flat Lorentzian space forms satisfying $L_k\psi = A\psi + b$.
   Taiwanese J. Math. **16** (2012), 1173–1203.

4. P. Lucas y H.F. Ramírez-Ospina.
   Hypersurfaces in non-flat pseudo-Euclidean space form satisfying a linear condition in the linearized operator of a higher order mean curvatures.
   Taiwanese J. Math. **17** (2013), 15–45.

Hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski space satisfying $L_k\psi = A\psi + b$

Pascual Lucas y Héctor Fabian Ramirez Ospina

Publicado en *Geom. Dedicata* **153** (2011), 151–175.
DOI: 10.1007/s10711-010-9562-z

Resumen

Estudiamos las hipersuperficies en el espacio de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ cuyo vector posición ψ satisface la condición $L_k\psi = A\psi + b$, donde L_k es el operador linealizado de la $(k+1)$-ésima curvatura media de la hipersuperficie para un $k = 0, \ldots, n-1$ fijo, $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ es una matriz constante y $b \in \mathbb{L}^{n+1}$ es un vector constante. Para cada k, probamos que las únicas hipersuperficies satisfaciendo tal condición son hipersuperficies con la $(k+1)$-ésima curvatura media cero, trozos abiertos de hipersuperficies totalmente umbilicales $\mathbb{S}^n_1(r)$ o $\mathbb{H}^n(-r)$, y trozos abiertos de cilindros generalizados $\mathbb{S}^m_1(r)\times\mathbb{R}^{n-m}$, $\mathbb{H}^m(-r)\times\mathbb{R}^{n-m}$, con $k+1 \leq m \leq n-1$, o $\mathbb{L}^m\times\mathbb{S}^{n-m}(r)$, con $k+1 \leq n-m \leq n-1$. Esto extiende completamente al espacio de Lorentz-Minkowski una clasificación previa para hipersuperficies en $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por Alías y Gürbüz [Geom. Dedicata 121 (2006), 113–127].

Hypersurfaces in pseudo-Euclidean space satisfying a linear condition on the linearized operator of a higher order mean curvatures.

Pascual Lucas y Héctor Fabian Ramirez Ospina

Publicado en *Diff. Geom. and its Appl.* **13** (2013), 175–189.
DOI: 10.1016/j.difgeo.2013.01.002

Resumen

Estudiamos las hipersurperficies M_s^n inmersas en espacios pseudo-euclidianos $\mathbb{R}_t^{n+1}$ cuyo vector posición ψ satisface la condición $L_k\psi = A\psi + b$, donde L_k es el operador linealizado de la $(k+1)$-ésima curvatura media de la hipersuperficie para un $k = 0, \ldots, n-1$ fijo, $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ es una matriz constante y $b \in \mathbb{R}_t^{n+1}$ es un vector constante. Para cada k, probamos que las únicas hipersuperficies satisfaciendo tal condición son hipersuperficies con la $(k+1)$-ésima curvatura media cero, trozos abiertos de hipersuperficies totalmente umbilicales $\mathbb{S}_t^n(r)$ o $\mathbb{H}_{t-1}^n(-r)$ $(r > 0)$, y trozos abiertos de cilindros generalizados $\mathbb{R}_u^{n-m} \times \mathbb{S}_{t-u}^m(r)$ o $\mathbb{R}_u^{n-m} \times \mathbb{H}_{t-u-1}^m(-r)$ $(r > 0)$, con $k+1 \le m \le n-1$.

Hypersurfaces in non-flat Lorentzian space forms satisfying $L_k\psi = A\psi + b$

Pascual Lucas y Héctor Fabian Ramirez Ospina

Publicado en *Taiwanese J. Math.* **16** (2012), 1173–1203.
WWW: http://journal.taiwanmathsoc.org.tw/index.php/TJM/article/view/2013

Resumen

Estudiamos las hipersuperficies o bien en el espacio de De-Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$ o en el espacio Anti-De-Sitter $\mathbb{H}_1^{n+1} \subset \mathbb{R}_2^{n+2}$ cuyo vector posición ψ satisface la condición $L_k\psi = A\psi + b$, donde L_k es el operador linealizado de la $(k+1)$-ésima curvatura media de la hipersuperficie para un $k = 0, \dots, n-1$ fijo, A es una matriz constante $(n+2) \times (n+2)$ y b es un vector constante en el correspondiente espacio pseudo-euclideano. Para cada k, probamos que cuando A es auto-adjunta y $b = 0$, las únicas hipersuperficies satisfaciendo tal condición son hipersuperficies con la $(k+1)$-ésima curvatura media cero y con la k-ésima curvatura media constante, trozos abiertos de productos estándar pseudo-riemannianos en $\mathbb{S}_1^{n+1}$ ($\mathbb{S}_1^m(r) \times \mathbb{S}^{n-m}(\sqrt{1-r^2})$, $\mathbb{H}^m(-r) \times \mathbb{S}^{n-m}(\sqrt{1+r^2})$, $\mathbb{S}_1^m(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r)$, $\mathbb{H}^m(-\sqrt{r^2-1}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r)$), trozos abiertos de productos estándar pseudo-riemannianos en $\mathbb{H}_1^{n+1}$ ($\mathbb{H}_1^m(-r) \times \mathbb{S}^{n-m}(\sqrt{r^2-1})$, $\mathbb{H}^m(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}_1^{n-m}(r)$, $\mathbb{S}_1^m(\sqrt{r^2-1}) \times \mathbb{H}^{n-m}(-r)$, $\mathbb{H}^m(-\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^{n-m}(-r)$) y trozos abiertos de una hipersuperficie cuadrática $\{x \in \mathbb{M}_c^{n+1} \mid \langle Rx, x\rangle = d\}$, donde R es una matriz auto-adjunta cuyo polinomio mínimo es $t^2 + at + b$, $a^2 - 4b \leq 0$, y $\mathbb{M}_c^{n+1}$ representa $\mathbb{S}_1^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$ o $\mathbb{H}_1^{n+1} \subset \mathbb{R}_2^{n+2}$. Cuando H_k es constante y b es un vector constante no nulo, demostramos que la hipersuperfice es totalmente umbilical, y entonces también obtenemos un resultado de clasificación (Teorema 2).

Hypersurfaces in non-flat pseudo-Riemannian space forms satisfying a linear condition in the linearized operator of a higher order mean curvature

Pascual Lucas y Héctor Fabian Ramirez Ospina

Publicado en *Taiwanese J. Math.* **17** (2013), 15–45.
DOI: 10.11650/tjm.17.2013.1738

Resumen

Estudiamos las hipersuperficies o bien en el espacio De-Sitter pseudo-riemanniano $\mathbb{S}^{n+1}_t \subset \mathbb{R}^{n+2}_t$ o en el espacio Anti-De-Sitter pseudo-riemanniano $\mathbb{H}^{n+1}_t \subset \mathbb{R}^{n+2}_{t+1}$ cuyo vector posición ψ satisface la condición $L_k\psi = A\psi + b$, donde L_k es el operador linealizado de la $(k+1)$-ésima curvatura media de la hipersuperficie para un $k = 0, \ldots, n-1$ fijo, A es una matriz constante $(n+2) \times (n+2)$ y b es un vector constante en el correspondiente espacio pseudo-euclideano. Para cada k, probamos que cuando H_k es constante, las únicas hipersuperficies satisfaciendo tal condición son hipersuperficies con la $(k+1)$-ésima curvatura media cero y con la k-ésima curvatura media constante, trozos abiertos de una hipersuperficie totalmente umbilical en $\mathbb{S}^{n+1}_t$ ($\mathbb{S}^n_{t-1}(r)$, $r > 1$; $\mathbb{S}^n_t(r)$, $0 < r < 1$; $\mathbb{H}^n_{t-1}(-r)$, $r > 0$; $\mathbb{R}^n_{t-1}$), trozos abiertos de una hipersuperficie totalmente umbilical en $\mathbb{H}^{n+1}_t$ ($\mathbb{H}^n_t(-r)$, $r > 1$; $\mathbb{H}^n_{t-1}(-r)$, $0 < r < 1$; $\mathbb{S}^n_t(r)$, $r > 0$; $\mathbb{R}^n_t$), trozos abiertos de un producto estándar pseudo-riemanniano en $\mathbb{S}^{n+1}_t$ ($\mathbb{S}^m_u(r) \times \mathbb{S}^{n-m}_v(\sqrt{1-r^2})$, $\mathbb{H}^m_{u-1}(-r) \times \mathbb{S}^{n-m}_v(\sqrt{1+r^2})$, $\mathbb{S}^m_u(r) \times \mathbb{H}^{n-m}_{v-1}(-\sqrt{r^2-1})$), trozos abiertos de un producto estándar pseudo-riemanniano en $\mathbb{H}^{n+1}_t$ ($\mathbb{H}^m_u(-r) \times \mathbb{S}^{n-m}_v(\sqrt{r^2-1})$, $\mathbb{S}^m_u(r) \times \mathbb{H}^{n-m}_v(-\sqrt{1+r^2})$, $\mathbb{H}^m_u(-r) \times \mathbb{H}^{n-m}_{v-1}(-\sqrt{1-r^2})$) y trozos abiertos de una hipersuperficie cuadrática $\{x \in \mathbb{M}^{n+1}_t(c) \mid \langle Rx, x\rangle = d\}$, donde R es una matriz auto-adjunta cuyo polinomio mínimo es $\mu_R(z) = z^2 + az + b$, $a^2 - 4b \leq 0$, y $\mathbb{M}^{n+1}_t(c)$ represnta a $\mathbb{S}^{n+1}_t \subset \mathbb{R}^{n+2}_t$ o $\mathbb{H}^{n+1}_t \subset \mathbb{R}^{n+2}_{t+1}$.