



UNIVERSIDAD DE MURCIA

Grado en Matemáticas

TRABAJO DE FIN DE GRADO

*EL TEOREMA DE REPRESENTACIÓN CONFORME DE
RIEMANN*

Juan José Marín García

Curso 2012-2013

EL TEOREMA DE REPRESENTACIÓN CONFORME DE RIEMANN

Juan José Marín García

dirigido por

Bernardo Cascales Salinas y Gustavo Garrigós Anierte

Contenidos

Introduction	v
Introducción	XI
1. Preliminares	1
1.1. Funciones armónicas	1
1.2. El Problema de Dirichlet en el disco	7
1.3. El Teorema de Montel	13
1.4. El Teorema de Hurwitz	15
2. El Teorema de representación de Riemann	17
2.1. El Teorema de representación de Riemann	18
2.2. Extensión a la frontera: El teorema de Carathéodory	22
2.3. Equivalencia con el problema de Dirichlet	30
2.3.1. Del Teorema de Riemann al Problema de Dirichlet	31
2.3.2. Del Problema de Dirichlet al Teorema de Riemann	32
2.4. Fórmulas de Schwarz-Christoffel	36
3. Aplicaciones y aspectos numéricos	45
3.1. Caracterización de abiertos simplemente conexos	46
3.2. Cálculo de flujos	50
3.3. Lema tipo Urysohn complejo y aplicaciones	52
3.4. Transformaciones de Schwarz-Christoffel con MATLAB	58
Apéndices	61

A. Preliminares básicos	63
A.1. Notación y resultados básicos de análisis complejo	64
A.2. Teorema de la aplicación abierta	70
A.3. Transformaciones conformes	72
A.4. Principios del máximo	74
A.5. El Lema de Schwarz	78
A.6. El Principio de reflexión de Schwarz	80
A.7. El Teorema de Ascoli	83
B. Complementos	89
B.1. Historia del Teorema de Riemann	89
Bibliografía	93
Índice terminológico	95

Introduction

THE main purpose of this work is to study different topics related to the Riemann Mapping Theorem and its applications. We have focused in four main results: the Riemann Mapping Theorem, the Carathéodory extension Theorem, the Dirichlet Problem in simply connected domains, and the Schwarz-Christoffel Formulas.

In order to write this dissertation, it has been necessary to develop some preliminaries in complex analysis which are no longer part of the current degree's curriculum. We have collected these contents in Chapter 1 and part of the Appendix A, which also contains a brief survey of the third year complex analysis course. Chapter 2 contains detailed proofs of the four main results and Chapter 3 is devoted to various applications. These two chapters are noticeably more difficult and to the best of our knowledge are only considered as material for specialized master or Ph.D. courses. We stress that we include some illustrations with a computer and also that in section 3.3 we present results that follow from those presented in section 2.2 and that are actually very recent results with current applications to research in functional analysis.

Our notation and terminology is standard and can be found in [2, 9, 20]. In spite of this, notation and some basic definitions and results are presented in section A.1.

COMPLEX numbers arise from the need to find an algebraically closed extension of the real numbers. However, the definition of holomorphic function is more demanding than the definition of real differentiation so it provides complex analysis with special interest, not only because of the ability of its results to present themselves self-contained but also due to its surprising theorems.

Furthermore, everything seems to work better in the complex plane than anywhere else. Good examples of this are the equivalence between holomorphic and analytic functions or the well-known Weierstrass Theorem, which establishes that the uniform limit

on compact sets of holomorphic functions is holomorphic. Another outstanding theorem in complex analysis is the one in which this dissertation is focused. It is formulated as follows.

Theorem (Riemann Mapping Theorem, 1912). *Let $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ be a simply connected open set. Then there exists a conformal isomorphism $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$. Moreover, if $a \in \Omega$ is fixed, there is a unique such f with $f(a) = 0$ and $f'(a) > 0$.*

Despite the fact that this celebrated theorem was first stated by Bernhard Riemann in 1851, it was not until 1912 when Constantin Carathéodory published its first proof valid in this generality. The most popular proof, which is the one we present here, is due to Fejér and Riesz and was published in 1922. This proof requires a good quantity of preliminaries and previous concepts. Because of this fact, this dissertation is divided in three chapters and two appendices.

THE first appendix, **Appendix A**, attempts to make the text self-contained for readers with the knowledge of a basic course in complex analysis. These results can be found in [5, 9, 20, 23]. First, we will briefly summarize previous [elementary concepts](#) and introduce the notation that we will use later. Right after this, we present the [Open Mapping Theorem](#). This important result guarantees that every holomorphic function is open. This is followed by a section on [conformal mappings](#), in which we will analyse the definition and the first examples of these functions, that play a leading role in the Riemann Mapping Theorem. Next, we study [maximum principles](#), which will lead us to prove the [Schwarz Lemma](#). This is also an important ingredient in the Riemann mapping Theorem.

Theorem (Schwarz Lemma, 1870). *Let $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ such that $f(0) = 0$ and $|f(z)| \leq 1$ for every $z \in \mathbb{D}$. Then, $|f(z)| \leq |z|$ for every $z \in \mathbb{D}$ and besides, $|f'(0)| \leq 1$. If any of these inequalities is in fact an equality, that is, if $|f(a)| = |a|$ for certain $a \in \mathbb{D}$ or if $|f'(0)| = 1$, then $f(z)$ is a rotation, that is, $f(z) = e^{i\alpha}z$ with $\alpha \in \mathbb{R}$.*

After that, we will study the [Schwarz reflexion principle](#) which can be studied in [20] and allows us to extend the definition domain of a holomorphic function under certain conditions. We will use this principle to prove the Schwarz-Christoffel formulas.

We finish the appendix with [Ascoli's Theorem](#), a topological result of real analysis which is used in the proof of Montel's theorem and characterizes equicontinuous function families.

AN experienced reader can directly go to **Chapter 1** without having the need to read Appendix A. Chapter 1 contains some more preliminaries and concepts which are necessary throughout the dissertation and are not included in the third year complex analysis course, so we present them here with proofs. Specifically, **harmonic functions** are studied in order to understand the **Dirichlet Problem**. We will present some results about these two matters because in the next chapter we will prove the equivalence between the Riemann Mapping Theorem and the Dirichlet Problem.

In the next section we study normal families, that is, families of holomorphic functions which are relatively compact in the topology of $\mathcal{H}(\Omega)$. The main result is Montel's Theorem which asserts that a family is normal if and only if its functions are bounded uniformly in every compact set. This characterization is crucial to construct the Riemann map, and is one of the pieces missing in the original Riemann's argument.

Next, we will prove Hurwitz's Theorem, from which we obtain that the limit of a sequence of injective holomorphic functions is either constant or injective. This result will play a role in showing the injectivity of the Riemann map.

With the background provided by Appendix A and Chapter 1, the reader will be ready to understand the main results of this text, that are presented in the next two chapters.

THE goal of the first section of **Chapter 2** is to formulate and prove the Riemann Mapping Theorem. We will present a detailed proof following [5, 9, 20, 23].

The next section is devoted to **Carathéodory's Theorem**. This theorem states that it is possible to extend the conformal isomorphism provided by the Riemann Mapping Theorem to a homeomorphism from its closure whenever the boundary of the open set is a Jordan curve.

Theorem (Carathéodory's Theorem, 1913). *Let Ω be a Jordan domain and $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ a conformal isomorphism. Then, f can be extended to a homeomorphism between $\overline{\Omega}$ and $\overline{\mathbb{D}}$.*

To prove this theorem, we follow the strategy in [20] slightly simplified by [17] for bounded sets whose boundary points are all simple. Polygonal and bounded convex sets trivially have this property, but one can actually show that all Jordan domains satisfy it.

In the next section we establish the proof of the **equivalence between the Dirichlet Problem and the Riemann Mapping Theorem**. The fact that from a conformal isomorphism $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ one can solve the Dirichlet Problem in Ω is classical and appears in

most textbooks. The converse is less known, but it is actually the original argument in Riemann's 'proof': if one knows how to solve the Dirichlet Problem in Ω then one can explicitly construct a conformal bijection $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$. As an essential tool to prove these results we will use Green's functions.

After that, [Schwarz-Christoffel Formulas](#) will be proved. In general, it is not possible to find the conformal isomorphism whose existence is guaranteed by the Riemann mapping Theorem. However, it is possible to find it whenever it transforms the upper half-plane into a polygon, no matter if the polygon is degenerated. In this case, the conformal isomorphism is given by the Schwarz-Christoffel Formulas.

Theorem (Schwarz-Christoffel Formulas). *Let P be a polygon of vertices a_1, a_2, \dots, a_n and F be a conformal isomorphism which transforms the half-upper plane into P . Then there are constants $A, B \in \mathbb{C}$ and $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1} \in [0, 1]$ such that*

$$F(z) = A \int_0^z (\omega - A_1)^{-\beta_1} (\omega - A_2)^{-\beta_2} \dots (\omega - A_{n-1})^{-\beta_{n-1}} d\omega + B$$

where $F(A_k) = a_k$ for every $k = 1, 2, \dots, n-1$ and $F(\infty) = a_n$.

Since integrals involved in these formulas are usually elliptic, its resolution tends to be complicated. In spite of this, they provide formulas that can often be solved numerically.

IN [Chapter 3](#), we illustrate some applications of the Riemann Mapping Theorem and some numerical aspects. The first application concerns the [characterization of simply connected open sets](#). To do so, we will study the concept of homotopic paths and we will connect the results provided by Riemann Mapping Theorem with the ones we already knew about these open sets.

Theorem (Characterization of simply connected open sets). *Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be an open set. The following statements are equivalent.*

- i) Ω is simply connected.
- ii) Every closed path in Ω is Ω -homologous to zero.
- iii) $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ is connected.
- iv) For every $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ with $0 \notin f(\Omega)$ there is $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ such that $g^2 = f$.
- v) Ω is homeomorphic to \mathbb{D} .

In the second section of this chapter, we will use the Schwarz-Christoffel Formulas to explicitly calculate the [flow of a fluid](#). In order to do so, we will find the conformal isomorphism that transforms the half-upper plane into the flow domain and we will calculate the images of the horizontal lines $\text{Im}(z) = k$ with $k > 0$. In particular, we will analyse the case where the fluid moves in the first quadrant and the case in which it moves through a channel with a step in it.

Next we will study an [application to functional analysis](#). Caratheodory's Theorem will be used to prove a Urysohn type Lemma that provides peak functions in the disk algebra with range in a Stolz region. This has noticeable recent applications to the approximation of operators by norm-attaining operators as in [6] and to the study of geometric properties on disk algebras as in [8].

This chapter comes to an end by visualizing [Schwarz-Christoffel mappings through graphics](#) produced with MATLAB. In order to do this, we will draw the image of the upper-half plane grid to see how it is transformed into a polygon. It is possible to compose this mapping with a Möbius transformation in order to visualize another ones, for example, the one that transforms the disc into a polygon.

FINALLY, **Appendix B** contains a complementary section that can be of interest for the reader. It presents brief summary of the [history](#) of the theorem after which this dissertation is named and the mathematicians who contributed to its proof: Riemann, Schwarz, Carathéodory, Koebe, Féjer, Riesz, Ostrowski, etc.

Juan José Marín García
Murcia, June 2nd, 2013.

Introducción

EL objetivo principal de este trabajo de fin de grado es estudiar diferentes temas relacionados con el Teorema de representación conforme de Riemann. Nos centraremos principalmente en cuatro resultados: el Teorema de representación de Riemann, el Teorema de Carathéodory, el Problema de Dirichlet para dominios simplemente conexos y las Fórmulas de Schwarz-Christoffel.

Para el desarrollo de esta memoria ha sido necesario el estudio de la asignatura de licenciatura de análisis complejo desaparecida en el grado. Estos contenidos suponen el Capítulo 1 y parte del Anexo A, que contiene también un breve resumen del curso de análisis complejo del tercer curso. El Capítulo 2 contiene las pruebas detalladas de los cuatro resultados principales y el Capítulo 3 está dedicado a sus aplicaciones. Estos dos capítulos tienen una dificultad superior y sólo suelen considerarse como material para cursos especializados de máster o doctorado. Hacemos hincapié en que incluimos algunas ilustraciones computacionales y también en que la sección 3.3 presenta resultados que se siguen de los que presentamos en la sección 2.2 y que de hecho, son resultados muy recientes con numerosas aplicaciones a la investigación en análisis funcional.

Nuestra notación y terminología es la usual y puede encontrarse en [2, 9, 20]. A pesar de ello, la notación y las definiciones y resultados básicos se presentan en la sección A.1.

LOS números complejo nacen de la necesidad de encontrar una extensión algebraicamente cerrada de los números reales. Sin embargo, la definición de función holomorfa, más exigente que la de derivabilidad real, consigue proveer al análisis complejo de un especial interés, no sólo porque sus resultados pueden presentarse totalmente autocontenidos sino por lo sorprendente de algunos de sus teoremas.

A la postre, todo parece funcionar en el plano complejo mejor que en cualquier otro lugar. Buenos ejemplos de ello son la equivalencia de funciones holomorfas y analíticas o

el conocido Teorema de Weierstrass, que establece que el límite uniforme sobre compactos de funciones holomorfas es holomorfo. Otro importante teorema en análisis complejo es el que da su nombre a este trabajo y que puede formularse como sigue.

Teorema (de representación conforme de Riemann, 1912). *Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo. Existe entonces un isomorfismo conforme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$. Además, fijado un $a \in \Omega$, el isomorfismo conforme tal que $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$ es único.*

A pesar de que el célebre teorema fue enunciado por Bernhard Riemann en 1851 no fue hasta 1912 cuando Constantin Carathéodory publicó la primera prueba del teorema válida en esta generalidad. La demostración usual, que aquí se presenta, se debe a Fejér y Riesz y fue publicada en 1922. Dicha demostración requiere de una gran cantidad de preliminares y conocimientos previos. Por ello, esta memoria se divide en tres capítulos y dos anexos.

EL Anexo A se presenta como una oportunidad de que el trabajo quede autocontenido para alguien con los conocimientos propios de un curso de análisis complejo básico. Los resultados que aquí presentamos pueden encontrarse en [5, 9, 20, 23]. En primer lugar, se estudiarán en él un breve resumen de [conceptos previos elementales](#), que aprovecha para introducir la notación de la que haremos uso. A continuación se estudia el [Teorema de la aplicación abierta](#), un resultado de gran relevancia que nos garantiza que toda función holomorfa es abierta. Le sigue una sección sobre [transformaciones conformes](#). En ella daremos las primeras definiciones y ejemplos de las que serán las protagonistas del Teorema de representación de Riemann. Es necesario a continuación estudiar los [principios del máximo](#), que nos permitirán en la siguiente sección demostrar el [Lema de Schwarz](#). Este lema será uno de los ingredientes de la prueba del Teorema de Riemann.

Teorema (Lema de Schwarz, 1870). *Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Entonces, $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y además $|f'(0)| \leq 1$. Si en alguno de los casos se da la igualdad, es decir, si $|f(a)| = |a|$ para algún $a \in \mathbb{D}$ ó si $|f'(0)| = 1$, entonces $f(z)$ es un giro, es decir, $f(z) = e^{i\alpha}z$ para $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Estudiaremos a continuación el [principio de reflexión de Schwarz](#), que nos permitirá extender el dominio de definición de una función holomorfa bajo ciertas condiciones. Haremos uso de esta herramienta a la hora de demostrar las Fórmulas de Schwarz-Christoffel.

Se finalizará el apéndice estudiando el Teorema de Ascoli, un resultado topológico de análisis real necesario para la prueba del Teorema de Montel que caracteriza las familias de funciones equicontinuas.

EL lector más experimentado puede acceder directamente al **Capítulo 1**. Dicho capítulo contiene algunos preliminares y conceptos más que serán necesarios a lo largo del trabajo y que tampoco están incluidos en el curso de análisis complejo de tercero, con lo cual los probaremos aquí. En concreto, se estudian en primer lugar las **funciones armónicas** con el objetivo de entender el **Problema de Dirichlet**. Estos contenidos son necesarios pues probaremos en el siguiente capítulo la equivalencia entre el Teorema de Riemann y el Problema de Dirichlet.

A continuación estudiaremos las familias normales, es decir, las familias de funciones holomorfas que son relativamente compactas en la topología de $\mathcal{H}(\Omega)$. El resultado más importante es el Teorema de Montel, que afirma que una familia es normal si y solo si sus funciones están uniformemente acotadas sobre compactos. Esta caracterización es crucial para construir la biyección conforme del Teorema de Riemann y es una de las piezas que faltaban en el argumento original de Riemann.

En la siguiente sección probaremos el Teorema de Hurwitz, del que obtendremos que el límite de una sucesión de funciones holomorfas inyectivas es constante o inyectivo. Este resultado jugará un papel importante a la hora de demostrar la inyectividad de la biyección conforme de Riemann.

Una vez estudiado el Anexo A y el Capítulo 1, el lector estará en disposición de comprender los resultados principales del trabajo, que se presentan en los dos siguientes capítulos.

EL primero objetivo del **Capítulo 2** es enunciar y demostrar el Teorema de representación de Riemann. Presentaremos una prueba detallada siguiendo [5, 9, 20, 23].

La siguiente sección esta dedicada al Teorema de Carathéodory, en el que se extiende el isomorfismo conforme del Teorema de Riemann a un homeomorfismo en la clausura siempre que la frontera del abierto sea una curva de Jordan.

Teorema (Teorema de Carathéodory, 1913). *Sea Ω un dominio de Jordan y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ un isomorfismo conforme. Podemos extender entonces f a un homeomorfismo entre $\overline{\Omega}$ y $\overline{\mathbb{D}}$.*

Se probará siguiendo la estrategia de [20] para abiertos acotados cuyos puntos de frontera son todos simples. La prueba será simplificada haciendo uso de las ideas de [17]. Los conjuntos poligonales o convexos acotados cumplen trivialmente esta propiedad, pero seremos capaces de hecho de demostrar que cualquier dominio de Jordan la satisface.

En la siguiente sección se probará la [equivalencia del Problema de Dirichlet con el Teorema de Riemann](#). El hecho de que a partir de un isomorfismo conforme $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ se pueda resolver el problema de Dirichlet en Ω es un resultado clásico y aparece en la mayoría de libros de texto. El recíproco es menos conocido pero sin embargo es la idea de la ‘prueba’ original de Riemann: Si disponemos de la solución del Problema de Dirichlet en Ω entonces podemos construir explícitamente la biyección conforme $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$. Como herramienta indispensable haremos uso de las funciones de Green.

Cierran el segundo capítulo las [Fórmulas de Schwarz-Christoffel](#). No es posible en general encontrar explícitamente el isomorfismo conforme cuya existencia nos garantiza el Teorema de Riemann. Sin embargo, podemos encontrarlo siempre y cuando esta envíe el semiplano superior a un polígono, que puede ser degenerado. En este caso el isomorfismo conforme viene dado por las fórmulas de Schwarz-Christoffel.

Teorema (Fórmula de Schwarz-Christoffel). *Sea P un polígono de vértices a_1, a_2, \dots, a_n y F un isomorfismo conforme que transforma el semiplano superior en P . Existen entonces constantes $A, B \in \mathbb{C}$ y $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1} \in [0, 1]$ tales que*

$$F(z) = A \int_0^z (\omega - A_1)^{-\beta_1} (\omega - A_2)^{-\beta_2} \dots (\omega - A_{n-1})^{-\beta_{n-1}} d\omega + B$$

donde $F(A_k) = a_k$ para cada $k = 1, 2, \dots, n-1$ y $F(\infty) = a_n$.

A pesar de todo, las integrales que aparecen en estas fórmulas suelen ser elípticas y por tanto su resolución suele ser complicada. Aún así nos permiten sin embargo calcular el isomorfismo, al menos numéricamente.

EL **Capítulo 3** trata las principales aplicaciones del Teorema de Riemann así como algunos aspectos numéricos. La primera aplicación es clásica y presenta una [caracterización de abiertos simplemente conexos](#). Para ello relacionaremos los resultados que nos ofrece el Teorema de Riemann con los que ya sabíamos sobre este tipo de abiertos.

Teorema (Caracterización de abiertos simplemente conexos). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) Ω es simplemente conexo.
- ii) Cada camino cerrado en Ω es Ω -homólogo a cero.
- iii) $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.
- iv) Para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g^2 = f$.
- v) Ω es homeomorfo a \mathbb{D} .

En la segunda sección de este capítulo haremos uso de las fórmulas de Schwarz-Christoffel para calcular el [flujo de fluidos](#). Para ello encontraremos el isomorfismo conforme que transforma el semiplano superior en el dominio del fluido y calcularemos las imágenes de las rectas horizontales $\text{Im}(z) = k$ con $k > 0$. Estudiaremos en concreto el flujo de un fluido que recorre el primer cuadrante y el de un fluido que circula por un canal con un escalón.

A continuación, estudiaremos una [aplicación al análisis funcional](#), en la que haremos uso del Teorema de Carathéodory para probar un lema de tipo Urysohn que garantiza la existencia de funciones pico en el álgebra del disco con rango en una región de Stolz. Este hecho tiene importantes y recientes aplicaciones como la aproximación por operadores que alcanzan la norma como en [6] o el estudio de algunas propiedades geométricas del álgebra del disco como en [8].

Para finalizar el capítulo, visualizaremos mediante un programa en MATLAB las [transformaciones de Schwarz-Christoffel de manera gráfica](#). Para ello, dibujaremos la imagen de la cuadrícula del semiplano superior para ver como éste se transforma en el polígono. Es posible además componer estas aplicaciones con transformaciones de Möbius para visualizar isomorfismos que envían, por ejemplo, el disco a un polígono.

POR último, el **Anexo B** presenta una sección complementaria que puede ser de interés para el lector. Se estudia en ella brevemente la [historia](#) del teorema que da nombre a este trabajo y como distintos matemáticos contribuyeron a su prueba: Riemann, Schwarz, Carathéodory, Koebe, Féjer, Riesz, Ostrowski, etc.

Juan José Marín García
Murcia, 2 de Junio de 2013.

«CONTENIDOS»

- Funciones armónicas.
- El Problema de Dirichlet.
- El Teorema de Montel.
- El Teorema de Hurwitz.

Presentamos en este capítulo algunos preliminares para desarrollar en los siguientes el Teorema de representación de Riemann y sus consecuencias. Para la comprensión de este capítulo y los que le siguen es recomendable tener conocimientos básicos de análisis complejo. En cualquier caso, el Anexo A presenta todos los preliminares necesarios, con el objetivo de conseguir que el texto sea autocontenido.

En este capítulo se analizan en primer lugar las funciones armónicas para poder comprender después el Problema de Dirichlet y obtener su solución en el disco unidad mediante el núcleo de Poisson. Esto nos permitirá demostrar en capítulos posteriores la equivalencia de este teorema con el teorema de representación de Riemann.

A continuación se probarán los teoremas de Montel y Hurwitz, que se presentan como dos herramientas importantes en la prueba del Teorema de Riemann.

Las principales referencias para este capítulo son [5, 9, 23].

1.1. Funciones armónicas

Para formular y resolver el problema de Dirichlet es necesario realizar trabajo previo sobre funciones armónicas.

Definición 1.1.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en Ω . Se dice que u es armónica cuando

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

para todo $(x, y) \in \Omega$.

Observación 1.1.2. El conjunto de las funciones armónicas, que denotamos por $A(\Omega)$, tiene estructura de espacio vectorial.

Proposición 1.1.3. Si la función $f = u + iv$ es holomorfa en Ω entonces $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$ son funciones armónicas en Ω .

Demostración. Sabemos que $u \in C^\infty(\Omega)$, luego en particular, $u \in C^2(\Omega)$. Además, por ser holomorfa verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir, $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$. Derivando, $u_{xx} = v_{yx}$ y $u_{yy} = -v_{xy}$. Como $v \in C^2(\Omega)$, se tiene la igualdad $v_{xy} = v_{yx}$. Por tanto, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$. La demostración es análoga para v . \square

Observación 1.1.4. Observemos que la propiedad de ser armónica es local y por ende una función que es localmente la parte real de una función holomorfa, es armónica.

Introduciremos a continuación el concepto de armónica conjugada, que nos será de utilidad más tarde.

Definición 1.1.5. Sea $u \in A(\Omega)$. Si existe $v \in A(\Omega)$ tal que $f = u + iv$ es holomorfa, se dice que v es una función armónica conjugada de u en Ω .

Proposición 1.1.6. Dado un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $u \in A(\Omega)$, si v_1 y v_2 son dos funciones armónicas conjugadas de u , entonces $v_1 - v_2$ es constante.

Demostración. Por definición de armónica conjugada, $u + iv_1$ y $u + iv_2$ son ambas holomorfas y por tanto su diferencia también lo será. Pero $i(v_1 - v_2)(\Omega)$ es constante o abierto por el teorema de la aplicación abierta. No puede ser abierto pues está contenido en la recta $\{iy : y \in \mathbb{R}\}$, luego $v_1 - v_2$ es constante. \square

A continuación se presenta un ejemplo de función armónica que no tiene armónica conjugada.

Ejemplo 1.1.7. La función $\log|z|$ es armónica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pues es localmente la parte real de cualquier determinación holomorfa de $\log(z)$. Debemos observar que para que una función sea armónica es suficiente con que lo sea localmente. Veamos que $\log|z|$ no tiene armónica conjugada en Ω . En el abierto $\tilde{\Omega} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z \leq 0\}$, la identidad posee un logaritmo holomorfo, que fijamos como el principal, $\text{Log}(z) = \log|z| + i\text{Arg}(z)$. Si $\log|z|$ tuviera alguna armónica conjugada v en Ω , tendríamos que $\text{Arg}(z)$ y v son armónicas conjugadas de u en $\tilde{\Omega}$ y por tanto en este abierto su diferencia sería una constante, $v(z) = \text{Arg}(z) + k$. Sin embargo, esto es contradictorio pues v sería discontinua en los puntos de la recta donde z toma valores reales negativos, que está contenida en $\tilde{\Omega}$. Por tanto, $\log|z|$ no tiene armónica conjugada en Ω .

Es lógico buscar entonces alguna condición que nos garantice la existencia de armónicas conjugadas. Recordemos primero que un abierto Ω es simplemente conexo si $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es conexo, o equivalentemente si toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tiene una primitiva holomorfa en Ω (Ver Teorema A.1.10)

Proposición 1.1.8. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo. Entonces toda función armónica $u \in A(\Omega)$ tiene una función armónica conjugada en Ω .

Demostración. Sea $u \in A(\Omega)$. Entonces la función $f = u_x - iu_y$ es holomorfa en Ω : por un lado, es de clase $C^1(\Omega)$ pues u es de clase $C^2(\Omega)$ ya que es armónica y por otro lado, cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann pues $u_{xx} = -u_{yy} = (-u_y)_y$ por ser u armónica y $(u_x)_y = u_{xy} = u_{yx} = (u_y)_x$ por la igualdad de las derivadas cruzadas que sigue de que $u \in C^2(\Omega)$.

Ahora bien, del Teorema 3.1.7 se deduce la existencia de una función holomorfa $F = U + iV$ tal que $F' = f = u_x - iu_y$. Aplicando a F las ecuaciones de Cauchy-Riemann obtenemos que $U_x - iU_y = u_x - iu_y$, es decir, $(U - u)_x = 0$ y $(U - u)_y = 0$. Dicho de otro modo, $U = u + k$ en Ω , donde $k \in \mathbb{R}$ es una constante.

Definiendo finalmente $g = F - k$ se tiene que $\text{Re } g = u$ e $\text{Im } g = V$. Por tanto V es la armónica conjugada de u . \square

El recíproco de esta proposición es también cierto, pero necesitaremos algunos resultados antes de estar en condiciones de demostrarlo.

Proposición 1.1.9. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, u es armónica si y sólo si u es localmente la parte real de una función holomorfa.

Demostración. Sabemos que u es armónica si y sólo si lo es localmente, es decir, si lo es en $D(a, r)$ para cada $a \in \Omega$. Pero en cada disco, u tiene armónica conjugada ya que es un abierto simplemente conexo, por tanto, en dicho disco es la parte real de una función holomorfa. Recíprocamente, si en cada disco es la parte real de una función holomorfa, claramente es armónica. \square

Corolario 1.1.10. *Toda función armónica es de clase C^∞ .*

Demostración. Es inmediato pues son, localmente, partes reales de funciones holomorfas. \square

Proposición 1.1.11. *Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ abiertos, $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$, $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ y $u \in A(\Omega_2)$. Entonces, $u \circ f \in A(\Omega_1)$. Es decir, la composición de una función holomorfa con una función armónica es una función armónica.*

Demostración. Veremos que $u \circ f$ es armónica en $D(a, \delta)$ para cada $a \in \Omega$. Fijemos a y sea $b = f(a)$ y $r > 0$ tal que $D(b, r) \subset \Omega_2$. Como u es armónica, existe $g \in \mathcal{H}(D(b, r))$ tal que $\operatorname{Re} g(z) = u(z)$. Aplicando ahora la continuidad de f , existe $\delta > 0$ tal que $f(D(a, \delta)) \subset D(b, r)$. Concluimos entonces que $g \circ f|_{D(a, \delta)} \in \mathcal{H}(D(a, \delta))$ y además $\operatorname{Re}(g \circ f|_{D(a, \delta)}) = u \circ f|_{D(a, \delta)}$, con lo cual $u \circ f$ es armónica. \square

Podemos finalmente dar una nueva caracterización de los abiertos simplemente conexos.

Teorema 1.1.12. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Son equivalentes:*

- i) Ω es simplemente conexo.
- ii) Toda función armónica $u \in A(\Omega)$ tiene una función armónica conjugada en Ω .

Demostración. i) \Rightarrow ii) Se trata de la proposición 1.1.8.

ii) \Rightarrow i) Haremos uso de una de las caracterizaciones de los abiertos simplemente conexos, que estudiaremos en el Teorema 3.1.7 y nos garantiza que Ω es simplemente conexo si y solo si toda función holomorfa que no se anula tiene un logaritmo holomorfo. Sea pues, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $0 \notin f(\Omega)$. Entonces $u(z) = \log |f(z)|$ es armónica en Ω por ser composición de una función armónica con una holomorfa. Por hipótesis, tendrá entonces una armónica conjugada, es decir, existirá $v \in A(\Omega)$ tal que $u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces $\left| \frac{e^{u+iv(z)}}{f(z)} \right| = \frac{e^{u(z)}}{|f(z)|} = 1$ para todo $z \in \Omega$, es decir, $e^{u+iv} = \lambda f$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ una constante.

Concluimos que entonces que $e^{u+iv-\mu} = f$, donde $\mu \in \log(\lambda)$. Dicho de otro modo, $u + iv - \mu$ es un logaritmo holomorfo de f en Ω . \square

Proposición 1.1.13. *Las funciones armónicas tienen la propiedad de la media.*

Demostración. Sea $u \in A(\Omega)$ y $r > 0$ tal que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. Tomemos $R > 0$ tal que $\overline{D(a,r)} \subset D(a,R)$. Como $D(a,R)$ es simplemente conexo, u es la parte real de una función holomorfa en dicho disco, es decir, $u|_{D(a,R)} = \operatorname{Re} f$, donde $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Como $\operatorname{Re} f$ tiene la propiedad de la media, u también la tendrá. \square

Estudiaremos a continuación algunas propiedades más sobre las funciones armónicas, algunas de las cuales guardan cierta analogía con las propiedades de las funciones holomorfas. Podemos primeramente aplicar los principios del máximo para funciones subarmónicas ya demostradas a las funciones armónicas, que tienen la propiedad de la media y por tanto son subarmónicas (Ver definición A.4.2).

Proposición 1.1.14. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función subarmónica.*

- i) *Si u alcanza un máximo absoluto en Ω , entonces u es constante.*
- ii) *Si $\limsup_{z \rightarrow a} u(z) \leq c$ para cada $a \in \partial_{\infty} \Omega$, entonces o bien $u(z) < c$ para todo $z \in \Omega$ o bien $u(z) = c$ para todo $z \in \Omega$.*

Para demostrar estos principios para máximos locales en lugar de absolutos debemos probar los siguientes resultados.

Proposición 1.1.15. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $u, v \in A(\Omega)$. Si $u|_{D(a,r)} = v|_{D(a,r)}$ para algún disco $D(a,r) \subset \Omega$, entonces $u = v$.*

Demostración. Es suficiente probar que si $u \in A(\Omega)$ se anula en $D(a,r)$, entonces es nula. Para probar la proposición bastaría con aplicarlo a $v - u$. Definiremos para ello el conjunto $A = \{z \in \Omega : \exists r_z > 0, u|_{D(z,r_z)} = 0\}$. Entonces:

- $A \neq \emptyset$ ya que $a \in A$.
- A es abierto: Si $a \in A$, $u|_{D(a,r_a)} = 0$. Para cada $b \in A$, tomando r_b suficientemente pequeño como para que $D(b,r_b) \subset D(a,r_a)$, tendremos que $u|_{D(b,r_b)} = 0$, es decir, que $b \in A$.

- Veamos que A es cerrado. Tomemos una sucesión de elementos de A , $a_n \in A$, convergiendo a $a \in \Omega$. Tomamos $D(a, r) \subset \Omega$ y fijamos un N suficientemente grande para que $a_N \in D(a, r)$. Existe entonces una función holomorfa $f \in \mathcal{H}(D(a, r))$ tal que $\operatorname{Re} f = u$ en $D(a, r)$. Por otro lado, existe $R > 0$ tal que $D(a_N, R) \subset \Omega$ y u se anula en dicho disco. Igual que antes, existe $g \in \mathcal{H}(D(a_N, R))$ tal que $\operatorname{Re} g = u$ en $D(a_N, R)$. Pero entonces $0 = \operatorname{Re} g|_{D(a_N, R) \cap D(a, r)} = \operatorname{Re} f|_{D(a_N, R) \cap D(a, r)}$, luego $f = ik$ en $D(a_N, R) \cap D(a, r)$, con $k \in \mathbb{R}$ constante. Por el principio de prolongación analítica, $f = ik$ en $D(a, r)$ y por tanto $u = 0$ en $D(a, r)$.

Como Ω es conexo, se deduce de lo anterior que $A = \Omega$ y por tanto $u = 0$. \square

Observación 1.1.16. Después de la proposición anterior parece lógico estar tentado a concluir que, como en las funciones holomorfas, si u se anula en un conjunto que se acumula entonces es nula. Sin embargo esto no es cierto, como puede comprobarse con $u(z) = \log |z|$, que se anula en $\{z : |z| = 1\}$.

Podemos finalmente enunciar el principio del máximo para máximos relativos.

Proposición 1.1.17. Dado un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, sea $u \in A(\Omega)$ una función armónica. Si u alcanza un máximo relativo en Ω , entonces es constante.

Demostración. Sea $a \in \Omega$ un máximo relativo en u . Entonces existe $r > 0$ tal que a es un máximo absoluto en $D(a, r)$. Por el principio del máximo para máximos absolutos, $u(z)$ es constante en $D(a, r)$ y por ser constante en el disco, $u(z)$ es constante en Ω . \square

Observación 1.1.18. Es posible cambiar u por $-u$ en la proposición anterior y los máximos de u serán los mínimos de $-u$. Así, se verifican los principios del mínimo para funciones armónicas.

Corolario 1.1.19. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y acotado y sea $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y con la propiedad de la media (en particular, si u es armónica), entonces

$$\sup \{u(z) : z \in \overline{\Omega}\} = \sup \{u(z) : z \in \partial\Omega\}.$$

Demostración. Sea $M = \sup \{u(z) : z \in \overline{\Omega}\}$ y $m = \sup \{u(z) : z \in \partial\Omega\}$. Claramente $M \geq m$. Como Ω es acotado, $\partial_\infty \Omega = \partial\Omega$ y aplicando el principio del máximo para funciones armónicas, como $\lim_{z \rightarrow b} u(z) = u(b) \leq m$ para cada $b \in \partial\Omega$ y $z \in \Omega$, obtenemos que $u(z) \leq m$ para cada $z \in \Omega$, es decir, $M \leq m$ y por tanto $M = m$. \square

Corolario 1.1.20. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo acotado y $u, v : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas y tienen la propiedad de la media en Ω (en particular, si ambas son armónicas) y $u|_{\partial_{\infty}\Omega} = v|_{\partial_{\infty}\Omega}$ entonces $u=v$.

Demostración. Como coinciden en la frontera, $(u - v)(z) = 0$ para cada $z \in \partial_{\infty}\Omega$. Aplicando el principio del máximo, $u(z) - v(z) \leq 0$ para cada $z \in \Omega$. Podemos por otro lado aplicar el mismo procedimiento a la función $(v - u)(z)$ y obtenemos que $v(z) - u(z) \leq 0$ luego $u(z) = v(z)$ para todo $z \in \Omega$. \square

1.2. El Problema de Dirichlet en el disco

Sea Ω un abierto y $\varphi : \partial_{\infty}\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. La idea es buscar entonces una función $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u|_{\Omega}$ sea armónica y $u|_{\partial_{\infty}\Omega} = \varphi$. A dicho problema se le llama Problema de Dirichlet para el abierto Ω con la condición de contorno φ .

El problema de Dirichlet tiene diversas aplicaciones en la física. El primer ejemplo suele ser la ecuación del calor. Si en una sala bidimensional inicialmente fría se colocan calefactores en algunos puntos de las paredes y se deja pasar suficiente tiempo como para que la temperatura se estabilice, la solución del Problema de Dirichlet nos proporciona la temperatura en cada punto de la habitación. En este caso, la temperatura en cada punto de la pared es la condición de contorno, que depende de los calefactores instalados. Existen otras aplicaciones como el cálculo de potenciales electrostáticos que se puede consultar en [4, Cap. 9].

Observemos que el último corolario de la sección anterior nos garantiza la unicidad del problema, con lo cual nos ocuparemos únicamente de la existencia.

Resolveremos en esta sección el problema de Dirichlet para el disco unidad. Para ello haremos uso del núcleo de Poisson, que introducimos en el siguiente teorema. Dicho teorema generaliza la propiedad de la media y nos permite saber el valor de una función armónica u en el disco unidad sabiendo su valor en la frontera del disco.

Teorema 1.2.1. Sea $u : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $u|_{\mathbb{D}}$ es armónica. Entonces, para cada $z \in \mathbb{D}$, se tiene que

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) K(e^{it}, z) dt$$

donde

$$K(w, z) = \frac{1 - |z|^2}{|w - z|^2}$$

con $|w| = 1$ y $|z| < 1$. K se conoce como núcleo de Poisson.

Demostración. Probaremos primero el teorema en el caso particular en el que exista $R > 1$ tal que $u \in A(D(0, R))$. Para ello, tomaremos un $z \in \mathbb{D}$ fijo y llamaremos f a la función holomorfa en $D(0, R)$ tal que $\operatorname{Re} f = u$.

Para cualquier función $F \in \mathcal{H}(D(0, R))$ se tiene, por la fórmula integral de Cauchy,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{D}} \frac{F(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(e^{it})}{1 - ze^{-it}} dt.$$

Ahora bien, la función

$$F_z(w) = f(w) \frac{1 - |z|^2}{1 - \bar{z}w}$$

es holomorfa en $D(0, R)$ por ser el producto de una transformación de Möbius y de f , que lo son. Así, podemos aplicarle el resultado anterior y además evaluarla en z para obtener

$$f(z) = F_z(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1 - |z|^2}{|1 - ze^{-it}|^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} dt$$

y tomando partes reales obtenemos directamente la fórmula que buscábamos.

Pasemos ahora a demostrar el teorema en su versión general. Para ello supondremos que $u : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que $u|_{\mathbb{D}}$ es armónica. Tomaremos una sucesión r_n de reales positivos con límite 1 y definiremos $v_n(z) = u(r_n z)$. Así definida, $v_n \in A(D(0, \frac{1}{r_n}))$ y por tanto podemos aplicarle la versión particular del teorema, ya demostrada, y obtener que para cada $z \in \mathbb{D}$, se tiene

$$u(r_n z) = v_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r_n e^{i\theta}) K(e^{i\theta}, z) d\theta.$$

Haciendo ahora $n \rightarrow \infty$ se tiene que $u(r_n z) \rightarrow u(z)$ y $u(r_n e^{i\theta}) \rightarrow u(e^{i\theta})$ uniformemente en $\theta \in [0, 2\pi]$. Así, obtenemos finalmente que

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) K(e^{i\theta}, z) d\theta$$

lo cual finaliza la prueba. □

Podemos rescribir este último teorema en coordenadas polares, que serán mas útiles para demostrar el problema de Dirichlet.

Corolario 1.2.2. *Sea $u : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $u|_{\mathbb{D}}$ es armónica. Entonces, para cada $z = re^{i\alpha} \in \mathbb{D}$, se tiene que*

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) P_r(\alpha - t) dt$$

donde

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i\theta}|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}$$

con $r \in [0, 1)$. P se conoce como núcleo de Poisson en coordenadas polares.

Demostración. Escribiendo $z = re^{i\alpha}$ con $0 \leq r < 1$, basta con reescribir el núcleo de Poisson como

$$\begin{aligned} K(e^{it}, e^{i\alpha}) &= \frac{1 - r^2}{|e^{it} - re^{i\alpha}|^2} = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i(\alpha-t)}|^2} = \frac{1 - r^2}{|(1 - r \cos(\alpha - t)) - ir \sin(\alpha - t)|^2} = \\ &= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 \cos^2(\alpha - t) + r^2 \sin^2(\alpha - t) - 2r \cos(\alpha - t)} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\alpha - t) + r^2}. \end{aligned}$$

□

Observación 1.2.3. *El núcleo de Poisson puede expresarse también como*

$$P_r(\theta) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right)$$

ya que

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right) = \operatorname{Re} \frac{(1 + re^{i\theta})(1 - re^{-i\theta})}{(1 - re^{i\theta})(1 - re^{-i\theta})} = \frac{\operatorname{Re}(1 + re^{i\theta} - r^2 - re^{-i\theta})}{|1 - re^{i\theta}|^2} = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i\theta}|^2}.$$

Es conveniente estudiar ahora algunas propiedades del núcleo de Poisson que serán necesarias en teoremas posteriores.

Proposición 1.2.4. *Son válidas las siguientes afirmaciones para el núcleo de Poisson $P_r(\theta)$ con $0 \leq r < 1$:*

- i) $P_r(\theta) > 0$ y $P_r(\theta) = P_r(-\theta) = P_r(\theta + 2\pi)$ para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$.

- ii) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta) d\theta = 1$.
 iii) Si $0 < \alpha \leq |\theta| \leq \pi$, entonces $P_r(\theta) < P_r(\alpha)$.
 iv) Fijado $\alpha \in (0, \pi)$, $\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(\theta) = 0$ uniformemente en $\alpha \leq |\theta| \leq \pi$.

Demostración. i) Es inmediato a partir de la definición ya que $r \in [0, 1)$ y $\cos(-\theta) = \cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi)$.
 ii) Basta aplicar la fórmula obtenida en el Corolario 1.2.2 a la función constante $u = 1$ en $z = 0$ para obtener

$$1 = u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(-\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta) d\theta.$$

iii) Derivando respecto de θ ,

$$P_r'(\theta) = \frac{-2rsen(\theta)(1-r^2)}{(1-2rcos(\theta)+r^2)^2}$$

que es negativo en $[0, \pi]$, con lo cual la función es decreciente en dicho intervalo lo cual demuestra la afirmación para $\theta > 0$. Si θ es negativo basta tener en cuenta que $P_r(\theta) = P_r(-\theta) \leq P_r(\alpha)$.

iv) Fijado $\alpha \in (0, \pi)$, $\cos(\alpha) \neq 1$ luego podemos calcular que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(\alpha) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1-r^2}{1-2rcos(\alpha)+r^2} = \frac{0}{2-2cos(\alpha)} = 0.$$

□

Una de las condiciones necesarias para que una función sea solución del problema de Dirichlet es que sea armónica. Veremos en el siguiente teorema que nuestra futura candidata a solución lo es.

Proposición 1.2.5. Sea $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, para $z = re^{i\alpha} \in \mathbb{D}$,

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) P_r(\alpha - t) dt$$

es una función armónica pues es la parte real de la función

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt$$

que es holomorfa en el disco unidad.

Demostración. Debemos ver que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Para $t \in \mathbb{R}$ y $|z| < 1$, se da la igualdad

$$\begin{aligned} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} &= \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} = (1 + ze^{-it})(1 + ze^{-it} + z^2e^{-2it} + \dots) = \\ &= 1 + 2ze^{-it} + 2z^2e^{-2it} + 2z^3e^{-3it} + \dots \end{aligned}$$

donde hemos aplicado la fórmula para la suma de una progresión geométrica. Además, como hemos tomado un $|z| < 1$ fijo, esta expresión converge uniformemente en $[0, 2\pi]$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})(1 + 2ze^{-it} + 2z^2e^{-2it} + \dots)d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})e^{-in\theta} \right] z^n \end{aligned}$$

donde la suma se corresponde al n -ésimo coeficiente de Fourier de φ y además hay convergencia uniforme. Tenemos, por tanto, que f es una función holomorfa. \square

Podemos al fin encontrar la solución al Problema de Dirichlet en el disco unidad haciendo uso de los teoremas anteriores.

Teorema 1.2.6 (Solución al Problema de Dirichlet en \mathbb{D}). *Sea $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Existe entonces una única función continua $u : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u|_{\partial\mathbb{D}} = \varphi$ y $u|_{\mathbb{D}}$ es armónica. Dicha función viene dada mediante la fórmula integral de Poisson:*

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})P_r(\alpha - \theta)d\theta$$

donde $z = re^{i\alpha}$.

Demostración. La unicidad del problema de Dirichlet en general es consecuencia directa del Corolario 1.1.20. Además, sabemos que la función u dada explícitamente en el enunciado es armónica en \mathbb{D} . Definiendo por tanto $u(z) = \varphi(z)$ en la frontera del disco, sólo queda por ver que u es continua en $\overline{\mathbb{D}}$.

Veremos primeramente que $\lim_{r \rightarrow 1^-} u(re^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})$, es decir, que dado $\varepsilon > 0$, es posible encontrar cierto $\rho \in (0, 1)$ tal que si $\rho < r < 1$ entonces $|u(re^{i\theta}) - \varphi(e^{i\theta})| < \varepsilon$ para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Sabemos que φ es uniformemente continua, es decir, fijado nuestro $\varepsilon > 0$ tomaremos $\delta > 0$ tal que si $|s| < \delta$ entonces $|\varphi(e^{i(\theta-s)}) - \varphi(e^{i\theta})| < \varepsilon$ para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Por otro lado, por la propiedad cuarta de la Proposición 1.2.4 podemos tomar r suficientemente cercano a 1 como para que $|P_r(s)| < \varepsilon$ si $\delta < |s| \leq \pi$.

Además, la periodicidad del núcleo de Poisson y la segunda propiedad de dicha proposición nos garantiza que $\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} P_r(\theta) d\theta = 1$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta estas afirmaciones podemos escribir la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}
|u(re^{i\theta}) - \varphi(e^{i\theta})| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{is}) P_r(\theta - s) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i\theta}) P_r(s) ds \right| = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\theta+\pi}^{\theta-\pi} \varphi(e^{i(\theta-u)}) P_r(u) (-du) - \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i\theta}) P_r(s) ds \right| = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i(\theta-s)}) P_r(s) ds - \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i\theta}) P_r(s) ds \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i(\theta-s)}) - \varphi(e^{i\theta})| P_r(s) ds \leq \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|s| < \delta} |\varphi(e^{i(\theta-s)}) - \varphi(e^{i\theta})| P_r(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |s| \leq \pi} |\varphi(e^{i(\theta-s)}) - \varphi(e^{i\theta})| P_r(s) ds \leq \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \varepsilon \int_{|s| \leq \delta} P_r(s) ds + \frac{1}{2\pi} 2\|\varphi\|_{\infty} \int_{\delta < |s| \leq \pi} P_r(s) ds \leq \\
&\leq \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) ds + \frac{1}{2\pi} 2\|\varphi\|_{\infty} \varepsilon 2\pi = \varepsilon + 2\|\varphi\|_{\infty} \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $\lim_{z \rightarrow 1^-} u(re^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})$. Haciendo uso de este hecho, demostraremos finalmente que u es continua en cada punto $e^{i\alpha}$.

Por un lado, por la continuidad uniforme de φ , dado un $\varepsilon > 0$ tomaremos $\eta > 0$ tal que si $|\theta - \alpha| < \eta$, entonces $|\varphi(e^{i\theta}) - \varphi(e^{i\alpha})| < \varepsilon$. Por otro lado, tomaremos el ρ que tomamos anteriormente, que cumplía que $|u(re^{i\theta}) - \varphi(e^{i\theta})| < \varepsilon$ cuando $\rho < r < 1$ para cualquier $\theta \in [0, 2\pi]$.

Llamaremos $V = \{re^{i\theta} : \rho < r \leq 1, |\theta - \alpha| < \eta\}$ que es un entorno de $e^{i\alpha}$ en la topología relativa de $\overline{\mathbb{D}}$. Entonces, si $re^{i\theta} \in V$, tenemos que

$$|u(re^{i\theta}) - \varphi(e^{i\alpha})| \leq |u(re^{i\theta}) - \varphi(e^{i\theta})| + |\varphi(e^{i\theta}) - \varphi(e^{i\alpha})| < 2\varepsilon$$

lo cual prueba finalmente la continuidad de u en la frontera y termina la prueba de que u es la solución al problema de Dirichlet en el disco unidad. \square

1.3. El Teorema de Montel

Demostraremos en esta sección el Teorema de Montel, un importante resultado que se presenta como la primera pieza a la hora de demostrar el Teorema de Riemann.

Definición 1.3.1. Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ se dice normal cuando de cada sucesión $(f_n)_n$ de elementos de \mathcal{F} se puede extraer una subsucesión τ_K -convergente hacia cierta $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, es decir, cuando \mathcal{F} es relativamente compacto en $(\mathcal{H}(\Omega), \tau_K)$.

En las siguientes proposiciones, dado un conjunto $K \subset \Omega$ compacto y una función continua $f \in C(\Omega)$, escribiremos $\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)|$.

Definición 1.3.2. Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ se dice acotada en $\mathcal{H}(\Omega)$ (o localmente uniformemente acotada) cuando para cada compacto $K \subset \Omega$ se verifica que $\sup \{\|f\|_K : f \in \mathcal{F}\} < +\infty$.

Será necesaria la siguiente proposición para demostrar el teorema que da nombre a esta sección.

Proposición 1.3.3. Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es acotada si y sólo si para cada $a \in \Omega$ existe $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$ tal que $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\overline{D(a, r)}} < +\infty$.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Si \mathcal{F} está acotada, por definición $\sup \{\|f\|_K : f \in \mathcal{F}\} < +\infty$ para cualquier compacto $K \subset \Omega$, en particular, fijado $a \in \Omega$, $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$ tal que $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\overline{D(a, r)}} < +\infty$.

$[\Leftarrow]$ Recíprocamente, sea $K \subset \Omega$ un compacto. $\bigcup_{a \in K} \overline{D(a, r)}$ es un recubrimiento por abiertos de K , luego podemos extraer un subrecubrimiento finito, pongamos, $\bigcup_{i=1}^n \overline{D(a_i, r)}$. Como por hipótesis $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\overline{D(a_i, r)}} < +\infty$ para todo $i = 1, \dots, n$, se deduce que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_K < \sup_n \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\overline{D(a_i, r)}} < +\infty$$

luego \mathcal{F} es acotada. □

Podemos finalmente enunciar el teorema de Montel, que se presenta como la primera pieza en la demostración del teorema de Riemann.

Teorema 1.3.4 (de Montel, 1907). *Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es normal si y sólo si es acotada. En particular, \mathcal{F} es τ_K -compacta si y sólo si es τ_K -cerrada y acotada.*

Demostración. $[\Rightarrow]$ Supongamos primero que $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es normal. Por definición, $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$ es τ_K -compacta. Si $K \subset \Omega$ es compacto, por la compacidad de \mathcal{G} , existen funciones $f_i \in \mathcal{G}$ con $i = 1, \dots, n$ tales que $\mathcal{G} \subset \bigcup_{i=1}^n V(f_i, K, 1)$. Esto quiere decir que si $f \in \mathcal{G}$, existe algún f_i tal que $f \in V(f_i, K, 1)$. Se concluye entonces que

$$\|f\|_K = \|(f - f_i) + f_i\|_K \leq \|f - f_i\|_K + \|f_i\|_K < 1 + \|f_i\|_K$$

y por tanto

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_K \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \{1 + \|f_i\|_K\} < \infty$$

luego \mathcal{F} es acotada.

$[\Leftarrow]$ Recíprocamente, sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ una familia acotada. Fijado un punto $a \in \Omega$, sea $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$ y $z \in \overline{D(a, r/2)} \subset \overline{D(a, r)} \subset \Omega$. Podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy (Teorema A.1.9) a cierta función $f \in \mathcal{F}$ para obtener que

$$f(z) - f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-a} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z-a)f(w)}{(w-z)(w-a)} dw$$

donde $\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$. Tomando valores absolutos,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(a)| &\leq \frac{1}{2\pi} |z-a| 2\pi r \frac{\sup\{|f(w) : w \in D(a, r)\}}{(r/2)r} = \\ &= \frac{2 \sup\{|f(w) : w \in D(a, r)\}}{r} |z-a| \leq \frac{2 \sup\{\|f\|_{\overline{D(a, r)}} : f \in \mathcal{F}\}}{r} |z-a|. \end{aligned}$$

Con esta desigualdad hemos probado que la familia \mathcal{F} es equicontinua. Además, el conjunto $\mathcal{F}(z) = \{f(z) : f \in \mathcal{F}\} \subset \mathbb{C}$ es acotado y por tanto relativamente compacto en \mathbb{C} , luego podemos aplicar el Teorema de Ascoli para concluir que \mathcal{F} es τ_K -relativamente compacta, como queríamos ver.

La última afirmación es inmediata a partir de lo que ya hemos hecho. \square

1.4. El Teorema de Hurwitz

Esta sección está dedicada a otro de los resultados que necesitaremos posteriormente para la prueba del Teorema de Riemann. En este caso, estudiaremos los ceros del límite de una sucesión de funciones.

Teorema 1.4.1 (de Hurwitz, 1889). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, (f_n) una sucesión de funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\overline{D(a,r)}$ un disco cerrado tal que $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \partial D(a,r)$. Entonces, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > m$, las funciones f_n y f tienen el mismo número de ceros en $D(a,r)$ contados repetidos según sus multiplicidades.*

Demostración. Llamemos $\varepsilon = \min \{|f(z)| : z \in \partial D(a,r)\} > 0$. Existe entonces cierto n_ε tal que si $n \geq n_\varepsilon$, entonces $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \leq |f(z)|$ para todo $z \in \partial D(a,r)$. Podemos aplicar entonces el Teorema de Rouché A.1.19. Como ninguna de las funciones tiene polos, deducimos de dicho teorema que f_n y f tienen el mismo número de ceros en $D(a,r)$ contados según sus multiplicidades para todo $n > n_\varepsilon$, como queríamos ver. \square

Los siguientes corolarios del teorema de Hurwitz serán de gran importancia.

Corolario 1.4.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y (f_n) una sucesión de funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si f_n no se anula en Ω para ningún $n \in \mathbb{N}$, entonces, o bien f es idénticamente nula, o bien f no se anula en Ω .*

Demostración. Supongamos que f no es idénticamente nula. Entonces, si existiera $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$, f tendría un cero aislado y por tanto existiría cierto disco $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ tal que f no se anula en $\overline{D^*(a,r)}$. En particular, f no se anula en $\partial D(a,r)$. Aplicando el teorema de Hurwitz, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que f_m y f tienen el mismo número de ceros en $D(a,r)$, lo cual es absurdo ya que f_m no se anula por hipótesis y f sí lo hace. \square

El siguiente corolario se usará en la prueba del teorema de Riemann.

Corolario 1.4.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y (f_n) una sucesión de funciones inyectivas en $\mathcal{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces, o bien f es constante, o bien f es inyectiva.*

Demostración. Supongamos que f no es constante. Fijado $a \in \Omega$, la sucesión de funciones $g_n(z) = f_n(z) - f_n(a)$ no se anula en $\Omega \setminus \{a\}$ por la inyectividad. Podemos aplicar por tanto el corolario anterior para concluir que la función $g(z) = f(z) - f(a)$ no se anula en $\Omega \setminus \{a\}$, pues en caso contrario sería idénticamente nula y por tanto f sería constante, lo cual hemos descartado. Concluimos entonces que $f(z) \neq f(a)$ para cada $z \neq a$. Como ésto vale para todo $a \in \Omega$, concluimos que f es inyectiva. \square

El Teorema de representación de Riemann

«CONTENIDOS»

- El Teorema de representación de Riemann.
- Extensión a la frontera: El teorema de Carathéodory.
- Equivalencia con el problema de Dirichlet.
- Fórmulas de Schwarz-Christoffel.

El presente capítulo es el núcleo central de la memoria.

El objetivo principal de la primera sección de este capítulo es enunciar y demostrar al teorema que da nombre a este trabajo. Para ello se desarrollaran algunos lemas previos y se hará uso de los distintos resultados expuestos en los preliminares.

Después de ello, se estudiará el teorema de Carathéodory, que presenta una extensión del teorema de Riemann a la frontera del abierto cuando la frontera de éste sea una curva de Jordan.

A continuación se probará la equivalencia del problema de Dirichlet con el Teorema de Riemann, en el sentido de que a partir de la solución del problema de Dirichlet en un abierto podemos construir explícitamente el isomorfismo conforme que lo envía al disco unidad, y recíprocamente, si conocemos este isomorfismo conforme podemos resolver el problema de Dirichlet en el abierto siempre que su frontera sea una curva de Jordan.

Finalmente, se darán las fórmulas de Schwarz-Christoffel, que permiten encontrar explícitamente el isomorfismo conforme entre el disco unidad y el abierto, cuando éste es poligonal.

Las referencias usadas son distintas para cada sección y se presentan al principio de cada una de ellas.

2.1. El Teorema de representación de Riemann

El objetivo de esta sección es demostrar el Teorema de representación conforme de Riemann. Para ello necesitaremos algunos lemas previos de los que haremos uso en la prueba, además de numerosos resultados del Apéndice A y del Capítulo 1. Las principales referencias para esta sección son [5, 10, 23]. Comenzaremos con el estudio de las familias normales.

Lema 2.1.1. *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ holomorfa. Se dan las siguientes afirmaciones:*

i) *Si $0 < |f'(a)| = \max \{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega), g(\Omega) \subset \mathbb{D}\}$ para cierto $a \in \Omega$, entonces $f(a) = 0$.*

ii) *Si f es un isomorfismo conforme y $a = f^{-1}(0)$, se verifica*

$$\begin{aligned} |f'(a)| &= \max \{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega), g(\Omega) \subset \mathbb{D}, g(a) = 0\} = \\ &= \max \{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega), g(\Omega) \subset \mathbb{D}\} = \\ &= \max \{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega), g(\Omega) \subset \mathbb{D}, g \text{ inyectiva}\}. \end{aligned}$$

iii) *Si Ω es conformemente equivalente al disco \mathbb{D} y f alcanza el máximo*

$$|f'(a)| = \max \{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega), g(\Omega) \subset \mathbb{D}\}$$

para cierto $a \in \Omega$ entonces f es una biyección holomorfa tal que $f(a) = 0$.

Demostración. i) Supongamos por reducción al absurdo que se verifica la condición de maximalidad y que $f(a) = b \neq 0$. Consideremos la transformación de Möbius

$$S_b(z) = \frac{z-b}{1-\bar{b}z}.$$

Por el Ejemplo A.3.6 sabemos que es un isomorfismo de \mathbb{D} en sí mismo. Además,

$$S'_b(b) = \frac{1}{1-|b|^2} > 1.$$

Así, $|(S_b \circ f)'(a)| = |S'_b(b)f'(a)| > |f'(a)|$, lo cual contradice la hipótesis pues $S_b \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ sería una función holomorfa con derivada mayor en módulo.

ii) Son evidentes las desigualdades

$$|f'(a)| \leq \sup \{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega), g(\Omega) \subset \mathbb{D}, g(a) = 0\} \leq$$

$$\leq \sup \{ |g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega), g(\Omega) \subset \mathbb{D} \}$$

y

$$\begin{aligned} |f'(a)| &\leq \sup \{ |g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega), g(\Omega) \subset \mathbb{D}, g \text{ inyectiva} \} \leq \\ &\leq \sup \{ |g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega), g(\Omega) \subset \mathbb{D} \} \end{aligned}$$

luego para demostrar este apartado basta con ver que

$$|f'(a)| = \text{máx} \{ |g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega), g(\Omega) \subset \mathbb{D} \}.$$

Sea $g : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ una función holomorfa cualquiera, $g(a) = b$ y S_b como en el apartado anterior. Entonces podemos aplicar el Lema de Schwarz a la función $S_b \circ g \circ f^{-1}$ ya que $S_b \circ g \circ f^{-1}(0) = 0$. Con esto obtenemos que $|(S_b \circ g \circ f^{-1})'(0)| \leq 1$, es decir,

$$|S'_b(b)g'(a)\frac{1}{f'(a)}| \leq 1.$$

Sustituyendo el valor de

$$S'_b(b) = \frac{1}{1-|b|^2} \geq 1$$

se concluye que

$$\frac{1}{1-|b|^2}|g'(a)| \leq |f'(a)|$$

y por tanto $|g'(a)| \leq |f'(a)|$, como queríamos ver.

iii) Sea $h : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ una biyección holomorfa con $h(a) = 0$. Entonces, por el apartado anterior y la hipótesis

$$|h'(a)| = \text{máx} \{ |g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega), g(\Omega) \subset \mathbb{D} \} = |f'(a)|.$$

Se tiene aplicando el primer apartado, que $f(a) = 0$. Entonces, $f \circ h^{-1}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ con $f \circ h^{-1}(0) = 0$, con lo cual podemos aplicar el Lema de Schwarz, que nos garantiza que $|(f \circ h^{-1})'(0)| \leq 1$. Pero además se da la igualdad ya que

$$|(f \circ h^{-1})'(0)| = |f'(a)\frac{1}{h'(a)}| = 1$$

luego esta aplicación es un giro, es decir, existe una constante de módulo $|\lambda| = 1$ tal que $f \circ h^{-1}(z) = \lambda z$ para cada $z \in \mathbb{D}$, o equivalentemente, $f(w) = \lambda h(w)$ para cada $w \in \Omega$, con lo cual f es un isomorfismo conforme. \square

Los dos siguientes lemas recorren la mayor parte del camino de la demostración del Teorema de Riemann.

Lema 2.1.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo tal que para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g^2 = f$. Existe entonces una función inyectiva $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$.*

Demostración. Tomemos primero $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ y consideremos la función $g(z) = z - a$. Se tiene que $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $0 \notin g(\Omega)$ luego por hipótesis, existirá $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $(\varphi(z))^2 = g(z) = z - a$ para cada $z \in \Omega$. Además, φ es inyectiva en Ω ya que si $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ entonces $g(z_1) = g(z_2)$ y por tanto $z_1 = z_2$. Por el teorema de la aplicación abierta $\varphi(\Omega)$ es abierto luego existirá $D(z_0, r) \subset \varphi(\Omega)$. Sabemos que $0 \notin D(z_0, r)$ porque $0 \notin \varphi(\Omega)$, por tanto, $|z_0| \geq r$. Además $D(-z_0, r) \cap \varphi(\Omega) = \emptyset$ ya que si existiera un elemento en esta intersección, se tendría que existe $w \in \Omega$ con $\varphi(w) \in D(-z_0, r)$ y en ese caso $-\varphi(w) \in D(z_0, r)$. Pero como $D(z_0, r) \subset \varphi(\Omega)$, existiría entonces $w' \in \Omega$ tal que $\varphi(w') = -\varphi(w)$, lo cual implica $g(w') = (\varphi(w'))^2 = (-\varphi(w))^2 = g(w)$, con lo cual $w = w'$ lo cual es absurdo por tenerse entonces $\varphi(w) = \varphi(w') = -\varphi(w)$ con $\varphi(w) \neq 0$.

Así podemos definir la función

$$f(z) = \frac{r}{\varphi(z) + z_0}$$

que es inyectiva por serlo φ . Además, como hemos visto que $D(-z_0, r) \cap \varphi(\Omega) = \emptyset$, se tiene $|\varphi(z) + z_0| \geq r$ y por tanto $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$. Por tanto, f es la función buscada. \square

Lema 2.1.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo tal que para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g^2 = f$. Entonces, Ω es conformemente equivalente al disco \mathbb{D} .*

Demostración. En primer lugar, la familia $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f(\Omega) \subset \mathbb{D}, f \text{ inyectiva}\}$ es no vacía por el lema anterior. Además, las funciones de \mathcal{F} son acotadas en \mathbb{C} ya que $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$. Aplicando el Teorema de Montel 1.3.4, sabemos que \mathcal{F} es normal, es decir $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_k}$ es compacto.

Fijado ahora un $a \in \Omega$, por alcanzarse los máximos en los compactos, existirá $h \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau_k}$ tal que

$$|h'(a)| = \max \left\{ |f'(a)| : f \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau_k} \right\} \geq \sup \left\{ |f'(a)| : f \in \mathcal{F} \right\}.$$

Nuestro objetivo ahora es ver que la última desigualdad es de hecho una igualdad, es decir, que $h \in \mathcal{F}$. Por un lado, como $h \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau_k}$, existirá una sucesión $(h_n)_n \subset \mathcal{F}$ que tiende a h . Cada

función h_n es inyectiva por pertenecer a \mathcal{F} y h no es constante porque $|h'(a)| \geq |f'(a)| > 0$ para cada $f \in \mathcal{F}$. La desigualdad $|f'(a)| > 0$ se debe a que en \mathcal{F} todas las funciones son inyectivas. Con todo ello, aplicando el Corolario 1.4.3 concluimos que h es inyectiva.

Por otro lado, h es holomorfa porque $\mathcal{H}(\Omega)$ es cerrado en $(C(\Omega), \tau_K)$ por el teorema de Weierstrass A.1.12. Se deduce del teorema de la aplicación abierta que h es abierta y por tanto, como $h(\Omega) \subset \overline{\mathbb{D}}$ porque $h \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$, se concluye que $h(\Omega) \subset \mathbb{D}$. Esto concluye la prueba de que $h \in \mathcal{F}$. Además, por el segundo apartado del Lema 2.1.1, sabemos que $h(a) = 0$.

Hemos demostrado así que para cada $a \in \Omega$ existe una función $h \in \mathcal{F}$ tal que $|h'(a)| = \sup\{|f'(a)| : f \in \mathcal{F}\}$. Si vemos que dicha función h es sobreyectiva, habremos encontrado una biyección conforme entre Ω y el disco \mathbb{D} y por tanto el isomorfismo conforme buscado.

Supongamos por reducción al absurdo que h no es sobreyectiva, es decir, que existe $\alpha \in \mathbb{D} \setminus h(\Omega)$. Consideremos ahora la aplicación $S_\alpha \circ h$, donde como es ya usual,

$$S_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}.$$

Sabemos por el Ejemplo A.3.6 que S_α es un isomorfismo del disco en sí mismo tal que $S_\alpha(\alpha) = 0$, con lo cual $S_\alpha \circ h \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $0 \notin S_\alpha \circ h(\Omega)$.

Aplicando la hipótesis del lema, existirá $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $(g(z))^2 = S_\alpha \circ h(z)$ para cada $z \in \Omega$. Consideramos por otro lado la aplicación $S : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ definida como $S(z) = z^2$. Así definidas, tenemos que $S \circ g = S_\alpha \circ h$, es decir, $S_{-\alpha} \circ S \circ g = h$. Llamaremos ahora $b = g(a)$. Podemos escribir $h = (S_{-\alpha} \circ S \circ S_{-b}) \circ (S_b \circ g)$. Sin embargo, la función $S_{-\alpha} \circ S \circ S_{-b}$ no es inyectiva por no serlo S . Le podemos aplicar por tanto el Corolario A.5.2, que nos garantiza que $|(S_{-\alpha} \circ S \circ S_{-b})'(0)| < 1$. Concluimos entonces que

$$|h'(a)| = |(S_{-\alpha} \circ S \circ S_{-b})'(0)| |(S_b \circ g)'(a)| < |(S_b \circ g)'(a)|$$

lo cual contradice la hipótesis de que $|h'(a)|$ maximice la derivada ya que $S_b \circ g \in \mathcal{F}$. En efecto, es claro $S_b \circ g(\Omega) \subset \mathbb{D}$ y además es inyectiva ya que g lo es por serlo h y S_b es una biyección. Esto concluye la prueba de que h es sobreyectiva y por tanto la del lema. \square

Con todos los ingredientes listos ha llegado la hora de enunciar y demostrar el teorema que da nombre a este trabajo.

Teorema 2.1.4 (de representación conforme de Riemann, 1912). *Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo. Entonces para cada $a \in \Omega$ existe un único isomorfismo conforme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$.*

Demostración. Si Ω es simplemente conexo, aplicando el Teorema A.1.10 sabemos que tiene la propiedad de que para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g^2 = f$. Así, podemos aplicar el lema anterior que nos garantiza que existe un isomorfismo conforme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ con $f(a) = 0$.

Podemos suponer además que $f'(a) > 0$ ya que en caso contrario, como $f'(a) \neq 0$, bastaría con efectuar un giro, es decir, con considerar la aplicación $\lambda f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$, donde

$$\lambda = \frac{\overline{f'(a)}}{|f'(a)|}.$$

En efecto, $|\lambda| = 1$ y por tanto λf es un isomorfismo conforme de Ω en \mathbb{D} con

$$(\lambda f)'(a) = \frac{\overline{f'(a)}}{|f'(a)|} f'(a) = |f'(a)| > 0.$$

Veamos para terminar la unicidad. Si existiese $g : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ otra biyección conforme con $g(a) = 0$ y $g'(a) > 0$, entonces $f \circ g^{-1}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y $f \circ g^{-1}(0) = 0$. Además, se tendría

$$(f \circ g^{-1})'(0) = f'(a) \frac{1}{g'(a)} = 1$$

donde la última igualdad se debe a que por ser ambos isomorfismos conformes, los dos maximizan la derivada en a y por tanto $|f'(a)| = |g'(a)|$. Además, como ambos son reales positivos, $f'(a) = g'(a)$. Podemos aplicar ahora el Lema de Schwarz, que nos garantiza que $f \circ g^{-1}$ es un giro, es decir, $f \circ g^{-1}(z) = \lambda z$. Pero recordemos que $\lambda = (f \circ g^{-1})'(0)$. Concluimos entonces que $f \circ g^{-1}(z) = z$ para cada $z \in \mathbb{D}$ o equivalentemente, que $f(w) = g(w)$ para cada $w \in \Omega$. Concluye así la prueba de la unicidad y por tanto la del teorema. \square

2.2. Extensión a la frontera: El teorema de Carathéodory

Una vez demostrado el teorema de representación de Riemann es natural preguntarse bajo qué condiciones podremos extender el isomorfismo conforme a la frontera del abierto

Ω . Aunque la dificultad es mayor que en secciones anteriores, el teorema de Carathéodory nos garantizará que si $\partial\Omega$ es una curva de Jordan, es posible construir un homeomorfismo como extensión. Las principales referencias para esta sección son [16, 17, 20].

Probaremos en primer lugar el resultado para puntos de frontera simples.

Definición 2.2.1. *Sea Ω un abierto conexo y $a \in \partial\Omega$. Diremos que a es un punto de frontera simple si para cada sucesión (z_n) en Ω convergente al punto a existe una curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$ y una sucesión (t_n) con $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \rightarrow 1$ tal que $\gamma(t_n) = z_n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ y $\gamma(t) \in \Omega$ para $t \in [0, 1)$.*

En otras palabras, el punto $a \in \partial\Omega$ es simple si existe una curva en Ω que pase por los puntos (z_n) y acabe en a para cada sucesión (z_n) convergente al punto a .

Ejemplo 2.2.2. *En el abierto $\Omega = \mathbb{D} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, todos los puntos situados en el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ son puntos de frontera y sin embargo no son simples. Para cada uno de ellos, $x \in \mathbb{R}$, basta con tomar la sucesión $z_n = x + \frac{(-1)^n}{n}i$, que a partir de cierto término pertenece a Ω y tiende al punto x . No se puede, sin embargo, encontrar una curva continua γ en las condiciones de la definición, ya que tomando un entorno U de x suficientemente pequeño, no es posible encontrar t_0 tal que $\gamma(t) \in U$ para todo $t > t_0$, lo cual contradice la convergencia.*

Ejemplo 2.2.3. *Todos los puntos de frontera de un conjunto convexo y acotado son simples. Los detalles de este hecho se estudiarán en el Corolario 2.2.19.*

Comenzaremos viendo que cualquier isomorfismo conforme puede extenderse de manera continua. Probaremos primero el siguiente lema.

Lema 2.2.4. *Sea Ω un abierto simplemente conexo acotado cuyos puntos de frontera son simples y $g: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ un isomorfismo conforme. Entonces:*

- i) *Si $(z_n) \subset \Omega$ converge a un punto $a \in \partial\mathbb{D}$, entonces $\lim g(z_n) \in \partial\Omega$ en el caso de que este límite exista.*
- ii) *Si (z_n) y (\tilde{z}_n) son sucesiones en \mathbb{D} tales que $\lim z_n = \lim \tilde{z}_n = a \in \partial\mathbb{D}$, entonces $\lim g(z_n) = \lim g(\tilde{z}_n)$ en el caso de que estos límites existan.*
- iii) *Si $(z_n) \subset \Omega$ converge a un punto $a \in \partial\mathbb{D}$, entonces existe $\lim g(z_n)$.*

Demostración. i) Llamemos $c = \lim g(z_n)$. Si $c \in \Omega$ entonces existe $b \in \mathbb{D}$ con $b = g^{-1}(c)$. Sin embargo, esto es contradictorio pues $z_n = g^{-1}(g(z_n))$ sería convergente a los puntos a y b , que son distintos.

ii) Llamemos $b_1 = \lim g(z_n)$ y $b_2 = \lim g(\tilde{z}_n)$. No es restrictivo suponer que $a = -1$, pues en caso contrario bastaría considerar $g(e^{i\zeta}z)$ para cierto ángulo ζ .

Supongamos por reducción al absurdo que $b_1 \neq b_2$. Así, como estos puntos son simples, existen curvas γ_1 y γ_2 definidas en $[0, 1]$, contenidas en Ω para $t \in [0, 1)$ y con $\gamma_1(1) = b_1$ y $\gamma_2(1) = b_2$ tales que $\gamma_1(t_n) = g(z_n)$ y $\gamma_2(t'_n) = g(\tilde{z}_n)$ para ciertos $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \rightarrow 1$ y $0 < t'_1 < t'_2 < \dots < t'_n \rightarrow 1$. Llamando $f = g^{-1}$, sea $\Gamma_1(t) = f(\gamma_1(t))$ y $\Gamma_2(t) = f(\gamma_2(t))$. Se tiene entonces, definiendo estas nuevas curvas en $t = 1$ por continuidad, que $\Gamma_1(1) = \Gamma_2(1) = -1$.

Existirá entonces un $t_0 \in (0, 1)$ tal que si $t_0 < t < 1$ entonces

$$\frac{1}{2}|b_2 - b_1| < |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|.$$

Así mismo, existirá $\delta > 0$ tal que $D(-1, \delta)$ no interseca a $\Gamma_1([0, t_0])$ ni a $\Gamma_2([0, t_0])$. Llamaremos $D_\delta = \mathbb{D} \cap D(-1, \delta)$. Ahora, para cada radio $0 < r < \delta$, existirán puntos $w_i \in \Gamma_i([0, 1])$ tales que $|1 + w_i| = r$ ($i = 1, 2$). En particular, $w_i \in D(0, \delta)$ y por tanto se da la desigualdad

$$\frac{1}{2}|b_1 - b_2| < |g(w_1) - g(w_2)|.$$

Pero el lado derecho de la desigualdad anterior no es otra cosa que la integral de g' a lo largo del arco circular que va de w_1 a w_2 con centro en -1 . Si llamamos α y β a los argumentos de $w_1 + 1$ y $w_2 + 1$ respectivamente, podemos escribir

$$\frac{1}{2}|b_1 - b_2| < \int_\alpha^\beta |g'(-1 + re^{i\theta})| r d\theta < \int_{-\eta}^\eta |g'(-1 + re^{i\theta})| r d\theta$$

para cada radio $0 < r < \delta$, donde η es el mayor ángulo tal que $-1 + re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ para todo $|\theta| < \eta$. Podemos observar que $\eta < \frac{\pi}{2}$. Elevando al cuadrado y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \frac{|b_1 - b_2|^2}{4} &< \left(\int_{-\eta}^\eta |g'(-1 + re^{i\theta})| r d\theta \right)^2 \leq \int_{-\eta}^\eta |g'(1 + re^{i\theta})|^2 d\theta \int_{-\eta}^\eta r^2 d\theta = \\ &= \int_{-\eta}^\eta |g'(1 + re^{i\theta})|^2 d\theta r^2 2\eta < \int_{-\eta}^\eta |g'(1 + re^{i\theta})|^2 d\theta \pi r^2. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{|b_1 - b_2|^2}{4\pi r} < r \int_{-\eta}^{\eta} |g'(1 + re^{i\theta})|^2 d\theta$$

para cada $0 < r < \delta$. Integrando ahora ambos miembros respecto de r , entre 0 y δ , obtenemos en el lado izquierdo que la integral no es finita,

$$\infty = \int_0^{\delta} \frac{|b_1 - b_2|^2}{4\pi r} dr < \int_0^{\delta} \int_{-\eta}^{\eta} r |g'(1 + re^{i\theta})|^2 d\theta dr.$$

Sin embargo,

$$A(g(D_\delta)) = \iint_{g(D_\delta)} 1 dx dy = \int_0^{\delta} \int_{-\eta}^{\eta} r \left| \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)} \right| d\theta dr = \int_0^{\delta} \int_{-\eta}^{\eta} r |g'(1 + re^{i\theta})|^2 d\theta dr$$

donde hemos llamado g_1 y g_2 a la parte real e imaginaria de g respectivamente y hemos hecho uso de que, evaluado en el punto correspondiente,

$$\left| \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} (g_1)_u & (g_1)_v \\ (g_2)_u & (g_2)_v \end{vmatrix} = (g_1)_u (g_2)_v - (g_1)_v (g_2)_u = (g_1)_u^2 + (g_2)_u^2 = |g'|^2.$$

Obtenemos así que $A(g(D_\delta)) = \infty$, que es la contradicción buscada.

iii) Supongamos que el límite no existiese. Por ser $\overline{\Omega}$ compacto y por el apartado (i), podemos extraer entonces dos subsucesiones $g(z_{n_k})$ y $g(z_{n_j})$ convergentes a dos puntos distintos de $\partial\Omega$. Aplicando el apartado anterior estos puntos deberían ser el mismo, lo cual es contradictorio. \square

Con este lema demostrado podemos definir g en cualquier punto de la frontera como el límite de la imagen por g de cualquier sucesión convergente a dicho punto. Veamos ahora que esta extensión es continua.

Proposición 2.2.5. *Sea Ω un abierto simplemente conexo acotado cuyos puntos de frontera son simples y $g : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ un isomorfismo conforme. Entonces, podemos extender g a una aplicación continua de $\overline{\mathbb{D}}$ en $\overline{\Omega}$.*

Demostración. Sea (z_n) es una sucesión en $\overline{\mathbb{D}}$ convergente a un punto $a \in \partial\mathbb{D}$. Podemos encontrar entonces una sucesión (w_n) en \mathbb{D} tal que $|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$ y $|g(z_n) - g(w_n)| < \frac{1}{n}$. Esto implica que $\lim w_n = \lim z_n = a$ y por construcción de g , $\lim g(w_n) = g(a)$. Finalmente, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $|g(z_n) - g(a)| \leq |g(z_n) - g(w_n)| + |g(w_n) - g(a)| < \varepsilon$ para n suficientemente grande, luego $\lim g(z_n) = g(a)$ y así, la extensión es continua. \square

Estudiaremos a continuación la inyectividad. Comenzaremos demostrando el siguiente lema.

Lema 2.2.6. *Sea $g : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ continua en $\overline{\mathbb{D}}$, holomorfa en \mathbb{D} y constante en un arco de $\partial\mathbb{D}$. Entonces g es constante.*

Demostración. Supongamos que el valor constante que g toma en el arco es 0 y sea $L > 0$ la longitud de dicho arco. Tomando $n > 1$ suficientemente grande como para que $L > \frac{2\pi}{n}$ y valores $\theta_j = \frac{2\pi j}{n}$, podemos construir la función $h(z) = \prod_{j=1}^n g(ze^{i\theta_j})$, que es holomorfa. Observemos que $h(z) = 0$ para cada $z \in \partial\mathbb{D}$ ya que debido a la elección de los valores θ_j siempre existirá algún $ze^{i\theta_j}$ en el arco donde g se anula. Aplicando el principio del máximo, obtenemos que $h(z)$ es idénticamente nula en \mathbb{D} .

Si g no fuera idénticamente nula en el disco, el conjunto de sus ceros $Z(g)$ sería contable. Pero en ese caso $Z(h)$ también sería contable pues es la unión de n conjuntos obtenidos de $Z(g)$ haciendo rotar g , lo cual es una contradicción.

Si g toma en el arco un valor constante no nulo, digamos $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, podemos aplicar el argumento anterior a la función $\tilde{g}(z) = g(z) - a$. Como se anula en el arco, $\tilde{g}(z) = 0$ en todo el disco y por tanto $g(z) = a$ para todo $z \in \mathbb{D}$. \square

Alternativamente, es posible también demostrar la proposición anterior haciendo uso del principio de reflexión de Schwarz (Ver observación A.6.6). La siguiente proposición prueba la inyectividad.

Proposición 2.2.7. *Sea Ω un abierto simplemente conexo acotado cuyos puntos de frontera son simples y $g : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ un isomorfismo conforme. Entonces, la extensión continua de g de $\overline{\mathbb{D}}$ en $\overline{\Omega}$ es inyectiva.*

Demostración. Supongamos que existen dos puntos distintos $a_1, a_2 \in \partial\mathbb{D}$ tales que $g(a_1) = g(a_2) = b$.

Veremos primero que si A y B son los subarcos de $\partial\mathbb{D}$ entre a_1 y a_2 entonces g es constante en al menos uno de estos arcos. Si no fuera así, podríamos tomar $z_A \in A$ y $z_B \in B$ tales que $g(z_A) \neq b$ y $g(z_B) \neq b$. Podemos considerar ahora la imagen de la cuerda $C = [z_A, z_B]$, $g(C)$, que es un compacto. Llamaremos $\varepsilon > 0$ a la distancia de $g(C)$ al punto b . Podemos tomar ahora sucesiones $(z_n) \rightarrow a_1$ y $(w_n) \rightarrow a_2$ en \mathbb{D} . Es claro que la sucesión

$g(z_1), g(w_1), g(z_2), g(w_2), \dots$ tiene límite b . Como b es un punto de frontera simple, existe una curva $\gamma: [0, 1) \rightarrow \Omega \cap D(b, \varepsilon)$ y $0 < t_1 < t'_1 < t_2 < t'_2 < \dots < t_n < t'_n \rightarrow 1$ tales que $\gamma(t_n) = z_n$ y $\gamma(t'_n) = w_n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ con $\lim_{t \rightarrow 1^-} \gamma(t) = b$.

Tenemos entonces que la curva $g^{-1} \circ \gamma$ conecta los puntos z_n y w_n y por tanto interseca a C para n suficientemente grande. Pero el rango de γ está contenido en $D(b, \varepsilon)$, que no interseca a $g(C)$. Hemos encontrado así, la contradicción buscada, lo cual supone que g es constante en A o en B .

Aplicando ahora el lema anterior, g será constante en todo el disco, lo cual contradice que g sea un isomorfismo conforme. Se obtiene así la inyectividad. \square

Hemos trabajado de manera continuada con la inversa de f . Necesitamos el siguiente resultado topológico que nos permitirá extender los resultados a f .

Proposición 2.2.8. *Sea g una biyección continua entre un espacio métrico compacto X y otro espacio métrico Y . Entonces, la inversa $f: Y \rightarrow X$ es también continua.*

Demostración. Para ver que f es continua basta ver que g es abierta. Sea $U \subset X$ un abierto. Entonces, $X \setminus U$ es cerrado y por tanto compacto pues está contenido en el compacto X . Ahora, como g es continua, $g(X \setminus U)$ es también compacto y por tanto cerrado en Y . Finalmente, como g es una biyección, $g(U) = Y \setminus g(X \setminus U)$, luego $g(U)$ es abierto. \square

Podemos finalmente demostrar el teorema que buscábamos.

Teorema 2.2.9. *Sea Ω un abierto simplemente conexo acotado cuyos puntos de frontera son simples y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ un isomorfismo conforme. Podemos extender entonces f a un homeomorfismo entre $\overline{\Omega}$ y $\overline{\mathbb{D}}$.*

Demostración. Consideremos $g: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ la inversa de f . Por la proposición 2.2.5 podemos extender g a una función continua entre $\overline{\mathbb{D}}$ y $\overline{\Omega}$. Aplicando la Proposición 2.2.8, f se puede extender igualmente a una función continua entre $\overline{\Omega}$ y $\overline{\mathbb{D}}$.

Además, por la Proposición 2.2.7 la extensión g es inyectiva. Por otro lado, se tiene que $\Omega = g(\mathbb{D}) \subset g(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\Omega}$. Como $g(\overline{\mathbb{D}})$ es compacto, necesariamente $g(\overline{\mathbb{D}}) = \overline{\Omega}$, lo cual prueba la sobreyectividad.

Así, tanto f como g se pueden extender a biyecciones continuas, lo cual prueba el teorema. \square

Nuestro próximo objetivo es extender la validez de este teorema a un dominio de Jordan cualquiera. Para ello, demostraremos que los puntos de frontera de un dominio de Jordan son simples. Comencemos con algunas definiciones.

Definición 2.2.10. *Llamaremos curva de Jordan a cualquier camino cerrado, continuo e inyectivo, esto es, a una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$ y $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ para $a < t_1 < t_2 \leq b$.*

En particular, γ es una curva de Jordan si $\gamma([a, b])$ es un conjunto de \mathbb{C} homeomorfo a $\partial\mathbb{D}$.

Definición 2.2.11. *Diremos que Ω es un dominio de Jordan si es un abierto simplemente conexo acotado y si su frontera $\partial\Omega$ es una curva de Jordan.*

Observación 2.2.12. *En la definición anterior se podría omitir el hecho de que el abierto sea simplemente conexo, ya que todo abierto cuya frontera es una curva de Jordan es simplemente conexo. Este hecho se deriva del célebre Teorema de la curva de Jordan, que asegura que toda curva de Jordan divide al plano en dos componentes conexas disjuntas, una acotada y otra no acotada. El dominio de Jordan Ω es la componente conexa acotada y aplicando el teorema, $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo, es decir, Ω es simplemente conexo. No obstante, la demostración que daremos no necesita de este profundo resultado.*

Para demostrar que todo punto de frontera de un dominio de Jordan es simple necesitaremos dos resultados previos. El primero de ellos es un resultado topológico conocido como Teorema de Janiszewski cuya demostración puede consultarse en [11] y que nos ofrece un criterio para saber si un conjunto separa a dos puntos.

Definición 2.2.13. *Dado $A \subset \mathbb{C}$ y dos puntos $a, b \in \mathbb{C} \setminus A$, diremos que A separa a los puntos a y b si estos se encuentran en componentes conexas distintas de $\mathbb{C} \setminus A$.*

Teorema 2.2.14 (de Janiszewski). *Sean A y B subconjuntos de \mathbb{C} con A compacto, B cerrado y $A \cap B$ conexo. Sean $a, b \in \mathbb{C} \setminus (A \cup B)$. Si a y b no son separados por A ni por B , entonces tampoco son separados por $A \cup B$.*

El otro resultado que necesitaremos es el siguiente lema.

Lema 2.2.15. *Sea Ω un abierto conexo acotado y $a \in \partial\Omega$. Si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entorno V de a tal que $V \subset D(a, \varepsilon)$ y $V \cap \Omega$ es conexo, entonces a es un punto de frontera simple.*

Demostración. Sea (z_n) una sucesión en Ω convergente al punto de frontera a . Por hipótesis, dado un $\varepsilon > 0$ existirá un entorno de a , $V \subset D(a, \varepsilon)$, tal que $V \cap \Omega$ es conexo y por tanto conexo por caminos. En particular, para cada k existirá un entorno de a , $V_k \subset D(a, 2^{-k})$, tal que $V_k \cap \Omega$ es conexo por caminos y existirá n_k tal que $z_n \in V_k \cap \Omega$ para todo $n \geq n_k$. Esto nos permite unir mediante caminos los puntos $\{z_{n_k}, \dots, z_{n_{k+1}}\}$ para cada k , por tanto a es un punto de frontera simple. \square

Concluimos con el resultado que necesitábamos.

Teorema 2.2.16. *Si Ω es un dominio de Jordan, entonces cada punto de frontera de Ω es simple.*

Demostración. Sea Ω un dominio de Jordan y $a \in \partial\Omega$. Entonces, dado un $\varepsilon > 0$, por la continuidad de la frontera, a estará contenido en un subarco abierto y conexo de $\partial\Omega \cap D(a, \varepsilon)$ que llamaremos J . Existe entonces un entorno de a , V , abierto y contenido en $D(a, \varepsilon)$ tal que $J = \partial\Omega \cap V$. Como J es conexo podemos suponer que V también lo es.

Sean ahora $w, z \in \Omega \cap V$. Entonces, los conjuntos $\mathbb{C} \setminus V$ y $\partial\Omega$ no separan a w de z por ser Ω y J conexos. Su intersección $(\mathbb{C} \setminus V) \cap \partial\Omega$ es el arco complementario de J en $\partial\Omega$ y por tanto es conexo. Podemos aplicar entonces el Teorema de Janiszewski que nos garantiza que $(\mathbb{C} \setminus V) \cup \partial\Omega$ no separa a w de z y por tanto que estos dos puntos están en la misma componente conexa de $V \setminus \partial\Omega$. Se concluye que $V \cap \Omega$ es conexo.

Aplicando entonces el lema anterior, obtenemos que a es un punto de frontera simple. \square

Con este teorema podemos por fin enunciar el teorema que da nombre a esta sección.

Teorema 2.2.17 (de Carathéodory, 1913). *Sea Ω un dominio de Jordan y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ un isomorfismo conforme. Podemos extender entonces f a un homeomorfismo entre $\overline{\Omega}$ y $\overline{\mathbb{D}}$.*

Demostración. Aplicando el Teorema 2.2.16 obtenemos que todo punto de la frontera de Ω es simple. El resultado se desprende entonces del Teorema 2.2.9. \square

Podemos de hecho, enunciar la siguiente cadena de equivalencias.

Teorema 2.2.18. *Sea Ω un abierto simplemente conexo acotado de \mathbb{C} . Son equivalentes:*

- i) *Cada isomorfismo conforme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ se puede extender a un homeomorfismo entre $\overline{\Omega}$ y $\overline{\mathbb{D}}$.*

- ii) Ω es un dominio de Jordan.
 iii) Cada punto de frontera de Ω es simple.

Demostración. La implicación ii) \Rightarrow iii) es el Teorema 2.2.16 y la implicación iii) \Rightarrow i) no es otra cosa que el Teorema 2.2.9.

Para i) \Rightarrow ii), el Teorema de Riemann nos garantiza la existencia de un isomorfismo conforme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ y la hipótesis nos permite extenderlo a un homeomorfismo $\tilde{f} : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$. Se tiene entonces que $\tilde{f}(\partial\Omega) = \partial\mathbb{D}$, es decir, $\partial\Omega$ es homeomorfo a la circunferencia unidad y por tanto es una curva cerrada, continua e inyectiva, es decir, una curva de Jordan. \square

Como aplicación podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 2.2.19. *Todo abierto acotado y convexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio de Jordan.*

Demostración. Todo conjunto convexo es simplemente conexo pues cada curva cerrada $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ es Ω -homotópica a la curva constante $z_0 \in \Omega$ mediante la homotopía $h(s, t) = (1-t)\gamma(s) + tz_0$.

Además, todos los puntos de frontera son simples. Si $a \in \partial\Omega$ y $(z_n) \subset \Omega$ converge al punto a entonces $z_n \in \Omega \cap D(a, \varepsilon)$ a partir de cierto término. Pero $\Omega \cap D(a, \varepsilon)$ es convexo por ser intersección de convexos luego podemos unir los términos de la sucesión mediante segmentos y encontrar así la curva buscada.

Aplicando el teorema anterior obtenemos que Ω es un dominio de Jordan. \square

2.3. Equivalencia con el problema de Dirichlet

Se probará en esta sección la equivalencia del problema de Dirichlet con el Teorema de Riemann, en el sentido de que a partir de la solución del problema de Dirichlet en un abierto podemos construir explícitamente el isomorfismo conforme que lo envía al disco unidad, y recíprocamente, si conocemos este isomorfismo conforme podemos resolver el problema de Dirichlet en el abierto siempre y cuando su frontera sea una curva de Jordan. La referencia más importante para esta sección es [16].

2.3.1. Del Teorema de Riemann al Problema de Dirichlet

Supongamos que disponemos del teorema de Riemann. Éste nos garantiza la existencia de un isomorfismo conforme f entre cierto abierto simplemente conexo Ω y el disco unidad. Necesitaremos además suponer que $\partial\Omega$ es una curva de Jordan para poder extender el isomorfismo a la frontera.

Resolveremos el problema de Dirichlet para este abierto Ω , es decir, dada una función $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua, nuestro objetivo es encontrar una función $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ armónica en Ω y que en $\partial\Omega$ coincida con φ .

Disponemos por otro lado de la solución al problema de Dirichlet en el disco unidad mediante el núcleo de Poisson. Tomaremos como condición de contorno a $\psi = \varphi \circ f^{-1}$ y llamaremos v a dicha solución. Es decir:

- $v : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.
- $v|_{\mathbb{D}}$ es armónica.
- $v|_{\partial\mathbb{D}} = \psi$.

En estas condiciones, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1. *Sea Ω un abierto simplemente conexo cuya frontera es una curva de Jordan y $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, $u = v \circ f$ es la solución al problema de Dirichlet en Ω , donde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ es un isomorfismo conforme y v es la solución al problema de Dirichlet en el disco unidad con condición de contorno $\psi = \varphi \circ f^{-1}$.*

Demostración. Veamos que la función $u = v \circ f$ es solución del problema de Dirichlet en Ω .

- Es continua en $\overline{\Omega}$ por ser composición de funciones continuas.
- Es armónica en Ω por ser composición de una función holomorfa con una armónica.
- Como $\partial\Omega$ es una curva de Jordan, podemos extender el isomorfismo conforme a la frontera. Entonces, dado $a \in \partial\Omega$ y $b = f(a) \in \partial\mathbb{D}$, tenemos que $u(a) = v(f(a)) = v(b) = \psi(b) = \varphi(f^{-1}(b)) = \varphi(f^{-1}(f(a))) = \varphi(a)$.

□

2.3.2. Del Problema de Dirichlet al Teorema de Riemann

Supondremos ahora que disponemos de la solución del problema de Dirichlet para un abierto simplemente conexo Ω cuya frontera es una curva de Jordan, que supondremos fijo a lo largo de la sección. Denotaremos por DP al conjunto de todos los abiertos Ω que tengan esta propiedad. Construiremos entonces un isomorfismo conforme entre Ω y el disco unidad.

Proposición 2.3.2. *Si $\Omega \in DP$ y $a \in \Omega$, existe una única función $G(z, a)$ tal que*

- i) $G(z, a) \in A(\Omega \setminus \{a\})$.
- ii) Existe $\lim_{z \rightarrow a} \left(G(z, a) - \log \frac{1}{|z-a|} \right)$.
- iii) $G(z, a)|_{\partial\Omega} = 0$.

La llamaremos función de Green de Ω con polo en $z = a$.

Demostración. Veamos primero la existencia. Llamaremos D_Ω a la solución del problema de Dirichlet en Ω con condición de frontera $f(z) = -\log \frac{1}{|z-a|}$. Entonces, $G(z, a) = \log \left(\frac{1}{|z-a|} \right) + D_\Omega(z)$ cumple:

- i) Es armónica en $\Omega \setminus \{a\}$. D_Ω siempre lo es por ser solución del problema de Dirichlet y $\log \frac{1}{|z-a|}$ lo es para $\Omega \setminus \{a\}$.
- ii) $\lim_{z \rightarrow a} \left(G(z, a) - \log \frac{1}{|z-a|} \right) = \lim_{z \rightarrow a} D_\Omega(z) = D_\Omega(a)$.
- iii) $G(z, a)|_{\partial\Omega} = 0$ pues $D_\Omega(z) = -\log \frac{1}{|z-a|}$ en la frontera de Ω por ser la condición de contorno tomada.

Es sencillo probar la unicidad. Si existe otra función de Green $\tilde{G}(z, a)$, entonces $G(z, a) - \tilde{G}(z, a)$ es armónica en Ω pues a es una singularidad evitable debido a ii). Además se anula en $\partial\Omega$ luego necesariamente será nula, es decir, $G(z, a) = \tilde{G}(z, a)$ para cada $z \in \Omega$. \square

La función $\log |z|$ es la función de Green del disco unidad con polo en $z = 0$. Este ejemplo puede ser ilustrativo para comprender lo que es la función de Green en un abierto cualquiera. Se trata de una función que se anula en la frontera del abierto y que en cierto punto tiene un polo de comportamiento logarítmico.

La siguiente proposición nos dará la idea de como construir el isomorfismo conforme.

Proposición 2.3.3. *Sea $\Omega \in DP$ y $\phi_a : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ un isomorfismo conforme tal que $\phi_a(a) = 0$, entonces la función de Green de Ω con polo en $z = a$ es $G(z, a) = \log \frac{1}{|\phi_a(z)|}$.*

Demostración. Por la unicidad, es suficiente ver que G verifica las tres condiciones necesarias para ser la función de Green.

- i) El logaritmo implicado en la definición es armónico cuando $|\phi_a(z)| \neq 0$, es decir, es armónica en $\Omega \setminus \{a\}$.
- ii) $\phi_a(a) = 0$ pero al ser un isomorfismo conforme podemos ponerla como $\phi_a(z) = (z-a)\tilde{\phi}_a(z)$ con $\tilde{\phi}_a(a) \neq 0$. Entonces,

$$\lim_{z \rightarrow a} \left(\log \frac{1}{|\phi_a(z)|} - \log \frac{1}{|z-a|} \right) = \lim_{z \rightarrow a} \log \frac{1}{|\tilde{\phi}_a(z)|} = \log \frac{1}{|\tilde{\phi}_a(a)|}.$$

- iii) $\partial\Omega$ es una curva de Jordan, luego ϕ_a es extensible a la frontera. Entonces, si $z \in \partial\mathbb{D}$, se tiene que $\phi_a(z) \in \partial\mathbb{D}$ y por tanto $G(z, a) = \log \frac{1}{|\phi_a(z)|} = \log 1 = 0$.

□

Ya estamos en condiciones de construir el isomorfismo conforme.

Teorema 2.3.4. Sea $\Omega \in DP$, $G(z, a)$ la función de Green de Ω con polo en $z = a$ y sea $\tilde{G}(z, a)$ su armónica conjugada en $\Omega \setminus \{a\}$. Entonces, la función

$$\phi_a(z) = e^{-[G(z, a) + i\tilde{G}(z, a)]}$$

es un isomorfismo conforme entre Ω y \mathbb{D} tal que $\phi_a(a) = 0$.

Demostración. Veremos en primer lugar que ϕ está bien definida. Para ello, sea

$$h(z, a) = G(z, a) - \log \frac{1}{|z-a|} \in A(\Omega).$$

Como Ω es simplemente conexo, existe su armónica conjugada, es decir, existe $\tilde{h}(z, a) \in A(\Omega)$ tal que $h(z, a) + i\tilde{h}(z, a) \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Además, como $\arg \frac{1}{z-a}$ es formalmente la armónica conjugada de $\log \frac{1}{|z-a|}$, deducimos que la función

$$\tilde{G}(z, a) = \tilde{h}(z, a) + \arg \frac{1}{z-a}$$

es una armónica conjugada de $G(z, a)$ en $\Omega \setminus \{a\}$. Esta función es una función multivaluada con ramas separadas entre sí por múltiplos de 2π , lo cual supone, en principio, un

problema. Sin embargo, éste se soluciona con la exponencial, que tiene periodo $2\pi i$, ya que

$$\begin{aligned}\phi_a(z) &= e^{-[G(z,a)+i\tilde{G}(z,a)]} = e^{-[h(z,a)+i\tilde{h}(z,a)]} e^{-[\log \frac{1}{|z-a|} + \arg \frac{1}{z-a}]} = \\ &= (z-a)e^{-[h(z,a)+i\tilde{h}(z,a)]}\end{aligned}$$

con lo cual ϕ_a está bien definida.

A continuación, debemos observar que el exponente $-(G(z,a) + i\tilde{G}(z,a)) \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ por construcción y por tanto $\phi_a(z)$ es también holomorfa en este conjunto. Poniendo además $\phi_a(a) = 0$, ϕ es además continua en Ω y por tanto $\phi_a(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Fijémonos que así definida, $\phi_a(a) = 0$ es un cero simple y además no se anula en más puntos de Ω .

Recordemos también que $G(z,a)|_{\partial\Omega} = 0$ y por tanto $G(z,a) > 0$. Si existiera cierto $\omega \in \Omega \setminus \{a\}$ tal que $G(\omega,a) \leq 0$, entonces habría un mínimo en $\Omega \setminus \{a\}$ y por tanto G sería constante, lo cual es absurdo. Esto nos garantiza que $|\phi_a(z)| = e^{-G(z,a)} < 1$. Es decir, la imagen efectivamente está contenida en el disco unidad.

Resta por ver que se trata de una biyección. Veamos primero que es inyectiva. Para ello, tomemos $z \neq z'$, ambos en $\Omega \setminus \{a\}$. Consideraremos entonces la aplicación $S_{\phi_a(z')} \circ \phi_a : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$, donde S_z es el isomorfismo usual del disco unidad en si mismo que envía z al cero. Es decir,

$$S_{\phi_a(z')} \circ \phi_a(z) = \frac{\phi_a(z) - \phi_a(z')}{1 - \overline{\phi_a(z')} \phi_a(z)}.$$

Podemos observar que así definida, $S_{\phi_a(z')} \circ \phi_a(z') = 0$. Como $\phi_{z'}(z') = 0$, podemos definir la función holomorfa

$$F = \frac{S_{\phi_a(z')} \circ \phi_a}{\phi_{z'}} \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Además, $|F(z)| = 1$ para cada $z \in \partial\Omega$, ya que $|\phi_{z'}(z)| = 1$ en $\partial\Omega$ por definición y para el numerador, si $z \in \partial\Omega$, $G(z,a) = 0$ luego $|\phi_a(z)| = 1$ y por tanto $|S_{\phi_a(z')} \circ \phi_a(z)| = 1$. Por el principio del máximo para funciones holomorfas, concluimos que $|F(z)| \leq 1$ para todo $z \in \Omega$. En particular,

$$|F(a)| = \left| \frac{S_{\phi_a(z')} \circ \phi_a(a)}{\phi_{z'}(a)} \right| = \left| \frac{S_{\phi_a(z')}(0)}{\phi_{z'}(a)} \right| = \left| \frac{-\phi_a(z')}{\phi_{z'}(a)} \right| \leq 1.$$

Concluimos que $|\phi_a(z')| \leq |\phi_{z'}(a)|$.

Por simetría, podemos construir

$$\tilde{F} = \frac{S_{\phi_{z'}(a)} \circ \phi_{z'}}{\phi_a} \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Las desigualdades son idénticas cambiando los papeles de a y z' y se concluye por tanto $|\phi_{z'}(a)| \leq |\phi_a(z')|$. Por tanto, hemos obtenido que $|\phi_{z'}(a)| = |\phi_a(z')|$. Así, $|F(a)| = 1$, por tanto F es constante, es decir, $|F(z)| = 1$ para todo $z \in \Omega$.

Como hemos supuesto $z \neq z'$, claramente $|\phi_{z'}(z)| \neq 0$. Pero como $|F(z)| = 1$, tenemos que $|S_{\phi_a(z')} \circ \phi_a(z)| = |\phi_{z'}(z)|$, y podemos concluir entonces que $|S_{\phi_a(z')} \circ \phi_a(z)| \neq 0$, con lo cual $\phi_a(z) \neq \phi_a(z')$, lo cual demuestra la inyectividad.

Veamos por último la sobreyectividad por reducción al absurdo, es decir, supongamos que existe $b \in \mathbb{D}$ tal que $b \notin \phi_a(\Omega)$. Entonces, la función $S_b \circ \phi_a : \Omega \rightarrow \mathbb{D} \setminus \{0\}$ cumple que $|S_b \circ \phi_a(z)| = 1$ para cada $z \in \partial\Omega$, ya que ϕ_a transforma puntos de $\partial\Omega$ en puntos de la frontera del disco y S_b transforma puntos de la frontera del disco en puntos de la frontera del disco. Entonces, de nuevo por el principio del máximo, $|S_b \circ \phi_a(z)| \leq 1$ para todo $z \in \Omega$.

Análogamente, la función $(S_b \circ \phi_a)^{-1} : \Omega \rightarrow \mathbb{D} \setminus \{0\}$ cumple de igual manera que $|(S_b \circ \phi_a(z))^{-1}| = 1$ para los puntos de la frontera y por tanto $|(S_b \circ \phi_a(z))^{-1}| \leq 1$ para todo $z \in \Omega$, es decir, $|S_b \circ \phi_a(z)| \geq 1$ para todo $z \in \Omega$. Concluimos, teniendo en cuenta ambas desigualdades, que $|S_b \circ \phi_a(z)| = 1$ para todo $z \in \Omega$. En particular, $1 = |S_b \circ \phi_a(a)| = |S_b(0)| = |-b|$, lo cual es absurdo. Por tanto ϕ_a es sobreyectiva, lo cual finaliza la demostración del teorema. \square

El teorema previo demuestra que podemos encontrar expresiones explícitas de la aplicación de Riemann a partir de la solución del correspondiente problema de Dirichlet. El teorema de Riemann, pide además que $\phi'_a(a) > 0$, sin embargo es inmediato hacer que la derivada de ϕ cumpla esta condición multiplicando ϕ por una constante como hacíamos en la demostración del teorema de Riemann.

Existen en la literatura métodos directos para resolver el problema de Dirichlet que no usan variable compleja, por ejemplo el método de Perron (Ver [20]). A partir de ellos se obtendrían pruebas alternativas del Teorema de Riemann para los dominios correspondientes. Esta era la idea subyacente en las pruebas originales de Riemann, Schwarz, Hilbert y otros, como comentaremos en el Apéndice B.

2.4. Fórmulas de Schwarz-Christoffel

El Teorema de Riemann garantiza la existencia de un isomorfismo conforme entre dos abiertos simplemente conexos pero no es siempre posible encontrar una fórmula explícita para dicha aplicación. Disponemos de fórmulas para las más sencillas, como la exponencial, el logaritmo, las potencias e incluso las transformaciones de Möbius. Analizaremos en esta sección un caso más general. Las principales referencias para esta sección son [4, 12, 21] y en ella estudiaremos las Fórmulas de Schwarz-Christoffel, que nos permiten encontrar el isomorfismo conforme en el caso de que uno de los abiertos sea el semiplano superior y el otro sea un polígono. El hecho de tomar el semiplano superior no es restrictivo pues para encontrar la aplicación del disco unidad al polígono bastaría con componer con la transformación de Möbius que envía el disco al semiplano (Transformación de Cayley). En esta sección denotaremos al semiplano superior como \mathbb{H} .

En general, si $\gamma(t)$ es una curva en el plano, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una transformación conforme y llamamos $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$, tenemos que $\Gamma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$. Tomando una rama fija del argumento, $\arg(\Gamma'(t)) = \arg(f'(\gamma(t))) + \arg(\gamma'(t))$. Si llamamos τ_γ y τ_Γ a los vectores tangentes unitarios en $\gamma(t)$ y $\Gamma(t)$ respectivamente, obtenemos que $\arg(\tau_\Gamma) = \arg(f'(z)) + \arg(\tau_\gamma)$, donde hemos llamado $z = \gamma(t)$.

En nuestro caso particular γ es el eje real, luego $\tau_\gamma = 1$ y por tanto $\arg(\tau_\Gamma) = \arg(f'(z))$. Si queremos que el eje real se transforme en la frontera Γ de un polígono necesitamos fijar n valores $A_1 < A_2 < \dots < A_{n-1} \in \mathbb{R}$ cuyas imágenes, junto con la del infinito, serán los vértices del polígono. Además, $\arg(f'(z))$ debe ser constante en los intervalos (A_j, A_{j+1}) y debe saltar en cada extremo proporcionalmente al ángulo entre los lados consecutivos del polígono. Este argumento motiva escoger la derivada de f como

$$f'(z) = A(z - A_1)^{-\beta_1}(z - A_2)^{-\beta_2} \dots (z - A_{n-1})^{-\beta_{n-1}}$$

con $A \in \mathbb{C}$. Tomada así, se cumple que $\arg(f'(z)) = \arg(A) - \beta_1 \arg(z - A_1) - \beta_2 \arg(z - A_2) - \dots - \beta_{n-1} \arg(z - A_{n-1})$. Por tanto, si nos movemos en el eje real y $z < A_1$, entonces $\arg(z - A_i) = \pi$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ luego $\arg(f'(z)) = \arg(A) - \pi \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \right)$. Ahora, si $A_1 < z < A_2$ entonces todos los argumentos valen aún π excepto $\arg(z - A_1) = 0$, es decir, el argumento ha aumentado $\beta_1 \pi$. Análogamente, en cada uno de los A_i el argumento del vector tangente aumenta $\beta_i \pi$ hasta llegar a $x > A_{n-1}$, donde $\arg(f'(z)) = \arg(A)$.

Si llamamos $\alpha_i\pi$ al ángulo del polígono en el vértice i , llamamos ángulo exterior a su suplementario, es decir, al ángulo $\beta_i\pi$ tal que $\alpha_i + \beta_i = 1$. Gracias al razonamiento geométrico anterior, podemos afirmar que los valores $\beta_i\pi$ representan los ángulos exteriores en cada vértice. Además supondremos que $0 < \beta_i < 1$ para que el polígono sea convexo. La suma de los ángulos exteriores de un polígono es 2π luego para que verdaderamente la imagen sea un polígono debemos imponer también que $\sum_{i=1}^n \beta_i = 2$, donde β_n es por definición el ángulo exterior en el vértice imagen del infinito.

En caso de que $\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i = 2$, el polígono tiene en realidad $n - 1$ vértices pues no hay variación del tangente en la imagen del infinito. Es decir, si queremos construir un polígono real de n lados donde las preimágenes de los vértices sean A_1, A_2, \dots, A_n bastaría con tomar

$$f'(z) = A(z - A_1)^{-\beta_1} (z - A_2)^{-\beta_2} \dots (z - A_n)^{-\beta_n}$$

con $\sum_{i=1}^n \beta_i = 2$.

Los argumentos anteriores motivan la elección de la derivada de f pero no sabemos aún, en general, si existe una transformación conforme con dicha derivada que cumpla nuestros requerimientos.

Tomaremos los factores $(z - A_i)^{-\beta_i}$ como ramas de las funciones potencias con cortes de ramificación localizados por debajo del eje X, es decir, $(z - A_i)^{-\beta_i} = |z - A_i|^{-\beta_i} e^{-i\beta_i\theta_i}$ tomando los argumentos $\theta_i = \arg(z - A_i)$ en el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_i \leq \frac{3\pi}{2}$ para $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Así, $f'(z)$ es analítica en, al menos, todo el semiplano superior cerrado excepto en los A_i . Si tomamos z_0 un valor en esta región de analiticidad.

Podemos definir

$$S(z) = A \int_{z_0}^z (\omega - A_1)^{-\beta_1} (\omega - A_2)^{-\beta_2} \dots (\omega - A_{n-1})^{-\beta_{n-1}} d\omega + B$$

que claramente cumple $S'(z) = f'(z)$.

Salvo casos excepcionales, no es sencillo resolver el tipo de integrales que están implicadas en la fórmula de $S(z)$. Tampoco es cierto que en general, podamos escoger los valores A_1, A_2, \dots, A_n arbitrariamente. Veamos, antes de continuar, un ejemplo de estas transformaciones que nos será ilustrativo.

Ejemplo 2.4.1. Sea P un triángulo equilátero, es decir, nos situamos en el caso $n = 3$ y $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 2/3$. en este caso tomaremos $z_0 = 1$, $A = 1$, $B = 0$, $A_1 = -1$, $A_2 = 1$ y $A_3 = \infty$. Veamos que tomando de esta manera las constantes, la transformación resultante es válida. Dicha transformación viene dada por la fórmula

$$S(z) = \int_1^z (\omega + 1)^{-2/3} (\omega - 1)^{-2/3} d\omega.$$

Claramente se tiene que $a_2 = S(1) = 0$. Para calcular la imagen del resto de puntos hace falta un poco más de trabajo. Si $z = -1$ entonces podemos escribir una integral real. Además, para $-1 < x < 1$ tenemos $(x + 1)^{-2/3} = |x + 1|^{-2/3} e^0 = (x + 1)^{-2/3}$ y $(x - 1)^{-2/3} = |1 - x|^{-2/3} e^{-\frac{i2\pi}{3}}$. Por tanto queda,

$$S(-1) = \int_1^{-1} (x + 1)^{-2/3} (1 - x)^{-2/3} e^{-\frac{i2\pi}{3}} dx = e^{\frac{\pi i}{3}} \int_0^1 \frac{2dx}{(1 - x^2)^{2/3}}.$$

Efectuando ahora el cambio de variable $x = \sqrt{t}$, podemos poner este punto en función de la conocida función beta, que denotaremos por $B(x, y)$.

$$a_1 = S(-1) = e^{\frac{\pi i}{3}} \int_0^1 t^{-1/2} (1 - t)^{-2/3} dt = e^{\frac{\pi i}{3}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right).$$

En el caso del último punto, a_3 pertenece al eje real positivo pues

$$a_3 = \int_1^{\infty} (x + 1)^{-2/3} (x - 1)^{-2/3} dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 1)^{2/3}}.$$

Sin embargo viene dado también por

$$a_3 = \int_1^{-1} (x + 1)^{-2/3} (x - 1)^{-2/3} dx + \int_{-1}^{-\infty} (x + 1)^{-2/3} (x - 1)^{-2/3} dx.$$

La primera de estas integrales ya la tenemos resuelta y podemos encontrar la solución a la segunda de una manera similar:

$$a_3 = a_1 + e^{-\frac{4\pi i}{3}} \int_{-1}^{-\infty} (|x + 1||x - 1|)^{-2/3} dx = a_1 + e^{-\frac{\pi i}{3}} \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 1)^{2/3}}.$$

Observemos que la última igualdad se debe a que $e^{-\frac{4\pi i}{3}} = -e^{-\frac{\pi i}{3}}$. Pero entonces $a_3 = a_1 + a_3 e^{-\frac{\pi i}{3}}$. Despejando,

$$a_3 = \frac{a_1}{1 - e^{-\frac{\pi i}{3}}} = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right).$$

Así pues, nuestra aplicación $S(z)$ transforma el semiplano superior al triángulo de vértices 0 , $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ y $e^{\frac{\pi i}{3}}B(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$. Una representación de los puntos permite comprobar que efectivamente el triángulo es equilátero. Podríamos a continuación modificar las constantes A y B para cambiar el tamaño o la posición del triángulo.

Podríamos a continuación demostrar que escogiendo las constantes A_j adecuadamente, $S(z)$ es un isomorfismo conforme como se hace en [4]. Dicha elección de constantes es importante pues, esto no es cierto para constantes cualesquiera como podemos comprobar en [14]. De hecho, las líneas del polígono que se obtiene como imagen de S podrían cruzarse y la frontera no sería una curva simple. Por tanto, es más riguroso partir del polígono P de vértices a_1, a_2, \dots, a_n ordenados consecutivamente y demostrar que el isomorfismo conforme que transforma el semiplano superior en P tiene la forma de $S(z)$. Más concretamente, demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 2.4.2. *Sea P un polígono de vértices a_1, a_2, \dots, a_n y F un isomorfismo conforme que transforma el semiplano superior en P . Si ninguna de las preimágenes de los vértices es infinito, existen constantes $A, B \in \mathbb{C}$ y $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in [0, 1]$ tales que*

$$F(z) = A \int_0^z (\omega - A_1)^{-\beta_1} (\omega - A_2)^{-\beta_2} \dots (\omega - A_n)^{-\beta_n} d\omega + B$$

donde $F(A_k) = a_k$ para cada $k = 1, 2, \dots, n$.

Demostración. Extenderemos en primer lugar el isomorfismo conforme a la frontera. No podemos hacerlo directamente puesto que el semiplano superior no es acotado, pero podemos escribir F como composición de la transformación de Cayley $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$, que envía el semiplano al disco y de un isomorfismo conforme que envía el disco al polígono (cuya existencia viene garantizada por el Teorema de Riemann). Ambas son extensibles a la frontera, la primera por ser una transformación de Möbius y la segunda por el Teorema de Carathéodory luego F también lo es.

Podemos entonces llamar $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ a los valores tales que $F(A_i) = a_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Por hipótesis estos valores son finitos. Además, como F es inyectiva podemos considerar que los valores están en orden creciente o decreciente. Supondremos $A_1 < A_2 < \dots < A_n$ pues en caso contrario bastaría con reenumerarlos. Sabemos entonces que cada uno de los conjuntos $[A_1, A_2]$, $[A_2, A_3]$, ..., $[A_{n-2}, A_{n-1}]$, $[A_n, \infty) \cup (-\infty, A_1]$ se transforma biyectivamente mediante F en los n lados del polígono.

En primer lugar, definiremos

$$h_k(z) = (F(z) - a_k)^{\frac{1}{\alpha_k}}$$

para cada $\{z \in \mathbb{H} : A_{k-1} < \operatorname{Re}(z) < A_{k+1}\}$, donde recordemos que los valores $\alpha_k \pi$ son los ángulos interiores del polígono. Además h_k es continua en esta semibanda, incluido el segmento (A_{k-1}, A_{k+1}) y por construcción transforma el segmento $[A_{k-1}, A_{k+1}]$ en un segmento recto del plano complejo que llamaremos L_k . Así mismo, podemos aplicar el Teorema de reflexión de Schwarz para extender la función a toda la banda $\{z \in \mathbb{C} : A_{k-1} < \operatorname{Re}(z) < A_{k+1}\}$. Derivando, obtenemos que

$$h'_k(z) = \frac{1}{\alpha_k} (F(z) - a_k)^{\frac{1}{\alpha_k} - 1} F'(z)$$

y por tanto

$$\alpha_k \frac{h'_k(z)}{h_k(z)} = \frac{F'(z)}{F(z) - F(A_k)}.$$

Como F es conforme en la semibanda superior abierta, $F'(z)$ nunca se anula en dicha región luego $h'_k(z) \neq 0$. Además, por reflexión, podemos afirmar que $h'_k(z)$ tampoco se anula en la semibanda abierta inferior. Resta por ver lo que ocurre en el intervalo real, para lo cual tomamos $A_{k-1} < x < A_{k+1}$. El conjunto $h_k(D(x, \varepsilon) \cap \mathbb{H})$ está contenido en uno de los lados de L_k . Como h_k es inyectiva hasta L_k por serlo F , la simetría de Schwarz nos garantiza que h_k es inyectiva en todo el disco $D(x, \varepsilon)$ con lo cual $h'_k(z) \neq 0$ en el segmento real abierto y por tanto en toda la banda.

Por no anularse $h'_k(z)$, la función $h_k(z)$ tiene un cero simple en A_n , es decir, puede escribirse como $h_k(z) = (z - A_n) \varphi_k(z)$ para cierta $\varphi_k(z) \neq 0$ en la banda. Entonces

$$\frac{h'_k(z)}{h_k(z)} = \frac{\varphi_k(z) + (z - A_n) \varphi'_k(z)}{(z - A_n) \varphi_k(z)} = \frac{1}{z - A_n} + D_k(z)$$

con D_k holomorfa en la banda. Por otro lado, como

$$F'(z) = \alpha_k h_k^{-\beta_k} h'_k(z)$$

y

$$F''(z) = -\beta_k \alpha_k h_k^{-\beta_k - 1} (h'_k(z))^2 + \alpha_k h_k^{-\beta_k} h''_k(z)$$

tenemos que

$$\frac{F''(z)}{F'(z)} = \frac{-\beta_k h'_k(z)}{h_k(z)} + \frac{h''_k(z)}{h'_k(z)} = \frac{-\beta_k}{z - A_k} + E_k(z)$$

donde E_k es una función holomorfa en la banda por serlo $\frac{h''_k(z)}{h'_k(z)}$.

Podemos efectuar el mismo proceso para A_n y A_1 , donde

$$\frac{F''(z)}{F'(z)} = -\frac{\beta_1}{z - A_1} + E_1(z)$$

y

$$\frac{F''(z)}{F'(z)} = -\frac{\beta_n}{z - A_n} + E_n(z)$$

con E_1 holomorfa en la banda $-\infty < \operatorname{Re}(z) < A_2$ y E_n holomorfa en la banda $A_{n-1} < \operatorname{Re}(z) < \infty$.

Finalmente, tomando $R > \max\{|A_k| : k = 1, 2, \dots, n\}$ podemos realizar una reflexión más para extender F al exterior del disco $D(0, R)$. Podemos efectuar la reflexión respecto de la unión de segmentos $(-\infty, A_1) \cup (A_n, \infty)$ ya que su imagen mediante F es un lado del polígono. Como F transforma el semiplano superior en una región acotada, por simetría la continuación de F fuera del disco $D(0, R)$ es también acotada y por tanto F es holomorfa en el infinito, es decir, $\lim_{\omega \rightarrow 0} F(1/\omega) = a \in \mathbb{C}$ y $F(1/\omega) \in \mathcal{H}(D^*(0, 1/R))$. Desarrollando, $F(1/\omega) = a_0 + a_1 \omega + \dots + a_n \omega^n + \dots$, es decir, $F(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$ y por último, derivando término a término y dividiendo obtenemos que $\frac{F''(z)}{F'(z)}$ decae al ritmo de $\frac{1}{z}$ cuando $|z| \rightarrow \infty$.

Entonces, la función

$$\frac{F''(z)}{F'(z)} + \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{z - A_k}$$

es holomorfa en todo el plano complejo ya que las distintas bandas se solapan y lo cubren y además en los puntos A_l donde el denominador se anula toma el valor

$$E_l(A_l) + \sum_{k \neq l} \frac{\beta_k}{A_l - A_k}$$

y por tanto es holomorfa en dicho punto.

Podemos observar también que esta función se anula en el infinito por el decaimiento de $\frac{F''(z)}{F'(z)}$ luego aplicando el Teorema de Liouville, la función debe ser nula, es decir,

$$\frac{F''(z)}{F'(z)} = -\sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{z - A_k}.$$

Llamemos ahora

$$G(z) = (z - A_1)^{-\beta_1} (z - A_2)^{-\beta_2} \cdots (z - A_n)^{-\beta_n}.$$

Derivando obtenemos que

$$-G'(z) = \beta_1 (z - A_1)^{-\beta_1 - 1} \prod_{i \neq 1} (z - A_i)^{-\beta_i} + \cdots + \beta_n (z - A_n)^{-\beta_n - 1} \prod_{i \neq n} (z - A_i)^{-\beta_i}.$$

Dividiendo ahora, se tiene que

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = - \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{z - A_k}.$$

Hechos estos cálculos, como $\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{F''(z)}{F'(z)}$, deducimos que

$$\frac{F''(z)G(z) - F'(z)G'(z)}{G(z)^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{F'(z)}{G(z)} \right) = 0$$

es decir, $\frac{F'(z)}{G(z)} = A \in \mathbb{C}$. De aquí, $F'(z) = AG(z) = A(z - A_1)^{-\beta_1} (z - A_2)^{-\beta_2} \cdots (z - A_n)^{-\beta_n}$.

Finalmente, integrando,

$$F(z) = A \int_0^z (\omega - A_1)^{-\beta_1} (\omega - A_2)^{-\beta_2} \cdots (\omega - A_n)^{-\beta_n} d\omega + B$$

lo cual prueba el teorema. □

En el teorema anterior hemos supuesto que todas las preimágenes por F de los vértices eran valores finitos. Podemos extenderlo ahora al caso en el que una de ellas puede ser infinito.

Teorema 2.4.3. *Sea P un polígono de vértices a_1, a_2, \dots, a_n y F un isomorfismo conforme que transforma el semiplano superior en P . Si $F(\infty) = a_n$, existen constantes $A, B \in \mathbb{C}$ y $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1} \in [0, 1]$ tales que*

$$F(z) = A \int_0^z (\omega - A_1)^{-\beta_1} (\omega - A_2)^{-\beta_2} \cdots (\omega - A_{n-1})^{-\beta_{n-1}} d\omega + B$$

donde $F(A_k) = a_k$ para cada $k = 1, 2, \dots, n - 1$.

Demostración. Al igual que en el teorema anterior, podemos extender el isomorfismo conforme a la frontera. Supondremos que $A_k \neq 0$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$ pues en caso contrario bastaría con componer con una traslación.

Tomaremos primero un punto $A_n^* > 0$ real y consideraremos la aplicación $\Phi(z) = A_n^* - \frac{1}{z}$, que es un automorfismo del semiplano superior. Sea $A_k^* = \Phi(A_k)$ para cada $k = 1, 2, \dots, n-1$ y observemos que $A_n^* = \Phi(\infty)$. Podemos afirmar entonces que $(F \circ \Phi^{-1})(A_k^*) = a_k$ para cada $k = 1, 2, \dots, n$. Esta aplicación es un isomorfismo conforme que transforma la recta real en el polígono P luego podemos aplicar entonces el teorema anterior para afirmar que

$$(F \circ \Phi^{-1})(\omega') = A' \int_0^{\omega'} (\omega - A_1^*)^{-\beta_1} (\omega - A_2^*)^{-\beta_2} \dots (\omega - A_n^*)^{-\beta_n} d\omega + B'$$

con $A', B' \in \mathbb{C}$. Aplicaremos a continuación el cambio de variable $\omega = \Phi(z)$. Cada término $(\omega - A_j^*)$ se convierte en $(z(A_n^* - A_j^*) - 1)/z$ pero es posible eliminar el denominador de los n términos pues

$$d\omega = \frac{dz}{z^2} = \frac{dz}{z \sum_{k=1}^n \beta_k}.$$

Además podemos llamar $z' = \Phi^{-1}(\omega')$ con lo cual la integral queda

$$\begin{aligned} F(z') &= A' \int_{\Phi^{-1}(0)}^{z'} (z(A_n^* - A_1^*) - 1)^{-\beta_1} (z(A_n^* - A_2^*) - 1)^{-\beta_2} \dots (z(A_n^* - A_{n-1}^*) - 1)^{-\beta_{n-1}} dz + B' = \\ &= A \int_0^{z'} \left(z - \frac{1}{A_n^* - A_1^*}\right)^{-\beta_1} \left(z - \frac{1}{A_n^* - A_2^*}\right)^{-\beta_2} \dots \left(z - \frac{1}{A_n^* - A_{n-1}^*}\right)^{-\beta_{n-1}} dz + B \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos dividido por una constante para obtener A y hemos llamado

$$B = B' + A' \int_{\Phi^{-1}(0)}^0 (z(A_n^* - A_1^*) - 1)^{-\beta_1} (z(A_n^* - A_2^*) - 1)^{-\beta_2} \dots (z(A_n^* - A_{n-1}^*) - 1)^{-\beta_{n-1}} dz.$$

Finalmente, como $\frac{1}{A_n^* - A_k^*} = A_k$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$ obtenemos, como queríamos demostrar, que

$$F(z') = A \int_0^{z'} (z - A_1)^{-\beta_1} (z - A_2)^{-\beta_2} \dots (z - A_{n-1})^{-\beta_{n-1}} dz + B.$$

□

Capítulo 3

Aplicaciones y aspectos numéricos

«CONTENIDOS»

- Caracterización de abiertos simplemente conexos.
- Cálculo de flujos.
- Operadores que alcanzan la norma.
- Transformaciones de Schwarz-Christoffel con MATLAB.

El objeto de este capítulo es analizar algunas de las consecuencias y aplicaciones del teorema de representación de Riemann. Entre ellas, posiblemente la más conocida es la caracterización de los abiertos simplemente conexos, que es la que se estudiará en primer lugar.

Tras ello, se darán algunas aplicaciones más prácticas como el cálculo de flujos, que hace uso de las fórmulas de Schwarz-Christoffel estudiadas en el capítulo anterior.

La siguiente sección presenta una aplicación al análisis funcional que hace uso del Teorema de Carathéodory para demostrar un resultado tipo Urysohn con recientes aplicaciones a la aproximación por operadores que alcanzan la norma.

Por último cerraremos el capítulo con una representación gráfica de las transformaciones de Schwarz-Christoffel haciendo uso de MATLAB.

Las referencias empleadas para este capítulo varían según la sección y se presentan al comienzo de las mismas.

3.1. Caracterización de abiertos simplemente conexos

La primera aplicación clásica del Teorema de representación de Riemann suele ser la caracterización de abiertos simplemente conexos. Es este el objetivo de la sección, y para ello completaremos la cadena de equivalencias que ya enunciamos en el Teorema A.1.10. Las referencias esenciales para esta sección son [5, 9, 20, 23].

Para ello, debemos recordar primero el concepto de caminos homotópicos.

Definición 3.1.1. *Dados $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$ dos caminos cerrados en $\Omega \subset \mathbb{C}$, se dice que son Ω -homotópicos si existe una función continua $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ tal que $h(0, t) = \gamma_0(t)$ y $h(1, t) = \gamma_1(t)$ para todo $t \in [0, 1]$ y $h(s, 0) = h(s, 1)$ para todo $s \in [0, 1]$. Diremos en este caso que h es una homotopía entre γ_0 y γ_1 .*

Recordemos que un abierto Ω es simplemente conexo cuando todo camino cerrado en Ω es Ω -homotópico a un camino constante. Se trata de la definición A.1.11. Intuitivamente, un abierto simplemente conexo es aquel en el que podemos deformar cualquier camino cerrado de manera continua hasta convertirlo a un punto. Cualquier abierto conexo es simplemente conexo. Presentamos a continuación el ejemplo del disco unidad.

Ejemplo 3.1.2. *El disco unidad \mathbb{D} es simplemente conexo. En efecto, dado un camino cerrado $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$, la aplicación $h(s, t) = (1 - s)\gamma(t)$ es una homotopía entre γ y el camino constantemente igual a cero, ya que $h(0, t) = \gamma(t)$ y $h(1, t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$ y $h(s, 0) = (1 - s)\gamma(0) = (1 - s)\gamma(1) = h(s, 1)$ para todo $s \in [0, 1]$. Podemos observar además que la imagen de h está contenida en el disco unidad, ya que $|h(s, t)| = |(1 - s)\gamma(t)| < 1$ para todo $t, s \in [0, 1]$.*

Denotaremos en las siguientes proposiciones por $\Lambda(\Omega)$ al conjunto de los caminos cerrados en Ω , es decir, $\Lambda(\Omega) = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega \text{ continua} : \gamma(0) = \gamma(1)\}$. Dotaremos a este espacio con la norma del supremo $\|\gamma\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |\gamma(t)|$.

Proposición 3.1.3. *Dos caminos cerrados $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$ son Ω -homotópicos si y sólo si existe $\gamma : [0, 1] \rightarrow (\Lambda(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ continua tal que $\gamma(0) = \gamma_0$ y $\gamma(1) = \gamma_1$.*

Demostración. $[\Rightarrow]$ Supongamos que γ_0 y γ_1 son Ω -homotópicos y sea $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una homotopía entre ellos. Entonces, definiendo $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Lambda(\Omega)$ como $\gamma(s)(t) =$

$h(s, t)$, se tiene que $\gamma(0) = h(0, t) = \gamma_0(t)$ y $\gamma(1) = h(1, t) = \gamma_1(t)$ para cada $t \in [0, 1]$. Además es continua, ya que como h es uniformemente continua en $[0, 1] \times [0, 1]$, se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existe cierto $\delta > 0$ tal que si $s, s' \in [0, 1]$ y $t, t' \in [0, 1]$ verifican $|s - s'| < \delta$ y $|t - t'| < \delta$ entonces $|h(s, t) - h(s', t')| < \varepsilon$. En particular, si $|s - s'| < \delta$ para cada $t \in [0, 1]$, se tiene $|h(s, t) - h(s', t)| < \varepsilon$ y por tanto $\|h(s, t) - h(s', t)\|_\infty \leq \varepsilon$, lo cual equivale a la continuidad de γ .

[\Leftarrow] Recíprocamente, si existe γ como en el enunciado, la aplicación $h(s, t) = \gamma(s)(t)$ con $s, t \in [0, 1]$ es una homotopía entre γ_0 y γ_1 ya que $h(0, t) = \gamma(0, t) = \gamma_0(t)$ y $h(1, t) = \gamma(1, t) = \gamma_1(t)$ para todo $t \in [0, 1]$ y $h(s, 0) = \gamma(s)(0) = \gamma(s)(1) = h(s, 1)$ para todo $s \in [0, 1]$, donde en la última cadena de igualdades se usa que $\gamma(s)$ es cerrado para cualquier $s \in [0, 1]$ por pertenecer a $\Lambda(\Omega)$. \square

Necesitamos probar a continuación algunos lemas acerca de índices de caminos, concepto que se estudia en la sección A.1.

Lema 3.1.4. Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ caminos cerrados continuos cuya imagen no contiene al cero. Entonces:

- i) $\text{Ind}(\gamma_0\gamma_1, 0) = \text{Ind}(\gamma_0, 0) + \text{Ind}(\gamma_1, 0)$.
- ii) Si $|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)| \leq |\gamma_1(t)|$ para todo $t \in [0, 1]$, entonces, $\text{Ind}(\gamma_0, 0) = \text{Ind}(\gamma_1, 0)$.

Demostración. i) Por la definición de índice tenemos que $\text{Ind}(\gamma_i, 0) = \frac{1}{2\pi i}(g_i(1) - g_i(0))$, donde g_i es un logaritmo continuo de γ_i en $[0, 1]$ para $i = 0, 1$. Definiendo $g = g_0 + g_1$, esta función es un logaritmo continuo de $\gamma = \gamma_0\gamma_1$ y por tanto

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi i}(g(1) - g(0)) = \frac{1}{2\pi i}(g_0(1) - g_0(0)) + \frac{1}{2\pi i}(g_1(1) - g_1(0)) = \\ &= \text{Ind}(\gamma_0, 0) + \text{Ind}(\gamma_1, 0). \end{aligned}$$

- ii) Como $|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)| \leq |\gamma_1(t)|$ para todo $t \in [0, 1]$, el camino $\gamma(t) = \frac{\gamma_0(t)}{\gamma_1(t)}$ está contenido en $D(1, 1) \setminus \{0\} \subset \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}z > 0\}$. Pero en el semiplano derecho podemos definir el logaritmo principal, es decir, podemos definir $g(t) = \text{Log}(\gamma(t))$, que es continuo y verifica $g(1) = g(0)$ por ser el camino cerrado. Se deduce entonces que $\text{Ind}(\gamma, 0) = 0$ y aplicando el apartado anterior a $\gamma_0 = \gamma\gamma_1$ se obtiene que $\text{Ind}(\gamma_0, 0) = \text{Ind}(\gamma, 0) + \text{Ind}(\gamma_1, 0) = \text{Ind}(\gamma_1, 0)$. \square

Lema 3.1.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $a \notin \Omega$. La aplicación $\text{Ind}(\cdot, a) : (\Lambda(\Omega), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{Z}$ que a cada camino cerrado en Ω le hace corresponder su índice alrededor de a es localmente constante.*

Demostración. Sea $\gamma_0 \in \Lambda(\Omega)$. Se tiene que $a \notin \gamma_0([0, 1])$, por tanto podemos tomar $0 < \varepsilon = \min\{|\gamma_0(t) - a| : t \in [0, 1]\}$. Basta tomar entonces $\gamma_1 \in \Lambda(\Omega)$ tal que $\|\gamma_0 - \gamma_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ para que se verifique que $|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)| \leq \|\gamma_0 - \gamma_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} < |\gamma_0(t) - a|$ para $t \in [0, 1]$. Se deduce de ello que

$$|(\gamma_0(t) - a) - (\gamma_1(t) - a)| = |\gamma_0(t) - \gamma_1(t)| < |\gamma_0(t) - a| < |\gamma_0(t) - a| + |\gamma_1(t) - a|$$

para todo $t \in [0, 1]$. Aplicamos finalmente el segundo apartado del lema anterior para concluir que $\text{Ind}(\gamma_0 - a, 0) = \text{Ind}(\gamma_1 - a, 0)$ o equivalentemente, $\text{Ind}(\gamma_0, a) = \text{Ind}(\gamma_1, a)$, que era lo que queríamos demostrar. \square

Con estos lemas podemos demostrar la siguiente proposición, que establece que dos caminos Ω -homotópicos son también Ω -homólogos.

Proposición 3.1.6. *Si dos caminos cerrados $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$ son Ω -homotópicos, entonces son Ω -homólogos.*

Demostración. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos, aplicando la proposición 3.1.3, sabemos que existe una aplicación $\gamma : [0, 1] \rightarrow (\Lambda(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ continua tal que $\gamma(0) = \gamma_0$ y $\gamma(1) = \gamma_1$. Podemos considerar por tanto la composición $\text{Ind}(\gamma(s), a)$, donde $\text{Ind}(\cdot, a)$ es, como en la proposición anterior, la aplicación que a cada camino cerrado en Ω le hace corresponder su índice. Esta aplicación es localmente constante aplicando dicha proposición y por tanto continua. Además, como $[0, 1]$ es conexo, la función es constante. En particular, $\text{Ind}(\gamma_0, a) = \text{Ind}(\gamma(0), a) = \text{Ind}(\gamma(1), a) = \text{Ind}(\gamma_1, a)$. Como esto es válido para cada $a \notin \Omega$, se concluye que γ_0 y γ_1 son Ω -homólogos. \square

Con las herramientas desarrolladas, estamos en condiciones de probar finalmente la caracterización de abiertos simplemente conexos.

Teorema 3.1.7 (Caracterización de abiertos simplemente conexos). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) Ω es simplemente conexo.

- ii) Cada camino cerrado en Ω es Ω -homólogo a cero.
- iii) $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.
- iv) Para cada ciclo regular a trozos Γ en Ω , cada punto $z \in \Omega \setminus \text{Imagen}(\Gamma)$ y cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, se verifica:

$$\text{Ind}(\Gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

- v) Para cada ciclo regular a trozos Γ en Ω , y cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se cumple $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.
- vi) Ω es holomórficamente conexo, es decir, para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$.
- vii) Ω es logarítmicamente conexo, es decir, para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^g = f$.
- viii) Para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g^2 = f$.
- ix) Ω es homeomorfo a \mathbb{D} .

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Sea $a \notin \Omega$ y γ_0 un camino cerrado en Ω . Por hipótesis, γ_0 es Ω -homotópico a un camino constante que llamaremos γ_1 . Por ser constante, $\text{Ind}(\gamma_1, a) = 0$. Aplicando la proposición 3.1.6, γ_0 y γ_1 son Ω -homólogos y por tanto $\text{Ind}(\gamma_0, a) = \text{Ind}(\gamma_1, a) = 0$.

$ii) \Leftrightarrow iii) \Leftrightarrow iv) \Leftrightarrow v) \Leftrightarrow vi) \Leftrightarrow vii)$ Se trata del Teorema A.1.10.

$vii) \Rightarrow viii)$ Por hipótesis existe $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^\psi = f$. Definiendo entonces $g(z) = e^{\frac{1}{2}\psi(z)}$ se tiene que $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $(g(z))^2 = e^\psi = f$, con lo cual es la función buscada.

$viii) \Rightarrow ix)$ Si $\Omega = \mathbb{C}$, basta con tomar como homeomorfismo la aplicación $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ definida como $\phi(z) = \frac{z}{1+|z|}$, que es biyectiva con inversa $\psi^{-1}(z) = \frac{z}{1-|z|}$ y claramente ψ y ψ^{-1} son ambas continuas. Si $\Omega \neq \mathbb{C}$ podemos aplicar el Teorema de representación de Riemann, que nos asegura que Ω es conformemente equivalente a \mathbb{D} y en particular homeomorfo a él.

$ix) \Rightarrow i)$ Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ es un camino cerrado arbitrario en Ω . Debemos ver que γ es Ω -homotópico a una constante. Si $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ es un homeomorfismo, entonces $\varphi \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ es un camino cerrado en \mathbb{D} . Sabemos por el ejemplo 3.1.2 que el disco unidad es simplemente conexo luego $\varphi \circ \gamma$ es \mathbb{D} -homotópico a un punto $a \in \mathbb{D}$ mediante una homotopía que llamaremos $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$. Entonces, $\varphi^{-1} \circ h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ es una homotopía entre γ y un camino constante en Ω . En efecto, es continua por ser composición de funciones continuas. Además, $\varphi^{-1}(h(0, t)) = \varphi^{-1}(\varphi(\gamma(t))) = \gamma(t)$ y

$\varphi^{-1}(h(1,t)) = \varphi^{-1}(a)$ para todo $t \in [0, 1]$ y $\varphi^{-1}(h(s,0)) = \varphi^{-1}(h(s,1))$ para todo $s \in [0, 1]$ por ser h una homotopía. \square

3.2. Cálculo de flujos

Una de las primeras aplicaciones que aparecen tras estudiar las fórmulas de Schwarz-Christoffel es el cálculo de flujos. La referencia principal para esta sección es [4, 22], donde se pueden encontrar algunos otros ejemplos.

Llamaremos \mathbb{H} al semiplano superior y P a un polígono que puede ser degenerado, es decir, que puede tener algún vértice en el infinito. En esta situación calcularemos la transformación de Schwarz-Christoffel $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow P$. Las imágenes por esta aplicación de las líneas $Im(z) = k$ para $k > 0$ nos proporcionarán el flujo de un fluido en P . Para ilustrar este fenómeno estudiaremos dos casos, el del primer cuadrante y el de un canal con un escalón.

Ejemplo 3.2.1. *Analicemos primero el caso más sencillo. Nuestro objetivo es calcular el flujo de un fluido que circula por el primer cuadrante y que inicialmente es paralelo al eje imaginario en dirección negativa.*

En este caso nuestro polígono es degenerado y únicamente tiene por vértices 0 e ∞ . Así, los ángulos externos resultan ser $\beta_1 = \frac{1}{2}$ y $\beta_2 = \frac{3}{2}$. Tomaremos por simplicidad $A_1 = 0$ y $A_2 = \infty$ y así, según la fórmula estudiada en la sección 2.4, la derivada de la transformación conforme que envía el semiplano superior al primer cuadrante es

$$\varphi'(z) = Az^{-\frac{1}{2}}.$$

Integrando es posible encontrar la transformación,

$$\varphi(z) = 2A\sqrt{z} + B.$$

Como queremos que $\varphi(0) = 0$ necesariamente debemos tomar $B = 0$ y para que la transformación envíe el semiplano al cuadrante debemos pedir así mismo que $A \in \mathbb{R}$. Así, la transformación queda

$$\varphi(z) = C\sqrt{z}$$

con $C \in \mathbb{R}$.

Calculemos finalmente el flujo. Para ello debemos buscar las imágenes por φ de las rectas $\text{Im}(z) = k$ con $k > 0$. Equivalentemente, buscamos $\text{Im}(\varphi^{-1}(z)) = k$ con $k > 0$. Pero si llamamos $x = \text{Re}(z)$ e $y = \text{Im}(z)$ se tiene que $\text{Im}(\varphi^{-1}(z)) = \text{Im}(\frac{1}{C}z^2) = \frac{2xy}{C}$ luego el flujo en el primer cuadrante viene dado por $\frac{2xy}{C} = k$ con $k > 0$, es decir, por las hipérbolas.

El siguiente ejemplo estudia el flujo de un canal con un escalón.

Ejemplo 3.2.2. En este caso tomaremos el polígono degenerado que tiene por vértices los puntos i , 0 e ∞ . Tomaremos además $A_1 = -1$, $A_2 = 1$ y $A_3 = \infty$ por simplicidad para los cálculos. Podemos observar que los ángulos que el polígono forma son $\beta_1 = \frac{-1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{2}$ y $\beta_3 = 0$.

De acuerdo con lo que estudiamos en la sección 2.4, la fórmula para la derivada de la transformación que buscamos viene dada por

$$\varphi'(z) = A(z+1)^{1/2}(z-1)^{-1/2}$$

con $A \in \mathbb{C}$ una constante. Finalmente, integrando podemos obtener la aplicación buscada,

$$\varphi(z) = A(\sqrt{z^2 - 1} + \log(z + \sqrt{z^2 - 1})) + B = A(\sqrt{z^2 - 1} + \cosh^{-1}(z)) + B.$$

Como pretendemos que $\varphi(-1) = i$ y $\varphi(1) = 0$, podemos hallar las constantes del sistema de ecuaciones correspondiente que nos garantiza que $A = \frac{1}{\pi}$ y $B = 0$. Así, la transformación queda

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi}(\sqrt{z^2 - 1} + \cosh^{-1}(z)).$$

Computacionalmente podemos dibujar el flujo, es decir, las líneas $\varphi(x + ki)$ con $k > 0$ y obtenemos lo que intuitivamente podíamos esperar.

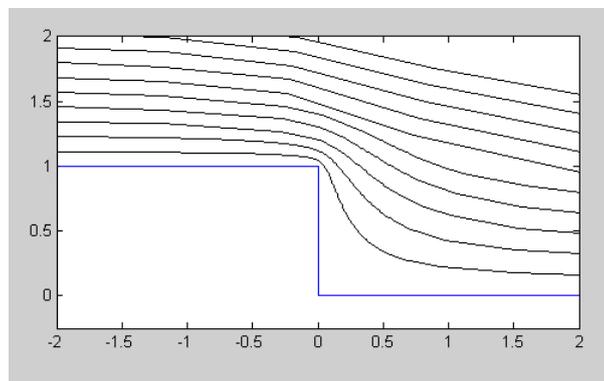


Figura 3.1: Flujo en un canal con escalón

3.3. Lema tipo Urysohn complejo y aplicaciones

Estudiaremos en esta sección una aplicación del teorema de Carathéodory para la obtención de un lema que garantiza la existencia de funciones pico en el álgebra del disco y que ha tenido varias recientes aplicaciones al análisis funcional. Aunque los resultados de los que hablamos han sido demostrados en [6] más en general, aquí los demostramos para el álgebra del disco debido a que es un caso que se adapta al marco de este trabajo de fin de grado a la vez que nos permite dar demostraciones autocontenidas. También se ha hecho uso de las referencias [1, 3, 7, 8].

Es conocido que en muchas aplicaciones al análisis funcional, en particular cuando tratamos con espacios $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ con K un espacio de Hausdorff compacto, una herramienta importante es el bien conocido lema de Urysohn, que se sigue de la normalidad de K . Un ejemplo de estas aplicaciones es el Teorema de Riesz del cálculo de un dual de $C(X)$ cuando X es localmente compacto, tal y como se hace en [20].

En particular, con frecuencia se utiliza el hecho de que si U es un abierto y $x_0 \in U \subset K$ entonces existe una función continua $f \in C(K)$ tal que:

- $f(K) \subset [0, 1]$.
- $f(x_0) = 1$.
- $f(x) = 0$ si $x \in K \setminus U$.

En otras palabras, f es una función real, con $\|f\|_\infty = 1$ que ‘pica’ en x_0 y se anula en $K \setminus U$.

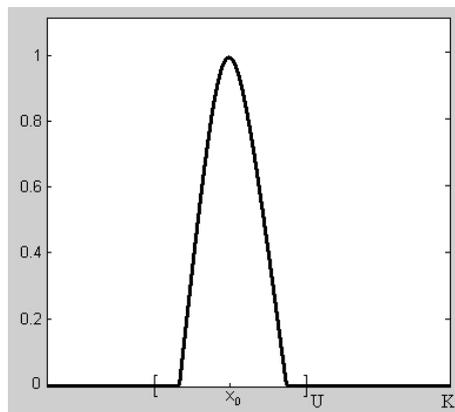


Figura 3.2: Función pico

Supongamos ahora que en vez de trabajar con todo el álgebra $C(K)$, trabajamos con una subálgebra cerrada $A \subset C(K)$ y como antes, pretendemos encontrar una función f con las propiedades anteriormente descritas que además cumpla $f \in A$, lo cual es una condición muy natural. Un momento de reflexión debe llevar al lector a concluir que esto no tiene porque ser siempre así como el siguiente ejemplo pone de manifiesto.

Ejemplo 3.3.1. Tomemos $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ el espacio de las funciones complejas continuas en el disco unidad cerrado dotado de la norma del supremo y consideremos

$$A(\mathbb{D}) = \{f \in C(\overline{\mathbb{D}}) : f \in \mathcal{H}(\Omega)\}.$$

$A(\mathbb{D})$ es una subálgebra cerrada de $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ para la cual el lema tipo Urysohn descrito anteriormente no es cierto. Verdaderamente, pongamos $x_0 = 1$ y $U = D(1, 1) \cap \overline{\mathbb{D}}$. Si existiese $f \in A(\mathbb{D})$ tal que $f(\overline{\mathbb{D}}) \subset [0, 1]$ entonces f tiene que ser constante, y por ende no puede tomar el valor 1 en x_0 y el valor 0 en $\overline{\mathbb{D}} \setminus U$.

Notar que las condiciones $f \in A$ y $f|_{\overline{\mathbb{D}} \setminus U} = 0$ implican $f = 0$ gracias al principio de identidad. En consecuencia, el álgebra $A(\mathbb{D})$ es demasiado rígida para permitir la construcción deseada.

Aunque $A(\mathbb{D})$ no permita el desarrollo anterior, a veces construcciones como esta o más débiles son necesarias por sus aplicaciones. El objetivo es demostrar a continuación que es posible encontrar una función f con características parecidas debilitando ligeramente las condiciones.

Lema 3.3.2. Sea z_0 con $|z_0| = 1$ y sea

$$f_n(z) = (\overline{z_0})^n \left(\frac{z + z_0}{2} \right)^n$$

para $z \in \overline{\mathbb{D}}$ y $n \in \mathbb{N}$. Se verifica entonces:

- i) $f_n \in A(\mathbb{D})$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
- ii) $\|f_n\|_\infty = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y la norma se alcanza en z_0 .
- iii) $|f_n(z)| < 1$ para cada $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{z_0\}$

Demostración. i) Es evidente.

ii) $|f_n(z)| \leq 1$ para cada $z \in \mathbb{D}$ ya que $\frac{z+z_0}{2} \in \mathbb{D}$ por la convexidad. Además $f_n(z_0) = (\overline{z_0})^n (z_0)^n = 1$ luego $\|f_n\|_\infty = 1$.

iii) Se debe a que si $z \in \overline{\mathbb{D}}$ y $z \neq z_0$ entonces

$$\left| \frac{z+z_0}{2} \right| < 1.$$

□

Lema 3.3.3. Sea z_0 con $|z_0| = 1$ y sea

$$f_n(z) = (\overline{z_0})^n \left(\frac{z+z_0}{2} \right)^n$$

para $z \in \overline{\mathbb{D}}$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, dado $0 < \eta < 1$ y $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|f_m(z)| < \varepsilon$ para cada $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus D(z_0, \eta)$.

Demostración. Aplicando la regla del paralelogramo obtenemos que

$$|z-z_0|^2 + |z+z_0|^2 = 2|z|^2 + 2|z_0|^2 \leq 4$$

para cada $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Además, si $|z-z_0| \geq \eta$ entonces se tiene que

$$\eta^2 + |z+z_0|^2 \leq 4$$

es decir,

$$\left(\frac{\eta}{2} \right)^2 + \left| \frac{z+z_0}{2} \right|^2 \leq 1.$$

Llamando ahora

$$r = 1 - \left(\frac{\eta}{2} \right)^2 < 1$$

obtenemos que

$$\left| \frac{z+z_0}{2} \right|^2 \leq r$$

para cada $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus D(z_0, \eta)$.

Haciendo uso ahora de la función definida en el enunciado y cuyas propiedades ya sabemos,

$$|f_{2n}(z)| = \left| (\overline{z_0})^{2n} \left(\frac{z+z_0}{2} \right)^{2n} \right| = \left(\left| \frac{z+z_0}{2} \right|^2 \right)^n \leq r^n$$

para todo $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus D(z_0, \eta)$. Basta entonces con tomar $k \in \mathbb{N}$ de modo que $r^k < \varepsilon$ y $m = 2k$ para obtener que $|f_m(z)| \leq r^k < \varepsilon$ para m suficientemente grande y $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus D(z_0, \eta)$. □

Proposición 3.3.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto acotado simplemente conexo cuya frontera es una curva de Jordan, $a \in \overline{\Omega}$, $b \in \partial\Omega$ y $V_a \subset \overline{\Omega}$ un entorno de a . Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ con $|z_0| = 1$. Entonces, para cada $0 < \eta < 1$ existe $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:*

- i) f es continua.
- ii) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
- i) $f(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\Omega}$.
- ii) $f(z_0) = b$.
- iii) $f(\overline{\mathbb{D}} \setminus D(z_0, \eta)) \subset V_a$.

Demostración. Distinguiremos dos casos. El primer caso consiste en suponer que $a \in \Omega$. En este caso, como Ω es simplemente conexo distinto de \mathbb{C} , el Teorema de representación de Riemann garantiza la existencia de una biyección conforme $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ con $\phi(0) = a$. Como $\partial\Omega$ es una curva de Jordan, podemos extender ϕ a un homeomorfismo $\phi : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\Omega}$ y componiendo con un giro no es restrictivo suponer que $\phi(1) = b$.

Por continuidad de ϕ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\phi(D(0, \varepsilon)) \subset V_a$. Los lemas anteriores nos garantizan ahora la existencia de una función $g \in A(\mathbb{D})$ satisfaciendo:

- $g(z_0) = 1$.
- $g(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\mathbb{D}}$.
- $g(\overline{\mathbb{D}} \setminus D(z_0, \eta)) \subset D(0, \varepsilon)$.

Es claro que la composición $f = \phi \circ g$ satisface las propiedades requeridas en el enunciado.

Supongamos ahora que $a \in \partial\Omega$. En este caso $V_a \cap \Omega \neq \emptyset$ y así podemos tomar $a' \in V_a \cap \Omega$ y aplicar el caso anterior a los puntos a' y b y al conjunto V_a , obteniendo el mismo resultado. \square

Notar que la tesis de la proposición anterior ofrece ahora una buena versión para un lema tipo Urysohn para el álgebra del disco pues en general no se pueden construir funciones pico $f \in A(\mathbb{D})$ con valores en $[0, 1]$. Sin embargo, si las vamos a poder construir con valores en un conjunto que consiste en engrosar ligeramente dicho intervalo. Una situación muy particular de lo anterior se da en la conocida región de Stolz.

Definición 3.3.5. *Se define la región de Stolz, que denotaremos por St_ε , como*

$$St_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| + (1 - \varepsilon)|1 - z| \leq 1\}$$

para $0 < \varepsilon < 1$.

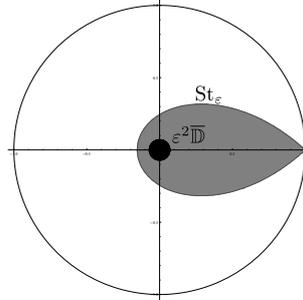


Figura 3.3: Región de Stolz

Proposición 3.3.6. Para cada $0 < \varepsilon < 1$, el abierto

$$\Omega_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| + (1 - \varepsilon)|1 - z| < 1\}$$

satisface:

- i) Ω_ε es convexo.
- ii) $\partial\Omega_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| + (1 - \varepsilon)|1 - z| = 1\}$
- iii) $\overline{\Omega_\varepsilon} = St_\varepsilon$
- iv) $[0, 1) \subset \Omega_\varepsilon$ y $[0, 1] \subset St_\varepsilon$
- v) $\varepsilon^2\mathbb{D} \subset \Omega_\varepsilon$

Demostración. i) Sean $z_0, z_1 \in \Omega_\varepsilon$ y llamemos $z = (1 - \lambda)z_0 + \lambda z_1$ para $0 \leq \lambda \leq 1$. Tenemos entonces que

$$|z| \leq (1 - \lambda)|z_0| + \lambda|z_1|$$

y que

$$|1 - z| = |1 - \lambda + \lambda - (1 - \lambda)z_0 - \lambda z_1| \leq (1 - \lambda)|1 - z_0| + \lambda|1 - z_1|.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} |z| + (1 - \varepsilon)|1 - z| &\leq (1 - \lambda)|z_0| + \lambda|z_1| + (1 - \varepsilon)((1 - \lambda)|1 - z_0| + \lambda|1 - z_1|) = \\ &= (1 - \lambda)(|z_0| + (1 - \varepsilon)|1 - z_0|) + \lambda(|z_1| + (1 - \varepsilon)|1 - z_1|) < 1 - \lambda + \lambda = 1. \end{aligned}$$

Observemos que la última desigualdad se debe a que $z_0, z_1 \in \Omega_\varepsilon$.

ii) Es claro que Ω_ε es abierto y que

$$\overline{\Omega_\varepsilon} = \Omega_\varepsilon \cup \partial\Omega_\varepsilon \subset St_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| + (1 - \varepsilon)|1 - z| = 1\}.$$

Como ambas uniones son disjuntas, se sigue que

$$\partial\Omega_\varepsilon \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| + (1 - \varepsilon)|1 - z| = 1\}.$$

Queda entonces por ver que si $z_0 \in St_\varepsilon$ satisface $|z_0| + (1 - \varepsilon)|1 - z_0| = 1$ entonces $z_0 \in \partial\Omega_\varepsilon$. Para esto basta demostrar que para cada $0 \leq t < 1$ se cumple $tz_0 \in \Omega_\varepsilon$, pues si esto es así, haciendo $t \rightarrow 1^-$ obtendríamos que $z_0 \in \overline{\Omega_\varepsilon}$ y como claramente $z_0 \notin \Omega_\varepsilon$ obtendríamos que $z_0 \in \partial\Omega_\varepsilon$. Esto es un sencillo cálculo pues

$$\begin{aligned} |tz_0| + (1 - \varepsilon)|1 - tz_0| &= |tz_0| + (1 - \varepsilon)|1 - z_0 + z_0 - tz_0| \leq \\ &\leq t|z_0| + (1 - \varepsilon)(|1 - z_0| + |z_0|(1 - t)) = |z_0|(t + (1 - \varepsilon)(1 - t)) + |1 - \varepsilon||1 - z_0| < \\ &< |z_0|(t + (1 - t)) + |1 - \varepsilon||1 - z_0| = |z_0| + |1 - \varepsilon||1 - z_0| = 1 \end{aligned}$$

luego $tz_0 \in \Omega_\varepsilon$, demostrando lo que queremos.

iii) Es consecuencia inmediata del apartado anterior ya que

$$St_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| + (1 - \varepsilon)|1 - z| = 1\} = \Omega_\varepsilon \cup \partial\Omega_\varepsilon = \overline{\Omega_\varepsilon}.$$

iv) St_ε es convexo por ser la clausura de un conjunto convexo. Como $0, 1 \in St_\varepsilon$, por convexidad, $[0, 1] \subset St_\varepsilon$. La otra afirmación se deduce de la convexidad de Ω_ε ya que $0 \in \Omega_\varepsilon$ y $1 - \delta \in \Omega_\varepsilon$ para todo $\delta > 0$.

v) Si $|z| < \varepsilon^2$ entonces $|z| + (1 - \varepsilon)|1 - z| \leq \varepsilon^2 + (1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon^2) < \varepsilon^2 + (1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon) = 1$ luego $\varepsilon^2\mathbb{D} \subset \Omega_\varepsilon$. \square

En particular, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.3.7. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ con $|z_0| = 1$ y $0 < \eta < 1$. Entonces para cada $0 < \varepsilon < 1$ existe $f \in A(\mathbb{D})$ tal que

i) $\|f\|_\infty = 1$.

ii) $f(z_0) = 1$.

iii) $f(\overline{\mathbb{D}} \setminus D(z_0, \eta)) \subset \varepsilon\mathbb{D}$.

iv) $|f(z)| + (1 - \varepsilon)|1 - f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$, es decir, $f(\overline{\mathbb{D}}) \subset St_\varepsilon$.

Demostración. Basta con aplicar la Proposición 3.3.4 tomando $\Omega = \Omega_\varepsilon$, $a = 0$, $b = 1$ y $V_a = D(0, \varepsilon)$. \square

Observemos que a la función f del corolario anterior podemos exigirle además que verifique $f(0) = 0$, que en principio parece una condición ingenua y sin embargo será importante en algunas aplicaciones.

Para terminar, ponemos de manifiesto como este corolario ha abierto la prueba a nuevos resultados en análisis funcional que no pudieron ser demostrados con anterioridad por carecer de un lema tipo Urysohn complejo para subálgebras de $C(\overline{\mathbb{D}})$.

Uno de estos nuevos resultados es el siguiente, en el que c_0 denota el espacio de Banach de las sucesiones complejas nulas dotado de la norma del supremo.

Teorema 3.3.8 ([6], Teorema 3.6). *Sea $T : c_0 \rightarrow A(\mathbb{D})$ un operador con $\|T\| = 1$. Si $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$ y $x_0 \in c_0$ con $\|x_0\| = 1$ y $\|Tx_0\| > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$, entonces existe $S : c_0 \rightarrow A(\mathbb{D})$ un operador y $u_0 \in c_0$ tales que:*

- $\|S\| = \|Su_0\| = 1$.
- $\|S - T\| < 2\varepsilon$.
- $\|x_0 - u_0\| < \varepsilon$.

Observamos que el resultado original de [6] es mucho más general, pero tal y como lo enunciamos aquí es suficientemente potente como para ofrecer a una respuesta a un problema planteado en [1] y poner de manifiesto por primera vez que la aproximación de operadores por operadores que alcanzan la norma se satisface con espacios de rango $A(\mathbb{D})$, lo cual no se había conseguido hasta ahora.

Otras aplicaciones recientes del Corolario 3.3.7 pueden encontrarse en [8], donde se estudian algunas propiedades geométricas del álgebra del disco

3.4. Transformaciones de Schwarz-Christoffel con MATLAB

Esta sección presenta de manera gráfica ejemplos de transformaciones conformes a polígonos que vienen dadas por las fórmulas de Schwarz-Christoffel. Para ello se ha hecho uso de un conjunto de archivos en MATLAB creados por T.A. Driscoll llamado "MATLAB SC Toolbox". Es posible consultar las distintas características y funcionalidades que el programa ofrece en el manual, [13].

En primer lugar veremos transformaciones del semiplano superior a cierto polígono P que puede ser degenerado. Para visualizar la transformación veremos la imagen de la cuadrícula del semiplano superior.

Estudiemos con más detenimiento el primer caso, donde la aplicación transforma el semiplano superior en un cuadrado. En la figura 3.4 podemos ver a la izquierda las imágenes de las rectas verticales $\operatorname{Re}(z) = k$ y a la derecha las imágenes de las rectas horizontales $\operatorname{Im}(z) = k$, con $k > 0$ en este caso pues partimos del semiplano superior.

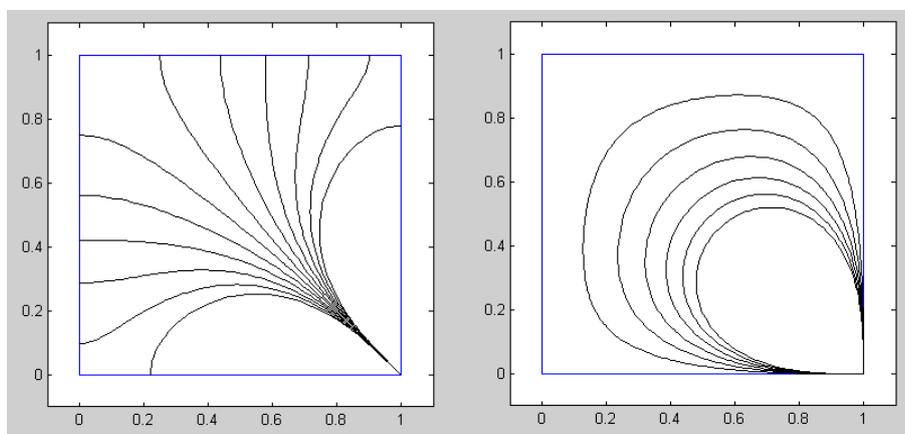


Figura 3.4: Transformación del semiplano en un cuadrado

Así, en figura 3.5 podemos observar la imagen de la cuadrícula completa.

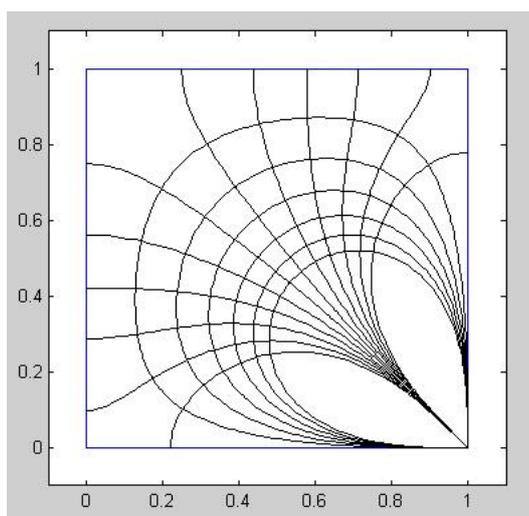


Figura 3.5: Transformación del semiplano en un cuadrado

Veremos a continuación la transformación del semiplano superior a otros polígonos. En la figura 3.6 podemos observar los casos del triángulo y del hexágono regular. Podemos observar en ella que todas las transformaciones de este tipo siguen un patrón similar. El vértice donde intersecan todas las curvas corresponde a la imagen del infinito.

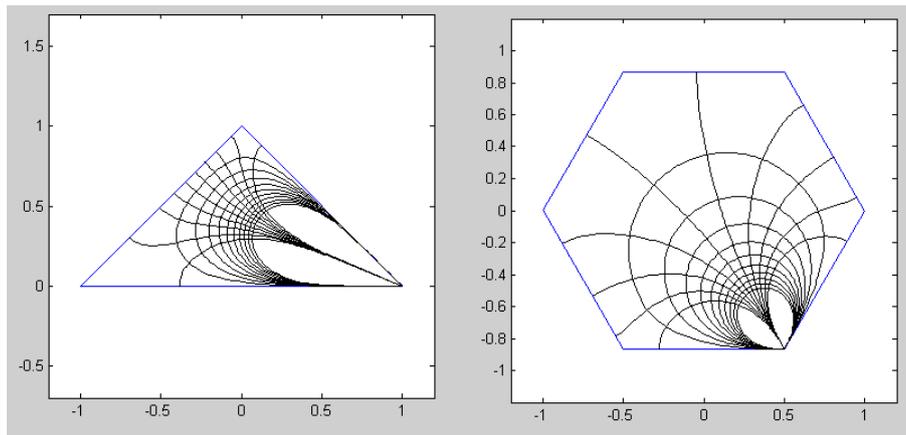


Figura 3.6: Transformación del semiplano en un triángulo y en un hexágono

Ya vimos en la sección 3.2 un ejemplo donde el polígono era no degenerado. En ella estudiábamos la transformación del semiplano superior a un canal con un escalón para calcular el flujo de un fluido que circula por él. Veamos a continuación un caso similar en el que el escalón está dispuesto en otro sentido. En este caso (Figura 3.7) trazaremos únicamente las imágenes de las líneas horizontales pues son las que nos dan una idea del flujo.

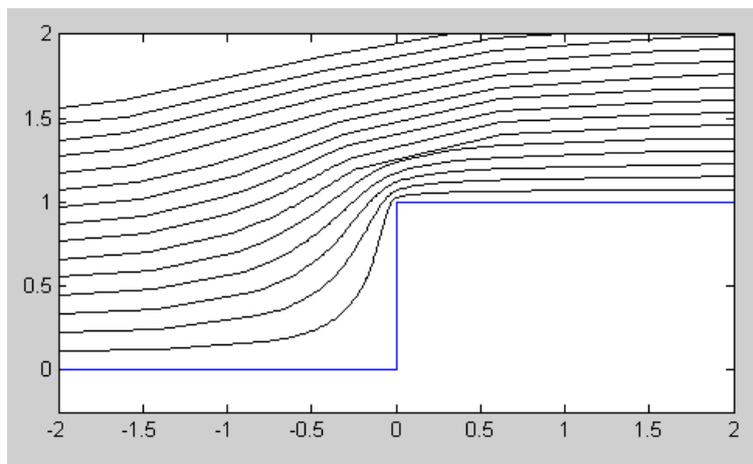


Figura 3.7: Flujo en un canal con escalón

Aunque las fórmulas de Schwarz-Christoffel son aplicaciones que transforman el semiplano superior en un polígono, es posible componer esta aplicación con una transformación de Möbius para obtener transformaciones de otro tipo. En este último ejemplo mostramos la que envía el disco unidad al cuadrado. En este caso para la visualización de la transformación se han dibujado las imágenes de los radios y de las circunferencias concéntricas contenidas en el disco (Figura 3.8).

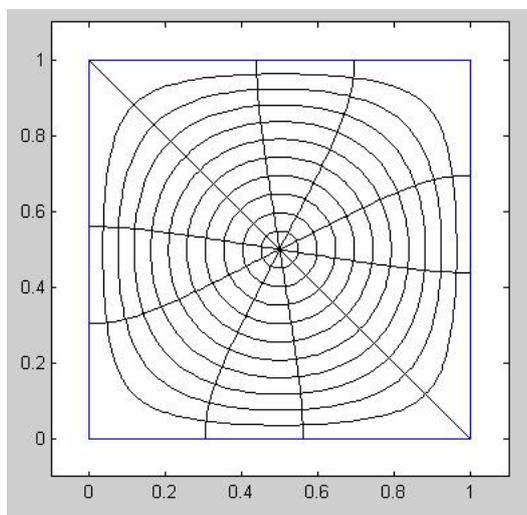


Figura 3.8: Transformación del disco en el cuadrado

Preliminares básicos

«CONTENIDOS»

- Notación y resultados básicos de análisis complejo.
- Teorema de la aplicación abierta.
- Transformaciones conformes.
- Principios del máximo.
- El Lema de Schwarz.
- El Principio de reflexión de Schwarz.
- El Teorema de Ascoli.

Este primer anexo presenta resultados básicos de análisis complejo de los que se hacen uso a lo largo de todo el trabajo. Se presentan como anexo para que el lector con conocimientos sobre análisis complejo pueda hacer uso de ellos como consulta y no como contenido previo a la parte central del trabajo. De esta manera, la memoria queda totalmente autocontenida.

En primer lugar enumeraremos los resultados básicos del análisis complejo como la fórmula integral de Cauchy, el teorema de Weierstrass, el principio del argumento, y otros tantos propios de un curso introductorio al análisis complejo. En esta sección nos limitaremos a enunciar los teoremas sin demostrarlos asumiendo que el lector los conoce. A continuación se analizará el teorema de la aplicación abierta, que nos será de gran utilidad.

Se desarrolla después una sección con la definición y los primeros ejemplos de transformaciones conformes, con las cuales trabajaremos durante todo el trabajo.

A continuación, se analizan los teoremas del máximo para funciones subarmónicas con el objetivo de demostrar, a continuación, el lema de Schwarz.

Así mismo, presentaremos el Principio de reflexión de Schwarz, que nos será de utilidad a la hora de demostrar la validez de las fórmulas de Schwarz-Christoffel.

Finalmente estudiaremos el Teorema de Ascoli, un importante resultado topológico que se presenta como una herramienta indispensable para desarrollar nuestra demostración del teorema de Riemann.

Las principales referencias para este capítulo son [2, 5, 9, 15, 21, 23].

A.1. Notación y resultados básicos de análisis complejo

La notación empleada en este trabajo es la usual del análisis complejo. En esta sección la introduciremos junto con los resultados básicos de análisis complejo que se suponen conocidos y que por tanto no se demostrarán. Todos ellos pueden encontrarse en [23].

Denotaremos por \mathbb{C} al cuerpo de los números complejos y usualmente por Ω a un subconjunto abierto de él. Si un número complejo puede expresarse como $z = re^{i\theta}$ con $r, \theta \in \mathbb{R}$, llamaremos $r = |z|$ al módulo de z y θ al argumento de z . Llamaremos argumento principal de z , denotado por $\text{Arg}(z)$ al único argumento de z tal que $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$ y $\arg(z)$ al conjunto de todos sus argumentos. Por otro lado, si expresamos z como $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, llamaremos $x = \text{Re}(z)$ e $y = \text{Im}(z)$ a su parte real e imaginaria respectivamente y $\bar{z} = x - iy$ al conjugado de z .

Atendiendo a la topología del plano complejo, denotaremos los discos como $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ y $D^*(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\}$. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ llamaremos \bar{A} a su clausura, A' al conjunto de sus puntos de acumulación, ∂A a su frontera y $\overset{\circ}{A}$ a su interior. Es conveniente recordar que todo conjunto $A \subset \mathbb{C}$ conexo por caminos es conexo. El recíproco es cierto si el conjunto A es abierto. Llamaremos plano complejo ampliado al conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, del cual sabemos que es una compactificación por un punto del plano complejo y que es isométrico, mediante la proyección estereográfica, a la esfera de Riemann. Denotaremos por $\partial_\infty A$ y $\bar{A}^{\mathbb{C}_\infty}$ a la frontera y la clausura del conjunto A en \mathbb{C}_∞ respectivamente.

En el plano complejo ampliado, es posible definir las transformaciones de Möbius.

Definición A.1.1. Llamamos transformación de Möbius a una aplicación $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ definida de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ son constantes tales que $ad - bc \neq 0$.

Proposición A.1.2. *Se verifican las siguientes propiedades de las transformaciones de Möbius.*

- i) *Dadas dos ternas de puntos distintos de \mathbb{C}_∞ , z_1, z_2, z_3 y $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, existe una única transformación de Möbius T tal que $T(z_1) = \omega_1$, $T(z_2) = \omega_2$ y $T(z_3) = \omega_3$.*
- ii) *Las transformaciones de Möbius transforman circunferencias en circunferencias (en sentido amplio).*

Pasamos a continuación a recordar los conceptos de funciones holomorfas y analíticas.

Definición A.1.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que f es derivable en sentido complejo en $a \in \Omega$ si existe el límite*

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

El valor de este límite se denota por $f'(a)$ y se llama derivada de f en a . Se dice que f es holomorfa en Ω cuando es derivable para todo punto $a \in \Omega$. Denotamos por $\mathcal{H}(\Omega)$ al conjunto de funciones holomorfas en Ω .

Denotaremos por $f^{(n)}(a)$ a la derivada n -ésima de f en a , es decir, al resultado de derivar n veces f en dicho punto.

El siguiente teorema presenta las llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann. En él, dada una función $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, usaremos la notación φ_x y φ_y para referirnos a sus derivadas parciales, es decir,

$$\varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ y } \varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Teorema A.1.4. *Dada $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ y $a \in \Omega$, son equivalentes:*

- i) *f es derivable en sentido complejo en a .*
- ii) *f es \mathbb{R} -diferenciable en a y su diferencial, $df(a)$, es \mathbb{C} -lineal.*
- iii) *f es \mathbb{R} -diferenciable en a y se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir, si llamamos $u = \operatorname{Re}(f)$ y $v = \operatorname{Im}(f)$ se tiene que $u_x(a) = v_y(a)$ y $u_y(a) = -v_x(a)$.*

Definición A.1.5. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que f es analítica en $a \in \Omega$ si existe un disco $D(a, r) \subset \Omega$ tal que f se puede expresar en dicho disco mediante una serie de potencias, es decir, si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

para todo $z \in D(a, r)$ y ciertos coeficientes $a_n \in \mathbb{C}$. Se dice que f es analítica en Ω cuando lo es para cada $a \in \Omega$.

El siguiente resultado es de gran importancia y establece la equivalencia entre dos definiciones previas.

Teorema A.1.6. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Son equivalentes:

- i) f es holomorfa en Ω .
- ii) f es analítica en Ω .
- iii) f es continua y la forma diferencial $f(z)dz$ es cerrada en Ω , es decir, $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ para cada rectángulo cerrado $R \subset \Omega$.
- iv) f es continua y $\int_{\partial \Delta} f(z)dz = 0$ para cada triángulo cerrado $\Delta \subset \Omega$.

Además, en este caso, los coeficientes de la serie de potencias alrededor de $a \in \Omega$ vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

donde $\gamma(t) = a + re^{it}$ para $t \in [0, 2\pi]$, siendo $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$.

Usualmente llamaremos Teorema de Cauchy-Goursat a la implicación $i) \Rightarrow iii)$ y llamaremos Teorema de Morera su recíproco, $iii) \Rightarrow i)$.

Nos disponemos a continuación a enunciar uno de los teoremas fundamentales del análisis complejo, la fórmula integral de Cauchy. Antes de ello necesitaremos algunas definiciones.

Definición A.1.7. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino continuo cerrado y sea $a \notin \gamma([0, 1])$. Se define el índice de γ respecto de a como

$$\text{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} (g(1) - g(0))$$

donde $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ es un logaritmo continuo de $\gamma(t) - a$.

Intuitivamente, el índice de un camino respecto de un punto representa el número de vueltas que el camino da alrededor del punto. Si γ es de clase C^1 a trozos, puede definirse de manera equivalente como el número entero

$$\text{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}.$$

Si definimos un ciclo Γ como la yuxtaposición finita de caminos cerrados, se define el índice del ciclo como la suma de los índices de los caminos. De la misma manera, una integral a lo largo del ciclo se definirá como la suma de las integrales a lo largo de los caminos.

Definición A.1.8. *Dos ciclos Γ y Δ contenidos en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que son Ω -homólogos si $\text{Ind}(\Gamma, z) = \text{Ind}(\Delta, z)$ para cada $z \notin \Omega$. Un ciclo Γ contenido en Ω se dice Ω -homólogo a 0 si $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$ para cada $z \notin \Omega$.*

Estamos por fin en condiciones de enunciar la fórmula integral de Cauchy en su versión homológica.

Teorema A.1.9 (Fórmula integral de Cauchy). *Si Γ es un ciclo regular a trozos contenido en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y Ω -homólogo a 0, entonces para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y cada $z \in \Omega \setminus \text{Imagen}(\Gamma)$ se verifica:*

$$\text{Ind}(\Gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Es posible demostrar como consecuencia que $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ para cada ciclo regular a trozos Γ que sea Ω -homólogo a 0. Una de las consecuencias más importantes esta afirmación es la siguiente cadena de equivalencias.

Teorema A.1.10. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo. Son equivalentes:*

- i) $\mathbb{C}_{\infty} \setminus \Omega$ es conexo.
- ii) Cada ciclo regular a trozos en Ω es Ω -homólogo a cero.
- iii) Para cada ciclo regular a trozos Γ en Ω , cada punto $z \in \Omega \setminus \text{Imagen}(\Gamma)$ y cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, se verifica:

$$\text{Ind}(\Gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

- iv) Para cada ciclo regular a trozos Γ en Ω , y cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se cumple $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.

- v) Ω es holomórficamente conexo, es decir, para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$.
- vi) Ω es logarítmicamente conexo, es decir, para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^g = f$.

En la sección 3.1 demostraremos, que todo lo anterior es equivalente además a que Ω sea simplemente conexo. Debemos aclarar esta definición pues jugará un papel importante.

Definición A.1.11. Un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que es simplemente conexo si cada camino cerrado $\gamma \subset \Omega$ es Ω -homotópico a un camino constante, es decir, si existe una función continua $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ y un punto $a \in \Omega$ tal que $h(0, t) = \gamma(t)$ y $h(1, t) = a$ para todo $t \in [0, 1]$ y $h(s, 0) = h(s, 1)$ para todo $s \in [0, 1]$.

Haciendo uso de la fórmula integral de Cauchy en su versión más simple, es decir, cuando el ciclo es una circunferencia y por tanto el índice vale 1, se puede demostrar el siguiente conocido resultado.

Teorema A.1.12 (Teorema de Weierstrass). Si $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω que converge uniformemente sobre compactos hacia una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, entonces f es holomorfa en Ω y la sucesión de las derivadas $(f'_n)_n$ converge uniformemente sobre compactos hacia la derivada f' .

El siguiente resultado es el principio de identidad, también llamado principio de prolongación analítica. Será de gran utilidad para extender funciones que conocemos en \mathbb{R} al plano complejo.

Teorema A.1.13 (Principio de prolongación analítica). Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $M \subset \Omega$ un conjunto que se acumula en Ω , es decir, un conjunto tal que $\Omega \cap M' \neq \emptyset$. Si dos funciones $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ verifican que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in M$, entonces $f = g$.

Se deduce de esto que sólo existe una única manera de extender de manera holomorfa funciones como $\exp(z)$, $\sen(z)$ o $\cos(z)$, conocidas en \mathbb{R} , al plano complejo. Estas funciones se definen en \mathbb{C} mediante sus series de potencias, que tienen los mismos coeficientes que sus respectivas series de potencias en \mathbb{R} .

Es importante recordar la noción de singularidad.

Definición A.1.14. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $a \notin \Omega$ y sin embargo $D^*(a, r) \subset \Omega$ para algún $r > 0$, se dice que a es una singularidad aislada de f . Si existe $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b \in \mathbb{C}$ se dice que a es una singularidad evitable, si $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ se dice que a es un polo y si dicho límite no existe en \mathbb{C}_∞ se dice que a es una singularidad esencial.

Podemos definir ahora el concepto de residuo para enunciar el Teorema de los residuos.

Definición A.1.15. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f . Se define el residuo de f en a y se denota por $\text{Res}(f, a)$ al punto $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que la función

$$f(z) - \frac{\lambda}{z-a}$$

tenga primitiva en cada $D^*(a, r) \subset \Omega$. En el caso de que $a = \infty$, se define

$$\text{Res}(f, \infty) = \text{Res}\left(\frac{-f(1/z)}{z^2}, 0\right).$$

Teorema A.1.16 (Teorema de los residuos). Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus S)$, donde $S \subset \Omega$ es el conjunto de sus singularidades aisladas. Si Γ es un ciclo en $\Omega \setminus S$ regular a trozos y Ω -homólogo a 0, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{a \in S} \text{Ind}(\Gamma, a) \text{Res}(f, a)$$

donde la suma sólo contiene una cantidad finita de sumandos no nulos.

Finalizamos esta sección introductoria con dos importantes teoremas, de los que haremos uso a lo largo del trabajo. Para ello debemos definir primero función meromorfa.

Definición A.1.17. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ un abierto. Se dice que la función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es meromorfa en Ω , y se denota por $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, si es continua en Ω , los puntos del conjunto $P(f) = \{z \in \Omega : f(z) = \infty\}$ son aislados, y $f|_{\Omega \setminus P(f)}$ es holomorfa.

Llamaremos $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ al conjunto de ceros de f y $v(f, a)$ a la multiplicidad de a como cero o como polo. Recordemos que si a es un cero se define $v(f, a) = \min \{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(a) \neq 0\}$ y si a es un polo se define $v(f, a)$ como el número $m \in \mathbb{N}$ tal que existe $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z)$ y toma un valor finito. Podemos ya enunciar el principio del argumento.

Teorema A.1.18 (Principio del argumento). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ no idénticamente nula y $S = P(f) \cup Z(f)$. Sea Γ un ciclo regular a trozos en $\Omega \setminus S$ y Ω -homólogo a 0. Entonces:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in Z(f)} \text{Ind}(\Gamma, a) \nu(f, a) - \sum_{a \in P(f)} \text{Ind}(\Gamma, a) \nu(f, a)$$

donde solo hay una cantidad finita de sumandos no nulos en cada sumatorio.

Como consecuencia del principio del argumento, enunciamos para terminar el teorema de Rouché.

Teorema A.1.19 (Teorema de Rouché). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$ no idénticamente nulas y $S = P(f) \cup Z(f) \cup P(g) \cup Z(g)$. Sea Γ un ciclo regular a trozos en $\Omega \setminus S$ y Ω -homólogo a 0. Si se verifica que $|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$ (en particular, si $|f(z) + g(z)| < |f(z)|$) para todo $z \in \text{Imagen}(\Gamma)$, entonces*

$$\begin{aligned} & \sum_{a \in Z(f)} \text{Ind}(\Gamma, a) \nu(f, a) - \sum_{a \in P(f)} \text{Ind}(\Gamma, a) \nu(f, a) = \\ & = \sum_{a \in Z(g)} \text{Ind}(\Gamma, a) \nu(g, a) - \sum_{a \in P(g)} \text{Ind}(\Gamma, a) \nu(g, a) \end{aligned}$$

donde en cada suma sólo hay una cantidad finita de sumandos no nulos.

A.2. Teorema de la aplicación abierta

El teorema de la aplicación abierta se presenta como uno de los principales resultados de la teoría de funciones holomorfas y nos garantiza que todas ellas son abiertas. Este teorema se utilizará en numerosas ocasiones a lo largo del trabajo. La prueba que aquí desarrollamos puede consultarse en [5, 23].

Para demostrarlo, debemos probar primero el teorema de la función inversa para funciones holomorfas.

Teorema A.2.1 (Teorema de la función inversa). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $f'(a) \neq 0$ para cierto $a \in \Omega$ y llamamos $b = f(a)$, entonces existen abiertos $U_a \subset \Omega$ y V_b , entornos de a y de b respectivamente, tales que $f|_{U_a}$ es inyectiva, $V_b = f(U_a)$ y la inversa $g = (f|_{U_a})^{-1} : V_b \rightarrow U_a$ es holomorfa.*

Demostración. Podemos mirar la función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ como una aplicación de varias variables reales. En ese caso, con las hipótesis del teorema, $df(a)(z) = f'(a)z$ es invertible y por tanto podemos aplicar el teorema de la función inversa para funciones de varias variables, que nos garantiza la existencia de los entornos abiertos U_a y V_b y nos dice que $f|_{U_a} : U_a \rightarrow V_b$ es un difeomorfismo para el que podemos suponer que $df(z)$ es invertible para cada $z \in U_a$, es decir, $f'(z) \neq 0$ para cada $z \in U_a$.

Como $f^{-1} : V_b \rightarrow U_a$ es continua, tenemos que para cada $w \in V_b$, se tiene

$$\frac{f^{-1}(w+h) - f^{-1}(w)}{(w+h) - w} = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(w+h)) - f(f^{-1}(w))}{f^{-1}(w+h) - f^{-1}(w)}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \neq 0$$

con lo cual f^{-1} es también holomorfa. □

El siguiente lema recorre una gran parte del camino en la demostración del teorema de la aplicación abierta.

Lema A.2.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y a un cero aislado de $f(z) - f(a)$ con multiplicidad m . Entonces existe un entorno abierto $U_a \subset \Omega$, un $\delta > 0$ y una biyección $\varphi : U_a \rightarrow D(0, \delta)$ tales que $f(z) = f(a) + \varphi(z)^m$ y $\varphi'(z) \neq 0$ para todo $z \in U_a$ y $(\varphi^{-1})'(w) \neq 0$ para todo $w \in D(0, \delta)$.*

Demostración. El punto a es un cero de $f(z) - f(a)$ de multiplicidad m , luego existe un disco $D(a, r) \subset \Omega$ tal que $f(z) - f(a) = (z - a)^m g(z)$, donde $g(z) \neq 0$ en dicho disco y g es holomorfa en él.

Existe entonces una función $\psi \in \mathcal{H}(D(a, r))$ tal que $(\psi(z))^m = g(z)$. Así, se tiene que $f(z) - f(a) = ((z - a)\psi(z))^m = (\varphi(z))^m$, donde hemos definido $\varphi : D(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ como $\varphi(z) = (z - a)\psi(z)$. Tenemos que $\varphi \in \mathcal{H}(D(a, r))$, $\varphi(a) = 0$ y $\varphi'(z) = \psi(z) + (z - a)\psi'(z)$. Esto implica que $\varphi'(a) = \psi(a) \neq 0$.

Aplicando ahora el teorema de la función inversa, existe $W_a \subset D(a, r)$ entorno de a y existe $V_0 \subset \mathbb{C}$ entorno del 0 tales que $\varphi : W_a \rightarrow V_0$ es una biyección con $\varphi'(z) \neq 0$ y $(\varphi^{-1})'(w) \neq 0$ para todo $z \in W_a$ y $w \in V_0$. Tomamos entonces $\delta > 0$ tal que $D(0, \delta) \subset V_0$ y definiendo U_a como $U_a = \varphi^{-1}(D(0, \delta)) \subset W_a \subset D(a, r)$ obtenemos el resultado. □

Podemos por fin demostrar el teorema de la aplicación abierta, lo cual es sencillo estando en disposición del lema anterior.

Teorema A.2.3 (Teorema de la Aplicación Abierta). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante. Entonces f es una aplicación abierta. Es más, para cada $a \in \Omega$, si m es la multiplicidad de a como cero de $f(z) - f(a)$, se tiene que existen entornos abiertos $U_a \subset \Omega$ y $V_b \subset f(\Omega)$ de a y $b = f(a)$ respectivamente tales que $f(z) - w$ tiene exactamente m ceros distintos en U_a para cada $w \in V_b \setminus \{b\}$.*

Demostración. Si f no es constante y a es un cero aislado de $f(z) - f(a)$ con multiplicidad m , podemos aplicar el lema anterior para obtener abiertos $U_a, D(0, \delta)$ y una biyección $\varphi : U_a \rightarrow D(0, \delta)$ que verifican $f(z) = f(a) + \varphi(z)^m$ y $\varphi'(z) \neq 0$ para todo $z \in U_a$ y $(\varphi^{-1})'(w) \neq 0$ para todo $w \in D(0, \delta)$ como en el lema.

Ahora bien, como φ es una biyección y $\varphi(a) = 0$, tenemos que la única solución de $f(z) - f(a) = 0$ en U_a es $z = a$. Si consideramos la ecuación $f(z) - w = 0$ con $w \in D^*(f(a), \delta)$, las soluciones son ahora distintas de a . Podemos derivar y obtenemos que $(f(z) - w)'(z) = f'(z) = m(\varphi(z))^{m-1}\varphi'(z) \neq 0$. Esto demuestra que los ceros de $(f(z) - w)$ son simples y claramente hay m pues $f(z) - w = \varphi(z)^m$.

□

A.3. Transformaciones conformes

Las transformaciones conformes serán las aplicaciones protagonistas del Teorema de representación de Riemann. Por ello, en esta sección las definiremos y daremos algunos primeros ejemplos de ellas.

Para que una función sea conforme le pediremos que sea holomorfa y que su derivada sea no nula.

Definición A.3.1. *Una aplicación $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es conforme en $a \in \Omega$ si es holomorfa en a y $f'(a) \neq 0$. Se dice que f es una aplicación conforme en Ω cuando lo es en cada $a \in \Omega$.*

La siguiente definición introduce la noción de isomorfismo conforme, un concepto que será esencial a la hora de enunciar el Teorema de Riemann.

Definición A.3.2. *Una aplicación $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ se dice que es un isomorfismo conforme entre Ω_1 y Ω_2 cuando es biyectiva, f es conforme y f^{-1} es conforme. Se dice en este caso que los abiertos Ω_1 y Ω_2 son conformemente equivalentes.*

El problema general sobre representación conforme consiste en decidir si dos abiertos son conformemente equivalentes, y en caso de que lo sea, encontrar el conjunto de isomorfismos conformes entre ellos.

Veamos un resultado que nos permitirá encontrar isomorfismos conformes sin tener que comprobar que cumplan todas las propiedades de la definición.

Proposición A.3.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una aplicación inyectiva. Entonces, para cada $a \in \Omega$, se cumple que $f'(a) \neq 0$, $G = f(\Omega)$ es abierto y la inversa $f^{-1} : G \rightarrow \Omega$ es holomorfa. Consecuentemente $(f^{-1})'(b) \neq 0$ para cada $b \in G$ y así f será un isomorfismo conforme entre Ω y G .*

Demostración. Supondremos que Ω es conexo pues en caso contrario bastaría con restringirnos a cada componente conexa. Así, por el teorema de la aplicación abierta G es abierto y $f : \Omega \rightarrow G$ es biyectiva y holomorfa luego $f'(a) \neq 0$ para cada $a \in \Omega$. Como f es abierta, f^{-1} es continua. Tomando $b = f(a)$, tenemos que

$$\frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{(b+h) - b} = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(b+h)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \neq 0$$

con lo cual f^{-1} es holomorfa. □

Corolario A.3.4. *Sean Ω_1 y Ω_2 dos abiertos de \mathbb{C} y $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una biyección holomorfa. Entonces f es un isomorfismo conforme.*

Demostración. Basta con aplicar la proposición anterior a f . □

La aplicación exponencial nos proporciona un primer ejemplo de isomorfismo conforme tomando el dominio adecuadamente.

Ejemplo A.3.5. *La función $f(z) = e^z$ establece un isomorfismo conforme entre la banda horizontal $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Re}z < \pi\}$ y el semiplano superior $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$. Estos dos abiertos son, por tanto, conformemente equivalentes.*

Las transformaciones de Möbius son otro ejemplo de biyecciones holomorfas, con la diferencia de estar definidas en C_∞ . Tomando el dominio de manera que no haya puntos que vayan al infinito, obtenemos multitud de nuevos ejemplos de transformaciones conformes. Entre ellos, estudiaremos a fondo el siguiente, que utilizaremos frecuentemente.

Ejemplo A.3.6. *La aplicación*

$$S_a(z) = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{D}$ es un isomorfismo conforme del disco unidad en sí mismo. En efecto, si $|z| = 1$ entonces

$$|S_a(z)| = |e^{i\alpha}| \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = \frac{|z-a|}{|\bar{z}||1-\bar{a}z|} = \frac{|z-a|}{|\bar{z}-\bar{a}z\bar{z}|} = \frac{|z-a|}{|\bar{z}-\bar{a}|} = 1.$$

Además las transformaciones de Möbius transforman circunferencias en circunferencias o rectas, luego S_a transforma necesariamente la frontera del disco unidad en sí misma. Como S_a es continua y biyectiva por ser una transformación de Möbius, la imagen de \mathbb{D} debe ser conexa y por tanto, o bien $S_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ o bien $S_a(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$. Pero la segunda opción es absurda porque $S_a(a) = 0$. Así, S_a es una biyección holomorfa del disco unidad en sí mismo.

Se puede demostrar que de hecho, todas las biyecciones holomorfas del disco unidad en sí mismo que envían un punto $a \in \mathbb{D}$ al origen, son de este tipo. Sin embargo, aún no estamos en condiciones de probar este resultado, pues necesitamos hacer uso del Lema de Schwarz.

Sencillos cálculos nos garantizan además que la inversa de S_a es precisamente S_{-a} , que $S_a(a) = 0$ y que $S'_a(a) = \frac{1}{1-|a|^2}$. Usaremos estas propiedades con frecuencia.

Ejemplo A.3.7. *Análogamente al caso anterior, es de especial interés la transformación de Möbius*

$$T(z) = \frac{z+i}{z-i}$$

que transforma el semiplano superior al disco unidad. Esta aplicación aparece en numerosas ocasiones y la llamaremos Transformación de Cayley.

A.4. Principios del máximo

Analizaremos en esta sección los principios del máximo para funciones subarmónicas y holomorfas. Debemos comenzar con algunas definiciones.

Definición A.4.1. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se dice que f satisface la propiedad de la media si para cada $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

Definición A.4.2. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se dice que f es subarmónica si $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$ y para cada $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$,

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

Los siguientes ejemplos presentan una motivación para las definiciones anteriores.

Proposición A.4.3. Se tiene que:

- i) Toda función holomorfa tiene la propiedad de la media.
- ii) La parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa satisface la propiedad de la media.
- iii) El módulo de una función holomorfa es una función subarmónica.

Demostración. i) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$ y $\gamma(t) = a + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, sabemos por la fórmula integral de Cauchy que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - a} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it}) ire^{it}}{a + re^{it} - a} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

- ii) Tomando partes reales e imaginarias en la igualdad anterior obtenemos que $Re f$ e $Im f$ también satisfacen la propiedad de la media.
- iii) Por último, tomando módulos,

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{it})| dt$$

luego $|f|$ es subarmónica. □

Enunciamos a continuación la proposición que sustentará los principios del máximo que enunciamos posteriormente.

Proposición A.4.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función subarmónica. Si u alcanza un máximo absoluto en Ω , entonces u es constante.

Demostración. Supongamos que u alcanza su máximo absoluto en $a \in \Omega$, es decir, $u(a) \geq u(z)$ para cada $z \in \Omega$. Consideremos ahora el conjunto $A = \{z \in \Omega : u(z) = u(a)\}$. Sabemos que:

i) $A \neq \emptyset$ pues $a \in A$.

ii) A es cerrado en Ω . Si $u(a) = k$, entonces $A = u^{-1}(k)$ y u es continua.

iii) Veamos que A es abierto. Sea $b \in A$ y $D(b, \rho) \subset \Omega$, entonces, tomando $0 < r < \rho$, $u(b + re^{i\theta}) \leq u(b)$ (pues $b \in A$) y por tanto,

$$u(b) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(b + re^{i\theta}) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(b) d\theta \leq u(b).$$

Es decir,

$$u(b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(b + re^{i\theta}) d\theta.$$

Así,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(b) - u(b + re^{i\theta})] d\theta = 0$$

y como último integrando es positivo, necesariamente debe ser nulo, es decir, $u(b) = u(b + re^{i\theta})$ para cada $0 < r < \rho$ y para cada $\theta \in [0, 2\pi]$, luego u es constante en $D(b, \rho)$, es decir, $D(b, \rho) \subset A$. Concluimos entonces que A es abierto.

Como Ω es conexo, necesariamente $A = \Omega$, es decir u es constante en Ω . \square

A continuación se enuncia el teorema principal de la sección, que afirma entre otras cosas, que el módulo de una función holomorfa no constante no puede alcanzar un máximo relativo.

Teorema A.4.5 (Teorema del módulo máximo). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si $|f|$, $Re f$ o $Im f$ alcanzan un máximo relativo en Ω , entonces f es constante.*

Demostración. Las tres funciones, $|f|$, $Re f$ y $Im f$, son funciones subarmónicas. Por tanto, si alguna de ellas alcanza un máximo relativo entonces es constante aplicando la proposición anterior. Esto implica que f es constante, ya que si no lo fuera $f(\Omega)$ sería abierto por el teorema de la aplicación abierta y no hay ningún abierto contenido en una circunferencia, una recta vertical o una horizontal, que son los conjuntos donde está contenida $f(\Omega)$ cuando $|f|$, $Re f$ e $Im f$ son constantes respectivamente. \square

Estamos ya en condiciones de enunciar el siguiente principio del máximo.

Teorema A.4.6 (Principio del máximo). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función subarmónica. Si se tiene que $\limsup_{z \rightarrow a} u(z) \leq c$ para cada $a \in \partial_\infty \Omega$, entonces o bien $u(z) < c$ para todo $z \in \Omega$ o bien $u(z) = c$ para todo $z \in \Omega$.*

Demostración. Es suficiente con probar que $u(z) \leq c$ para todo $z \in \Omega$, ya que en el caso en el que u tome el valor c para algún punto, tendrá en Ω un máximo absoluto y por tanto $u(z) = c$ para todo $z \in \Omega$.

Para ello, fijado un $\varepsilon > 0$, definiremos el conjunto $H_\varepsilon = \{z \in \Omega : u(z) > c + \varepsilon\}$. Vamos a suponer que este conjunto es no vacío con el objetivo de llegar a una contradicción. Observemos que $H_\varepsilon = u^{-1}((c + \varepsilon, \infty)) \cap \Omega$ y por tanto es abierto.

Cuando Ω es acotado está claro que H_ε también lo está pues $H_\varepsilon \subset \Omega$. Cuando Ω no está acotado entonces $\infty \in \partial_\infty \Omega$ y aplicando la hipótesis, $\limsup_{z \rightarrow \infty} u(z) \leq c$. Esto quiere decir que existe un valor $R > 0$ suficientemente grande como para que $u(z) \leq c + \varepsilon$ si $|z| > R$. Por tanto $H_\varepsilon \subset \overline{D(0, R)}$. Concluimos por tanto que en todo caso H_ε es acotado.

Por otro lado, debemos ver que $\overline{H_\varepsilon} \subset \Omega$. Ya sabemos que $H_\varepsilon \subset \Omega$ luego bastará con probar que si $a \in \overline{H_\varepsilon}$ entonces $a \notin \partial \Omega$. Supongamos por reducción al absurdo que $a \in \partial \Omega$. Entonces $\limsup_{z \rightarrow a} u(z) \leq c$ con lo cual existe $D(a, r)$ tal que si $z \in D(a, r) \cap \Omega$ entonces $u(z) < c + \varepsilon$, es decir, $z \notin H_\varepsilon$ para todo punto de esta intersección y en particular $a \notin H_\varepsilon$ lo cual contradice la hipótesis.

Tenemos por tanto que $\overline{H_\varepsilon}$ es un compacto no vacío, luego existirá $b \in H_\varepsilon$ tal que $u(b) = \max\{u(z) : z \in H_\varepsilon\} \geq c + \varepsilon$. Por otra parte, $u(z) \leq c + \varepsilon$ para todo $z \in \Omega \setminus \overline{H_\varepsilon}$ luego se concluye que de hecho, $u(b) = \max\{u(z) : z \in \Omega\}$. Aplicando la proposición A.4.4 obtenemos que $u(z) = k$ para todo $z \in \Omega$, con $k \geq c + \varepsilon$ una constante. Esto contradice la hipótesis de que $\limsup_{z \rightarrow a} u(z) \leq c$, con lo cual $H_\varepsilon = \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$, lo cual finaliza la prueba. \square

Observación A.4.7. *En el teorema anterior no es posible sustituir $\partial_\infty \Omega$ por $\partial \Omega$. Basta tomar como ejemplo la función $f(z) = e^z$ en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$. Claramente verifica que $\limsup_{z \rightarrow a} f(z) \leq 1$ para todo $a \in \partial \Omega$ y sin embargo no se cumple que $e^z < 1$ ni que sea constante en el semiplano.*

El siguiente resultado establece que en un compacto, una función subarmónica alcanza su máximo en la frontera.

Corolario A.4.8. Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto, $\Omega = \overset{\circ}{K}$ y $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua tal que $f|_{\Omega}$ es holomorfa. Existe entonces $a \in \partial K$ tal que

$$|f(a)| = \max \{|f(z)| : z \in K\}.$$

Demostración. Como f es continua en un compacto, alcanzará su máximo en algún punto de él, que llamaremos b . Si $b \in \partial K$ la demostración queda completa. En caso contrario, si $b \in \Omega$, debemos encontrar un punto $a \in \partial K$ tal que $f(a) = f(b)$. Llamemos para ello Ω_b a la componente conexa de b en Ω . Como este conjunto es conexo, f es holomorfa en él por ser un subconjunto de Ω y b es un máximo para $|f|$ en Ω_b concluimos que $f(z) = f(b)$ para todo $z \in \Omega_b$. Ahora bien, como Ω está acotada por ser K compacto, tenemos que Ω_b es también acotado, es decir, $\partial\Omega_b \neq \emptyset$. Tomemos entonces $a \in \partial\Omega_b$. Como f es continua en K se tiene que $f(a) = f(b)$. Queda por ver entonces que $a \in \partial K$. Si no fuera así, $a \in \Omega$ y podemos llamar Ω_a a la componente conexa de a . Pero entonces $a \in \Omega_a \cap \overline{\Omega_b}$ y por tanto $\Omega_a = \Omega_b$ por ser dos componentes conexas no separadas. Esto implica que $a \in \Omega_b$ lo cual es absurdo ya que suponíamos que $a \in \partial\Omega_b$. \square

A.5. El Lema de Schwarz

Con las herramientas que nos proporciona la sección anterior, estamos ya en condiciones de enunciar y demostrar el Lema de Schwarz. Se trata de un teorema que jugará un papel importante en la demostración del teorema de representación de Riemann.

Teorema A.5.1 (Lema de Schwarz). Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Entonces, $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y además $|f'(0)| \leq 1$. Si en alguno de los casos se da la igualdad, es decir, si $|f(a)| = |a|$ para algún $a \in \mathbb{D}$ ó si $|f'(0)| = 1$, entonces $f(z)$ es un giro, es decir, $f(z) = e^{i\alpha}z$ para $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración. Definiremos primero la función $g(z)$ como $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ si $z \neq 0$ y $g(0) = f'(0)$. Así definida, g es continua ya que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - 0}{z - 0} = f'(0)$ y además es holomorfa en $D^*(0, 1)$, con lo cual $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Además, si $|z| = r \in (0, 1)$, se tiene que

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r}.$$

Aplicando el principio del módulo máximo obtenemos que $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ para todo $|z| \leq r$. Así, podemos fijar z y tomar límites haciendo $r \rightarrow 1^-$ y se obtiene que $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. En particular, recordando la definición de g , obtenemos que $|f'(0)| \leq 1$ y que $\frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1$ o equivalentemente $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \neq 0$. Como $f(0) = 0$, la desigualdad $|f(z)| \leq |z|$ es también válida en $z = 0$.

Queda por probar la última afirmación. Si $|f(a)| = |a|$ para algún $a \in \mathbb{D}$ ó si $|f'(0)| = 1$ entonces $g(z) = 1$ en algún punto del disco y por tanto presenta en él un máximo relativo. Aplicando el teorema del módulo máximo, será constante, es decir, $g(z) = \mu$ con $|\mu| = 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, con lo cual $\frac{f(z)}{z} = \mu$ o equivalentemente $f(z) = \mu z$ para todo $z \in \mathbb{D}$. \square

Obtenemos el siguiente resultado como corolario del Lema de Schwarz.

Corolario A.5.2. *Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces, para cada $z \in \mathbb{D}$ se tiene que*

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}$$

y si en algún punto del disco se cumple la igualdad entonces f es una biyección holomorfa de \mathbb{D} en sí mismo. En particular, si f no es inyectiva se cumple $|f'(0)| < 1$.

Demostración. Tomaremos $a \in \mathbb{D}$ arbitrario, llamemos $b = f(a)$ y consideremos la transformación $S_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$. Se cumple entonces que $S'_\alpha(z) = \frac{1-\bar{\alpha}z}{(1-\bar{\alpha}z)^2}$ y en particular $S'_\alpha(\alpha) = \frac{1}{1-|\alpha|^2}$.

Consideremos ahora la composición $g(z) = S_b \circ f \circ S_{-a}$. Entonces, $g(0) = 0$ y $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Podemos aplicar entonces el lema de Schwarz y obtenemos que $|g'(0)| \leq 1$. Es decir,

$$|g'(0)| = |S'_b(b)f'(a)S'_{-a}(0)| = \left| \frac{S'_b(b)f'(a)}{S'_a(a)} \right| \leq 1.$$

Despejando,

$$|f'(a)| \leq \frac{|S'_a(a)|}{|S'_b(b)|} = \frac{1 - |b|^2}{1 - |a|^2} = \frac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}.$$

Por último, si se cumple la igualdad entonces necesariamente $|g'(0)| = 1$ y el lema de Schwarz nos garantiza entonces que $g(z)$ es un giro. Entonces, $f = S_{-b} \circ g \circ S_a$ es una biyección. Consecuentemente, si f no es inyectiva, f no puede ser una biyección y por tanto no puede darse la igualdad, es decir, $|f'(0)| < 1 - |f(0)| \leq 1$. \square

A.6. El Principio de reflexión de Schwarz

En el ámbito del análisis real es frecuente la situación en la que se desea extender una función derivable a un dominio de definición mayor. La situación es más complicada cuando deseamos realizar esta práctica en el plano complejo con funciones holomorfas. A pesar de las rígidas propiedades que éstas presentan, el Principio de reflexión de Schwarz es una herramienta muy útil que nos permitirá extender el dominio de una función holomorfa respecto de un segmento. La referencia principal para esta sección es [21, Cap. 2].

Estudiaremos en primer lugar el caso de la simetría respecto del eje real.

Definición A.6.1. Diremos que un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es simétrico respecto de la recta real si

$$z \in \Omega \Leftrightarrow \bar{z} \in \Omega.$$

En este caso llamaremos $\Omega^+ = \{z \in \Omega : \text{Im}(z) > 0\}$, $\Omega^- = \{z \in \Omega : \text{Im}(z) < 0\}$ e $I = \Omega \cap \mathbb{R}$.

Proposición A.6.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simétrico respecto del eje real. Si f^+ y f^- son funciones holomorfas definidas en Ω^+ y Ω^- respectivamente y además se pueden extender con continuidad al eje real cumpliendo $f^+(x) = f^-(x)$ para cada $x \in I$ entonces la función

$$f(z) = \begin{cases} f^+(z) & \text{si } z \in \Omega^+ \\ f^+(z) = f^-(z) & \text{si } z \in I \\ f^-(z) & \text{si } z \in \Omega^- \end{cases}$$

es holomorfa en Ω .

Demostración. Es claro que la función f es continua en Ω . Probaremos que es holomorfa en Ω haciendo uso de la versión para triángulos del Teorema de Morera A.1.6, es decir, comprobando que cualquier triángulo cerrado $\Delta \subset \Omega$ verifica $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$.

Si $\Delta \subset \Omega^+$ o $\Delta \subset \Omega^-$ el resultado es claro porque f es holomorfa en estos abiertos. Supongamos que un lado o un vértice de Δ está contenido en I y el resto del triángulo está contenido en Ω^+ (el proceso es análogo para Ω^-). Entonces podemos definir $\Delta_\varepsilon = \{z + \varepsilon : z \in \Delta\}$ con $\varepsilon > 0$. Este nuevo triángulo está enteramente contenido en Ω^+ y por

tanto, por continuidad,

$$\int_{\partial\Delta} f(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z) = 0.$$

Estudiemos el caso restante, es decir, el interior de Δ interseca a I . En este caso podemos dividir Δ en, a lo sumo, tres triángulos verificando el caso anterior. Podemos escribir la integral a lo largo de su frontera como la suma de las integrales a lo largo de las fronteras de los tres triángulos. Como los tres cumplen el caso anterior, son nulos y por tanto $\int_{\partial\Delta} f(z) = 0$ en este caso también. Así, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. \square

Haciendo uso de la proposición anterior podemos enunciar y demostrar la primera versión del principio de reflexión.

Teorema A.6.3 (Principio de reflexión de Schwarz). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simétrico respecto del eje real y $f \in \mathcal{H}(\Omega^+)$ una función que extendida por continuidad al eje real toma valores reales en él. Existe entonces $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F = f$ en Ω^+ .*

Demostración. Extenderemos f definiendo $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$ para cada $z \in \Omega^-$. Si $z, z_0 \in \Omega^-$ entonces $\bar{z}, \bar{z}_0 \in \Omega^+$ y como la función es holomorfa en este abierto, podemos escribir

$$f(\bar{z}) = \sum a_n (\bar{z} - \bar{z}_0)^n.$$

Tomando conjugados,

$$F(z) = \sum \bar{a}_n (z - z_0)^n$$

lo cual indica que $F \in \mathcal{H}(\Omega^-)$.

Además, F es continua en Ω ya que $\overline{f(x)} = f(x)$ para cada $x \in I$ por ser f real en I . Aplicando la proposición anterior obtenemos que $F \in \mathcal{H}(\Omega)$. \square

A continuación generalizaremos el principio de reflexión al caso en el que el abierto Ω es simétrico respecto de un segmento L que no tiene porque ser el eje real. Análogamente al caso anterior, llamaremos Ω_1 y Ω_2 a las dos regiones de Ω en las que el segmento lo divide y llamaremos $I = \Omega \cap L$.

Corolario A.6.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simétrico respecto de un segmento L y $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ una función que extendida por continuidad a L toma valores reales en él. Existe entonces $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F = f$ en Ω_1 .*

Demostración. Llamaremos φ a la transformación de Möbius, composición de una rotación y una traslación, que transforma a L en un segmento contenido en \mathbb{R} . Obtenemos entonces un abierto $\varphi(\Omega)$ simétrico respecto del eje real con $\varphi(\Omega_1) = \Omega^+$ o $\varphi(\Omega_1) = \Omega^-$. La función $f \circ \varphi^{-1}$ es holomorfa en $\varphi(\Omega_1)$ y toma valores reales en el eje real por tanto podemos aplicar el caso anterior, que nos garantiza la existencia de una extensión G a $\varphi(\Omega)$. Definiendo $F(z) = G \circ \varphi(z)$ para cada $z \in \Omega_2$ obtenemos el resultado. F es holomorfa en Ω por ser composición de funciones holomorfas y claramente coincide con f en Ω_1 . \square

Es posible extender una función holomorfa en un disco. Para ello haremos uso de la transformación de Cayley.

Corolario A.6.5. *Sea $f \in \mathcal{H}(D(a,r))$ una función que extendida por continuidad a la frontera del disco verifica que $f(z) \in \mathbb{R}$ para cada $z \in \partial D(a,r)$. Existe entonces $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $F = f$ en $D(a,r)$.*

Demostración. Demostraremos el resultado en primer lugar para $D(a,r) = \mathbb{D}$. Haremos uso de la transformación de Cayley

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

una transformación de Möbius que transforma el semiplano superior en \mathbb{D} y cuya inversa viene dada por

$$\varphi^{-1}(z) = i \frac{1+z}{1-z}.$$

La función $g(z) = f \circ \varphi(z)$ es una función holomorfa en el semiplano superior y además $g(x) \in \mathbb{R}$ para cada $x \in \mathbb{R}$ ya que φ transforma el eje real en la frontera del disco y f toma valores reales en dicha frontera.

Aplicando la versión del Principio de reflexión para el eje real, afirmamos que existe $G \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $G = g$ en el semiplano superior. Finalmente podemos extender f definiendo $F(z) = g \circ \varphi^{-1}(z)$ para cada $z \notin \mathbb{D}$, que es holomorfa en \mathbb{C} y coincide con f en $\partial \mathbb{D}$. Además viene dada por

$$f(z) = g(\varphi^{-1}(z)) = g\left(i \frac{1+z}{1-z}\right) = \overline{g\left(-i \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}\right)} = \overline{f\left(\frac{-i - i \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}}{i - i \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}}\right)} = \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

Para demostrar el caso general $D(a, r)$ basta con componer la función inicial con una traslación $\phi_1(z) = z - a$ y una homotecia $\phi_2(z) = z/r$. Nos situaremos entonces en el caso anterior que nos proporciona una extensión para \mathbb{D} . Componiendo esta extensión con las inversas de la traslación y de la homotecia obtenemos la extensión para el caso $D(a, r)$. \square

Observación A.6.6. *Al igual que en el caso de la recta real efectuábamos la simetría respecto de un segmento del eje real, el corolario anterior puede enunciarse para un arco I de $D(a, r)$ en lugar de la frontera completa.*

A.7. El Teorema de Ascoli

Demostraremos en esta sección un resultado topológico necesario en la prueba del Teorema de Riemann: El Teorema de Ascoli. Existen versiones más generales de este resultado que la que presentamos, por ejemplo la dada en [15]. Sin embargo, esta versión es suficiente para demostrar el Teorema de Riemann. Se puede encontrar en [5, 9, 23].

A lo largo de toda la sección, Ω denotará un abierto del plano complejo, (E, d) un espacio métrico y E^Ω el conjunto de todas las funciones $f : \Omega \rightarrow E$. Llamaremos $C(\Omega, E)$ al conjunto de las funciones continuas de E^Ω .

Así mismo, dado $K \subset E$, denotaremos por

$$d_K(f, g) = \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\}$$

y por

$$V(f, K, \varepsilon) = \{g \in E^\Omega : d_K(f, g) < \varepsilon\}.$$

Definiremos a continuación las dos topologías con las que trabajaremos para demostrar el teorema de Ascoli.

Definición A.7.1. *Se define la topología de convergencia uniforme sobre compactos en E^Ω , que denotaremos por τ_K , a la generada por la base de entornos*

$$\{V(f, K, \varepsilon) : f \in E^\Omega, K \text{ compacto}, \varepsilon > 0\}.$$

Dicho de otro modo, un conjunto $\mathcal{F} \subset E^\Omega$ es abierto para τ_K si para cada $f \in \mathcal{F}$ existe un compacto K y $\varepsilon > 0$ tal que $V(f, K, \varepsilon) \subset \mathcal{F}$.

Definición A.7.2. Se define la topología de la convergencia puntual en E^Ω , que denotaremos por τ_p , a la generada por la base de entornos $\{V(f, H, \varepsilon) : f \in E^\Omega, H \text{ finito}, \varepsilon > 0\}$.

Observación A.7.3. El nombre que se le da a las topologías anteriores se debe a que las sucesiones $(f_n)_n \subset E^\Omega$ que son convergentes para τ_K son precisamente las que convergen uniformemente sobre compactos y las sucesiones $(f_n)_n \subset E^\Omega$ que son convergentes para τ_p son precisamente las que convergen puntualmente.

Observación A.7.4. Si $H \subset \Omega$ es finito entonces es compacto por tanto $\tau_p \subset \tau_K$, es decir, τ_p es más gruesa que τ_K .

Dada una familia de funciones $\mathcal{F} \subset E^\Omega$ denotaremos por $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$ y $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$ a las clausuras de \mathcal{F} en τ_K y τ_p respectivamente. Como los límites uniformes sobre compactos de funciones continuas son continuos por ser Ω localmente compacto, sabemos que si $\mathcal{F} \subset C(\Omega, E)$ entonces $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K} \subset C(\Omega, E)$. Sin embargo, no se puede afirmar lo mismo para la topología puntual. A pesar de ello podemos introducir una nueva propiedad para que la continuidad se conserve por límites en τ_p .

Definición A.7.5. Una familia $\mathcal{F} \subset C(\Omega, E)$ se dice que es equicontinua en $a \in \Omega$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $D(a, r) \subset \Omega$ tal que $d(f(z), f(a)) < \varepsilon$ para todo $z \in D(a, r)$ y toda $f \in \mathcal{F}$. Se dice que \mathcal{F} es equicontinua en Ω cuando lo es en todos sus puntos.

Lema A.7.6. Si $\mathcal{F} \subset C(\Omega, E)$ es equicontinua, entonces $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$ también lo es.

Demostración. Aplicando la equicontinuidad, dado $\varepsilon > 0$ existe $D(a, r) \subset \Omega$ tal que $d(f(z), f(a)) < \varepsilon$ para cada $z \in D(a, r)$ y para cada $f \in \mathcal{F}$. Esto implica que $d(f(z), f(a)) < \varepsilon$ para cada $z \in D(a, r)$ y para cada $f \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$, lo cual significa que $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$ es equicontinua. \square

Proposición A.7.7. Si la familia $\mathcal{F} \subset C(\Omega, E)$ es equicontinua entonces $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K} = \overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$.

Demostración. La convergencia uniforme implica la puntual, luego $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K} \subset \overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$. Para ver la otra implicación, sea $g \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$ y $K \subset \Omega$ compacto. Como \mathcal{F} es equicontinua, también lo es $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$ por el lema anterior, es decir, dado un $\varepsilon > 0$ y $a \in K$, existe $D(a, r_a) \subset \Omega$ tal que $d(f(z), f(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $z \in D(a, r_a)$ y para todo $f \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$.

Haciendo uso ahora de la compacidad, podemos recubrir K como $K \subset \bigcup_{i=1}^n D(a_i, r_{a_i})$.

Como se trata de un número finito de puntos, podemos encontrar una función $h \in \mathcal{F}$ tal que $D(g(a_i), h(a_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Ahora, si $z \in K$ entonces $z \in D(a_j, r_{a_j})$ para cierto $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ luego finalmente

$$d(g(z), h(z)) \leq d(g(z), g(a_j)) + d(g(a_j), h(a_j)) + d(h(a_j), h(z)) < \varepsilon$$

es decir, $d_K(g, h) < \varepsilon$ para cierto $h \in \mathcal{F}$ o equivalentemente, $g \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$. \square

Podemos deducir ahora el siguiente corolario.

Corolario A.7.8. *Las topologías τ_K y τ_p inducidas en una familia equicontinua $\mathcal{F} \subset C(\Omega, E)$ coinciden.*

Demostración. Para probar la proposición es suficiente con ver que las topologías coinciden en $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K} = \overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$. Ahora, para cada familia equicontinua $A \subset \overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$ se cumple $\overline{A}^{\tau_K} = \overline{A}^{\tau_p}$. La inclusión $\overline{A}^{\tau_K} \subset \overline{A}^{\tau_p}$ equivale a la continuidad de la identidad $Id : (\overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}, \tau_K) \rightarrow (\overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}, \tau_p)$ y análogamente la inclusión contraria, $\overline{A}^{\tau_p} \subset \overline{A}^{\tau_K}$, equivale a la continuidad de la identidad $Id : (\overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}, \tau_p) \rightarrow (\overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}, \tau_K)$. Se concluye de la continuidad de la identidad en ambos sentidos que las topologías coinciden en $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K} = \overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$ y por tanto en \mathcal{F} . \square

El siguiente lema será la última herramienta necesaria para enunciar el Teorema de Ascoli.

Lema A.7.9. *Sea $S \subset \Omega$ un conjunto denso y $(f_n)_n \subset C(\Omega, E)$ una sucesión equicontinua que converge puntualmente sobre S . Si para cada $z \in \Omega$ existe un compacto $K_z \subset E$ que contiene a $(f_n(z))_n$, entonces $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre compactos hacia cierta $f \in C(\Omega, E)$.*

Demostración. Haciendo uso de la proposición anterior es suficiente demostrar que $(f_n)_n$ converge puntualmente hacia f sobre Ω . Por un lado, como la sucesión es equicontinua, dado $a \in \Omega$ existe $D(a, r) \subset \Omega$ tal que $d(f_n(z), f_n(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $z \in D(a, r)$ y $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, como $S \subset \Omega$ es denso, existe $s \in D(a, r) \cap S$ y por hipótesis $(f_n(s))_n$ converge en (E, d) luego existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_\varepsilon$ entonces $d(f_n(s), f_m(s)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Juntando ambas desigualdades, si $z \in D(a, r)$ entonces

$$d(f_n(z), f_m(z)) \leq d(f_n(z), f_n(s)) + d(f_n(s), f_m(s)) + d(f_m(s), f_m(z)) < 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

si $n, m \geq n_\varepsilon$. Por tanto, para cada $z \in \Omega$, $(f_n(z))_n$ es de Cauchy y como $(f_n(z))_n \subset K_z$ compacto, existe el límite $\lim_n f_n(z) \in (E, d)$, es decir, converge puntualmente. \square

Estamos por fin en condiciones de dar el resultado que da nombre a esta sección.

Teorema A.7.10 (Teorema de Ascoli). *Una familia $\mathcal{F} \subset C(\Omega, E)$ es τ_K -relativamente compacta si y sólo si cumple las dos condiciones siguientes.*

- i) \mathcal{F} es equicontinua.
- ii) Para cada $z \in \Omega$, el conjunto $\mathcal{F}(z) = \{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ es relativamente compacto en el espacio métrico (E, d) .

Demostración. [i) \Rightarrow ii)] Partimos primero de que $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$ es τ_K -compacta y veremos que ambas condiciones se verifican para \mathcal{G} y por tanto para \mathcal{F} .

Por un lado, fijados $\varepsilon > 0$ y $K \subset \overline{D(a, r)} \subset \Omega$, se tiene que $\mathcal{G} \subset \bigcup_{f \in \mathcal{G}} V(f, K, \varepsilon)$ y por

compacidad, $\mathcal{G} \subset \bigcup_{i=1}^n V(f_i, K, \varepsilon)$ para ciertas $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{G}$. Como se trata de un número finito de funciones podemos tomar $\delta < r$ tal que $d(f_i(z), f_i(a)) < \varepsilon$ para $i = 1, 2, \dots, n$ y todo $z \in D(a, \delta)$. Podemos concluir entonces que para cierto $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene $d(f(z), f(a)) < d(f(z), f_j(z)) + d(f_j(z), f_j(a)) + d(f_j(a), f(a)) < 3\varepsilon$ para todo $z \in D(a, \delta)$ y todo $f \in \mathcal{G}$, lo cual prueba que \mathcal{G} es equicontinua.

Por otro lado, para $z \in \Omega$ fijo, la aplicación $\delta_z : (C(\Omega, E), \tau_K) \rightarrow (E, d)$ definida como $\delta_z(f) = f(z)$ es continua y por tanto lleva compactos a compactos. Se deduce entonces que $\delta_z(\mathcal{G}) = \{f(z) : f \in \mathcal{G}\}$ es compacto en (E, d) .

[ii) \Rightarrow i)] Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F} \subset C(\Omega, E)$ satisface ambas propiedades y veamos que es τ_K -relativamente compacto probando toda sucesión $(f_n)_n \subset \mathcal{F}$ posee una subsucesión convergente a cierta función $f \in C(\Omega, E)$ en τ_K .

Tomemos para ello $S \subset \Omega$ un conjunto denso y numerable, $S = \{z_1, z_2, z_3, \dots\}$. Encontraremos la subsucesión convergente de manera recurrente:

- Como $f_1(z_1), f_2(z_1), \dots, f_n(z_1), \dots$ está contenido en un compacto por la segunda condición, podemos extraer una subsucesión convergente $f_{n_1^1}(z_1), f_{n_2^1}(z_1), \dots, f_{n_k^1}(z_1), \dots$ a algún elemento de E .
- Análogamente, de $f_{n_1^1}(z_2), f_{n_2^1}(z_2), \dots, f_{n_k^1}(z_2), \dots$ extraemos $f_{n_1^2}(z_2), f_{n_2^2}(z_2), \dots, f_{n_k^2}(z_2), \dots$ convergente a algún elemento de E .
- Análogamente, de $f_{n_1^2}(z_3), f_{n_2^2}(z_3), \dots, f_{n_k^2}(z_3), \dots$ extraemos $f_{n_1^3}(z_3), f_{n_2^3}(z_3), \dots, f_{n_k^3}(z_3), \dots$ convergente a algún elemento de E .

De manera recurrente, efectuaremos la construcción tomando la diagonal la sucesión $(f_{n_k})_k = f_{n_1^1}, f_{n_2^2}, \dots, f_{n_k^k}, \dots$. Se tiene entonces:

- $(f_{n_k})_k$ es equicontinua por ser una subsucesión de $(f_n)_n \subset \mathcal{F}$ que lo es.
- Converge puntualmente sobre cada punto de S , pues a partir de cierto término y evaluada sobre z_i es una subsucesión de $(f_{n_i^k}(z_i))_k$ que convergía a un elemento de E .
- Para cada $z \in \Omega$, $(f_n(z))_n \subset K_z$ compacto luego $(f_{n_k}(z))_k \subset K_z$.

Podemos por tanto aplicar el lema anterior para concluir que $(f_{n_k}(z))_k$ converge hacia f en τ_K para cierto $f \in C(\Omega, E)$. Tenemos por tanto que \mathcal{F} es τ_K -relativamente compacto, lo cual finaliza la demostración del teorema. \square

«CONTENIDOS»

- Historia del Teorema de Riemann.

En esta última sección de Anexos presentaremos un complemento histórico a lo estudiado anteriormente.

Estudiaremos la historia del Teorema de Riemann, que aún siendo enunciado por Riemann en su tesis en 1851 no fue demostrado hasta 1912 por Carathéodory y engloba en su desarrollo a distintos matemáticos.

Las referencias principales para este capítulo son [18, 19, 24].

B.1. Historia del Teorema de Riemann

La historia del Teorema de representación conforme de Riemann comienza en 1851, año en el que Riemann esboza una prueba en su tesis, que defiende ante Gauss. Esta prueba se limita a dominios acotados por una frontera diferenciable a trozos. En ella, Riemann liga la existencia del isomorfismo conforme al problema de Dirichlet. Para esto, hace uso del principio de Dirichlet.

Teorema B.1.1 (Principio de Dirichlet). *Sea Ω un abierto acotado y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la solución de $\Delta u = 0$ con condición de frontera g , es decir, $u|_{\partial\Omega} = g$. Entonces u es la función que minimiza la energía de Dirichlet,*

$$\iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy.$$

Estas ideas, revolucionarias para la época, no tuvieron una buena aceptación en la comunidad matemática. El decano de la facultad de filosofía de la Universidad de Göttingen, Heinrich Ewald, le pidió a Gauss su opinión acerca del trabajo de Riemann. De acuerdo con Ewald, el latín de Riemann era torpe e insufrible. Gauss le contestó de manera brusca y no dijo una palabra sobre el trabajo de Riemann. Tampoco propuso una nota para la tesis de Riemann pues gran parte de su informe es relativa a la hora en la que está disponible para que Riemann realice su examen oral ante él.

La prueba de Riemann obtuvo numerosas críticas en años posteriores. En 1870, Weierstrass sacó a la luz un contraejemplo que demostraba que la existencia de la función minimizante del principio de Dirichlet no era cierta en general. Las críticas disminuyeron más tarde cuando Hilbert demostró que sí lo era para las condiciones que Riemann había impuesto. Estas condiciones no eran ciertas, en general, para cualquier abierto simplemente conexo. Aún así la prueba no era clara. En palabras de L. Ahlfors, el teorema estaba formulado en términos que desafiaban cualquier intento de prueba, incluso con métodos modernos.

Más tarde Schwarz, haciendo uso de su principio de reflexión y de algunos métodos para problemas de frontera demostraría el siguiente resultado.

Teorema B.1.2. *Sea Ω un abierto simplemente conexo acotado por un número finito de curvas reales analíticas que intersecan en ángulos distintos de 0. Existe entonces un homeomorfismo de $\overline{\Omega}$ en $\overline{\mathbb{D}}$ que transforma de manera conforme Ω en \mathbb{D} .*

En la época de Schwarz, los teoremas de este tipo eran considerados los más difíciles del análisis. De hecho, los abiertos simplemente conexos con una frontera arbitraria no fueron estudiados hasta 1900 por W.F. Osgood.

Antes de 1912, todos los métodos que ofrecían una aproximación al Teorema de Riemann hacían uso del problema con valores de frontera de la ecuación potencial $\Delta u = 0$. En 1912, Carathéodory diseñó un método en el que, para un abierto simplemente conexo Ω , encuentra una sucesión $(f_n)_n$ que converge sobre compactos a un isomorfismo conforme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$. Por primera vez, se demuestra rigurosamente el Teorema de Riemann con una técnica relativamente simple. Poco después, Koebe mejoraría la prueba eliminando las superficies de Riemann de las que Caratheodory hacía uso.

En 1922 L. Fejér y F. Riesz se dieron cuenta que el isomorfismo conforme del Teorema de Riemann se podía obtener como solución de un problema que maximiza las derivadas.

Obtuvieron así una nueva prueba, publicada por primera vez en la revista húngara *Acta Szeged*, que es la que se presenta en esta memoria.

Existen aún más pruebas del teorema. Por ejemplo, Ostrowski presentó una prueba que eliminaba los cálculos de la derivada de la función y Carathéodory publicó otra totalmente libre de derivadas.

La unicidad del isomorfismo conforme del Teorema de Riemann ya había sido demostrada en 1884 por Poincaré, tomando como hipótesis únicamente su existencia. En 1912, Carathéodory determina que la unicidad no es otra cosa que una consecuencia directa del Lema de Schwarz.

Por otro lado, en su tesis, Riemann no sólo afirma la existencia de un isomorfismo conforme entre dos abiertos simplemente conexos, sino que enuncia que éste se puede extender a un homeomorfismo entre las clausuras de los abiertos. Fue Carathéodory quien años más tarde desarrollaría la teoría que le permitió demostrar este resultado, que ahora conocemos como Teorema de Carathéodory.

Bibliografía

- [1] M.D. Acosta, R.M. Aron, D. García, and M. Maestre, *The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators*, J. Funct. Anal. **254** (2008), 2780–2799. MR2414220 (2009c:46016). [52](#), [58](#)
- [2] L.V. Ahlfors, *Complex analysis : an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.*, tercera ed., Auckland [etc.]: McGraw-Hill, 1987. [v](#), [xi](#), [64](#)
- [3] R.M. Aron, B. Cascales, and O. Kozhushkina, *The Bishop-Phelps-Bollobás theorem and Asplund operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), 3553–3560. MR2813386. [52](#)
- [4] J.W. Brown and R.V. Churchill, *Variable compleja y aplicaciones*, quinta ed., McGraw-Hill, 1992. [7](#), [36](#), [39](#), [50](#)
- [5] B. Cascales, *Notas sobre análisis complejo*, <<http://webs.um.es/beca/docencia.html>>, Dic. 2011, Consulta: 2 Feb. 2013. [vi](#), [vii](#), [xii](#), [xiii](#), [1](#), [18](#), [46](#), [64](#), [70](#), [83](#)
- [6] B. Cascales, A.J. Guirao, and V. Kadets, *A Bishop-Phelps-Bollobás type theorem for uniform algebras*, Adv. Math. **240** (2013), 370–382. [ix](#), [xv](#), [52](#), [58](#)
- [7] B. Cascales and J.M. Mira, *Análisis funcional*, primera ed., e-lectolibris, 2012. [52](#)
- [8] Y.S. Choi, D. García, S.K. Kim, and M. Maestre, *Some geometric properties on disk algebras*, Diciembre 2012. [ix](#), [xv](#), [52](#), [58](#)
- [9] J.B. Conway, *Functions of one complex variable I*, segunda ed., New York: Springer, cop., 1978. [v](#), [vi](#), [vii](#), [xi](#), [xii](#), [xiii](#), [1](#), [46](#), [64](#), [83](#)
- [10] ———, *Functions of one complex variable II*, primera ed., New York : Springer, cop., 1995. [18](#)
- [11] J. Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, tercera ed., New York and London: Academic Press, 1960. [28](#)
- [12] T.A. Driscoll and L.N. Trefethen, *Schwarz-Christoffel mapping*, primera ed., Cambridge University Press, 2003. [36](#)
- [13] T.A. Driscoll, *Schwarz-christoffel toolbox user's guide*. [58](#)
- [14] E. Johnston, *A 'counterexample' for the Schwarz-Christoffel transform*, Amer. Math. Monthly **90** (1983), 701–703. MR 85f:30009. [39](#)

- [15] J. Munkres, *Topology*, segunda ed., Prentice Hall, 2000. 64, 83
- [16] R. Nevanlinna and V. Paatero, *Introduction to complex analysis*, segunda ed., New York: Chelsea, cop., 1982. 23, 30
- [17] K. Pommerening, *Extension of conformal maps to the boundary*, Abril 1979. VII, XIV, 23
- [18] R. Remmert, *Theory of complex functions*, primera ed., New York : Springer, 1991. 89
- [19] ———, *Classical topics in complex function theory*, segunda ed., New York : Springer, 1998. 89
- [20] W. Rudin, *Análisis real y complejo*, segunda ed., Madrid: Alhambra, 1985. V, VI, VI, VII, VII, XI, XII, XIII, XIV, 23, 35, 46, 52
- [21] R. Shakarchi and E.M. Stein, *Complex analysis*, primera ed., New Jersey: Princeton University Press, 2003. 36, 64, 80
- [22] M.R. Spiegel, *Teoría y problemas de variable compleja*, primera ed., México: McGraw-Hill, 1971. 50
- [23] G. Vera, *Lecciones de análisis complejo*, <<http://webs.um.es/gvb/AC>>, Sept. 2011, Consulta: 16 Dic. 2012. VI, VII, XII, XIII, 1, 18, 46, 64, 70, 83
- [24] J.L. Walsh, *History of the Riemann mapping theorem*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 270–276. MR0323996. 89

Índice terminológico

A

Abierto simétrico

respecto de la recta real, [80](#)

respecto de un segmento, [81](#)

C

Caminos

homólogos, [48](#), [67](#)

homotópicos, [46](#)

Canal con escalón, [51](#), [60](#)

Ciclo, [67](#)

Curva de Jordan, [28](#)

D

Dominio de Jordan, [28](#)

E

Ecuaciones de Cauchy-Riemann, [65](#)

Esfera de Riemann, [64](#)

F

Familia

acotada, [13](#)

equicontinua, [84](#)

normal, [13](#)

Flujo, [50](#), [60](#)

Fórmula integral de Cauchy, [67](#)

Fórmulas de Schwarz-Christoffel, [36](#)

Función

analítica, [66](#)

armónica, [2](#)

armónica conjugada, [2](#)

de Green, [32](#)

holomorfa, [65](#)

meromorfa, [69](#)

subarmónica, [75](#)

H

Holomórficamente conexo, [49](#)

Homotopía, [46](#)

I

Índice de un camino cerrado, [47](#), [66](#)

Isomorfismo conforme, [72](#)

L

Lema

de Schwarz, [78](#)

Logarítmicamente conexo, [49](#)

N

Núcleo de Poisson, [7](#)

P

Principio

de Dirichlet, [89](#)

de prolongación analítica, [68](#)

de reflexión de Schwarz, [81](#)

del argumento, [70](#)

del máximo, [77](#)

Problema de Dirichlet, [7](#), [30](#)

Propiedad de la media, [74](#)

Punto de frontera simple, [23](#)

R

Región de Stolz, 55

Residuo, 69

S

Simplemente conexo, 46, 68

Singularidad, 69

T

Teorema

de Ascoli, 86

de Carathéodory, 29

de Cauchy-Goursat, 66

de Hurwitz, 15

de Janiszewski, 28

de la aplicación abierta, 72

de la función inversa, 70

de los residuos, 69

de Montel, 14

de Morera, 66

de Riemann, 22

de Rouché, 70

de Weierstrass, 68

del módulo máximo, 76

Topología

de convergencia puntual, 84

de convergencia uniforme sobre compactos, 83

Transformación

conforme, 72

de Cayley, 74, 82

de Möbius, 64, 73