SEBASTIÁN FERRER MARTÍNEZ

MECÁNICA CELESTE. DEL PROBLEMA DE KEPLER A LOS NUEVOS SISTEMAS PLANETARIOS

LECCIÓN INAUGURAL
DEL CURSO ACADÉMICO 2012-2013
EN LAS UNIVERSIDADES PÚBLICAS
DE LA REGIÓN DE MURCIA

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA REGIÓN DE MURCIA
MURCIA, 2012

SEBASTIÁN FERRER MARTÍNEZ
Catedrático de Matemática Aplicada
Facultad de Informática
Universidad de Murcia

MECÁNICA CELESTE. DEL PROBLEMA DE KEPLER A LOS NUEVOS SISTEMAS PLANETARIOS

LECCIÓN INAUGURAL

DEL CURSO ACADÉMICO 2012-2013

EN LAS UNIVERSIDADES PÚBLICAS

DE LA REGIÓN DE MURCIA

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA REGIÓN DE MURCIA
MURCIA, 2012

Depósito Legal: MU — 799— 2012

Imprime: Servicio de Publicaciones. Universidad de Murcia

MECÁNICA CELESTE.

DEL PROBLEMA DE KEPLER A LOS NUEVOS SISTEMAS PLANETARIOS

Excmo. Sr. Presidente de la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia,

Srs. Rectores Magníficos de las Universidades Públicas de la Región de Murcia,

Excmas. e Ilmas. Autoridades,

Queridos amigos y compañeros de la Comunidad Universitaria,

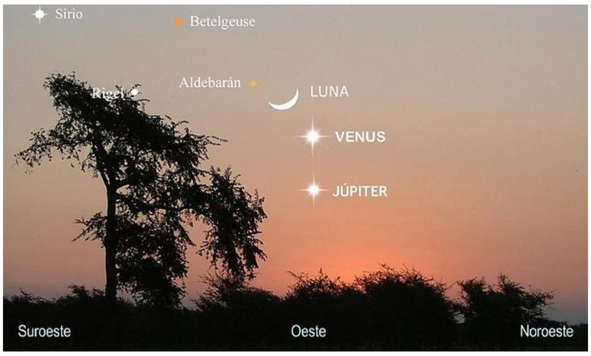
Señoras y Señores:

Ante todo, es un honor tener la oportunidad de impartir la primera lección del curso. Espero que el tema elegido, el *cálculo de órbitas*, resulte idóneo para esta ocasión singular donde nos damos cita los saberes humanísticos, científicos y tecnológicos, acompañados de familiares y amigos, y de quienes representan a nuestra Región.

En esta misma tribuna F. Jarauta [1], al considerar el futuro de Europa, proponía abordar los problemas con mentalidad planetaria. Coincidiendo con él, simplemente añadiría que *hay que estar en nuestro planeta sintiéndonos en órbita, no mirándonos a nosotros mismos, sino conscientes del inmenso marco que nos envuelve. Así, aprendiendo* *del camino seguido por la ciencia, podremos abordar los problemas que hoy nos acucian, con mayor probabilidad de encontrarles solución.*

Mirando al cielo en el mundo antiguo

Mirando al cielo de noche, con regularidad y espíritu de observación, nuestros antepasados observaban *objetos luminosos* que se movían en medio de aquella maravilla que la mitología griega llamó *Vía Láctea*. Incluso bastaba, a lo largo de los meses, estar atento tras la puesta del Sol. En ciertas ocasiones, la Luna, en cuarto creciente, se daba cita con algunos de estos objetos. Dicha circunstancia quedó incorporada a la jerga astronómica con el nombre de *conjunción*[1] .



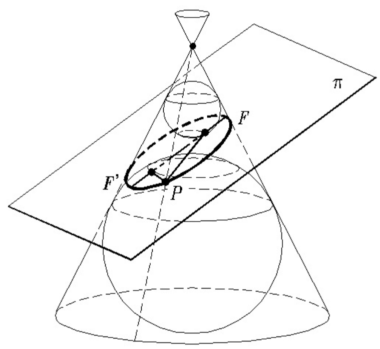


Figura 1: izda: conjunción de la Luna, Venus y Júpiter; dcha: elipse resultado de la intersección de un plano con un cono.

En el transcurso de meses y años, aquella "danza" tenía lugar sobre un fondo constituido por estrellas, que permanecían *fijas* gene-

[1]Para ser más precisos, tras *junta, unión*, como primer significado, la segunda acepción del diccionario de la RAE proporciona el significado astrológico: "aspecto de dos astros que ocupan una misma casa celeste". En tercer lugar, con sentido astronómico, se lee: "situación relativa de dos o más planetas u otros cuerpos celestes, cuando tienen la misma longitud". El estudioso puede aún encontrar otras precisiones añadiendo los adjetivos *magna* y *máxima*.

ración tras generación, y no resultaba nada sencilla predecir. Por ello, aquellos cinco puntos luminosos, a falta de otro nombre, se les llamó "planetas" (errantes), y así continuamos haciéndolo hoy. Sin embargo, el caso del Sol y de la Luna era distinto. Su regularidad definía los días, semanas, meses y años. Además, ambos aparecían listados junto con las estrellas en el relato del Génesis en la Biblia.

En estos párrafos introductorios una anotación más, parece oportuna. Contrario a lo que alguien pudiera pensar, mirar al cielo no era consecuencia de pertenecer a una cultura holgazana. Había que orientarse por tierra y mar, se necesitaba montar guardias, sobre todo en las noches de Luna llena, para defender asentamientos y ganados, y se debían regular las cosechas ... Pertenecer al servicio de astrónomos en los antiguos imperios era un puesto tan necesario como deseado, y esto ha llegado hasta nuestros días con los Observatorios Astronómicos Nacionales y el cuerpo de funcionarios correspondiente.

Fue el mundo griego, una de las grandes culturas antiguas y cuna de la ciencia, el que se enfrentó al gran desafío que tenía ante sí: *entender el movimiento de aquellos siete cuerpos que se mueven en el cielo*. El arte de contar ya existía y la geometría la estaban desarrollando ellos. En particular fueron maestros en el estudio de las *cónicas*, curvas como la que aparece en la parte derecha de la Fig. 1, resultado de la intersección de un plano con un cono, pero no supieron aplicarlas a la descripción del movimiento de los planetas. En efecto, una de las síntesis del saber de la época fue el Almagesto de Ptolomeo, teoría que permitía hacer predicciones sobre las posiciones pero no daba la explicación del por qué de las mismas. La propuesta de Ptolomeo se basaba en una combinación de movimientos en circunferencias de diferentes radios. Sin embargo, en dicho modelo geocéntrico las elipses no juegan ningún papel.

Siempre me ha fascinado que transcurrieran tantos siglos hasta el descubrimiento de la ley que rige dichos movimientos y la modelización de la misma como una ecuación diferencial (sobre lo que volvemos más tarde), que permite calcular dichas trayectorias de modo muy aproximado. No obstante, ese largo periodo no estuvo vacío de estudios y reflexiones sobre estos movimientos así como de su influencia en nuestra vida. Sirva de ejemplo que, para la medida del tiempo en el mundo cristiano medieval, el *Computus* era materia obligada en los estudios de aquellos siglos para precisar cuándo celebrar la Pascua. Recordemos que el sistema Ptolemaico sigue vigente durante el s. XIII, tal y como muestran las Tablas alfonsíes, realizadas en Toledo en el periodo 1263-72, para calcular la posición del Sol, la Luna y los planetas, y llegó hasta el Renacimiento a través de una revisión francesa de comienzos del s. XIV.

No podemos entretenernos en esta temática y ello a pesar de que que desemboca en el comienzo de la ciencia moderna con el Renacimiento. A quien esté interesado le bastará sumergirse en estos siglos de la mano de grandes expertos, cercanos a nosotros, como J. Vernet [2] o nuestro compañero A. García Avilés [3]. De hecho, estudiosos de otras latitudes [4] vienen insistiendo en la necesidad de comprender mejor las aportaciones del medievo a la cultura astronómica occidental. Tanto es así que en el siglo XII ya encontramos señales que nos hablan del comienzo de la nueva ciencia. Una prueba fehaciente la constituyen

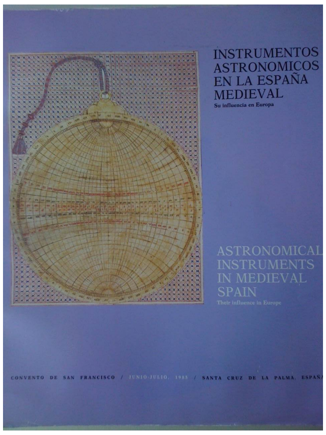


Figura 2: *Instrumentos Astronómicos en la España Medieval. Su influencia en Europa* [5], catálogo y detalle.

los instrumentos astronómicos que se desarrollan entonces, junto a los heredados del mundo antiguo: desde cartas, planisferios y globos celestes hasta ballestillas, astrolabios, cuadrantes, etc. La técnica estaba jugando un papel clave para el desarrollo de la ciencia. Como referencias bastará hacer mención de la exposición-catálogo *Instrumentos Astronómicos en la España Medieval* [5] organizada con motivo de la inauguración del observatorio astronómico en El Roque de los Muchachos en 1985.

De las leyes de Kepler a la Gravitación

Hemos de retomar el hilo de nuestra lección: determinar el movimiento del Sol, la Luna y los planetas. A partir de las ideas desarrolladas durante su formación universitaria, Nicolás Copérnico propone estudiar el movimiento de los planetas con referencia al Sol, en vez de a la Tierra, retomándose así el *sistema heliocéntrico* que ya había postulado Aristarco de Samos. Algunos años después, Tycho Brahe observó con gran precisión y constancia el movimiento de Marte; asimismo sugirió otra variante entre el antiguo sistema geocéntrico y el heliocéntrico de N. Copérnico. Pero es Johannes Kepler, estudiando las tablas de observaciones de Marte confeccionadas por T. Brahe, quien va a encontrar que la trayectoria de Marte en torno al Sol es plana y, además, una curva conocida desde antiguo: la elipse.

Figura 3: De izquierda a derecha N. Copérnico, T. Brahe, J. Kepler, Galileo G.

Años más tarde, es el mismo J. Kepler quien encuentra una relación entre el periodo orbital del movimiento y el semieje de la elipse. Este descubrimiento, conocido como "tercera ley de Kepler", es usado muy posteriormente para determinar las distancias entre los distintos cuerpos del Sistema Solar. Todo ello aparece recogido en las famosas tres leyes de Kepler que todos aprendimos en bachillerato. Recordémoslas, tal como se enuncian hoy:

Primera ley (1609): todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse.

Segunda ley (1609): el radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

Tercera ley (1618): para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica.

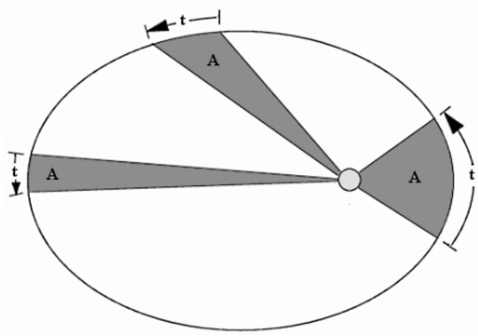
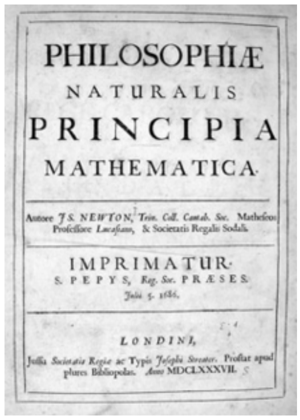


Figura 4: Elipse donde se ilustra de modo gráfico la primera y segunda leyes de Kepler.

Las dos primeras aparecieron en su obra *Astronomia Nova*, con lo que se abandona el sistema de epiciclos (o Ptolemaico), dando así comienzo la astronomía moderna. Notemos que las leyes de Kepler dan respuesta a los interrogantes que durante milenios habían permanecido sin resolver: ¿cómo es la trayectoria orbital?, ¿cómo varía la velocidad al recorrerla?, ¿hay alguna relación entre las trayectorias de los diferentes planetas?

Galileo Galilei completa el cuadro de los personajes de este periodo de finales del s. XVI y primera parte del s. XVII (véase Fig. 3). Entre otras aportaciones, con un pequeño telescopio descubre 4 satélites[2] del planeta Júpiter: Ío, Europa, Ganímedes y Calisto, los *satélites galileanos*, reforzando así la teoría heliocéntrica. No terminará el s. XVII sin verse coronado este gigantesco esfuerzo con la aportación que supone el verdadero nacimiento de la ciencia moderna: Isaac Newton estudia las leyes de Kepler y descubre[3] que es la *ley de gravitación*, la atracción de los cuerpos celestes, la que explica el movimiento de los mismos y el modo en que lo hacen. Dicha atracción es *directamente proporcional*



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

IMPRIMATUR
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.

LONDINI,

Figura 5: Retrato de I. Newton dos años después de la publicación de *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687).

a las masas de los cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. I. Newton publica esta aportación, junto con otros estudios sobre la naturaleza, en *Philosophiæ Naturalis Princi-*

[2]Recordemos que la palabra ‘satelles’ en Latin significa ’servidor’ o ’guardia’ usada en singular. En plural, también significa ’escolta’.

[3]Al preparar esta lección he comprobado una vez más lo inapropiado que resulta reducir a una sola palabra este periodo *anni mirabiles* de la vida de I. Newton y de sus contemporáneos. A quien tenga algún tiempo le animo a leer, por ejemplo, el cap. 3 de “*Isaac Newton: una vida*” escrita por R. Westfall, y publicada en castellano por la biblioteca ABC, Protagonistas de la Historia, vol. 15. El breve prólogo de Pedro Duque es una delicia.

pia Mathematica (Principios Matemáticos de la Filosofía Natural), que es considerada como la obra con mayor influencia en la historia de la ciencia.

Las ecuaciones del problema de n-cuerpos

Nadie duda hoy día de la genialidad de I. Newton, quien en el esfuerzo de explicar lo que ha descubierto, se ve precisado a añadir a las Matemáticas otra de sus ramas, el *Cálculo Infinitesimal*, aparte de otras aportaciones, entre las que destacan: la naturaleza de la luz y la óptica. La ley de gravitación puede entonces expresarse en términos matemáticos, y la descripción del movimiento de los cuerpos celestes "queda reducida" a la formulación y estudio de un sistema de *ecuaciones diferenciales*[4]

Tratemos de explicar, de modo breve, lo que acabamos de decir. Para ello, consideremos n masas puntuales m_k, $(1 \leq k \leq n)$, es decir que entendemos el subíndice k variando entre 1 y n. Puesto que nos movemos en un espacio de tres dimensiones, necesitamos elegir un *sistema de referencia* $(\mathcal{O}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ respecto al cual expresar la posición de cada m_k mediante un vector de tres componentes $\mathbf{r}_k = (r_k^1, r_k^2, r_k^3)$, y de modo análogo su velocidad.

[4] Desde que los ordenadores presentan las integraciones numéricas de dichas ecuaciones de un modo gráfico, el estudio de la dinámica se ha beneficiado enormemente con ello [6]. Para esta lección he hecho uso de las simulaciones que ofrece la Universidad de Colorado en Boulder [7]. En todas las simulaciones se han tomado condiciones iniciales que corresponden a trayectorias acotadas.

Si solo nos referimos a dos cuerpos m_1 y m_2, la ley de Newton llevada a una ecuación vectorial, puede ponerse en la forma

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_{12}}{\mathrm{d}t^2} = -G\,\frac{m_1 + m_2}{r_{12}^2}\,\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}, \tag{1}$$

siendo $r_{12} = \sqrt{(r_1^1 - r_2^1)^2 + (r_1^2 - r_2^2)^2 + (r_1^3 - r_2^3)^2}$. En la parte izquierda de la Fig. 6 se ilustra dicho movimiento relativo, o solución de Kepler. Lo que se recoge en la expresión (1) con notación matemática, significa, empleando el lenguaje ordinario, que hemos establecido una relación que liga la posición de un cuerpo en movimiento con la variación de su velocidad. La letra t se refiere al tiempo, y se llama *variable independiente*. Las letras m_1, m_2 y G son cantidades constantes. Nos referimos a la expresión completa (1) llamándola *ecuación diferencial*. A lo largo de esta lección nos encontraremos varias de ellas, ya que es el modo como se estudia la influencia de la la gravitación.

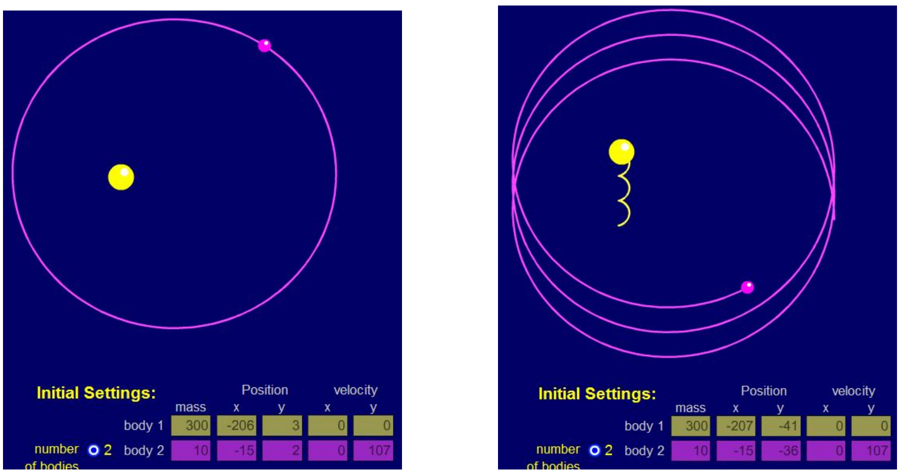


Figura 6: Ilustración del problema de los dos cuerpos, donde el plano orbital coincide con el plano de referencia (ver Fig. 13). Izda: movimiento relativo. Dcha: movimiento referido a un sistema inercial. Ambos se trasladan, al tiempo que orbitan.

La ecuación (1) corresponde al *movimiento relativo* de la masa m_2

con respecto a m_1 y es el problema que resolvió Kepler, tras suponer que ni la Tierra ni ningún otro planeta afectan la trayectoria de Marte.

Si lo que queremos es expresar el movimiento de ambos cuerpos respecto de un *sistema de referencia* entonces la las ecuaciones que nos proporciona la ley de Newton son

$$m_1\,\ddot{\mathbf{r}}_1 = G\,\frac{m_1\,m_2}{r_{12}^3}\,(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1), \qquad m_2\,\ddot{\mathbf{r}}_2 = G\,\frac{m_1\,m_2}{r_{12}^3}\,(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2). \tag{2}$$

Las trayectorias correspondientes vienen ilustradas en la parte derecha de la Fig. 6, donde se observa una traslación al tiempo que orbitan.

Por tanto, considerando n-cuerpos, y haciendo uso del símbolo "sumatorio" $\sum$, podemos escribir las ecuaciones del movimiento de forma compacta como

$$m_k\,\ddot{\mathbf{r}}_k = G\sum_{j\geq 1}^{n}\frac{m_j\,m_k}{r_{jk}^3}\,(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_k), \quad j\neq k, \tag{3}$$

siendo G la constante de gravitación y $r_{jk} = \text{distancia}(\mathbf{r}_j,\mathbf{r}_k)$. Muchos autores prefieren la notación $\ddot{\mathbf{r}}_k = \mathrm{d}^2\mathbf{r}_k/\mathrm{d}t^2$. Una vez fijados tanto los valores de las n masas m_k como las posiciones y velocidades iniciales $(\mathbf{r}_k^0,\dot{\mathbf{r}}_k^0) = (\mathbf{r}_k(t_0),\dot{\mathbf{r}}_k(t_0))$, conocer la solución de dicho sistema nos proporcionaría las posiciones $\mathbf{r}_k(t)$ como funciones del tiempo, y por tanto, las curvas trayectorias.

Aunque no se llamará así hasta más tarde, como acabamos de señalar, es a partir de Newton cuando queda definido "*el problema de n-cuerpos*"[5]. Se trata de un *sistema de ecuaciones diferenciales* sobre

[5]Como señalan Heggie y Hut, conviene notar que 'cuerpo' es un término arcaico dado a un objeto

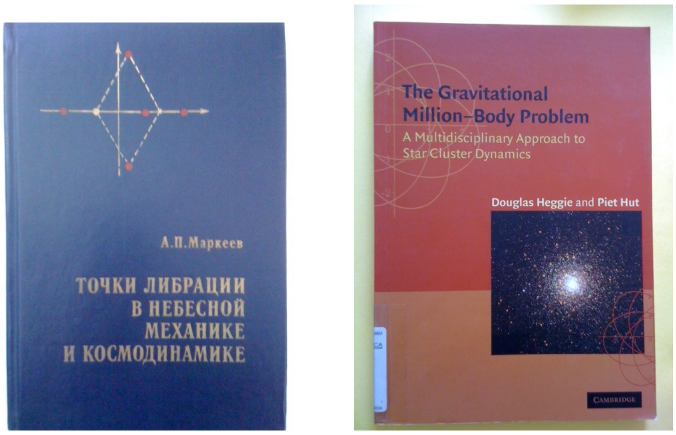


Figura 7: Muchas investigaciones astronáuticas y astronómicas, usando métodos numéricos en ordenadores, siguen apoyándose en los modelos que define el problema de n-cuerpos. Modelos que van desde el problema restringido de tres cuerpos [8] al de millones de millones de ellos [9], donde aspectos estadísticos resultan más relevantes que las trayectorias concretas.

el que aún seguimos trabajando: ello es debido a su carácter de *no lineal* y a las *singularidades* que encierra, por la posibilidad de pequeños divisores e incluso colisiones. Además el valor que tome n es crítico respecto a las dificultades que encierra su estudio. Sólo se conocen diversos tipos de soluciones particulares y familias de órbitas periódicas. Por eso lo seguimos llamando “problema”, al no conocer su solución exacta[6], y su estudio ha llevado al desarrollo de la primera rama de la ciencia, denominada desde P. S. Laplace “*Traité de mécanique céleste*”. Grandes matemáticos desde Newton hasta hoy no han sabido resistirse a abordar este problema, haciendo aportaciones parciales de gran relevancia a la Astronomía Matemática, mientras la solución general del problema no parece que vaya a encontrarse, o que estemos cerca de

material, bien sea una piedra o una estrella.

[6]El lector no debe olvidar que el problema de n-cuerpos es el marco en el que se estudia hoy, por ejemplo, la dinámica de *cúmulos globulares* constituidos por cientos de miles de estrellas. En dichas investigaciones el modelo estudiado supone que las masas de las estrellas son comparables; ver detalles en [9].

lograrlo. Entre otros, mencionemos a Euler, Gauss, Laplace, Lagrange, Hamilton, Poincaré, Birkhoff, Smale, Kolmogorov, Arnold y Moser, etc.

Queda para otra lección exponer los jalones fundamentales que culminan en la *teoría de perturbaciones*, formulación matemática que permite obtener una *solución analítica* aproximada del movimiento de los planetas y satélites. Todos los matemáticos mencionados anteriormente han participado en dicha historia, que nace con los *Principia* y llega hasta el presente con las *series de Lie*. Momentos de particular belleza lo constituyen cada comprobación del gran ajuste existente entre las predicciones y las observaciones. En este sentido, la predicción de la existencia del Neptuno, y su búsqueda a partir de las ecuaciones (¡también n puede entrar como una incógnita en las ecuaciones!) es ejemplo paradigmático de un momento extraordinario de la astronomía matemática (entre una extensa literatura puede consultarse [10, 11]). Hoy, con los modernos ordenadores, los métodos numéricos superan a dichas teorías, por ejemplo cuando se requieren efemérides muy precisas en el desarrollo de una misión espacial.

Antes de seguir adelante, notemos que "*el problema de n-cuerpos*" encierra lecciones de las que todavía hoy debemos aprender. Me referiré a dos: (i) la ley de gravitación viene formulada como un *modelo* que considera los cuerpos celestes, tanto sólidos como gaseosos, como *masas puntuales*. Tal simplificación ha resultado muy fecunda y solo recientemente, cuando comenzaron a hacerse aplicaciones en Astro-

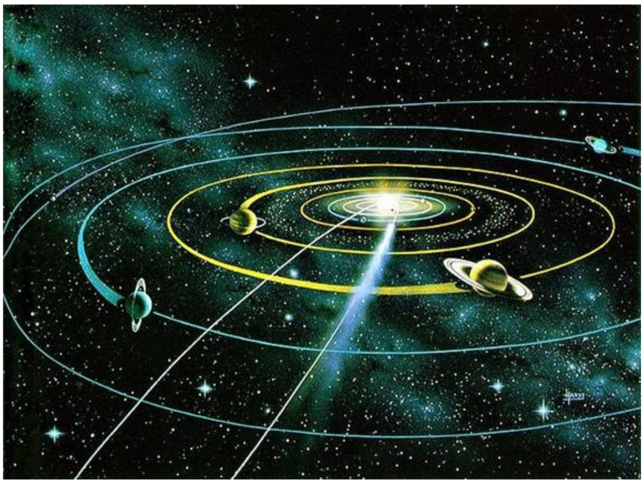


Figura 8: El Sistema Solar puede ser estudiado como problemas de n-cuerpos jerarquizados.

náutica en la segunda mitad del s. XX, hubo que considerar que no son precisamente puntos, es decir, que el *radio medio* de dichos cuerpos debe ser incluido en todos los cálculos. (*ii*) Como segunda característica conviene destacar el modo de referirnos a él: "*el problema de n-cuerpos*". Dicha expresión resulta ser muy peculiar, pues son muchos problemas, tantos como cuerpos distintos intervengan en su formulación, así como las condiciones iniciales elegidas.

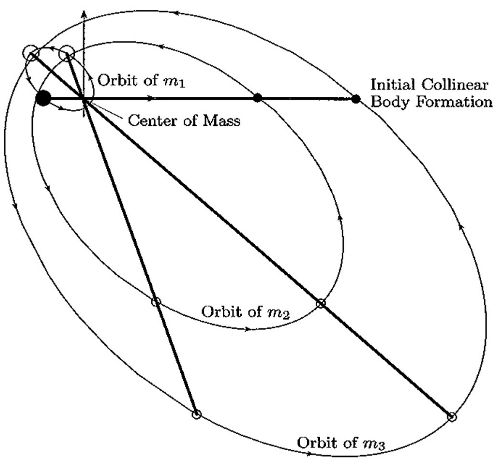
Comprender esto y sus consecuencias para el movimiento de planetas y otros cuerpos del Sistema Solar, exige que dediquemos unos párrafos a tratar con cierto detalle las ecuaciones anteriores (3) y comentarlas brevemente.

Sobre el cálculo de órbitas en el Sistema Solar

Según nuestra experiencia, la exposición resultará más clara si proseguimos fijando nuestra atención, en primer lugar, en el problema de 3-cuerpos (nótese que este escenario no es un abstracción, sino que está basado en nuestra diaria observación: la triada Sol-Tierra-Luna). Bajo este supuesto $n = 3$, las ecuaciones diferenciales a las que conduce la ley de gravitación, de forma detallada, son las siguientes

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t^2} &= G\,\frac{m_2}{r_{21}^3}\,(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + G\,\frac{m_3}{r_{31}^3}\,(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1), \\ \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t^2} &= G\,\frac{m_1}{r_{12}^3}\,(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + G\,\frac{m_3}{r_{13}^3}\,(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2), \\ \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_3}{\mathrm{d}t^2} &= G\,\frac{m_1}{r_{13}^3}\,(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + G\,\frac{m_2}{r_{23}^3}\,(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3). \end{aligned} \tag{4}$$

El sistema diferencial no ha sido aún resuelto de forma exacta, (tan solo se conocen algunas soluciones particulares, entre ellas las presentadas en la Fig. 9) aunque sí se han propuesto infinidad de soluciones aproximadas, para cualesquiera valores de las masas y condiciones iniciales.



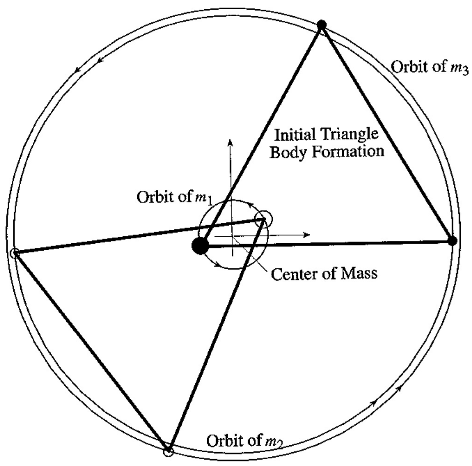


Figura 9: Las soluciones Euleriana y Lagrangiana del problema de 3-cuerpos. Dibujos tomados de [12].

Sin embargo, cuando se habla del movimiento de cuerpos celestes, no se insiste demasiado en señalar cómo se comporta un vector muy apreciado por los físicos: el vector del *centro de masas*, a pesar de su gran importancia. En efecto, dicho vector viene dado por

$$\mathbf{r} = \frac{1}{m}(m_1\,\mathbf{r}_1 + m_2\,\mathbf{r}_2 + m_3\,\mathbf{r}_3), \qquad m = m_1 + m_2 + m_3.$$

Pues bien, mediante una manipulación sencilla de las ecuaciones (4), y tras efectuar dos integraciones, resulta

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{c}_1\,t + \mathbf{c}_2,$$

donde $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ son dos vectores constantes, función de las condiciones iniciales tomadas para resolver el sistema. Lo que esta ecuación nos indica es que los tres cuerpos (pensemos por ejmplo en el Sol, la Tierra y Marte), como un conjunto, se desplaza en línea recta con velocidad uniforme, a la par que los planetas siguen sus trayectorias en torno al Sol. Este resultado es válido para todo el Sistema Solar. La rama de la Astronomía que se encarga del estudio de este movimiento se denomina *dinámica estelar* y sus conclusiones son fruto de muchísimas observaciones a lo largo de los años.

Pero no es este el momento de entretenernos en la historia del problema de 3-cuerpos que ha cautivado a los matemáticos y físicos de todas las generaciones posteriores a Newton, sin excluir a sus contemporáneos, y no solo por la cuantía de los premios ofrecidos por algunas cortes europeas a quien lo resolviera. El lector interesado disfrutará con la lectura de dos obras de alta divulgación [10, 11]; un trabajo de más calado lo constituye [13]. Como complemento también resulta amena la novela “La incógnita Newton” de C. Shaw [14].

Pensando en aplicaciones astronómicas del problema de 3-cuerpos, si consideramos la estructura jerarquizada del Sistema Solar, la estrella es preponderante sobre todos los demás cuerpos y condiciona la dinámica total del sistema. Por ello es conveniente escribir estas ecuaciones de forma diferente. De forma general, refiriendo los movimientos de los cuerpos a uno de ellos, se obtiene lo que llamamos *ecuaciones relativas*. En nuestro ejemplo, tomando como referencia m_1 (que suele ser el Sol o un planeta), restando la primera ecuación del sistema (4) a las otras dos, resulta el nuevo sistema más reducido

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_{12}}{\mathrm{d}t^2} = -G\,(m_1 + m_2)\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} + G\,m_3\left(\frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} - \frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}^3}\right), \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_{13}}{\mathrm{d}t^2} = -G\,(m_1 + m_3)\frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}^3} - G\,m_2\left(\frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} + \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}\right), \tag{6}$$

donde hemos denotado

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \qquad \mathbf{r}_{13} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1, \qquad \mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_{13} - \mathbf{r}_{12}.$$

En otras palabras, si logramos resolver el sistema definido por las ecuaciones (5)-(6), que no podemos separar, conoceremos $\mathbf{r}_{12}(t)$ y $\mathbf{r}_{13}(t)$, es decir, las variaciones de la posición de los vectores $\mathbf{r}_{12}$ y $\mathbf{r}_{13}$ con el tiempo. El cálculo del movimiento del Sol queda fuera de estas ecuaciones; para ello hay que volver al sistema (4).

Como hemos apuntado anteriormente, con las ecuaciones anteriores podemos modelar diversos sistemas de 3-cuerpos con los que nos encontramos en el Sistema Solar. Entre otros, podemos mencionar:

• caso asteroide: Ceres-Júpiter-Sol

• caso cometa: cometa-Júpiter-Sol

• caso satélites y planeta: Phobos-Deimos-Marte

• caso satélite: Luna-Tierra-Sol

• caso estrella-doble y planeta (nuevo sistema planetario)

Señalemos que algunos de ellos se ajustan muy bien a las observaciones. En otros casos, es solo una primera aproximación que requiere incluir más cuerpos (planetas), si pretendemos ajustar las predicciones con las observaciones. Notemos asimismo que con el comienzo de

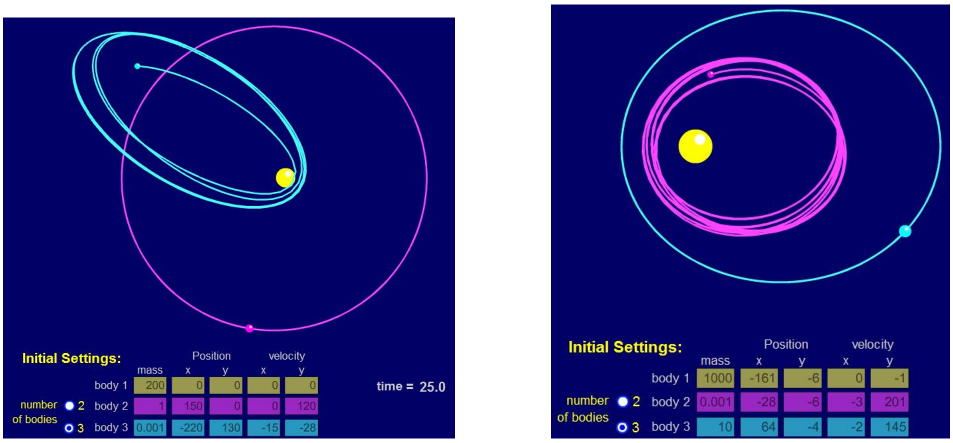


Figura 10: Casos del *Problema Restringido*. Izda: elipse perturbada de un cometa por la gravedad de Júpiter. Dcha: elipse perturbada de un asteroide por la gravedad de Júpiter.

la era espacial la lista de casos anterior admite que el cuerpo de menor masa sea ocupado por una *sonda espacial*. Dicho de otro modo. Determinados casos estudiados con anterioridad en Astronomía, sirven ahora como modelos en Astrodinámica para el anállisis de misiones espaciales. Volvemos sobre ello más adelante.

A la luz de lo anterior, lo que aprendimos en nuestros estudios básicos, donde los planetas aparecen recorriendo *elipses fijas en un mis-*

mo plano con uno de sus focos en el Sol, debe ser revisado si queremos vivir en un mundo post-newtoniano y no simplemente kepleriano. Como consecuencia de la gravitación debemos entender dichas elipses en modo dinámico, es decir, variando en el tiempo.

Pero en Astronomía hemos aprendido que hay que estar matizando siempre. ¿Hay que concluir de los párrafos anteriores que el *movimiento relativo Kepleriano* no tiene lugar en la Astronomía del Sistema Solar en el s. XXI? La respuesta es que sí, pero como parte de un proceso de aproximaciones sucesivas. Los estudiantes de astronomía dinámica distinguen entre *determinación de una órbita preliminar* y manejo de los *elementos de una órbita promediada*. Volveremos a dedicar unos párrafos a esta cuestión posteriormente.

Problema Restringido: de las órbitas de asteroides a trayectorias a los puntos Lagrangianos

En el cálculo de órbitas, tanto en el caso de cometas y asteroides como en Astrodinámica considerando que uno de los tres cuerpos es una sonda espacial, nos encontramos con un caso particular de las ecuaciones (5)-(6). En efecto en esos supuestos consideramos el valor de m_3 *despreciable* con respecto a las otras dos masas llamadas *primarios*. Notemos que, por irreal que pueda parecer, resulta un modelo que se ajusta muy bien, por ejemplo, al estudio de la dinámica del *cinturón de asteroides*, pues frente a la masa del Sol y Júpiter, ciertamente la masa del asteroide resulta despreciable. Por tanto, tomando $m_3 = 0$ las ecuaciones se reducen a

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_{12}}{\mathrm{d}t^2} = -G\,(m_1 + m_2)\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_{13}}{\mathrm{d}t^2} = -G\,m_1\frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}^3} - G\,m_2\left(\frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} + \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}\right). \tag{8}$$

Este modelo es llamado *Problema Restringido de 3-cuerpos* y ha resultado de una fecundidad tal, que siguen extrayéndose consecuencias para misiones espaciales. Puesto que conocemos la solución de la ecua-

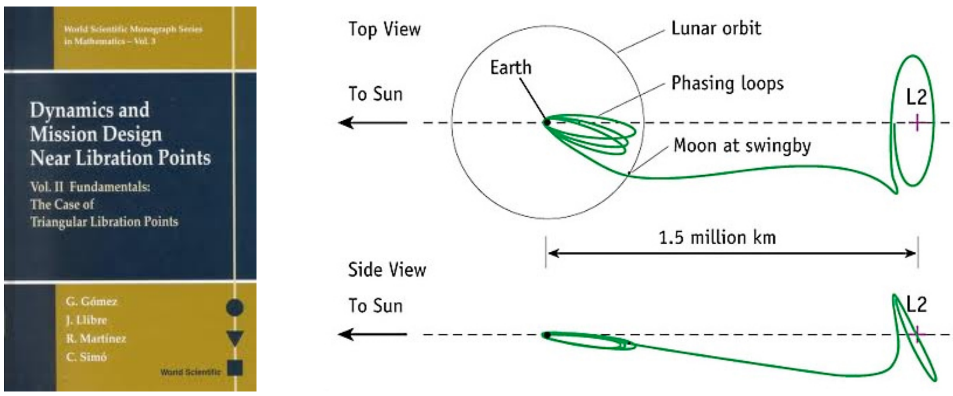


Figura 11: Los puntos de *equilibrio relativo* del problema de tres cuerpos, y la dinámica cerca de los mismos, han sido tratados ampliamente en la literatura, y de modo especial desde el comienzo de la era espacial. Una veces en el caso Sol-Tierra, otras para el caso Tierra-Luna siendo, en ambos, el tercer cuerpo una estación espacial.

ción (7) definida por *los primarios*, m_1 y m_2, el sistema se reduce a estudiar (8), donde se ha de sustituir $\mathbf{r}_{12}$ por su expresión como función del tiempo. Lo sorprendente de su *no integrabilidad* ha sido motivo de una extensa literatura, siendo el número de publicaciones sobre soluciones aproximadas aún mayor. Bastarán un par de citas: [15] y [16], como extremos de un periodo de 30 años, que son base para las investigaciones que se realizan hoy día (aunque habrá quizá quien prefiera la literatura de ficción, por ejemplo [17], donde se propone la *colonización del espacio* usando los puntos Lagrangianos L_4 y L_5). Nos estamos refiriendo a las soluciones particulares del problema de 3-cuerpos mencionadas más arriba, tal como se muestra en la Fig. 9. Las soluciones en las que se mantienen los tres cuerpos alineados las encontró Euler. Unos años más tarde Lagrange encuentra las soluciones triangulares. Dado el carácter estable de dicha configuración para muchos valores de las masas de los primarios, tal y ocurriera con Neptuno, también aquí se predijo la posible existencia de asteroides, siendo los primarios el Sol y Júpiter. Aunque Lagrange dejó anotado en su trabajo que dudaba del interés astronómico de aquella solución, siglo y medio después se encontraron asteroides coorbitando con Júpiter muy cercanos a dicha configuración: los asteroides troyanos. (588) Aquiles es el primero y lo descubrió en 1906 el astrónomo alemán Max Wolf. Sin embargo, desde el punto de vista Astrodinámico, las soluciones Eulerianas son las que se han usado para colocar sondas espaciales diseñadas para estudios astrofísicos. Como una bibliografía muy completa ver [16].

Observando cuerpos del Sistema Solar. Elementos orbitales

En las últimas secciones nos hemos referido al Sistema Solar y a su modelización matemática “el problema de n-cuerpos” considerándolos “desde el exterior”. Sin embargo, procediendo así, hemos perdido la perspectiva con la que comenzábamos la lección. En otras palabras, una figura de la que no nos podemos olvidar al hablar de órbitas en el Sistema Solar es el *observador* que gusta dedicar horas de la noche rastreando el cielo en busca de nuevos cuerpos celestes. Hoy, donde todo está automatizado, resulta fácil dirigir el telescopio al lugar que nos interesa. En cambio, más laborioso se presenta ser observador reconocido por la División III de la IAU dedicada a esta tarea (Minor Planet Center, MPC)[7]. Se requiere ser experto en el manejo de las cámaras CCD y la reducción de las observaciones realizadas con ella (de esto saben mucho los miembros de las Agrupaciones Astronómicas [18]).

Figura 12: Izda: Telescopio con cámara CCD para seguimiento de asteroides, cometas, etc. en "La Murta" Observatorio astronómico municipal de Murcia. Dcha: Con miembros de la Agrupación Astronómica Regional, tras la conferencia de George Smoot, premio Nobel de Física, en el Centro Social Universitario.

Quisiera recoger aquí un aspecto de esa automatización consistente en el modo en que los observadores y el MPC "manipulan y etiquetan" los pequeños cuerpos ya conocidos o que los propios observadores acaban de descubrir. Me refiero a los *elementos orbitales*, que en algún artículo de divulgación se ha traducido como "código de ba-

[7] http://www.minorplanetcenter.org/iau/mpc.html

rras” de seis números con el que identificar de cada cuerpo del Sistema Solar.

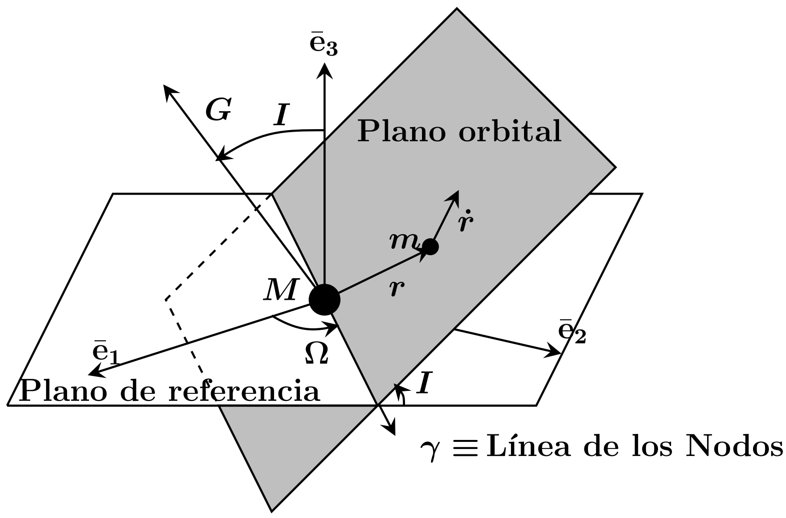


Figura 13: Orientación del *plano orbital instantáneo* referrido al sistema de referencia $\{M; \bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3,\}$: los ángulos Ω e I.

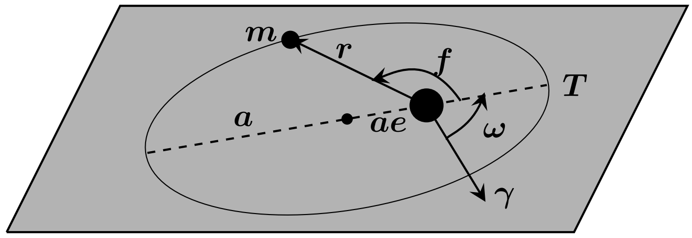


Figura 14: Elementos orbitales sobre la elipse relativa instantánea: a, e, ω y T. Las variables r y f determinan la posición de m en coordenadas polares centrada en el foco.

Para empezar, es claro que la notación vectorial empleada para referirnos a las trayectorias y su solución basada en vectores de posición y velocidad, no está diseñada para la observación clásica[8]. No fue el modo de proceder de T. Brahe y J. Kepler. Entonces, los únicos datos que se manejaban eran medidas de ángulos. En otras palabras, pronto se vio que para seguir a un planeta en su órbita, se precisaba conocer

[8]Notemos que hoy en día también es común la observación radar o láser, que no se basan en la medición de ángulos

seis elementos como valores alternativos a los vectores anteriores. De hecho, se necesitan tres tipos de magnitudes:

(i) En primer lugar son necesarios los ángulos que permiten dar la posición del *plano orbital* en el espacio. Para ello, Euler propuso usar un par de ángulos: el "ángulo del nodo" Ω y el "ángulo de inclinación" I, con los que el plano queda completamente determinado respecto a un *sistema de referencia* en el espacio, con origen en el uno de los focos de la elipse.

(ii) Situados en dicho plano, son tres los elementos geométricos que definen cada elipse: tamaño, forma y orientación, esto es: a-"semieje mayor", e-"excentricidad" y ω-"ángulo del perieje", que determina la orientación de la línea de las ápsides.

(iii) Finalmente, se requiere un elemento "dinámico", es decir la posición del planeta en su órbita para un cierto t_0 (instante del tiempo). Habitualmente dicho dato está referido a la época de paso por el perieje, o lo que es lo mismo, el momento de distancia mínima al Sol $t_0 = T$.

A partir de los elementos orbitales, sin considerar la atracción los demás cuerpos celestes, podemos conocer la posición de un planeta en su órbita (elipse con foco en el Sol) usando la ecuación en coordenadas polares

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$$

Por otra parte, y como consecuencia de la atracción gravitacional de los restantes planetas, ni los planos orbitales, genéricamente distintos para cada planeta (aunque con inclinaciones muy parecidas), ni los elementos que definen la elipse permanecen fijos. Por tanto, hay que estudiar cómo extraer de las ecuaciones de Newton las fórmulas que nos den la variación de los elementos orbitales $(\Omega, I, a, e, \omega, T)$ con el paso de los años. Esta actividad constituye una de las tareas fundamentales de la Mecánica Celeste. Observemos que la materialización de lo que acabamos de exponer corresponde a una rama de la Astronomía, no muy espectacular pero esencial, encargada de los sistemas de referencia, que tiene reservada una Comisión en la Unión Astronómica Internacional.

En el caso del Sistema Solar la masa del planeta Júpiter es aproximadamente la milésima parte del Sol y la de los restante cuerpos es aún mucho menor. Un par de ejemplos bastarán: la masa de la Tierra es trescientas veces menor que la de Júpiter y la de la Luna ochenta veces menor que la de la Tierra. Lo anterior, junto con las enormes distancias entre ellos, llevó pronto a considerar el Sistema Solar como un caso especial del problema general de n-cuerpos. Concretamente, con bastante aproximación dentro de nuestra escala del tiempo, la trayectoria de cada planeta, referida al Sol, podía describirse como una *elipse*.

Solo una larga y sistemática observación de los planetas y su movimiento sobre el fondo estelar llevó a la conclusión de que la interacción entre todos los cuerpos, propugnada por la teoría de la gravitación, podía llegar a ser medida. En otras palabras, se comienza a estudiar el movimiento de los planetas en torno al Sol como *elipses que se* *deforman con el tiempo debido a la atracción gravitatoria*. Por tanto, habrá que proceder en dos etapas: (*i*) determinar una elipse aproximada y (*ii*) estudiar la variación de la misma con el paso de los años. Expresándonos de modo más abstracto, comenzaba el desarrollo de dos líneas de trabajo para los matemáticos cautivados por este problema astronómico: la *determinación de órbitas*, donde se imponen los métodos de Laplace y Gauss, y la *teoría de perturbaciones*, en la búsqueda de la descripción cada vez más precisa de la dinámica de los planetas. Los trabajos de Laplace, Lagrange y Hamilton serían claves en esta dirección.

Movimiento de la Luna: del reloj a los computadores

A partir de la ley de gravitación, la historia del Sistema Solar encierra muchas lecciones que no podemos desarrollar aquí, pero sí mencionar. Tal es el caso del movimiento de la Luna, que ocupa un lugar de honor. La Luna comienza a ser tratada de otra manera, conscientes de que, junto con el Sol y la Tierra, definen "el problema de 3-cuerpos más antiguo" [19]. Desde un punto de vista matemático, su peculiaridad reside en que los tres cuerpos constituyen el primer sistema jerárquico: estrella-planeta-satélite estudiado por la astronomía.

Sus ecuaciones pronto se manifiestan más intrincadas de manejar que las del modelo restringido de 3-cuerpos pues la masa de la Luna, aún siendo mucho menor que la del Sol y la Tierra, no es despreciable.

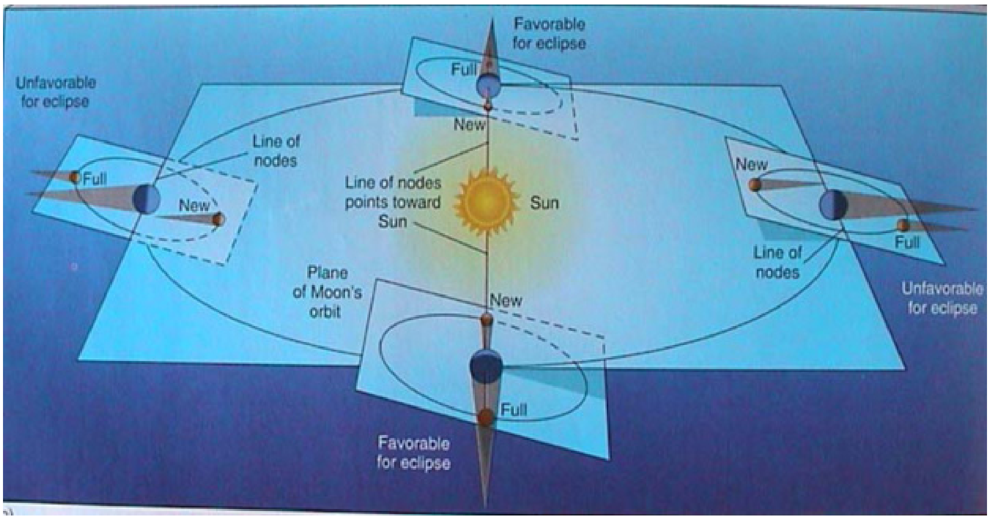


Figura 15: Modelo de dos circunferencias para el sistema Sol-Tierra-Luna. Los eclipses son resultado de la periodicidad de sus movimientos relativos. El Saros, que da cuenta de dicha periodicidad: 18 años y algunos días, ya era conocido por la cultura caldea.

Con lenguaje matemático diremos que deberemos adaptar las ecuaciones (5)-(6) a las características de nuestro modelo estrella-planeta-satélite, buscando una solución aproximada que se ajuste bien a las observaciones.

¿Por qué ocupa la Luna ese lugar tan relevante? Como señalamos al comenzar, la humanidad ha mirado al cielo para orientarse. Por eso, ahora que conocemos la ley que explica su movimiento, interesa construir unas tablas que nos permiten predecir su posición, y así podernos orientar al observarla. Sin embargo, aunque la tarea de resolver las ecuaciones se abordó con entusiasmo, las dificultades no tardaron en aparecer.

Conviene traer aquí la conocida frase de L. Euler, en la que da cuenta de su frustración ante estos problemas: «Siempre que he intentado deducir la teoría y el movimiento de la Luna surgían tantas difi-

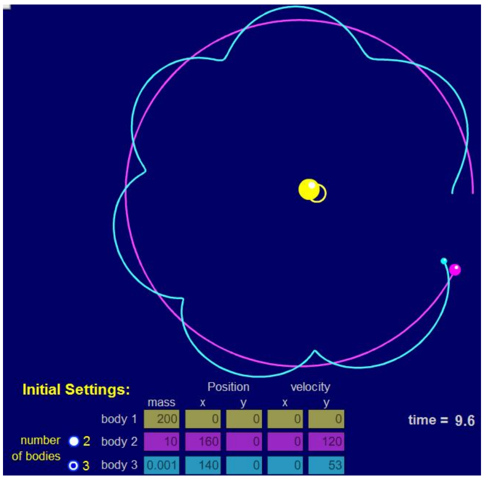


Figura 16: Movimiento plano aproximado de la Luna (línea azul) visto desde el Sol. Nótese que no se han respetado las escalas de masas y distancias.

cultades que me siento obligado a abandonar mi trabajo…».[9]

Mientras los matemáticos se encontraban en esta situación, el siglo XVIII vivía condicionado por los viajes de los navíos cruzando los océanos. Era imperioso determinar sus coordenadas geográficas: longitud y latitud, con buena precisión. La medida de la latitud no era problema, pero no se podía decir lo mismo de la longitud geográfica. Una opción para determinar la longitud pasaba por conocer las posiciones precisas de la Luna, que al moverse sobre el fondo estelar se comportaba como un reloj. La otra posibilidad sonaba aún más lejana como un gran reto tecnológico en esa época: se trataba de construir relojes capaces de mantener la hora en medio del océano bajo la influencia de la humedad y el continuo balanceo. No podemos extendernos en este apasionante capítulo del s. XVIII, en el que el reloj terrestre vence al

[9]No obstante, a L. Euler se deben aportes fundamentales en el campo astronómico que hoy seguimos empleando de modo rutinario. Entre otros, mencionemos: la aplicación de *ejes móviles rectangulares*; el *método de variación de las constantes*; el *plano orbital* con los ángulos y parámetros que llevan su nombre, etc.

celeste, que materializa la Luna sobre el fondo estelar. Sugiero desempolvar y releer *Longitud*, del que dijera U. Eco: «este libro no es una novela, es una historia verdadera que se lee como una novela»[20].

Figura 17: Determinando la longitud geográfica en medio del océano. El reloj de Harrison H4 se impuso sobre el método basado en las observaciones del movimiento de la Luna y su comparación con las tablas astronómicas.

Conviene decir que el planteamiento clásico del estudio del sistema de ecuaciones (5)-(6) para el caso de la Luna se apoyaba en introducir dos elipses que varían en el tiempo. Este modelo, con el progreso permanente en la calidad de las observaciones, experimentará varias crisis. Será el trabajo de varios astrónomos, entre los que sobresale G. Hill [21], el que llevará a introducir una variante al modelo de las dos elipses Keplerianas: el denominado *problema principal* de la Luna, en el que la elipse Kepleriana es reemplazada por una órbita cuyo plano *precesiona* de modo retrógrado, mientras que el ángulo del perigeo se mueve de modo directo.

Quien esté interesado por los métodos numéricos habrá encontrado mención en la literatura de la larga y estrecha relación de dichos métodos con la teoría de la Luna. Lo mismo puede decirse en relación

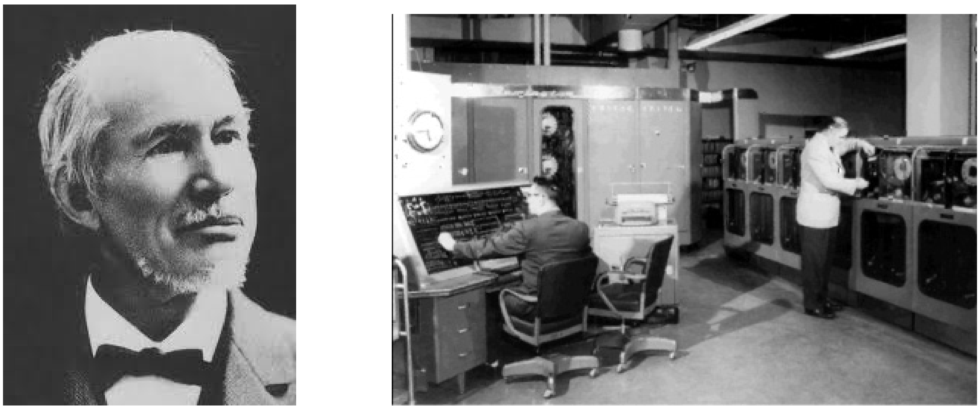


Figura 18: Teoría de la Luna. El astrónomo gravitacional George Hill, introdujo un modelo basado en una órbita intermedia, no Kepleriana, y nuevos modos de mejorar la computación.

con el cálculo simbólico. Un par de referencias recientes muy documentadas son las de Curtis Wilson [22] y Allan Olley [23]. En ellas se expone con detalle la influencia que tuvo la integración del problema de la Luna en el desarrollo de los ordenadores y viceversa [19].

No podemos acabar estos párrafos sin mencionar dos momentos en los que se convierte en protagonista de la historia del s. XX. El primero de ellos lo constituye el eclipse de Sol de 1919, usado para efectuar un test de la teoría de la relatividad general propuesta por A. Einstein. El segundo momento, en Julio de 1969 con la llegada de los astronautas a nuestro satélite. Con la misión APOLO la Luna se incorpora a la nueva forma de entender la gravitación, superando la Newtoniana. En efecto, con ocasión de los viajes de los Apolo 11, 14 y 15 los astronautas dejaron retroreflectores láser, que reenvían la luz incidente hacia la misma dirección desde la cual provino. La consecuencia es que hoy conocemos la órbita de la Luna, usando medidas láser, con precisión centimétrica, lo que requiere incorporar el *efecto relativista*.

Satélites artificiales. "Fabricando" y calculando órbitas.

Con la puesta en órbita del Sputnik el 4 de octubre de 1957, da comienzo la era espacial. Algunos de los que estamos aquí nos incorporamos a ella desde ese mismo momento, mientras que la mayoría pertenecéis a la segunda generación de esta nueva era de nuestra civilización. Los alumnos del curso que hoy comienza constituyen la tercera generación. Para estos últimos, los satélites meteorológicos y de comunicaciones, el GPS, etc. y un continuo sucederse de misiones espaciales a los más recónditos lugares del Sistema Solar son, simplemente, parte de la vida ordinaria, "siempre han estado ahí". Cómo esta realidad se compagina con el hecho de que el estudio de las *órbitas*, y toda la física y matemática que las sustentan, no se contemple en los planes de estudio de nuestras universidades, exceptuando las Escuelas de ingenieros aeronáuticos, resulta difícil de entender[10]. . . .

Con fines científicos, comerciales y militares, miles de satélites orbitan la Tierra, y aún habría más actividad basada en ellos si el coste de los lanzamientos para ponerlos en órbita fuera menor. Al mismo tiempo, es necesario recordarlo, había nacido una nueva rama, la Astrodinámica, dentro de las ciencias astronáuticas. El *control* tomaba ahora un papel esencial, junto con el conocimiento de las complejas

[10] J.E. Marsden, en el Prefacio de *Lectures on Mechanics* (1997), lo expresaba así: «Si muchos de los más grandes matemáticos -Euler, Gauss, Lagrange, Riemann, Poincaré, Hilbert, Birkhoff, Atiyah, Arnold, Smale- han sido expertos en mecánica, y además muchos de los avances en matemáticas usan ideas de la mecánica de modo esencial ¿por qué ya no está en el plan de estudios de Matemáticas?».

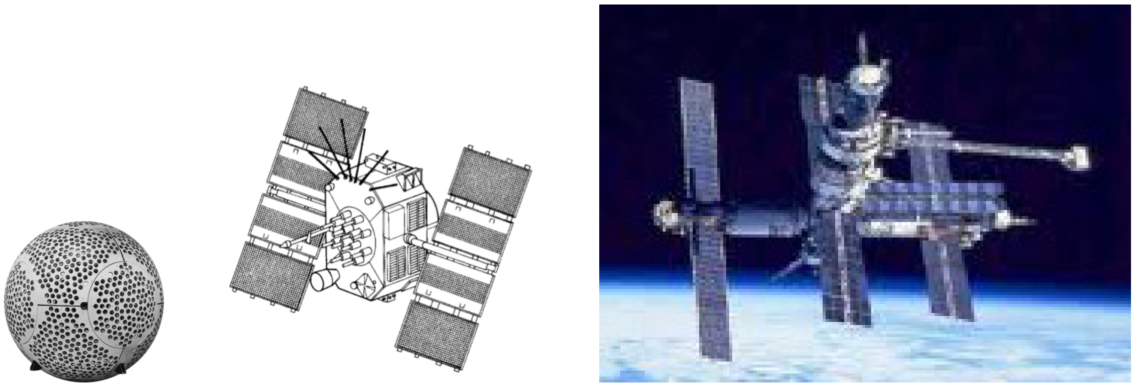


Figura 19: satélites LAGEOS (geodinámico), GPS (comunicaciones) y Estación Espacial Internacional. En dinámica, tanto su tamaño y forma como su carácter activo o pasivo deben tomarse en consideración cuando se procede a determinar sus órbitas.

trayectorias que debían seguir los satélites hasta alcanzar el objeto de su misión, que en muchos casos consistía en acercarse a algún cuerpo natural del Sistema Solar y quedar en órbita del mismo, pudiendo así llevar a cabo las tareas que motivaron su diseño y fabricación.

¿Qué influencia tuvo la irrupción de los satélites en los métodos de cálculo de órbitas? Por sus conocimientos de la dinámica del Sistema Solar, muchos astrónomos se incorporaron a los grupos de las Agencias Espaciales, o se constituyeron en grupos académicos colaboradores de las mismas[11]. Los astrónomos usaban algoritmos, bien establecidos, para obtener las efemérides de los planetas, satélites y asteroides principales del Sistema Solar. Sin embargo, lo que parecía no ser más que una simple colaboración en el ajuste de algoritmos as-

[11]Como pone de manifiesto A. Elipe[24], R. Cid fue un pionero de la mecánica celeste en España que vivió esta experiencia. Tras su estancia en el *Bureau des Longitudes de Paris*, con su grupo de colaboradores y doctorandos siguió este apasionante periodo de la mecánica en sus diversas etapas. Desde el desarrollo de algoritmos para la determinación de órbitas a partir de medidas Doppler, hasta nuevos métodos analíticos buscando soluciones *promediadas* que permiten conocer la evolución orbital para muy largos periodos de tiempo. Sobre 'intermediarios' en la teoría del satélite, propuso el primero de tipo *radial* [25], que permite obtener de modo particularmente sencillo una buena aproximación de la trayectoria del satélite. Finalmente se interesó por los movimientos de la Tierra.

tronómicos para calcular las "nuevas" órbitas, resultó ser muy pronto un continuo desafío, a la vez que una oportunidad única para revisar completamente el arsenal de métodos de la Mecánica Celeste. Ahora, la

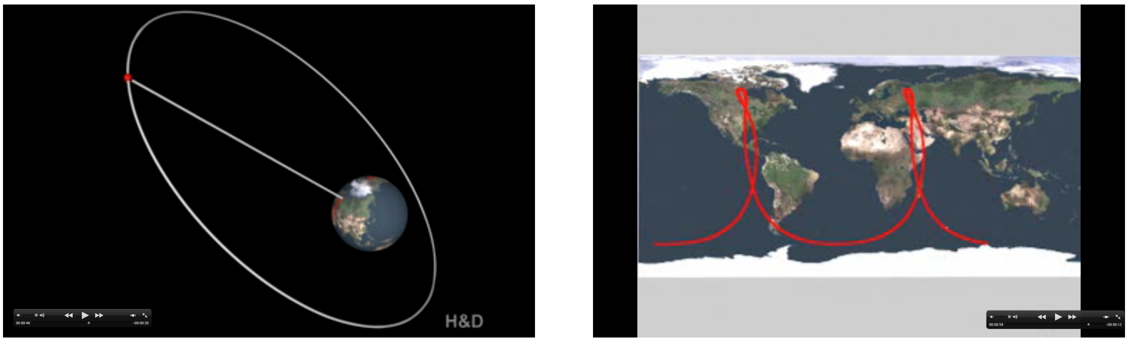


Figura 20: Un satélite Molniya, en órbita con inclinación *crítica* de 63,4 grados y excentricidad $e = 0{,}72$, da dos vueltas a la Tierra cada día.

situación había cambiado radicalmente. Se necesitaban *algoritmos* para seguir satélites que pudieran ser colocados en órbitas con cualquier *inclinación* y, en algunos casos, de gran *excentricidad*. Se trataba, asimismo, de poder disponer de expresiones analíticas que pudieran ser de utilidad a la comunidad astronáutica, expresiones suficientemente versátiles para tomar en consideración los diversos parámetros que definen la órbita.

Con objeto de conocer de un modo práctico algunos de los aspectos involucrados en el *cálculo de órbitas*, refirámonos a una de ellas. Los satélites LAGEOS (LAser GEOdynamics Satellite) son una serie de satélites diseñados para la investigación científica, proporcionanado *órbitas de referencia*, con precisión centimétrica, para estudios de geodinámica de la Tierra. Estudios que buscan, en último término, poder predecir terremotos.

La Astrodinámica permite resolver lo que podríamos denominar “problema directo”, esto es, el cálculo preciso de la órbita de un satélite artificial (conocidas las coordenadas de los observatorios o estaciones que lo siguen). Cabe plantearse la necesidad de resolver el “problema inverso”, es decir, conocer con precisión las coordenadas de la propia estación de seguimiento a partir de la órbita. En efecto, el problema de la “tectónica de placas” que da origen a la “deriva continental” producida por la geodinámica interna de nuestro planeta, plantea el reto de cómo medir los microdesplazamientos de la corteza terrestre debido a estas fuerzas internas.

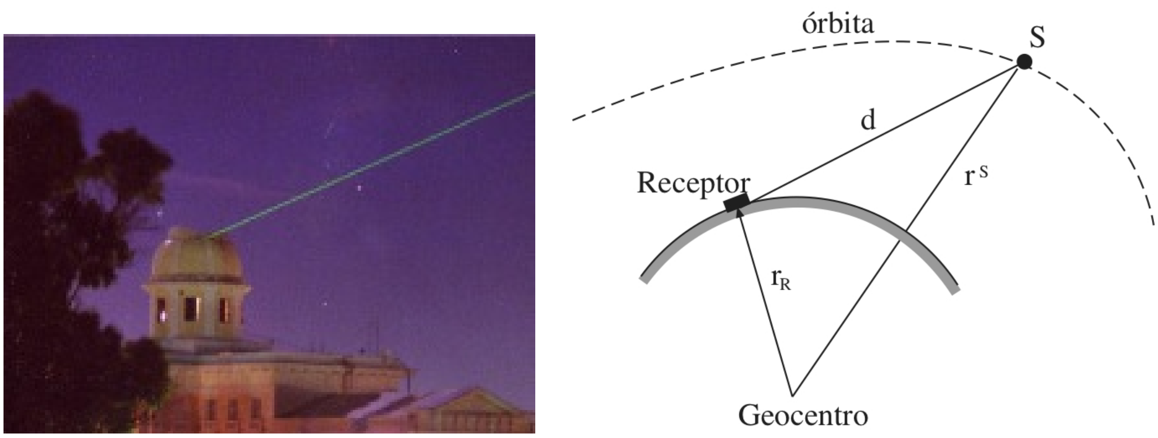


Figura 21: Izda: rayo láser lanzado al satélite LAGEOS desde la cúpula del edificio central del Real Observatorio de la Armada en San Fernando. Dcha: *relación fundamental* entre receptor (Observatorio), satélite en su órbita y centro de gravedad terrestre.

Los satélites LAGEOS nacen como respuesta a este desafío. Dado que sus órbitas son extremadamente regulares y estables, si nos fijamos en la parte derecha de la Fig. 21, estamos ante una *triangulación*, en la que conocida con exactitud la órbita y determinada la distancia entre el Observatorio y el satélite por medidas Láser, podemos resolver el triángulo obteniendo las coordenadas del "Receptor" (Observatorio) con respecto al centro de la Tierra. En definitiva, el conocimeinto muy presiso de la órbita del LAGEOS, como resultado de extensas campañas de observaciones, permiten obtener con gran precisión las coordenadas de puntos de la superficie del planeta. Las pequeñas diferencias que puedan observarse para un mismo punto, a lo largo del tiempo, dan cuenta de los desplazamientos del terreno.

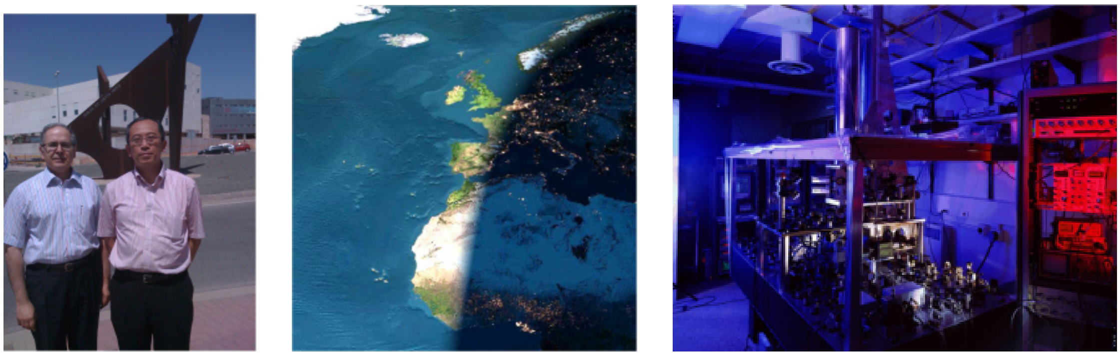


Figura 22: La *variable independiente* de las ecuaciones: el "tiempo", y su medida. Izda: hora solar. Centro: rotación de la Tierra. Dcha: relojes atómicos, hora oficial España, ROA San Fernando.

No obstante, aunque el problema pueda parecer ya resuelto, existe en realidad un desafío añadido que supone una preocupación de origen ancestral para los astrónomos: el tiempo, y la tecnología necesaria para medir dos tipos de fenómenos, uno extremadamente rápido como el paso de un satélite por el horizonte visible y otro de carácter muy lento como el movimiento de las placas. Sirva de ejemplo que, al igual que otros observatorios repartidos por todo el mundo, el Real Instituto y Observatorio de la Marina en San Fernando (Cádiz), cuenta, no solo con la tecnología láser que permite hacer el seguimiento de este tipo de satélites (véase parte izquierda de la Fig. 21), sino también con relojes atómicos de altísima precisión cuyos márgenes de error se aproximan al picosegundo (billonésima parte de un segundo).

El movimiento de un satélite artificial en torno a la Tierra es tratado como un movimiento kepleriano, es decir, de dos masas puntuales (Newton demostró que es equivalente a considerar las esferas con radio finito y distribución de densidad uniforme) que se mueven bajo la acción de la fuerza gravitatoria $\vec{F}_{Kepler} = -\mu\vec{r}/\|\vec{r}\|^3$ cuyo movimiento elíptico se ve *perturbado* tanto por la figura no esférica del cuerpo atractor como por la influencia de acciones derivadas del *frenaje atmosférico* y de la *presión de la radiación solar*, junto a otros efectos de menor relevancia. Por supuesto siempre están presentes entre las perturbaciones las fuerzas gravitatorias debidas a otros cuerpos celestes, pero su influencia depende de la distancia del satélite a la Tierra, siendo en muchos casos menor que otros efectos. En otras palabras, el *problema de n-cuerpos* no tiene aquí un papel esencial (el lector interesado encontrará detallada información, por ejemplo, en Montenbruck [26] y Cid y Ferrer [27]).

Nuevos sistemas planetarios

El año 1989 es testigo del comienzo de una nueva época de la Astronomía: se descubre el primer planeta en torno a una estrella distinta del Sol. Hoy, en una búsqueda que no cesa, ya conocemos varios cientos y los denominamos "exoplanetas". El que esta voz no esté aún recogida en nuestro diccionario quizá tenga su sentido. En efecto, como se señaló en los primeros párrafos, la palabra "planeta" refleja el hecho de la no regularidad del movimiento desde el punto de vista del observador, que también está en movimiento. En el caso de los nuevos cuerpos, son "más sencillos de observar" desde el punto de vista dinámico, ya que estamos fuera de dichos sistemas por lo que, a falta de otra propuesta más conveniente, nos referimos a ellos como *nuevos sistemas planetarios*, aunque quizá fuera más propio designarlos como *nuevos sistemas orbitales (u orbitantes)*. En cualquier caso, cuestiones terminológicas aparte, dada la enorme distancia a la que se encuentran de nosotros y a su pequeño tamaño comparado con la estrella a la que orbitan, su descubrimiento y catalogación (a partir de la estimación de su masa y distancia a la estrella) no resulta fácil. No obstante, las clásicas técnicas astrométricas, fotométricas y tránsitos, empleadas en esta nueva tarea, continúan dando más resultados de los que muchos pronosticaron hace un par de décadas. Teniendo presente cómo es nuestro Sistema Solar, donde distinguimos dos tipos de planetas (rocosos y gaseosos), se planteó desde el principio la cuestión con claridad: tras encontrar y catalogar planetas de tipo Júpiter ¿seremos capaces de detectar la existencia de planetas como la Tierra? Al pensar en este tipo de planetas, el objetivo se centra en encontrar aquellos que posean componentes líquidos y gaseosos.

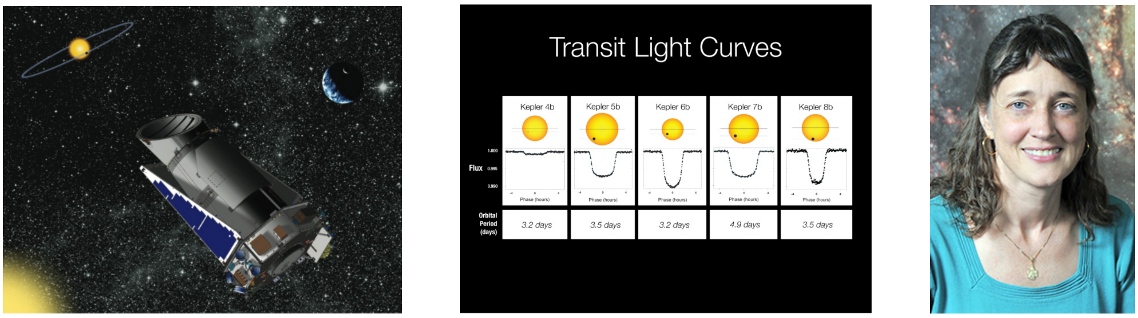


Figura 23: Izda: Observatorio Espacial Kepler de NASA. Centro: técnica de tránsitos empleada para búsqueda de planetas. Dcha: Jennifer Wiseman responsable del proyecto.

La llegada del año 2009 era esperada. Fue éste declarado Año Internacional de la Astronomía. El motivo es, según unos, el uso del telescopio y el descubrimiento de los satélites galileanos cuatrocientos años atrás. Para otros, en cambio, es el cuarto centenario de las leyes de Kepler. Ante esta efeméride, la NASA en particular, no quiso quedarse al margen y puso en órbita el *Observatorio Espacial Kepler* para el estudio sistemático de una zona del cielo en la constelación del Cisne, con objeto de buscar nuevos exoplanetas del tamaño de la Tierra, en la zona habitable [28].

Hemos vuelto de nuevo al punto de partida, pero ahora mirando a las estrellas con telescopios en órbita. Desde la última década del pasado siglo da comienzo algo más que otra revolución para la Mecánica Celeste. Se trata de colaborar en una aventura con la que la humanidad ha soñado por generaciones: *la búsqueda de nuevos sistema planetarios, más allá de nuestro viejo Sistema Solar, tratando de dilucidar si hay vida, y en particular si ésta es inteligente.*

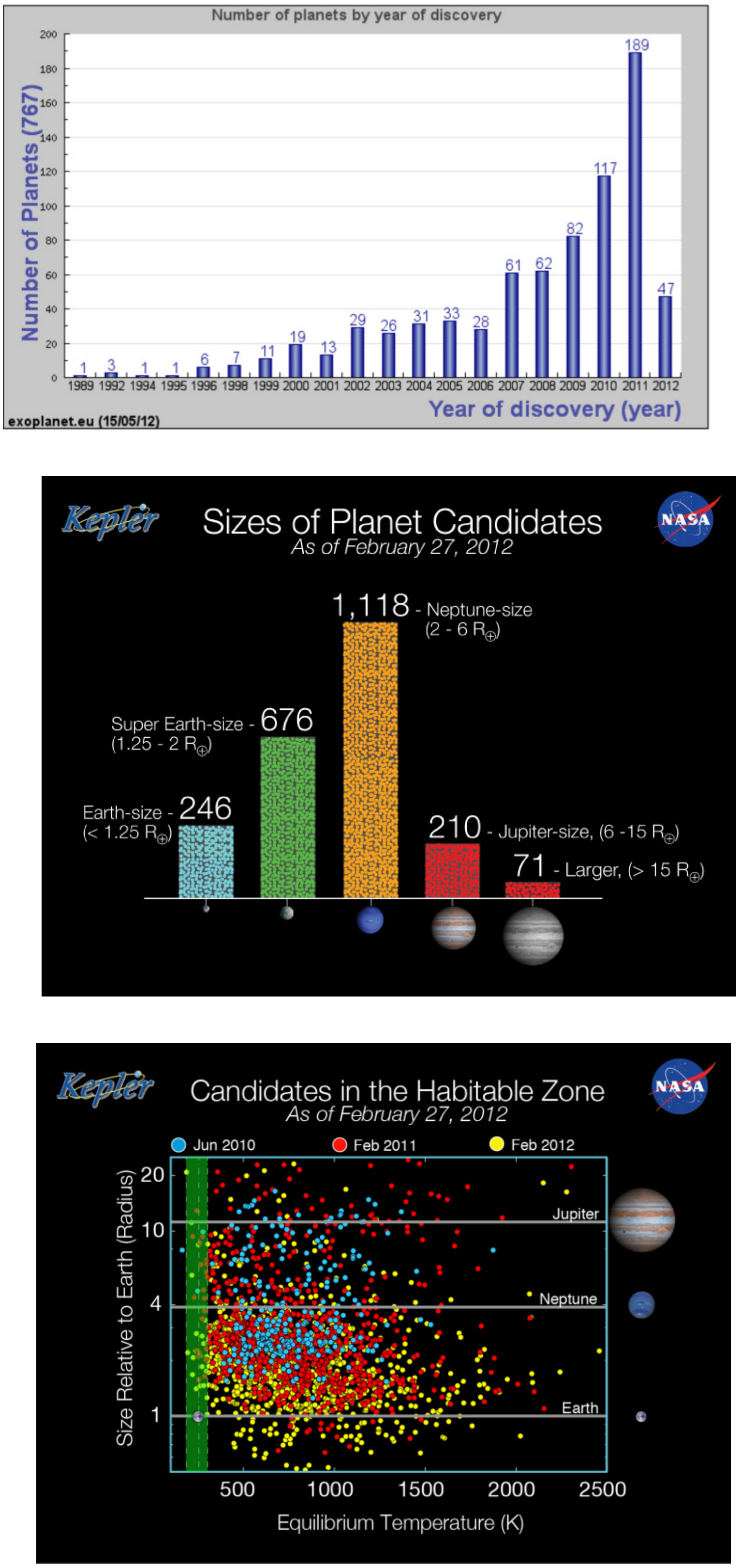


Figura 24: Catalogando exoplanetas: número, masas y candidatos en la zona habitable. (Cortesía de Jennifer Wiseman, NASA Goddard Space Flight Center).

Aquí la Mecánica Celeste colabora como experta, después de más de 400 años de actividad científica, pero el conocido *problema de n-cuerpos* deberá ser usado de modo más sutil. Los cuerpos, hasta ahora "masas puntuales" pasan a ser el verdadero objetivo. Habrá que acumular observaciones y calcular órbitas, dentro de la secular tradición astronómica.

Para la Mecánica Celeste exoplanetaria hay dos tareas en marcha: catalogación y simulación, tal como se refleja en Figs. 24 y 25. ¿Cuáles de esos sistemas serán estables? Solo los que lo sean tendrán interés en astrobiología, una reciente rama de la Astronomía con carácter interdisciplinar, donde se hallan convocados físicos y geólogos, pero sobre todo químicos y biólogos. A éstos les ha correspondido señalar qué elementos hay que identificar en el estudio de los espectros. La información proporcionada por lo que se denomina Astroestadística con los exoplanetas es tan necesaria como preliminar [29]. Dado lo costoso de las campañas y el objetivo definido de las mismas, que es la búsqueda de vida, resulta necesario ser sumamente selectivos en dicho proceso de búsqueda. Ese paso adelante lo está dando el Observatorio Espacial Kepler de NASA.

Una vez identificados sistemas planetarios con planetas potencialmente habitables, se abren otras líneas de investigación donde usar métodos desarrollados para el Sistema Solar: concretamente los referentes a la estabilidad de dichos sistemas. En efecto, una de la clásicas

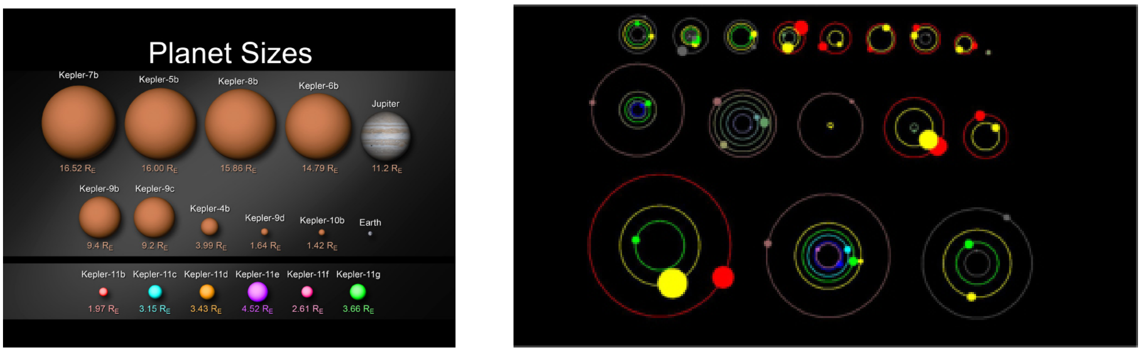


Figura 25: Datos del Observatorio Kepler: (i) versión estadistica: número, masas y detalle de los primeros planetas descubiertos.(ii) versión dinámica (Cortesía de Jennifer Wiseman, NASA Goddard Space Flight Center).

cuestiones inquietantes, si no la más apasionante, que ha acompañado a la Mecánica Celeste es la siguiente: ¿por qué es *estable* el Sistema Solar? ¿cuál es la razón de que se "repitan" los movimientos? ¿puede la gravedad Newtoniana explicarlo? Como ya señalamos, tanto el carácter singular de las ecuaciones del problema de n-cuerpos como los *errores de redondeo* que se introducen al usar métodos numéricos de integración, plantean situaciones de gran complejidad.

Por eso cobra actualidad lo que Jürgen Moser [30], uno de los grandes de la mecánica celeste del pasado siglo, decía en 1975 comentando esta cuestión: «La respuesta es todavía desconocida, pero a la vez esta cuestión ha conducido a resultados muy profundos que son probablemente más importantes que la respuesta a dicha cuestión». En la literatura exoplanetaria ya es posible encontrar trabajos en este área[12], si bien considerando las incertidumbres sobre los valores de las masas, dichos estudios corresponden más a lo que algunos llaman estabilidad

[12] Consultar el portal exoplanet.eu donde aparece un listado diariamente actualizado

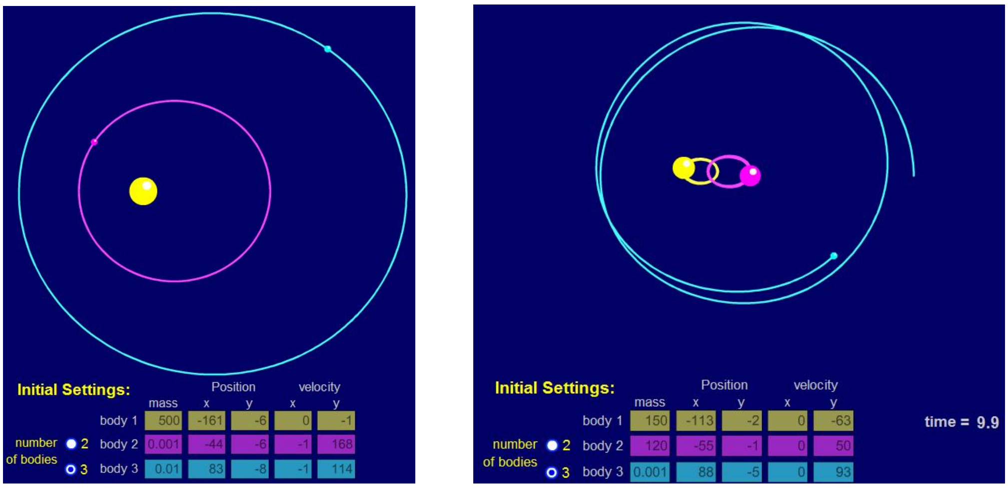


Figura 26: Órbitas de exoplanetas. Izda: sistema planetario con dos planetas, semejante al nuestro. Dcha: Sistema binario de estrellas con un exoplaneta, recientemente descubierto. La *evolución de la órbita del planeta* bajo la influencia gravitatoria del par de estrellas es un tema abierto a la investigación.

estadística.

Una cosa está clara: mientras desde hace un par de décadas buscamos exoplanetas, también hemos aprendido a mirar nuestro sistema solar de otro modo. Aunque un planeta más, la Tierra está en un lugar especial respecto al Sol, lo que ha permitido la vida estable en el mismo. Y estamos reconsiderando muchas cosas más como, por ejemplo, de qué modo contribuye la presencia de la Luna a ese delicado ecosistema que define la Tierra [31].

El "Problema de 2-cuerpos completo"

¿Queda algo por hacer sobre el problema de dos cuerpos? J. Kepler, con su modelo del problema de dos cuerpos como "dos masas puntuales" puso los fundamentos que permitieron a I. Newton concebir y formular la teoría gravitatoria. Cuando se estudia en Astronomía la rotación de los cuerpos celestes, la solución Kepleriana sigue siendo utilizada [32] para modelar la parte orbital del movimiento presente en las ecuaciones. Sin embargo, cuando se buscan mayores precisiones

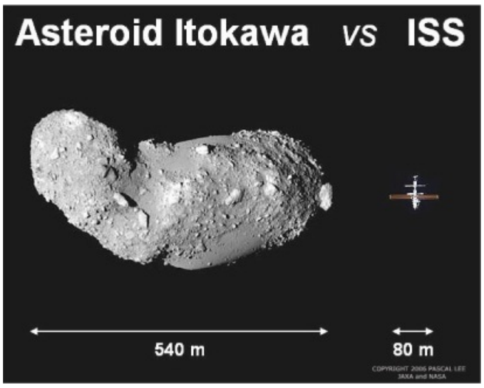


Figura 27: La dinámica roto-translatoria la dejó J. Kepler para las generaciones futuras. A la vista de esta imagen, donde se comparan el asteroide Itokawa y la Estación Espacial Internacional, resulta fácil entender que su modelo de masas puntuales (esféricas) no dará mucha precisión, si queremos entender la dinámica del satélite en torno al asteroide.

(por ejemplo el caso Tierra-Luna) el escenario exige llevar en cuenta el *achatamiento* de los cuerpos. Pero son las misiones espaciales a asteroides las que exigen abandonar el modelo Kepleriano. La Figura 27 habla por sí sola. Diversos grupos trabajan hoy (ver [33],[34] y las referencias allí contenidas) desentrañando la dinámica conjunta que se denomina el "problema de 2-cuerpos completo", mientras que otros la llaman "roto-translatoria".

Epílogo

Diariamente, desde hace semanas, seguimos las evoluciones de *Curiosity*, la estación científica sobre ruedas recientemente depositada sobre Marte. El objetivo, continuando un programa que ya dura varios decenios, es conocer con detalle la historia del planeta. Y conocerla, teniendo en cuenta su cercanía a la Tierra, podrá ayudarnos a entender mejor la diferente evolución de ambos. Cuatrocientos años después de la hazaña de J. Kepler, esta misión confirma una vez más lo fecundo de su trabajo; nosotros al cabo de cuatro siglos, seguimos trabajando sobre Marte. La pregunta que subyace: ¿es esta una nueva edición del mito del eterno retorno? pienso que no, de acuerdo con lo que hemos visto a lo largo de esta lección. Ahora hacemos Astrobiología y Astroestadística con los exoplanetas, contribuyendo de un modo eficaz al tan necesario enfoque interdisciplinar que debe impregnar nuestras actividades en esta hora de la ciencia en el mundo. Los retos de la inminente vuelta a la Luna deben ser abordados con el mismo espíritu.

Figura 28: ¿De dónde venimos?, ¿a dónde vamos? ¿estamos solos?. . . ¡Estamos en órbita! (fotografía de un dibujo de Krahn que aparece en [35]).

Kepler y aquellos grandes del Renacimiento tenían una fe grande en que podían encontrar las leyes que regían la naturaleza [36]. Galileo lo expresó diciendo que las leyes de la naturaleza estaban expresadas en lenguaje matemático. Newton fue capaz de formularlo y hoy, con todos los medios tecnológicos a nuestra disposición y el mismo afán por seguir avanzando, miramos qué hay más allá de nuestro Sistema Solar.

Estudiar nuevos sistemas planetarios buscando vida nos está haciendo más conscientes del extraordinario y delicado equilibrio que hace posible la vida en la Tierra. Pienso que con esa conciencia se ha cantado a lo largo de los siglos el Himno *Trium Puerorum* del profeta Daniel.

Para acabar, me gustaría hacerlo con un verso de Juan Ramón Jiménez, adaptado a nuestra lección. Pienso que él aprobaría esta licencia

¿Te cojí? Yo no sé
si te cojí, órbita suavísima,
o si cojí tu sombra.

Cancioncillas Espirituales (Grácil)

Mi agradecimiento a F. J. Molero, A. Campillo y R. Delmas por su ayuda al preparar esta lección.

Bibliografía

[1] Francisco Jarauta, *El futuro de Europa*, Lección Inaugural del Curso 2010-2011 en las Universidades Públicas de la Región de Murcia, Murcia 17 de septiembre de 2010.

[2] Juan Vernet, *Astrología y Astronomía en el Renacimiento. La Revolución Copernicana*, Ed Ariel, Barcelona 1974.

[3] Alejandro García Avilés, *El Tiempo y los Astros. Arte, Ciencia y Religión en la Alta Edad Media*, Servicio Publicaciones Universidad de Murcia, 2001.

[4] Philip Ball, *Triumph of the medieval mind*, Nature Vol 452, pag 816–818, 17 April 2008.

[5] Catálogo de la Exposición *Instrumentos Astronómicos en la España Medieval. Su influencia en Europa*, Junio-Julio 1985, Santa Cruz de la Palma, Comisario Juan Vernet, Ministerio de Cultura, 1985.

[6] Francisco Esquembre, *Creación de Simulaciones Interactivas en Java, Aplicación a la Enseñanza de la Física*, Pearson Prentice Hall, Madrid, 2005; Wolfgang Christian, Lyle Barbato,"Open Source Physics" *Science* Vol 334, 1077–1078, 2011

[7] PhET Interactive Simulations 2004-2011 University of Colorado, Boulder. http://phet.colorado.edu

[8] A. P. Markeev, *Puntos de Libración en Mecánica Celeste y Cosmodinámica*, Nauka, Moscú (en ruso) 1978.

[9] Douglas Heggie and Piet Hut, *The Gravitational Million-Body Problem*, Cambridge University Press, 2003.

[10] Ivars Peterson, *El reloj de Newton. Caos en el Sistema Solar*, Ed. Alianza, Madrid 1995.

[11] Florin Diacu y Philip Holmes, *Celestial Encounters: The Origins of Chaos and Stability*, Ed. Princeton University Press, 1999.

[12] Hanspeter Schaub y John L. Junkins, *Analytical Mechanics of Space Systems*, 2nd Ed., American Institute of Aeronautics and Astronautics, Education Series, Reston, VA 2009.

[13] June Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem*, History of Mathematics Vol. 11, AMS-LMS 1997.

[14] Catherine Shaw, *La incógnita Newton*, Rocaeditorial, Madrid, 2005.

[15] Ahmed Aly Kamel, *Perturbation Theory Based on Lie Transforms and Its Application to the Stability of the Motion Near Sun-Perturbed Earth-Moon Triangular Libration Points*, Stanford University, NASA CR-1622, 1970.

[16] Gérard Gómez, Jaume Llibre, Regina Martínez y Carles Simó, *Dynamics and Mission Design Near Libration Points*, 4 volúmenes, World Scientific Pub., Singapore 2001.

[17] Gerard K. O'Neill, *The High Frontier*, Bantam Edition, New York, 1978.

[18] Sensi Pastor *et al.*, "A Pluto-like radius and a high albedo for the dwarf planet Eris from an occultation", *Nature* doi: 10.1038/nature10550, 2011

[19] Martin C. Gutzwiller, "Moon-Earth-Sun: The oldest three-body problem" *Reviews of Modern Physics*, **70**, 589–639, 1998.

[20] Dava Sobel, *Longitud*, Ed. Debate, Madrid 1998.

[21] George W. Hill, *The Collected Mathematical Works of George William Hill*, 4 volumes, Carnegie Institution of Washington, 1905 (los artículos publicados después dan para otro volumen).

[22] Curtis Wilson, *The Hill-Brown Theory of the Moon's Motion*, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Ed. Springer, New York 2010.

[23] Allan Olley, *Just a Beginning: Computers and Celestial Mechanics in the Work of Wallace J. Eckert*, PhD History and Philosophy of Science and Technology, University of Toronto, 2011.

[24] Antonio Elipe, "Rafael Cid: su obra científica", en *La máquina del cielo. Reflexiones astronómicas en torno a la investigación del Profesor CID PALACIOS*, 5–30, Eds. A. Elipe y E. Viñuales, Universidad de Zaragoza, Diputación General de Aragón, 2002.

[25] André Deprit y Sebastián Ferrer, "Note on Cid's Radial Intermediary and the Method of Averaging", *Celestial Mechanics* **40**, 335–343, 1987; "Simplifications in the theory of artificial satellites", *J. of Astronautical Sciences* **37**, 451–463, 1989.

[26] Oliver Montenbruck y Eberhard Gill, *Satellite Orbits. Models, Methods and Applications*, Springer, Berlín, Tercera Ed. 2005.

[27] Rafael Cid y Sebastián Ferrer, *Geodesia geométrica, física y por satélites*, Instituto Geográfico Nacional, Madrid, 1997.

[28] Jennifer Wiseman, *God and the astronomer: Exoplanets, life and human significance*, Simposio Internacional *Ciencia y Religión en el siglo XXI: ¿diálogo o confrontación?*, Fundación R. Areces, Madrid, 10 y 11 de noviembre, 2011.

[29] http://exoplanet.eu/catalog/ http://kepler.nasa.gov/news/nasakeplernews/

[30] Jürgen Moser, "Is the Solar System Stable?" *The Mathematical Intelligencer* **1**, 65–71, 1978 (La versión original se publicó en alemán en 1975).

[31] Peter D. Ward y Donald Brownlee, *Rare Earth. Why Complex Life is Uncommon in the Universe*, Springer 2000.

[32] Martin Lara, Toshio Fukushima y Sebastián Ferrer, "Ceres' Rotation Solution under the Gravitational Torque of the Sun" *Monthly Notices Royal Astronomical Society* Vol. **415**, 461–469, 2011.

[33] Daniel J. Scheeres, "Stability in the Full Two-Body Problem." *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **83**, 155-169, 2002; "The Full Two-Body Problem: Celestial Mechanics and Binary Asteroids". Seminario Departamento Matemática Aplicada, Programa de Doctorado, Universidad de Murcia, 25 Mayo 2006.

[34] Sebastián Ferrer y Martin Lara, "On roto-translatory motion. Reductions and radial intermediaries", *The Journal of the Astronautical Sciences* Vol. **59**, Issue 3, 1–19, 2012.

[35] Mariano Artigas, *La mente de universo*, EUNSA, Pamplona 1999.

[36] Sebastián Ferrer, "Astronomía: Buscando puentes entre Ciencia y Fe", ciclo de Conferencias *Fe y Ciencia, un diálogo necesario*, Centro Social Universitario, Universidad de Murcia, Mayo-Junio 2012.