

TEMA 6: HETEROSCEDASTICIDAD



S. Álvarez, A. Beyaert, M. Camacho, M. González, A. Quesada
Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

Lo que estudiaremos en este tema:

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

1. El problema de la heteroscedasticidad

1.1 Introducción

1.2 Consecuencias sobre el estimador MCO

1.3 Mínimos Cuadrados Generalizados

2. Detección de la heteroscedasticidad: el contraste de White

3. Estimación e inferencia: el método de White



Bibliografía básica: Wooldridge, 2006, cap. 8

1. El problema de la heteroscedasticidad

1.1 Introducción

- Modelo: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i$
- Heteroscedasticidad: “la varianza del error no es constante”

$$V(\varepsilon_i | x_{11}, x_{12}, \dots, x_{k(N-1)}, x_{kN}) = V(\varepsilon_i | x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}) = \sigma_i^2 \quad i = 1, \dots, N$$

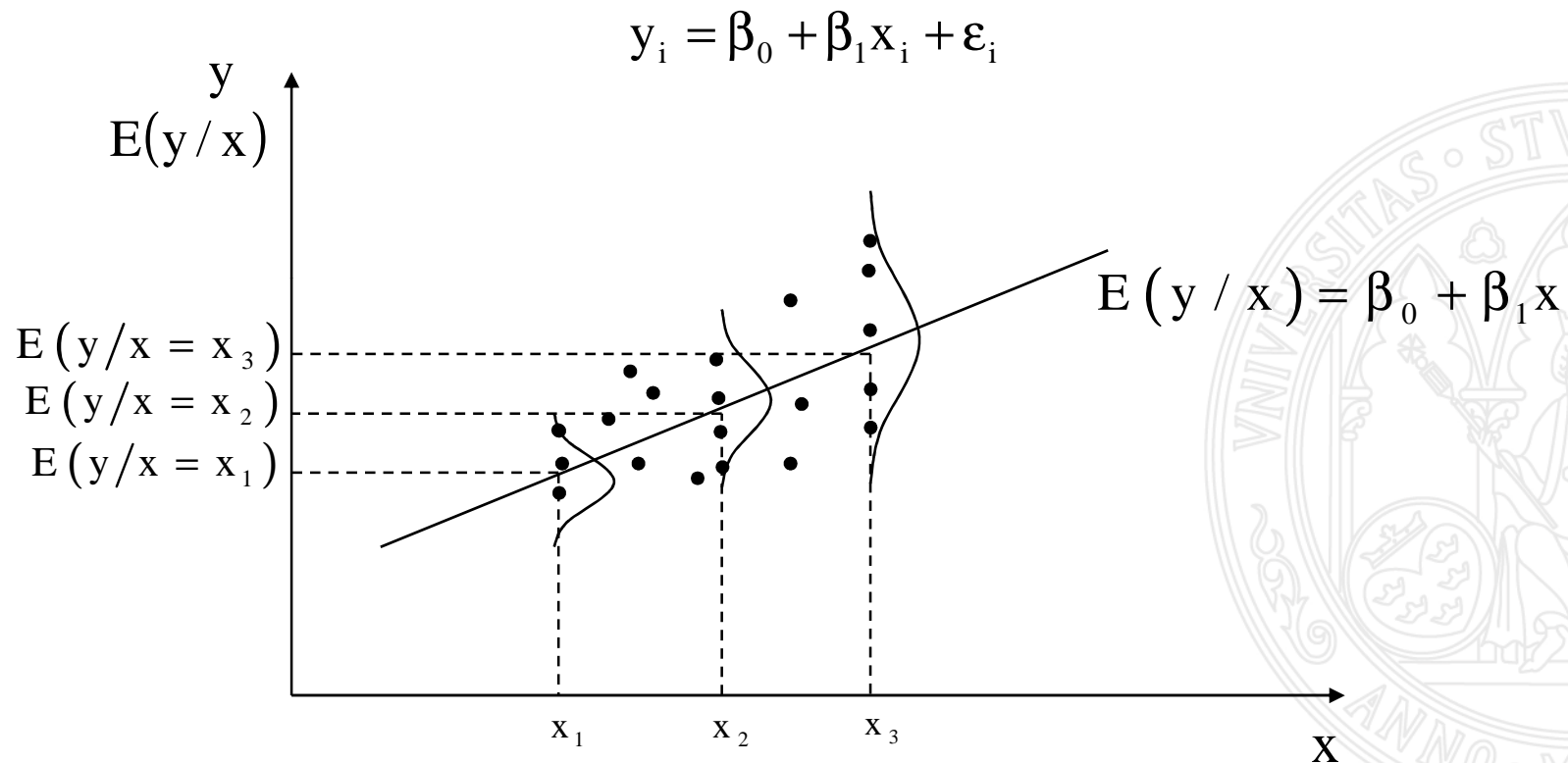
$$\Rightarrow V(y_i | x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}) = \sigma_i^2 \quad i = 1, \dots, N$$

- No se cumple RLM.5
- Algunos ejemplos económicos
 - Consumo en función de la renta
 - Salario en función de los años de educación
 - Dividendos a repartir entre accionistas en función del beneficio
 - Errores cometidos en función de las horas de aprendizaje

1. El problema de la heteroscedasticidad

1.1 Introducción

- Gráficamente:



1. El problema de la heteroscedasticidad

1.2 Consecuencias sobre el estimador MCO

- Se siguen cumpliendo RLM.1 a RLM.4 \Rightarrow la estimación MCO de los parámetros sigue siendo
 - insesgada $E(\hat{\beta}_j) = \beta_j$ 😊
 - consistente $\underset{N \rightarrow \infty}{\text{plim}}(\hat{\beta}_j) = \beta_j$ 😊

- Cambia la varianza de los parámetros estimados por MCO

Homoscedasticidad

$$V(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{\text{STC}_j(1 - R_j^2)} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^N r_{ij}^2}$$

Heteroscedasticidad

$$V(\hat{\beta}_j) = \frac{\sum_{i=1}^N r_{ij}^2 \sigma_i^2}{\left(\sum_{i=1}^N r_{ij}^2\right)^2}$$

(Demostración: Wooldridge p. 122)

r_{ij} , STC_j y R_j^2 : residuos, STC y R^2 de la regresión de x_j sobre el resto de explicativas

1. El problema de la heteroscedasticidad

1.2 Consecuencias sobre el estimador MCO

- No se puede aplicar el Teorema de Gauss-Markov ☹️
 - ⇒ La varianza de MCO ya no es óptima (MCO ya no es ELIO)
- La estimación habitual de la varianza de los estimadores es
 - sesgada ☹️
 - inconsistente ☹️
- Bajo RLM.6 los contrastes t y F habituales ya no son válidos ☹️
 - Están basados en $V(\hat{\beta}_j)$ bajo homoscedasticidad
- No afecta a interpretación de R^2 ni R_a^2 😊

1. El problema de la heteroscedasticidad

1.3 Mínimos Cuadrados Generalizados

- Con heteroscedasticidad el estimador más apropiado es Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG)

- Dado el modelo: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i$, $V(\varepsilon_i | x_{1i}, \dots, x_{ki}) = \sigma_i^2$

- Si σ_i^2 es conocida podemos calcular MCG

- Dividimos por la desviación típica, obtenemos el **modelo ponderado**:

$$\frac{y_i}{\sigma_i} = \beta_0 \frac{1}{\sigma_i} + \beta_1 \frac{x_{1i}}{\sigma_i} + \dots + \beta_k \frac{x_{ki}}{\sigma_i} + \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$$

- El modelo ponderado cumple RLM.1-RLM.5:

$$V\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\right) = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2} = 1 \quad i=1, \dots, N$$

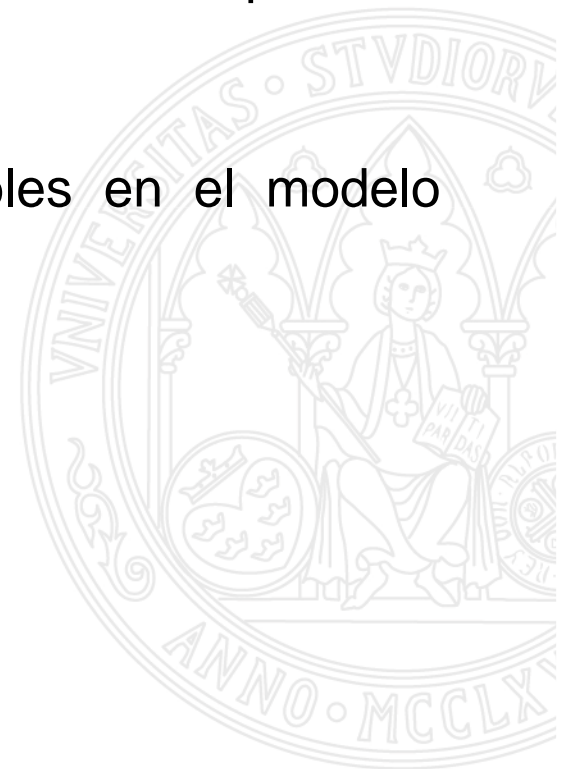
- MCG es MCO en el modelo ponderado

⇒ según el Teorema de Gauss-Markov, **MCG es ELIO**

1. El problema de la heteroscedasticidad

1.3 Mínimos Cuadrados Generalizados

- MCG en contexto de heteroscedasticidad se llama **Mínimos Cuadrados Ponderados**: cada observación se pondera inversamente a la varianza de su error
- Los contrastes t y F habituales serían aplicables en el modelo ponderado
- En la práctica casi nunca conoceremos σ_i^2



1. El problema de la heteroscedasticidad

1.3 Mínimos Cuadrados Generalizados

- Ejemplo $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i$
 - Supongamos que sabemos

$$V(\varepsilon_i | x_{1i}, \dots, x_{ki}) = \lambda x_{1i}$$

- El modelo ponderado es homoscedástico

$$\frac{y_i}{\sqrt{x_{1i}}} = \beta_0 \frac{1}{\sqrt{x_{1i}}} + \beta_1 \frac{x_{1i}}{\sqrt{x_{1i}}} + \dots + \beta_k \frac{x_{ki}}{\sqrt{x_{1i}}} + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{x_{1i}}}$$

$$V\left(\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{x_{1i}}}\right) = \frac{\lambda x_{1i}}{x_{1i}} = \lambda$$

- Nota: no necesitamos conocer λ



2. Detección de la heteroscedasticidad: el contraste de White

- El contraste de White es un contraste muy general de heteroscedasticidad

H_0 : homoscedasticidad

H_1 : heteroscedasticidad

- Procedimiento de contraste:

1. MCO en $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i$ y obtenemos los residuos e_i

2. Regresión auxiliar por MCO y obtenemos el R-cuadrado (R_e^2)

$$e_i^2 = \gamma_0 + \sum_{j=1}^k \alpha_j x_{ji} + \sum_{j=1}^k \delta_j x_{ji}^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{h < j} \omega_{jh} x_{ji} x_{hi} + u_i$$

Si hay pocos grados de libertad, a veces se supone $\omega_{jh}=0$

2. Detección de la heteroscedasticidad: el contraste de White

3. Contraste de significatividad global en la regresión auxiliar

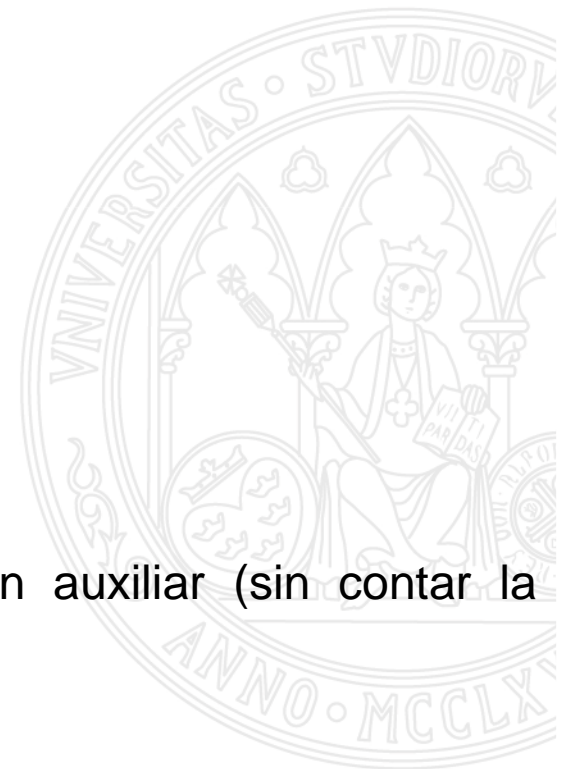
$H_0 : \alpha_j = 0, \delta_j = 0 \text{ y } \omega_{jh} = 0 \forall j, h \text{ (homosced.)}$

$H_1 : \text{no } H_0 \text{ (heterosced.)}$

4. Estadístico del contraste:

$$NR_e^2_{H_0} \sim \chi_p^2$$

p es el número de regresores en la regresión auxiliar (sin contar la constante)



3. Estimación e inferencia: el método de White

- El método de White se aplica para poder hacer inferencia con MCO en caso de heteroscedasticidad
- Los β_j se estiman por MCO (insesgada y consistente)
- Las $V(\hat{\beta}_j)$ se estiman de forma robusta a heteroscedasticidad

$$\hat{V}(\hat{\beta}_j) = \frac{\sum_{i=1}^N r_{ij}^2 e_i^2}{\left(\sum_{i=1}^N r_{ij}^2\right)^2}$$

Se puede demostrar que $p \lim_{N \rightarrow \infty} (\hat{V}(\hat{\beta}_j)) = V(\hat{\beta}_j)$ (Wooldridge, p. 288)

- Con esta $\hat{V}(\hat{\beta}_j)$ los contrastes t y F son válidos en muestras grandes

Lo que hemos aprendido:

1. Bajo heteroscedasticidad:

- MCO es ELI y consistente pero no óptimo. Los contrastes del Tema 4 no son válidos
- MCG es ELIO y consistente. Los contrastes del Tema 4 son válidos. Es poco útil en la práctica porque casi nunca conocemos la varianza

2. En la practica

- Detectamos heteroscedasticidad con el “contraste de White”
- Para estimar usamos el “método de White”:
 - Los parámetros por MCO
 - Sus varianzas por la corrección de White