NOTAS DE MATEMÁTICAS PARA EL GRADO EN MARKETING

Índice general

1. Funciones de una variable. Optimización

1.1. Funciones elementales. Dominio

Funciones elementales

Definiciones

- Una función real de variable real $f(x)$ es una aplicación que asocia a cada valor de la variable independiente $x \in D \subset \mathbb{R}$ un único valor real de la variable dependiente y, que es la imagen de x a través de f. Se escribe:

$$\begin{array}{rll} f: & D & \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x & \to y = f(x) \end{array}$$

- El conjunto de números reales que tienen imagen mediante la función se llama dominio o campo de existencia. Se denota como D o $Dom(f)$.

$$D = Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : \exists f(x)\}$$

- Cuando no especificamos el dominio de la función f, se entiende por dominio el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ donde tiene sentido la función f.

- La gráfica de una función $y = f(x)$ es el conjunto

$$Gr(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in Dom(f), y = f(x)\right\}$$

Función potencia

La función potencia de exponente $\alpha \in \mathbb{R}$ asigna al número real $x \in D$, x^α, y se escribe $f(x) = x^\alpha$.

El dominio de la función potencia depende del exponente α.

Función exponencial

Sea $a > 0$. La aplicación que asigna a cualquier número real x la potencia $a^x > 0$ se llama función exponencial de base a y se escribe $f(x) = a^x$. Su dominio es $D = \mathbb{R}$.

La más utilizada de las funciones exponenciales es la de base e que se escribe $f(x) = e^x$. El número e vale aproximadamente $e = 2,71828...$

Se cumple que

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

Función logaritmo neperiano

- La aplicación que asigna a cada número real x positivo, el único número real y que cumple $e^y = x$, se llama función logaritmo neperiano, y se escribe $f(x) = \ln x$.
- El dominio de $f(x) = \ln x$ es $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
- Se cumple que $e^{\ln x} = x$ y $\ln(e^x) = x$. Además, $x = y \Leftrightarrow \ln x = \ln y$.
- Signo de $\ln x$

  1. Si $0 < x < 1$, entonces $\ln x < 0$.
  2. Si $x > 1$, entonces $\ln x > 0$.

- Cualquier número positivo se puede escribir como potencia del número e:

$$a = e^{\ln a} \quad \text{con } a > 0$$

Definición de función definida a trozos

Una función está definida a trozos, si al menos en dos intervalos de su dominio la regla que la define es distinta.

Ejemplo

La función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si} \quad -2 < x < 0 \\ 3 & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ -x & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

está definida a trozos en su dominio, que es $(-2, 5]$.

Cuando $x \in (-2, 0]$, $f(x) = x^2 + 3$; si $x \in [0, 2)$, $f(x) = 3$ y si $x \in [2, 5]$, $f(x) = -x$;

Operaciones con funciones

Dadas dos funciones reales $f(x)$ y $g(x)$ se definen las operaciones siguientes:

- Suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- Producto por un número real: Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- Producto $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
- Cociente $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \left(f\dfrac{1}{g}\right)(x) = f(x)\left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ cuando $g(x) \neq 0$.
- Composición: La composición de la función $f(x)$ con la función $g(x)$ es otra función, que se denota por $g \circ f$, que aplica la función f a la variable independiente x y al resultado le aplica g. Se escribe:

$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g(f(x))$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

1.2. Límites de una función. Continuidad

Definiciones

- **Límite de una función en un punto:** Una función $y = f(x)$, que no tiene por qué estar definida en el punto x_0, tiene límite L (finito) cuando x tiende a x_0, si al aproximar la variable independiente x suficientemente a x_0 (sin llegar a x_0) sus imágenes $f(x)$ se aproximan tanto como se quiera a L o valen L. Se escribe:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

  Una función $y = f(x)$, que no tiene por qué estar definida en el punto x_0, tiene límite $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$) cuando x tiende a x_0, si al aproximar la variable independiente x suficientemente a x_0 (sin llegar a x_0), sus imágenes $f(x)$ se hacen tan grandes (respectivamente, tan pequeñas) como se quiera. Se escribe:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ (respectivamente, } -\infty)$$

Ejemplo 1

Sea la función $f(x) = 2x + 3$. El valor del límite de esta función cuando x tiende a -1 (que se escribe $x \to -1$) es 1.

Para verlo de un modo intuitivo se ha construido una tabla donde se dan valores a la variable independiente próximos a -1, y se calculan sus correspondientes imágenes, observándose que éstas están muy próximas a 1:

x	$-0{,}9$	$-0{,}99$	$-1{,}1$	$-1{,}01$	$-1{,}0007$
$f(x) = 2x + 3$	1,2	1,02	0,8	0,98	0,9986

Ejemplo 2

Sea la función $f(x) = \dfrac{2}{(x+3)^2}$. El límite de esta función cuando x tiende a -3 $(x \to -3)$ es $+\infty$.

Igual que en el ejemplo anterior se construye una tabla donde se dan valores a la variable independiente que se aproximan a -3 y se calculan sus correspondientes imágenes. Se observa que las imágenes se hacen muy grandes, basta observar que mientras que el numerador vale 2, el denominador está cada vez más próximo a cero y por tanto el cociente es cada vez mayor.

x	$-2{,}9$	$-2{,}99$	$-3{,}1$	$-3{,}01$	$-3{,}005$
$f(x) = \dfrac{2}{(x+3)^2}$	200,00	20000,00	200,00	20000,00	40000,00

- **Límites laterales:**
  - Una función $y = f(x)$, que no tiene por qué estar definida en el punto x_0, tiene límite por la derecha (lateral por la derecha) cuando x tiende a x_0, igual a L (finito) si al aproximar la variable x suficientemente a x_0 por la derecha, es decir, con valores de x mayores que x_0, sus imágenes $f(x)$ se aproximan tanto como se quiera a L o valen L. Se escribe:

    $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

  - Una función $y = f(x)$, que no tiene por qué estar definida en el punto x_0, tiene límite por la izquierda (lateral por la izquierda) cuando x tiende a x_0, igual a L (finito) si al aproximar la variable x suficientemente a x_0 por la izquierda, es decir, con valores x menores que x_0, sus imágenes $f(x)$ se aproximan tanto como se quiera a L o valen L. Se escribe:

    $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Nota: Los límites laterales en un punto x_0 también pueden valer $+\infty$ o $-\infty$.

- **Límite de una función en el infinito:**
  - El límite de una función $f(x)$ cuando la variable independiente x se hace muy grande (es decir, cuando $x \to +\infty$) es L, $+\infty$ o $-\infty$, cuando las imágenes de valores de x suficientemente grandes se aproximan a L, se hacen muy grandes ($+\infty$) o se hacen muy pequeñas ($-\infty$). Se escribe:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L\,(+\infty \text{ o } -\infty)$$

  - El límite de una función $f(x)$ cuando la variable independiente x se hace muy pequeña (es decir, cuando $x \to -\infty$) es L, $+\infty$ o $-\infty$, cuando las imágenes de valores de x suficientemente pequeños (muy negativos) se aproximan a L, se hacen muy grandes ($+\infty$) o se hacen muy pequeñas ($-\infty$). Se escribe:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L\,(+\infty \text{ o } -\infty)$$

Propiedades

1. El límite de una función en un punto, si existe, es único.
2. Una función $f(x)$ tiene límite en x_0 si, y solo si, los límites laterales en este punto existen y valen lo mismo.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

¿Cómo se procede en el cálculo de límites?

- Si el punto x_0, donde se quiere calcular el límite de una función, no pertenece al dominio de la función, pero la función está definida en puntos x próximos a x_0, se calculan los límites laterales. El valor de los límites laterales se obtienen sustituyendo en la expresión que la función tenga a la derecha o a la izquierda por x_0.
- Si el punto x_0 pertenece al dominio de la función, se ha de tener en cuenta si la función cambia su definición dependiendo de que la variable independiente sea menor o mayor que x_0, o bien si la función se define igual a la derecha y a la izquierda del punto x_0. En el primer caso se tienen que calcular los límites laterales tal como se ha dicho en el apartado anterior y en el segundo caso el límite será la imagen por f de x_0.

- El límite de una función f en el infinito ∞ se calcula sustituyendo la variable independiente x por ∞ y operando con el como si de un número se tratase, muy grande si se trata del límite en $+\infty$ o muy pequeño (muy negativo) si se trata del límite en $-\infty$.

- Sea $f(x)$ una función tal que $f(x) \neq 0$ y con $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$$

  El numerador vale siempre 1 y el denominador está cada vez más cercano a cero, por tanto, el cociente se hace cada vez más positivo o negativo ($+\infty$ o $-\infty$, según se aplique la regla de los signos). Igual si se trata de límites en el infinito.

- Cuando $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, el límite $\lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$. Igual si se trata de un límite en el infinito.

- Pero al intentar calcular el límite de una función en un punto o en el infinito puede ocurrir que no se obtenga un valor, sino que se den algunas de las situaciones siguientes:

  - $(+\infty) + (-\infty)$.
  - $\infty \cdot 0$.
  - ∞/∞.
  - $0/0$.

  (Las dos últimas situaciones se derivan de la segunda)

  Estos casos se dice que, a priori, el límite es indeterminado, y que para calcularlo es preciso realizar algún cálculo para proceder luego como se ha dicho anteriormente.

  Dos de los procedimientos utilizados para resolver indeterminaciones son:

  1. El límite de un polinomio en el infinito coincide con el límite en el infinito del término de mayor grado.
  2. Cuando se tiene el límite en un punto de un cociente de polinomios y resulta que el numerador tiene por límite 0 y el denominador también, entonces se factorizan ambos polinomios y se simplifica para eliminar la indeterminación.

Definiciones

- Una función $f(x)$ se dice **continua** en un punto $x_0 \in D = Dom(f)$ cuando

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- Una función $f(x)$ se dice **continua a la izquierda** en un punto $x_0 \in D = Dom(f)$ cuando

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

- Una función $f(x)$ se dice **continua a la derecha** en un punto $x_0 \in D = Dom(f)$ cuando

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

- Una función $y = f(x)$ se dice continua en un conjunto $A \subseteq D$ cuando es continua en cada punto $x_0 \in A$.

- **Discontinuidades:** Sea $x_0 \in Dom(f)$. Si la función $f(x)$ no es continua en x_0 puede ser debido a:
  - $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ y $l \neq f(x_0)$ (discontinuidad evitable)
  - $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ (discontinuidad de salto finito).
  - alguno de los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto x_0 es ∞ (discontinuidad de salto infinito).

Importante: Si x_0 no pertenece al $Dom(f)$, obviamente la función no es continua en x_0.

IMPORTANTE: Las funciones potencia, exponencial y logaritmo son funciones continuas en sus dominios.

Propiedades:

- La suma de funciones continuas es una función continua en su dominio.
- El producto de un número real por una función continua es continua en su dominio.
- El producto de funciones continuas es una función continua en su dominio.
- El cociente de funciones continuas es una función continua en su dominio.
- La composición de funciones continuas es una función continua en su dominio.

1.3. Tasa de cambio. Derivación de funciones. Interpretación de la derivada

Definiciones

- Sea $y = f(x)$, una función real de variable real continua. Se define la **tasa de cambio** de f en x_0 cuando la variable independiente cambia Δx al cociente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- El valor del límite de la tasa de cambio cuando la variación de la variable independiente es infinitesimal (muy próximo a cero) se expresa:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

  Si este límite es finito se dice que la función $y = f(x)$ es derivable en el punto x_0 y el valor de este límite es la derivada de f en x_0.

  Se escribe: $f'(x_0)$, $\dfrac{df}{dx}(x_0)$, $\dfrac{dy}{dx}(x_0)$....

- Sea una función $f(x)$ derivable en cada uno de los puntos de un subconjunto $A \subset D$. La función que asigna a cada $x_0 \in A$ el valor $f'(x_0)$ se llama **función derivada** de f.

Propiedad

Si una función $y = f(x)$ es derivable en x_0, entonces es continua en x_0.

Cálculo de derivadas.

1. Derivada de la función constante: $y = f(x) = k \Longrightarrow y' = f'(x) = 0$.
2. Derivada de la potencia: $y = f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{R} \Longrightarrow y' = f'(x) = nx^{n-1}$.
3. Derivada del logaritmo $y = f(x) = \ln x \Longrightarrow y' = f'(x) = \dfrac{1}{x}$.
4. Derivada de la exponencial: $y = f(x) = e^x \Longrightarrow y' = f'(x) = e^x$.
5. Si $f(x)$ es una derivable, entonces la función $g(x) = \lambda f(x)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, es derivable y su derivada vale $g'(x) = \lambda f'(x)$.

6. Derivada de la suma: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivable, entonces $(f+g)(x)$ es derivable y
$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

7. Derivada del producto: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivable, entonces $(fg)(x)$ es derivable y
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

8. Derivada del cociente: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces $(f/g)(x)$ es derivable, cuando $g(x) \neq 0$ y
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

9. Regla de la cadena: Sean $y = f(x)$ y $z = g(y)$ funciones derivables, entonces $(g \circ f)(x)$ es derivable y
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Interpretación de la derivada.

Sea $y = f(x)$ una función derivable en x_0. Entonces

- El valor de la tasa de cambio de la función f cuando la variable independiente pasa de valer x_0 a $x_0 + \Delta x$ es
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
siendo $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Si Δx es pequeño, entonces se puede escribir:
$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x \cong f'(x_0)\Delta x = \Delta y_{aprox}$$

- El valor $f(x_0 + \Delta x)$ se puede aproximar por $f(x_0) + \Delta y_{aprox}$.

RECUERDA: que el valor de la derivada de una función $f(x)$ en un punto x_0 nos da cuando vale la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Definición

Sea $y = f(x)$ una función derivable. La función marginal de f es su función derivada.

Interpretación de la función marginal

Sea $f'(x_0)$ la derivada de la función $y = f(x)$ en x_0. La función marginal de f en x_0 es una aproximación de la variación que experimenta la variable dependiente cuando la variable independiente cambia de x_0 a $x_0 + 1$.

1.4. Estudio de funciones derivables. Crecimiento. Concavidad. Extremos relativos.

Definiciones (crecimiento)

Sea $y = f(x)$ con $Dom(f) = D$ una función continua en su dominio.

- $f(x)$ es creciente en x_0 cuando para puntos x próximos a x_0 se verifica que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

- $f(x)$ es decreciente en x_0 cuando para puntos x próximos a x_0 se verifica que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

- $y = f(x)$ es creciente en un intervalo $[a, b] \subset Dom(f)$ cuando lo es en cada uno de los puntos del intervalo.

- $y = f(x)$ es decreciente en un intervalo $[a, b] \subset Dom(f)$ cuando lo es en cada uno de los puntos del intervalo.

Propiedad

Sea $f(x)$ una función derivable en x_0, se cumple que:

- Si $f'(x_0) > 0$, entonces $f(x)$ es creciente en x_0.
- Si $f'(x_0) < 0$, entonces $f(x)$ es decreciente en x_0.
- Si $f'(x_0) = 0$ caso dudoso.

Definición de punto crítico

Sea $y = f(x)$ una función derivable. Se dice que un punto $x_0 \in Dom(f)$ es un punto crítico de la función cuando $f'(x_0) = 0$.

Estudio del crecimiento de una función derivable

- Se calculan los puntos críticos.
- Los puntos críticos dividen el dominio de la función en intervalos donde el signo de la derivada se mantiene constante.
- Para ver qué signo tiene la derivada en cada uno de estos intervalos, simplemente se calcula el valor de la derivada en un punto arbitrario del interior de cada uno de los intervalos.

Definiciones (concavidad)

- Una función derivable $y = f(x)$ es convexa en x_0 cuando la pendiente de las rectas tangentes a la curva en puntos x próximos a x_0 crece (gráficamente la curva de la función se sitúa por encima de la recta tangente a la curva en el punto x_0).
- Una función derivable $y = f(x)$ es cóncava en x_0 cuando la pendiente de las rectas tangentes a la curva en puntos x próximos a x_0 decrece (gráficamente la curva de la función se sitúa por debajo de la recta tangente a la curva en el punto x_0).
- Una función derivable $y = f(x)$ es convexa en un intervalo (a, b) cuando es convexa o cóncava hacia arriba en cada uno de los puntos del intervalo (gráficamente la curva de la función se sitúa por encima de las rectas tangentes a la curva en los puntos del intervalo).
- Una función derivable $y = f(x)$ es cóncava en un intervalo (a, b) cuando es cóncava o cóncava hacia abajo en cada uno de los puntos del intervalo (gráficamente la curva de la función se sitúa por debajo de las rectas tangentes a la curva en los puntos de intervalo).
- Un punto x_0 donde una función derivable cambia de concavidad se llama punto de inflexión.

Propiedad

Sea $y = f(x)$ una función dos veces derivable en el intervalo $(a, b) \subset Dom(f)$. Entonces

- Si $f''(x) > 0$ cuando $x \in (a, b) \Longrightarrow$ la función es convexa en (a, b).
- Si $f''(x) < 0$ cuando $x \in (a, b) \Longrightarrow$ la función es cóncava en (a, b).
- Si $f''(x) = 0$ caso dudoso.

Definiciones (extremos relativos)

- Una función continua $y = f(x)$ tiene un máximo relativo o local en x_0 cuando para puntos x próximos a x_0 se verifica que $f(x) \leq f(x_0)$.
- Una función continua$y = f(x)$ tiene un mínimo relativo o local en x_0 cuando para puntos x próximos a x_0 se verifica que $f(x) \geq f(x_0)$.

Propiedad: Condición de primer orden (condición necesaria)

Sea una función $y = f(x)$ derivable en x_0. Si $f(x)$ tiene un extremo relativo en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

Propiedad

Sea x_0 un punto crítico de una función derivable $y = f(x)$. Entonces:

1. Si $f'(x) > 0$ para puntos x próximos a x_0, $x < x_0$ (por la izquierda) y $f'(x) < 0$ en puntos x próximos a x_0, $x > x_0$ (por la derecha) $\Longrightarrow f(x)$ tiene un máximo relativo en x_0.
2. Si $f'(x) < 0$ para puntos x próximos a x_0, $x < x_0$ (por la izquierda) y $f'(x) > 0$ en puntos x próximos a x_0, $x > x_0$ (por la derecha) $\Longrightarrow f(x)$ tiene un mínimo relativo en x_0.
3. Si $f'(x)$ tiene el mismo signo para puntos x próximos a x_0 entonces, $f(x)$ no tiene un extremo relativo en x_0.

Propiedad 2: Condición de segundo orden de extremo relativo (condición suficiente)

Sea x_0 un punto crítico de una función $y = f(x)$ dos veces derivable. Entonces:

- Si $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow$ en x_0 hay un máximo relativo.
- Si $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow$ en x_0 hay un mínimo relativo.

1.5. Extremos absolutos. Teorema de Weierstrass para funciones de una variable. Teorema local-global para funciones de una variable

Definiciones (extremos absolutos)

- Una función continua $y = f(x)$ tiene un máximo global o absoluto en x_0 cuando se verifica que $f(x) \leq f(x_0)$ para cualquier $x \in Dom(f)$.

- Una función continua $y = f(x)$ tiene un mínimo global o absoluto en x_0 cuando se verifica que $f(x) \geq f(x_0)$ para cualquier $x \in Dom(f)$.

Teorema de Weierstrass para funciones de una variable

Toda función $y = f(x)$ continua en un intervalo $[a, b]$ (con $a < b$) tiene al menos un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo.

(*Observación:* Continuidad de una función f en los extremos de un intervalo $[a, b]$ quiere decir que f es continua a la derecha de a y a la izquierda de b)

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b))$$

Teorema local-global para funciones de una variable

Sea x_0 el único punto crítico de una función $f(x)$ continua en un intervalo de cualquier tipo y dos veces derivable en un el interior del intervalo (intervalo abierto). Entonces:

1. Si la función es convexa en el interior del intervalo $\Longrightarrow$ la función tiene un mínimo absoluto en x_0 de valor $f(x_0)$.

2. Si la función es cóncava en el interior del intervalo $\Longrightarrow$ la función tiene un máximo absoluto en x_0 de valor $f(x_0)$.

Ejercicios correspondientes al tema 1

1.6. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $g(x) = \sqrt{x+1}$ y $h(x) = e^{2x-1}$, realizar las siguientes operaciones:

a) $h \circ g$.

b) $g \circ h$.

c) $f \circ g$.

d) $g \circ f$.

e) $f \circ h$.

f) $f \circ g \circ h$.

Ejercicio 2

Determinar los dominios de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$.

c) $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{x+2}$.

d) $f(x) = \ln(9 - x^2)$.

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}}$.

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x}}{x - 2}$.

g) $f(x) = \sqrt{\ln(2x-5)}$.

h) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$.

i) $f(x) = 3x^2 e^{x^3+2x-3}$.

j) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{2x-1}}$.

k)$f(x) = (2x-1)^{1/4}$.

Ejercicio 3

Escribir dos funciones:

a) cuyo dominio sea $\mathbb{R}$.

b) cuyo dominio sea un subconjunto de $\mathbb{R}$.

c) definidas a trozos en su dominio.

Ejercicio 4

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones reales de variable real.

4.1. Si $\lim_{x\to -1} f(x) = 3$ y $\lim_{x\to -1} g(x) = -\infty$, determinar:

a) $\lim_{x\to -1} (f-g)(x)$ b) $\lim_{x\to -1} (fg)(x)$ c) $\lim_{x\to -1} \dfrac{f}{g}(x)$
d) $\lim_{x\to -1} \ln(f(x))$ e) $\lim_{x\to -1} f(x)^{g(x)}$

4.2. Si $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ con $f(x) > 0$ y $\lim_{x\to 5} g(x) = +\infty$, determinar:

a) $\lim_{x\to 5} (f-g)(x)$ b) $\lim_{x\to 5} (fg)(x)$ c) $\lim_{x\to 5} \dfrac{f}{g}(x)$
d) $\lim_{x\to 5} \ln(f(x))$ e) $\lim_{x\to 5} f(x)^{g(x)}$

4.3. Si $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to -\infty} g(x) = +\infty$, determinar:

a) $\lim_{x\to -\infty} (f-g)(x)$ b) $\lim_{x\to -\infty} (fg)(x)$ c) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{f}{g}(x)$
d) $\lim_{x\to -\infty} \ln(f(x))$ e) $\lim_{x\to -\infty} f(x)^{g(x)}$

Ejercicio 5

Calcular los siguientes límites cuando sea posible:

a) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{-2x+5}{3-x}\right)^x$.

b) $\lim_{x\to +\infty} x^2 + 5x + 7$.

c) $\lim_{x\to 1} \sqrt{\dfrac{2+9x}{x+2}}$.

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x+1}{x^2}$.

e) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x+1}{x^2}$.

f) $\lim_{x\to +\infty} \ln(x^2+2x-1)$.

g) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$.

h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x^2}{x+7}$

i) $\lim_{x\to +\infty} e^{-x^2}$

Ejercicio 6

Derivar las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(9 - x^2)$.

b) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$.

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^4 - x^2 - 12}$.

e) $f(x) = e^{2x-1} \ln(x + 2)$.

f) $f(x) = (-3x + 1)(e^{-2x^2-1})$.

g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x}}{x - 2}$

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{1 + x}}$.

i) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x - 1}{1 + x}\right)$.

Ejercicio 7

En una fábrica se estima que el coste marginal cuando se producen 50 unidades de cierto producto es $CMa(50) = 780$ y que el ingreso marginal para el mismo nivel de producción es $IMa(50) = 790$.

a) Interpretar estos valores.

b) ¿Es conveniente producir una unidad más?

c) ¿Cuándo no sería conveniente producir una unidad más?

Ejercicio 8

El coste marginal de una empresa es $CMa(x) = \dfrac{x^2}{10e^{x^2-100}}$ u.m., donde x es el número en cientos de unidades producidas. Hallar el incremento aproximado en el coste total, cuando el número de unidades producidas pasa de 1000 a 1100.

Ejercicio 9

Estudiar el crecimiento, concavidad y extremos relativos y absolutos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - x + 2$.

b) $f(x) = -x^3 + x^2 + 5x + 3$.

c) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$.

d) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 - 1}$.

Ejercicio 10

Optimizar la función $f(x) = (x-4)^2(x-1)$, en los casos que se indican:

a) $x \in [0,3]$. b) $x \in [0,2)$. c) $x \in [2,5]$. d) $x \in [3,+\infty)$.

e)$x \in \mathbb{R}$. f) $x \in (1,+\infty)$.

Ejercicio 11

Optimizar la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+3}$ en los casos que se indican:

a) $x \in \mathbb{R}$.

b) $x \in [-1,2]$.

Ejercicio 12

La función de coste de una empresa es $C(x) = x^2 + 4x$, donde x es el nivel de producción. Si la función de demanda es $x = -\dfrac{1}{2}p + 50$, donde p es el precio unitario de venta, hallar el beneficio máximo del fabricante.

Ejercicio 13

Un agricultor que planta un producto de temporada sabe que si recoge la cosecha un determinado día obtendrá 1200 kg de producto por hectárea, que venderá a 2 euros el kilo. También sabe que por cada semana de espera la cosecha aumenta 100 kg, pero el precio de cada kg disminuye 10 céntimos. ¿Cuándo debe recoger la cosecha para que el ingreso sea máximo?

Ejercicio 14

La función de coste de una empresa es $C(x) = x^2 + 4(a+2)x + 20$, donde a es un parámetro. Si el coste mínimo es de 16 u.m., calcular el nivel de producción x que minimiza el coste.

1.7. Preguntas test

1. El dominio de la función $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ es:
   a) $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$.
   b) $\mathbb{R} - \{-2,2\}$.
   c) $(2,+\infty)$.

2. El dominio de la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$ es:

   a) $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

   b) $(-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$.

   c) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

3. La función derivada de $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ es:

   a) $-\dfrac{2}{x^2-1}$.

   b) $\dfrac{2}{x^2-1}$.

   c) $\dfrac{-2}{x^2+1}$.

4. El ingreso marginal cuando se venden 50 unidades de producto vale 7 u.m. Si las ventas aumentan a 51 unidades, entonces el ingreso

   a) disminuye aproximadamente en 7 u.m.

   b) aumenta aproximadamente en 7 u.m.

   c) ni aumenta ni disminuye.

5. Si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 2$, entonces:

   a) la función no es continua en $x = 0$.

   b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 2$.

   c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$.

6. Sea una función $y = f(x)$ que verifica que $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x-3} = 5$. Entonces $f(x)$ es:

   a) continua en $\mathbb{R} - \{3\}$.

   b) no es continua en $x = 3$.

   c) es continua en $x = 3$.

7. El coste marginal cuando se producen 20 unidades de producto vale 2,5 u.m. Sabiendo que el coste de producir estas 20 unidades es de 112 u.m., entonces producir 21 unidades cuesta

   a) aproximadamente 114,5 u.m.

   b) aproximadamente 109,5 u.m.

   c) 114,5 u.m.

8. Sean $f(x) = \sqrt{x+2}$ y $g(x) = \ln(3x)$, entonces $(g \circ f)(x)$ vale:

   a) $\ln\left(3\sqrt{x+2}\right)$.

   b) $3\sqrt{2+\ln x}$.

   c) $\sqrt{2+\ln 3x}$.

9. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas verificando que $g(-2) = 1$ y $f(1) = 5$, entonces:

   a) $(f \circ g)(-2) = 5$.

   b) $(f \circ g)(1) = 5$.

   c) $(f \circ g)(-2) = 1$.

10. La derivada de la función $f(x) = \ln(1 + x\ln x)$ vale:

    a) $\dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}$.

    b) $\dfrac{x+\ln x}{1+x\ln x}$.

    c) $\dfrac{1+\ln x}{x\ln x}$.

11. Una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en un punto $a \in D$ cuando:

    a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$.

    b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

    c) $\lim\limits_{x\to f(a)} f(x) = f(a)$.

12. La función $f(x) = xe^{-x}$ tiene en $x = 1$

    a) un mínimo relativo.

    b) un máximo relativo, que es absoluto.

    c) un máximo relativo, que no es absoluto.

13. Una función continua $y = f(x)$ verifica $f(x_0) \leq f(x)$ para puntos x próximos a x_0. Entonces:

    a) x_0 es un punto crítico.

    b) en x_0 hay un mínimo relativo.

    c) en x_0 hay un máximo absoluto.

14. Sea la función $f(x) = e^{-x}(x-1)$. Entonces la función es
    a) decreciente en el intervalo $(-\infty, 2)$.
    b) creciente en el intervalo $(-\infty, 2)$.
    c) creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.
15. Sea la función $f(x) = e^{-x}(x-1)$. Entonces la función es
    a) convexa (cóncava hacia arriba) en el intervalo $(-\infty, 3)$.
    b) cóncava (cóncava hacia abajo) en el intervalo $(-\infty, 3)$.
    c) cóncava (cóncava hacia abajo) en $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.
16. Sea una función $f(x)$, con dominio todo $\mathbb{R}$ y $f'(x) = (x-1)x^2$. Entonces:
    a) en $x = 0$ hay un máximo relativo y en $x = 1$ hay un mínimo relativo.
    b) en $x = 0$ hay un máximo relativo y en $x = 1$ hay un punto de inflexión.
    c) en $x = 0$ hay un punto de inflexión y en $x = 1$ hay un mínimo relativo.
17. Sea $f(x)$ una función continua y dos veces derivable con $f''(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. Entonces:
    a) $x = 1$ y $x = -1$ son puntos de inflexión de $f(x)$.
    b) $f(x)$ es cóncava (cóncava hacia abajo) en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$.
    c) $f(x)$ es convexa (cóncava hacia arriba) en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
18. La función $f(x) = x^3 - 3x$, donde $x \in [-2, 1]$, tiene
    a) en $x = 1$ y $x = -1$ dos máximos absolutos de valor 2.
    b) en $x = 1$ un único mínimo absoluto de valor -4.
    c) en $x = 1$ y $x = -2$ dos mínimos absolutos de valor -2.
19. Sea $x = 1$ un punto crítico de una función $f(x)$ continua en $[0, +\infty)$. Si $f''(x) > 0$ para todo $x > 0$, entonces en $x = 1$ hay
    a) un máximo absoluto.
    b) un mínimo relativo, que no es absoluto.
    c) un mínimo absoluto.
20. Sea $y = f(x)$ un polinomio de grado 3. Entonces $f(x)$
    a) siempre tiene un punto de inflexión.
    b) no tiene ningún punto de inflexión.
    c) siempre tiene un máximo y un mínimo relativos.

21. La función $f(x) = x^3 + 3x^2$, con $x \in [-1, 2]$, tiene:
    a) dos mínimos absolutos, en $x = -1$ y en $x = 0$.
    b) dos máximos absolutos, en $x = 0$ y en $x = 2$.
    c) un mínimo absoluto en $x = 0$ y un máximo absoluto en $x = 2$.

1.8. Cuestiones teóricas

1. Sea $f(x)$ una función continua en $\mathbb{R}$. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones indicando las propiedades que se utilizan:
    a) $(1 + f(x))^2$.
    b) $\sqrt{f(x)}$.
    c) $\dfrac{f(x)}{1 - f(x)}$.
    d) $\ln(f(x))$.

2. Rellenar los huecos con ES, NO ES o PUEDE SER:
    a) Una función $f(x)$ que tiene límite finito en un punto x_0...............continua en el punto.
    b) Una función $f(x)$ continua en x_0,...............derivable en el punto.
    c) Una función $f(x)$ que no es continua en x_0,...............derivable en el punto.
    d) Una función $f(x)$ derivable en x_0,...............continua en el punto.
    e) Una función $f(x)$ que no es derivable en el punto x_0,...............continua en el punto.

1.9. Soluciones de los ejercicios propuestos

Ejercicio 1

a) $e^{2\sqrt{x+1}-1}$. b) $\sqrt{e^{2x-1}+1}$. c) $x + 4 - 5\sqrt{x+1}$.

d) $\sqrt{x^2 - 5x + 4}$. e) $e^{4x-2} - 5e^{2x-1} + 3$. f) $4 + e^{2x-1} - 5\sqrt{e^{2x-1}+1}$.

Ejercicio 2

a) $\mathbb{R}$. b) $\mathbb{R} - \{1, 2\}$. c) $[-2, 3]$.

d) $(-3, 3)$. e) $\mathbb{R} - \{1\}$. f) $(-\infty, -1] \cup [0, 2) \cup (2, +\infty)$.

g) $(3,+\infty)$. h) $\mathbb{R}-\{0\}$. i) $\mathbb{R}$.

j) $\mathbb{R}-\{1/2\}$. k) $[1/2,+\infty)$.

Ejercicio 4

4.1. a) $+\infty$. b) $-\infty$. c) 0. d) $\ln 3$. e) 0.

4.2. a) $-\infty$. b) Indet. c) 0. d) $-\infty$. e) 0.

4.3. a) Indet. b) $+\infty$. c) Indet. d) $+\infty$. e) $+\infty$.

Ejercicio 5

a) 1. b) $+\infty$. c) $\sqrt{\frac{11}{3}}$. d) $+\infty$. e) 0. f) $+\infty$. g) $\frac{1}{2}$

h) 0. i) 0.

Ejercicio 6

a) $f'(x)=\dfrac{-2x}{9-x^2}$.

b) $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$.

c) $f'(x)=\dfrac{2x^3-3x^2+1}{(x-1)^2}$.

d) $f'(x)=\dfrac{-3x^4+x^2-12}{(x^4-x^2-12)^2}$.

e) $f'(x)=e^{2x-1}\left[\dfrac{1+2(x+2)\ln(x+2)}{x+2}\right]$.

f) $f'(x)=e^{-2x^2-1}(12x^2-4x-3)$.

g) $f'(x)=\dfrac{-5x-2}{2\sqrt{x^2+x}(x-2)^2}$.

h) $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x^2-1}}$.

i) $f'(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$.

Ejercicio 7

a) $CMa(50)=780$ significa que fabricar una unidad más supone aumentar el coste en aproximadamente 780 u.m. $IMa(50)=790$ significa que vender una unidad más aumenta aproximadamente el ingreso en 790 u.m.

b) Teniendo en cuenta el significado de ambas marginales, resulta conveniente fabricar una unidad más.

c) No convendrá fabricar cuando el nivel de producción sea tal que el ingreso marginal para ese nivel de producción sea menor o igual que el coste marginal correspondiente.

Ejercicio 8

$CMa(10) = 10$ significa que si la producción pasa de 1000 a 1100 unidades el coste aumenta aproximadamente 10 u.m.

Ejercicio 9

a)

- $Dom(f) = \mathbb{R}$. Continua y derivable en su dominio.
- Crecimiento: decreciente en $(-\infty, 1/2)$ y creciente en $(1/2, +\infty)$.
- Extremos relativos: mínimo relativo y absoluto en $x = 1/2$ de valor $7/4$.
- Concavidad: cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}$.

b)

- $Dom(f) = \mathbb{R}$. Continua y derivable en su dominio.
- Crecimiento: decreciente en $(-\infty, -1) \cup (5/3, +\infty)$ y creciente en $(-1, 5/3)$.
- Extremos relativos: mínimo relativo en $x = -1$ de valor 0 y máximo relativo en $x = 5/3$ de valor $256/27$. No tiene extremos absolutos.
- Concavidad: cóncava hacia arriba en $(-\infty, 1/3)$ y cóncava hacia abajo en $(1/3, +\infty)$. En $x = 1/3$ la función tiene un punto de inflexión.

c)

- $Dom(f) = \mathbb{R}$. Continua y derivable en su dominio.
- Crecimiento: decreciente en $(-\infty, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$.
- Extremos: mínimo relativo y absoluto en $x = 1$ de valor -1.
- Concavidad: cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0) \cup (2/3, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(0, 2/3)$. En $x = 0$ y $x = 2/3$ la función tiene puntos de inflexión.

d)

- $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Continua y derivable en su dominio.

- Crecimiento: decreciente en $(0,1) \cup (1,+\infty)$ y creciente en $(-\infty,-1) \cup (-1,0)$.
- Extremos relativos: máximo relativo en $x = 0$ de valor 0.
- Concavidad: cóncava hacia arriba en $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1,1)$.

Ejercicio 10

a) En $x = 2$ hay un máximo absoluto de valor 4 y en $x = 0$ hay un mínimo absoluto de valor -16.

b) En $x = 0$ hay un mínimo absoluto de valor -16 y no tiene máximos absolutos.

c) En $x = 2$ y en $x = 5$ hay máximos absolutos de valor 4 y en $x = 4$ hay un mínimo absoluto de valor 0.

d) En $x = 4$ hay un mínimo absoluto de valor 0 y no hay máximos absolutos.

e) No tiene extremos absolutos.

f) En $x = 4$ hay un mínimo absoluto de valor 0 y no hay máximos absolutos.

Ejercicio 11

a) En $x = 0$ la función tiene un mínimo absoluto de valor $1/3$ y no tiene máximos absolutos.

b) En $x = 0$ la función tiene un mínimo absoluto de valor $1/3$ y en $x = 2$ tiene un máximo absoluto de valor $5/7$.

Ejercicio 12

El beneficio máximo es de 768 u.m.

Ejercicio 13

Después de 4 semanas.

Ejercicio 14

El parámetro vale $a = -3$ y el nivel de producción es $x = 2$.

Soluciones de las preguntas test

1. a)	2.b)	3. a)	4. b)	5. b)	6. c)	7. a)
8. a)	9. a)	10. a)	11. b)	12. b)	13. b)	14. b)
15. b)	16. c)	17. c)	18. c)	19. c)	20. a)	21. c)

2. Funciones de varias variables

2.1. Función real de varias variables. Concepto de curva de nivel de una función de dos variables

Definiciones

- Una función real de dos variables es una aplicación que asocia a cada par de valores de las variables independientes (x, y), que pertenecen a un conjunto D, un único valor real de la variable dependiente z y se escribe

$$\begin{array}{rcl} f : D \subseteq \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightarrow & z = f(x, y) \end{array}$$

  con $D = Dom(f)$, que es el conjunto definido como:

$$Dom(f) = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists f(x, y)\Big\}$$

  Cuando solo se da la expresión de la función $f(x, y)$ y nos piden el dominio, éste es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}^2$ donde tiene sentido f.

- Una función real de n variables es una aplicación que asocia a cada $n-$úpla de valores de las variables independientes $(x_1, x_2, ..., x_n)$, que pertenecen a un conjunto $D \in \mathbb{R}^n$, un único valor real de la variable dependiente z

$$\begin{array}{rcl} f : D \subseteq \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto & z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

  donde $D = Dom(f)$ es el dominio de la función y se escribe:

$$Dom(f) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \exists f(x_1, x_2, ..., x_n)\}$$

- Sea una función real en dos variables $z = f(x, y)$ y sea $D = Dom(f)$ su dominio:
  - La *gráfica* de $f(x, y)$ es el conjunto:

$$Gr(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in Dom(f), z = f(x, y)\}$$

    y su representación es generalmente una superficie en $\mathbb{R}^3$.
  - La *curva de nivel de cota* $k \in \mathbb{R}$ de $f(x, y)$ es el subconjunto del plano

$$C_k = \{(x, y) \in Dom(f) : f(x, y) = k\}$$

    Es decir, es el subconjunto de puntos del dominio de la función que tienen por imagen el número real k.

Observaciones

1. Las curvas de nivel se pueden representar en el plano.
2. Las curvas de nivel nunca se cortan (importante).

2.2. Derivación parcial. Vector gradiente. Interpretación de las derivadas parciales

Definición de derivada parcial

- Dada una función real de dos variables $z = f(x, y)$ y un punto del interior de su dominio (x_0, y_0), se definen sus dos derivadas parciales en este punto, denotadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

  como

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \end{aligned}$$

- Las funciones de n variables $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ tienen n derivadas parciales, que se definen en $\bar{x} = (x_1, .., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, .., x_n)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, .., x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, .., x_n) - f(x_1, .., x_i, .., x_n)}{\Delta x_i}$$

Notación

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x = f_x = z'_x = z_x = f_1 = D_1 f \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y = f_y = z'_y = z_y = f_2 = D_2 f \end{aligned}$$

Definición de vector gradiente

Sea $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ una función real de n variables que tiene derivadas parciales en los puntos del interior de su dominio. Se define el vector gradiente de f

en $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un punto del interior del dominio

$$\nabla f(\overline{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{x}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}) \right)$$

Definición

Sea una función en dos variables $z = f(x, y)$ y sea $A \subset Dom(f)$, la función que asigna a cada $(x_0, y_0) \in A$ el valor $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ es una función real en dos variables y se escribe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Igual para la derivada parcial respecto de la variable y.

Se puede generalizar para funciones en n variables.

Interpretación de las derivadas parciales

Sea $z = f(x, y)$ una función continua con derivadas parciales continuas en el interior del $Dom(f)$.

Si la variable independiente x cambia de x_0 a $x_0 + \Delta x$ manteniendo la variable y constante, en el valor y_0, entonces la variable dependiente cambia de $f(x_0, y_0)$ a $f(x_0 + \Delta x, y_0)$.

La variación real de la variable dependiente es $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ y se puede aproximar

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \Delta x$$

Análogamente si la variable independiente que cambia es la segunda manteniéndose constante la variable x.

Si ambas variables independientes cambian se tiene que:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

Generalización a una función en n variables, $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ continua con parciales continuas: Si una variable independiente cambia pasando de x_i a $x_i + \Delta x_i$ y las restantes variables independientes se mantienen constantes, se cumple

$$\Delta z = f(x_1, .., x_i + \Delta x_i, .., x_n) - f(x_1, .., x_i, ..x_n)$$

$$\Delta z \simeq \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, .., x_n)\Delta x_i$$

Funciones marginales

Definición

Sea $z = f(x, y)$ una función con derivadas parciales continuas. Esta función tiene dos funciones marginales que son sus derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$

Significado:

- El valor de la marginal de f respecto de x en (x, y) aproxima el cambio de la variable dependiente cuando la variable x aumenta en una unidad manteniendo constante la variable y:

$$\Delta z = f(x+1, y) - f(x, y) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot 1$$

- El valor de la marginal de f respecto de y en (x, y) aproxima el cambio de la variable dependiente cuando la variable y aumenta en una unidad manteniendo constante la variable x:

$$\Delta z = f(x, y+1) - f(x, y) \simeq \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot 1$$

Aplicaciones

- Sea $C(x, y)$ la función de coste de producir x unidades del un bien e y unidades de otro bien.

  1. El coste marginal respecto de x, $\frac{\partial C}{\partial x}(x, y)$, nos dice aproximadamente cuanto cuesta producir una unidad más del primer bien cuando pasa de x a $x + 1$, manteniendo constante en y el nivel de producción del segundo bien.
  2. Análogamente el coste marginal respecto de y, $\frac{\partial C}{\partial y}(x, y)$, nos dice aproximadamente cuanto supone producir una unidad más del bien y cuando pasa de y a $y + 1$, manteniendo constante el nivel de producción de x.

- Sea $Q = f(K, L)$ una función de producción.

  1. $\frac{\partial Q}{\partial K}(K, L)$ es la productividad marginal del capital y nos dice aproximadamente el incremento de la producción cuando aumenta en una unidad el capital pasando de K a $K + 1$ y se mantiene constante la fuerza de trabajo en L.

2. $\dfrac{\partial Q}{\partial L}(K, L)$ es la productividad marginal del trabajo y nos dice aproximadamente el incremento de la producción cuando aumenta en una unidad el trabajo pasando de L a $L+1$ y se mantiene constante el capital en K.

2.3. Derivadas parciales de orden superior. Teorema de Schwarz. Matriz hessiana

Derivadas parciales de orden superior

Las derivadas parciales de una función $z = f(x, y)$ como funciones reales de dos variables que son, se pueden derivar nuevamente. Cuando se calculan se obtienen las derivadas parciales segundas o derivadas de orden 2 de la función $z = f(x, y)$. Éstas son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Generalización: Sea $z = f(x_{1,} x_2, ..., x_n)$ una función en n variables, sus derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ son funciones en las variables x_i $i = 1, 2, ..., n$, que pueden derivarse nuevamente respecto de cada una de las variables

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{si} \quad i &\neq j \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \ \text{para}\ i &= 1, 2, .., n \end{aligned}$$

Teorema de Schwarz (el orden de derivación no importa)

Sea $z = f(x, y)$ una función real de dos variables. Si una de las dos derivadas parciales segundas $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ó $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ es continua, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Este teorema se generaliza para funciones de más de dos variables y para derivadas de orden mayor que dos.

Matriz hessiana

Sea $z = f(x, y)$ una función con derivadas parciales hasta orden 2. Se define la matriz hessiana de la función f en el punto (x, y):

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

Sea $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ una función en n variables, su matriz hessiana en un punto $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$ es:

$$Hf(\overline{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overline{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\overline{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\overline{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\overline{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\overline{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\overline{x}) \end{pmatrix}$$

Ejercicios correspondientes al tema 2

2.4. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1

Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y}$.

b) $f(x,y) = \dfrac{xy^2 - 2}{2y + 3}$.

c) $f(x,y) = \ln(2x^2 - y + 8)$.

d) $f(x,y) = e^{\frac{2}{xy-1}}$.

e) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x(y-2)}}{x^2 + y^2}$.

f) $f(x,y) = \sqrt{\ln(4 - x - 2y)}$.

g) $f(x,y) = e^{\frac{y^3}{x^2(y^2-2)}}$.

h) $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

i)$f(x,y,z) = \sqrt{3x^2 + y - 2z}$.

j) $f(x,y) = \ln\left(x^2 + 2y^2 + 3\right)$.

Ejercicio 2

Calcular y representar las curvas del nivel indicado, k, para las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = x^2 - y$, $k = 2$.

b) $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$, $k = -2$.

c) $f(x,y) = \ln(x + y)$, $k = 0$.

d) $f(x,y) = ye^{-x}$, $k = 1$.

e) $f(x,y) = \sqrt{y - 2x^2 + 8}$, $k = 0$.

f) $f(x,y) = \dfrac{2x - 1}{y + 3}$, $k = -1$.

Ejercicio 3

Escribir el vector gradiente de las funciones siguientes y valorar en el punto que se indica:

a) $f(x,y) = xe^{2x-y}$, en $(1,0)$.

b) $f(x,y) = \ln(2x^2 - y - 3)$, en $(1,-2)$.

c) $f(x,y) = \sqrt[3]{2x-3y}$, en $(1,-1)$.

d) $f(x,y) = \dfrac{y-1}{x-1}$, en $(2,2)$.

Ejercicio 4

Hallar las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones:

a) $f(x,y,z) = (x+3z)\sqrt{3y}$.

b) $f(x,y,z) = \dfrac{e^{-z}}{\sqrt{x+2y}}$.

c) $f(x,y,z) = \sqrt{x+3y+z^2}$.

d) $f(x,y,z) = \ln\left(3x^2yz\right)$.

Ejercicio 5

Dada la función $f(x,y,z) = x^2yz\ln(x^2+1)$, calcular $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}$.

Ejercicio 6

Obtener la matriz hessiana de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x,y) = e^x\ln(1+y)$, en $(0,0)$.

b) $f(x,y,z) = (x-2y+3z)^3$, en $(0,2,1)$.

c) $f(x,y,z) = (1+z)^2\ln(x+y)$, en $(2,-1,0)$.

d) $f(x,y) = \dfrac{3y}{x^2+4}$, en $(0,1)$.

Ejercicio 7

Una empresa de publicidad estima que el coste de poner x anuncios en televisión e y vallas publicitarias viene dado por la función $C(x,y) = x^2y + xy^2 + 200x + 900y$, en u.m. Actualmente el número de anuncios es de 40 y el de vallas publicitarias 50. Calcular e interpretar los costes marginales. Hallar la variación aproximada que experimenta el coste si:

a) el número de anuncios en TV aumenta en 3 y el número de vallas permanece constante.

b) el número de anuncios en TV disminuye en 3 y el número de vallas permanece constante.

c) el número de anuncios en TV se mantiene constante y el número de vayas aumenta en dos.

Ejercicio 8

La función de producción de una empresa es $Q(K, L) = 20(K^{1/2} + L^{3/5})$, en miles de unidades, donde K y L representan el capital invertido en u.m. y las horas de trabajo diario. El capital invertido es de 40000 u.m. y cada día se usan 1024 horas de trabajo.

a) Calcular e interpretar las productividades marginales.

b) Calcular la variación aproximada que experimenta la producción cuando el capital aumenta 4 u.m. y el trabajo no varía. ¿Cuánto vale ahora aproximadamente la nueva producción?

c) Calcular la variación aproximada que experimenta la producción cuando el capital no varía y el trabajo disminuye 2 horas.

2.5. Preguntas test

1. ¿Cuál de las siguientes funciones tiene el mismo dominio que la función $f(x, y)$?:

   a) $g(x, y) = \sqrt{f(x, y)}$.

   b) $g(x, y) = \dfrac{5}{f(x, y)}$.

   c) $g(x, y) = (f(x, y))^2$.

2. Sea una función $f(x, y)$. Señalar el enunciado correcto:

   a) Sus curvas de nivel son rectas paralelas cuando no se cortan.

   b) Sus curvas de nivel no se cortan.

   c) Sus curvas de nivel se pueden cortar si son rectas.

3. Sea $f(x, y)$ una función real de dos variables con parciales continuas hasta orden 6 y sea $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial x} = 2xy + 3x^2 - y^2$. Entonces $\dfrac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial y^3}$ vale:

   a) 2.

   b) no se puede calcular.

   c) 0.

4. La matriz hessiana de la función $f(x, y) = \ln(3x + 2y)$ en el punto $(1, -1)$ vale:

   a) $\begin{pmatrix} -9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} -9 & -6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

5. La derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$ se define como:

   a) $\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}$.

   b) $\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0, \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}$.

   c) $\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta z, y_0 + \Delta z, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}$.

6. El dominio de la función $f(x, y) = \ln((x-2)^2 + (y+1)^2)$ es:

   a) $Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y+1)^2 \geq 1\}$.

   b) $Dom(f) = \mathbb{R}^2 - \{(2, -1)\}$.

   c) $Dom(f) = \mathbb{R}^2 - \{(-2, 1)\}$.

7. La gráfica de la función $z = f(x, y)$ es el conjunto:

   a) $Gr(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in Dom(f), z = f(x, y)\}$.

   b) $Gr(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2, z = f(x, y)\}$.

   c) $Gr(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq f(x, y)\}$.

8. Sea $f(K, L)$ la función de producción de una empresa (en unidades), donde K es el capital invertido (en u.m.) y L la fuerza de trabajo (en horas diarias). Si la productividad marginal del trabajo vale 5 cuando $K = 13$ y $L = 20$, entonces aproximadamente la producción aumenta 5 unidades cuando:

   a) el capital pasa de 13 u.m. a 14 u.m. y la fuerza de trabajo de 20 horas diarias a 21 horas diarias.

   b) el capital pasa de 13 u.m. a 14 u.m. manteniéndose constante la fuerza de trabajo en 20 horas diarias.

   c) la fuerza de trabajo pasa de 20 horas diarias a 21 horas diarias manteniéndose constante el capital en 13 u.m.

9. Sea $f(x, y, z)$ una función continua con parciales continuas hasta orden 4. Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = e^x z - x^2 y^3$, entonces $\dfrac{\partial^4 f}{\partial z^2 \partial y^2}$:

   a) no se puede calcular con estos datos.

b) vale e^x.

c) vale 0.

10. Sea $f(x,y)$ una función continua en $\mathbb{R}^2$. Señalar la función continua en $\mathbb{R}^2$:

a) $\ln f(x,y)$.

b) $f(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$.

c) $\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$.

2.6. Soluciones de los ejercicios propuestos

Ejercicio 1

a) $Dom(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \geq y\right\}$.

b) $Dom(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -3/2\right\}$.

c) $Dom(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 2x^2 + 8\right\}$.

d) $Dom(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 1\right\}$.

e) $Dom(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(y-2) \geq 0\right\} - \{(0,0)\}$.

f) $Dom(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2y + x \leq 3\right\}$.

g) $Dom(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq \sqrt{2}, y \neq -\sqrt{2}\right\}$.

h) $Dom(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0 \text{ ó } y \neq 0\right\}$.

i) $Dom(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + y - 2z \geq 0\right\}$.

j) $Dom(f) = \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 3

a) $\nabla f(x,y) = \left(e^{2x-y}(1+2x), -xe^{2x-y}\right)$ y $\nabla f(1,0) = \left(3e^2, -e^2\right)$.

b) $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{4x}{2x^2-y-3}, \dfrac{-1}{2x^2-y-3}\right)$ y $\nabla f(1,-2) = (4,-1)$.

c) $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x-3y)^2}}, \dfrac{-1}{\sqrt[3]{(2x-3y)^2}}\right)$ y $\nabla f(1,-1) = \left(\dfrac{2}{3\sqrt[3]{25}}, \dfrac{-1}{\sqrt[3]{25}}\right)$.

d) $\nabla f(x,y) = \left(-\dfrac{1-y}{(x-1)^2}, \dfrac{1}{(x-1)}\right)$ y $\nabla f(2,2) = (-1,1)$.

Ejercicio 4

a) $f_x = \sqrt{3y}$, $f_y = \dfrac{3x+9z}{2\sqrt{3y}}$ y $f_z = 3\sqrt{3y}$.

b) $f_x = (-1/2)e^{-z}(x+2y)^{-3/2}$, $f_y = -e^{-z}(x+2y)^{-3/2}$ y $f_z = -e^{-z}(x+2y)^{-1/2}$.

c) $f_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3y+z^2}}$, $f_y = \dfrac{3}{2\sqrt{x+3y+z^2}}$ y $f_z = \dfrac{z}{\sqrt{x+3y+z^2}}$.

d) $f_x = \dfrac{2}{x}$, $f_y = \dfrac{1}{y}$ y $f_z = \dfrac{1}{z}$.

Ejercicio 5

$$2x\ln(x^2+1) + \frac{2x^3}{x^2+1}.$$

Ejercicio 6

a) $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $Hf(0,2,1) = \begin{pmatrix} -6 & 12 & -18 \\ 12 & -24 & 36 \\ -18 & 36 & -54 \end{pmatrix}$.

c) $Hf(2,-1,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

d) $Hf(0,1) = \begin{pmatrix} -3/8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7

El coste marginal respecto de x mide aproximadamente cuanto aumenta el coste cuando el número de anuncios aumenta una unidad y el número de vallas publicitarias se mantiene constante. Análogamente, el coste marginal respecto de y mide aproximadamente cuanto aumenta el coste cuando el número de vallas publicitarias aumenta en una unidad y el número de anuncios se mantiene constante.

a) El coste aumenta aproximadamente 20100 u.m.

b) El coste disminuye aproximadamente 20100 u.m.

c) El coste aumenta aproximadamente 13000 u.m.

Ejercicio 8

a)
$$\frac{\partial Q}{\partial K}(40000, 1024) = 0,05$$

Si el capital pasa de 40000 a 40001 y $L = 1024$ la producción aumenta aproximadamente en 50 unidades.

$$\frac{\partial Q}{\partial L}(40000, 1024) = 0,75$$

Si la fuerza de trabajo pasa de 1024 a 1025 y el capital se mantiene constante en 40000, la producción aumenta aproximadamente en 750 unidades.

b) Si $\Delta K = 4$, entonces $\Delta Q \approx 0,2$; es decir, 200 unidades. Por tanto,

$$Q(40004, 1024) \approx 5,48$$

es decir, aproximadamente 5480 unidades.

c) Si $\Delta L = -2$, entonces $\Delta Q \approx -1,5$; es decir, disminuye aproximadamente en 1500 unidades.

Soluciones de las preguntas test

1. c) 2.b) 3. a) 4. c) 5. a) 6. b) 7. a)

8. c) 9. a) 10. b)

3. Cálculo Integral

3.1. Integral indefinida. Cálculo de integrales indefindas

- $F(x)$ es una primitiva de una función continua $f(x)$ cuando verifca $F'(x) = f(x)$.
- Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces $F(x) + cte$ es el conjunto de todas las primitivas de $f(x)$. Este conjunto se denomina integral indefinida de la función $f(x)$.
- Se escribe:

$$\int f(x)dx = F(x) + cte$$

Se cumple que:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$
$$\int F'(x)dx = F(x) + cte$$

Reglas básicas de integración

1. Regla de la potencia:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + cte$$

   $(n \in R, n \neq -1)$.

2. Regla de la exponencial:

$$\int e^x dx = e^x + cte$$

3. Regla del logaritmo:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + cte$$

4. Linealidad:

   i)

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx,$$

   con $\lambda \in R$.

   ii)

$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

Otras reglas para calcular integrales indefinidas

El objetivo de estas reglas es transformar la integral dada en otra más sencilla donde aplicar las reglas básicas de integración.

- Cambio de variable:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \left\{ \begin{array}{c} t = g(x) \\ \dfrac{dt}{dx} = g'(x) \end{array} \right\} = \int ft)dt,$$

- Integración por partes (regla de derivación del producto de funciones)

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

3.2. Integral definida. Regla de Barrow

- Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo $[a, b]$.
- Sea $F(x)$ una primitiva cualquiera de $f(x)$.
- Se define:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad \text{Regla de Barrow}$$

El valor de la integral definida de una función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ es un número real. Cuando $f(x) \geq 0$ este número real es el valor del área limitada por el eje OX, las rectas $x = a$, $x = b$ y la curva $y = f(x)$.

Propiedades de la integral definida

Sea $f(x)$ una función continua

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$.
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
3. Linealidad:
   - $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.
   - $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
4. Aditividad respecto del intervalo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

con $c \in [a, b]$.

Integral impropia

Solo se estudia un tipo de integrales impropias, aquellas cuyo intervalo de integración es no acotado.

1. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, +\infty)$ y sea F(x) una de sus primitivas

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$$

2. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $(-\infty, b]$ y sea F(x) una de sus primitivas

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} F(b) - F(a)$$

3. Sea $f(x)$ una función continua en $\mathbb{R}$ y sea F(x) una de sus primitivas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

con c un número real cualquiera.

3.3. Integral doble

El concepto de integral definida de una función de una variable, continua en un intervalo cerrado y acotado, se extiende a una función de dos variables, continua en una región cerrada y acotada R del plano OXY, que se llama recinto, y da lugar al concepto de integral doble:

$$\int\int_R f(x,y)dxdy$$

El valor de la integral doble es un número real, que cuando $f(x,y) \geq 0$ es el valor del volumen del sólido situado verticalmente sobre el recinto R del plano OXY y bajo la superficie $z = f(x,y)$.

Propiedades de las integrales dobles

1. Linealidad:

   - $$\int\int_R \lambda f(x,y)dxdy = \lambda \int\int_R f(x,y)dxdy.$$

   - $$\int\int_R (f(x,y) \pm g(x,y))\, dxdy = \lambda \int\int_R f(x,y)dxdy \pm \int\int_R g(x,y)dxdy.$$

2. Aditividad respecto del recinto

   Si el recinto R se puede dividir en dos recintos R_1 y R_2 tal que $R = R_1 \cup R_2$ cumpliendo que $R_1 \cap R_2$ no tiene área, entonces:

   $$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int\int_{R_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{R_2} f(x,y)dxdy$$

Cálculo de la integral doble mediante integración unidimensional reiterada cuando el recinto es un rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados (rectángulo vertical)

Si R es un rectángulo de la forma $R = [a,b] \times [c,d]$, se tiene que:

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

MUY IMPORTANTE

También se pueden calcular integrales definidas o impropias (con intervalo de integración no acotado) de funciones definidas a trozos, siendo continua en cada uno de los trozos. Para ello, bastaría calcular la integral pedida como suma de integrales de funciones continuas en el intervalo correspondiente.

Ejemplo 1

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si} \quad -2 < x < 0 \\ 3 & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ -x & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

La integral

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (x^2 + 3)dx + \int_{0}^{2} 3dx + \int_{2}^{3} -xdx$$

Ejemplo 2

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si} \quad -2 < x < 0 \\ 3 & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ e^{-x} & \text{si} \quad 2 \leq x \end{cases}$$

La integral

$$\int_{-1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (x^2 + 3)dx + \int_{0}^{2} 3dx + \int_{2}^{+\infty} e^{-x}dx$$

Ejercicios correspondientes al tema 3

3.4. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int (\sqrt{x}+1)\,(x-\sqrt{x}+1)\ \mathrm{d}x.$

b) $\int \dfrac{2x^2+4x+2}{x+1}\,\mathrm{d}x.$

c) $\int \dfrac{1+4x+4x^2}{3x}\,\mathrm{d}x.$

d) $\int \dfrac{3+\sqrt{x}}{5\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

e) $\int \dfrac{(\ln x)^{3/2}}{x}\,\mathrm{d}x.$

f) $\int \dfrac{2x}{3x^2-12}\,\mathrm{d}x.$

g) $\int \dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{x})^4}{\sqrt{3x}}\,\mathrm{d}x.$

h) $\int \sqrt{x}\ln(3x)\,\mathrm{d}x.$

i) $\int (2x-1)e^{-2x}\,\mathrm{d}x.$

Ejercicio 2

Calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 \left(3e^x+\dfrac{1}{1+x}\right)\,\mathrm{d}x.$

b) $\int_1^4 \left(-2x^2-\dfrac{5}{\sqrt{x}}\right)\,\mathrm{d}x.$

c) $\int_{\ln 2}^1 \dfrac{1}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$

d) $\int_1^e x^{1/3}\ln x^2\,\mathrm{d}x.$

e) $\int_1^2 \dfrac{x^2}{(9-x^3)^{1/3}}\,\mathrm{d}x.$

Ejercicio 3

Calcular la primitiva de la función $f(x) = 3x^2 + 8x - 1$ que pasa por el punto $(1, 1)$.

Ejercicio 4

Calcular las siguientes integrales impropias:

a) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x$.

b) $\int_{-\infty}^{0} e^{2x} \, \mathrm{d}x$.

c) $\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2} \, \mathrm{d}x$.

d) $\int_{-\infty}^{0} e^{-x-2} \, \mathrm{d}x$.

Ejercicio 5

Calcular las siguientes integrales:

a) $\int\int_R (x+2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, con $R = [-1, 1] \times [2, 3]$.

b) $\int\int_R (2x - 3y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, con $R = [-2, 1] \times [1, 2]$.

c) $\int\int_R e^{x+y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, con $R = [-4, -3] \times [3, 4]$.

d) $\int\int_R xy(x+y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, con $R = [0, 1] \times [0, 2]$.

3.5. Preguntas test

1. Sean $F(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$ una primitiva de $f(x)$ y $G(x) = e^{2x} + 2$ una primitiva de $g(x)$. Entonces una primitiva de $f(x) + 2g(x)$ es:

   a) $\frac{3x}{x^2 - 1} + e^{2x} + 2$.

   b) $\frac{3x}{x^2 - 1} + 2e^{2x}$.

   c) $\frac{3x}{x^2 - 1} - 2e^{2x} - 2$.

2. Una primitiva de la función $f(x)$ es $3 + \ln(2x + 3)$, luego $f(x)$ es igual a:

   a) $\frac{3}{2x + 3}$.

   b) $\frac{1}{2x + 3}$.

   c) $\frac{2}{2x + 3}$.

3. La integral $\int_1^{+\infty} -\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+x}}$ es:
   a) convergente a 1.
   b) divergente a $+\infty$.
   c) divergente a $-\infty$.
4. Sea $F(x) = 4x^2 + 6x + 2$ una primitiva de $f(x)$. Entonces $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ vale:
   a) 18.
   b) 10.
   c) 28.
5. Si en la integral $\int f'(x)[f(x)]^{-2}\mathrm{d}x$ se hace el cambio de variable $f(x) = t$ queda:
   a) $\int(-1/2)t^{-2}\mathrm{d}t$.
   b) $\int t^{-2}\mathrm{d}t$.
   c) $\int -t^{-1}\mathrm{d}t$.
6. Si $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ se puede calcular como:
   a) $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.
   b) $2\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.
   c) $2\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$.

3.6. Soluciones de los ejercicios propuestos

Ejercicio 1

a) $\dfrac{2}{5}\sqrt{x^5} + x + cte.$

b) $x^2 + 2x + cte.$

c) $\dfrac{1}{3}\ln x + \dfrac{4}{3}x + \dfrac{2}{3}x^2 + cte.$

d) $\dfrac{6}{5}\sqrt{x} + \dfrac{1}{5}x + cte.$

e) $\dfrac{2\sqrt{(\ln x)^5}}{5} + cte.$

f) $\dfrac{\ln(x^2-4)}{3} + cte.$

g) $\dfrac{-2}{5\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} - \sqrt{x}\right)^5 + cte.$

h) $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln(3x) - \dfrac{2}{3}\right) + cte.$

i) $-xe^{-2x} + cte.$

Ejercicio 2

a) $3e - 3 + \ln 2$. b) -52. c) $\ln(e-1)$

d) $\frac{3}{8}e^{4/3} + \frac{9}{8}$. e) $\frac{3}{2}$.

Ejercicio 3

$F(x) = x^3 + 4x^2 - x - 3$.

Ejercicio 4

a) $+\infty$. b) $\frac{1}{2}$. c) 3. d) $+\infty$.

Ejercicio 5

a) 4. b) $-\frac{33}{2}$. c) $\frac{e^2 - 2e + 1}{e}$ d) 2.

Solución de las preguntas test

1. b) 2. c) 3. c) 4. a) 5. b) 6. c)

4. Cálculo matricial

4.1. Vectores de $\mathbb{R}^n$. Operaciones con vectores. Propiedades

Definición

Un vector de $\mathbb{R}^n$ es una $n-$úpla de números reales $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. El número real x_i que ocupa el lugar i, es la $i-$ésima componente del vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Propiedad: Dos vectores de $\mathbb{R}^n$ son iguales cuando son iguales componente a componente.

Suma de vectores de $\mathbb{R}^n$

Sean $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$e $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces:

$$\begin{aligned} \bar{x} + \bar{y} &= (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Propiedades

1. Asociativa: Sean $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$.

2. Conmutativa: Sean $\bar{x}$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$.

3. Existencia de elemento neutro: $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ cumpliendo $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$ con $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

4. Existencia de elemento opuesto: Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, existe otro vector, que denotamos como $-\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, cumpliendo $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$

Producto de un vector de $\mathbb{R}^n$ por un número real

Sea $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\alpha\bar{x} = \alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Propiedades

1. Distributiva respecto de la suma de vectores: $\alpha(\bar{x}+\bar{y}) = \alpha\bar{x}+\alpha\bar{y}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\bar{x}$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$
2. Distributiva respecto de la suma de números reales: $(\alpha+\beta)\bar{x} = \alpha\bar{x}+\beta\bar{x}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$
3. Asociativa: $(\alpha\beta)\bar{x} = \alpha(\beta\bar{x})$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$
4. Elemento unidad: $1 \in \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y se cumple $1\bar{x} = \bar{x}$.

El conjunto $\mathbb{R}^n$ con las operaciones anteriores junto con las propiedades se dice que tiene estructura de Espacio Vectorial.

Otras propiedades:

En $\mathbb{R}^n$ se cumplen:

1. $\alpha\bar{0} = \bar{0}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $0\bar{x} = \bar{0}$ con $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.
3. $\alpha\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ ó $\bar{x} = \bar{0}$.
4. $\alpha(-\bar{x}) = -(\alpha\bar{x}) = -\alpha\bar{x}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

4.2. Combinación lineal. Dependencia lineal

Definiciones

1. Se llama combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, ..., v_r \in \mathbb{R}^n$ a todo vector de $\mathbb{R}^n$ que se expresa de la forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r$, donde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r \in \mathbb{R}$.

   Los números reales $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ son los coeficientes de la combinación lineal.
2. Un vector $u \in \mathbb{R}^n$ es combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, ..., v_r \in \mathbb{R}^n$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r \in \mathbb{R}$ cumpliendo que $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r$.
3. Un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente (los vectores $v_1, v_2, ..., v_r$ son linealmente dependientes) cuando al menos uno de los vectores del conjunto se escribe como combinación lineal de los restantes.
4. Si los vectores de S no son linealmente dependientes son linealmente independientes (también se dice que el conjunto de vectores es linealmente independiente).

Propiedades

- Un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ que contenga el vector $\overline{0}$ es linealmente dependiente.
- Un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ que tenga dos vectores iguales o proporcionales es linealmente dependiente.
- Un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ que contenga un subconjunto de vectores linealmente dependiente es linealmente dependiente.

4.3. Matrices. Operaciones con matrices. Propiedades

Definición

Una matriz A de m filas y n columnas es un conjunto de $m \times n$ números reales distribuidos en m filas y n columnas. Se escribe:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$$

Denotamos por a_{ij} el número real situado en la fila i y en la columna j de la matriz A. Escribimos $M_{m\times n}$ para representar el conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas, $A \in M_{m\times n}$.

Algunos tipos de matrices

- Matriz cuadrada: Matriz que tiene igual número de filas que de columnas. Se escribe $A \in M_n$, y se dice que A tiene orden n. La *diagonal principal* está formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$.
- Matriz rectangular: Aquella matriz que no es cuadrada, es decir, tiene distinto número de filas que de columnas.
- Matriz triangular: Matriz triangular superior es la matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal y matriz triangular inferior es la matriz cuadrada, que tiene nulos todos los elementos situados por encima de la diagonal principal.
- Matriz diagonal: Si en una matriz cuadrada todos los elementos que no están situados en la diagonal principal son cero, se dice que la matriz es diagonal. Se

escribe:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = diag(d_1, d_2, ..., d_n)$$

- Matriz identidad: Es una matriz diagonal, cuyos elementos de la diagonal principal valen 1. La matriz identidad de orden n se denota por I_n.

- Matriz nula: Son aquellas matrices que tienen en todas sus posiciones 0.

- Matriz fila: Es una matriz de orden $1 \times n$, sólo tiene una fila.

- Matriz columna: Es una matriz de orden $n \times 1$, sólo tiene una columna.

- Matriz opuesta: Dada una matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, se escribe $-A$, a la matriz cuyos elementos son los opuestos de los correspondientes elementos de A, es decir $-A = (-a_{ij})_{m\times n}$.

- Matriz traspuesta de una matriz A de orden $m \times n$ es otra matriz denotada por A^t de orden $n \times m$ que se obtiene permutando filas por columnas o viceversa. Se verifica $A = (A^t)^t$.

- Matriz simétrica: Una matriz es simétrica cuando se cumple $A = A^t$.

Suma de matrices

Sean dos matrices del mismo orden $A, B \in M_{m\times n}$ entonces la matriz suma $A + B \in M_{m\times n}$ y se obtiene sumando los números situados en la misma posición.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = (b_{ij})_{m\times n}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

Propiedades

1. Asociativa: $(A+B)+C = A+(B+C)$ con $A, B, C \in M_{m\times n}$
2. Conmutativa: $A+B = B+A$ con $A, B \in M_{m\times n}$
3. Elemento neutro: En el conjunto de las matrices $M_{m\times n}$ existe la matriz nula tal que sumada con cualquier matriz de este conjunto resulta la misma matriz.
4. Matriz opuesta: Dada una matriz $A \in M_{m\times n}$ existe la matriz opuesta $-A \in M_{m\times n}$ tal que $A+(-A) = 0$.

Producto de una matriz por un número real

El producto de un número $\alpha \in \mathbb{R}^n$ por una matriz $A \in M_{m\times n}$ es otra matriz $m \times n$ obtenida multiplicando cada elemento de A por el número real α.

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha a_{ij})_{m\times n} \in M_{m\times n}$$

Propiedades

1. Distributiva respecto de la suma de matrices: Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A, B \in M_{m\times n}$, entonces se cumple que $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
2. Distributiva respecto de la suma de números: $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ donde α y $\beta \in \mathbb{R}$ y $A \in M_{m\times n}$
3. Asociativa: donde $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ con α y $\beta \in \mathbb{R}$ y $A \in M_{m\times n}$
4. Producto por la unidad: $1A = A$ con $A \in M_{m\times n}$.

El conjunto de la matrices $M_{m\times n}$ tiene estructura de espacio vectorial.

Producto de dos matrices

Para poder multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz que se multiplica coincida con el número de filas de la segunda matriz. Sean

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times p} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = (b_{ij})_{p\times n}$$

El elemento c_{ij} de la matriz producto AB, que tiene m filas y n columnas, es el resultado de multiplicar la fila i-ésima de la matriz A por la columna j-ésima de la matriz B, resultado:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Propiedades

(Siempre que se puedan realizar las operaciones que se indican)

1. Asociativa: $(AB)C = A(BC)$
2. Distributivas
$$\begin{cases} (A+B)C = AC + BC \\ A(B+C) = AB + AC \end{cases}$$
3. Existencia de identidades
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.
5. No conmutativa

Otras propiedades relacionadas con las operaciones con matrices

1. Sean $A, B \in M_{m\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} (A+B)^t = A^t + B^t \\ (\alpha A)^t = \alpha A^t \end{cases}$$
2. Sean $A \in M_{m\times p}$ y $B \in M_{p\times n}$ se cumple que $(AB)^t = B^t A^t$.

4.4. Determinantes. Propiedades. Cálculo de determinantes

Definición

La aplicación determinante asigna a cada matriz cuadrada $A \in M_n$ un número real que se denota por $\det(A) = |A|$.

Cálculo de determinantes de matrices de orden 1, 2 y 3

1. Determinante de una matriz de orden 1: Valor del número que forma la matriz.

2. Determinante de una matriz de orden 2

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3. Determinante de una matriz de orden 3 (Regla de Sarrus)

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}+ \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33}) \end{array}$$

4. **Generalización:**

   Para una matriz A cuadrada de orden n se define:

   - **Menor complementario del elemento** a_{ij} es el determinante de la matriz que resulta de eliminar en A la fila i y la columna j. Se denota como M_{ij}.
   - **El adjunto del elemento** a_{ij} se define como $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

   Sea $A \in M_n$, con $n > 1$. El determinante de A, $|A|$ o $\det(A)$, se puede calcular o bien por los elementos de una fila o por los elementos de una columna de la siguiente manera:

   - Por los elementos de la fila i-ésima

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \ldots + a_{in}\alpha_{in} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{ik} \end{aligned}$$

   - Por los elementos de la columna j-ésima

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \ldots + a_{nj}\alpha_{nj} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\alpha_{kj} \end{aligned}$$

Propiedades

Cuando se utiliza el término línea se hace referencia a fila o columna.

1. Si todos los elementos de una línea de una matriz son nulos, el determinante vale 0 (basta desarrollar el determinante por los elementos de dicha línea).

2. Sea $A \in M_n$ y B la matriz que resulta de multiplicar una línea por un número real λ, entonces $\det(B) = \lambda \det(A)$.

   Consecuencia: Dada la matriz $A \in M_n$ y la matriz $\lambda A \in M_n$ entonces $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

3. El determinante de una matriz y de su traspuesta son iguales $\det(A) = \det(A^t)$.

4. Sea una matriz $A \in M_n$ y sea B la matriz que resulta de sumar a una línea de A una combinación lineal de las restantes líneas paralelas, entonces $\det(A) = \det(B)$.

5. Sean $A, B \in M_n$, entonces $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

4.5. Matriz inversa

Definiciones

- Una matriz $A \in M_n$ se dice singular cuando $\det(A) = 0$. Se dice regular o no singular cuando $\det(A) \neq 0$.

- Una matriz $A \in M_n$ tiene inversa si existe otra matriz de orden n, que denotamos por A^{-1} verificando $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Teorema de caracterización

Una matriz $A \in M_n$ tiene inversa si y sólo si $|A| \neq 0$.

Ejercicios correspondientes al tema 4

4.6. Ejercicios

Ejercicio 1

Sean los vectores $u = (-1, 0, 3)$ y $v = (2, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Calcular:

$$3u - 2v \qquad \text{y} \qquad 3(u + v) - \frac{1}{2}v$$

Ejercicio 2

Sean los vectores $u = (-1, 0, 3)$, $v = (2, 1, 1)$ y $W = (0, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$. Expresar el vector $(5, 2, 0)$ como combinación lineal de los vectores dados.

Ejercicio 3

Estudiar la dependencia lineal de los siguientes conjuntos:

a) $\{(2, 1), (-4, -2)\}$.

b) $\{(2, 1, 1), (0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$.

c) $\{(-2, -2), (-4, -2), (1, 1)\}$.

d) $\{(2, 0, 0), (0, -2, 0), (0, 0, 1)\}$.

e) $\{(1, 1, 0), (0, -2, 1), (1, -1, 1), (0, 0, -1)\}$.

Ejercicio 4

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular cuando sea posible:

a) $A + B + C$.

b) $2A - B^t - 3C^t$.

c) $A(B + C)$.

d) $(A + B)C$.

e) $B((-3)C + 2A)$.

f) $A^t B^t C^t$.

Ejercicio 5

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular cuando sea posible:

a) $2A + B$. b) $A^t B C^t$. c) AC.

d) $(A+B)^t C$. e) $AB^t + C$. f) $B + AC$.

4.7. Preguntas test

1. Sean las matrices $A \in M_{4\times 3}$ y $B \in M_{3\times 7}$. Entonces AB
   a) no se puede calcular.
   b) es una matriz $M_{4\times 7}$.
   c) es una matriz $M_{7\times 4}$.
2. Sean las matrices $A \in M_{4\times 3}$ y $B \in M_{3\times 7}$. Entonces $B^t A^t$
   a) no se puede calcular.
   b) es una matriz $M_{4\times 7}$.
   c) es una matriz $M_{7\times 4}$.
3. Sean A y B dos matrices no nulas de orden 3. Señala la afirmación correcta:
   a) Siempre se cumple que $AB = BA$.
   b) Siempre se cumple $AB \neq 0$.
   c) Puede ocurrir que $AB = 0$.
4. Sean A y B dos matrices no nulas de orden 3. Señala la afirmación correcta:
   a) Puede ocurrir que $AB \neq BA$.
   b) Siempre se cumple $AB \neq 0$.
   c) Siempre $AB = BA$.
5. Sean u, v y $w = 2u - v$ tres vectores de $\mathbb{R}^n$. Entonces:
   a) $\{u, v, w\}$ es un conjunto de vectores linealmente dependiente.
   b) $\{u, v, w\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente.
   c) $\{u, v\}$ es un conjunto de vectores linealmente dependiente.

6. El vector $(2,-4,3)$ se expresa como combinación lineal de los $u_1=(1,-1,1)$ y $u_2=(0,2,-1)$ de forma única. Los coeficientes α_1 y α_2 de esta combinación lineal son

   a) $\alpha_1=2$ y $\alpha_2=-1$.

   b) $\alpha_1=-2$ y $\alpha_2=-1$.

   c) $\alpha_1=2$ y $\alpha_2=1$.

7. Sea A una matriz regular que cumple $A^2=A$. Entonces:

   a) $|A|=0$.

   b) $|A|=1$.

   c) $|A|=-1$.

8. Sea $\begin{vmatrix}\lambda & 0 & \lambda\\ \lambda & 0 & -\lambda\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=8$. El valor de λ sólo puede ser:

   a) $\lambda=2$.

   b) $\lambda=-2$.

   c) $\lambda=2$ ó $\lambda=-2$.

9. La matriz $\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \lambda\\ \lambda & 0 & -\lambda\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ es regular cuando:

   a) $\lambda=0$.

   b) $\lambda\neq 0$.

   c) $\lambda\in\mathbb{R}$.

10. Sean A, B y X matrices regulares de orden n. Entonces despejando X en la ecuación matricial $B^{-1}(X^{-1}A-BA)=A$ se obtiene:

    a) $X=(1/2)B^{-1}$.

    b) $X=2B^{-1}$.

    c) $X=2I$.

4.8. Solución de los ejercicios propuestos

Ejercicio 1

a) $3u-2v=(-7,-2,7)$. b) $(1,5/2,23/2)$.

Ejercicio 2

Los coeficientes de la combinación lineal son -1, 2 y -1, respectivamente.

Ejercicio 3

Todos los conjuntos son linealmente dependiente excepto el conjunto d).

Ejercicio 4

a) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 15 & -3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -17 & -5 \\ 22 & -10 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 12 & -2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5

a) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 16 & -12 & -6 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 14 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ d) no

e) no f) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 14 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Solución de las preguntas test

1. b) 2.c) 3. c) 4. a) 5. a) 6. a) 7. b) 8. c)

9. b) 10. a)

5. Formas cuadráticas

5.1. Valores y vectores propios

Definiciones

- Sea $A \in M_n$, se define el polinomio característico de la matriz A como el polinomio de grado n siguiente:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

- Un número real λ es un valor propio de una matriz $A \in M_n$ cuando existe $X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$ tal que $AX = \lambda X$. El vector X se dice que es un vector propio correspondiente al valor propio λ.

Cálculo de valores y vectores propios de una matriz $A \in M_n$

- La matriz $A \in M_n$ tiene como máximo n valores propios reales, que son las raíces del polinomio característico de A. Por tanto, si λ_0 es un valor propio de una matriz $A \in M_n$ se cumple que $p_A(\lambda_0) = 0$

- Para cada valor propio λ_0, sus correspondientes vectores propios $X \in \mathbb{R}^n$ se obtienen resolviendo el sistema lineal

$$AX = \lambda_0 X$$

  Este sistema tiene solución distinta de la solución nula, por definición de vector propio.

Para calcular los vectores propios correspondientes a los distintos valores propios de una matriz $A \in M_n$ se tienen que resolver tantos sistemas lineales como valores propios reales tenga la matriz A.

Propiedades de los vectores propios

Sean $A \in M_n$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$:

1. Si $\bar{x}$ es un vector propios correspondiente al valor propio λ y un número real $a \neq 0$, entonces $a\bar{x}$ también es un vector propio correspondiente a λ.

2. Si $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son vectores propios correspondientes al valor propio λ, entonces $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \neq 0$ es un vector propio correspondiente a λ.

3. Vectores propios correspondientes a valores propios distintos son linealmente independientes.

   El subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $L(\lambda) \equiv \{$vectores propios correspondientes al valor propio λ, junto el vector cero$\}$ se denomina subespacio propios correspondientes a λ.

Diagonalización de matrices simétricas

Sea $A \in M_n$ una matriz simétrica. Se cumple:

1. Su polinomio característico tiene n raíces reales. La matriz A tiene n valores propios: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

2. Si un valor propio tiene multiplicidad $r > 1$, entonces se pueden calcular r vectores propios linealmente independientes correspondientes a dicho valor propio.

3. La matriz simétrica A tiene n vectores propios linealmente independientes, $v_1, v_2, ..., v_n$, correspondientes a sus n valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

4. La matriz A es diagonalizable, es decir, se puede encontrar *una matriz diagonal* D (en la diagonal se colocan los valores propios de A) y *una matriz de paso* P que cumplen $P^{-1}AP = D$. Las columnas de la matriz de paso P son los vectores propios de A linealmente independientes, colocados según se hayan dispuesto los valores propios en la matriz D.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; \qquad P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}; \qquad D = P^{-1}AP$$

Propiedad

Sea A una matriz simétrica de orden n y sea D una matriz diagonal correspondiente a A.

Se cumple que

$$|A| = |D| = \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n.$$

donde λ_i, con $i = 1, 2, ..., n$ son los valores propios de A

5.2. Formas cuadrátricas. Clasificación

Definiciones

- Una forma cuadrática de n variables es un polinomio homogéneo de grado dos en las n variables.
    - Por ejemplo, una forma cuadrática de dos variables:

$$Q(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy$$

    - Una forma cuadrática de tres variables:

$$Q(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

- Expresión matricial de una forma cuadrática

$$\begin{aligned} Q(X) &= (x_1, x_2, ..., x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= X^t A X \end{aligned}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = A^t$$

la matriz asociada a la forma cuadrática.

Clasificación de una forma cuadrática

Sea $Q(X) = X^tAX$ una forma cuadrática en n variables. Atendiendo al signo de los valores reales que toma, la forma cuadrática es (se clasifica):

1. Definida positiva cuando $Q(X) = X^tAX > 0$ para todo $X \neq \bar{0}$.
2. Definida negativa cuando $Q(X) = X^tAX < 0$ para todo $X \neq \bar{0}$.
3. Semidefinida positiva cuando $Q(X) = X^tAX \geq 0$ y existe algún $X \neq \bar{0}$, $Q(X) = 0$.
4. Semidefinida negativa cuando $Q(X) = X^tAX \leq 0$ y existe algún $X \neq \bar{0}$, $Q(X) = 0$.

5. Indefinida cuando existen $X \in \mathbb{R}^n$ tales que $Q(X) > 0$ y $Q(X) < 0$.

- Si una forma cuadrática solo tiene términos al cuadrado resulta fácil de clasificar.
- Una expresión canónica de una forma cuadrática:

$$Q(X) = X^t AX = \bar{X}^t D\bar{X} = \lambda_1 \bar{x}_1 + ... + \lambda_n \bar{x}_n$$

  donde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ son los valores propios de A y $\bar{X}$ representa las nuevas variables respecto de las que la forma cuadrática tiene esa expresión canónica.

Clasificar una matriz simétrica consiste en clasificar la forma cuadrática correspondiente a la matriz dada.

5.3. Determinación del signo de una forma cuadrática

Criterio de los valores propios

Sea $Q(X) = X^t AX$ una forma cuadrática en n variables. Sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ los valores propios de A. Entonces:

1. $Q(X)$ es definida positiva $\Leftrightarrow$ todos los valores propios de A son positivos ($\lambda_i > 0, i = 1, 2, ..., n$).

2. $Q(X)$ es definida negativa $\Leftrightarrow$ todos los valores propios de A son negativos ($\lambda_i < 0, i = 1, 2, ..., n$).

3. $Q(X)$ es semidefinida positiva $\Leftrightarrow$ algún o algunos de los valores propios de A es 0 y los restantes son positivos.

4. $Q(X)$ es semidefinida negativa $\Leftrightarrow$ algún o algunos de los valores propios de A es 0 y los restantes son negativos.

5. $Q(X)$ es indefinida $\Leftrightarrow$ la matriz A tiene valores propios positivos y valores propios negativos.

Criterio de los menores principales dominantes para clasificar formas cuadráticas

Definición de menor principal dominante

Sea una matriz $A \in M_n$. Los menores principales de A son los determinantes de las matrices obtenidas de la intersección de r filas y las mismas r columnas. Por ejemplo, $|A_{13}|$es el menor obtenido de la intersección de la primera y tercera filas y la primera y tercera columnas de la matriz A.

De los menores principales, se llaman dominantes a los n menores principales siguientes:

$$|A_1| \quad = \quad a_{11}, |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} ... |A_n| = |A|$$

Teorema: Criterio de menores principales dominantes

- $Q(X) = X^t AX$ es definida positiva, si y sólo si, todos los menores principales dominantes de A son positivos.

- $Q(X) = X^t AX$ es definida negativa, si y sólo si, todos los menores principales dominantes de A van alternando su signo con $|A_1| < 0$.

- Si $|A| = 0$ y el resto de los menores principales dominantes son positivos, entonces $Q(X) = X^t AX$ es semidefinida positiva.

- Si $|A| = 0$ y el resto de los menores principales dominantes van alternando su signo con $|A_1| < 0$ entonces $Q(X) = X^t AX$ es semidefinida negativa.

- Si $|A| \neq 0$ y la forma cuadrática no es definida, entonces $Q(X) = X^t AX$ es indefinida.

5.4. Formas cuadráticas restringidas

Forma cuadrática restringida

Dada una forma cuadrática $Q(X) = X^t AX$ en n variables, y dado un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ resulta de interés conocer el signo que tiene la forma cuadrática Q cuando se valora sobre los elementos de S.

Signo de una forma cuadrática con una restricción lineal

Sea $Q(X) = X^t AX$ una forma cuadrática en n variables y sea $S \in \mathbb{R}^n$ el subconjunto definido como

$$S = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n = 0\}$$

Se quiere determinar el signo de la forma cuadrática Q restringida al conjunto S. Se escribe:

$$\begin{array}{c}\text{Clasificar } Q(X) = X^t AX \\ \text{s. a } b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n = 0\end{array}$$

Para ello se tienen dos métodos:

1. **Método de sustitución:** Se despeja en la restricción una variable en función de las restantes y se sustituye en la forma cuadrática. Se obtiene así una forma cuadrática en una variable menos, que resulta más sencilla de clasificar utilizando valores propios o menores principales dominantes.

2. **Criterio de los menores principales orlados:**

Definición de menor orlado

Los menores principales orlados de una forma cuadrática restringida son los menores principales de la matriz siguiente, empezando por $|A_2|$, llamada matriz orlada de la forma cuadrática restringida:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left|\bar{A}_2\right| = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \left|\bar{A}_3\right| = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} ... \left|\bar{A}_n\right| = \left|\bar{A}\right|$$

- Si todos los menores principales orlados son negativos, entonces la forma cuadrática $Q/_S$ restringida es definida positiva
- Si todos los menores principales orlados van alternando su signo siendo $\left|\bar{A}_2\right| > 0$, entonces la forma cuadrática restringida es definida negativa.

- En cualquier otra situación se debe de recurrir a la sustitución.

Ejercicios correspondientes al tema 5

5.5. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1

Hallar los valores propios de las matrices siguientes:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2

Calcular vectores propios correspondientes a los valores propios de la matrices del ejercicio anterior.

Ejercicio 3

Diagonalizar la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4

Clasificar las siguientes formas cuadráticas utilizando menores principales dominantes o valores propios y escribir una expresión diagonal:

a) $Q(x, y) = 4x^2 + 7y^2 + 4xy$.

b) $Q(x, y, z) = -x^2 - 4y^2 + 4xy - 3z^2$.

c) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4xy - 3z^2$.

d) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xy + 3z^2$.

Ejercicio 5

Determinar el signo de las siguientes matrices:

$$a)\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \qquad b)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix} \qquad c)\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

Ejercicio 6

Determinar el signo de la matriz hessiana de la función $Q(K, L) = K^{1/2}L^{2/3}$, cuando $K > 0$ y $L > 0$.

Ejercicio 7

Sea la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + az^2 + 2yz$. Clasificarla para valores del parámetro $a > 0$.

Ejercicio 8

Clasificar la forma cuadrática $Q(X) = X^tAX$, con $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$, restringida al subconjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0\}$.

Ejercicio 9

Clasificar la forma cuadrática

$$Q(X) = X^tAX = X^t\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 4 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}X$$

restringida al subconjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\}$.

5.6. Preguntas test

1. Sea $Q(X) = X^tAX$ una forma cuadrática en tres variables que verifica $Q(1, 2, 0) = 3$, $Q(3, 4, 2) = -1$ y $Q(2, 6, -1) = 0$, entonces la forma cuadrática es:

   a) indefinida.

   b) semidefinida negativa.

   c) semidefinida positiva.

2. El determinante de una matriz de orden 3 es negativo, entonces la matriz no puede ser:

   a) definida positiva.

   b) definida negativa.

   c) indefinida.

3. El determinante de una matriz de orden 3 vale cero, entonces la matriz:

   a) puede ser definida positiva.

   b) puede ser semidefinida.

   c) no puede ser indefinida.

4. Los menores principales de una matriz $A \in M_4$ son $|A_1| = -2$, $|A_2| = 1$, $|A_3| = -2$ y $|A| = 0$, entonces la matriz A es:

   a) indefinida.

   b) semidefinida negativa.

   c) definida negativa.

5. La forma cuadrática $Q(x, y, z) = 3x^2 - 2y^2 - z^2$ bajo la restricción lineal $x = 0$ es:

   a) definida negativa.

   b) semidefinida negativa.

   c) indefinida.

6. Sea $A \in M_3$ y sea $\lambda = -2$ uno de sus valores propios. Si $\det(A) < 0$, entonces la matriz A:

   a) es definida negativa.

   b) puede ser semidefinida negativa.

   c) puede ser definida negativa o indefinida.

7. Los valores propios de la matriz de una forma cuadrática en 4 variables son

   $\lambda_1 = -2$(doble), $\lambda_2 = 0$ y λ_3 desconocido. Entonces la forma cuadrática es

   a) indefinida si, y solo si, $\lambda_3 = 0$.

   b) indefinida si, y solo si, $\lambda_3 > 0$.

   c) indefinida.

8. La forma cuadrática $Q(x, y, z) = -(x - y + 2z)^2$ es:

   a) definida negativa.

   b) semidefinida negativa.

   c) indefinida.

9. Sea $A \in M_3$ simétrica y sean λ_1, λ_2 y λ_3 sus valores propios. Entonces:

   a) Si $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, entonces A es indefinida.

   b) Si $\lambda_1 = 0$, entonces A es semidefinida positiva o semidefinida negativa.

   c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, entonces A no es indefinida.

10. Sea $Q(X) = X^t AX$ una forma cuadrática en tres variables y sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por la igualdad $x - y = 0$. Entonces la forma cuadrática restringida a este subconjunto $Q/_S$

    a) no puede ser definida positiva.

    b) es indefinida.

    c) puede ser definida positiva.

5.7. Soluciones de los ejercicios propuestos

Ejercicio 1

a) $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$.

b) $\lambda_1 = 1$.

c) $\lambda_1 = 1$(doble) y $\lambda_2 = -2$.

Ejercicio 2

Por ejemplo, los siguientes vectores propios:

a) Correspondientes a $\lambda_1 = -1$, $v_1 = (2, 0)$ y a $\lambda_2 = 3$, el vector $v_2 = (1, -2)$.

b) Correspondiente a $\lambda_1 = 1$, por ejemplo $(0, 3, 0)$.

c) Correspondientes a $\lambda_1 = 1$(doble), los vectores propios $(3, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ y correspondiente a $\lambda_2 = -2$ el vector propio $(0, 2, 2)$.

Ejercicio 3

Una matriz diagonal correspondiente a la matriz A es $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, siendo una de las matrices de paso P correspondiente a esta matriz diagonal:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que cumple que $D = P^{-1}AP$.

Ejercicio 4

a) Definida positiva. Una forma diagonal sería: $Q(\bar{x}, \bar{y}) = 8\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2$.

b) Semidefinida negativa. Una forma diagonal sería: $Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = -5\bar{x}^2 - 3\bar{z}^2$.

c) Indefinida. Una forma canónica sería: $Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = -\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 - 3\bar{z}^2$.

d) Semidefinida positiva. Una forma canónica sería: $Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 2\bar{x}^2 + 3\bar{z}^2$.

Ejercicio 5

a) Semidefinida negativa.

b) Semidefinida positiva.

c) Indefinida.

Ejercicio 6

Indefinida.

Ejercicio 7

- Si $a \in (0, 1)$ la forma cuadrática es indefinida.
- Si $a = 1$ la forma cuadrática es semidefinida positiva.
- Si $a > 1$ la forma cuadrática es definida positiva.

Ejercicio 8

Semidefinida negativa.

Ejercicio 9

Indefinida.

Solución de las preguntas tipo test

1. a)	2.a)	3. b)	4. b)	5. a)	6. c)	7. b)
8. b)	9. c)	10. c)				

6. Introducción a las técnicas de optimización

6.1. Elementos de un problema de optimización. Extremos relativos y absolutos

Definiciones

- Un problema de optimización es un problema de maximización o de minimización de una función de n variables $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, donde $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ pertenece a un subconjunto F de $Dom(f)$ y trata de encontrar el conjunto de puntos $\bar{x} \in F$ donde la función alcanza su valor óptimo (máximo o mínimo).
- Un problema de optimización (P) se escribe como:

$$\text{Optimizar (maximizar o minimizar) } z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$\text{sujeta a (s.a): } (x_1, x_2, ..., x_n) \in F$$

  donde $f : Dom(f) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $F \subset Dom(f)$.

- Elementos de un problema de optimización:
  - El subconjunto $F \subset Dom(f)$ se llama conjunto factible, admisible, de alternativas, de soluciones o de posibilidades.
  - La función f que valora cada vector $(x_1, x_2, ..., x_n) \in F$ es la función objetivo del problema (P).
  - Las variables independientes $x_1, x_2, ..., x_n$ se llaman variables de elección del problema (P).
  - Cada vector $(x_1, x_2, ..., x_n) \in F$ es una solución factible del problema (P).
  - Cuando $F = Dom(f)$ el problema (P) se dice de optimización sin restricciones y en el resto de los casos se trata de un problema de optimización con restricciones.
- Dado un problema de optimización (P), se denota como $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ cualquier solución factible de F. Sea $\overline{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in F$ una solución factible. Entonces:

- Se dice que el problema (P) tiene en el punto $\overline{x}_0 \in F$ un mínimo local o relativo si para soluciones $\overline{x}$ próximas a $\overline{x}_0$ se cumple que $f(\overline{x}_0) \leq f(\overline{x})$.
- Se dice que el problema (P) tiene en el punto $\overline{x}_0 \in F$ es un máximo local o relativo si para soluciones $\overline{x}$ próximas a $\overline{x}_0$ se cumple que $f(\overline{x}_0) \geq f(\overline{x})$.
- Se dice que el problema (P) tiene en el punto $\overline{x}_0 \in F$ un mínimo global o absoluto si para todo $\overline{x} \in F$ se cumple que $f(\overline{x}_0) \leq f(\overline{x})$.
- Se dice el problema (P) tiene en el punto $\overline{x}_0 \in F$ es un máximo global o absoluto si para todo $\overline{x} \in F$ se cumple que $f(\overline{x}_0) \geq f(\overline{x})$

6.2. Resolución gráfica de un problema de optimización de dos variables

Un problema de optimización (P) de dos variables se puede resolver gráficamente dibujando en el plano $\mathbb{R}^2$ el conjunto factible F y algunas curvas de nivel de la función objetivo.

Se procede del siguiente modo:

1. Se representa el conjunto factible, F, en el plano.
2. Se representan curvas de nivel de la función objetivo que corten a F.
3. Si el problema es de minimización, el conjunto de puntos intersección de la curva de nivel de menor nivel con F es la solución del problema.

   Análogamente si se trata de un problema de máximización la solución se encontrará en el punto o los puntos en los que intersecan la curva de mayor nivel con F.

6.3. Teorema de Weierstrass para funciones de varias variables

Definiciones

- Un conjunto de $\mathbb{R}^n$ es cerrado cuando contiene a su frontera (analíticamente se expresa mediante una igualdad).
- Un conjunto S de $\mathbb{R}^n$ es acotado cuando se puede encontrar un número real $k > 0$ tal que cualquier vector $(x_1, x_2, ..., x_n) \in S$ cumple que el valor absoluto de todas sus componentes es menor que k, es decir $|x_i| < k$, para todo $i = 1, 2, ..., n$

Teorema

Sea un problema de optimización:

$$\begin{array}{rl} \text{Optimizar} & f(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \text{s. a} & (x_1, x_2, ..., x_n) \in F \end{array} \qquad \text{(P)}$$

Si el conjunto factible $F \subset Dom(f)$ es un conjunto cerrado y acotado, y f es una función continua en F, entonces el problema tiene al menos un máximo y un mínimo absolutos en el conjunto F.

6.4. Conjuntos convexos. Concavidad de funciones de varias variables

Definiciones

- El segmento cerrado de extremos los vectores $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ es el conjunto denotado por $[\overline{x}, \overline{y}]$:

$$[\overline{x}, \overline{y}] = \{t\overline{x} + (1-t)\overline{y} \in \mathbb{R}^n : 0 \leq t \leq 1\}$$

- Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice convexo cuando si $\overline{x}, \overline{y} \in A$, el segmento cerrado que une ambos puntos está incluido en el conjunto A.

- Hiperplano: Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $c = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector no nulo. Un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ es el subconjunto

$$\Pi = \{\overline{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : c_1 x_1 + \cdots c_n x_n = a\}$$

- Semiespacio: Dado el hiperplano definido anteriormente se llaman semiespacios cerrados a los subconjuntos

$$\begin{aligned} \Pi^+ &= \{\overline{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \geq a\} \\ \Pi^- &= \{\overline{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \leq a\} \end{aligned}$$

Propiedades

- Los hiperplanos y semiespacios son conjuntos convexos.

- La intersección de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo.

Definición

Sean S un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ y $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua con parciales continuas hasta orden 2 en el interior del conjunto S. Entonces:

1. La función f es convexa en S si y sólo si $Hf(\overline{x})$ es definida positiva o semidefinida positiva para todo $\overline{x}$ perteneciente al interior de S.
2. La función f es cóncava en S si y sólo si $Hf(\overline{x})$ es definida negativa o semidefinida negativa para todo $\overline{x}$ perteneciente al interior de S.

Propiedades

1. Las funciones lineales son cóncavas y convexas.
2. Sean $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, $a \in \mathbb{R}$ y $f : S \to \mathbb{R}$ una función continua.
   - Si f es convexa en S, entonces el conjunto $S_a = \{\overline{x} \in S : f(\overline{x}) \leq a\}$ es convexo.
   - Si f es cóncava en S, entonces el conjunto $S^a = \{\overline{x} \in S : f(\overline{x}) \geq a\}$ es convexo.

Ejercicios correspondientes al tema 6

6.5. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1

Resolver gráficamente los siguientes problemas de optimización:

a) $$\text{Max. } f(x,y) = 6x + y \quad \text{s.a} \begin{cases} 2x + y \leq 6 \\ x + y \geq 1 \\ y \leq 3 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

b) $$\text{Opt. } f(x,y) = x^2 - y \quad \text{s.a } y \leq 2$$

c) $$\text{Opt. } f(x,y) = 2x + y \quad \text{s.a } -x^2 + 4x - y \geq 0$$

d) $$\text{Opt. } f(x,y) = 5x + 2y \quad \text{s.a} \begin{cases} x - y \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases}$$

e) $$\text{Opt. } f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 \quad \text{s.a} \begin{cases} x^2 - y \leq 0 \\ x + y \leq 2 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

f) $$\text{Opt. } f(x,y) = x + y \quad \text{s.a} \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

g) $$\text{Min. } f(x,y) = xy \quad \text{s.a} \begin{cases} x + y \leq 6 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2

Decir qué problemas de optimización del ejercicio anterior verifican las hipótesis del teorema de Weierstrass.

Ejercicio 3

Estudiar la concavidad de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \sqrt{2x + y}$.

b) $f(x,y) = e^{x-2y}$.

c) $f(x, y) = \ln(2x + 3y)$.

d) $f(x, y) = x^2 y^4$.

e) $f(x, y) = x^2 + y^2 + \ln x + \ln y$.

Ejercicio 4

Estudiar la concavidad de las siguientes funciones:

a) $f(x, y, z) = 3x + \ln y - e^z$.

b) $f(x, y, z) = x^4 + e^y - 3z$.

c) $f(x, y, z) = e^x + \ln y + z^2$.

6.6. Solución de los ejercicios propuestos

Ejercicio 1

a) El problema tiene un máximo absoluto en $(3, 0)$ de valor 18.

b) El problema no tiene máximo absoluto pero tiene un mínimo absoluto en $(0, 2)$ de valor -2.

c) El problema no tiene mínimo absoluto. Tiene un máximo absoluto en $(3, 3)$ de valor 9.

d) El problema no tiene máximo absoluto pero tiene un mínimo absoluto en $(0, 0)$ de valor 0.

e) El mínimo absoluto se alcanza en $(1, 1)$ de valor 0 y el problema tiene dos máximos absolutos en $(0, 0)$ y $(0, 2)$ de valor 2.

f) El problema tiene dos mínimos absolutos en $(1, 0)$ y $(0, 1)$ de valor 1 y un máximo absoluto en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ de valor $\sqrt{2}$.

g) El problema tiene dos segmentos donde la función objetivo alcanza el menor valor, 0. Se trata de los segmentos:

$$\left\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 6\right\} \text{ y } \left\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 6\right\}$$

Además, el problema tiene un máximo absoluto en $(3, 3)$ de valor 9.

Ejercicio 2

Se verifican las hipótesis del teorema de Weierstrass en los problemas a), e), f) y g).

Ejercicio 3

a) La función es cóncava en su dominio.

b) La función es convexa en su dominio.

c) La función es cóncava en su dominio.

d) La función no es ni cóncava ni convexa.

e) En el subconjunto convexo $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ e } y > \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ la función es convexa.

   En el subconjunto convexo $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ e } 0 < y < \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ la función es cóncava.

   En todo su dominio la función no es ni cóncava ni convexa.

Ejercicio 4

a) La función es cóncava en su dominio.

b) La función es convexa en su dominio.

c) La función no es ni cóncava ni convexa.

7. Optimización de funciones de varias variables

7.1. Planteamiento del problema

- **Un problema de optimización (P) es sin restricciones** cuando el conjunto factible es el dominio económico o matemático de la función objetivo. Se formula como:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Optimizar } f(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \text{sujeta a } (x_1, x_2, ..., x_n) \in Dom(f) \end{array}\right\} (P)$$

  Normalmente se escribe: *Optimizar (maximizar o minimizar)* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. En esta situación los extremos (máximos o mínimos) relativos y absolutos del problema (P) son los extremos relativos y absolutos de la función $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

  Nota: En todo el tema La función f se considera continua en su dominio $Dom(f)$ y con derivadas parciales hasta orden dos continuas en el interior de $Dom(f)$.

- **Un problema de optimización se dice con restricciones** cuando el conjunto factible es un subconjunto propio del dominio (matemático o económico) de la función objetivo. Si el conjunto factible viene dado por una única ecuación de igualdad $g(x_1, x_2, ..., x_n) = c$, con $c \in \mathbb{R}$, se dice que se trata de un problema de optimización con una restricción de igualdad y el problema (P) se escribe:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Optimizar} & z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \text{sujeta a} & g(x_1, x_2, ..., x_n) = c \end{array}\right\} \qquad \text{(P)}$$

  con $f : Dom(f) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : Dom(g) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y el conjunto factible

$$F = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in Dom(f) : g(x_1, x_2, ..., x_n) = c\}.$$

  Nota: La función g es continua en su dominio y tiene parciales continuas en el interior de su dominio.

7.2. Optimización sin restricciones: Condición necesaria y suficiente de extremo relativo. Optimalidad global

Definición

Un punto $\overline{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in Dom(f)$ es **un punto crítico** o estacionario de una función $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ cuando se cumple que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{x}_0) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}_0) = 0$$

es decir, cuando el vector gradiente es nulo, $\nabla f(\overline{x}_0) = \overline{0}$.

Teorema (condición de primer orden)

Si $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ tiene un extremo relativo en un punto $\overline{x}_0$ perteneciente al interior del $Dom(f)$ entonces $\overline{x}_0$ es un punto crítico de f.

Por tanto, solo en los puntos críticos de f puede haber extremos relativos.

Teorema (condición de segundo orden)

Sea $\overline{x}_0 \in Dom(f)$ un punto crítico de la función $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ y sea $Hf(\overline{x}_0)$ la matriz hessiana de la función en el punto crítico. Entonces:

- Si $Hf(\overline{x}_0)$ es definida positiva, entonces la función tiene un mínimo relativo en el punto crítico.

- Si $Hf(\overline{x}_0)$ es definida negativa, entonces la función tiene un máximo relativo en el punto crítico.

- Si $Hf(\overline{x}_0)$ es indefinida, entonces la función no tiene ni un mínimo ni un máximo relativo en el punto crítico (se trata de un punto de silla).

- Si $Hf(\overline{x}_0)$ es semidefinida se tiene un caso dudoso.

  a) Cuando $Hf(\overline{x}_0)$ es semidefinida positiva la función no tiene un máximo relativo en $\overline{x}_0$. La función puede tener en x_0 un mínimo relativo o un punto de silla.

  b) Cuando $Hf(\overline{x}_0)$ es semidefinida negativa la función no tiene un mínimo relativo en $\overline{x}_0$. La función puede tener en x_0 un máximo relativo o un punto de silla.

Definición

Todo punto crítico que no es extremo relativo de una función se dice que es un punto de silla.

Teorema (optimalidad global -optimización de funciones convexas o de funciones cóncavas-)

Sea $\overline{x}_0 \in Dom(f)$ un punto crítico de una función $z = f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ continua en su dominio, $Dom(f)$, que es un conjunto convexo (no necesariamente todos los puntos son puntos interiores). Entonces:

1. Si $Hf(\overline{x})$ es definida positiva o semidefinida positiva en el interior del $Dom(f)$, entonces en el punto crítico la función tiene un mínimo absoluto.
2. Si $Hf(\overline{x})$ es definida negativa o semidefinida negativa en el interior del $Dom(f)$, entonces en el punto crítico la función tiene un máximo absoluto.

7.3. Optimización de funciones de varias variables con una restricción de igualdad

Método de sustitución

Sea el problema de optimización

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Optimizar} & z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \text{sujeta a} & g(x_1, x_2, ..., x_n) = c \end{array}\right\} \qquad \text{(P)}$$

El método de resolución de sustitución de un problema (P) consiste en despejar en la restricción $g(x_1, x_2, ..., x_n) = c$, si es posible, una variable en función de las restantes y sustituir dicha variable en la función objetivo de (P) resultado un problema de optimización sin restricciones en una variable menos que el problema de partida y que se resuelve aplicando las técnicas dadas en la sección anterior.

Método de los multiplicadores de Lagrange. Condición de primer y segundo orden de extremo relativo

Dado el problema (P) se construye su función lagrangiana

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda(g(x_1, ..., x_n) - c)$$

y se aplica el teorema siguiente:

Teorema de los multiplicadores de Lagrange: Condición de primer orden

Sea $\overline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ un extremo relativo del problema (P). Si $\nabla g(\overline{x}^0) \neq 0$, entonces existe un único $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ verificando que $(\overline{x}^0, \lambda_0)$ es un punto crítico de la función Lagrangiana $L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda)$.

Cálculo de los puntos críticos de L. Condición de primer orden de extremo relativo

$$\left.\begin{array}{c} L_{x_1} = f_{x_1} - \lambda g_{x_1} = 0 \\ L_{x_2} = f_{x_2} - \lambda g_{x_2} = 0 \\ \vdots \\ L_{x_n} = f_{x_n} - \lambda g_{x_n} = 0 \\ L_\lambda = -g(x_1, x_2, ..., x_n) + c = 0 \\ (L_\lambda = 0 \text{ es la restricción}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{se obtienen soluciones:} \\ (\bar{x}, \bar{\lambda}) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \ \bar{x}_n, \ \bar{\lambda}) \\ \\ \text{(puntos críticos de (P) o de } L) \end{array}\right.$$

cuyas soluciones son de la forma $(\bar{x}, \bar{\lambda}) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n, \bar{\lambda})$, que son los puntos críticos de (P) o de L.

Comentarios:

- Se llama *multiplicador de Lagrange* asociado a $\overline{x}_0$ al número real λ_0 tal que $(\overline{x}_0, \lambda_0)$ es un punto crítico de L.
- Si $(\overline{x}_0, \lambda_0)$ es un punto crítico de L, entonces $\bar{x_0}$ es un candidato a óptimo local de (P).
- La condición $L_\lambda = 0$ coincide con la restricción $g(x_1, ..., x_n) = c$.

Definición

Se llama función lagrangiana reducida correspondiente a un multiplicador de Lagrange λ_0 a la expresión:

$$\hat{L}(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) - \lambda_0(g(x_1, ..., x_n) - c)$$

Teorema (condiciones suficientes de optimalidad global

Sea el problema optimización:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Optimizar} & z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \text{sujeta a} & g(x_1, x_2, ..., x_n) = c \end{array}\right\} \qquad \text{(P)}$$

cuyo conjunto factible $F = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in Dom(f) : g(x_1, x_2, ..., x_n) = c\}$ está contenido en un subconjunto convexo A de $Dom(f) \bigcap Dom(g)$.

Sean $(\overline{x}_0, \lambda_0)$ un punto crítico de la función lagrangiana de (P) y $\hat{L}(\bar{x})$ la función lagrangiana reducida asociada al multiplicador de Lagrange λ_0. Entonces

i) $\hat{L}(\overline{x})$ es cóncava en $A \Rightarrow \overline{x}_0$ es un máximo absoluto del problema (P).

ii) $\hat{L}(\overline{x})$ es convexa en $A \Rightarrow \overline{x}_0$ es un mínimo absoluto del problema (P).

Observación: Si se estudia la optimalidad global de los puntos críticos de la función lagrangiana si fuesen extremos globales no sería necesario estudiar la optimalidad local de los mismos.

Interpretación del multiplicador de Lagrange

El multiplicador de Lagrange que está presente en los problemas de optimización con restricciones tiene una interpretación interesante y de gran aplicabilidad en los problemas económicos de optimización. Si se tiene el problema de optimización

$$\left.\begin{array}{rc} Opt. & f(x_1, x_2, ..., x_n) \\ s.a & g(x_1, x_2, ..., x_n) = c \end{array}\right\} (P)$$

para cada valor del parámetro $c \in \mathbb{R}$ se obtendría una solución del problema (P), que se podría expresar en función de c:

$$c \longrightarrow (c, x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) \longrightarrow f_{opt}(x_1, x_2, ..., x_n) = L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda)$$

por lo que el valor óptimo de la función objetivo es $f_{opt}(x_1(c), x_2(c), ..., x_n(c))$ depende de c. Se cumple que:

$$\bar{\lambda} = \frac{df_{opt}(c)}{dc}$$

Por tanto el multiplicador de Lagrange mide aproximadamente cuanto cambia el valor óptimo de la función objetivo cuando el parámetro c aumenta una unidad. Es decir,

$$\Delta f_{opt} \simeq \overline{\lambda}\Delta c$$

$$\Delta f_{opt} \simeq \overline{\lambda} \text{ cuando } \Delta c = 1$$

Ejercicios correspondientes al tema 7

7.4. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1

Encontrar los extremos relativos de la función $f(x,y) = 5x^2 - \frac{1}{2}x^4 + 4xy + 4y^2$.

Ejercicio 2

Optimizar $f(x,y) = 2x^{1/2}y^{1/3} - x - y$, con $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Justificar la respuesta.

Ejercicio 3

Probar que la función $f(x,y) = 5xe^y - x^5 - e^{5y}$ tiene un único punto crítico que es un máximo relativo pero no absoluto.

Ejercicio 4

Hallar los extremos relativos de la función $f(x,y,z) = -x^3 + 3xz + 2y - y^2 - 3z^2$.

Ejercicio 5

Optimizar la función $f(x,y,z) = 2x - x^2 + \ln(1-y^2) - 3z^2$. Justificar la respuesta.

Preguntas test

1. Un consumidor maximiza su utilidad $U(x,y)$ obteniendo el punto crítico $(1,2)$. Sabiendo que la matriz hessiana de la función de utilidad es:

$$HU(x,y) = \begin{pmatrix} -x^2-1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en el punto crítico hay:

a) un máximo global de la función de utilidad.

b) un máximo local que no es global de la función de utilidad.

c) un máximo global que no es local de la función de utilidad.

2. La matriz hessiana de una función $f(x,y)$ en el punto crítico $(0,0)$ es:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$$

Si $a < 4$, en el punto crítico la función tiene:

a) un máximo relativo.

b) un punto de silla.

c) un mínimo relativo.

3. Sea $(2,3)$ un punto crítico de la función $f(x,y)$. Si se verifica que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,3) = -7 \text{ y } |Hf(2,3)| = 0$$

entonces en $(2,3)$ la función:

a) tiene un máximo relativo.

b) no tiene un mínimo relativo.

c) no tiene un punto de silla.

4. Sea una función real de varias variables con derivadas parciales continuas hasta el orden dos. La respuesta correcta es:

a) Un punto crítico de la función puede no ser un extremo relativo de una función.

b) La función no tiene mínimos globales.

c) Si $Hf(x,y)$ es definida negativa, entonces la función tiene un máximo global.

5. Sea $f(x,y)$ con derivadas parciales continuas hasta orden dos que verifica $\nabla f(1,-1) = (0,0)$ y $Hf(1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Entonces la función tiene en $(1,-1)$:

a) un mínimo relativo de valor $f(1,-1)$.

b) un punto de silla.

c) un máximo relativo de valor $f(1,-1)$.

6. Si la función $f(x,y)$, continua con parciales continuas, tiene en $(1,2)$ un extremo relativo, entonces:

a) $\nabla f(1,2) = (0,0)$.

b) $\nabla f(1,2) \neq (0,0)$.

c) $Hf(1,2)$ es definida.

7.5. Soluciones de los ejercicios propuestos

Ejercicio 1

- La función tiene en $(0, 0)$ un mínimo relativo de valor 0.
- La función tiene en $(2, -1)$ un punto de silla.
- La función tiene en $(-2, 1)$ un punto de silla.

Ejercicio 2

La función tiene en $(4/9, 8/27)$ un máximo absoluto de valor $4/27$.

Ejercicio 4

La función tiene en $(0, 1, 0)$ un punto de silla y en $(1/2, 1, 1/4)$ un máximo relativo de valor $17/16$.

Ejercicio 5

La función tiene un máximo absoluto en $(1, 0, 0)$ de valor 1.

Solución de las preguntas test

1.a) 2.b) 3.b) 4.a) 5.b) 6.a)

Apéndice: Rango y sistemas de ecuaciones lineales

1. Rango de una matriz

Definición de matriz escalonada

Matriz que si tiene filas cuyos elementos son cero están en la parte inferior de la matriz y en el resto de filas, el primer elemento no nulo de cada fila, llamado pivote, está a la derecha del pivote de la fila anterior (esto es, todos los elementos debajo de un pivote son 0).

Operaciones elementales en la filas o columnas de una matriz

Se realiza una operación elemental entre las filas (o columnas) de una matriz cuando:

- Se cambian entre sí dos filas (columnas). Se representará por $F_i \leftrightarrow F_j$, donde F_i y F_j son dos filas de la matriz ($C_i \leftrightarrow C_j$, donde C_i y C_j son dos columnas de la matriz).
- Se multiplica una fila (columna) por un número real distinto de cero. Se representará por $F_i \to kF_i$ ($C_i \to kC_i$).
- Se suma a una fila (columna) otra fila (columna) multiplicada por un número real k. Se representa como $F_i \to F_i + kF_j$ ($C_i \to C_i + kC_j$).

Propiedad

Toda matriz se puede trasformar en una matriz escalonada mediante operaciones elementales.

Determinante de una matriz cuadrada escalonada

Es el producto de los elementos de la diagonal principal de la matriz.

Definición

- Se dice que el rango de una matriz A de orden $m \times n$ es r cuando en A hay r filas, consideradas como vectores de $\mathbb{R}^n$, linealmente independientes y las restantes filas de A son combinación lineal de ellas. Se escribe $r(A) = r$.

- Análogamente, $r(A) = r$ cuando en A hay r columnas, consideradas como vectores de $\mathbb{R}^m$, linealmente independientes y las restantes columnas de A son combinación lineal de ellas.

Consecuencias:

1. Sea $A \in M_n$. El $\det(A) \neq 0$ si, y solo si, las líneas (filas o columnas) de A, consideradas como vectores de $\mathbb{R}^n$, son linealmente independientes $(r(A) = n)$.

2. Sea $A \in M_n$. El $\det(A) = 0$ si, y solamente si, las líneas (filas o columnas) de A, consideradas como vectores de $\mathbb{R}^n$, son linealmente dependientes $(r(A) < n)$.

Rango de una matriz escalonada

El rango de una matriz escalonada A de orden $m \times n$ es igual al número de sus pivotes (que es el número de filas distintas de cero de la matriz A).

Propiedad

El rango de una matriz A de orden $m \times n$ es igual al rango de una de las matrices escalonadas que se obtienen mediante operaciones elementales en sus líneas.

Todas las matrices escalonadas que se obtienen mediante transformaciones elementales en las líneas de una matriz A tienen el mismo mismo número de pivotes.

2. Sistemas lineales

Definiciones

- Un sistema lineal de m ecuaciones lineales con n incógnitas se escribe:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$ y x_j incógnitas, donde $i = 1, 2, ..., m$ y $j = 1, 2, ..., n$.

- La siguiente matriz es llama matriz del sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

- Un sistema lineal se dice escalonado cuando su matriz asociada es escalonada.

- Solución de un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas es un conjunto de números reales $c_1, c_2, ..., c_n$ que verifica que al sustituir cada incógnita x_i por c_i $i = 1, 2, ..., n$ se cumple cada una de las m ecuaciones.

- Sistemas lineales equivalentes: dos sistemas lineales son equivalentes cuando tienen el mismo conjunto de soluciones.

- Sistema lineal compatible determinado: aquel que tiene una única solución.

- Sistema lineal compatible indeterminado: aquel que tiene más de una solución.

- Sistema lineal incompatible: aquel que no tiene solución.

Propiedad

Dado un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas, su correspondiente matriz, que es de orden $m \times (n + 1)$, se puede transformar mediante operaciones elementales en una matriz escalonada, que es la matriz asociada a un sistema lineal escalonado equivalente al de partida.

Luego resolver un sistema lineal consiste en resolver cualquiera de sus sistemas lineales escalonados equivalentes.

IMPORTANTE:

Para resolver un sistema lineal se puede realizar cualquier operación elemental en las filas de la matriz del sistema lineal para obtener una matriz escalonada correspondiente a un sistema lineal escalonado equivalente al dado.

Respecto de la realización de operaciones elementales en las columnas, solo se pueden permutar columnas y han de ser distintas de la última. Si se han permutado dos columnas (distintas de la última), hay que tener cuidado al escribir las ecuaciones del sistema escalonado equivalente al inicial.

Propiedades

Sea un sistema lineal escalonado:

1. cuando el rango de la matriz del sistema coincide con el rango de la matriz escalonada que resulta de suprimir en la matriz del sistema la última columna el sistema escalonado es compatible. En caso contrario el sistema es incompatible.

2. cuando, siendo un sistema compatible, el rango coincide con el número de incógnitas, es compatible determinado.

3. cuando, siendo un sistema compatible, el rango es menor que el número de incógnitas, es compatible indeterminado.

Definición (sistema homogéneo)

Un sistema lineal se dice homogéneo si los términos independientes valen 0, o bien la última columna de su matriz asociada es una columna de ceros.

Propiedad de los sistemas homogéneos

Todo sistema homogéneo siempre tiene la solución $C = \bar{0} = (0, 0, ..., 0)$, solución nula o trivial. Luego, todo sistema homogéneo es compatible.

Además, el sistema lineal homogéneo es determinado si solo tiene la solución nula, y es indeterminado si tiene alguna solución no nula.

Recopilación de ejercicios

1. Representar el dominio y las curvas de nivel que se indican de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = \dfrac{y}{2x}$ para $k = 2$, $k = 0$ y $k = -1/2$.

   b) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x-1}{y}}$ para $k = 4$, $k = 0$ y $k = -2$.

   c) $f(x,y) = \dfrac{x-1}{\sqrt{y}}$ para $k = 1$, $k = 0$ y $k = -1$.

   d) $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$ para $k = 0$, $k = 1$ y $k = -1$.

2. Calcular $\nabla f(x,y)$ y $Hf(x,y)$ y particularizar en los puntos que se indican:

   a) $f(x,y) = \dfrac{2x+3y}{x-2y}$ en $(1,1)$.

   b) $f(x,y) = \dfrac{3\sqrt{x}}{\ln y}$ en $(4, e^2)$.

   c) $f(x,y) = e^{3x+2}\ln(3y+2)$ en $(0,0)$.

   d) $f(x,y) = \ln(3x+2y)$ en $(1,-1)$.

3. Realizar las siguientes integrales dobles

   a) $\int\int_R (3x + 2xy - y)\, dxdy$ con $R = [0,2] \times [1,3]$.

   b) $\int\int_R \dfrac{3x}{y} dxdy$ con $R = [0,3] \times [1,4]$.

   c) $\int\int_R e^{2x-3y} dxdy$ con $R = [0,1] \times [-2,0]$.

   d) $\int\int_R \left(\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{y}\right)$ con $R = [2,3] \times [1,4]$.

4. Estudiar el crecimiento, puntos críticos y concavidad de las siguientes funciones.

   a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 3$.

   b) $f(x) = e^{(x-1)^2}$.

   c) $f(x) = \ln(x^2 + 2x)$.

5. Optimizar las siguientes funciones en los intervalos que se indican

   a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 3$
      i) $x \in Dom(f)$.
      ii) $x \in [-3, 2]$
      iii) $x \in (0, +\infty)$
      iv) $x \in (-3, 1)$
      v) $x \in (0, 4]$

   b) $f(x) = e^{(x-1)^2}$
      i) $x \in Dom(f)$.
      ii) $x \in [0, 2]$.
      iii) $x \in (2, 4)$.
      iv) $x \in [2, +\infty)$.

   c) $f(x) = \ln(x^2 + 2x)$
      i) $x \in Dom(f)$.
      ii) $x \in (0, 2]$.
      iii) $x \in [-5, -3]$.
      iv) $x \in [2, +\infty)$.

6. El coste de fabricación $C(x)$ de unas galletas dietéticas, en euros, donde x es la cantidad de galletas expresada en kg, es $C(x) = 10 + 170x$. El fabricante estima que la demanda de este tipo de galletas viene dada por $p(x) = 200 - 0,25x^2$. Determinar:

a) La función que representa los beneficios de la empresa.

b) La cantidad de galletas que maximiza los beneficios de la empresa. Justificar la respuesta.

7. Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, $R(x)$ en cientos de euros se expresa en función de la cantidad invertida x, también en cientos de euros, y se expresa como:

$$R(x) = -0,001x^2 + 0,5x + 2,5$$

Deducir razonadamente qué cantidad de dinero le conviene invertir a un cliente en dicho plan de inversión y la rentabilidad que obtendría.(pruebas PAU, Oviedo, 1994)

8. Sea el conjunto de vectores

$$\{(1, -2, 4, -1, 1), (3, -6, 0, 0, -7), (0, 0, 5, -1, 4), (-1, 2, 3, -1, 5)\}$$

a) Estudiar la dependencia lineal del conjunto.

b) Escribir dos subconjuntos de vectores linealmente independientes.

9. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Calcular sus valores propios y sus correspondientes vectores propios.

b) Para aquellas que sean diagonalizables, encontrar una matriz D y una matriz P correspondiente a la matriz D tal que $MP = PD$, donde M representa la matriz diagonalizable.

10. Calcular el valor del parámetro a para que la forma cuadrática

$$Q(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + y^2 - axz + 3z^2$$

sea semidefinida positiva.

11. (Junio 2011)

a) Clasificar la matriz siguiente según los valores del parámetro a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

b) Para $a = 1$ escribir una expresión canónica de la forma cuadrática que tiene esta matriz asociada.

12. Sea la forma cuadrática $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4yz$.

a) Escribir la expresión matricial de esta forma cuadrática y llamaremos A a la matriz de la forma cuadrática.

b) Estudiar el signo de la forma cuadrática utilizando los menores principales dominantes de A.

c) Estudiar el signo de la forma cuadrática utilizando los valores propios de A.

d) Calcular una matriz diagonal D y una matriz de paso P verificando que $AP = PD$.

13. (Junio 2011) Una feria ganadera permanece abierta desde las 10 a las 20 horas. Se ha comprobado que el número de visitantes diarios queda determinado, como función de la hora del día, a través de la expresión $N(t) = -20(A-t)^2 + B$, si $10 \leq t \leq 20$.

Sabiendo que a las 17 horas alcanza el número máximo de 1500 visitantes, determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

14. Sea $f(x,y) = \dfrac{y}{2x}$. Calcular $\nabla f(x,y)$, $Hf(x,y)$, $\nabla f(1,-1)$ y $Hf(1,-1)$

15. Optimizar $f(x,y) = 2x^{1/2}y^{1/3} - x - y$. Justificar la respuesta.

16. Realizar las siguientes integrales:

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx \qquad \int_0^{1/2} \sqrt[3]{2x-1}dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{7}{\sqrt[3]{x^5}} \qquad \int xe^{-2x+1}dx$$

$$\int_{-\infty}^2 e^{2x+1}dx \qquad \int x^2 \ln x \qquad \int (3x+1)e^x \qquad {}^{\text{o}} \int (2x+2)\sqrt{x^2+2x-1}dx$$

17. El Ayuntamiento, después de realizar una encuesta, ha estimado que el número diario de usuarios del tranvía en función del precio del billete viene definido por la siguiente función de demanda

$$f(p) = 8000 - 50p;\ \text{ con } p \in [0, 160]$$

en donde $f(p)$ representa el número de pasajeros por día y p representa el precio del billete en céntimos de euro.

a) Determinar la función ingreso diario.

b) Determinar el precio del billete para maximizar el ingreso diario. ¿Se trata de un máximo local o global? Justificar la respuesta.

c) Representar gráficamente la función de ingreso diario.

18. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular

$$A + 2B - C \qquad \text{y} \qquad B^t - 3C^t$$

b) ¿Se podría calcular la matriz inversa de A, B o C? Justificar la respuesta.

19. Calcular la siguiente integral:

$$\int\int_R \frac{3x}{y} dxdy$$

con $R = [0, 3] \times [1, 4]$.

20. Sea el problema de optimización

$$\text{Opt. } f(x, y) = 2y$$

$$\text{sujeta a } -x^2 + 4x - y \geq 0$$

a) Representar el conjunto factible.

b) Representar las curvas de nivel de cotas 0,1 y -1.

c) Encontrar la solución del problema, si la tiene.

Examen de enero de 2013

1. La derivada de la función $f(x) = \dfrac{1}{1 - \ln x}$ vale:

   a) $\dfrac{-1}{x(1 - \ln x)^2}$.

   b) $\dfrac{1}{(1 - \ln x)^2}$.

   c) $\dfrac{1}{x(1 - \ln x)^2}$.

2. La función $f(x) = x(x^2 - 3)$

   a) tiene en $x = 1$ un mínimo relativo, en $x = -1$ un máximo relativo y en $x = 0$ un punto de inflexión.

   b) tiene en $x = 1$ un máximo relativo, en $x = -1$ un mínimo relativo y en $x = 0$ un punto de inflexión.

   c) no tiene puntos de inflexión.

3. La función continua $f(x)$ con $x \in [-2, 6]$ cumple que si $x \in (-2, 3)$, $f(x)$ es decreciente y si $x \in (3, 6)$, $f(x)$ es creciente, con $f(-2) < f(6)$, entonces $f(x)$ tiene

   a) un mínimo absoluto en $x = 3$ y un máximo absoluto en $x = -2$.

   b) un máximo absoluto en $x = 3$ y un mínimo absoluto en $x = -2$.

   c) un mínimo absoluto en $x = 3$ y un máximo absoluto en $x = 6$.

4. El dominio de la función $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{5x}}{3y + 2}$ es:

   a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -2/3, x > 0\}$.

   b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -2/3, x \geq 0\}$.

   c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0; y > -2/3\}$.

5. Sea la función $f(x, y) = 3x^2 + 5y^3 - 4$. Su vector gradiente en cualquier punto de su dominio es:

   a) $\nabla f(x, y) = \Big(6x, \quad 15y^2\Big)$.

   b) $\nabla f(x, y) = \Big(-6x, \quad -15y^2 - 4\Big)$.

c) $\nabla f(x,y) = \left(15y^2, \quad 6x\right)$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua con parciales continuas hasta orden 2. Si $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$ y f tiene en $(3,1)$ un punto crítico, entonces f tiene en $(3,1)$:
   a) un mínimo relativo.
   b) un máximo relativo.
   c) un extremo absoluto.

7. Sea $f : F \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con F convexo, una función continua con parciales continuas hasta orden 2 en el interior de F. Si $\nabla f(1,2) = (0,0)$ y $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3y^2 \end{pmatrix}$, entonces f tiene en $(1,2)$:
   a) un mínimo absoluto.
   b) un punto de silla.
   c) un máximo absoluto.

8. La integral indefinida
$$\int \left(3x + e^{2x}\right) dx$$
   vale:
   a) $\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}e^{2x}$.
   b) $\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}e^{2x} + cte.$
   c) $3x^2 + \dfrac{1}{2}e^{2x} + cte.$

9. La función $f(x,y) = -\ln x - \ln y$ es en su dominio:
   a) convexa.
   b) cóncava.
   c) ni cóncava ni convexa.

10. Sea $f(x,y)$ una función continua en $\mathbb{R}^2$ y sea el problema:
$$\text{Optimizar } f(x,y)$$
$$\text{sujeta a: } -1 \leq x \leq 2;\ 0 \leq y \leq 5$$
   entonces el problema

a) no tiene solución.

b) tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto.

c) tiene un máximo absoluto pero no tiene un mínimo absoluto.

11. Sea $f(x, y)$ una función continua en $\mathbb{R}^2$ y sea el problema:

$$\text{Optimizar } f(x, y)$$

$$\text{sujeta a: } (x, y) \in F \subseteq \mathbb{R}^2$$

Entonces el problema

a) puede tener solución.

b) no tiene solución.

c) puede tener solución si el conjunto factible es convexo.

12. El determinante de una matriz simétrica de orden 3 es distinto de cero, entonces la matriz NO PUEDE SER

a) semidefinida.

b) definida.

c) indefinida.

13. $\lambda_1 = 0$, λ_2 y λ_3 son los tres valores propios de una matriz simétrica indefinida A cuando λ_2 y λ_3

a) iguales.

b) distintos.

c)de distinto signo.

14. La curva de nivel de cota k de la función $z = f(x, y)$ es:

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y) = k\}$.

b) $\{(x, y) \in Dom(f) : f(x, y) = z\}$.

c) $\{(x, y) \in Dom(f) : f(x, y) = k\}$.

15. El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{x+y} \leq 2\}$

a) no es convexo.

b) es convexo.

c) no se puede saber si es un conjunto convexo.

16. Sea la función $f(x,y) = 3x^2 \ln y$. La matriz $Hf(-1,1)$ vale:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

Soluciones

1. c)	2.a)	3. c)	4. b)	5. a)	6. a)	7. c)
8. b)	9. a)	10. b)	11. a)	12. a)	13. c)	14. c)
15. b)	16. b)					

Teoría

a) Sea $A \in M_4$ con $|A| = 2$. Calcular:

$$|AA^t| \qquad |2A| \qquad |AA^{-1}| \qquad |A^{-1}A^t|$$

b) Sea $f(x,y)$ una función de dos variables. Definir:

- Vector gradiente de f en $(2,1)$.
- Matriz hessiana de f en $(2,1)$.

Problemas

Problema 1

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) Escribir la expresión analítica de la forma cuadrática cuya matriz asociada sea A.

b) Calcular los valores propios de A y sus correspondientes vectores propios.

c) Encontrar una matriz diagonal D y una matriz de paso P correspondiente a D tal que $AP = PD$.

d) Determinar el signo de la matriz A utilizando menores principales dominantes.

e) Escribir una expresión canónica de la forma cuadrática.

Problema 2

Sea la función $f(x, y) = x^4 + y^4 - 8x^2 + 2y^2$:

a) Determinar los puntos críticos de f.

b) Clasificar los puntos críticos. Justificar la respuesta.

Problema 3

Calcular la integral:

$$\int_{-\infty}^{2} e^{2x+1} dx$$

Examen de mayo de 2013

1. Sea la función $f(x,y) = \ln\left[(x+2y)\right]^2$. La $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ vale

   a) $\dfrac{2\ln(x+2y)}{x+2y}$.

   b) $\dfrac{4\ln(x+2y)}{x+2y}$.

   c) $\dfrac{\ln(x+2y)}{x+2y}$.

2. Sea $f(x)$ una función continua en $[-1,5]$ con $f'(x) > 0$, si $x \in (-1,0)$ y $f'(x) < 0$ cuando $x \in (0,5)$, entonces la función

   a) tiene en $x = 0$ un máximo absoluto y en $x = -1$ un mínimo absoluto.

   b) tiene en $x = 0$ un máximo absoluto y en $x = 5$ un mínimo absoluto.

   c) tiene un máximo absoluto en $x = 0$.

3. Los valores propios de la matriz de una forma cuadrática de tres variables son

   $$\lambda_1 = 1(\text{doble}) \text{ y } \lambda_2 = 0$$

   Entonces una posible forma canónica de esta forma cuadrática

   a) es $x^2 + y^2$.

   b) no se puede escribir.

   c) es $(x+y)^2$.

4. La curva de nivel de cota 0 de la función $f(x,y) = 3xy$

   a) está formada por las rectas $y = 0$ y $x = 0$.

   b) no existe.

   c) es $x = 0$.

5. El dominio de la función $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+4}}$ es:

   a) $(-2,2)$.

   b) $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$.

   c) $\mathbb{R}$.

6. Sea el problema de optimización:

$$\text{Optimizar } f(x,y)$$

$$\text{sujeta a } (x,y) \in F \subseteq Dom(f)$$

con f una función continua en F, que es un conjunto cerrado y acotado, entonces

a) el problema tiene solución.

b) solo hay un punto de F donde el problema alcanza su solución.

c) no se puede asegurar que el problema tenga solución.

7. Una primitiva de la función $f(x)$ es $F(x) = 3 + \ln(2x+3)$, luego otra de sus primitivas es:

a) $\dfrac{3}{2x+3}$.

b) $\ln(2x+3)$.

c) $2\ln(2x+3)$.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua con parciales continuas hasta orden 2. Si $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+1 & 0 \\ 0 & y^2+2 \end{pmatrix}$, entonces la función

a) es convexa en $\mathbb{R}^2$.

b) no es ni cóncava ni convexa en $\mathbb{R}^2$.

c) es cóncava en $\mathbb{R}^2$.

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua con parciales continuas hasta orden 2. Si $\nabla f(0,2) = (0,0)$ y $Hf(0,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, entonces f tiene en $(0,2)$:

a) un máximo relativo.

b) un punto de silla.

c) un máximo absoluto.

10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua con parciales continuas hasta orden 2. Si $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -y^2 \end{pmatrix}$ y $\nabla f(3,1) = \overline{0}$, entonces f tiene en $(3,1)$:

a) un mínimo absoluto.

b) un máximo absoluto.

c) un punto de silla.

11. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua con parciales continuas hasta orden 2. Si $Hf(x,y)$ es definida positiva o semidefinida positiva en el interior de un conjunto convexo $S \subseteq \mathbb{R}^2$ entonces el conjunto $\{(x,y) \in S : f(x,y) \leq -3\}$

    a) no se puede decir cómo es.

    b) es convexo.

    c) no es convexo.

12. La función $f(x) = -2x^3 + 6x$ es decreciente cuando

    a) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

    b) $x \in (1, +\infty) \cup (-1, 1)$.

    c) si $x \in (-1, 1)$.

13. Sea la función $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 2xy$. La matriz hessiana $Hf(-1,1)$ vale:

    a) $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

    b) $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

    c) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

14. Las matrices cuadradas de orden n, A, B, C y X, con A regular, verifican que $AX + B = 2C^t$, entonces la matriz X vale:

    a)$X = A^{-1}(2C^t - B)$.

    b) $X = A^{-1}(2C^t + B)$.

    c) $X = (2C^t - B)A^{-1}$.

15. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, el adjunto α_{23} vale:

    a) 3.

    b) 5.

    c) -3.

16. La derivada de la función $f(x) = (\sqrt{2x+1})e^{-x}$ es:

    a) $\dfrac{-e^{-x}}{\sqrt{2x+1}}$.

b) $\dfrac{-2xe^{-x}}{\sqrt{2x+1}}$.x

c) $\dfrac{-(2x+1)e^{-x}}{\sqrt{2x+1}}$.

17. Sea $f(K, L)$ la función de producción de una empresa (en unidades), donde K es el capital invertido (en u.m.) y L la fuerza de trabajo (en horas diarias). Si la productividad marginal del trabajo vale 5 cuando $K = 13$ y $L = 20$, entonces aproximadamente la producción aumenta 5 unidades cuando:

    a) el capital pasa de 13 u.m. a 14 u.m. y la fuerza de trabajo de 20 horas diarias a 21 horas diarias.

    b) el capital pasa de 13 u.m. a 14 u.m. manteniéndose constante la fuerza de trabajo en 20 horas diarias.

    c) la fuerza de trabajo pasa de 20 horas diarias a 21 horas diarias manteniéndose constante el capital en 13 u.m.

18. La derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$ se define como:

    a) $\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}$.

    b) $\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0, \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}$.

    c) $\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta z, y_0 + \Delta z, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}$.

Soluciones

1. b)	2.c)	3. a)	4. a)	5. c)	6. a)	7. b)
8. a)	9. b)	10. b)	11. b)	12. a)	13. a)	14. a)
15. c)	16. b)	17. c)	18. a)			

Teoría

Definir los siguientes conceptos:

a) Forma cuadrática. ¿Cuándo una forma cuadrática es semidefinida?

c) Mínimo relativo de un problema de optimización (P).

d) Máximo absoluto de un problema de optimización (P).

Ejercicios

Ejercicio 1

Sea la forma cuadrática

$$Q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 4xy$$

a) Escribir la expresión matricial de esta forma cuadrática y una de sus expresiones canónicas.

b) ¿Cuál es el signo de esta forma cuadrática? Justificar la respuesta.

c) Escribir una matriz diagonal D y una matriz de paso P correspondientes a la matriz de la forma cuadrática.

Ejercicio 2

Calcular la siguiente integral:

$$\int\int_R e^{3x+2y}\, dx\, dy$$

con $R = [0, 1] \times [0, 4]$.

Ejercicio 4

Sea el problema de optimización

$$\text{Opt. } f(x, y) = 2x - y$$

$$\text{sujeta a } \begin{cases} 3 \leq y \leq 5 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

a) Representar el conjunto factible.

b) Representar las curvas de nivel de cotas 0,1 y -1 de la función objetivo.

c) Encontrar la solución del problema, si la tiene.

Bibliografía

[1] Caballero, M.V.; Gómez, F. y Alacid, V. (2012) Matemáticas para el Marketing. Ed. DM.

[2] Caballero, M.V.; Gómez, F. y Alacid, V. (2005) Ejercicios de Matemáticas para la Empresa: Optimización e integración. Ed. DM.

[3] Sydsaeter, K. y Hammond P.J. (2009) Matemáticas para el análisis económico. Pearson Educación.