Universidad de Murcia

La Categoría de Módulos Firmes

Tesis Doctoral

Doctorando: Juan de la Cruz González Férez
Programa de Doctorado: Matemáticas e Informática Aplicadas en Ciencias e Ingeniería
Departamento: Matemática Aplicada

Diciembre de 2008

D. Leandro Marín Muñoz, Profesor Titular de Universidad del Área de Matemática Aplicada en el Departamento de Matemática Aplicada,

AUTORIZA:

La presentación de la Tesis Doctoral titulada "La Categoría de Módulos Firmes", realizada por D. Juan de la Cruz González Férez bajo mi inmediata dirección y supervisión, y que presenta para la obtención del grado de Doctor por la Universidad de Murcia.

En Murcia, a 10 de Noviembre de 2008

D. Francisco de Asís Guil Asensio, Profesor Titular de Universidad del Área de Matemática Aplicada y director del Departamento de Matemática Aplicada,

INFORMA:

Que la Tesis Doctoral titulada ”La Categoría de Módulos Firmes”, ha sido realizada por D. Juan de la Cruz González Férez bajo la inmediata dirección y supervisión de D. Leandro Marín Muñoz, y que el Departamento ha dado su conformidad para que sea presentada ante la Comisión de Doctorado.

En Murcia, a 10 de Noviembre de 2008

A la querida memoria de mi tía, Pilar Férez Salmerón.

Y a la memoria de mis abuelos, Pilar Salmerón López y Juan de la Cruz Férez López.

Agradecimientos

Quisiera expresar mi reconocimiento:

Al profesor Leandro Marín Muñoz, por todo el trabajo compartido durante estos años, así como por su paciencia y optimismo en las diferentes etapas del mismo. Sin él, *esta tesis* nunca hubiera sido *esta tesis*.

Al profesor Sergio Estrada, cuya colaboración fue esencial en la parte de cubiertas planas.

A mi hermana Pilar, que me acompañó durante mis años de estudiante en la Facultad de Matemáticas.

A mis hermanos, Rosario y Domingo, a mi primo José y a mi tía María, por permanecer siempre cerca.

Por último, pero de todo corazón, a mis padres, Arturo y Pepita, por su cariño y apoyo.

Gracias.

—Juan de la Cruz

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Presentación

La teoría de categorías ha sido históricamente una de las herramientas más útiles en el estudio de los anillos asociativos unitarios. Concretamente, el estudio de las propiedades de un anillo asociativo y unitario R en función de las propiedades de la categoría de módulos unitarios por la izquierda $R - \mathsf{Mod}$ (o similarmente por la derecha $\mathsf{Mod}{-}R$) así como de los diversos tipos de funtores entre ellas, ha sido objeto de multitud de investigaciones.

El estudio de los anillos asociativos generales (es decir, los no necesariamente unitarios) no ha tenido un desarrollo similar, en parte por la dificultad para elegir una categoría de módulos que generalice convenientemente la categoría de módulos unitarios.

Para hacer un planteamiento más concreto del problema, vamos a fijar algunos conceptos básicos, así en lo que sigue, vamos a considerar un anillo asociativo R; vamos a suponer que R tiene estructura de k-álgebra para algún anillo conmutativo con identidad k (en el caso general podemos tomar simplemente $k = \mathbb{Z}$). Llamaremos extensión de Dorroh de R al anillo $A = k \times R$ con la suma componente a componente y el producto dado por $(\alpha, r)(\beta, s) = (\alpha\beta, \alpha s + \beta r + rs)$. A es una k-álgebra unitaria ($1_A = (1_k, 0)$) y podemos identificar R con el ideal de A formado por los elementos de la forma $(0, r)$ con $r \in R$.

Un R-módulo por la izquierda M es un k-módulo unitario con una operación $R \times M \to M$ que cumpla las propiedades habituales de linealidad, asociatividad y distributividad. No podemos considerar en principio la propiedad de ser unitario puesto que no suponemos que R tenga identidad. Todo R-módulo M tiene estructura de A-módulo unitario con el producto $(k, r)m = km + rm$. Recíprocamente todo A-módulo unitario es un R-módulo con el producto $rm = (0, r)m$. De esta forma suele ser habitual identificar la categoría de todos los R-módulos con la categoría de los A-módulos unitarios, tanto por la derecha como por la izquierda.

Con el objetivo general de encontar una categoría de módulos que permita estudiar propiedades de R en función de propiedades de la categoría asociada, la elección más simple sería la de estudiar la categoría de todos los R-módulos, o lo que sería equivalente, estudiar las propiedades de R en función de la categoría $A{-}\mathsf{Mod}$ que sería tanto como estudiar R en función de A. Sin embargo, el anillo R y el anillo A son bastante diferentes, en el anillo A tenemos una copia extra de k que actúa de forma *independiente de* R con respecto al producto.

Ésto permite que en un A-módulo unitaro M podamos tener elementos $m \in M$ tales que $rm = 0$ para cualquier $r \in R$. Más aún, cualquier k-módulo unitario N puede ser dotado de estructura trivial de R-módulo con el producto

$$(\alpha, r)n = \alpha n \quad \forall n \in N, r \in R, \alpha \in k.$$

Con esta estructura se cumple que $RN = 0$. Estos módulos N tales que $RN = 0$, que jugarán un papel importante en las diferencias entre R y A, diremos que están totalmente anulados por R.

Esta copia adicional de k dentro de A nos ha inducido pues una copia completa de toda la categoría de k-módulos unitarios con estructura de R-módulo trivial al estar totalmente anulados por R. De hecho, en el caso particular en que R sea un anillo con identidad $1_R \in R$, todo A-módulo M se puede descomponer en suma directa de dos submódulos, $M' = \{m \in M : 1_R m = m\}$ y $M'' = \{m \in M : 1_R m = 0\} = \{m \in M : Rm = 0\}$ con el homomorfismo

$$M \to M' \coprod M'' \quad m \mapsto (1_R m, m - 1_R m).$$

Parece claro que estos módulos totalmente anulados por R no deberían ser considerados dentro de la categoría de módulos que queramos utilizar como generalización de la categoría de módulos unitarios para el caso general.

Una primera forma de eliminar estos módulos sería considerar la subcategoría de $A-\mathsf{Mod}$ formada exclusivamente por los módulos M tales que $\{m \in M : Rm = 0\} = 0$. Estos módulos reciben el nombre de módulos libres de torsión o módulos no degenerados.

Si R es un anillo con identidad, los módulos libres de torsión son los mismos que los unitarios: Si M es libre de torsión, entonces $m - 1_R m$ cumple que para todo $r \in R$, $r(m - 1_R m) = rm - r1_R m = rm - rm = 0$ y al ser M libre de torsión deducimos $m - 1_R m = 0$ y por lo tanto $m = 1_R m$. Recíprocamente, si M es unitario, entonces si $Rm = 0$ en particular $m = 1_R m = 0$.

La clase de módulos libres de torsión, que denotaremos por $\mathcal{F}$, aunque sería una posible generalización de la categoría de módulos unitarios, no suele utilizarse para el estudio de los anillos no unitarios. Esta clase de módulos libres de torsión, en realidad forma parte de una teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$. La clase de módulos de torsión asociada, $\mathcal{T}$, está formada por los módulos M tales que para todo $m \in M$ y toda sucesión $(r_n) \in R^{\mathbb{N}}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r_{n_0} \cdots r_2 r_1 m = 0$. A estos módulos los llamaremos módulos eventualmente anulados por R. Una demostración de este hecho puede verse en [16] y también en [17].

Al disponer de una teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ en la categoría $A-\mathsf{Mod}$, la categoría que suele tener las propiedades más interesantes es la categoría cociente $A-\mathsf{Mod}/\mathcal{T}$ que es isomorfa a la subcategoría de $A-\mathsf{Mod}$ formada por los módulos M tales que el homomorfismo canónico $M \to \mathsf{Hom}_R(R, M)$ dado por $m \mapsto (m)\lambda_M : R \to M$ con $(r)(m)\lambda_R = rm$ es un isomorfismo. Un estudio detallado de esta categoría, que denotaremos $R-\mathsf{CMod}$, así como de esta identificación puede verse en [17]. Una propiedad que comparten todas las categorías cocientes de categorías de módulos con respecto a teorías de torsión es la de ser categorías de Grothendieck, de hecho el teorema de Gabriel y Popescu nos dice que ésta es una condición necesaria y suficiente. Una demostración de este hecho así como un estudio general de categorías cocientes se puede ver en [24].

Para eliminar la clase de módulos totalmente anulados por R podemos realizar una construcción dual de la anterior y considerar la subcategoría de $A-\mathsf{Mod}$ formada por los módulos M tales que $RM = M$. Los módulos que cumplan esta propiedad los llamaremos unitarios y la clase de todos ellos la denotaremos $\mathcal{U}$. De nuevo, tal y como sucedía en el caso de los módulos libres de torsión, la case de módulos unitarios generaliza la propiedad de ser unitario cuando R tiene identidad. Para verlo, supongamos que R tiene identidad 1_R. Si para todo $m \in M$, $m = 1_R m \in RM$ entonces $M \subseteq RM$ y por lo tanto $M = RM$. Recíprocamente, si $RM = M$ entonces para todo $m \in M$ podemos encontrar elementos $r_i \in R$ y $m_i \in M$ tales que $m = \sum_i r_i m_i$ y por lo tanto $1_R m = 1_R \sum_i r_i m_i = \sum_i 1_R r_i m_i = \sum_i r_i m_i = m$.

Aunque en algunas ocasiones se ha utilizado $\mathcal{U}$ como generalización para el caso no unitario, la categoría que parece tener propiedades duales de la categoría $R-\mathsf{CMod}$ es la categoría de módulos firmes, que denotaremos $R-\mathsf{DMod}$, formada por los módulos M tales que el homomorfismo canónico $\mu_M : R \otimes_R M \to M$ dado por $(r \otimes m)\mu_M = rm$, es un isomorfismo. Ésta es una subcategoría de $\mathcal{U}$ (podemos identificar $\mathcal{U}$ como la clase de módulos M para los cuales μ_M es suprayectiva), sin embargo para ciertos tipos de anillos, las categorías $\mathcal{U}$ y $R-\mathsf{DMod}$ coinciden, y de hecho, en los casos fundamentales en los que sea ha utilizado $\mathcal{U}$ ha sido para anillos en los cuales la suprayectividad de μ induce también su inyectividad y por lo tanto $\mathcal{U} = R-\mathsf{DMod}$.

A diferencia del caso de la categoría de módulos cerrados $R-\mathsf{CMod}$ en la que podemos utilizar propiedades generales de categorías cocientes y deducir que es una categoría de Grothendieck, en el caso de $R-\mathsf{DMod}$ no hay un resultado similar. De hecho, Daniel Quillen planteó en sus notas no publicadas [20] la pregunta general de si esta categoría es una categoría abeliana. El objetivo fundamental de esta memoria será el estudio de la categoría de módulos firmes y de la propiedad de abelianidad llegando a la construcción de un contraejemplo en el cual la categoría de módulos firmes no es abeliana.

En la siguiente sección haremos un estudio detallado de los resultados planteados.

1.2. Análisis de Resultados

El Capítulo 2 nos permitirá introducir la notación que utilizaremos a lo largo de la memoria en lo que se refiere a las construcciones de límites y colímites en la categoría de módulos firmes y también en la categoría de módulos cerrados. Se introducirán de forma ordenada definiciones básicas como la de soporte unitario o la construcción de los funtores D y C. En este capítulo no se introducirán resultados originales.

El Capítulo 3 entrará ya en profundidad en la abelianidad de la categoría de módulos firmes. En cualquier categoría, si $f : M \to N$ es el núcleo de otro morfismo, es en particular un monomorfismo, siendo el recíproco cierto en categorías abelianas. De hecho, la categoría de módulos firmes sería abeliana si y sólo si pudiésemos garantizar que todo monomorfismo es un núcleo.

La primera sección del Capítulo 3 nos caracterizará la propiedad adicional que deben cumplir los monomorfismos para ser núcleos. Si $f : M \to N$ es un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$, la aplicación subyacente no tiene porqué ser inyectiva, el núcleo de la aplicación subyacente no puede recibir aplicaciones no nulas procedentes de módulos firmes (a dicha propiedad la llamaremos evanescencia), pero para ser un núcleo necesitará que dicha evanescencia se comporte de una manera uniforme.

La segunda sección del Capítulo 3 estudiará el concepto de exactitud en la categoría de módulos firmes. Al no ser una categoría abeliana, podrían existir diferentes definiciones posibles de exactitud. En esta sección se verá que existe una definición autodual de exactitud y se aplicará al caso especial de las sucesiones exactas cortas. Esta definición nos proporcionará una segunda caracterización de la abelianidad en términos de estas sucesiones.

Una vez visto el concepto de exactitud en la categoría de módulos firmes, podemos estudiar la exactitud por la izquierda del funtor $\mathsf{Hom}(K,-)$. La tercera sección del Capítulo 3 estará dedicada a este estudio en el que veremos que la exactidud por la izquierda de los funtores $\mathsf{Hom}(K,-)$ es equivalente a la abelianidad de la categoría de módulos firmes.

En la última sección del Capítulo 3 veremos la descomposición epi+mono de cualquier morfismo (que siempre existe en $R-\mathsf{DMod}$) y cómo ésta nos proporciona unos monomorfismos especiales a los que llamaremos residuos de un morfismo. Utilizando este concepto caracterizaremos las categorías de módulos firmes abelianas como aquellas en las cuales la composición de núcleos es un núcleo.

El Capítulo 4 está dedicado al concepto de subobjeto en la categoría de módulos firmes. En categorías abelianas se pueden definir los conjuntos de subobjetos y de objetos cocientes, siendo ambos conceptos equivalentes. En el caso de la categoría de módulos firmes los núcleos son un tipo especial de subobjetos y los objetos cocientes están en biyección con los núcleos, no con los subobjetos.

Se probarán todos estos resultados y el hecho de que los subobjetos forman un retículo modular (aunque la categoría en principio podría no ser abeliana).

Mientras que en el Capítulo 3 estudiábamos condiciones equivalentes a la abelianidad, en el Capítulo 5 estudiaremos propiedades que en principio podrían ser más débiles que la abelianidad, fundamentalmente relacionadas con la exactitud del límite directo. En la primera sección veremos propiedades equivalentes a la exactitud del límite directo y veremos que si la categoría es localmente finitamente presentada, entonces los límites directos son exactos. También veremos que en general la categoría siempre es $\aleph_1$-presentada.

La segunda sección del Capítulo 5 probará que si la categoría $R-\mathsf{DMod}$ es abeliana, entonces el funtor límite directo es exacto, lo cual nos probará en particular que si la categoría de módulos firmes es abeliana, entonces es Grothendieck.

En la tercera sección del mismo capítulo veremos que si el funtor límite directo conserva monomofismos y núcleos, entonces el retículo de subobjetos de los módulos firmes cumple la propiedad AB5. También se verá que si el funtor límite directo es exacto o se cumple la propiedad AB5, entonces el funtor $\mathsf{Hom}(G,-) : R-\mathsf{DMod} \to E-\mathsf{Mod}$ es pleno y fiel, siendo G un generador de la categoría $R-\mathsf{DMod}$ y $E = \mathsf{End}(G)$. Se terminará esa sección probando que si el funtor $\mathsf{Hom}(G,-)$ es pleno, entonces todos los módulos firmes son G-estáticos, es decir, que para todo módulo firme M, el homomorfismo $G \otimes_E \mathsf{Hom}(G,M) \to M$ que lleva (g,h) a $(g)h$ es un isomorfismo.

La última sección del Capítulo 5 nos hará un resumen de las propiedades que se pueden deducir de la abelianidad de la categoría de módulos firmes, concretamente nos probará el siguientes teorema:

Teorema 5.20 *Sea R un anillo asociativo. Las siguientes propiedades cumplen las relaciones*

$$\begin{tikzcd}
 & & (3) \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
(1) \arrow[r, Rightarrow] & (2) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & (5) \arrow[r, Rightarrow] & (6) \\
 & & (4) \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

1. *La categoría $R-\mathsf{DMod}$ es abeliana.*

2. *Para toda categoría filtrada pequeña $\mathcal{J}$ y todo morfismo $\varphi : M \to N$ en $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod})$ se cumple que $\mathsf{Ker}'(\varinjlim \varphi) = \varinjlim \mathsf{Ker}'(\varphi)$.*

3. *Para toda categoría filtrada pequeña $\mathcal{J}$ y todo monomorfismo $\varphi : M \to N$ en $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod})$ se cumple que $\varinjlim \varphi$ es un monomorfismo.*

4. *Para todo objeto M de $R-\mathsf{DMod}$ su retículo de subobjetos, $\mathcal{S}(M)$, cumple la propiedad AB5.*

5. *Para todo generador G de la categoría $R-\mathsf{DMod}$, el funtor $\mathsf{Hom}_A(G, -) : R-\mathsf{DMod} \to E-\mathsf{Mod}$ es un funtor pleno, siendo $E = \mathsf{End}_A(G)$.*

6. *Para todo módulo firme M y todo generador G de la categoría $R-\mathsf{DMod}$ se cumple que $h : G \otimes_E \mathsf{Hom}_A(G, M)$ es un isomorfismo, siendo $E = \mathsf{End}_A(G)$ y $(g \otimes \alpha)h = (g)\alpha$, es decir, todos los módulos firmes son G-estáticos para cualquier generador G de la categoría.*

El Capítulo 6 estará dedicado a un tipo especial de anillos no unitarios, que son las álgebras monomiales. En este caso se probará que la categoría de módulos firmes es de Grothendieck, de hecho los monomorfismos y los núcleos coinciden con los morfismos cuya aplicación subyacente es inyectiva. En este capítulo se verá también un ejemplo de un álgebra monomial para la cual las categorías de módulos firmes y cerrados no son equivalentes. Esto nos probará que la equivalencia entre las categorías de módulos cerrados y firmes no es necesaria para garantizar la abelianidad de $R-\mathsf{DMod}$. Esta condición había sido la fuente principal de ejemplos de anillos en los cuales $R-\mathsf{DMod}$ era abeliana.

El Capítulo 7 nos recogerá un breve estudio de la categoría de módulos unitarios, la cual podría ser otra elección posible en el caso de anillos no unitarios. Se probará que si la categoría de módulos firmes no es abeliana, entonces la de módulos unitarios tampoco puede ser abeliana.

El Capítulo 8 es el capítulo fundamental de la memoria. El problema planteado por Quillen era si la cateoría de módulos firmes era siempre abeliana. En el Capítulo 8 se construirá un anillo R tal que $R-\mathsf{DMod}$ no es abeliana, mientras que $\mathsf{DMod}-R$ sí lo es.

Se construirá también un segundo ejemplo de otro anillo S en el cual $S-\mathsf{DMod}$ y $\mathsf{DMod}-S$ son iguales y ninguna de las dos es abeliana. De hecho no cumpirán la condición (3) del Teorema 5.20 y por lo tanto tampoco la (2) ni la (1). En este segudo ejemplo, la categoría de módulos firmes dispondrá de un generador proyectivo (lo cual no se puede garantizar en general) por lo que la existencia de dicho generador no será determinante en el estudio de la abelianidad de la categoría.

El Capítulo 9 nos recogerá la construcción de las cubiertas planas en la categoría de módulos firmes, aún en el caso en que la categoría no sea abeliana. También se probará que dichas construcciones se conservan a través de equivalencias de Morita.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo vamos a fijar algunas notaciones que utilizaremos a lo largo de toda la memoria así como algunas construcciones generales que son conocidas pero que se recuerdan aquí para dar una mayor legibilidad a la memoria.

2.1. Descripción Estándar de un Anillo Asociativo no Unitario

Comenzamos fijando una serie de notaciones que nos permitirán describir un anillo en términos de un álgebra libre y de sus relaciones entre los elementos.

Fijaremos un conjunto X finito o infinito y denotaremos por $\langle X\rangle$ al monoide generado por las palabras sobre el conjunto X con la operación de yuxtaposición. A la palabra vacía la denotaremos por 1_X o simplemente por 1 cuando no haya lugar a confusión.

Las palabras sobre X las denotaremos por $\overline{x}$ y a los elementos de X que se yuxtaponen para formarla los denotaremos x_i. A la longitud de la palabra la denotaremos $\lambda(\overline{x})$ por lo tanto $\overline{x} = x_1x_2\cdots x_{\lambda(\overline{x})}$. Denotaremos por X^n al conjunto de palabras de longitud n. La palabra vacía la consideraremos de longitud 0 y por tanto $X^0 = \{1_X\}$.

En muchas ocasiones nos interesará representar las palabras dentro del monoide opuesto $\langle X\rangle^{\mathrm{opp}}$ que está formado por los mismos elementos pero la operación es la opuesta. Cuando consideremos los elementos dentro de este monoide los representaremos $\underline{x} = x_{\lambda(\overline{x})}\cdots x_2x_1$, así tendremos las reglas habituales $\overline{xy} = \underline{y}\underline{x}$, $\overline{x}z = z\underline{x}$ para cualesquiera palabras $\overline{x},\overline{y}$ y cualquier elemento $z\in X$.

Dadas dos palabras $\overline{x}$ y $\overline{y}$, diremos que $\overline{x}\leq\overline{y}$ si existe un elemento $\overline{z}\in\langle X\rangle$ tal que $\overline{xz}=\overline{y}$. En caso de existir, este elemento es claramente único y lo representaremos por $\overline{z}=\overline{x}^{-1}\overline{y}$.

Sea k un anillo conmutativo (en muchos casos podremos considerarlo un cuerpo). Denotaremos por $k\langle X\rangle$ el álgebra libre sobre el conjunto X con coeficientes en k. Un elemento de este álgebra se podrá representar de la forma $\sum_{\overline{x}\in\langle X\rangle} k_{\overline{x}}\overline{x}$ siendo $k_{\overline{x}}\in k$ el elemento 0 para casi todos los índices $\overline{x}\in\langle X\rangle$. La suma se definirá componente a componente y el producto se definirá formalmente como

$$\sum_{\overline{x}\in\langle X\rangle} k_{\overline{x}}\overline{x}\cdot\sum_{\overline{y}\in\langle X\rangle} l_{\overline{y}}\overline{y}=\sum_{\overline{z}\in\langle X\rangle}\left(\sum_{\overline{x}\overline{y}=\overline{z}} k_{\overline{x}}l_{\overline{y}}\right)\overline{z}.$$

El subconjunto de las palabras no vacías sobre el conjunto X lo denotaremos $\langle X\rangle_0$ y el subanillo de $k\langle X\rangle$ generado por estas palabras lo denotaremos $k\langle X\rangle_0$.

Sea R un anillo asociativo cualquiera. Podemos poner R como cociente de $k\langle X\rangle_0$ módulo un cierto ideal I del siguiente modo: Tomemos como $k=\mathbb{Z}$ y como conjunto X el propio conjunto R. Vamos a llamar $\pi : k\langle X\rangle_0 \to R$ a la aplicación que lleva los elementos de X a ellos mismos, pero considerados en R. Esta aplicación π se puede extender para convertirse en homomorfismo de anillos definiendo $\pi(\overline{x})=\pi(x_1)\cdots\pi(x_{\lambda(\overline{x})})$ para cualquier palabra y $\pi(\sum_{\overline{x}\in\langle X\rangle_0} k_{\overline{x}}\overline{x})=\sum_{\overline{x}\in\langle X\rangle_0} k_{\overline{x}}\pi(\overline{x})$. El ideal I lo tomaremos como $\mathsf{Ker}(\pi)$ y de esta forma π induce un isomorfismo entre $k\langle X\rangle_0/I\to R$ ya que es claramente sobreyectivo.

La descripción de R como cociente de un cierto $k\langle X\rangle_0$ módulo un ideal, claramente no es única, pero en realidad lo que necesitaremos a lo largo de esta memoria es tener garantizada al menos una descripción de este tipo, lo cual como hemos visto, es posible. A cualquier descripción de este tipo la llamaremos descripción estándar de R. Vamos a fijar la definición concreta:

Definición 2.1 *Sea R un anillo asociativo. Llamaremos una* descripción estándar del anillo R *a (X,k,π,I) siendo X un conjunto, k un anillo conmutativo (que puede ser $\mathbb{Z}$ o cualquier otro para el cual R tenga estructura de k-álgebra), $\pi : k\langle X\rangle_0 \to R$ una aplicación k-lineal suprayectiva que conserva el producto e $I=\mathsf{Ker}(\pi)$. De esta forma $R=k\langle X\rangle_0/I$.*

Si R es un anillo asociativo con una descripción estándar (X,k,π,I). La extensión de Dorroh de R asociada a su estructura de k-álgebra, tal y como hemos indicado anteriormente, viene dada por el anillo $A=k\times R$ con la suma componente a componente y el producto dado por $(\alpha,r)(\beta,s)=(\alpha\beta,\alpha s+\beta r+rs)$. Identificaremos los elmentos de R con los elementos de $\{0\}\times R$ y así podemos extender la aplicación π a un homomorphismo de k-álgebras $k\langle X\rangle\to A$ tal que

$$\sum_{\overline{x}\in\langle X\rangle} k_{\overline{x}}\overline{x}\mapsto (k_1,\sum_{\overline{x}\in\langle X\rangle_0} k_{\overline{x}}\pi(\overline{x})).$$

El núcleo de este homomorfismo vuelve a ser I por lo que utilizando esta identificación podemos considerar que la extensión de Dorroh es precisamente $A=k\langle X\rangle/I$.

2.2. Algunas Definiciones Categóricas

En esa sección fijaremos brevemente algunas notaciones y definiciones básicas relacionadas con categorías y que nos servirán a lo largo de la memoria. Todas las categorías de módulos que vamos a considerar serán k-aditivas con la definición que vamos a dar a continuación (algo más restrictiva de lo habitual):

Definición 2.2 *Una categoría $\mathcal{A}$ diremos que es k-aditiva si todos sus objetos son k-módulos y dados M y N en $\mathcal{A}$, $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N)$ es un k-submódulo de $\mathsf{Hom}_k(M,N)$ y además cumple la siguientes condiciones:*

1. *El k-módulo 0 está en la categoría.*
2. *Dados dos k-módulos M y N, la suma directa de M y N está en la categoría y las proyeciones e inyecciones canónicas son morfismos de la categoría.*
3. *La composición de morfismos es k-lineal tanto por la derecha como por la izquierda.*

Definición 2.3 *Diremos que una categoría $\mathcal{J}$ es pequeña si la clase de sus objetos es un conjunto.*

Definición 2.4 *Sea $\mathcal{J}$ una categoría pequeña y $\mathcal{A}$ una categoría k-aditiva. Denotaremos por $\mathsf{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{A})$ a la categoría de funtores covariantes $M:\mathcal{J}\to\mathcal{A}$ junto con las transformaciones naturales entre ellos. A estos funtores los llamaremos diagramas sobre $\mathcal{J}$.*

Denotaremos $\Delta:\mathcal{A}\to\mathsf{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{A})$ al funtor que dado un objeto M de $\mathcal{A}$, define $\Delta(M):\mathcal{J}\to\mathcal{A}$ el funtor que lleva todos los objetos de $\mathcal{J}$ al objeto M de $\mathcal{A}$ y todos los morfismos de $\mathcal{J}$, al morfismo id_M. Dado un morfismo $f:M\to N$, $\Delta(f):\Delta(M)\to\Delta(N)$ es la transformación natural que para todo $i\in\mathcal{J}$ está definido como $\Delta(f)_i=f$.

Dado un diagrama $M:\mathcal{J}\to\mathcal{A}$, un colímite de este diagrama es un objeto C de $\mathcal{A}$, junto con una transformación natural $q:M\to\Delta(C)$ tal que para cualquier otro objeto $\hat{C}$ y cualquier otra transformación natural $\hat{q}:M\to\Delta(\hat{C})$ existe un único $\hat{h}:C\to\hat{C}$ tal que $\Delta(\hat{h})\circ q=\hat{q}$.

Escrito en términos de transformaciones naturales, ésto significa que tenemos un isomorfismo natural

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(C,\hat{C})\to\mathsf{Nat}(M,\Delta(\hat{C}))\quad \hat{h}\mapsto\Delta(\hat{h})\circ q.$$

Si escribimos esta condición en términos de objetos y morfismos de $\mathcal{A}$, un colímite es un objeto C junto con una familia de morfismos $q_j:M_j\to C$ tal que para todo morfismo $f:i\to j$ en $\mathcal{J}$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "M_f"] \arrow[dr, "q_i"'] & & M_j \arrow[dl, "q_j"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

y tal que para cualquier otro objeto $\hat{C}$ de $\mathcal{A}$ y cualquier familia de morfismos $\hat{q}_i:M_i\to\hat{C}$ tal que para cualquier $f:i\to j$ el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "M_f"] \arrow[dr, "\hat{q}_i"'] & & M_j \arrow[dl, "\hat{q}_j"] \\ & \hat{C} & \end{tikzcd}$$

existe un único $\hat{h} : C \to \hat{C}$ tal que para todo $j \in \mathcal{J}$ el siguiente diagrama también es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & M_j \arrow[dl, "q_j"'] \arrow[dr, "\hat{q}_j"] & \\ C \arrow[rr, "\hat{h}"] & & \hat{C} \end{tikzcd}$$

El colímte de un $M : \mathcal{J} \to \mathcal{A}$, si existe, es único (salvo isomorfismos) y se denotará $\mathsf{Colim}(M)$ *y también denotarmos $q_j : M_j \to \mathsf{Colim}(M)$ a los morfimos inducidos. Si existen colímites para todos los diagramas, diremos que $\mathcal{A}$ es cocompleta, en tal caso podemos considerar $\mathsf{Colim} : \mathsf{Fun}(\mathcal{J}, \mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ como un funtor y el isomorfismo natural*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathsf{Colim}(M), N) \to \mathsf{Nat}(M, \Delta(N))$$

para todo diagrama M y todo objeto N de $\mathcal{A}$, es una adjunción que nos garantiza la exactitud por la derecha del funtor Colim.

La definición de límites (que denotaremos $\mathsf{Lim}(M)$ junto con los morfismos $p_j : \mathsf{Lim}(M) \to M_j$) es la dual de la anterior.

Definición 2.5 *Sea $\mathcal{J}$ la categoría formada por dos objetos $0, 1$ y dos morfismos $a, b : 0 \to 1$ (y las identidades). Sea $M : \mathcal{J} \to \mathcal{A}$ un funtor. Entonces*

1. *El límite de este diagrama se llama* igualador *de los morfismos M_a y M_b.*
2. *El colímite de este diagrama se llama* coigualador *de los morfismos M_a y M_b.*

Definición 2.6 *Sea $f : M_0 \to M_1$ un morfismo en la categoría $\mathcal{A}$. El igualador del morfismo f y el morfismo 0 se denomina núcleo de f y lo denotaremos $\mathsf{Ker}(f)$ y al morfismo canónico p_0 inducido por el sistema lo denotaremos $\mathsf{ker}(f) : \mathsf{Ker}(f) \to M_0$.*

Definición 2.7 *Sea $f : M_0 \to M_1$ un morfismo en la categoría $\mathcal{A}$. El coigualador del morfismo f y el morfismo 0 se denomina conúcleo de f y lo denotaremos $\mathsf{Coker}(f)$ y al morfismo canónico p_1 inducido por el sistema lo denotaremos $\mathsf{coker}(f) : M_1 \to \mathsf{Coker}(f)$.*

Definición 2.8 *Sea $\mathcal{J}$ una categoría que tiene como objetos los elementos de un conjunto y no tiene morfismos (distintos de la identidad). Entonces*

1. *El límite de este diagrama se llama* producto *de los objetos $(M_i)_{i\in\mathcal{J}}$ se denota $\prod_{i\in\mathcal{J}} M_i$ y $p_j : \prod_{i\in\mathcal{J}} M_i \to M_j$ a las proyecciones canónicas.*
2. *El colímite de este diagrama se llama* coproducto *de los objetos $(M_i)_{i\in\mathcal{J}}$ se denota $\coprod_{i\in\mathcal{J}} M_i$ y $q_j : M_j \to \coprod_{i\in\mathcal{J}} M_i$ a las inyecciones canónicas.*

Definición 2.9 *Sea $\mathcal{J}$ una categoría pequeña. Diremos que $\mathcal{J}$ es una categoría filtrada (ver [3, Definition 2.13.1]) si cumple las siguientes condiciones:*

1. *Es no vacía, es decir, tiene al menos un objeto.*

2. *Para todo $i, j \in \mathcal{J}$ existe $k \in \mathcal{J}$ y morfismos $\alpha : i \to k$, $\beta : j \to k$ en $\mathcal{J}$.*

3. *Para todo $i, j \in \mathcal{J}$ y todo par de morfismos $\alpha, \beta : i \to j$ existe $k \in \mathcal{J}$ y un morfismo $\gamma : j \to k$ tal que $\gamma \circ \alpha = \gamma \circ \beta$.*

A los diagramas $M : \mathcal{J} \to \mathcal{A}$ los llamaremos sistemas filtrados y a los colímites del sistema los llamaremos colímites filtrados y los denotaremos $\varinjlim_{j \in \mathcal{J}} M_j$.

El caso particular de las categorías formadas por conjuntos parcialmente ordenados, la condición (3) de la definición anterior se cumple inmediatamente porque no puede existir más de un morfismo entre dos objetos. A este tipo de colímites filtrados en conjuntos parcialmente ordenados los llamaremos límites directos y a los diagramas respectivos, sistemas directos.

Para el concepto dual con $M : \mathcal{J}^{op} \to \mathcal{A}$ hablaremos de límite filtrado o límite inverso respectivamente y se denotará $\varprojlim_{j \in \mathcal{J}} M_j$.

Definición 2.10 *Diremos que un cardinal infinito $\aleph$ es un cardinal regular (ver [3, Definición 6.4.4]) si para todo conjunto de índices Λ de cardinalidad menor que $\aleph$ y toda familia de conjuntos C_λ, todos ellos de cardinalidad menor que $\aleph$, se cumple que $\cup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ tiene cardinalidad menor que $\aleph$.*

Los conceptos de categoría filtrada y colímite filtrado se pueden extender a cardinales regulares del siguiente modo:

Definición 2.11 *Sea $\aleph$ un cardinal regular y sea $\mathcal{J}$ una categoría pequeña. Diremos que $\mathcal{J}$ es una categoría $\aleph$-filtrada (ver [3, Definition 6.4.1]) si cumple las siguientes condiciones:*

1. *Es no vacía, es decir, tiene al menos un objeto.*

2. *Para toda familia $\{i_\lambda \in \mathcal{J} : \lambda \in \Lambda\}$ con $\mathsf{card}(\Lambda) < \aleph$ existe $k \in \mathcal{J}$ y morfismos $\alpha_\lambda : i_\lambda \to k$ en $\mathcal{J}$ para todo $\lambda \in \Lambda$.*

3. *Para todo $i, j \in \mathcal{J}$ y toda familia de morfismos $\{\alpha_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tal que $\mathsf{card}(\Lambda) < \aleph$, existe $k \in \mathcal{J}$ y un morfismo $\gamma : j \to k$ tal que $\gamma \circ \alpha_\lambda = \gamma \circ \alpha_\mu$ para todo $\lambda, \mu \in \Lambda$.*

A los diagramas $M : \mathcal{J} \to \mathcal{A}$ los llamaremos sistemas $\aleph$-filtrados y a los colímites del sistema los llamaremos colímites $\aleph$-filtrados y los denotaremos $\varinjlim_{j \in \mathcal{J}} M_j$.

El el caso particular de las categorías formadas por conjuntos parcialmente ordenados los llamaremos colímites $\aleph$-dirigidos.

La definición de categorías filtradas, colímites filtrados y límites directos no es mas que el caso particular para el cardinal $\aleph_0$. A lo largo de esta memoria haremos uso fundamentalmente de estas definiciones para los cardinales regulares $\aleph_0$ y $\aleph_1$.

2.3. Módulos Cerrados y Firmes

En esta sección vamos a profundizar un poco más en las definiciones generales relacionadas con la construcción de las categorías de módulos cerrados y firmes que iniciamos en la presentación. También fijaremos notaciones usadas a lo largo de toda la memoria en relación con dichas categorías. Denotaremos por R a un anillo asociativo con una descripción estándar (X, k, π, I). Llamaremos $A = k\langle X\rangle/I$ a la extensión de Dorroh.

Un R-módulo por la izquierda es un grupo abeliano M con una operación $R \times M \to M$ cumpliendo las propiedades habituales de linealidad, asociatividad y distributividad. Si estamos trabajando con k-álgebras exigiremos que todos los objetos sean k-módulos unitarios y las aplicaciones k-lineales. Ésto hace que podamos siempre definir el producto αm para cualquier $\alpha \in k$ y cualquier $m \in M$. Si definimos $\alpha 1 \cdot m = \alpha m$ cualquier R-módulo por la izquierda no es más que un A-módulo unitario, por lo que podemos identificar la clase de todos los R-módulos con la de los A-módulos unitarios. Dado que todos los homomorfismos serán también k-lineales realmente la identificación se puede hacer de toda la categoría, por lo que cuando hablemos de la categoría de R-módulos, realmente estaremos considerando la categoría de A-módulos unitarios $A-\mathsf{Mod}$. El mismo razonamiento se puede hacer por la derecha.

Tal y como indicábamos en la presentación, la clase $\mathcal{U}$ de los módulos R-unitarios es una clase de torsión en $A-\mathsf{Mod}$. Podemos usar pues la siguiente construcción general de preradicales para obtener el radical asociado. Para más detalles del método general de esta construcción puede verse [24, Chapter VI.1] y, el caso concreto que nos ocupa, puede verse en [17, Sección 3.5].

Definición 2.12 *Sea M un A-módulo, definimos $\mathsf{u}(M) = RM$ y para cada ordinal α definimos: $\mathsf{u}^0(M) = M$, $\mathsf{u}^\alpha(M) = \cap_{\beta<\alpha}\mathsf{u}^\beta(M)$ para cada ordinal límite α y para todo ordinal β, $\mathsf{u}^{\beta+1}(M) = \mathsf{u}(\mathsf{u}^\beta(M))$.*

Cualquier A-módulo M tiene un submódulo R-unitario maximal que denotaremos $\mathsf{U}(M)$. Se dice que $\mathsf{U}(M)$ es la parte R-unitaria de M. Este submódulo de M puede construirse como la suma de todos los submódulos R-unitarios de M. También, la secuencia $\mathsf{u}^\alpha(M)$ construida anteriormente, que ha de estabilizarse para algún ordinal, se estabiliza precisamente en $\mathsf{U}(M)$. Los módulos unitarios quedan caracterizados por la propiedad $\mathsf{U}(M) = M$.

Este U es el radical idempotente asociado a la clase de torsión de R-módulos unitarios. A partir de aquí, diremos que un A-módulo M es evanescente si $\mathsf{U}(M) = 0$, es decir, si M no contiene submódulos unitarios. Es claro que $\mathsf{Hom}_R(M, N) = 0$ cuando M es unitario y N es evanescente, ya que si $f : M \to N$ es un homomorfismo con $f \neq 0$ entonces $Rf(M) = f(RM) = f(M)$, por lo que $f(M)$ es un submódulo unitario de N. A las clases de módulos unitarios y evanescentes las representaremos respectivamente por $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$.

Nota 2.13 *Puesto que $R = \pi(X)A$, entonces $M = RM$ si y sólo si $M = \pi(X)M$ ya que $\mathsf{u}(M) = RM = \pi(X)AM = \pi(X)M$.*

De forma dual podemos hacer una construcción para el caso de los módulos libres de torsión y los eventualmente anulados por R.

Definición 2.14 *Sea M un A-módulo, definimos* $\mathsf{t}(M) = \{m \in M : Rm = 0\}$ *y para cada ordinal α definimos:* $\mathsf{t}_0(M) = M$, $\mathsf{t}_\alpha(M) = \cup_{\beta<\alpha}\mathsf{t}_\beta(M)$ *para cada ordinal límite α y para todo ordinal β,* $\mathsf{t}_{\beta+1}(M)$ *es el submódulo de M tal que* $\mathsf{t}(M/\mathsf{t}_\beta(M)) = \mathsf{t}_{\beta+1}(M)/\mathsf{t}_\beta(M)$.

La cadena de submódulos $\mathsf{t}_\beta(M)$ es creciente y estabilizará necesariamente en un submódulo $\mathsf{T}(M)$ tal que $\mathsf{t}(M/\mathsf{T}(M)) = \mathsf{T}(M)/\mathsf{T}(M) = 0$. A los módulos tales que $\mathsf{T}(M) = 0$ los llamamos módulos de torsión o eventualmente anulados por R.

Tal y como se puede ver en [16, Lemma 3.1], para cualquier módulo M se tiene que

$$\mathsf{T}(M) = \{m \in M : \forall (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}, \exists n_0 \text{ t.q. } r_{n_0}\cdots r_2 r_1 m = 0\}.$$

Utilizando la descripción estándar del anillo R, podemos precisar algo más con la siguiente proposición (que en una versión más general puede verse en [17, Proposición 3.26]):

Proposición 2.15 *Sea M un A-módulo por la izquierda, entonces*

1. $\mathsf{t}(M) = \{m \in M : \forall x \in X, \pi(x)m = 0\}$.
2. $\mathsf{T}(M) = \{m \in M : \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \exists n_0 \textit{ t.q. } \pi(x_{n_0})\cdots\pi(x_2)\pi(x_1)m = 0\}$.

Demostración:

1. Por un lado, si $Rm = 0$ entonces claramente $\pi(x)m = 0$ para todo $x \in X$. Recíprocamente, si $\pi(x)m = 0$ para todo $m \in M$ y $r \in R$, entonces como $R = A\pi(X)$ tenemos elementos $a_x \in A$ tales que $r = \sum a_x\pi(x)$ y por lo tanto $rm = \sum a_x\pi(x)m = 0$.
2. Por un lado, si $m \in \mathsf{T}(M)$ y $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, entonces $(\pi(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$ y utilizando [16, Lemma 3.1] deducimos que existe n_0 tal que $\pi(x_{n_0})\cdots\pi(x_2)\pi(x_1)m = 0$.

   En el otro sentido, supongamos que existe $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$ tal que $r_n\cdots r_2r_1m \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Llamemos $s_1 = r_1$. Como $s_1 \in R = A\pi(X)$, podemos encontrar $a_\alpha \in A$ y $x_\alpha \in X$ tales que $s_1 = \sum a_\alpha\pi(x_\alpha)$. Si para todo α existiera un n_α tal que $r_{n_\alpha}\cdots r_2a_\alpha\pi(x_\alpha)m = 0$, entonces tomando n_0 el máximo de todos ellos (lo cual se puede hacer porque son una cantidad finita) tendríamos que $r_{n_0}\cdots r_2a_\alpha\pi(x_\alpha)m = 0$ para todo α y por lo tanto $r_{n_0}\cdots r_2s_1m = \sum_\alpha r_{n_0}\cdots r_2a_\alpha\pi(x_\alpha)m = 0$, lo cual sería una contradicción. Tenemos pues que ha de existir un α tal que $r_n\cdots r_2a_\alpha\pi(x_\alpha)m \neq 0$ para ningún $n \in \mathbb{N}$. Vamos a llamar x_1 a dicho x_α y $s_2 = r_2a_\alpha \in R$. Aplicando el mismo proceso podemos encontrar $x_2 \in X$ y $s_3 \in R$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $r_n\cdots r_3s_2\pi(x_2)\pi(x_1)m \neq 0$. De esta forma recursiva encontramos una sucesión de elementos $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tales que $\pi(x_n)\cdots\pi(x_2)\pi(x_1)m \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

La categoría de módulos cerrados $R-\mathsf{CMod}$ puede verse como la categoría cociente de $A-\mathsf{Mod}$ con respecto a la teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ dada por los módulos eventualmente anulados por R y los libres de torsión (o no degenerados). Utilizando las técnicas generales de teorías de torsión, tenemos un funtor de localización, que en este caso particular denotaremos

$$\mathsf{C} : A-\mathsf{Mod} \to R-\mathsf{CMod}$$

Este funtor de localización es adjunto por la izquierda del funtor inclusión $\mathsf{I} : R{-}\mathsf{CMod} \to A{-}\mathsf{Mod}$. La unidad de ésta adjunción la denotaremos $\iota : \mathrm{Id}_{A-\mathsf{Mod}} \to \mathsf{I} \circ \mathsf{C}$. En muchas ocasiones y puesto que consideramos la categoría $R{-}\mathsf{CMod}$ dentro de la categoría $A{-}\mathsf{Mod}$, simplificaremos la notación eliminando al funtor I y considerando por lo tanto que tenemos un homomorfismo $\iota_M : M \to \mathsf{C}(M)$ para cualquier M de $A{-}\mathsf{Mod}$. En otras ocasiones sin embargo, sí haremos uso explícito del funtor inclusión, especialmente para el cálculo de límites directos e inversos de homomorfismos, ya que, aunque los homomofismos sean los mismos como aplicaciones en ambas categorías, los límites directos e inversos de ellos dependen de la categoría en la que sean considerados.

Puesto que la categoría $A{-}\mathsf{Mod}$ es una categoría usual de módulos unitarios sobre un anillo con identidad, el cálculo de límites y colímites en dicha categoría es bien conocido. Sin embargo dicho cálculo en la categoría $R{-}\mathsf{CMod}$ no es tan simple. Vamos a dar un repaso al cálculo de límites y colímites en $R{-}\mathsf{CMod}$ utilizando las propiedades de los funtores de localización y de su adjunto y relacionando el cálculo en la categoría $R{-}\mathsf{CMod}$ con el respectivo cálculo en $A{-}\mathsf{Mod}$.

Al poder identificar los módulos de $R{-}\mathsf{CMod}$ con los módulos de $A{-}\mathsf{Mod}$, así como los morfismos, vamos a utilizar la siguiente notación para evitar la confusión. Si $M : \mathcal{J} \to R{-}\mathsf{CMod}$ es un diagrama, los límites y colímites calculados en la subcategoría $R{-}\mathsf{CMod}$ los representaremos como $\mathsf{Lim}'(M)$ y $\mathsf{Colim}'(M)$. Similarmente utilizaremos p'_i y q'_i para las respectivas proyecciones e inyecciones canónicas cuando estén calculadas en la subcategoría. Reservaremos las notaciones $\mathsf{Lim}(M)$, $\mathsf{Colim}(M)$, p_i y q_i para las construcciones realizadas en la categoría $A{-}\mathsf{Mod}$. Vamos a ver cómo se relacionan todos estos objetos y morfismos:

Proposición 2.16 *Sea $\mathcal{J}$ una categoría pequeña y $M : \mathcal{J} \to R{-}\mathsf{CMod}$ un diagrama sobre $\mathcal{J}$. Entonces*

1. $\mathsf{I}\big(\mathsf{Lim}'(M)\big) = \mathsf{Lim}(\mathsf{I} \circ M)$*, o identificando,* $\mathsf{Lim}'(M) = \mathsf{Lim}(M)$*. Además $p'_j = p_j$ para todo $j \in \mathcal{J}$.*
2. $\mathsf{Colim}'(M) = \mathsf{C}\left(\mathsf{Colim}(\mathsf{I} \circ M)\right)$*. Identificando,* $\mathsf{Colim}'(M) = \mathsf{C}\left(\mathsf{Colim}(M)\right)$*. En este caso $q'_j = q_j * \iota_{\mathsf{Colim}(M)}$.*

Demostración:
Puesto que C es un adjunto por la izquierda de I sabemos que I conserva límites, de donde deducimos (1) y C colímites, de donde deducimos (2) ya que

$$\mathsf{C}\left(\mathsf{Colim}(\mathsf{I} \circ M)\right) = \mathsf{Colim}'(\mathsf{C} \circ \mathsf{I} \circ M) = \mathsf{Colim}'(M)$$

puesto que como $M_i \in R{-}\mathsf{CMod}$, $\mathsf{C} \circ \mathsf{I}(M_i) = M_i$ para todo $i \in \mathcal{J}$. $\square$

Si aplicamos esta proposición a los límites y colímites más usuales tenemos:

Corolario 2.17 *Sea $f : M \to N$ un morfismo en $R{-}\mathsf{CMod}$, entonces*

1. $\mathsf{Ker}'(f) = \mathsf{Ker}(f)$, $\mathsf{ker}'(f) = \mathsf{ker}(f)$.
2. $\mathsf{Coker}'(f) = \mathsf{C}\left(\mathsf{Coker}(f)\right)$, $\mathsf{coker}'(f) = \mathsf{coker}(f) * \iota_{\mathsf{Coker}(f)}$.

Corolario 2.18 *Sea M_i una familia de objetos de $R-\mathsf{CMod}$, entonces*

1. $\prod'_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i$, $p'_j = p_j$.
2. $\coprod'_{i\in I} M_i = \mathsf{C}\left(\coprod_{i\in I} M_i\right)$, $q'_j = q_j * \iota_{\coprod_{i\in I} M_i}$.

En el caso de la categoría de módulos firmes disponemos de construcciones similares a la de la categoría de módulos cerrados, pero duales. El funtor inclusión canónica $\mathsf{J} : R-\mathsf{DMod} \to A-\mathsf{Mod}$ tiene un adjunto, en éste caso por la derecha, $\mathsf{D} : A-\mathsf{Mod} \to R-\mathsf{DMod}$. La existencia de este adjunto puede verse en [18, Proposition 13] que recordaremos en la Proposición 2.20. Vamos a repasar la construcción de dicho funtor, para ello necesitamos el siguiente resultado auxiliar que también será de utilidad en distintos puntos de la memoria y cuya demostración puede verse por ejemplo en [18, Proposition 10] o en [17, Proposición 3.13]. Para dar una mayor legibilidad a la memoria, incluiremos la demostración también aquí:

Proposición 2.19 *Sea M un R-módulo firme y K un submódulo de M. Entonces M/K es un R-módulo firme si y sólo si K es R-unitario.*

Demostración:
Consideremos el siguiente diagrama de filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] & M \arrow[r] & M/K \arrow[r] & 0 \\
R\otimes_A K \arrow[r] \arrow[u, "\mu_K"] & R\otimes_A M \arrow[r] \arrow[u, "\mu_M"] & R\otimes_A M/K \arrow[r] \arrow[u, "\mu_{M/K}"] & 0
\end{tikzcd}$$

El módulo M/K cumple que $R(M/K) = M/K$ porque M lo cumple, por lo tanto $\mu_{M/K}$ es suprayectivo. El resultado que tratamos de demostrar es que $\mu_{M/K}$ es un monomorfismo si y sólo si μ_K es un epimorfismo, pero usando el hecho de que μ_M es un isomorfismo (puesto que M es firme por hipótesis) el resultado es consecuencia del Lema de la Serpiente porque $\mathsf{Coker}(\mu_K)$ y $\mathsf{Ker}(\mu_{M/K})$ son isomorfos. $\square$

Para realizar la construcción del funtor D (que se puede ver en [18, Section 7]) tomaremos un generador cualquiera de la categoría $R-\mathsf{DMod}$ que llamaremos G (en el Corolario 2.30 veremos cómo construir un generador de la categoría). Tomaremos un módulo M de $A-\mathsf{Mod}$ y llamaremos $\mathsf{H}(M) = \mathsf{Hom}_A(G, M)$. Podemos definir $\eta_M : G^{(\mathsf{H}(M))} \to M$ tal que $(g_f)_{f\in\mathsf{H}(M)} \mapsto \sum_{f\in\mathsf{H}(M)}(g_f)f$. Con esta definición podemos utilizar la Proposición 2.19 para deducir que el módulo $G^{(\mathsf{H}(M))}/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\eta_M)\right)$ es un módulo firme. Éste es precisamente $\mathsf{D}(M)$ y $\nu_M : \mathsf{D}(M) \to M$ es el homomorfismo inducido por η_M. Si M es originariamente firme, η_M es un epimorfismo entre firmes que tendrá núcleo unitario, por lo tanto ν_M será un isomorfismo. El recíproco también es cierto porque $\mathsf{D}(M)$ es siempre firme.

Este homomorfismo ν_M en realidad es una transformación natural $\nu : \mathsf{J}\circ\mathsf{D} \to \mathrm{Id}_{A-\mathsf{Mod}}$ que es la counidad de la adjunción. De nuevo, tal y como sucedía en la categoría de módulos cerrados, si consideramos la categoría $R-\mathsf{DMod}$ dentro de la categoría $A-\mathsf{Mod}$ podemos considerar que para todo M en $A-\mathsf{Mod}$ tenemos un homomorfismo canónico $\nu_M : \mathsf{D}(M) \to M$.

Vamos a enumerar en forma de proposición una serie de propiedades que serán de utilidad en relación con el funtor D y la transformación natural ν.

Proposición 2.20 *Con las notaciones anteriores, se cumple que*

1. *Para cada A-módulo L se tiene que* $\mathsf{Im}(\nu_L) \subseteq \mathsf{U}(L)$.

2. *Para cada R-módulo firme N se tiene que* $N \simeq \mathsf{D}(N)$.

3. *Sea M un R-módulo firme y N un A-módulo. Entonces para cada homomorfismo $f : M \to N$ existe un único homomorfismo $\overline{f} : M \to \mathsf{D}(N)$ tal que $\overline{f} * \nu_N = f$.*

4. *El funtor $\mathsf{D} : A-\mathsf{Mod} \to R-\mathsf{DMod}$ es un adjunto por la derecha del funtor inclusión $\mathsf{J} : R-\mathsf{DMod} \to A-\mathsf{Mod}$.*

Demostración:
[18, Proposition 13] □

Utilizaremos frecuentemente la propiedad (3) de la proposición anterior. Para el siguiente resultado utilizaremos una proposición que probaremos más adelante, pues necesitamos para hacerlo la noción de soporte unitario que será introducida en la próxima sección.

Proposición 2.21 *Para todo A-módulo L, se tiene que* $\mathsf{Im}(\nu_L) = \mathsf{U}(L)$.

Demostración:
Vamos a empezar viendo que $\mathsf{Im}(\nu_L) = \mathsf{U}(L)$. Puesto que $\mathsf{Im}(\nu_L)$ es unitario, claramente está contenido en $\mathsf{U}(L)$, si no fuera el total, utilizando la Proposición 2.32 podemos encontar, para el generador G que hemos utilizado para la construcción de D, un homorfismo $h : G \to \mathsf{U}(L)$ tal que $\mathsf{Im}(h) \nsubseteq \mathsf{Im}(\nu_L)$, pero eso es una contradicción porque $h \in \mathsf{Hom}(G, L)$ y tal y como hemos visto antes, $\mathsf{Im}(\nu_L)$ es igual a $\mathsf{Im}(\eta_L)$ siendo $\eta_L : G^{(\mathsf{Hom}(G,L))} \to L$ el homorfismo $(g_f) \mapsto \sum_{f \in \mathsf{Hom}(G,L)} (g_f) f$. Entonces, necesariamente $\mathsf{Im}(h) \subseteq \mathsf{Im}(\eta_L) = \mathsf{Im}(\nu_L)$ de donde concluimos que $\mathsf{Im}(\nu_L) = \mathsf{U}(L)$. □

Corolario 2.22 *Sea L un A-módulo. Entonces L es R-unitario si y sólo si ν_L es sobreyectiva.*

Demostración:
Basta notar que $L = \mathsf{U}(L) = \mathsf{Im}(\nu_L)$. □

Proposición 2.23 *Sean U y L dos A-módulos tales que $U \subseteq L$ y U es unitario. Sea $j : U \to L$ la inclusión. Entonces $U = \mathsf{U}(L)$ si y sólo si $\mathsf{D}(j)$ es un isomorfismo.*

Demostración:
Empecemos suponiendo que $U = \mathsf{U}(L)$. Si nos fijamos en detalle en la construcción del funtor D, vemos que $\mathsf{Hom}(G, \mathsf{U}(L)) = \mathsf{Hom}(G, L)$ ya que todo homorfismo entre G y L tendrá una imagen unitaria (por ser cociente de G) y por lo tanto estará siempre contenida en $\mathsf{U}(L)$. El homomorfismo $\eta_{\mathsf{U}(L)}$ y η_L tienen claramente también el mismo núcleo y por tanto, la parte unitaria de este núcleo será igual. Esto hace que $\mathsf{D}(\mathsf{U}(L)) = \mathsf{D}(L)$, o dicho en otras palabras, $\mathsf{D}(j)$ es un isomorfismo.

Recíprocamente, como U es unitario, la imagen de j está siempre contenida en $\mathsf{U}(L)$ por lo que podemos descomponer j como $\alpha * \beta$, siendo $\alpha : U \hookrightarrow \mathsf{U}(L)$ y $\beta : \mathsf{U}(L) \hookrightarrow L$ las correspondientes inclusiones. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\alpha"] & \mathsf{U}(L) \arrow[r, "\beta"] & L \\ \mathsf{D}(U) \arrow[u, "\nu_U"] \arrow[r, "\mathsf{D}(\alpha)"] & \mathsf{D}(\mathsf{U}(L)) \arrow[u, "\nu_{\mathsf{U}(L)}"] \arrow[r, "\mathsf{D}(\beta)"] & \mathsf{D}(L) \arrow[u, "\nu_L"] \end{tikzcd}$$

Tal y como hemos visto al hacer la demostración en el sentido contrario, $\mathsf{D}(\beta)$ es un isomorfismo, así que lo que tenemos que probar para que la proposición sea cierta es que si $\mathsf{D}(\alpha)$ es un isomorfismo, entonces α lo es. Supongamos pues que $\mathsf{D}(\alpha)$ es un isomorfismo y fijémonos en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\alpha"] & \mathsf{U}(L) \\ \mathsf{D}(U) \arrow[u, "\nu_U"] \arrow[r, "\mathsf{D}(\alpha)"] & \mathsf{D}(\mathsf{U}(L)) \arrow[u, "\nu_{\mathsf{U}(L)}"] \end{tikzcd}$$

Como U y $\mathsf{U}(L)$ son unitarios, ν_U y $\nu_{\mathsf{U}(L)}$ son suprayectivas. Si α no fuese suprayectiva, podríamos encontrar un elemento $l \in \mathsf{U}(L)$ que no estuviera en la imagen, pero este lo podríamos levantar a $l' \in \mathsf{D}(\mathsf{U}(L))$ y a $l'' \in \mathsf{D}(U)$. Si aplicamos ν_U a l'' obtenemos un elmento de U que al aplicarle α tendría que ir a l por la conmutatividad del diagrama. Esto prueba que α es suprayectiva. $\Box$

Para terminar esta sección, vamos a ver la forma de calcular límites y colímites en $R-\mathsf{DMod}$ en función de las respectivas construcciones en $A-\mathsf{Mod}$. Las demostraciones de estos resultados son consecuencia inmediata de las propiedades de adjunción en relación con los límites de forma dual a como se han realizado las anteriores para los funtores C y I. Tal y como hemos hecho antes, utilizaremos las notaciones Lim', Colim', p'_i y q'_i para las construcciones en la subcategoría $R-\mathsf{DMod}$ y reservaremos las notaciones Lim, Colim, p_i y q_i para las construcciones en $A-\mathsf{Mod}$. Las relaciones entre todos estos objetos y morfismos son las siguientes:

Proposición 2.24 *Sea $\mathcal{J}$ una categoría pequeña y $M : \mathcal{J} \to R-\mathsf{DMod}$ un diagrama sobre $\mathcal{J}$. Entonces*

1. $\mathsf{J}\left(\mathsf{Colim}'(M)\right) = \mathsf{Colim}(\mathsf{J} \circ M)$, *o identificando,* $\mathsf{Colim}'(M) = \mathsf{Colim}(M)$. *En este caso $q'_j = q_j$ para todo $j \in \mathcal{J}$.*

2. $\mathsf{Lim}'(M) = \mathsf{D}(\mathsf{Lim}(\mathsf{J} \circ M))$, *o identificando,* $\mathsf{Lim}'(M) = \mathsf{D}(\mathsf{Lim}(M))$. *En este otro caso, $p'_j = \mathsf{D}(p_j) * \nu_{M_j} = \nu_{\mathsf{Lim}(M)} * p_j$ (esta última igualdad se desprende de la naturalidad de ν).*

Corolario 2.25 *Sea $f : M \to N$ un morfismo en $R-\mathsf{DMod}$, entonces*

1. $\mathsf{Coker}'(f) = \mathsf{Coker}(f)$, $\mathsf{coker}'(f) = \mathsf{coker}(f)$.

2. $\mathsf{Ker}'(f) = \mathsf{D}(\mathsf{Ker}(f))$, $\mathsf{ker}'(f) = \mathsf{D}(\mathsf{ker}(f)) * \nu_M = \nu_{\mathsf{Ker}(f)} * \mathsf{ker}(f)$.

Corolario 2.26 *Sea M_i una familia de objetos de $R-$DMod, entonces*

1. $\coprod'_{i\in I} M_i = \coprod_{i\in I} \mathsf{J}(M_i)$, $q'_j = q_j$ *para todo* $j \in I$.

2. $\prod'_{i\in I} M_i = \mathsf{D}\left(\prod_{i\in I} M_i\right)$, $p'_j = \mathsf{D}\left(p_j\right) * \nu_{M_j} = \nu_{\prod M_i} * p_j$.

2.4. Soportes Unitarios y Módulos Asociados

A lo largo de esta sección, R será un anillo con una descripción estándar (X, k, π, I). Identificaremos R con $k\langle X\rangle_0/I$ y $\pi : k\langle X\rangle \to A$ con la proyección canónica.

Antes de fijar la definición de soporte unitario, vamos a explicar la idea que subyace en esta técnica utilizando un ejemplo. Supongamos que $X = \{x, y\}$ y que M es un módulo unitario, entonces como $R = XA$ tenemos que $M = RM = XAM = XM$, es decir, todo elemento $m \in M$ se puede escribir de alguna forma como suma de productos de elementos de X por elementos de M. A cada uno de estos nuevos elementos de M les podemos volver a repetir el proceso que nos proporcionaría una estructura infinita. Supongamos que tenemos una serie de relaciones como siguen:

$$m = xu + yv$$

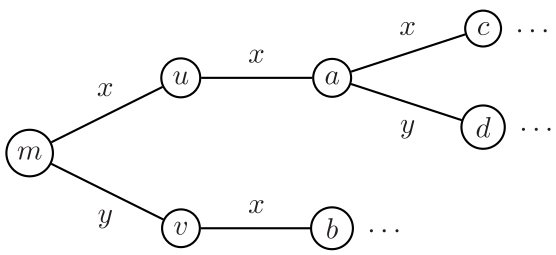
$$u = xa$$

$$v = xb$$

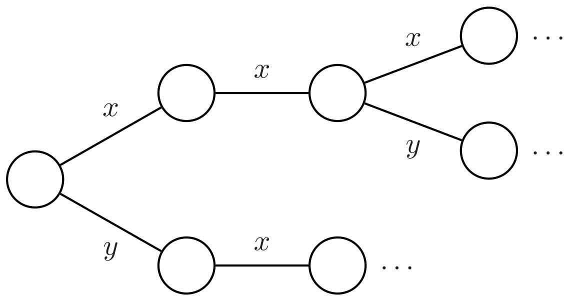
$$a = xc + yd$$

$$\dots$$

Cada elemento de M lo representaremos por un nodo en un árbol, del que saldrán tantas ramas como sumandos tenga la combinación de elementos de X por elementos de M en la que descomponemos el elemento. Cada una de las ramas estará indizada por el elmento de X que multiplica y en el nodo al que llega pondremos el elemento de M que está multiplicado por él. El ejemplo que hemos puesto tendría una representación como ésta:



Si nos olvidamos de los elementos concretos del módulo M y nos quedamos con la estructura de nodos y relaciones entre ellos obtenemos lo siguiente:



Para definir la estructura necesitamos pues un nodo origen y para cada nodo, una cantidad finita de nodos sucesores indizados por elementos de X, ésto da origen a la siguiente definición

Definición 2.27 *Un soporte unitario σ es un subconjunto de $\langle X \rangle$ cumpliendo las siguientes condiciones:*

1. *Para todo $\overline{x} \in \sigma$ y todo $\overline{z} \leq \overline{x}$ se cumple que $\overline{z} \in \sigma$.*

2. *Para todo $\overline{x} \in \sigma$, el conjunto $\{y \in X : \overline{x}y \in \sigma\}$ es finito y no vacío.*

Al conjunto de todos los soportes sobre X lo denotaremos $\Xi_{\mathsf{U}}(X)$.

El concepto de soporte unitario surgió por primera vez en [18] para la construcción de un generador de la categoría de módulos firmes. La idea está inspirada en construcciones de Bass para el estudio de la T-nilpotencia. Estas construcciones (que se pueden ver por ejemplo en [1, Chapter 28]) se corresponderían con los soportes unitarios en los que cada nodo tiene uno y sólo un sucesor. Una versión inicial del concepto de módulo asociado a soporte en esta forma lineal se hizo en [16] para la construcción de algunos módulos firmes.

Vamos a realizar la construcción general del módulo asociado a un soporte unitario σ. Para ello tomemos $\sigma \in \Xi_{\mathsf{U}}(X)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ vamos a definir $F_n = A^{X^n \cap \sigma}$. Fijémonos que como cada nodo tiene a lo sumo una ramificación finita, $X^n \cap \sigma$ siempre es un conjunto finito (ver [18, Lemma 7]). En el módulo libre F_n denotaremos $[\underline{x}]_\sigma$ al elemento de F_n que tiene 1_A en la componente $\overline{x}$-ésima, para cada $\overline{x} \in X^n \cap \sigma$ y 0 en el resto de componentes.

Con esta notación definiremos los homomorfismos

$$F_n \to F_{n+1} \quad [\underline{x}]_\sigma \mapsto \sum_{\{y \in X : \overline{x}y \in \sigma\}} \pi(y)[y\underline{x}]_\sigma$$

(Esta suma es finita porque σ es un soporte unitario) Para todo $\sigma \in \Xi_{\mathsf{U}}(X)$, el módulo

$$\langle\langle \sigma \rangle\rangle = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

está en la categoría $R-\mathsf{DMod}$ [18, Proposition 8] y es un A-módulo plano (es un límite directo de módulos proyectivos de $A-\mathsf{Mod}$). Nos referiremos a este módulo como el módulo asociado a σ. El elemento asociado a $[\underline{x}]_\sigma$ en $\langle\langle \sigma \rangle\rangle$ lo denotaremos $\langle \underline{x} \rangle_\sigma$. En [18] la definición de los módulos asociados a soportes se realiza también mediante límites directos, sin embargo en [17] se realiza como un cociente del módulo libre $A^{(\sigma)}$. Ambas construcciones son equivalentes tal y como se prueba en [17, Proposición 4.6].

La construcción general de módulos asociados a soportes unitarios aparece para construir el módulo $\coprod_{\sigma\in\Xi_{\mathsf{U}}X}\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$ como el generador de la categoría $R-\mathsf{DMod}$ en [18, Proposition 12]. La siguiente proposición, cuya demostración puede verse en [17, Proposición 4.5], vamos a incluirla aquí con una demostración adaptada a la definición en términos de límite directo.

Proposición 2.28 *Sea σ un soporte unitario no vacío y $\sum_{\overline{x}\in\sigma\cap X^n} a_{\overline{x}}\langle\underline{x}\rangle_\sigma$ un elemento de $\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$ con $a_{\overline{x}}\in A$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\sum_{\overline{x}\in\sigma\cap X^n} a_{\overline{x}}\langle\underline{x}\rangle_\sigma = 0$.
2. $a_{\overline{x}}\langle\underline{x}\rangle_\sigma = 0$ *para cualquier* $\overline{x}\in\sigma\cap X^n$.
3. *Existe $m\geq n$ tal que para cualquier $\overline{z}\in\sigma\cap X^m$ tenemos*

$$a(z_1\cdots z_n)\pi(z_{n+1}\cdots z_m)=0$$

Demostración:
La implicación $(2\Rightarrow 1)$ es trivial. Para ver $(3\Rightarrow 2)$ supongamos que se cumple (3) y consideremos el elemento $a(\overline{x})[\underline{x}]_\sigma\in F_n$. Si aplicando los morfismos que nos definen la estructura de límite directo lo llevamos a F_m tenemos que

$$a(\overline{x})[\underline{x}]_\sigma=\sum_{\overline{x}\leq\overline{z}\in X^m} a(z_1\cdots z_n)\pi(z_{n+1}\cdots z_m)[\underline{z}]_\sigma,$$

pero cada uno de estos sumandos es 0 por aplicación de (3), por lo tanto la clase de $a(\overline{x})[\underline{x}]_\sigma$ es la clase del 0 en $\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$.

Para ver $(1\Rightarrow 3)$ supongamos que $\sum_{\overline{x}\in\sigma\cap X^n} a_{\overline{x}}\langle\underline{x}\rangle_\sigma=0$, entonces, por definición de límite directo, el elemento $\sum_{\overline{x}\in\sigma\cap X^n} a_{\overline{x}}[\underline{x}]_\sigma\in F_n$ irá a $0\in F_m$ a través de los homomorfismos de estructura para algún $m\geq n$. Puesto que F_m es el módulo libre $A^{X^m\cap\sigma}$, la imagen de $\sum_{\overline{x}\in\sigma\cap X^n} a_{\overline{x}}[\underline{x}]_\sigma$ tendrá que valer 0 en cada una de sus componentes en F_m, pero dichas componentes son precisamente los valores $a(z_1\cdots z_n)\pi(z_{n+1}\cdots z_m)$ que han de ser 0 para todo $\overline{z}\in X^m\cap\sigma$. $\square$

Vamos a comprobar formalmente que realmente los soportes unitarios nos permiten representar la propiedad que tienen los elementos de un módulo unitario. Esta demostración puede verse en un caso algo más general en [18, Proposition 9].

Proposición 2.29 *Sea M un R-módulo unitario y $m\in M$, entonces existe $\sigma\in\Xi_{\mathsf{U}}(X)$ y $f:\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle\to M$ tal que $(\langle 1\rangle_\sigma)f=m$.*

Demostración:
Si $m=0$ podemos tomar cualquier soporte unitario no vacío σ y considerar el morfismo constantemente igual a 0. Supongamos que m no es 0. Vamos a realizar una construcción recursiva del siguiente modo. Definamos $\sigma_0=\{1\}$ y $h_0:\sigma_0\to M$ la aplicación que lleva 1 a

m. Supongamos que ya hemos definido $\sigma_n \subseteq X^n$ y $h_n : \sigma_n \to M \setminus 0$. Para cada $\overline{x} \in \sigma_n$, como $h(\overline{x}) \in M = \pi(X)M$ ponemos definir un conjunto finito y no vacío $V_{\overline{x}} \subseteq X$ y $g_{\overline{x}} : V_{\overline{x}} \to M \setminus 0$ tal que $h_n(\overline{x}) = \sum_{y \in V_{\overline{x}}} \pi(y) g_{\overline{x}}(y)$. Definiremos $\sigma_{n+1} = \{\overline{x}y \in X^{n+1} : \overline{x} \in \sigma_n, y \in V_{\overline{x}}\}$ y $h_{n+1}(\overline{x}y) = g_{\overline{x}}(y)$ para todo $\overline{x}y \in \sigma_{n+1}$.

Finalmente definiremos $\sigma = \cup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n$. Este conjunto es un soporte unitario porque $X^n \cap \sigma = \sigma_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y son conjuntos finitos por construcción. Además, para cada $\overline{x} \in \sigma$ el conjunto de elementos y tales que $\overline{x}y \in \sigma$ es precisamente $V_{\overline{x}}$ que hemos visto que es finito y no vacío.

Por último podemos definir $\hat{h}_n : F_n \to M$ como $([\underline{x}]_\sigma)\hat{h}_n = h_n(\overline{x})$. Estos homomorfismos inducen $h = \varinjlim \hat{h}_n : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to M$ tal que $(\langle \underline{x} \rangle_\sigma)h = h_{\lambda(\overline{x})}(\overline{x})$ y en particular $(\langle 1 \rangle_\sigma)h = m$. $\square$

Como consecuencia inmediata de este resultado podemos ver que estos módulos asociados a soportes forman una familia que genera la categoría. Aunque en una redacción un poco diferente, estos resultados se pueden encontar en [18].

Corolario 2.30 *El módulo $\coprod_{\sigma \in \Xi_{\mathsf{U}}(X)} \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$ es un generador de $R-\mathsf{DMod}$.*

Demostración:
Sea $G = \coprod_{\sigma \in \Xi_{\mathsf{U}}(X)} \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$ y M un módulo de $R-\mathsf{DMod}$. Para todo $m \in M$ tenemos un homomorfismo $f : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to M$ tal que $(\langle 1 \rangle_\sigma)f = m$ y componiendo con la proyección en $\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$ tenemos un homomorfismo $G \to M$ tal que m esté en la imagen.

Consideremos el homomorfismo $\eta : G^{(\mathsf{Hom}_A(G,M))} \to M$ que lleva a $(g_f)_{f \in \mathsf{Hom}_A(G,M)}$ a $\sum_{f \in \mathsf{Hom}_A(G,M)} (g_f)f$. El argumento anterior nos garantiza que $\mathsf{Im}(\eta) = M$ y por lo tanto η es un epimorfismo. $\square$

Los soportes unitarios están ordenados con la inclusión. Esta relación de orden pasa también a los módulos asociados a través de los siguientes epimorfismos canónicos (definidos en [17, Definición 4.11]):

Definición 2.31 *Sean $\sigma \subseteq \tau$ dos soportes unitarios, entonces podemos definir el homomorfismo $\Phi_{\tau\sigma} : \langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle \to \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$ que lleva $\langle \underline{x} \rangle_\tau$ a $\langle \underline{x} \rangle_\sigma$ si $\overline{x} \in \sigma$ y a 0 en otro caso.*

Proposición 2.32 *Sea G un generador cualquiera de la categoría de módulos firmes y sean M y N dos A-módulos unitarios tales que $M \subseteq N$. Entonces $M = N$ si y sólo si, para todo $h : G \to N$, $\mathsf{Im}(h) \subseteq M$.*

Demostración:
Si $M = N$ el resultado es evidente. El problema es el recíproco. Supongamos que $M \subsetneq N$, entonces podemos encontrar $n \in N$ tal que $n \notin M$. Utilizando la Proposición 2.29 podemos encontrar un soporte unitario σ y un homomorfismo $f : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to N$ tal que $(\langle 1 \rangle_\sigma)f = n$. Como G es un generador de $R-\mathsf{DMod}$, podemos encontar un conjunto de índices J y un epimorfismo $\eta : G^{(J)} \to \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$. Si componemos este epimorfismo con $f : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to N$ obtenemos $\eta * f : G^{(J)} \to N$ tal que $n \in \mathsf{Im}(\eta * f)$. Tomemos $(g_j)_{j \in J} \in G^{(J)}$ tal que $n = ((g_j)_{j \in J})(\eta * f)$. Si llamamos $q_j : G \to G^{(J)}$ a las inyecciones canónicas, $n = \sum_{j \in J} (g_j)(q_j * \eta * f)$ siendo esta suma finita puesto que g_j es 0 para casi todo $j \in J$.

Como $n \in N \setminus M$, existirá algún $j \in J$ tal que $(g_j)(q_j * \eta * f) \notin M$ (puesto que si todos estuvieran en M, la suma de ellos también estaría). Llamando $h = q_j * \eta * f$ para dicho índice $j \in J$, obtenemos que $(g_j)h \in N \setminus M$ y por lo tanto $\mathsf{Im}(h) \not\subseteq M$. $\square$

Capítulo 3

Caracterizaciones de la Abelianidad

Tal y como se prueba en [18], la categoría de módulos firmes cumple todas las propiedades de abelianidad excepto la de que todo monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$ sea el núcleo de algún otro morfismo.

En este capítulo vamos a ver una serie de propiedades que son equivalentes a la abelianidad de la categoría de módulos firmes.

3.1. Evanescencia Uniforme

Empecemos con un primer resultado que nos dice cómo son los monomorfismos y los núcleos:

Proposición 3.1 *Sea $f : M \to N$ un homomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$. Entonces*

1. *f es un monomorfismo si y sólo si $\mathsf{Ker}(f)$ es evanescente.*

2. *f es un núcleo si y sólo si f es el núcleo de $p : N \to N/\mathsf{Im}(f)$.*

Demostración:

1. Este resultado está en [18, Proposition 12.5] y también en [17, Proposición 5.11].

2. Si f es el núcleo de p, entonces necesariamente f es un núcleo. Supongamos en el otro sentido que f es el núcleo de $h : N \to H$, entonces $f * h = 0$ e $\mathsf{Im}(f) \subseteq \mathsf{Ker}(h)$.

   Probaremos que f es el núcleo de p. Si $g : L \to N$ cumple que $g * p = 0$, entonces $\mathsf{Im}(g) \subseteq \mathsf{Ker}(p) = \mathsf{Im}(f) \subseteq \mathsf{Ker}(h)$. Así, $g * h = 0$ y entonces, usando que f es el núcleo de h, existe un único morfismo $\overline{g} : L \to M$ tal que $\overline{g} * f = g$. Por lo que f es el núcleo de p.

□

Hemos visto que $f : M \to N$ es un monomorfismo si y sólo si $\mathsf{Ker}(f)$ es evanescente. Los núcleos también cumplen esta propiedad. Lo que vamos a ver en esta sección es cuál es la propiedad adicional a la evanescencia que tiene que cumplir $\mathsf{Ker}(f)$ para ser un núcleo a la que llamaremos evanescencia uniforme. Vamos a necesitar el siguiente resultado auxiliar que será de utilidad también en resultados posteriores:

Lema 3.2 *Sea $f : M \to N$ un homomorfismo en $A-\mathsf{Mod}$, σ un soporte unitario, $g : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to N$ un A-homomorfismo tal que $\mathsf{Im}(g) \subseteq \mathsf{Im}(f)$ y $m \in M$ tal que $(m)f = (\langle 1\rangle_\sigma)g$. Si $K = \mathsf{Ker}(f)$ es R-unitario, entonces existe un soporte unitario τ tal que $\sigma \subseteq \tau$ y $h : \langle\langle\tau\rangle\rangle \to M$ con $(\langle 1\rangle_\tau)h = m$, haciendo conmutativo el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\langle\langle\tau\rangle\rangle \arrow[r, "\Phi_{\tau\sigma}"] \arrow[d, "h"'] & \langle\langle\sigma\rangle\rangle \arrow[d, "g"] \\
M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

Demostración:

Construiremos de forma recursiva subconjuntos $V_n \subseteq X^n$ y aplicaciones $h_n : V_n \to M$ tales que $\sigma \cap X^n \subseteq V_n$ y para cada $\overline{x} \in V_n$ se cumpla que $(\langle \underline{x}\rangle_\sigma)g = (\overline{x})h_n * f$ si $\overline{x} \in \sigma$ y $(\overline{x})h_n * f = 0$ en otro caso.

Para el caso $n = 0$ empecemos definiendo $V_0 = \{1\}$ y $h_0 : V_0 \to M$ que lleve 1 a m.

Para el caso $n = 1$, como el módulo K es R-unitario tenemos $\pi(X)K = K$. Usando que $\mathsf{Im}g \subseteq \mathsf{Im}f$, podemos encontrar elementos $\{m_x\}_{x\in X\cap\sigma}$ en M tales que $(m_x)f = (\langle x\rangle_\sigma)g$ para cada $x \in X \cap \sigma$. Entonces

$$(m)f = (\langle 1\rangle_\sigma)g = \sum_{x\in X\cap\sigma} \pi(x)(\langle x\rangle_\sigma)g = \sum_{x\in X\cap\sigma} \pi(x)(m_x)f = \left(\sum_{x\in X\cap\sigma} \pi(x)m_x\right) f$$

Consideramos el elemento $m - \sum_{x\in X\cap\sigma} \pi(x)m_x$ que, por la igualdad anterior, será un elemento de $K = \mathsf{Ker}(f)$, que es unitario, por lo que podemos encontrar elementos $\{k_x\}_{x\in X}$ en K, todos cero salvo un número finito, tales que $m - \sum_{x\in X\cap\sigma} \pi(x)m_x = \sum_{x\in X} \pi(x)k_x$, es decir, $m = \sum_{x\in X} \pi(x)(k_x + m_x)$, haciendo $m_x = 0$ para cada $x \in X \setminus \sigma$.

Sea $V_1 = \{x \in X : k_x + m_x \neq 0\} \cup (\sigma \cap X)$ y $h_1 : V_1 \to M$ definida como $(x)h_1 = k_x + m_x$ para cada $x \in V_1$. Entonces es claro que $(1)h_0 * f = (m)f = (\langle 1\rangle_\sigma)g$ y, además, si $x \in V_1 \cap \sigma$ entonces $(x)h_1 * f = (k_x + m_x)f = (m_x)f = (\langle \underline{x}\rangle_\sigma)g$ donde se ha tenido en cuenta que $(k_x)f = 0$. Cuando $m_x = 0$, se cumple $(x)h_1 * f = (k_x)f = 0$.

Supongamos definido el conjunto $V_n \subseteq X^n$ y la aplicación $h_n : V_n \to M$ con las propiedades antes mencionadas, entonces definimos V_{n+1} y $h_{n+1} : V_{n+1} \to M$ de la siguiente manera: tomamos $\overline{z} \in V_n$, si $\overline{z}$ no está en σ, entonces $(\overline{z})h_n * f = 0$, por lo que $(\overline{z})h_n \in K$, y podemos encontrar elementos $\{k_{\overline{z}x}\}_{x\in X}$, todos cero salvo un número finito, tales que $(\overline{z})h = \sum_{x\in X} \pi(x)k_{\overline{z}x}$. Si $\overline{z} \in \sigma$, entonces $(\langle \underline{z}\rangle_\sigma)g = (\overline{z})h_n * f$. Además, para cada $x \in X$ con $\overline{z}x \in \sigma$, existe $m_{\overline{z}x}$ en M con $(m_{\overline{z}x})f = (\langle x\underline{z}\rangle_\sigma)g$. Entonces tenemos que

$$(\overline{z})h_n * f = (\langle \underline{z} \rangle_\sigma)g = \sum_{x \in X \cap \underline{z}^\star \sigma} \pi(x)(\langle x\underline{z} \rangle_\sigma)g = \sum_{x \in X \cap \underline{z}^\star \sigma} \pi(x)(m_{\overline{z}x})f$$

Así, $(\overline{z})h_n - \sum\limits_{\{x \in X : \overline{z}x \in \sigma\}} \pi(x)m_{\overline{z}x}$ está en K, podemos encontrar elementos $\{k_{\overline{z}x}\}_{x \in X}$ tales que $(\overline{z})h_n - \sum\limits_{\{x \in X : \overline{z}x \in \sigma\}} \pi(x)m_{\overline{z}x} = \sum_{x \in X} \pi(x)k_{\overline{z}x}$. Podemos escribir $(\overline{z})h_n = \sum_{x \in X} \pi(x)(k_{\overline{z}x} + m_{\overline{z}x})$, haciendo $m_{\overline{z}x} = 0$ para cada $\overline{z}x$ que no está en σ. Definimos

$$V_{n+1} = \{\overline{z}x : \overline{z} \notin \sigma, k_{\overline{z}x} \neq 0\} \cup \{\overline{z}x : \overline{z} \in \sigma, k_{\overline{z}x} + m_{\overline{z}x} \neq 0\} \cup (\sigma \cap X^{n+1})$$

y $h_{n+1} : V_{n+1} \to M$ dada por

$$(\overline{z}x)h_{n+1} = \begin{cases} k_{\overline{z}x} & \text{si } \overline{z} \notin \sigma \\ k_{\overline{z}x} + m_{\overline{z}x} & \text{si } \overline{z} \in \sigma \end{cases}$$

Sea $\overline{z}x \in V_{n+1}$, si $\overline{z} \in \sigma$ entonces $(\overline{z}x)h_{n+1} * f = (k_{\overline{z}x} + m_{\overline{z}x})f = (m_{\overline{z}x})f = (\langle \underline{z}x \rangle_\sigma)g$. Si, por el contrario, $\overline{z} \notin \sigma$, entonces $(\overline{z}x)h_{n+1} * f = (k_{\overline{z}x})f = 0$.

Definimos $\tau = \cup_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Este conjunto τ es un soporte unitario ya que por la forma de construir los conjuntos V_n, para cada $x_1 \cdots x_{n+1} \in V_{n+1}$ tenemos que $x_1 \cdots x_n \in V_n$ porque usamos elementos de V_n para formar los elementos de V_{n+1}. Definimos $h : \langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle \to M$ como $(\langle \underline{x} \rangle_\tau)h = (\overline{x})h_{\lambda(\overline{x})}$, donde $\lambda(\overline{x}) \in \mathbb{N}$ con $\overline{x} \in V_{\lambda(\overline{x})}$. Comprobaremos que τ y h cumplen las propiedades que esperábamos encontrar.

Sea $\overline{x}$ un elemento de τ. Si $\overline{x} \in \sigma$, entonces $(\langle \underline{x} \rangle_\tau)\Phi_{\tau\sigma} = \langle \underline{x} \rangle_\sigma$ y, en otro caso, $(\langle \underline{x} \rangle_\tau)\Phi_{\tau\sigma} = 0$. En el primer caso $(\langle \underline{x} \rangle_\tau)h * f = (\overline{x})h_{\lambda(\overline{x})} * f = (\langle \underline{x} \rangle_\sigma)g = (\langle \underline{x} \rangle_\tau)\Phi_{\tau\sigma} * g$, y en el segundo $(\langle \underline{x} \rangle_\tau)h * f = 0 = (0)g = (\langle \underline{x} \rangle_\tau)\Phi_{\tau\sigma} * g$. Concluimos que $h * f = \Phi_{\tau\sigma} * g$. $\square$

Lema 3.3 *Sea $f : M \to N$ y $g : P \to N$ dos A-homomorfismos con P un módulo R-unitario e $\mathsf{Im}(g) \subseteq \mathsf{Im}(f)$. Si $K = \mathsf{Ker}(f)$ cumple $RK = 0$, entonces existe un único homomorfismo $h : R \otimes_A P \to M$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ R \otimes_A P \arrow[u, "h"] \arrow[r, "\mu_P"'] & P \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Además, si P está en $R-\mathsf{DMod}$, dado que μ_P es un isomorfismo, podemos levantar $g : P \to N$ a $\overline{g} : P \to M$.

Demostración:
Sea $p \in P$ y $r \in R$, entonces $(p)g = (m)f$ para algún $m \in M$. Definimos $(r,p)h_1 = rm$. Supongamos que existe otro elemento $m_1 \in M$ tal que $(p)g = (m_1)f$, entonces $m - m_1 \in K$ y, por hipótesis, debe ser $r(m - m_1) = 0$ y entonces $rm = rm_1$. Así la aplicación h_1 no depende de la elección de m y está bien definida.

Probaremos que h_1 es lineal en las dos variables. Sean p y p' elementos de P con $(p)g = (m)f$ y $(p')g = (m')f$ (y por lo tanto cumplirán $(p+p')g = (m+m')f$). Sean r y r' elementos de R. Entonces

$$(r,p)h_1 + (r,p')h_1 = rm + rm' = r(m+m') = (r, p+p')h_1$$

$$(r,p)h_1 + (r',p)h_1 = rm + r'm = (r+r')m = (r+r',p)h_1$$

que son las condiciones para ser lineal en las dos variables.

Probaremos, ahora, que h_1 es A-equilibrada. Sea a un elemento de A. Si $(p)g = (m)f$ entonces $(ap)g = a(p)g = a(m)f = (am)f$ así que

$$(r,ap)h_1 = r(am) = (ra)m = (ra,p)h_1$$

.

Definimos $h : R \otimes_A P \to M$ por $(r \otimes p)h = (r,p)h_1$ y obtenemos la conmutatividad del diagrama, ya que si $r \otimes p \in R \otimes_A P$ y m es un elemento de M con $(p)g = (m)f$ entonces

$$(r \otimes p)\mu_P * g = (rp)g = r(p)g = r(m)f = (rm)f = (r,p)h_1 * f = (r \otimes p)h * f$$

Veamos que el homomorfismo h es único. Supongamos que existen $h_1, h_2 : R \otimes_A P \to M$ tales que $(r \otimes p)h_1 * f = (rp)g = (r \otimes p)h_2 * f$, entonces $(h_1 - h_2) * f = 0$, por lo que $h_1 - h_2$ es un homomorfismo de $R \otimes_A P$ a K debe ser 0 porque $R \otimes_A P$ es unitario (por ser P unitario) y K es evanescente. Así $h_1 = h_2$. $\square$

Sea M un A-módulo y K un A-submódulo de M. La cadena

$$\mathsf{u}^0(K) \supseteq \mathsf{u}^1(K) \supseteq \cdots \supseteq \mathsf{u}^\beta(K) \supseteq \cdots$$

dada en la Definición 2.12 induce epimorfismos $h_{\beta\gamma} : M/\mathsf{u}^\gamma(K) \to M/\mathsf{u}^\beta(K)$ para cada ordinal $\beta \leq \gamma$. Si consideramos la familia de módulos $M/\mathsf{u}^\beta(K)$ con $\beta < \alpha$ y los homomorfismos $\{h_{\beta\gamma} : \beta \leq \gamma < \alpha\}$ tenemos un sistema inverso. Podemos tomar límites inversos y obtener un homomorfismo

$$h_\alpha : M/\mathsf{u}^\alpha(K) \to \varprojlim_{\beta<\alpha} M/\mathsf{u}^\beta(K)$$

Lema 3.4 *Si α es un ordinal límite entonces h_α es un homomorfismo inyectivo. En este caso, tiene sentido el cociente*

$$\frac{\varprojlim_{\beta<\alpha} M/\mathsf{u}^\beta(K)}{M/\mathsf{u}^\alpha(K)}$$

Demostración:
Si $0 = (m+\mathsf{u}^\alpha(K))h_\alpha = (m+\mathsf{u}^\beta(K))_{\beta<\alpha}$, entonces $m \in \mathsf{u}^\beta(K)$ para cada $\beta < \alpha$, pero entonces $m \in \mathsf{u}^\alpha(K)$ que por la propia definición es $\mathsf{u}^\alpha(K) = \bigcap_{\beta<\alpha} \mathsf{u}^\beta(K)$. Así, $0 = m + \mathsf{u}^\alpha(K)$.

El cociente mencionado es $\mathsf{Coker}(h_\alpha)$. $\square$

Los conúcleos de estos homomorfismos juegan un papel importante en la caracterizacón de los núcleos en $R-$DMod. Más concretamente, en la caracterizacón de cómo son los módulos K tales que un homomorfismo entre módulos firmes $f : M \to N$ con $K = \mathsf{Ker}(f)$ es un núcleo en $R-$DMod.

Definición 3.5 *Sea M un módulo firme y K un A-submódulo de M. Diremos que K es uniformemente evanescente en M si es evanescente y para todo ordinal límite α,*

$$\mathsf{U}\left(\frac{\varprojlim_{\beta<\alpha} M/\mathsf{u}^{\beta}(K)}{M/\mathsf{u}^{\alpha}(K)}\right) = 0.$$

Teorema 3.6 *Sea $f : M \to N$ un monomorfismo en $R-$*DMod *y $K = \mathsf{Ker}(f)$. Son equivalentes:*

1. *K es uniformemente evanescente en M.*
2. *f es un núcleo.*

Demostración:
$(1 \Rightarrow 2)$. Sea $g : P \to N$ un homomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$ tal que $\mathsf{Im}(g) \subseteq \mathsf{Im}(f)$. Para cada ordinal β, definiremos un homomorfismo $g_\beta : P \to M/\mathsf{u}^{\beta}(K)$. Estos homomorfismos serán compatibles con la estructura de límite inverso y cuando se llegue al ordinal δ para el que $\mathsf{u}^{\delta}(K) = 0$ (al que se tendrá que llegar porque K es evanescente), el correspondiente g_δ será el levantamiento que buscamos de g.

La construcción será hecha de forma recursiva. Sea $g_0 : P \to \mathsf{Im}(g) \subseteq \mathsf{Im}(f) = M/K = M/\mathsf{u}^{0}(K)$ el homomorfismo inducido por g. Supongamos definido $g_\beta : P \to M/\mathsf{u}^{\beta}(K)$ para $\beta < \alpha$ satisfaciendo las condiciones previas y vamos a definir g_α. Se pueden dar dos casos:

Caso 1: Si $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal β, entonces $\mathsf{u}^{\alpha}(K) = R\mathsf{u}^{\beta}(K)$ y tenemos los homomorfismos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \frac{\mathsf{u}^{\beta}(K)}{R\mathsf{u}^{\beta}(K)} \arrow[r] & \frac{M}{\mathsf{u}^{\alpha}(K)} \arrow[r, "h_{\beta\alpha}"] & \frac{M}{\mathsf{u}^{\beta}(K)} \arrow[r] & 0 \\
 & & & P \arrow[u, "g_\beta"] &
\end{tikzcd}$$

Se cumplen las condiciones del Lema 3.3, ya que $R\left(\frac{\mathsf{u}^{\beta}(K)}{R\mathsf{u}^{\beta}(K)}\right) = 0$, P es un módulo firme e $\mathsf{Im}(g_\beta) \subseteq \frac{M}{\mathsf{u}^{\beta}(K)} = \mathsf{Im}(h_{\beta\alpha})$. Por tanto, podemos levantar g_β a $g_\alpha : P \to M/\mathsf{u}^{\alpha}(K)$.

Caso 2: Si α es un ordinal límite, consideramos $\varprojlim_{\beta<\alpha} M/\mathsf{u}^{\beta}(K)$. Como los homomorfismos g_β son compatibles con la estructura de límite inverso existirá $\hat{g}_\alpha : P \to \varprojlim_{\beta<\alpha} M/\mathsf{u}^{\beta}(K)$. Si hacemos la composición

$$P \to \varprojlim_{\beta<\alpha} M/\mathsf{u}^{\beta}(K) \to \frac{\varprojlim_{\beta<\alpha} M/\mathsf{u}^{\beta}(K)}{M/\mathsf{u}^{\alpha}(K)}$$

y teniendo en cuenta que por hipótesis el último de los módulos es evanescente, la composición debe ser cero, tenemos así que la imagen de $\hat{g}_\alpha$ está contenida en $M/\mathsf{u}^{\alpha}(K)$. Por lo que obtenemos un homomorfismo $g_\alpha : P \to M/\mathsf{u}^{\alpha}(K)$.

Una vez probado que $g : P \to N$ puede ser levantado a $g' : P \to M$ tenemos que probar la unicidad del levantamiento. Supongamos que existen dos homomorfismos $g', g'' : P \to M$ satisfaciendo $g' * f = g = g'' * f$, entonces $(g' - g'') * f = 0$ y $g' - g'' : P \to M$ tiene la imagen contenida en K que es evanescente e $\mathsf{Im}(g' - g'')$ es R-unitario por ser P un módulo firme, así debe ocurrir que $g' - g'' = 0$ y por lo tanto $g' = g''$.

$(2 \Rightarrow 1)$. Supongamos que f es un núcleo y que la condición (1) no es satisfecha para algún α. Entonces podemos encontrar un elemento no nulo

$$w \in \mathsf{U}\left(\frac{\varprojlim_{\beta<\alpha} M/\mathsf{u}^{\beta}(K)}{M/\mathsf{u}^{\alpha}(K)}\right)$$

Para este elemento podemos encontrar un soporte unitario σ y un homomorfismo

$$\bar{g} : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to \frac{\varprojlim_{\beta<\alpha} M/\mathsf{u}^{\beta}(K)}{M/\mathsf{u}^{\alpha}(K)}$$

tal que $(\langle 1\rangle_{\sigma})\bar{g} = w$. El módulo $M/\mathsf{u}^{\alpha}(K)$ es R-unitario (porque M lo es), estamos así en las condiciones del Lema 3.2 y podemos encontrar un soporte unitario τ y un homomorfismo $\tilde{g} : \langle\langle\tau\rangle\rangle \to \varprojlim_{\beta<\alpha} M/\mathsf{u}^{\beta}(K)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim_{\beta<\alpha} M/\mathsf{u}^{\beta}(K) \arrow[r] & \dfrac{\varprojlim_{\beta<\alpha} M/\mathsf{u}^{\beta}(K)}{M/\mathsf{u}^{\alpha}(K)} \\
\langle\langle\tau\rangle\rangle \arrow[u, "\tilde{g}"] \arrow[r, "\Phi_{\tau\sigma}"] & \langle\langle\sigma\rangle\rangle \arrow[u, "\bar{g}"']
\end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Para cualquier $\gamma < \alpha$, sea $p_{\gamma} : \varprojlim_{\beta<\alpha} M/\mathsf{u}^{\beta}(K) \to M/\mathsf{u}^{\gamma}(K)$ la proyección en la γ-ésima componente. Usando que f es un núcleo, podemos levantar el homomorfismo $\tilde{g} * p_0 : \langle\langle\tau\rangle\rangle \to M/\mathsf{u}^{0}(K) = M/K \subseteq N$ a $\hat{g} : \langle\langle\tau\rangle\rangle \to M$, es decir, $\tilde{g} * p_0 = \hat{g} * f$, lo cual nos proporciona el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N \\
 & \langle\langle\tau\rangle\rangle \arrow[ul, "\hat{g}"] \arrow[u, "\tilde{g}*p_0"']
\end{tikzcd}$$

Teniendo en cuenta que $\mathsf{Im}(f) \simeq M/\mathsf{Ker}(f) = M/K$, si m' es un elemento de $\langle\langle\tau\rangle\rangle$ entonces $(m')\tilde{g} * p_0 = (m')\hat{g} * f$, es decir $(m')\tilde{g} + K = (m')\hat{g} + K$.

Sea $j : M \to \varprojlim_{\beta<\alpha} \mathsf{u}^{\beta}(K)$ la aplicación definida como $(m)j = (m + \mathsf{u}^{\beta}(K))_{\beta<\alpha}$. La composición $\hat{g} * j * p_{\beta}$ coincide con $\tilde{g} * p_{\beta}$ para $\beta = 0$, ya que si m' es un elemento de $\langle\langle\tau\rangle\rangle$ entonces $(m')\hat{g} * j * p_0 = (m')\hat{g} + K = (m')\tilde{g} + K = (m')\tilde{g} * p_0$.

Probaremos que $\hat{g}*j*p_\beta = \tilde{g}*p_\beta$ para cada $\beta < \alpha$ lo cual implicará que $\hat{g}*j = \tilde{g}$ utilizando las propiedades de límite.

Supongamos que no es cierto, podemos pues elegir un ordinal $\alpha' < \alpha$ mínimo con la condición de que $\hat{g} * j * p_{\alpha'} \neq \tilde{g} * p_{\alpha'}$. Tomemos m un elemento de M tal que $(m)\hat{g} * j * p_{\alpha'} \neq (m)\tilde{g} * p_{\alpha'}$. El ordinal α' no puede ser un ordinal límite porque al ser α' el más pequeño para el que no se cumple la igualdad se tendrá

$$(m)(\hat{g} * j - \tilde{g}) * p_{\alpha'} * h_{\alpha'\beta} = (m)(\hat{g} * j - \tilde{g}) * p_\beta = 0$$

para cada $\beta < \alpha'$, por lo que $(m)(\hat{g} * j - \tilde{g}) \in \mathsf{u}^\beta(K)$ para cada $\beta < \alpha'$. Como α' es un ordinal límite, por definición $\mathsf{u}^{\alpha'}(K) = \cap_{\beta<\alpha'}\mathsf{u}^\beta(K)$ y así $(m)(\hat{g}*j-\tilde{g})*p_{\alpha'} \in \cap_{\beta<\alpha'}\mathsf{u}^\beta(K)/\mathsf{u}^{\alpha'}(K) = 0$, que no puede ocurrir.

Deducimos pues que α' ha de ser de la forma $\alpha' = \beta + 1$ para alún ordinal β, entonces $(M)(\hat{g} * j - \tilde{g}) * p_{\alpha'} * h_{\alpha'\beta} = (M)(\hat{g} * j - \tilde{g}) * p_\beta = 0$, luego $(M)(\hat{g} * j - \tilde{g}) * p_{\alpha'} \subseteq \mathsf{Ker}(h_{\alpha'\beta}) = \mathsf{u}^\beta(K)/R\mathsf{u}^\beta(K)$. Debe ser $(M)(\hat{g}*j-\tilde{g})*p_{\alpha'} = 0$ porque es un homomorfismo de un módulo unitario ($M = RM$) en un módulo evanescente ($R(\mathsf{u}^\beta(K)/R\mathsf{u}^\beta(K)) = 0$).

Con esto probamos que α' no puede existir, por lo que $\hat{g} * j = \tilde{g}$. Pero ésto tampoco es posible, porque $\mathsf{Im}(\hat{g} * j) \subseteq M/\mathsf{u}^\alpha(K)$ y entonces

$$0 = (\langle 1\rangle_\tau)\tilde{g} + M/\mathsf{u}^\alpha(K) = (\langle 1\rangle_\sigma)\hat{g} = w$$

que estábamos suponiendo que era un elemento distinto de cierto. Concluimos por reducción al absurdo que que $w = 0$ y por tanto

$$\mathsf{U}\left(\frac{\varprojlim_{\beta<\alpha} M/\mathsf{u}^\beta(K)}{M/\mathsf{u}^\alpha(K)}\right) = 0.$$

□

Proposición 3.7 *La categoría de módulos firmes es abeliana si y sólo si para todo morfismo $f : M \to N$ en $R-$*DMod, Ker$(f)/$U(Ker(f)) *es uniformemente evanescente en $M/$*U(Ker(f)).

Demostración:
Si la categoría de módulos firmes es abeliana, entonces el monomorfismo $M/\mathsf{U}(\mathsf{Ker}(f)) \to N$ es un núcleo y por lo tanto, su núcleo, $\mathsf{Ker}(f)/\mathsf{U}(\mathsf{Ker}(f))$ es uniformemente evanescente en $M/\mathsf{U}(\mathsf{Ker}(f))$.

Recíprocamente, supongamos que $f : M \to N$ es un monomorfismo, entonces $\mathsf{U}(\mathsf{Ker}(f)) = 0$ y como $\mathsf{Ker}(f)(= \mathsf{Ker}(f)/\mathsf{U}(\mathsf{Ker}(f)))$ es uniformemente evanescente en $M(= M/\mathsf{U}(\mathsf{Ker}(f)))$. Utilizando el Teorema 3.6 concluimos que f es un núcleo. □

3.2. El Concepto de Exactitud en la Categoría de Módulos Firmes

A diferencia de la categoría de módulos cerrados, que es una categoría de Grothendieck, en la categoría de módulos firmes tenemos que ser cuidadosos con la definición de exactitud.

En esta sección vamos a precisar la definición de exactitud en el caso de la categoría $R-\mathsf{DMod}$. Recordemos que utilizaremos las notaciones $(-)'$ para los límites y colímites calculados en la categoría $R-\mathsf{DMod}$ y sin ese símbolo para límites y colímites calculados en la categoría $A-\mathsf{Mod}$.

Si consideramos un complejo

$$M_\bullet = \cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{d_i} M_i \xrightarrow{d_{i+1}} M_{i+1} \to \cdots$$

el concepto tradicional de exactitud en M_i sería que $\mathsf{ker}'(d_{i+1}) = \mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(d_i))$. En el caso de categorías abelianas es equivalente a su concepto dual, que es $\mathsf{coker}'(d_i) = \mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(d_{i+1}))$. Vamos a ver que para $R-\mathsf{DMod}$ estos dos conceptos también coinciden para todo anillo R, (aún en el caso en que $R-\mathsf{DMod}$ no sea abeliana).

Tal y como vimos en el Corolario 2.25, si $f : M \to N$ es un morfismo en $R-\mathsf{DMod}$, $\mathsf{coker}'(f) = \mathsf{coker}(f)$ y $\mathsf{ker}'(f) = \nu_{\mathsf{Ker}(f)} * \mathsf{ker}(f)$. Calculando explícitamente, tenemos que $\mathsf{Coker}'(f) = \mathsf{Coker}(f) = N/\mathsf{Im}(f)$ y $\mathsf{coker}'(f) = \mathsf{coker}(f)$ es la proyección canónica $N \to N/\mathsf{Im}(f)$.

Lema 3.8 *Sea $f : M \to N$ un morfismo en $R-\mathsf{DMod}$. Entonces*

1. $\mathsf{coker}'(f) = \mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(f)))$.
2. $\mathsf{ker}'(f) = \mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(f)))$.

Demostración:
(1). Hemos visto que $\mathsf{coker}'(f) = \mathsf{coker}(f) : N \to N/\mathsf{Im}(f)$. Entonces

$$\mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(f)) = \mathsf{ker}'(\mathsf{coker}(f)) =$$

$$\nu_{\mathsf{Im}(f)} * \mathsf{ker}(\mathsf{coker}(f)) : \mathsf{D}\,(\mathsf{Im}(f)) \xrightarrow{\nu_{\mathsf{Im}(f)}} \mathsf{Im}(f) \overset{\mathsf{ker}(\mathsf{coker}(f))}{\hookrightarrow} N.$$

Como $\mathsf{Im}(f)$ es unitario, tenemos que $\nu_{\mathsf{Im}(f)}$ es suprayectivo y por lo tanto $\mathsf{Im}(\mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(f))) = \mathsf{Im}(f)$. Si volvemos a calcular ahora

$$\mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(f))) = N \to N/\mathsf{Im}(\mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(f))) = N \to N/\mathsf{Im}(f) = \mathsf{coker}'(f).$$

(2). Por un lado tenemos que el morfismo $\mathsf{ker}'(f)$ es

$$\nu_{\mathsf{Ker}(f)} * \mathsf{ker}(f) : \mathsf{D}\,(\mathsf{Ker}(f)) \xrightarrow{\nu_{\mathsf{Ker}(f)}} \mathsf{Ker}(f) \overset{\mathsf{ker}(f)}{\hookrightarrow} M.$$

Si calculamos su conúcleo, $\mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(f)) = \mathsf{coker}(\mathsf{ker}'(f))$, tenemos

$$M \to M/\mathsf{Im}(\mathsf{ker}'(f)) = M \to M/\mathsf{U}\,(\mathsf{Ker}(f))$$

ya que $\mathsf{Im}(\nu_{\mathsf{Ker}(f)}) = \mathsf{U}\,(\mathsf{Ker}(f))$. Denotemos por $j : \mathsf{U}\,(\mathsf{Ker}(f)) \hookrightarrow \mathsf{Ker}(f)$ a la inclusión. Si volvemos a calcular $\mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(f)))$ y teniendo en cuenta que $\mathsf{Ker}(M \to M/\mathsf{U}\,(\mathsf{Ker}(f))) = \mathsf{U}\,(\mathsf{Ker}(f))$, concluimos que $\mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(f)))$ es precisamente

$$\nu_{\mathsf{U}(\mathsf{Ker}(f))} * j * \mathsf{ker}(f) : \mathsf{D}\,(\mathsf{U}\,(\mathsf{Ker}(f))) \xrightarrow{\nu_{\mathsf{U}(\mathsf{Ker}(f))}} \mathsf{U}\,(\mathsf{Ker}(f)) \overset{j}{\hookrightarrow} \mathsf{Ker}(f) \overset{\mathsf{ker}(f)}{\hookrightarrow} M$$

que es igual a

$$\mathsf{ker}'(f) = \nu_{\mathsf{Ker}(f)} * \mathsf{ker}(f) : \mathsf{D}\left(\mathsf{Ker}(f)\right) \stackrel{\nu_{\mathsf{Ker}(f)}}{\longrightarrow} \mathsf{Ker}(f) \stackrel{\mathsf{ker}(f)}{\hookrightarrow} M$$

aplicando la Proposición 2.23. □

Teorema 3.9 *Sea* $M_\bullet = \cdots \to M_{i-1} \stackrel{d_i}{\to} M_i \stackrel{d_{i+1}}{\to} M_{i+1} \to \cdots$ *un complejo en* $R-\mathsf{DMod}$*. Entonces son equivalentes:*

1. *El complejo cumple* $\mathsf{coker}'(d_i) = \mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(d_{i+1}))$.

2. *El complejo cumple* $\mathsf{ker}'(d_{i+1}) = \mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(d_i))$.

Demostración:
Empecemos suponiendo (2), entonces $\mathsf{ker}'(d_{i+1}) = \mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(d_i))$ y tenemos que comprobar que $\mathsf{coker}'(d_i) = \mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(d_{i+1}))$. Sustituyendo el valor de $\mathsf{ker}'(d_{i+1})$ por la propiedad (1), tenemos que probar que $\mathsf{coker}'(d_i) = \mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(d_i)))$, pero eso es cierto como consecuencia del punto 1 del Lema 3.8.

La demostración del recíproco es totalmente simétrica, pero usando el punto 2 del Lema 3.8. □

A partir de este momento y una vez que hemos probado que estos dos conceptos son equivalentes, podemos hacer la siguiente definición:

Definición 3.10 *Sea* $M_\bullet = \cdots \to M_{i-1} \stackrel{d_i}{\to} M_i \stackrel{d_{i+1}}{\to} M_{i+1} \to \cdots$ *un complejo en* $R-\mathsf{DMod}$ *(es decir,* $d_i * d_{i+1} = 0$ *para todo* i*). Diremos que es exacto en* M_i *si cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes (y por tanto ambas):*

1. $\mathsf{coker}'(d_i) = \mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(d_{i+1}))$.

2. $\mathsf{ker}'(d_{i+1}) = \mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(d_i))$.

Diremos que el complejo es exacto si lo es para todo M_i.

Vamos a ver un tipo especial de complejos que serán especialmente importantes, son los complejos exactos cortos a los que también nos referiremos como sucesiones exactas cortas. Aunque utilizaremos ambos conceptos, intentaremos reservar la palabra complejo corto para el caso en que estemos estudiando exactitud en la categoría $R-\mathsf{DMod}$ y sucesión cuando estemos en la categoría $A-\mathsf{Mod}$:

Proposición 3.11 *Sea* $0 \to M \stackrel{f}{\to} N \stackrel{g}{\to} L \to 0$ *un complejo corto en* $R-\mathsf{DMod}$*. Entonces el complejo corto es exacto si y sólo si el complejo* $\mathsf{J}(M) \stackrel{\mathsf{J}(f)}{\to} \mathsf{J}(N) \stackrel{\mathsf{J}(g)}{\to} \mathsf{J}(L) \to 0$ *es exacto en* $A-\mathsf{Mod}$ *y* $\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(f)\right) = 0$.

Demostración:
Empecemos suponiendo el complejo es exacto. Por la propiedad de adjunción entre J y D, podríamos asegurar la exactitud por la derecha del complejo en $A-\mathsf{Mod}$, pero no podemos hacer uso de este teorema al no estar en categorías exactas. Por ello vamos a hacer una prueba directa.

Por ser exacto en L, tenemos que $\mathsf{coker}'(g) = \mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(0 : L \to 0))$. Si calculamos cada uno de estos morfismos, tenemos que

$$\mathsf{coker}'(g) = \mathsf{coker}(g) : L \to L/\mathsf{Im}(g)$$

$$\mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(0 : L \to 0)) = \mathsf{coker}'(\mathrm{id}_L) = 0 : L \to 0$$

por lo tanto, la exactitud en L nos dice que $L/\mathsf{Im}(g) = 0$ o lo que es lo mismo, que g es una aplicación suprayectiva.

Una vez que sabemos que g es suprayectiva, entonces aplicando la Proposición 2.19 sabemos que $\mathsf{Ker}(g)$ es unitario.

Por ser el complejo exacto en N, tenemos que $\mathsf{coker}'(f) = \mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(g))$ y calculando explícitamente estos morfismos tenemos que

$$\mathsf{coker}'(f) = \mathsf{coker}(f) = N \to N/\mathsf{Im}(f)$$

$$\mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(g)) = \mathsf{coker}(\nu_{\mathsf{Ker}(g)} * \mathsf{ker}(g))$$

Como $\mathsf{Ker}(g)$ sabemos que es unitario, $\nu_{\mathsf{Ker}(g)}$ es suprayectiva y entonces

$$\mathsf{coker}(\nu_{\mathsf{Ker}(g)} * \mathsf{ker}(g)) = N \to N/\mathsf{Im}(\nu_{\mathsf{Ker}(g)} * \mathsf{ker}(g)) = N \to N/\mathsf{Ker}(g).$$

La exactitud en N nos dice que $N \to N/\mathsf{Im}(f) = N \to N/\mathsf{Ker}(g)$ y por lo tanto $\mathsf{Im}(f) = \mathsf{Ker}(g)$ que es la exactitud en $\mathsf{J}(N)$.

La exactitud en M nos dice que $\mathsf{coker}'(0 : 0 \to M) = \mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(f))$. Calculando explícitamente tenemos que

$$\mathsf{coker}'(0 : 0 \to M) = \mathrm{id}_M : M \to M/0$$

$$\mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(f)) = \mathsf{coker}(\nu_{\mathsf{Ker}(f)} * \mathsf{ker}(f)) : M \to M/\mathsf{Im}(\nu_{\mathsf{Ker}(f)} * \mathsf{ker}(f))$$

La imagen del homomorfismo $\nu_{\mathsf{Ker}(f)} * \mathsf{ker}(f) : \mathsf{D}(\mathsf{Ker}(f)) \to \mathsf{Ker}(f) \subseteq M$ es precisamente $\mathsf{Im}(\nu_{\mathsf{Ker}(f)}) = \mathsf{U}(\mathsf{Ker}(f))$. La exactitud en M nos dice pues que $\mathsf{U}(\mathsf{Ker}(f)) = 0$.

Para ver el recíproco, supongamos ahora que el complejo $\mathsf{J}(M) \overset{\mathsf{J}(f)}{\to} \mathsf{J}(N) \overset{\mathsf{J}(g)}{\to} \mathsf{J}(L) \to 0$ es exacto en $A-\mathsf{Mod}$ y $\mathsf{U}(\mathsf{Ker}(f)) = 0$.

La exactitud en $A-\mathsf{Mod}$ nos dice que $\mathsf{Im}(g) = L$ y que $\mathsf{Ker}(g) = \mathsf{Im}(f)$.

La exactitud en L es cierta puesto que

$$\mathsf{coker}'(g) = \mathsf{coker}(g) : L \to L/\mathsf{Im}(g) = 0 : L \to 0 = \mathsf{coker}'(\mathrm{id}_L) = \mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(0 : L \to 0))$$

La exactitud en N es cierta puesto que

$$\mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(g)) = \mathsf{coker}(\nu_{\mathsf{Ker}(g)} * \mathsf{ker}(g)) : N \to N/\mathsf{U}(\mathsf{Ker}(g)) = \mathsf{coker}'(f) : N \to N/\mathsf{Im}(f)$$

ya que $\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(g)\right) = \mathsf{Ker}(g) = \mathsf{Im}(f)$.

La exactitud en M es cierta puesto que $\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(f)\right) = 0$ y por lo tanto $\nu_{\mathsf{Ker}(f)} = 0$ y entonces

$$\mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(f)) = \mathsf{coker}(\nu_{\mathsf{Ker}(f)} * \mathsf{ker}(f)) =$$

$$\mathsf{coker}(0 : \mathsf{D}\left(\mathsf{Ker}(f)\right) \to M) : M \to M/0 = \mathsf{coker}'(0 : 0 \to M).$$

□

Proposición 3.12 *Sea $f : M \to N$ un morfismo en $R-$*DMod*. Entonces f es*

1. *un monomorfismo si y sólo si $\mathsf{ker}'(f) = 0$.*
2. *un núcleo si $f = \mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(f))$.*

Demostración:

1. La Proposición 3.1 nos dice que f es un monomorfismo si y sólo si $\mathsf{Ker}(f)$ es evanescente, lo cual es equivalente a que $\mathsf{ker}'(f) = 0$ ya que

$$\mathsf{ker}'(f) = \nu_{\mathsf{Ker}(f)} * \mathsf{ker}(f) : \mathsf{D}\left(\mathsf{Ker}(f)\right) \to \mathsf{Ker}(f) \hookrightarrow N$$

   y este morfismo es 0 si y sólo si $\mathsf{D}\left(\mathsf{Ker}(f)\right) = 0$, o lo que es lo mismo, si $\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(f)\right) = 0$.

2. La Proposición 3.1 nos dice que f es un núcleo si y sólo si es el núcleo de $p : N \to N/\mathsf{Im}(f)$, pero éste es precisamente $\mathsf{coker}'(f)$.

□

Dado un complejo exacto corto en la categoría $R-$DMod,

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \to 0,$$

a diferencia de lo que sucede en las categorías abelianas, f no es neceariamente el núcleo de g. Ésta es precisamente la propiedad fundamental que falla le falta a $R-$DMod para ser abeliana.

Proposición 3.13 *La categoría $R-$*DMod *es abeliana si y sólo si para todo complejo exacto corto*

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \to 0,$$

se tiene que $f = \mathsf{ker}'(g)$.

Demostración:
Si la categoría es abeliana y

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \to 0$$

es un complejo exacto corto, entonces $f : M \to N$ es un monomorfismo y por lo tanto un núcleo, pero utilizando la Proposición 3.12 tenemos que $f = \mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(f))$ que por la exactitud en N es igual a $\mathsf{ker}'(g)$.

Recíprocamente, supongamos que para todo complejo exacto corto se cumple la condición del enunciado, y consideremos $f : M \to N$ un monomorfismo. Sea $L = N/\mathsf{Im}(f)$ y $g : N \to L$ la proyección canónica. El módulo L es firme puesto que es cociente de un firme por un unitario y por lo tanto el complejo

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \to 0,$$

es exacto. Aplicando la hipótesis tenemos que $f = \mathsf{ker}'(g)$ y por lo tanto f es un núcleo. Hemos probado pues que todo monomorfismo es un núcleo que es la condición que le falta a $R-\mathsf{DMod}$ para ser abeliana. $\square$

3.3. Funtores Exactos por la Izquierda

Si consideramos un módulo K de $\mathsf{Mod}-A$ y aplicamos el funtor $K \otimes_A - : R-\mathsf{DMod} \to k-\mathsf{Mod}$ a un complejo exacto corto de $R-\mathsf{DMod}$ (que utilizando la Proposición 3.11 sabemos que es exacto por la derecha en $\mathsf{Mod}-A$) obtenemos un complejo exacto por la derecha en $k-\mathsf{Mod}$. Ésto es lo que se conoce como que el funtor $K \otimes_A -$ sea exacto por la derecha. El funtor contravariante $\mathsf{Hom}_A(-, L) : R-\mathsf{DMod} \to k-\mathsf{Mod}$ lleva también complejos exactos cortos de $R-\mathsf{DMod}$ (que son exactos por la derecha en $A-\mathsf{Mod}$) a complejos exactos por la izquierda en $k-\mathsf{Mod}$ para cualquier L de $A-\mathsf{Mod}$.

Supongamos ahora que K es un módulo de $R-\mathsf{DMod}$ y consideremos el funtor

$$\mathsf{Hom}_A(K, -) : R-\mathsf{DMod} \to k-\mathsf{Mod}.$$

Es inmediato notar que este funtor es adjunto por la derecha del funtor $K \otimes_k -$ (el isomorfismo de la adjunción no se ve afectado por el hecho de estar en la subcategoría $R-\mathsf{DMod}$ de $k-\mathsf{Mod}$). Sin embargo, si aplicamos $\mathsf{Hom}_A(K, -)$ a un complejo exacto corto de $R-\mathsf{DMod}$ no obtenemos el resultado esperado de la exactitud por la izquierda en $k-\mathsf{Mod}$. En esta sección veremos que dicho resultado es realmente equivalente a la abelianidad de la categoría $R-\mathsf{DMod}$.

Definición 3.14 *Sea K un módulo de $R-\mathsf{DMod}$. Diremos que el funtor $\mathsf{Hom}_A(K, -) : R-\mathsf{DMod} \to k-\mathsf{Mod}$ es exacto por la izquierda si para todo complejo exacto corto en $R-\mathsf{DMod}$,*

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \to 0,$$

el complejo

$$0 \to \mathsf{Hom}_A(K, M) \to \mathsf{Hom}_A(K, N) \to \mathsf{Hom}_A(K, L)$$

es exacto en $k-\mathsf{Mod}$.

La definición de monomorfismo es precisamente la que nos garantiza que $\mathsf{Hom}_A(K, -)$ lleve monomorfismos a aplicaciones inyectivas, esto hace que no nos tengamos que preocupar de la exactitud del complejo $0 \to \mathsf{Hom}_A(K, M) \to \mathsf{Hom}_A(K, N)$. Dicho de forma precisa:

Nota 3.15 *Sea K un módulo de $R-\mathsf{DMod}$ y $f : M \to N$ un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$, entonces $\mathsf{Hom}_A(K, M) \to \mathsf{Hom}_A(K, N)$, dada por $g \mapsto g * f$, es una aplicación inyectiva.*

Demostración:
Sea $g : K \to M$ tal que $g * f = 0 = 0 * f$, entonces como f es un monomorfismo, $g = 0$. $\square$

La definición que hemos dado de exactitud por la izquierda del funtor $\mathsf{Hom}_A(K, -)$ podría en principio haberse hecho partiendo, en lugar de un complejo exacto corto, de uno exacto exclusivamente por la izquierda. Con ello obtendríamos una definición que sería equivalente, veámoslo:

Proposición 3.16 *Sea K un módulo de $R-$*DMod *tal que* $\mathsf{Hom}_A(K, -)$ *es exacto por la izquierda. Entonces para todo complejo exacto*

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L,$$

se tiene que el complejo

$$0 \to \mathsf{Hom}_A(K, M) \to \mathsf{Hom}_A(K, N) \to \mathsf{Hom}_A(K, L)$$

es exacto en $k-$ Mod*.*

Demostración:
La exactitud del complejo

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L,$$

en M nos dice que $\mathsf{ker}'(f) = 0$ o lo que es lo mismo, que f es un monomorfismo, y la exactitud en N nos dice que $\mathsf{ker}'(g) = \mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(f))$ o lo que es lo mismo $\nu_{\mathsf{Ker}(g)} * \mathsf{ker}(g) = \nu_{\mathsf{Im}(f)} * j$ siendo $j : \mathsf{Im}(f) \hookrightarrow N$ la inclusión. Para que ésto suceda la condición necesaria es que $\mathsf{U}(\mathsf{Ker}(g)) = \mathsf{Im}(f)$.

Consideremos el complejo exacto $0 \to M \to N \to N/\mathsf{Im}(f) \to 0$ y apliquemos el funtor $\mathsf{Hom}_A(K, -)$ que nos proporciona el complejo exacto

$$0 \to \mathsf{Hom}_A(K, M) \to \mathsf{Hom}_A(K, N) \to \mathsf{Hom}_A(K, N/\mathsf{Im}(f)).$$

Lo único que tenemos que probar es que el complejo

$$0 \to \mathsf{Hom}_A(K, M) \to \mathsf{Hom}_A(K, N) \to \mathsf{Hom}_A(K, L)$$

es exacto en $\mathsf{Hom}_A(K, N)$. Para ello tomemos $h : K \to N$ tal que $h * g = 0$, entonces $\mathsf{Im}(h) \subseteq \mathsf{Ker}(g)$ y como $\mathsf{Im}(h)$ es unitario, $\mathsf{Im}(h) \subseteq \mathsf{U}(\mathsf{Ker}(g)) = \mathsf{Im}(f)$. Aplicando la condición de exactitud de

$$0 \to \mathsf{Hom}_A(K, M) \to \mathsf{Hom}_A(K, N) \to \mathsf{Hom}_A(K, N/\mathsf{Im}(f))$$

en $\mathsf{Hom}_A(K, N)$ al homomorfismo $h : K \to N$ (que hemos probado que va a 0 al meterlo en $\mathsf{Hom}_A(K, N/\mathsf{Im}(f))$) obtenemos el levantamiento $\hat{h} : K \to M$. $\square$

Tal y como hemos anunciado anteriormente, la exactitud del funtor $\mathsf{Hom}_A(K, -)$ por la izquierda está ligada a la abelianidad de $R-\mathsf{DMod}$, veámoslo:

Teorema 3.17 *Las siguiente condiciones son equivalentes:*

1. *La categoría $R-$*DMod *es abeliana.*

2. *Para todo módulo K de $R-\mathsf{DMod}$, $\mathsf{Hom}_A(K,-) : R-\mathsf{DMod} \to k-\mathsf{Mod}$ es exacto por la izquierda.*

3. *Existe G, generador de $R-\mathsf{DMod}$ tal que el funtor $\mathsf{Hom}_A(G,-) : R-\mathsf{DMod} \to k-\mathsf{Mod}$ es exacto por la izquierda.*

4. *Para todo monomorfismo $f : M \to N$ y todo homomorfismo $h : \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle \to N$ tal que $\mathsf{Im}(h) \subseteq \mathsf{Im}(f)$ existe $\hat{h} : \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle \to M$ tal que $\hat{h} * f = h$.*

Demostración:
($1 \Rightarrow 4$). Como $R-\mathsf{DMod}$ es abeliana y f es un monomorfismo, f es un núcleo y utilizando la Proposición 3.1 tenemos que f es el núcleo de $p : N \to N/\mathsf{Im}(f)$. Si $h : \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle \to N$ cumple que $\mathsf{Im}(h) \subseteq \mathsf{Im}(f)$ entonces $h * p = 0$ y aplicando la definición de núcleo, existirá $\hat{h} : \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle \to M$ tal que $\hat{h} * f = h$.

($4 \Rightarrow 3$). Consideremos el generador $\coprod_{\sigma\in\Xi_{\mathsf{U}}(X)} \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$ con las inyecciones canónicas $q_\sigma : \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle \to G$ para todo $\sigma \in \Xi_{\mathsf{U}}(X)$.

Para ver que $\mathsf{Hom}_A(G,-)$ es exacto por la izquierda únicamente tenemos que probar la exactitud de

$$\mathsf{Hom}_A(G,M) \to \mathsf{Hom}_A(G,N) \to \mathsf{Hom}_A(G,L)$$

y para ello tomemos $h : G \to N$ tal que $h * g : G \to L$ sea 0. Para todo $\sigma \in \Xi_{\mathsf{U}}(X)$ tenemos que $q_\sigma * h * g : \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle \to L$ es 0 y usando (4) podemos encontrar para todo $\sigma \in \Xi_{\mathsf{U}}(X)$ un homomorfismo $\hat{h}_\sigma : \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle \to M$ tal que $\hat{h}_\sigma * f = q_\sigma * h$. Utilizando las propiedades del coproducto podemos encontar $\hat{h} : G \to M$ tal que $q_\sigma * \hat{h} = \hat{h}_\sigma$ para todo σ y por lo tanto $\hat{h} * f = h$ tal y como queríamos probar.

($3 \Rightarrow 2$). Vamos a probar la exactitud de $\mathsf{Hom}_A(K,M) \to \mathsf{Hom}_A(K,N) \to \mathsf{Hom}_A(K,L)$, para lo cual tomaremos $h : K \to N$ tal que $h * g = 0$. Sea $H = \mathsf{Hom}_A(G,K)$ y $\eta : G^{(H)} \to K$ el epimorfismo dado por $((m_u)_{u\in H})\eta = \sum_{u\in H}(m_u)u$. Para cada elemento $u \in H$ podemos levantar $u * h$ a M. Uniendo todos estos levantamientos y utilizando la propiedad del coproducto podemos encontrar $\hat{u} : G^{(H)} \to M$ tal que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0 \\
& G^{(H)} \arrow[u, "\hat{u}"] \arrow[r, "\eta"] & K \arrow[u, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Como η es un epimorfismo entre módulos firmes, $\mathsf{Ker}(\eta)$ es unitario y por lo tanto $(\mathsf{Ker}(\eta))\hat{u}$ es unitario. Como $(\mathsf{Ker}(\eta))\hat{u} * f = (\mathsf{Ker}(\eta))\eta * h = 0$, tenemos que $(\mathsf{Ker}(\eta))\hat{u} \subseteq \mathsf{Ker}(f)$, pero $\mathsf{Ker}(f)$ es evanescente y por lo tanto no contienen ningún submódulo unitario distinto de 0, de ahí concluimos que $(\mathsf{Ker}(\eta))\hat{u} = 0$ o lo que es lo mismo, $\mathsf{Ker}(\eta) \subseteq \mathsf{Ker}(\hat{u})$. Factorizando η podemos definir $\hat{h} : K = G^{(H)}/\mathsf{Ker}(\eta) \to G^{(H)}/\mathsf{Ker}(\hat{u}) \to M$ que es el levantamiento de h que buscábamos.

($2 \Rightarrow 1$). Para demostrar que todo monomorfismo es un núcleo, consideremos $f : M \to N$ un monomorfismo y $L = N/\mathsf{Im}(f)$ y $g : N \to L$ la proyección canónica. Tenemos que ver que f es el núcleo de g. Para ello tomemos $h : K \to N$ un morfismo tal que $h * g = 0$. Aplicando que $\mathsf{Hom}_A(K,-)$ es exacto por la izquierda, tenemos que $h \in \mathsf{Ker}(\mathsf{Hom}_A(K,N) \to$

$\mathsf{Hom}_A(K,L)) = \mathsf{Im}(\mathsf{Hom}_A(K,M) \to \mathsf{Hom}_A(K,N))$. Podemos pues encontrar $\hat{h} : K \to M$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0 \\ & & K \arrow[ul, "\hat{h}"] \arrow[u, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

El levantamiento $\hat{h} : K \to M$ ha de ser único, porque si existieran dos $\hat{h}_1, \hat{h}_2 : K \to M$ haciendo conmutativo el diagrama, utilizando que $\hat{h}_1 * f = \hat{h}_2 * f$ y que f es un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$, concluiríamos que $\hat{h}_1 = \hat{h}_2$. $\square$

3.4. El Residuo de un Morfismo

Sea $f : M \to L$ un morfismo en $R-\mathsf{DMod}$. Podemos calcular $\mathsf{ker}'(f)$ y puesto que $\mathsf{ker}'(f) * f = 0$, f factoriza a través de $\mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(f))$. Denotaremos $\epsilon_f = \mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(f))$. Si lo calculamos explícitamente, tenemos que

$$\mathsf{ker}'(f) = \nu_{\mathsf{Ker}(f)} * \mathsf{ker}(f) : \mathsf{D}\left(\mathsf{Ker}(f)\right) \to M.$$

El $\mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(f))$ es el mismo que $\mathsf{coker}(\mathsf{ker}'(f))$ y por lo tanto coincide con la proyección $M \to M/\mathsf{Im}(\mathsf{ker}'(f))$. Puesto que $\mathsf{Im}(\nu_{\mathsf{Ker}(f)}) = \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(f)\right)$ y $\mathsf{ker}(f)$ lo mete dentro de M, tenemos que $\mathsf{Im}(\mathsf{ker}'(f)) = \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(f)\right)$ y por lo tanto

$$\epsilon_f : M \to M/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(f)\right).$$

La factorización de f a través de ϵ_f nos da un morfismo $\mu_f : M/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(f)\right) \to L$. El núcleo de dicho morfismo es $\mathsf{Ker}(\mu_f) = \mathsf{Ker}(f)/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(f)\right)$ que es un módulo evanescente. Por lo tanto μ_f es un monomorfismo.

Proposición 3.18 *Dado $f : M \to L$, la descomposición $f = \epsilon_f * \mu_f$ es (salvo isomorfismos) la única descomposición epi+mono de f.*

Demostración:
Si existiera un epimorfismo $\eta' : M \to Y$ y un monomorfismo $\mu' : Y \to L$ tal que $f = \eta' * \mu'$, entonces $\mathsf{Ker}(\eta')$ sería unitario por ser el núcleo de un epimorfismo entre firmes y como $\mathsf{Ker}(\eta') \subseteq \mathsf{Ker}(f)$ tendríamos que $\mathsf{Ker}(\eta') \subseteq \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(f)\right)$ lo cual nos induciría un epimorfismo $M/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(f)\right) \to Y$ cuyo núcleo estaría contenido en $\mathsf{Ker}(\mu_f) = \mathsf{Ker}(f)/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(f)\right)$ que es evanescente y por lo tanto sería 0. Esto prueba que $M/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(f)\right) = Y$ salvo isomorfismos $\square$

Dualmente a como hemos construido $\mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(f))$, se puede construir el núcleo del conúcleo de f, $\mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(f))$. Puesto que $f * \mathsf{coker}'(f) = f * \mathsf{coker}(f) = 0$ entonces $\epsilon_f * \mu_f * \mathsf{coker}'(f) = 0$ y por lo tanto μ_f factoriza a través de $\mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(f))$. Esto nos induce un morfismo $\rho : \mathsf{Coker}'(\mathsf{ker}'(f)) \to \mathsf{Ker}'(\mathsf{coker}'(f))$ haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(f))"', "\epsilon_f"] & L \\
\mathsf{Coker}'(\mathsf{ker}'(f)) \arrow[r, "\rho"] \arrow[ur, "\mu_f"] & \mathsf{Ker}'(\mathsf{coker}'(f)) \arrow[u, "\mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(f))"']
\end{tikzcd}$$

Definición 3.19 *Llamaremos residuo de un morfismo $f : M \to L$ al único morfismo*

$$\rho : \mathsf{Coker}'(\mathsf{ker}'(f)) \to \mathsf{Ker}'(\mathsf{coker}'(f))$$

que hace conmutativo el diagrama anterior. Nos referiremos a él como $\rho = \mathsf{res}(f)$. Este morfismo está definido salvo isomorfismos (tal y como sucede con los límites y colímites a partir de los cuales está definido).

El monomorfismo μ_f se descompone en dos monomorfismos, el que hemos denotado por $\mathsf{res}(f)$ y $\mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(f))$ que es un núcleo. La propiedad que nos falta para que $R-\mathsf{DMod}$ sea una categoría abeliana es precisamente que $\mathsf{res}(f)$ sea un isomorfismo.

Proposición 3.20 *Sea $f : M \to L$ un homomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$, entonces con las notaciones anteriores, μ_f es un núcleo si y sólo si $\mu_f = \mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(f))$ o lo que es lo mismo, el residuo de f es un isomorfismo.*

Demostración:
Si $\mu_f = \mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(f))$ evidentemente es un núcleo. Recíprocamente, si μ_f es un núcleo, entonces μ_f tiene que se el núcleo de su conúcleo, pero el conúcleo de μ_f es $L \to L/\mathsf{Im}(\mu_f)$ que es lo mismo que $\mathsf{coker}'(f) : L \to L/\mathsf{Im}(f)$ ya que $\mathsf{Im}(f) = \mathsf{Im}(\mu_f)$ al ser $\mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(f))$ un epimorfismo. □

Lema 3.21 *Sea $\mu : N \to M$ un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$. Entonces μ es un isomorfismo si y sólo si $\mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(\mu))$ es un isomorfismo.*

Demostración:
Sea $\rho = \mathsf{res}(\mu)$ y $h = \mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(\mu))$, tenemos pues el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\rho"'] & M \\
& \mathsf{Ker}'(\mathsf{coker}'(\mu)) \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

Vamos a ver que μ es un isomorfismo si y sólo si h es un isomorfismo.

Si μ es un isomorfismo, entonces $\mathsf{coker}(\mu) = \mathsf{coker}'(\mu) = 0$ y por tanto $h = \mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(\mu)) = \mathsf{ker}'(0)$ es un isomorfismo.

Recíprocamente, si h es un isomorfismo, entonces en particular es suprayectivo y calculando explícitamente h, tenemos que es $\mathsf{D}(\mathsf{Im}(\mu)) \to M$, pero la imagen de este morfismo es $\mathsf{Im}(\mu)$ que tiene que coincidir con M por ser h un isomorfismo.

Entonces μ es una aplicación suprayectiva entre módulos firmes y su núcleo tiene que ser unitario, pero por otra parte sabemos que μ es un monomorfismo por lo que $\mathsf{Ker}(\mu)$ es evanescente, pero el único módulo evanescente y unitario es el 0. Esto prueba que μ es inyectiva y como antes hemos probado que era suprayectiva, concluimos que es un isomorfismo. $\square$

Teorema 3.22 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La categoría* $R-\mathsf{DMod}$ *es abeliana.*

2. *La composición de dos núcleos de* $R-\mathsf{DMod}$ *es un núcleo en* $R-\mathsf{DMod}$.

Demostración:
Si la categoría es abeliana, monomorfismos y núcleos coinciden y como la composición de monomorfismos es siempre monomorfismo, los núcleos también cumplirán esta propiedad.

Supongamos ahora que la composición de núcleos es núcleo y consideremos un monomorfismo $\mu : N \to M$. Vamos a calcular $\rho = \mathsf{res}(\mu)$ y también $\sigma = \mathsf{res}(\rho)$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, bend right, "\rho"'] \arrow[ddr, bend right, "\sigma"'] & M \\
 & \mathsf{Ker}'(\mathsf{coker}'(\mu)) \arrow[u, "h"'] \\
 & \mathsf{Ker}'(\mathsf{coker}'(\rho)) \arrow[u, "g"'] \arrow[uu, bend right=60, "\lambda"']
\end{tikzcd}$$

Como g y h son núcleos, la composición λ es un núcleo por hipótesis y utilizando la Proposición 3.1, λ será el núcleo de su conúcleo, es decir de $M \to M/\mathsf{Im}(\lambda)$. Lo mismo sucede con h que también es el núcleo de $M \to M/\mathsf{Im}(h)$.

Como $\mu = \sigma * \lambda$, entonces $\mathsf{Im}(\mu) \subseteq \mathsf{Im}(\lambda)$. Por otro lado, como $\lambda = g * h$, entonces $\mathsf{Im}(\lambda) \subseteq \mathsf{Im}(h)$, pero como $h = \mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(\mu)) : \mathsf{D}(\mathsf{Im}(\mu)) \to M$ tiene como imagen $\mathsf{Im}(\mu)$ concluimos que $\mathsf{Im}(\mu) = \mathsf{Im}(\lambda)$.

Entonces h y λ son el núcleo del mismo conúcleo y por la unicidad del límite, deducimos que g es un isomorfismo y utilizando el lema anterior, ρ es un isomorfismo por lo que μ es un núcleo. $\square$

El residuo de un morfismo está definido salvo isomorfismos, por lo que es lo mismo decir que el residuo de un morfismo es un isomorfismo o que el residuo de un morfismo es 1 o la identidad. Utilizaremos esta última terminología por ser más cómoda.

Existen muchos morfismos de los cuales su residuo es 1, por ejemplo todos los epimorfismos, los núcleos y las composiciones epi+núcleo. Sin embargo no podemos considerar exclusivamente estos morfismos como una subcategoría puesto que, tal y como hemos visto, si la composición de morfismos con residuo 1 fuera un morfismo con residuo 1, en particular la composición de núcleos sería un monomorfismo con residuo 1 (es decir un núcleo) y por lo tanto la categoría sería abeliana y todos los morfismos tendrían residuo 1.

Proposición 3.23 *Sea $\varphi_i : M_i \to N_i$ con $i = 1, \cdots, n$ una familia finita de morfismos de $R-$*DMod *con residuo* 1*, entonces*

$$\coprod_{i=1}^{n} \varphi_i : \coprod_{i=1}^{n} M_i \to \coprod_{i=1}^{n} N_i$$

es un morfismo con residuo 1*.*

Demostración:
Sea $\varphi = \coprod_i \varphi_i$, $M = \coprod_i M_i$ y $N = \coprod_i N_i$. Por un lado tenemos que $\mathsf{Ker}(\varphi) = \coprod_i \mathsf{Ker}(\varphi_i)$ y la parte unitaria de un coproducto finito de A-módulos es el coproducto de las partes unitarias. De ahí deducimos que

$$\mathsf{Coker}'(\mathsf{ker}'(\varphi)) = M/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi)\right) = \coprod_i M_i/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) = \coprod_i \mathsf{D}\left(\mathsf{Im}(\varphi_i)\right).$$

El funtor $\mathsf{D} : A-\mathsf{Mod} \to R-\mathsf{DMod}$ es adjunto por la derecha de la inclusión y por tanto conserva límites, en particular conserva coproductos finitos que son los mismos que los productos finitos, entonces

$$\coprod_i \mathsf{D}\left(\mathsf{Im}(\varphi_i)\right) = \mathsf{D}\left(\coprod_i \mathsf{Im}(\varphi_i)\right) = \mathsf{D}\left(\mathsf{Im}(\varphi)\right) = \mathsf{Ker}'(\mathsf{coker}'(\varphi)).$$

□

Capítulo 4

Subobjetos y Núcleos

Dado un módulo firme M, podemos considerar el conjunto de sus subobjetos tal y como se hace en el caso de categorías de módulos para anillos unitarios. En este capítulo veremos sus principales propieades y veremos que a pesar de que $R-\mathsf{DMod}$ puede no ser abeliana, el retículo de subobjetos es un retículo modular y cumple casi todas las propiedades de los retículos de submódulos para módulos sobre anillos unitarios.

Todo núcleo es en particular un subobjeto, por lo que el conjunto de los núcleos está contenido en el de subjetos formando un subretículo de él. También veremos sus propiedades y su fuerte relación con el retículo de subobjetos y el de objetos cocientes.

4.1. El Retículo de Subobjetos

Dados dos monomorfismos de $R-\mathsf{DMod}$, $f : N \to M$ y $f' : N' \to M$, diremos que representan al mismo subobjeto de M si existe un isomorfismo $\alpha : N \to N'$ tal que $\alpha * f = f'$. Entenderemos subobjeto de M como la clase de equivalencia de monomorfismos con esta relación y denotaremos $\mathcal{S}(M)$ al conjunto de subobjetos de M.

De entre ellos habrá algunos que sean núcleos, a dichos núcleos los denotaremos $\mathcal{K}(M)$ y su estructura la trataremos en la Sección 4.2.

Identificaremos los subobjetos con su módulo asociado, dando por sobreentendido el monomorfismo. Así hablaremos de que N es un subobjeto de M y cuando necesitemos el morfismo diremos que $n : N \to M$ es el monomorfismo asociado.

Dados N_1 y N_2 subobjetos de M, diremos que N_1 es menor o igual N_2 si existe un homomorfismo $\alpha : N_1 \to N_2$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
N_1 \arrow[dr] \arrow[dd, "\alpha"] & \\
& M \\
N_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Puesto que $\mathsf{Ker}(\alpha)$ está contenido en $\mathsf{Ker}(N_1 \to M)$ que es evanescente, deducimos que $\mathsf{Ker}(\alpha)$ es evanescente por lo que en particular N_1 es un subobjeto de N_2.

Utilizando argumentos estándar podemos ver que esta es efectivamente una relación de orden.

Sea G un generador de la categoría de módulos firmes y sea $E = \mathsf{Hom}_A(G, G)$. El conjunto $\mathsf{Hom}_A(G, M)$ tiene estructura de E-módulo unitario. Vamos a denotar $\mathcal{E}(M)$ al conjunto de los E-submódulos (E-unitarios) de $\mathsf{Hom}_A(G, M)$ ordenados con la inclusión. Este conjunto es un retículo modular ya que no es mas que la familia de submódulos de un módulo en la categoría $E-\mathsf{Mod}$.

Definición 4.1 *Sea J un subconjunto cualquiera de $\mathsf{Hom}_A(G, M)$. Consideremos el homomorfismo $\eta^J : G^{(J)} \to M$ que a cada $(g_f)_{f\in J}$ lo lleva a $\sum_{f\in J}(g_f)f \in M$. Vamos a definir J^σ el subobjeto de M dado por el monomorfismo inducido por η^J, $G^{(J)}/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\eta^J)\right) \to M$.*

Este objeto no es más que el resultante de hacer la descomposición epi+mono del morfismo η^J tal y como hacíamos en la Sección 3.4. De esta forma podemos garantizar que $G^{(J)} \to J^\sigma$ es un epimorfismo entre módulos firmes y $J^\sigma \to M$ un monomorfismo que nos define J^σ como subobjeto de M.

Proposición 4.2 *Sean $J_1 \subseteq J_2$ dos subconjuntos de $\mathsf{Hom}_A(G, M)$, entonces $J_1^\sigma \leq J_2^\sigma$.*

Demostración:
Vamos a definir $q : G^{(J_1)} \to G^{(J_2)}$ el homomorfismo que dado $(g_f)_{f\in J_1}$ lo lleva a $(g'_f)_{f\in J_2}$ dado por $g'_f = g_f$ para todo $f \in J_1$ y $g'_f = 0$ para todo $f \in J_2 \setminus J_1$.

Claramente el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
G^{(J_1)} \arrow[dd, "q"'] \arrow[dr, "\eta^{J_1}"] & \\
& M \\
G^{(J_2)} \arrow[ur, "\eta^{J_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

Si aplicamos q al submódulo unitario $\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\eta^{J_1})\right)$ obtenemos un submódulo unitario de $\mathsf{Ker}(\eta^{J_2})$ que estará contenido en su parte unitaria, por lo tanto tenemos un homomorfismo inducido $J_1^\sigma \to J_2^\sigma$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
G^{(J_1)} \arrow[r] \arrow[dd, "q"'] \arrow[drr, bend left, "\eta^{J_1}"] & J_1^\sigma \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
 & & M \\
G^{(J_2)} \arrow[r] \arrow[urr, bend right, "\eta^{J_2}"'] & J_2^\sigma \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

siendo ésta precisamente la definición de $J_1^\sigma \leq J_2^\sigma$. □

Proposición 4.3 *Para todo subconjunto J de $\mathsf{Hom}_A(G, M)$ se cumple que $J^\sigma = (EJ)^\sigma$ siendo EJ el E-submódulo de $\mathsf{Hom}_A(G, M)$ generado por J.*

Demostración:
Puesto que $J \subseteq EJ$ podemos utilizar la Proposición 4.2 para determinar que $J^\sigma \leq (EJ)^\sigma$. Vamos a comprobar que realmente tenemos la igualdad fijándonos en el morfismo que nos proporciona el orden. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
G^{(J)} \arrow[r] \arrow[dd, "q"'] \arrow[drr, bend left, "\eta^{J}"] & J^\sigma \arrow[dd, "\alpha"] \arrow[dr] & \\
 & & M \\
G^{(EJ)} \arrow[r] \arrow[urr, bend right, "\eta^{EJ}"'] & (EJ)^\sigma \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Vamos a ver que el morfismo α es un isomormofismo, para ello probaremos que es suprayectivo y por lo tanto tiene núcleo unitario que al ser también evanescente (por ser α monomorfismo) concluiremos que ha de ser 0 y por lo tanto también será inyectivo.

Vamos a utilizar la notación $q_h : G \to G^{(EJ)}$ y $p_h : G^{(EJ)} \to G$ la inyección y la proyección en la coordenada h.

Para ver que α es suprayectivo es suficiente con ver que todos los elementos de la forma $(g)q_{eh} + \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\eta^{EJ})\right)$ están en $\mathsf{Im}(\alpha)$ para todo $g \in G$, $e \in E$ y $h \in J$ ya que todo elemento de $(EJ)^\sigma$ se puede poner como suma finita de elementos de esta forma.

Consideremos el homomorfismo $q_{eh} - e * q_h : G \to G^{(EJ)}$. Si compemos con $\eta^{(EJ)} : G^{(EJ)} \to M$ tenemos que para todo $g \in G$, $(g)(q_{eh} - e * q_h) * \eta^{(EJ)} = (g)(e * h) - ((g)e)h = 0$ por lo tanto $\mathsf{Im}(q_{eh} - e * q_h) \subseteq \mathsf{Ker}(\eta^{(EJ)})$. Como $\mathsf{Im}(q_{eh} - e * q_h)$ es cociente de G, es un módulo unitario y por lo tanto estará en $\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\eta^{(EJ)})\right)$.

Hemos probado que para todo $g \in G$, $e \in E$ y $h \in J$ se tiene que $(g)q_{eh}$ y $((g)e)q_h$ representan la misma clase de equivalencia en $(EJ)^\sigma$, pero la clase de $((g)e)q_h$ está en la imagen de α puesto que proviene de la clase en $G^{(J)}$ que tiene $(g)e$ en la componente h y 0 en el resto de componentes. $\square$

Sea $u : N \to M$ un monomorfismo, entonces la aplicación $\mathsf{Hom}_A(G, u) : \mathsf{Hom}_A(G, N) \to \mathsf{Hom}_A(G, M)$ es una aplicación inyectiva y podemos identificar $\mathsf{Hom}_A(G, N)$ con su imagen dentro de $\mathsf{Hom}_A(G, M)$. La imagen será precisamente el conjunto de todos los homomorfismos de $\mathsf{Hom}_A(G, M)$ que se pueden poner como $h * u$ con $h \in \mathsf{Hom}_A(G, N)$. Denotaremos $\mathsf{Hom}_A(G, N) * u$ a esta imagen. Esta aplicación nos permite considerar $\mathcal{S}(M)$ como un subconjunto de $\mathcal{E}(M)$. Vamos a ver que el orden en ambos conjuntos es el mismo:

Proposición 4.4 *Sean $u_1 : N_1 \to M$ y $u_2 : N_2 \to M$ dos monomorfismos en $R-$*DMod. *Entonces son equivalentes:*

1. *Existe un homomorfismo $\alpha : N_1 \to N_2$ tal que $\alpha * u_2 = u_1$.*

2. *Se tiene la siguiente inclusión de conjuntos $\mathsf{Hom}_A(G, N_1) * u_1 \subseteq \mathsf{Hom}_A(G, N_2) * u_2$.*

Demostración:
Si existe $\alpha : N_1 \to N_2$ tal que $\alpha * u_2 = u_1$ entonces para todo $h * u_1 \in \mathsf{Hom}_A(G, N_1) * u_1$ tenemos que $h * u_1 = h * \alpha * u_2 \in \mathsf{Hom}_A(G, N_2) * u_2$.

Para ver el recíproco, supongamos que tenemos la inclusión

$$\mathsf{Hom}_A(G, N_1) * u_1 \subseteq \mathsf{Hom}_A(G, N_2) * u_2$$

y vamos a definir una aplicación $\varphi : \mathsf{Hom}_A(G, N_1) \to \mathsf{Hom}_A(G, N_2)$ del siguiente modo. Sea $f : G \to N_1$, entonces como

$$f * u_1 \in \mathsf{Hom}_A(G, N_1) * u_1 \subseteq \mathsf{Hom}_A(G, N_2) * u_2$$

podemos encontar $h : G \to N_2$ tal que $f * u_1 = h * u_2$. Si existieran h y h' cumpliendo esta propiedad, tendríamos $h * u_2 = f * u_1 = h' * u_2$ y por lo tanto $(h - h') * u_2 = 0$. Utilizando que u_2 es un monomorfismo tendríamos que $h = h'$. A este elemento h que existe y es único para cada f lo llamaremos $\varphi(f)$.

La aplicación φ es inyectiva ya que si $\varphi(f) = \varphi(f')$ tendríamos que $f * u_1 = \varphi(f) * u_2 = \varphi(f') * u_2 = f' * u_1$ y utilizando ahora que u_1 es monomorfismo, concluiríamos que $f = f'$.

Vamos ahora a definir $\Phi : G^{(\mathsf{Hom}_A(G,N_1))} \to G^{(\mathsf{Hom}_A(G,N_2))}$ el homomorfismo que lleva $(g_f)_{f \in \mathsf{Hom}_A(G,N_1)}$ a $(g'_h)_{h \in \mathsf{Hom}_A(G,N_2)}$ de forma que $g'_h = g_f$ si $h = \varphi(f)$ para algún $f \in \mathsf{Hom}_A(G, N_1)$ y 0 en caso de que no exista ningún f con esa propiedad. La inyectividad de φ nos garantiza que Φ está bien definido.

Consideremos ahora el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
G^{(\mathsf{Hom}_A(G,N_1))} \arrow[r, "\eta_{N_1}"] \arrow[dd, "\Phi"'] & N_1 \arrow[dr, "u_1"] & \\
& & M \\
G^{(\mathsf{Hom}_A(G,N_2))} \arrow[r, "\eta_{N_2}"] & N_2 \arrow[ur, "u_2"] &
\end{tikzcd}$$

Este diagrama es conmutativo ya que, si partimos de un elemento $(g_f)_{f\in\mathsf{Hom}_A(G,N_1)}$ y recorremos la parte superior hasta M obtenemos $\sum_{f\in\mathsf{Hom}_A(G,N_1)}(g_f)f * u_1$. Si vamos hacia abajo a través de Φ llegamos a $(g'_h)_{h\in\mathsf{Hom}_A(G,N_2)}$ que recorriendo la parte inferior iría a $\sum_{h\in\mathsf{Hom}_A(G,N_2)}(g'_h)h * u_2$. Si h no proviene de un $f \in \mathsf{Hom}_A(G,N_1)$ tenemos que $g'_h = 0$ por lo que tenemos la igualdad

$$\sum_{h\in\mathsf{Hom}_A(G,N_2)}(g'_h)h * u_2 = \sum_{f\in\mathsf{Hom}_A(G,N_1)}(g_f)\varphi(f) * u_2 = \sum_{f\in\mathsf{Hom}_A(G,N_1)}(g_f)f * u_1$$

siendo esta última igualdad consecuencia de la definición de φ.

Por otra parte tenemos que $\mathsf{Ker}(\eta_{N_1}) \subseteq \mathsf{Ker}(\eta_{N_1} * u_1)$, pero como η_{N_1} es un epimorfismo entre módulos firmes, su núcleo es unitario por lo que estará contenido en $\mathsf{U}\,(\mathsf{Ker}(\eta_{N_1} * u_1))$. En el otro sentido, si aplicamos η_{N_1} al módulo unitario $\mathsf{U}\,(\mathsf{Ker}(\eta_{N_1} * u_1))$ obtendrémos un submódulo unitario de $\mathsf{Ker}(u_1)$ que ha de ser 0 porque u_1 es un monomorfismo y por lo tanto $\mathsf{Ker}(u_1)$ es evanescente.

Hemos probado pues que $\mathsf{Ker}(\eta_{N_1}) = \mathsf{U}\,(\mathsf{Ker}(\eta_{N_1} * u_1))$. Un argumento similar se puede aplicar a N_2. Como Φ es un homomorfismo, $(\mathsf{Ker}(\eta_{N_1}))\Phi$ será un submódulo unitario de $\mathsf{Ker}(\eta_{N_2} * u_2)$ ya que

$$(\mathsf{Ker}(\eta_{N_1}))\Phi * \eta_{N_2} * u_2 = (\mathsf{Ker}(\eta_{N_1}))\eta_{N_1} * u_1 = 0$$

Tendremos pues que el submódulo $(\mathsf{Ker}(\eta_{N_1})\Phi$ está contenido en $\mathsf{U}\,(\mathsf{Ker}(\eta_{N_2} * u_2)) = \mathsf{Ker}(\eta_{N_2})$.

Este argumento nos garantiza la existencia de un homomorfismo entre las imágenes de η_{N_1} y η_{N_2}, que son precisamente N_1 y N_2 haciendo conmutativo el cuadrado de la izquierda.

$$\begin{tikzcd}
G^{(\mathsf{Hom}_A(G,N_1))} \arrow[r, "\eta_{N_1}"] \arrow[dd, "\Phi"'] & N_1 \arrow[dr, "u_1"] \arrow[dd, "\alpha"] & \\
& & M \\
G^{(\mathsf{Hom}_A(G,N_2))} \arrow[r, "\eta_{N_2}"] & N_2 \arrow[ur, "u_2"] &
\end{tikzcd}$$

La conmutatividad del triángulo de la derecha es consecuencia de la conmutatividad del pentágono exterior y de que η_{N_1} sea suprayectiva. $\square$

De esta forma podemos identificar los elementos de $\mathcal{S}(M)$ con los de $\mathcal{E}(M)$ y también tenemos un operador $(-)^\sigma : \mathcal{E}(M) \to \mathcal{S}(M)$. Vamos a ver que este operador nos devuelve el mismo objeto si partimos de un subobjeto de M.

Proposición 4.5 *Sea* $u : N \to M$ *un monomorfismo en* $R-\mathsf{DMod}$. *Entonces los objetos* N *y* $(\mathsf{Hom}_A(G, N) * u)^\sigma$ *son el mismo objeto de* $\mathcal{S}(M)$.

Demostración:
Consideremos la biyección entre los conjuntos $\varphi = - * u : \mathsf{Hom}_A(G, N) \to \mathsf{Hom}_A(G, N) * u$ y el diagrama inducido por el isomorfismo $\Phi : G^{(\mathsf{Hom}_A(G,N))} \to G^{(\mathsf{Hom}_A(G,N)*u)}$ dado por $(g_f) \mapsto (g_{f*u})$.

$$\begin{tikzcd}
G^{(\mathsf{Hom}_A(G,N))} \arrow[rr, "\eta_N"] \arrow[d, "\Phi"'] & & N \arrow[r, "u"] & M \\
G^{(\mathsf{Hom}_A(G,N)*u)} \arrow[urrr, bend right, "\eta^{\mathsf{Hom}_A(G,N)*u}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

El isomorphismo Φ lleva $\mathsf{Ker}(\eta_N) = \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\eta_N)\right) = \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\eta_N * u)\right)$ a $\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\eta^{\mathsf{Hom}_A(G,N)*u})\right)$ y por lo tanto tenemos un isomorfismo

$$N \simeq G^{(\mathsf{Hom}_A(G,N))}/\mathsf{Ker}(\eta_N) \simeq G^{(\mathsf{Hom}_A(G,N)*u)}/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\eta^{\mathsf{Hom}_A(G,N)*u})\right) = (\mathsf{Hom}_A(G, N) * u)^\sigma.$$

□

Proposición 4.6 *Existe una biyección que conserva el orden entre los elementos de* $\mathcal{S}(M)$ *y los elementos de* $\mathcal{E}(M)$ *que son de la forma* $\mathsf{Hom}_A(G, N) * u$ *para algún monomorfismo* $u : N \to M$. *La biyección viene dada de la siguiente forma: Dado* $u : N \to M$ *un subobjeto de* M, *lo llevamos a* $\mathsf{Hom}_A(G, N) * u$. *Recíprocamente, dado un conjunto de la forma* $\mathsf{Hom}_A(G, N) * u$ *en* $\mathcal{E}(M)$ *lo llevamos al subobjeto* $(\mathsf{Hom}_A(G, N) * u)^\sigma$.

Demostración:
La Proposición 4.5 nos prueba que dado un monomorfismo $u : N \to M$, $(\mathsf{Hom}_A(G, N) * u)^\sigma$ y N son el mismo objeto en $\mathcal{S}(M)$, esa propiedad nos garantiza la biyección. El respeto del orden está en la Proposición 4.4. □

Utilizando este resultado, podemos considerar el conjunto ordenado $\mathcal{S}(M)$ dentro del conjunto ordenado $\mathcal{E}(M)$ y el operador $(-)^\sigma : \mathcal{E}(M) \to \mathcal{S}(M) \subseteq \mathcal{E}(M)$. A este operador σ lo llamaremos la σ-clausura.

Proposición 4.7 *La* σ*-clausura tiene las siguientes propiedades:*

1. $N^\sigma \in \mathcal{S}(M)$ *para todo* $N \in \mathcal{E}(M)$.
2. *Si* $N \leq L$ *en* $\mathcal{E}(M)$, *entonces* $N^\sigma \leq L^\sigma$.
3. $N \leq N^\sigma$ *para todo* $N \in \mathcal{E}(M)$, *dándose la igualdad si y sólo si* $N \in \mathcal{S}(M)$.
4. $(N^\sigma)^\sigma = N^\sigma$.

Demostración:
Estos resultados son consecuencia inmediata de las proposiciones demotradas anteriormente. (1) se vió al hacer la Definición 4.1. La demostración de (2) es la Proposición 4.2. Para ver (3)

simplemente notemos que para todo $h \in N \subseteq \mathsf{Hom}_A(G, M)$, la inyección $q_h : G \to G^{(N)}$ compuesta con el epimorfismo $G^{(N)} \to N^\sigma$ es un homorfismo de $\mathsf{Hom}_A(G, N^\sigma)$ que identificamos con N^σ. Por último, (4) es consecuencia de la Proposición 4.5. $\square$

Definición 4.8 *Sea $\{N_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de elementos de $\mathcal{S}(M)$, entonces definiremos*

1. $\displaystyle\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}^{\mathcal{S}} N_\lambda = \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\right)^\sigma$.
2. $\displaystyle\bigvee_{\lambda\in\Lambda}^{\mathcal{S}} N_\lambda = \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\right)^\sigma$.

Proposición 4.9 *El conjunto $\mathcal{S}(M)$ es un retículo con las operaciones $\overset{\mathcal{S}}{\bigwedge}$ y $\overset{\mathcal{S}}{\bigvee}$.*

Demostración:
Vamos a demostrar que $\overset{\mathcal{S}}{\bigwedge}$ y $\overset{\mathcal{S}}{\bigvee}$ son respectivamente la menor de las cotas superiores y la mayor de las cotas inferiores.

Como para todo $\mu \in \Lambda$ se tiene que

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \subseteq N_\mu \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$$

Aplicando la σ-clausura y teniendo en cuenta que respeta el orden y que deja fijos los elementos de $\mathcal{S}(M)$, deducimos que

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\right)^\sigma \leq N_\mu \leq \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\right)^\sigma$$

Supongamos por otra parte que tenemos elementos L,H en $\mathcal{S}(M)$ tales que para todo $\mu \in \Lambda$, $L \leq N_\mu \leq H$. En particular esta relación también se cumplirá en $\mathcal{E}(M)$ y por lo tanto

$$L \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \subseteq N_\mu \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \subseteq H$$

Aplicando de nuevo la σ-clausura, concluimos que

$$L \leq \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\right)^\sigma \leq N_\mu \leq \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\right)^\sigma \leq H.$$

$\square$

4.2. El Retículo de Núcleos y Cocientes

En la Sección 4.1 definimos y estudiamos las propiedades del retículo de subobjetos de un módulo firme M, que denotábamos $\mathcal{S}(M)$. De entre ellos hay algunos que son núcleos, al subconjunto de dichos núcleos lo denotaremos $\mathcal{K}(M)$. Tenemos pues que $\mathcal{K}(M) \subseteq \mathcal{S}(M)$, el problema de la abelianidad de $R-\mathsf{DMod}$ es si tenemos o no la igualdad.

La relación de orden que utilizábamos en el caso de subobjetos, es la misma que utilizaremos en el caso de los núcleos.

Dualmente a como se define el conjunto de subobjetos, se puede definir el conjunto de objetos cocientes de M, que denotaremos por $\mathcal{C}(M)$ dado por las clases de epimorfismos $p : M \to N$ con la relación de equivalencia dada por $p : M \to N$ es equivalente a $p' : M \to N'$ si existe un isomorfismo $\beta : N \to N'$ tal que $p * \beta = p'$.

Tal y como hacíamos en el caso de subobjetos, en el caso de objetos cocientes identificaremos el objeto con el módulo asociado, dando por sobreentendido el monomorfismo o epimorfismo que lo definen. Así hablaremos de que L es un objeto cociente de M y cuando sea necesario hacer expícito el epimorfismo, hablaremos del epimorfismo asociado al objeto cociente.

En el caso de los objetos cocientes también tenemos la relación de orden L_1 menor o igual que L_2 si y sólo si exite $\beta : L_2 \to L_1$ haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & L_1 \\ M \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & L_2 \arrow[uu, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

Proposición 4.10 *Sea M un módulo de $R-\mathsf{DMod}$ y definamos*

$$\Phi : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{C}(M) \quad \Phi(N) = \mathsf{Coker}'(N \to M)(= \mathsf{Coker}(N \to M))$$

$$\Psi : \mathcal{C}(M) \to \mathcal{K}(M) \subseteq \mathcal{S}(M) \quad \Psi(L) = \mathsf{Ker}'(M \to L)(= \mathsf{D}\,(\mathsf{Ker}(M \to L)))$$

Se cumplen las siguientes propiedades:

1. *Las aplicaciones Φ y Ψ están bien definidas y conservan el orden.*

2. *Para todo L en $\mathcal{C}(M)$, $\Phi(\Psi(L)) = L$.*

3. *Para todo N en $\mathcal{S}(M)$, $N \leq \Psi(\Phi(N))$, dándose la igualdad si y sólo si $N \in \mathcal{K}(M)$.*

Demostración:

1. Consideremos dos monomorfismos $\nu : N \to M$ y $\lambda : L \to M$ tales que existe un homomorfismo $\alpha : N \to L$ tal que $\alpha * \lambda = \nu$. Ésto nos proporciona el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[dr, "\nu"] \arrow[dd, "\alpha"'] & & \mathsf{Coker}(\lambda) \\
& M \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
L \arrow[ur, "\lambda"'] & & \mathsf{Coker}(\nu)
\end{tikzcd}$$

Como $\nu * \mathsf{coker}(\lambda) = \alpha * \lambda * \mathsf{coker}(\lambda) = 0$ podemos encontrar un morfismo $\beta : \mathsf{Coker}(\nu) \to \mathsf{Coker}(\lambda)$ haciendo conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[dr, "\nu"] \arrow[dd, "\alpha"'] & & \mathsf{Coker}(\lambda) \\
& M \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
L \arrow[ur, "\lambda"'] & & \mathsf{Coker}(\nu) \arrow[uu, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

Si α es un isomorfismo entonces β es un isomorfismo. La existencia de este morfismo nos garantiza que Φ está bien definida y conserva el orden. Una demostración totalmente dual nos permite ver que Ψ también está bien definida y conserva el orden.

2. Sea $\lambda : M \to L$ un objeto de $\mathcal{C}(M)$, si aplicamos Ψ obtenemos el subobjeto $\mathsf{D}\,(\mathsf{Ker}(\lambda)) \to M$. La imagen de este morfismo es $\mathsf{U}\,(\mathsf{Ker}(\lambda))$ pero como λ es un epimorfismo entre módulos firmes, $\mathsf{Ker}(\lambda)$ es unitario y por lo tanto $\Phi(\Psi(L)) = \mathsf{Coker}(\mathsf{D}\,(\mathsf{Ker}(\lambda)) \to M) = M/\mathsf{Ker}(\lambda) = L$.

3. Consideremos $\nu : N \to M$ un subobjeto de M. El subobjeto $\Psi(\Phi(N))$ es precisamente $\mathsf{D}\,(\mathsf{Im}(\nu))$ junto con el morfismo $\nu_{\mathsf{Im}(\nu)} * j$ siendo $j : \mathsf{Im}(\nu) \to M$ la inclusión. El morfismo $N \to \mathsf{D}\,(\mathsf{Im}(\nu))$ que buscamos es el resultando de aplicar el funtor D a $N \to \mathsf{Im}(\nu)$. Si la igualdad se da, es evidente que N es un núcleo. Recíprocamente, si N es un núcleo, entonces es el núcleo de su conúcleo y por tanto $N = \mathsf{Ker}'(M \to M/\mathsf{Im}(\nu)) = \mathsf{D}\,(\mathsf{Im}(\nu))$.

□

Definición 4.11 *Con las notaciones de la proposición anterior, dado M en $R{-}\mathsf{DMod}$ y N un subobjeto en $\mathcal{S}(M)$, definiremos la κ-clausura de N a $N^\kappa = \Psi(\Phi(N))$*

Proposición 4.12 *La κ-clausura tiene las siguientes propiedades:*

1. *$N^\kappa \in \mathcal{K}(M)$ para todo $N \in \mathcal{S}(M)$.*

2. *Si $N \leq L$ en $\mathcal{S}(M)$, entonces $N^\kappa \leq L^\kappa$.*

3. *$N \leq N^\kappa$ para todo $N \in \mathcal{S}(M)$, dándose la igualdad si y sólo si $N \in \mathcal{K}(M)$.*

4. *$(N^\kappa)^\kappa = N^\kappa$.*

Demostración:

1. N^κ es el núcleo del conúcleo de $N \to M$ y en particular un núcleo.
2. Es consecuencia de que tanto Φ como Ψ conserven el orden.
3. Esta propiedad es consecuencia de la propiedad (3) de la proposición anterior.
4. Como N^κ es un núcleo, al aplicarle Φ y Ψ volvemos a obtener el mismo objeto utilizando la propiedad (3) de la proposición anterior.

□

Definición 4.13 *Sea $\{N_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de elementos de $\mathcal{K}(M)$, entonces definiremos*

1. $\displaystyle \overset{\mathcal{K}}{\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}} N_\lambda = \left(\overset{\mathcal{S}}{\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}} N_\lambda\right)^\kappa.$
2. $\displaystyle \overset{\mathcal{K}}{\bigvee_{\lambda\in\Lambda}} N_\lambda = \left(\overset{\mathcal{S}}{\bigvee_{\lambda\in\Lambda}} N_\lambda\right)^\kappa.$

Proposición 4.14 *El conjunto $\mathcal{K}(M)$ es un retículo con las operaciones $\overset{\mathcal{K}}{\bigwedge}$ y $\overset{\mathcal{K}}{\bigvee}$.*

Demostración:
La demostración es idéntica a la de la Proposición 4.9, pero aplicando la κ-clausura entre $\mathcal{K}(M)$ y $\mathcal{S}(M)$. □

4.3. La Modularidad del Retículo de Subobjetos

En esta sección vamos a profundizar en las construcciones de $\wedge$ y $\vee$ en el retículo de subobjetos, proporcionando algunas propiedades que necesitaremos en el próximo capítulo. Utilizaremos la descomposición epi+mono, así como el concepto de residuo de un morfismo que vimos en la Sección 3.4. Terminaremos el capítulo probando que el retículo de subobjetos es modular.

Empecemos recordando la factorización epi-mono de un morfismo $f : M \to L$ y el residuo de f, $\rho = \mathsf{res}(f)$ que vimos en la Sección 3.4. El epimorfismo lo denotábamos ϵ_f y el monomorfismo μ_f quedando el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(f))"', "\epsilon_f"] & L \\
\mathsf{Coker}'(\mathsf{ker}'(f)) \arrow[r, "\rho"] \arrow[ur, "\mu_f"] & \mathsf{Ker}'(\mathsf{coker}'(f)) \arrow[u, "\mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(f))"']
\end{tikzcd}$$

Proposición 4.15 *Sea $f : M \to L$ un homomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$, entonces la κ-clausura del subobjeto $\mu_f : M/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(f)\right) \to L$ es $\mathsf{Ker}'(\mathsf{coker}'(f))$.*

Demostración:
Para calcular la κ-clausura de μ_f tenemos que calcular el núcleo del conúcleo de μ_f, pero como la imagen de f es la misma que la de μ_f dentro de L, el conúcleo de μ_f es el mismo que el de f y por tanto el núcleo del conúcleo de μ_f es $\mathsf{Ker}'(\mathsf{coker}'(f))$. Para todo morfismo f tenemos pues el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(f))"'] & & L \\
M/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(f)\right) \arrow[urr, "\mu_f"] \arrow[r, "\rho"] & \left(M/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(f)\right)\right)^{\kappa} \arrow[ur, "\mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(f))"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Proposición 4.16 *Sea M un módulo firme y $n_i : N_i \to M$ monomorfismos, sea $n : \coprod_i N_i \to M$ el homomorfismo inducido por los n_i. Entonces*

1. $\overset{\mathcal{S}}{\bigvee} N_i = \mathsf{Coker}'(\mathsf{ker}'(n))$.

2. *Si además todos los N_i son núcleos, entonces* $\overset{\mathcal{K}}{\bigvee} N_i = \mathsf{Ker}'(\mathsf{coker}'(n))$.

Demostración:

1. Vamos a denotar $C = \mathsf{Coker}'(\mathsf{ker}'(n))$, es decir, $\coprod N_i/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(n)\right)$. Lo que tenemos que probar es que C y $\overset{\mathcal{S}}{\bigvee} N_i$ son el mismo subobjeto.

   Denotemos $q_i : N_i \to \coprod_j N_j$ a las inyecciones canónicas. Para todo i tenemos el siguiente diagrama

   $$\begin{tikzcd}
   N_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[d, "n_i"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \coprod_j N_j \arrow[d, "\epsilon_n"] \\
   M & C \arrow[l, "\mu_n"]
   \end{tikzcd}$$

   Por lo que tenemos un homorfismo $\alpha : N_i \to C$ que nos prueba que $N_i \leq C$ y por lo tanto $\overset{\mathcal{S}}{\bigvee} N_i \leq C$.

   Por otro lado, para todo i, el morfismo n_i se descompone en dos monomorfismos $N_i \to \overset{\mathcal{S}}{\bigvee} N_j \to M$ y utilizando la propiedad universal del coproducto, podemos inducir un homomorfismo $\coprod_i N_i \to \overset{\mathcal{S}}{\bigvee} N_j$ tal que n se descomponga como $\coprod_i N_i \to \overset{\mathcal{S}}{\bigvee} N_j \to M$. Ésto nos da el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_i N_i \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\epsilon_n"'] \arrow[dr, "n"] & \overset{\mathcal{S}}{\bigvee} N_j \arrow[d, "m"] \\
C \arrow[r, "\mu_n"] & M
\end{tikzcd}$$

Como m es un monomorfismo, $\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(n)\right) \subseteq \mathsf{Ker}(h)$ y por lo tanto tenemos un morfismo $\beta : C \to \overset{\mathcal{S}}{\bigvee} N_j$ que hace conmutativo el diagrama y por lo tanto $C \leq \overset{\mathcal{S}}{\bigvee} N_j$.

2. Notemos que la imagen de μ_n es la misma que la imagen de n y ésta es la suma de las imágenes de cada uno de los n_i dentro de M. La κ-clausura de $\overset{\mathcal{S}}{\bigvee} N_i$ es pues $\mathsf{D}\left(\sum_i \mathsf{Im}(n_i)\right)$, pero este módulo es precisamente $\mathsf{Ker}'(\mathsf{coker}'(n))$ ya que $\mathsf{coker}'(n) = \mathsf{coker}(n) : M \to M/\sum_i \mathsf{Im}(n_i)$.

   En caso de que todos los N_i sean núcleos, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_i N_i \arrow[r, "n"] \arrow[d, "\mathsf{coker}'(\mathsf{ker}'(n))"'] & M \\
\overset{\mathcal{S}}{\bigvee} N_j \arrow[r, "\rho"] \arrow[ur, "\mu_n"] & \overset{\mathcal{K}}{\bigvee} N_j \arrow[u, "\mathsf{ker}'(\mathsf{coker}'(n))"']
\end{tikzcd}$$

□

Lema 4.17 *Sea $f : M \to L$ un homomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$ y sea $n : C \to L$ un monomorfismo. Si construimos el cuadrado cartesiano de n y f,*

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "n'"'] & C \arrow[d, "n"] \\
M \arrow[r, "f"'] & L
\end{tikzcd}$$

entonces se cumple que n' es un monomorfismo. Al subobjeto $n' : W \to M$ lo llamaremos imagen inversa del subobjeto $n : C \to L$ por f y lo denotaremos $f^{-1}(C) \hookrightarrow M$. Además, si $n : C \to L$ es un núcleo, $n' : f^{-1}(C) \to M$ también es un núcleo.

Demostración:
Sea $h : G \to W$ un morfismo en $R-\mathsf{DMod}$ tal que $h * n' = 0$, entonces $h * n' * f = 0 = h * f' * n$, pero como n es un monomorfismo, deducimos que $h * f' = 0$. Pero entonces $h * f' = 0 * f'$ y $h * n' = 0 * n'$ y utilizando la unicidad del cuadrado cartesiano, deducimos que $h = 0$.

Supongamos ahora que n es un núcleo, entonces es el núcleo de $p : L \to H$. Vamos probar que n' es el núcleo de $f * p$. Por un lado, está claro que $n' * f * p = f' * n * p = 0$. Supongamos que tenemos $\alpha : K \to M$ tal que $\alpha * f * p = 0$. Entonces haciendo uso de que n es el núcleo de p, existe un único $\beta : K \to C$ tal que $\beta * n = \alpha * f$.

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "n'"'] & C \arrow[d, "n"] & \\
K \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[urr, bend left, "\beta"] \arrow[rrr, bend right, "0"'] & M \arrow[r, "f"'] & L \arrow[r, "p"'] & H
\end{tikzcd}$$

Utilizando ahora las propiedades de cuadrado cartesiano, podemos encontrar $\gamma : K \to W$ tal que $\gamma * n' = \alpha$. Para completar la demostración de que α es el núcleo de $f * p$ tenemos que probar que éste γ es el único que cumple $\gamma * n' = \alpha$, pero eso es inmediato si tenemos en cuenta que n' ya hemos probado que es monomorfismo. □

Lema 4.18 *Sea $f : M \to L$ un homomorfismo en $R-$DMod y sean N_1 y N_2 subobjetos de L tales que $N_1 \leq N_2$, entonces $f^{-1}(N_1) \leq f^{-1}(N_2)$.*

Demostración:
Consideremos los monomorfismos $n_1 : N_1 \to L$ y $n_2 : N_2 \to L$ tales que existe $\alpha : N_1 \to N_2$ cumpliendo $n_1 = \alpha * n_2$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo en el que el cuadrado exterior y el interior son pullbacks:

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(N_1) \arrow[r] \arrow[dd, bend right] & N_1 \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dd, bend left, "n_1"] \\
f^{-1}(N_2) \arrow[r] \arrow[d] & N_2 \arrow[d, "n_2"] \\
M \arrow[r, "f"'] & L
\end{tikzcd}$$

Utilizando la conmutatividad del diagrama y el hecho de que el cuadrado interior es un cuadrado cartesiano, podemos encontar $\gamma : f^{-1}(N_1) \to f^{-1}(N_2)$ haciendo conmutativo el diagrama, lo cual prueba que $f^{-1}(N_1) \leq f^{-1}(N_2)$. □

Proposición 4.19 *Sea $f : M \to L$ un morfismo en $R-$DMod y N un subobjeto de L. Consideremos el cuadrado cartesiano*

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(N) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h"'] & N \arrow[d] \\
M \arrow[r, "f"] & L
\end{tikzcd}$$

Entonces si f es un epimorfismo, f' también es un epimorfismo.

Demostración:
Sea $n : N \to L$ el monomorfismo dado por el subobjeto $N \leq L$. Supongamos que f' no es

suprayectiva y vamos a llegar a una contradicción. Si f' no es suprayectiva, entonces podemos encontrar $\alpha : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to N$ tal que $\mathsf{Im}(\alpha)$ no esté contenido en $\mathsf{Im}(f')$. Tenemos pues un homomorfismo $\alpha * n : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to L$ y puesto que f es un epimorfismo, podemos encontrar $\tau \geq \sigma$ y un homomorfismo $\beta : \langle\langle\tau\rangle\rangle \to M$ tal que $\Phi_{\tau\sigma} * \alpha * n = \beta * f$. Utilizando la propiedad de cuadrado cartesiano podemos encontrar $\gamma : \langle\langle\tau\rangle\rangle \to f^{-1}(N)$ tal que $\gamma * f' = \Phi_{\sigma\tau} * \alpha$, pero eso es una contradicción porque $\Phi_{\sigma\tau}$ es suprayectiva y por lo tanto

$$\mathsf{Im}(\alpha) = \mathsf{Im}(\Phi_{\sigma\tau} * \alpha) = \mathsf{Im}(\gamma * f') \subseteq \mathsf{Im}(f').$$

□

Proposición 4.20 *Sea M un módulo firme $k : K \to M$ y $n : N \to M$ dos subobjetos de M. Entonces el diagrama inducido*

$$\begin{tikzcd} K \overset{\mathcal{S}}{\bigwedge} N \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[d] \\ K \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

es un cuadrado cartesiano, por lo tanto $n^{-1}(K) = k^{-1}(N) = K \overset{\mathcal{S}}{\bigwedge} N$.

Demostración:
Vamos a denotar P al cuadrado cartesiano de K y N.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[d, "n"] \\ K \arrow[r, "k"] & M. \end{tikzcd}$$

Tal y como vimos en el Lema 4.17, el cuadrado cartesiano de K y N es un subobjeto de K y de N, por lo tanto $P \leq K \overset{\mathcal{S}}{\bigwedge} N$. Por otro lado, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} K \overset{\mathcal{S}}{\bigwedge} N \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[d] \\ K \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, utilizando la definición de cuadrado cartesiano, tendremos un morfismo $K \overset{\mathcal{S}}{\bigwedge} N \to P$, pero entonces $K \overset{\mathcal{S}}{\bigwedge} N \leq P$.

Para ver que $n^{-1}(K) = k^{-1}(N) = K \overset{\mathcal{S}}{\bigwedge} N$ simplemente apliquemos las definiciones de $n^{-1}(K)$ y de $k^{-1}(N)$ junto con la unicidad del cuadrado cartesiano. □

Corolario 4.21 *Sea M un módulo firme $k : K \to M$ y $n : N \to M$ dos subobjetos de M. Sea $f : K \coprod N \to M$ la aplicación que lleva $(\alpha, \beta) \in K \coprod N$ a $(\alpha)k - (\beta)n$. Entonces $K \overset{\mathcal{S}}{\bigwedge} N = \mathsf{Ker}'(f)$.*

Demostración:
Un cuadrado cartesiano es un tipo especial de límite y en la categoría de módulos firmes, los límites se calculaban tomando límites en la categoría $A-\mathsf{Mod}$ y luego aplicando el funtor D al resultado. El cuadrado cartesiano de k y n en $A-\mathsf{Mod}$ es precisamente $\mathsf{Ker}(f)$ y si le aplicamos el funtor D obtenemos por un lado el cuadrado cartesiano de k y n en $R-\mathsf{DMod}$ y por otro $\mathsf{Ker}'(f)$. $\square$

Teorema 4.22 *El retículo de subobjetos de un módulo firme es modular.*

Demostración:
Para simplificar la notación de esta demostración vamos a denotar $\wedge = \bigwedge^{\mathbb{S}}$ y $\vee = \bigvee^{\mathbb{S}}$.

Sean L, N_1 y N_2 subobjetos de M tales que $N_1 \leq N_2$, tenemos que probar que $(L \vee N_1) \wedge N_2 = (L \wedge N_2) \vee N_1$. Como clarmente $L \wedge N_2 \leq (L \vee N_1) \wedge N_2$ y $N_1 \leq (L \vee N_1) \wedge N_2$ tenemos que $(L \wedge N_2) \vee N_1 \leq (L \vee N_1) \wedge N_2$. El problema está en la demostración de que este monomorfismo es un isomorfismo, o lo que es lo mismo, que es epimorfismo. Para ello vamos a demostrar que para todo soporte unitario σ y todo homomorfismo $h : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to (L \wedge N_2) \vee N_1$ existe $\tau \supseteq \sigma$ y un homomorfismo $g : \langle\langle\tau\rangle\rangle \to (L \vee N_1) \wedge N_2$ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(L \vee N_1) \wedge N_2 \arrow[r, "\gamma"] & (L \wedge N_2) \vee N_1 \\
\langle\langle\tau\rangle\rangle \arrow[u, "g"] \arrow[r, "\Phi_{\tau\sigma}"] & \langle\langle\sigma\rangle\rangle \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

Con ésto habremos probado que γ es suprayectiva, puesto que para todo elemento $w \in (L \wedge N_2) \vee N_1$ podemos encontrar h cumpliendo que $(\langle 1\rangle_\sigma)h$ y por lo tanto $((\langle 1\rangle_\tau)g)\gamma = ((\langle 1\rangle_\tau)\Phi_{\tau\sigma})h = (\langle 1\rangle_\sigma)h = w$.

Para hacer la demostración, vamos a dar nombre a todos los morfismos implicados:

Sea $\lambda : L \to M$, $\nu : N_2 \to M$ y $\alpha : N_1 \to N_2$ los monomorfismos que nos definen los subobjetos L y N_2 y la relación de orden entre N_1 y N_2. El monomorfismo asociado al subobjeto N_1 supondremos que es $\alpha * \nu$.

El el coproducto $L \coprod N_1$ tomaremos $p_L, p_{N_1}, q_L, q_{N_1}$ las respectivas proyecciones e inyecciones canónicas. El homomorfismo

$$p_L * \lambda + p_{N_1} * \alpha * \nu : L \coprod N_1 \to M$$

se descompone en epi+mono de la forma

$$p_L * \lambda + p_{N_1} * \alpha * \nu = \epsilon * \mu \tag{4.1}$$

siendo $\epsilon : L \coprod N_1 \to L \vee N_1$ y $\mu : L \vee N_1 \to M$.

Por otro lado, para construir $(L \vee N_1) \wedge N_2$ construiremos el cuadrado cartesiano

$$\begin{tikzcd}
L \vee N_1 \arrow[r, "\mu"] & M \\
(L \vee N_1) \wedge N_2 \arrow[u, "\nu'"] \arrow[r, "\mu'"] & N_2 \arrow[u, "\nu"']
\end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Dado $h : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to (L \vee N_1) \wedge N_2$, si componemos $h * \nu' : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to L \vee N_1$, puesto que ϵ es un epimorfismo de módulos firmes, podemos encontrar $\tau \geq \sigma$ y $\hat{h} : \langle\langle\tau\rangle\rangle \to L \coprod N_1$ tal que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
L \coprod N_1 \arrow[r, "\epsilon"] & L \vee N_1 \\
\langle\langle\tau\rangle\rangle \arrow[u, "\hat{h}"] \arrow[r, "\Phi_{\tau\sigma}"] & \langle\langle\sigma\rangle\rangle \arrow[u, "h*\nu'"']
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Consideremos ahora el cuadrado cartesiano que nos define $L \wedge N_2$ y los siguientes morfismos $\langle\langle\tau\rangle\rangle \to L$ y $\langle\langle\tau\rangle\rangle \to N_2$

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[r, "\lambda"] & M \\
\langle\langle\tau\rangle\rangle \arrow[ur, bend left, "\hat{h}*p_L"] \arrow[rr, bend right, "\Phi_{\tau\sigma}*h*\mu' - \hat{h}*p_{N_1}*\alpha"'] & L \wedge N_2 \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"'] & N_2 \arrow[u, "\nu"']
\end{tikzcd}$$

Tenemos que comprobar que el cuadrado exterior es conmutativo para poder hacer uso de la propiedad de cuadrado cartesiano y construir un morfismo $\beta : \langle\langle\tau\rangle\rangle \to L \wedge N_2$ que cierre el diagrama.

$$\begin{gathered}
(\Phi_{\tau\sigma} * h * \mu' - \hat{h} * p_{N_1} * \alpha) * \nu = \\
\Phi_{\tau\sigma} * h * \mu' * \nu - \hat{h} * p_{N_1} * \alpha =^{4.2} \\
\Phi_{\tau\sigma} * h * \nu' * \mu - \hat{h} * p_{N_1} * \alpha =^{4.1} \\
\Phi_{\tau\sigma} * h * \nu' * \mu - \hat{h} * (\epsilon * \mu - p_L * \lambda) =^{4.3} \\
\hat{h} * \epsilon * \mu - \hat{h} * \epsilon * \mu + \hat{h} * p_L * \lambda = \hat{h} * p_L * \lambda.
\end{gathered}$$

Podemos pues garantizar que existe un único morfismo $\beta : \langle\langle\tau\rangle\rangle \to L \vee N_2$ haciendo comutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[r, "\lambda"] & M \\
\langle\langle\tau\rangle\rangle \arrow[ur, bend left, "\hat{h}*p_L"] \arrow[r, "\beta"] \arrow[rr, bend right, "\Phi_{\tau\sigma}*h*\mu' - \hat{h}*p_{N_1}*\alpha"'] & L \wedge N_2 \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"'] & N_2 \arrow[u, "\nu"']
\end{tikzcd} \tag{4.4}$$

Consideremos ahora las relaciones que nos definen $(L \wedge N_2) \vee N_1$. Para ello tenemos que construir el coproducto $(L \wedge N_2) \coprod N_1$ con sus respectivas inyecciones $\iota_{L \wedge N_2}, \iota_{N_1}$ y proyecciones $\pi_{L \wedge N_2}, \pi_{N_1}$. De nuevo tenemos la descomposición en epi+mono que nos define

$(L \wedge N_2) \vee N_1$ como

$$\begin{tikzcd} (L \wedge N_2) \coprod N_1 \arrow[r, "e"] \arrow[rr, bend left, "\pi_{L\wedge N_2} * \varphi * \lambda + \pi_{N_1} * \alpha * \nu"] & (L \wedge N_2) \vee N_1 \arrow[r, "m"] & M \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

El morfismo que vamos a definir desde τ en $(L \wedge N_2) \vee N_1$ es precisamente

$$g = (\beta * \iota_{L\wedge N_2} + \hat{h} * p_{N_1} * \iota_{N_1}) * e$$

Para poder comprobar que este morfismo cumple la relación buscada, tenemos que definir el morfismo $\gamma : (L \wedge N_2) \vee N_1 \to (L \vee N_1) \wedge N_2$. El morfismo γ está definido como aquel que compuesto con el monomorfismo $\mu' * \nu : (L \vee N_1) \wedge N_2 \to M$ nos da el monomorfismo $m : (L \wedge N_2) \vee N_1 \to M$, entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} (L \vee N_1) \wedge N_2 \arrow[rr, "\mu' * \nu"] & & M \\ & & (L \wedge N_2) \vee N_1 \arrow[u, "m"] \arrow[ull, "\gamma"'] \\ \langle\langle \tau \rangle\rangle \arrow[uu, "\Phi_{\tau\sigma} * h"] \arrow[urr, "g"] \arrow[rr] & & (L \wedge N_2) \coprod N_1 \arrow[u, "e"] \end{tikzcd}$$

Si probamos que el rectángulo exterior es conmutativo y puesto que $\mu' * \nu$ es un monomorfismo, habremos terminado.

$$(\beta * \iota_{L\wedge N_2} + \hat{h} * p_{N_1} * \iota_{N_1}) * e * m =^{4.5}$$
$$(\beta * \iota_{L\wedge N_2} + \hat{h} * p_{N_1} * \iota_{N_1}) * (\pi_{L\wedge N_2} * \varphi * \lambda + \pi_{N_1} * \alpha * \nu) =$$
$$\beta * \varphi * \lambda + \hat{h} * p_{N_1} * \alpha * \nu =^{4.4}$$
$$\hat{h} * p_L * \lambda + \hat{h} * p_{N_1} * \alpha * \nu =^{4.4}$$
$$\Phi_{\tau\sigma} * h * \mu' * \nu - \hat{h} * p_{N_1} * \alpha * \nu + \hat{h} * p_{N_1} * \alpha * \nu = \Phi_{\tau\sigma} * h * \mu' * \nu.$$

$\square$

Capítulo 5

El Funtor Límite Directo y la Abelianidad

5.1. La Categoría de Funtores

Sea $\mathcal{J}$ una categoría pequeña. En el Capítulo 2 definimos la categoría de funtores $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$. Vamos ahora a ver algunos resultados en el caso particular de $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod})$.

Puesto que la categoría $R-\mathsf{DMod}$ es completa y cocompleta podemos garantizar utilizando propiedades generales (ver [23, Theorem 7.5.2] y [23, 8.5.1]) que la categoría $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod})$ es completa y cocompleta, siendo los límites y colímites calculados punto a punto. Tal y como sucedía en el caso de $R-\mathsf{DMod}$ dentro de $A-\mathsf{Mod}$, podemos considerar $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod})$ dentro de $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, A-\mathsf{Mod})$ y también en este caso utilizaremos la notación para los límites y colímites con el símbolo $(-)'$ para el caso de la categoría $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod})$ y sin él para los límites y colímites calculados en la categoría $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, A-\mathsf{Mod})$.

Como tanto en un caso como en otro el cálculo de límites y colímites se hace punto a punto, las fórmulas que relacionan los límites y colímites en las categorías $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod})$ y $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, A-\mathsf{Mod})$ son las mismas que entre $R-\mathsf{DMod}$ y $A-\mathsf{Mod}$ punto a punto.

En la categoría $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod})$ también sabemos cómo son los monomorfismos, ya que utilizando [3, Corollary 2.15.3], dado $n : N \to M$ en $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod})$, n será un monomorfismo en $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod})$ si y sólo si $n_i : N_i \to M_i$ es un monomorfismo para todo $i \in \mathcal{J}$.

También podemos extender a $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod})$ el concepto de exactitud de $R-\mathsf{DMod}$ y las descomposiciones epi+mono que se realizan en $R-\mathsf{DMod}$.

Sabemos que los colímites calculados en $R-\mathsf{DMod}$ son los mismos que los calculados en $A-\mathsf{Mod}$, por lo tanto el funtor Colim, que es el mismo que Colim' conserva sucesiones exactas por la derecha.

En el caso en que $\mathcal{J}$ sea una categoría filtrada, una de las condiciones que definen las categorías de Grothendieck, es la necesidad de que el funtor $\varinjlim$ sea exacto. Al ser un caso particular del funtor Colim, es claro que es exacto por la derecha, entonces para conseguir que lleve sucesiones exactas a sucesiones exactas necesitamos que lleve monomorfismos de $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod})$ a monomorfismos de $R-\mathsf{DMod}$.

Empecemos notando que a partir de cualquier sistema filtrado podemos construir un sistema filtrado de monomorfismos:

Nota 5.1 *Sea $\mathcal{J}$ una categoría filtrada pequeña y sea $\varphi : M \to N$ un morfismo en la categoría* $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R{-}\mathsf{DMod})$. *Entonces* $\mathsf{Coker}'(\mathsf{ker}'(\varphi)) : \mathcal{J} \to R{-}\mathsf{DMod}$ *es un funtor y la transformación natural μ_φ que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\epsilon_\varphi"] & N \\ \mathsf{Coker}'(\mathsf{ker}'(\varphi)) \arrow[ur, "\mu_\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

es un sistema filtrado de monomorfismos.

Notemos que $\mathsf{Coker}'(\mathsf{ker}'(\varphi_i)) = M_i/\mathsf{U}\,(\mathsf{Ker}(\varphi_i))$ para todo $i \in \mathcal{J}$.

Proposición 5.2 *Sea $\mathcal{J}$ una categoría filtrada pequeña. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El funtor* $\varinjlim : \mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R{-}\mathsf{DMod}) \to R{-}\mathsf{DMod}$ *conserva sucesiones exactas.*
2. *El funtor* $\varinjlim : \mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R{-}\mathsf{DMod}) \to R{-}\mathsf{DMod}$ *conserva monomorfismos.*
3. *Para todo morfismo $\varphi : M \to N$ en* $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R{-}\mathsf{DMod})$ *y para todo $i \in \mathcal{J}$ se tiene que*
$$\varinjlim \mathsf{U}\,(\mathsf{Ker}(\varphi_i)) = \mathsf{U}\left(\varinjlim \mathsf{Ker}(\varphi_i)\right)$$
4. *Para todo morfismo $\varphi : M \to N$ en* $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R{-}\mathsf{DMod})$ *y para todo $i \in \mathcal{J}$ se tiene que*
$$\varinjlim \mathsf{U}\,(\mathsf{Ker}(\varphi_i)) = \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varinjlim \varphi_i)\right)$$

Demostración:
$(1 \Leftrightarrow 2)$. El funtor límite directo es el mismo considerado en $R{-}\mathsf{DMod}$ y en $A{-}\mathsf{Mod}$ y las sucesiones exactas cortas en $R{-}\mathsf{DMod}$, consideradas en $A{-}\mathsf{Mod}$ son exactas por la derecha, por lo tanto, al aplicarles el límite directo siguen siendo exactas por la derecha. La conservación de sucesiones exactas cortas por parte del funtor límite directo es pues equivalente a la conservación de los monomorfismos ya que la exactitud en los demás términos se cumple siempre. $(2 \Rightarrow 3)$ Denotemos $\mu = \mu_\varphi$ que tal y como hemos visto antes, cumple que $\mu_i : M_i/\mathsf{U}\,(\mathsf{Ker}(\varphi_i)) \to N_i$ es un monomorfismo para todo $i \in \mathcal{J}$. Tenemos pues que $\mathsf{Ker}(\varinjlim \mu) = \varinjlim \mathsf{Ker}(\mu)$ es un módulo evanescente. Pero, teniendo en cuenta que $\mathsf{Ker}(\mu_i) = \mathsf{Ker}(\varphi_i)/\mathsf{U}\,(\mathsf{Ker}\varphi_i)$, se tiene que

$$\varinjlim_{i\in\mathcal{J}} \mathsf{Ker}(\mu_i) = \varinjlim \mathsf{Ker}(\varphi_i)/\mathsf{U}\,(\mathsf{Ker}(\varphi_i))$$

es un módulo evanescente.

Considerando la sucesión exacta corta en $A{-}\mathsf{Mod}$

$$0 \to \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) \to \mathsf{Ker}(\varphi_i) \to \mathsf{Ker}(\varphi_i)/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) \to 0$$

en el límite obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \to \varinjlim \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) \to \varinjlim \mathsf{Ker}(\varphi_i) \to \varinjlim \mathsf{Ker}(\varphi_i)/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) \to 0$$

El miembro de la derecha es evanescente, así la parte unitaria del módulo central debe hacerse cero en el epimorfismo, por lo que estará contenida en la imagen del miembro de la izquierda. Por otro lado, el miembro de la izquierda es unitario y su imagen estará contenida en la parte unitaria del módulo central. Deducimos que

$$\varinjlim \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) = \mathsf{U}\left(\varinjlim \mathsf{Ker}(\varphi_i)\right)$$

($3 \Rightarrow 2$) Si tenemos un sistema directo de monomorfismos de módulos firmes entonces $\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) = 0$. Así, utilizando la igualdad que estamos suponiendo cierta, se deduce que

$$\mathsf{U}\left(\varinjlim \mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) = \varinjlim \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) = 0$$

Concluimos que $\varinjlim \varphi_i$ es un monomorfismo.

La equivalencia entre (3) y (4) está clara puesto que $\varinjlim$ es exacto en $A{-}\mathsf{Mod}$ y por lo tanto $\varinjlim \mathsf{Ker}(\varphi_i) = \mathsf{Ker}(\varinjlim (\varphi_i))$. $\square$

Proposición 5.3 *Sea $\mathcal{J}$ una categoría filtrada pequeña. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El funtor* $\varinjlim : \mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R{-}\mathsf{DMod}) \to R{-}\mathsf{DMod}$ *conserva monomorfismos y núcleos.*
2. *Para todo morfismo* $\varphi : M \to N$ *en* $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R{-}\mathsf{DMod})$ *se tiene que* $\varinjlim \mathsf{Ker}'(\varphi) = \mathsf{Ker}'(\varinjlim \varphi)$.

Demostración:
($2 \Rightarrow 1$). Si se cumple (2) es evidente que el funtor límite directo conserva núcleos, vamos a probar que conserva también monomorfismos. Utilizando el Corolario 2.25, para cualquier morfismo f de $R{-}\mathsf{DMod}$, se tiene que $\mathsf{Ker}'(f) = \mathsf{D}\left(\mathsf{Ker}(f)\right)$, tenemos la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim \mathsf{D}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathsf{D}\left(\mathsf{Ker}(\varinjlim \varphi_i)\right) \arrow[d, "\gamma"] \\
\varinjlim \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) \arrow[r, "\delta"] & \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varinjlim \varphi_i)\right)
\end{tikzcd}$$

El morfismo α es un isomorfismo. El morfismo β es suprayectivo por ser colímite filtrado de suprayectivos y γ es también suprayectivo por el Corolario 2.22. El morfismo δ es por lo tanto un epimorfismo, ya que $\beta * \delta = \alpha * \gamma$ es un epimorfismo. Pero δ también es una aplicación inyectiva porque es la inducida por

$$\varinjlim \mathsf{U}(\mathsf{Ker}(\varphi_i)) \longrightarrow \varinjlim \mathsf{Ker}(\varphi_i)$$

que es una aplicación inyectiva por ser un colímite filtrado de aplicaciones inyectivas. Con esto se prueba que δ es un isomorfismo y por lo tanto el límite directo conserva monomorfismos.

$(1 \Rightarrow 2)$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim \mathsf{D}(\mathsf{Ker}(\varphi_i)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathsf{D}\left(\mathsf{Ker}(\varinjlim \varphi_i)\right) \arrow[d, "\gamma"] & \\
\varinjlim \mathsf{U}(\mathsf{Ker}(\varphi_i)) \arrow[r, "\delta"] & \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varinjlim \varphi_i)\right) \arrow[r, "\iota"] & \varinjlim M_i
\end{tikzcd}$$

El morfismo $\beta * \delta * \iota$ (que es el mismo que $\alpha * \gamma * \iota$) es el colímite filtrado de los núcleos $\mathsf{ker}'(\varphi_i) : \mathsf{D}(\mathsf{Ker}(\varphi_i)) \to M_i$ y por lo tanto es un núcleo.

Para cada i de $\mathcal{J}$ tenemos que la descomposición epi+mono de $\mathsf{ker}'(\varphi_i)$ en $A-\mathsf{Mod}$ es

$$\mathsf{D}(\mathsf{Ker}(\varphi_i)) \to \mathsf{U}(\mathsf{Ker}(\varphi_i)) \to M_i.$$

Utilizando que el límite directo es exacto en $A-\mathsf{Mod}$, tenemos que la descomposición epi+mono de $\varinjlim \mathsf{ker}'(\varphi_i)$ (que es $\alpha * \gamma * \iota$) es precisamente

$$\varinjlim \mathsf{D}(\mathsf{Ker}(\varphi_i)) \to \varinjlim \mathsf{U}(\mathsf{Ker}(\varphi_i)) \to \varinjlim M_i.$$

Como $\alpha * \gamma * \iota$ es un núcleo, ha de ser el núcleo de su conúcleo, es decir,

$$\varinjlim \mathsf{D}(\mathsf{Ker}(\varphi_i)) = \mathsf{D}(\mathsf{Im}(\alpha * \gamma * \iota))$$

pero $\mathsf{Im}(\alpha*\gamma*\iota) = \varinjlim \mathsf{U}(\mathsf{Ker}(\varphi_i))$ por la unicidad de la descomposición epi+mono en $A-\mathsf{Mod}$. O dicho de otra manera, $\mathsf{D}(\beta)$ es un isomorfismo.

Como el límite directo conserva monomorfismos, utilizando la Proposición 5.2 sabemos que δ es un isomorfismo y por lo tanto tenemos

$$\varinjlim \mathsf{Ker}'(\varphi_i) = \varinjlim \mathsf{D}(\mathsf{Ker}(\varphi_i)) \simeq \mathsf{D}\left(\varinjlim \mathsf{U}(\mathsf{Ker}(\varphi_i))\right) \simeq$$

$$\mathsf{D}\left(\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varinjlim \varphi_i)\right)\right) \simeq \mathsf{D}\left(\mathsf{Ker}(\varinjlim (\varphi_i))\right) = \mathsf{Ker}'(\varinjlim \varphi_i).$$

□

Proposición 5.4 *Los módulos $\{\langle\langle\sigma\rangle\rangle : \sigma \in \Xi_{\mathsf{U}}(X)\}$ son una familia generadora fuerte de la categoría $R-\mathsf{DMod}$.*

Demostración:
Siguiendo [2, Page 2], para probar que son una familia generadora fuerte, tenemos que ver que dado un monomorfismo propio $\mu : M \to K$ en $R-\mathsf{DMod}$, existe un morfismo $h : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to K$ que no factoriza a través de M. Como μ es un monomorfismo propio, no puede ser suprayectivo (si lo fuera, sería un epimorfismo entre firmes, tendría núcleo unitario y evanescente y por lo tanto sería un isomorfismo).

Podemos pues encontrar $k \in K$ tal que $k \notin \mathsf{Im}(\mu)$ y para éste k podemos encontrar un soporte unitario σ y un $h : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to K$ tal que $(\langle 1 \rangle_\sigma)h = k$. Este h no puede factorizar a través de M. □

Proposición 5.5 *La categoría $R-\mathsf{DMod}$ es localmente $\aleph_1$-presentada.*

Demostración:
Para verlo, vamos a probar que existe una familia fuerte de generadores $\aleph_1$-presentados, que son los módulos $\{\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle : \sigma \in \Xi_{\mathsf{U}}(X)\}$ lo cual, aplicando [2, Theorem 1.20] nos concluiría que la categoría es localmente $\aleph_1$-presentada.

Como son una familia generadora fuerte, falta probar que son $\aleph_1$-presentados, pero para ello tenemos que probar que $\mathsf{Hom}_A(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle, -)$ conmuta con límites directos $\aleph_1$-dirigidos en $R-\mathsf{DMod}$. Los límites directos en $R-\mathsf{DMod}$ son, como A-módulos, los mismos que en $A-\mathsf{Mod}$, por lo tanto, si probamos que son $\aleph_1$-presentados en $A-\mathsf{Mod}$, el resultado será cierto.

Pero para ver que son $\aleph_1$-presentados en $A-\mathsf{Mod}$ no hay más que notar que son un límite directo de módulos libres de la forma

$$\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} A^{(\sigma \cap X^n)}$$

y por lo tanto, utilizando [2, Proposition 1.16] concluimos que son $\aleph_1$-presentados por ser un colímite con una cantidad numerable de objetos y morfismos de objetos $\aleph_1$-presentados. □

Teorema 5.6 *Sea $\mathcal{J}$ una categoría filtrada pequeña $\aleph_1$-dirigida y sean $N, M : \mathcal{J} \to R-\mathsf{DMod}$ funtores, $n : N \to M$ una transformación natural tal que n_i es monomorfismo para todo $i \in \mathcal{J}$, entonces*

$$\varinjlim_{i \in \mathcal{J}} n_i : \varinjlim_{i \in \mathcal{J}} N_i \to \varinjlim_{i \in \mathcal{J}} M_i$$

es un monomorfismo.

Demostración:
Consideremos las siguientes sucesiones en $A-\mathsf{Mod}$,

$$0 \to \mathsf{Ker}(n_i) \to N_i \to M_i.$$

Tomando límites tenemos que el núcleo de

$$\varinjlim_{i \in \mathcal{J}} n_i : \varinjlim_{i \in \mathcal{J}} N_i \to \varinjlim_{i \in \mathcal{J}} M_i$$

es precisamente $\varinjlim_{i\in\mathcal{J}} \mathsf{Ker}(n_i)$. Este módulo tenemos que probar que es evanescente, para ello basta probar que no existe ningún homomorfismo no nulo entre los módulos de soporte y este que queremos probar que es evanescente.

Como los módulos $\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$ son $\aleph_1$-presentados en $A-\mathsf{Mod}$, tenemos que para todo $\sigma \in \Xi_{\mathsf{U}}(X)$,

$$\mathsf{Hom}_A(\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle, \varinjlim_{i\in\mathcal{J}} \mathsf{Ker}(n_i)) = \varinjlim_{i\in\mathcal{J}} \mathsf{Hom}_A(\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle, \mathsf{Ker}(n_i)) = 0$$

por ser todos los n_i monomorfismos en $R-\mathsf{DMod}$. $\square$

Teorema 5.7 *Si la categoría $R-\mathsf{DMod}$ es localmente finitamente presentada, entonces todos los límites directos son exactos en $R-\mathsf{DMod}$.*

Demostración:
Sean U_λ la familia generadora fuerte de objetos finitamente presentados.

Consideremos $\mathcal{J}$ una categoría filtrada pequeña y sean $N, M : \mathcal{J} \to R-\mathsf{DMod}$ funtores, $n : N \to M$ una transformación natural tal que n_i es monomorfismo para todo $i \in \mathcal{J}$, entonces tenemos que ver que

$$\varinjlim_{i\in\mathcal{J}} n_i : \varinjlim_{i\in\mathcal{J}} N_i \to \varinjlim_{i\in\mathcal{J}} M_i$$

es un monomorfismo.

Para todo $i \in \mathcal{J}$ tenemos la siguiente sucesión exacta en $A-\mathsf{Mod}$,

$$0 \to \mathsf{Ker}(n_i) \to N_i \to M_i$$

y como n_i es monomorfismo para todo i, tenemos que $\mathsf{Hom}_A(U_\lambda, \mathsf{Ker}(n_i)) = 0$. Esto nos induce el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & \varinjlim_{i\in\mathcal{J}} \mathsf{Hom}_A(U_\lambda, N_i) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d] & \varinjlim_{i\in\mathcal{J}} \mathsf{Hom}_A(U_\lambda, M_i) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathsf{Hom}_A(U_\lambda, \varinjlim_{i\in\mathcal{J}} \mathsf{Ker}(n_i)) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_A(U_\lambda, \varinjlim_{i\in\mathcal{J}} N_i) \arrow[r, "\mu'"] & \mathsf{Hom}_A(U_\lambda, \varinjlim_{i\in\mathcal{J}} M_i)
\end{tikzcd}$$

La fila superior es un límite directo de monomorfismos de k-módulos, por lo tanto μ es una aplicación inyectiva. Las flechas verticales son isomorfismos por ser U_λ finitamente presentado y la fila inferior es exacta, pero como μ' es la composición de un monomorfismo con isomorfismos, es un isomorfismo y de ahí deducimos que $\mathsf{Hom}_A(U_\lambda, \varinjlim_{i\in\mathcal{J}} \mathsf{Ker}(n_i)) = 0$ para todo U_λ y por lo tanto es un módulo evanescente. $\square$

5.2. Límites Directos y Abelianidad

En esta sección probaremos que si la categoría es abeliana, entonces los límites directos son exactos, de donde concluiremos que el funtor límite directo conserva monomorfismos y también núcleos (puesto que son la misma cosa en categorías abelianas).

Teorema 5.8 *Sea R un anillo asociativo tal que $R-\mathsf{DMod}$ sea una categoría abeliana, entonces para toda categoría filtrada pequeña $\mathcal{J}$, el funtor $\varinjlim : \mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod}) \to R-\mathsf{DMod}$ conserva monomorfismos y núcleos.*

Demostración:
Puesto que $R-\mathsf{DMod}$ es abeliana, monomorfismos y núcleos son la misma cosa por lo que basta probar que conserva monomorfismos.

Sean $M, N : \mathcal{J} \to R-\mathsf{DMod}$ objetos de $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod})$ y $\varphi : M \to N$ un monomorfismo, es decir, φ_i es monomorfismo para todo $i \in \mathcal{J}$. Lo que tenemos que probar es que $\varinjlim \varphi_i$ es un monomorfismo.

Denotemos $K = \mathsf{Ker}(\varphi)$, es decir, $K_i = \mathsf{Ker}(\varphi_i)$ para todo $i \in \mathcal{J}$ y para todo morfismo $\alpha : i \to j$ en $\mathcal{J}$, $K_\alpha : K_i \to K_j$ es el morfismo inducido por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_i \arrow[r, "\mathsf{ker}(\varphi_i)"] \arrow[d, dashed, "K_\alpha"] & M_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "M_\alpha"] & N_i \arrow[d, "N_\alpha"] \\
0 \arrow[r] & K_j \arrow[r, "\mathsf{ker}(\varphi_j)"] & M_j \arrow[r, "\varphi_j"] & N_j
\end{tikzcd}$$

Para el funtor $M : \mathcal{J} \to R-\mathsf{DMod}$, vamos a denotar $\pi_M : \coprod_{i \in \mathcal{J}} M_i \to \varinjlim_{i \in \mathcal{J}} M_i$ y similarmente con los funtores K y N. Estas aplicaciones son epimorfismos y en el caso de M y N, puesto que son epimorfismos entre módulos firmes, tendrán núcleo unitario. Con ello tenemos el siguiente diagrama, en el que para simplificar la notación, denotaremos $g = \coprod \varphi_i$, $f = \mathsf{ker}(g)$, $g' = \varinjlim \varphi_i$, $f' = \mathsf{ker}(g')$ y g°, f° los morfismos inducidos entre los núcleos de π_K, π_N y π_M que nos son más que las restricciones de g y f respectivamente:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathsf{Ker}(\pi_K) \arrow[r, "f^\circ"] \arrow[d, "\mathsf{ker}(\pi_K)"] & \mathsf{Ker}(\pi_M) \arrow[r, "g^\circ"] \arrow[d, "\mathsf{ker}(\pi_M)"] & \mathsf{Ker}(\pi_N) \arrow[d, "\mathsf{ker}(\pi_N)"] \\
0 \arrow[r] & \coprod K_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_K"] & \coprod M_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_M"] & \coprod N_i \arrow[d, "\pi_N"] \\
0 \arrow[r] & \varinjlim K_i \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & \varinjlim M_i \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & \varinjlim N_i \arrow[d] \\
 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

En este diagrama todas las filas y columnas son exactas en $A-\mathsf{Mod}$ y todos los cuadrados conmutativos.

Tal y como hemos visto antes, $\mathsf{Ker}(\pi_M)$ y $\mathsf{Ker}(\pi_N)$ son unitarios. El módulo $\mathsf{Ker}(\pi_K)$ es un subobjeto de $\coprod K_i$ que es evanescente por serlo todos los K_i, por lo tanto $\mathsf{Ker}(\pi_K)$ es evanescente.

Vamos a probar que $\mathsf{Im}(g) \cap \mathsf{Ker}(\pi_N) \subseteq \mathsf{Im}(g^\circ)$. Para ello tomemos $n \in \mathsf{Im}(g) \cap \mathsf{Ker}(\pi_N)$. Por estar en $\mathsf{Im}(g)$ existirá $m \in \coprod M_i$ tal que $n = (m)g$. Por otro lado, como $n \in \mathsf{Ker}(\pi_N)$ tenemos que $(n)\pi_N = 0$ y por lo tanto $(m)\pi_M * g' = (m)g * \pi_N = 0$. Tenemos pues que $(m)\pi_M \in \mathsf{Ker}(g') = \mathsf{Im}(f')$ y utilizando que π_K es suprayectivo, podemos encontrar $k \in K$ tal que $(k)\pi_K * f' = (m)\pi_M$.

Como $(k)\pi_K * f' = (m)\pi_M$ y $(k)\pi_K * f' = (k)f * \pi_M$ deducimos que $(m - (k)f)\pi_M = 0$, o lo que es lo mismo, $m - (k)f \in \mathsf{Ker}(\pi_M)$. Pero entonces

$$((m - (k)f)g^\circ = ((m - (k)f)g = (m)g - (k)f * g = (m)g = n$$

y por lo tanto $n \in \mathsf{Im}(g^\circ)$ tal y como queríamos probar.

Vamos a probar ahora que $\varinjlim K_i$ es un módulo evanescente, con lo que concluiremos que g' es un monomorfismo tal y como pretendíamos.

Para probar que $\varinjlim K_i$ es evanescente, supongamos que existe un elemento no nulo en $\mathsf{U}\left(\varinjlim K_i\right)$, entonces podemos encontrar un soporte unitario σ y un homomorfismo $u : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to \varinjlim K_i$ tal que $(\langle 1 \rangle_\sigma)u$ sea el elemento no nulo que tenemos en $\mathsf{U}\left(\varinjlim K_i\right)$. Utilizando que este u es un morfismo no nulo, vamos a llegar a una contradicción. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \arrow[ddrr, bend right, "u"'] & 0 \arrow[r] & \mathsf{Ker}(\pi_K) \arrow[r, "f^\circ"] \arrow[d, "\mathsf{ker}(\pi_K)"] & \mathsf{Ker}(\pi_M) \arrow[r, "g^\circ"] \arrow[d, "\mathsf{ker}(\pi_M)"] & \mathsf{Ker}(\pi_N) \arrow[d, "\mathsf{ker}(\pi_N)"] \\
 & 0 \arrow[r] & \coprod K_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_K"] & \coprod M_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_M"] & \coprod N_i \arrow[d, "\pi_N"] \\
 & 0 \arrow[r] & \varinjlim K_i \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & \varinjlim M_i \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & \varinjlim N_i \arrow[d] \\
 & & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

Consideremos el morfismo $u * f' : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to \varinjlim M_i$. Como π_M es un epimorfismo entre módulos firmes, podemos aplicar el Lema 3.2 y encontrar un soporte unitario $\rho \supseteq \sigma$ y un morfismo $v : \langle\!\langle \rho \rangle\!\rangle \to \coprod M_i$ tal que $v * \pi_M = \Phi_{\rho\sigma} * u * f'$. Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\langle\langle\rho\rangle\rangle \arrow[d, "\Phi_{\rho\sigma}"] \arrow[rrrdd, bend left, "v"] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\langle\langle\sigma\rangle\rangle \arrow[rrdd, bend right, "u"'] & 0 \arrow[r] & \mathsf{Ker}(\pi_K) \arrow[r, "f^\circ"] \arrow[d, "\mathsf{ker}(\pi_K)"] & \mathsf{Ker}(\pi_M) \arrow[r, "g^\circ"] \arrow[d, "\mathsf{ker}(\pi_M)"] & \mathsf{Ker}(\pi_N) \arrow[d, "\mathsf{ker}(\pi_N)"] \\
 & 0 \arrow[r] & \coprod K_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_K"] & \coprod M_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_M"] & \coprod N_i \arrow[d, "\pi_N"] \\
 & 0 \arrow[r] & \varinjlim K_i \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & \varinjlim M_i \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & \varinjlim N_i \arrow[d] \\
 & & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}
$$

Utilizando la conmutatividad del diagrama vemos que

$$v * g * \pi_N = v * \pi_M * g' = \Phi_{\rho\sigma} * u * f' * g' = 0$$

ya que $f' * g' = 0$. Entonces $\mathsf{Im}(v * g) \subseteq \mathsf{Ker}(\pi_N)$ y como por otra parte $\mathsf{Im}(v * g) \subseteq \mathsf{Im}(g)$ deducimos que $\mathsf{Im}(v * g) \subseteq \mathsf{Im}(g) \cap \mathsf{Ker}(\pi_N)$ que hemos probado que es un subconjunto de $\mathsf{Im}(g^\circ)$.

Consideremos ahora el módulo $\mathsf{D}\,(\mathsf{Ker}(\pi_M))$ junto con el epimorfismo $\nu_{\mathsf{Ker}(\pi_M)} : \mathsf{D}\,(\mathsf{Ker}(\pi_M)) \rightarrow \mathsf{Ker}(\pi_M)$ (recordemos que es $\nu_{\mathsf{Ker}(\pi_M)}$ epimorfismo porque $\mathsf{Ker}(\pi_M)$ es unitario al ser el núcleo de un epimorfismo entre firmes).

Recordemos que $\mathsf{D}\,(\mathsf{Ker}(\pi_M)) = \mathsf{Ker}'(\pi_M)$ y que el morfismo $\nu_{\mathsf{Ker}(\pi_M)} * \mathsf{ker}(\pi_M)$ es precisamente $\mathsf{ker}'(\pi_M)$ y por lo tanto es un núcleo en $R-\mathsf{DMod}$ y como todo núcleo es un monomorfismo. Por otra parte, el morfismo $g : \coprod M_i \rightarrow \coprod N_i$ es un morfismo entre módulos firmes cuyo núcleo es evanescente. Es por tanto g un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$. La composición de los monomorfismos $\mathsf{ker}'(\pi_M) * g$ es un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$ y como estamos suponiendo la categoría abeliana, $\mathsf{ker}'(\pi_M) * g$ es un núcleo en $R-\mathsf{DMod}$.

La imagen del morfismo $\mathsf{ker}'(\pi_M) * g = \nu_{\mathsf{Ker}(\pi_M)} * \mathsf{ker}(\pi_M) * g = \nu_{\mathsf{Ker}(\pi_M)} * g^\circ * \mathsf{ker}(\pi_N)$ es igual a la imagen de g° por ser $\nu_{\mathsf{Ker}(\pi_M)}$ una aplicación suprayectiva y $\mathsf{ker}(\pi_N)$ una aplicación inyectiva. Tal y como hemos probado antes, el morfismo $v * g$ tiene su imagen contenida en $\mathsf{Im}(g^\circ)$ que es precisamente $\mathsf{Im}(\mathsf{ker}'(\pi_M) * g)$ y utilizando que $\mathsf{ker}'(\pi_M) * g$ es un núcleo, deducimos que tiene que existir un morfismo $w : \langle\langle\rho\rangle\rangle \rightarrow \mathsf{D}\,(\mathsf{Ker}(\pi_M))$ tal que $w * \nu_{\mathsf{Ker}(\pi_M)} * g^\circ * \mathsf{ker}(\pi_N) = v * g$. Es decir, tenemos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathsf{D}\left(\mathsf{Ker}(\pi_M)\right) \arrow[ddr, "\nu_{\mathsf{Ker}(\pi_M)}"] & & \\
\langle\!\langle \rho \rangle\!\rangle \arrow[urr, bend left, "w"] \arrow[d, "\Phi_{\rho\sigma}"] \arrow[ddrrr, bend left, "v"] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \arrow[ddrr, bend right, "u"'] & 0 \arrow[r] & \mathsf{Ker}(\pi_K) \arrow[r, "f^\circ"] \arrow[d, "\mathsf{ker}(\pi_K)"] & \mathsf{Ker}(\pi_M) \arrow[r, "g^\circ"] \arrow[d, "\mathsf{ker}(\pi_M)"] & \mathsf{Ker}(\pi_N) \arrow[d, "\mathsf{ker}(\pi_N)"] \\
 & 0 \arrow[r] & \coprod K_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_K"] & \coprod M_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_M"] & \coprod N_i \arrow[d, "\pi_N"] \\
 & 0 \arrow[r] & \varinjlim K_i \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & \varinjlim M_i \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & \varinjlim N_i \arrow[d] \\
 & & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}
$$

Como $w * \nu_{\mathsf{Ker}(\pi_M)} * \mathsf{ker}(\pi_M) * g = v * g$ deducimos que $(w * \nu_{\mathsf{Ker}(\pi_M)} * \mathsf{ker}(\pi_M) - v) * g = 0$, pero como g es un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$, necesariamente $w * \nu_{\mathsf{Ker}(\pi_M)} * \mathsf{ker}(\pi_M) = v$.

Ya por último, tenemos que

$$\Phi_{\rho\sigma} * u * f' = v * \pi_M = w * \nu_{\mathsf{Ker}(\pi_M)} * \mathsf{ker}(\pi_M) * \pi_M = 0$$

y como f' es inyectiva y $\Phi_{\rho\sigma}$ suprayectiva, deducimos que $u = 0$ lo cual contradice la elección que habíamos hecho de u. $\square$

Corolario 5.9 *Sea R un anillo tal que la categoría $R-\mathsf{DMod}$ sea abeliana. Entonces $R-\mathsf{DMod}$ es una categoría de Grothendieck.*

Demostración:
Si $R-\mathsf{DMod}$ es abeliana, por el teorema anterior, los límites directos son exactos y por tanto cumple todas las condiciones para ser una categoría de Grothendieck. $\square$

5.3. La Propiedad AB5

Teorema 5.10 *Sea R un anillo asociativo tal que para toda categoría filtrada pequeña $\mathcal{J}$, el funtor $\varinjlim : \mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod}) \to R-\mathsf{DMod}$ conserve monomorfismos y núcleos. Entonces el retículo $\mathcal{S}(M)$ cumple la propiedad AB5 para todo módulo firme M.*

Demostración:
Para simplificar la notación en esta prueba, denotaremos $\vee = \overset{\mathcal{S}}{\bigvee}$ y $\wedge = \overset{\mathcal{S}}{\bigwedge}$ puesto que todas las operaciones vamos a realizarlas únicamente en el retículo de subobjetos de M.

Sea $\{N_i : i \in \mathcal{J}\}$ una familia ordenada de subobjetos de M y K otro subobjeto de M. Tenemos que probar que

$$(\vee_{i\in\mathcal{J}} N_i) \wedge K = \vee_{i\in\mathcal{J}}(N_i \wedge K).$$

Consideraremos $\mathcal{J}$ como una categoría filtrada pequeña con los morfismos dados por la inclusión.

De esta forma podemos considerar N como un elemento de $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod})$. También consideraremos el funtor $N \wedge K \in \mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod})$ definido como $(N \wedge K)_i = (N_i \wedge K)$.

Sea $\Delta(M) \in \mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod})$ el funtor que sobre todos los objetos está definido como M y sobre todos los morfismos como id_M. Los morfismos $N \to \Delta(M)$ y $N \wedge K \to \Delta(M)$ definidos para todo $i \in \mathcal{J}$ como el monomorfismo inducido como subobjetos son dos monomorfismos en $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod})$. Si aplicamos $\varinjlim$ y teniendo en cuenta que conserva monomorfismos obtenemos dos subobjetos de M, $\varinjlim N_i$ y $\varinjlim (N_i \wedge K)$. Por definición de $\vee$ tenemos que $\vee N_i \leq \varinjlim N_i$ y $\vee(N_i \wedge K) \leq \varinjlim (N_i \wedge K)$. Utilizando la propiedad universal de los colímites, también deducimos que $\varinjlim N_i \leq \vee N_i$ y $\varinjlim (N_i \wedge K) \leq \vee(N_i \wedge K)$ por lo que tenemos la igualdad en ambos casos.

Lo que tenemos que probar pues es que $\left(\varinjlim N_i\right) \wedge K = \varinjlim (N_i \wedge K)$. Para ello vamos a hacer uso del Corolario 4.21 que nos dice cómo se calcula $\wedge$ en términos de núcleos.

Para todo $i \in \mathcal{J}$ sea $f_i : N_i \coprod K \to M$ la aplicación que lleva la primera coordenada a M a través del morfismo $N_i \to M$ y la segunda la lleva, pero cambiándola de signo. Denotaremos también $f : \varinjlim N_i \coprod K \to M$ al correspondiente morfismo pero con $\varinjlim N_i \to M$. Tal y como vimos en el Corolario 4.21 tenemos que $\mathsf{Ker}'(f_i) = N_i \wedge K$ y $\mathsf{Ker}'(f) = (\varinjlim N_i) \wedge K$. Pero como $f = \varinjlim f_i$ entonces

$$\varinjlim (N_i \wedge K) = \varinjlim (\mathsf{Ker}'(f_i)) = \mathsf{Ker}'(\varinjlim (f_i)) = \mathsf{Ker}'(f) = (\varinjlim N_i) \wedge K$$

tal y como queríamos probar. □

Proposición 5.11 *Sea M un módulo firme para el que $\mathcal{S}(M)$ cumple AB5 y sea $\mathcal{J}$ una categoría filtrada pequeña, $N : \mathcal{J} \to R-\mathsf{DMod}$ un funtor y $\Delta(M) : \mathcal{J} \to R-\mathsf{DMod}$ el funtor que lleva todos los objetos de $\mathcal{J}$ a M y todos los morfismos a id_M. Sea $n : N \to \Delta(M)$ una transformación natural tal que n_i es un monomorfismo para todo $i \in \mathcal{J}$. Entonces*

$$\varinjlim_{i\in\mathcal{J}} n_i : \varinjlim_{i\in\mathcal{J}} N_i \to M$$

es un monomorfismo. Además, se tiene la propiedad de que, como subobjetos de M,

$$\varinjlim_{i\in\mathcal{J}} N_i = \bigvee^{\mathcal{S}} N_i.$$

Demostración:
Sea $L = \varinjlim_{i\in\mathcal{J}} N_i$ y para todo i, sea $q_i : N_i \to L$ la inyección canónica.

Vamos a denotar $f : L \to M$ al homomorfismo inducido por la transformación $n : N \to \Delta(M)$. Tenemos por tanto, para todo $i \in \mathcal{J}$, que $n_i = q_i * f$. Como n_i es monomorfismo para todo i y $q_i * f = n_i$, deducimos que q_i es también monomorfismo para todo i.

Para demostrar que f es un monomorfismo, vamos a ver que $\mathsf{Ker}'(f) = 0$, para ello denotemos $K = \mathsf{Ker}'(f)$ y $k = \mathsf{ker}'(f) : K \to L$. Construiremos también el cuadrado cartesiano entre K y N_i para todo i con lo que tendremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} K \overset{\mathbb{S}}{\bigwedge} N_i \arrow[r, "k_i"] \arrow[d, "h_i"'] & N_i \arrow[d, "q_i"] \arrow[dr, "n_i"] & \\ K \arrow[r, "k"] & L \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

Como k es el núcleo de f y el diagrama es conmutativo, tenemos que

$$0 = h_i * k * f = k_i * q_i * f = k_i * n_i$$

y como n_i es monomorfismo, entonces $k_i = 0$ para todo i y por lo tanto $K \overset{\mathbb{S}}{\bigwedge} N_i = 0$ para todo i.

Si demostramos que $\overset{\mathbb{S}}{\bigvee} N_i = L$ entonces habremos terminado porque como $K \leq L$ tendríamos que

$$K = K \overset{\mathbb{S}}{\bigwedge} L = K \overset{\mathbb{S}}{\bigwedge} \left(\overset{\mathbb{S}}{\bigvee} N_i \right) = \overset{\mathbb{S}}{\bigvee} \left(K \overset{\mathbb{S}}{\bigwedge} N_i \right) = \overset{\mathbb{S}}{\bigvee} 0 = 0.$$

Nos queda pues probar que $\overset{\mathbb{S}}{\bigvee} N_i = L$ que es precisamente la última afirmación del enunciado. Para ello vamos a hacer uso de que, como los colímites en $R-\mathsf{DMod}$ son los mismos que en $A-\mathsf{Mod}$, tenemos una descripción de L que es $\coprod_{i \in \mathcal{J}} N_i / W$ siendo $W = (u_i)_{i \in \mathcal{J}} \in \coprod_{i \in \mathcal{J}} N_i$ para los cuales existe $j \in \mathcal{J}$ y para todo i, con $u_i \neq 0$ un morfismo $\alpha_i : i \to j$ tal que $\sum_i (u_i) N_{\alpha_i} = 0$.

Por la construcción de $\overset{\mathbb{S}}{\bigvee} N_i$, para demostrar que coincide con L, tenemos que ver que el homomorfismo inducido

$$\eta : G^{(\cup_i \mathsf{Hom}_A(G, N_i) * q_i)} \to L$$

es un epimorfismo, con lo cual $\mathsf{Ker}(\eta) = \mathsf{U}(\mathsf{Ker}(\eta))$ y

$$\overset{\mathbb{S}}{\bigvee} N_i = G^{(\cup_i \mathsf{Hom}_A(G, N_i) * q_i)} / \mathsf{U}(\mathsf{Ker}(\eta)) = L.$$

Sea $l \in L = \coprod_{i \in \mathcal{J}} N_i / W$. Para este L podemos encontrar $i \in \mathcal{J}$ y $u \in N_i$ tal que $l = (u) q_i$. Como G es generador, en particular genera N_i y podemos encontar $g_1, \cdots, g_t \in G$ y $\alpha_1, \cdots, \alpha_t \in \mathsf{Hom}_A(G, N_i)$ tales que $u = \sum_{s=1}^{t} (g_s) \alpha_s$. Entonces

$$l = (u) q_i = \sum_{s=1}^{t} (g_s)(\alpha_s * q_i) \in \mathsf{Im}(\eta).$$

□

Proposición 5.12 *Sea $\mathcal{J}$ una categoría filtrada pequeña y supongamos que se cumple una de estas dos condiciones, que M es un módulo firme para el que $\mathcal{S}(M)$ cumple AB5 o bien que* $\varinjlim : \mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod}) \to R-\mathsf{DMod}$ *conserva monomorfismos. Supongamos que $N : \mathcal{J} \to R-\mathsf{DMod}$ es un funtor y $\Delta(M) : \mathcal{J} \to R-\mathsf{DMod}$ el funtor que lleva todos los objetos de $\mathcal{J}$ a M y todos los morfismos a id_M. Sea $\varphi : N \to \Delta(M)$ una transformación natural. Entonces*

$$\varinjlim_{i\in\mathcal{J}} \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) = \mathsf{U}\left(\varinjlim_{i\in\mathcal{J}} \mathsf{Ker}(\varphi_i)\right).$$

Demostración:
Para cada $i \in \mathcal{J}$ vamos a denotar $L_i = N_i/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) = \varphi_i(N_i)$ y $\psi_i = m_{\varphi_i}$ el monomorfismo asociado. Para cada morfismo $\alpha : i \to j$ tenemos inducido un único $L_\alpha : L_i \to L_j$ haciendo conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
N_i \arrow[r] \arrow[d, "N_\alpha"'] \arrow[rr, bend left, "\varphi_i"] & L_i \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "L_\alpha"'] & M \arrow[d, "\mathrm{id}_M"'] \\
N_j \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\varphi_j"'] & L_j \arrow[r, "\psi_j"'] & M
\end{tikzcd}$$

Este nuevo funtor L es un sistema filtrado de monomorfismos y por lo tanto su colímite filtrado es un monomorfismo, es decir, si consideramos las siguientes sucesiones exactas en $A-\mathsf{Mod}$ y calculamos su límite, obtenemos

$$0 \to \mathsf{Ker}(\varphi_i)/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) \to L_i \to M$$

$$0 \to \varinjlim_{i\in\mathcal{J}} \mathsf{Ker}(\varphi_i)/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) \to \varinjlim_{i\in\mathcal{J}} L_i \to M$$

y como este colímite es un monomorfismo, tenemos que

$$\mathsf{U}\left(\varinjlim_{i\in\mathcal{J}} \mathsf{Ker}(\varphi_i)/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right)\right) = 0.$$

Consideremos ahora la siguiente sucesión exacta corta en $A-\mathsf{Mod}$,

$$0 \to \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) \to \mathsf{Ker}(\varphi_i) \to \mathsf{Ker}(\varphi_i)/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) \to 0$$

Si tomamos colímites filtrados y teniendo en cuenta que éstos son exactos en $A-\mathsf{Mod}$, tenemos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \to \varinjlim_{i\in\mathcal{J}} \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) \to \varinjlim_{i\in\mathcal{J}} \mathsf{Ker}(\varphi_i) \to \varinjlim_{i\in\mathcal{J}} \mathsf{Ker}(\varphi_i)/\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) \to 0$$

El miembro de la derecha, hemos visto que es un módulo evanescente, el de la izquierda es unitario por ser colímite de unitarios, por lo tanto

$$\varinjlim_{i\in\mathcal{J}} \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\varphi_i)\right) \subseteq \mathsf{U}\left(\varinjlim_{i\in\mathcal{J}} \mathsf{Ker}(\varphi_i)\right)$$

y el cociente es 0 por ser un unitario contenido en un evanescente, por tanto se da la igualdad del enunciado. □

Proposición 5.13 *Sea G un generador de $R-\mathsf{DMod}$ y $E = \mathsf{End}_A(G)$. El funtor $\mathsf{Hom}_A(G,-)$: $R-\mathsf{DMod} \to E-\mathsf{Mod}$ es un funtor fiel.*

Demostración:
Este resultado es inmediato a partir de que G es un generador: Supongamos que $f : M \to L$ es un morfismo en $R-\mathsf{DMod}$ tal que $\mathsf{Hom}_A(G,f) = 0$, esto significa que para todo $h : G \to M$, $h * f = 0$. Entonces, como G es generador, $\eta : G^{(\mathsf{Hom}_A(G,M))} \to M$ dada por $((g_h)_{h\in\mathsf{Hom}_A(G,M)})\eta = \sum_{h\in\mathsf{Hom}_A(G,M)}(g_h)h$ es suprayectiva, tendríamo que $\eta * f = 0$ porque $\sum_{h\in\mathsf{Hom}_A(G,M)}(g_h)h * f = 0$, pero entonces $f = 0$ por ser η epimorfismo. □

Proposición 5.14 *Sea M un módulo firme para el que $\mathcal{S}(M)$ cumple AB5 y sea G un generador de $R-\mathsf{DMod}$, $E = \mathsf{End}_A(G)$. Sea N otro módulo firme. Entonces, para todo E-homomorfismo Φ : $\mathsf{Hom}_A(G,M) \to \mathsf{Hom}_A(G,N)$, existe $f : M \to N$ tal que $\Phi = \mathsf{Hom}_A(G,f)$.*

Demostración:
Vamos a denotar $q_h : G \to G^{(\mathsf{Hom}_A(G,M))}$ las inyecciones canónicas y $p_h : G^{(\mathsf{Hom}_A(G,M))} \to G$ a las proyecciones para todo $h \in \mathsf{Hom}_A(G,M)$. Dado un subconjunto finito $J \in \mathcal{P}_0(\mathsf{Hom}_A(G,M))$ y cada $h \in J$, denotaremos $q_h^J : G \to G^{(J)}$ a la inyección en la correspondiente coordenada y $p_h^J : G^{(J)} \to G$ a la proyección sobre la misma. Por ser J finito tenemos que $\sum_{h\in J} p_h^J * q_h^J = \mathrm{id}_{G^{(J)}}$. Denotaremos por último $q_J : G^{(J)} \to G^{(\mathsf{Hom}_A(G,M))}$ y $p_J : G^{(\mathsf{Hom}_A(G,M))} \to G^{(J)}$ a las inyecciones y proyecciones sobre las componentes de J.

Vamos a definir $\epsilon : G^{(\mathsf{Hom}_A(G,M))} \to N$ dada por

$$((g_h)_{h\in\mathsf{Hom}_A(G,M)})\epsilon = \sum_{h\in\mathsf{Hom}_A(G,M)} (g_h)((h)\Phi)$$

Si consiguiésemos probar que $\mathsf{Ker}(\eta) \subseteq \mathsf{Ker}(\epsilon)$ entonces podríamos encontrar $f : M \to N$ haciendo conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathsf{Ker}(\eta) \arrow[r] & G^{(\mathsf{Hom}_A(G,M))} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\epsilon"] & M \arrow[r] \arrow[dl, "f"] & 0 \\ & & N & & \end{tikzcd}$$

Con eso conseguiríamos que para todo $h \in \mathsf{Hom}_A(G,M)$ y todo $g \in G$,

$$(g)((h)\Phi) = (g)q_h * \epsilon = (((g)q_h)\eta)f = (g)h * f$$

y por lo tanto $\Phi = \mathsf{Hom}_A(G, f)$ tal y como buscamos.

Vamos pues a probar que $\mathsf{Ker}(\eta) \subseteq \mathsf{Ker}(\epsilon)$.

Para cada $J \in \mathcal{P}_0(\mathsf{Hom}_A(G, M))$ vamos a considerar el correspondiente homomorfismo $\eta^J : G^{(J)} \to M$ y su núcleo $\mathsf{Ker}(\eta^J)$. Denotaremos $\eta : G^{(\mathsf{Hom}_A(G,M))} \to M$ el epimorfismo dado por el conjunto completo. Está claro que el límite directo de los η^J es el morfismo η.

Utilizando la Proposición 5.12 sabemos que

$$\varinjlim_{J \in \mathcal{P}_0(\mathsf{Hom}_A(G,M))} \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\eta^J)\right) = \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\eta)\right) = \mathsf{Ker}(\eta)$$

siendo esta última igualdad consecuencia de que η es un epimorfismo entre módulos firmes y por lo tanto es unitario.

Para todo $J \in \mathcal{P}_0(\mathsf{Hom}_A(G, M))$ y todo $\beta : G \to \mathsf{Ker}(\eta^J)$ tenemos que

$$\beta * \mathsf{ker}(\eta^J) * q_J * \epsilon = \beta * \mathsf{ker}(\eta^J) * \mathrm{id}_{G^{(J)}} * q_J * \epsilon = \beta * \mathsf{ker}(\eta^J) * \sum_{h \in J} p_h^J * q_h^J * q_J * \epsilon =$$

$$\sum_{h \in J} \beta * \mathsf{ker}(\eta^J) * p_h^J * q_h^J * q_J * \epsilon = \sum_{h \in J} \beta * \mathsf{ker}(\eta^J) * p_h^J * q_h * \epsilon = \sum_{h \in J} \beta * \mathsf{ker}(\eta^J) * p_h^J * ((h)\Phi)$$

El morfismo $\beta * \mathsf{ker}(\eta^J) * p_h^J : G \to G$ está en E y podemos hacer uso de la E-linealidad de Φ y continuar la cadena de igualdades:

$$\sum_{h \in J} \beta * \mathsf{ker}(\eta^J) * p_h^J * ((h)\Phi) = (\sum_{h \in J} \beta * \mathsf{ker}(\eta^J) * p_h^J * h)\Phi = (\sum_{h \in J} \beta * \mathsf{ker}(\eta^J) * p_h^J * q_h * \eta)\Phi =$$

$$(\sum_{h \in J} \beta * \mathsf{ker}(\eta^J) * p_h^J * q_h^J * q_J * \eta)\Phi = (\beta * \mathsf{ker}(\eta^J) * \sum_{h \in J} p_h^J * q_h^J * q_J * \eta)\Phi =$$

$$(\beta * \mathsf{ker}(\eta^J) * q_J * \eta)\Phi = (\beta * \mathsf{ker}(\eta^J) * \eta^J)\Phi = 0$$

Siguiendo la cadena de igualdades, hemos visto que para todo J y para todo $\beta : G \to \mathsf{Ker}(\eta^J)$ tenemos que $\beta * \mathsf{ker}(\eta^J) * q_J * \epsilon = 0$. Como G genera toda la parte unitaria de $\mathsf{Ker}(\eta^J)$ deducimos que $\mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\eta^J)\right)$ va a través de q_J a $\mathsf{Ker}(\epsilon)$. Si tomamos colímites en J y puesto que esto se puede hacer para todo $J \in \mathcal{P}_0(\mathsf{Hom}_A(G, M))$, concluimos que todos los elementos de $\mathsf{Ker}(\eta) = \varinjlim \mathsf{U}\left(\mathsf{Ker}(\eta^J)\right)$ están en $\mathsf{Ker}(\epsilon)$ tal y como buscábamos. □

Definición 5.15 *Sea G un generador de $R-$DMod y E su anillo de endomorfismos. Denotaremos por $\mathcal{D}$ a la subcategoría plena de $E-$Mod de los módulos que son imagen de alguno de los de $R-$DMod a través del funtor $\mathsf{Hom}_A(G, -)$. Si el funtor $\mathsf{Hom}_A(G, -)$ es pleno, entonces esta categoría es claramente equivalente a $R-$DMod por ser el funtor $\mathsf{Hom}_A(G, -)$ fiel. Denotaremos $\mathsf{i} : \mathcal{D} \to E-$Mod al funtor inclusión y $\mathsf{a} : E-\mathsf{Mod} \to \mathcal{D}$ al funtor $\mathsf{Hom}_A(G, G \otimes_E -)$.*

Proposición 5.16 *Si el funtor $\mathsf{Hom}_A(G, -)$ es pleno, entonces la categoría $\mathcal{D}$ es una categoría reflexiva de $E-$Mod ya que el funtor a es adjunto por la izquierda del funtor inclusión i.*

Demostración:
Los objetos de $\mathcal{D}$ son de la forma $\mathsf{Hom}_A(G,N)$ para un N en $R-\mathsf{DMod}$. Sea M un módulo de $E-\mathsf{Mod}$ y N de $R-\mathsf{DMod}$, entonces

$$\mathsf{Hom}_E(M, \mathsf{Hom}_A(G,N)) = \mathsf{Hom}_A(G \otimes_E M, N) =$$

$$\mathsf{Hom}_E(\mathsf{Hom}_A(G, G \otimes_E M), \mathsf{Hom}_A(G,N)) = \mathsf{Hom}_A(\mathsf{a}(M), \mathsf{Hom}_A(G,N))$$

donde se ha utilizado la adjunción de los funtores $\mathsf{Hom}_A(G,-)$ y $G \otimes_E -$. $\square$

Más adelante será necesario tener una definición del isomorfismo de la adjunción en términos de los elementos. Dados $M \in E-\mathsf{Mod}$ y $N \in R-\mathsf{DMod}$, denotaremos por $\eta_{M,N}$ el isomorfismo

$$\mathsf{Hom}_E(M, \mathsf{Hom}_E(G,N)) \simeq \mathsf{Hom}_E(\mathsf{Hom}_A(G, G \otimes_E M), \mathsf{Hom}_A(G,N))$$

Utilizando la definición del isomorfismo que da la adjunción en el caso $\mathsf{Hom}_A(G,-)$ y $G \otimes_E -$, que puede verse por ejemplo en [24, I.Proposition 9.2], dado un E-homomorfismo $\alpha : M \to \mathsf{Hom}_E(G,N)$, el E-homomorfismo $(\alpha)\eta_{M,N}$ está definido como sigue: para cada A-homomorfismo $f : G \to G \otimes_E M$ y cada $g \in G$, se tiene que $(g)(f)(\alpha)\eta_{M,N} = \sum_I (g_i)(m_i)\alpha$, siendo $(g)f = \sum_I g_i \otimes m_i \in G \otimes_E M$, con I un conjunto finito.

Teorema 5.17 *Si el funtor* $\mathsf{Hom}_A(G,-)$ *es pleno, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La categoría* $R-\mathsf{DMod}$ *es abeliana.*

2. *Existe un generador G de* $R-\mathsf{DMod}$ *para el cual el funtor* $G \otimes_E - : E-\mathsf{Mod} \to R-\mathsf{DMod}$ *conserva núcleos siendo* $E = \mathsf{End}({}_A G)$.

3. *Para todo generador G de* $R-\mathsf{DMod}$, *el funtor* $G \otimes_E - : E-\mathsf{Mod} \to R-\mathsf{DMod}$ *conserva núcleos siendo* $E = \mathsf{End}({}_A G)$.

Demostración:
$(1 \Rightarrow 3)$. Si la categoría es abeliana, como cumple AB5 y tiene un generador también es Grothendieck y por el teorema de Gabriel y Popescu, la categoría $\mathcal{D}$ es precisamente la categoría cociente $(E, \mathfrak{F})-\mathsf{Mod}$ siendo $\mathfrak{F}$ el menor filtro de Gabriel para el cual todos los módulos de $\mathcal{D}$ son cerrados. El funtor de localización es el adjunto de la inclusión y como el adjunto es único, necesariamente el funtor de localización ha de ser a. El funtor de localización siempre conserva núcleos, por lo tanto a los conserva. Teniendo en cuenta que $\mathsf{Hom}_A(G,-)$ entre $R-\mathsf{DMod}$ y $\mathcal{D}$ es una equivalencia de categorías, en particular conserva y refleja núcleos, por lo tanto $G \otimes_E -$ conservará núcleos.

$(3 \Rightarrow 2)$. Trivial.

$(2 \Rightarrow 1)$. Si $G \otimes_E -$ conserva núcleos, teniendo en cuenta que $\mathsf{Hom}_A(G,-)$ es una equivalencia entre $R-\mathsf{DMod}$ y $\mathcal{D}$, deducimos que a conserva núcleos, y utilizando [24], toda categoría reflexiva tal que el funtor adjunto de la inclusión conserve núcleos, es Grothendieck. $\square$

Proposición 5.18 *Sea G un generador de $R-\mathsf{DMod}$ y $E = \mathsf{End}_A(G)$. Si el funtor $\mathsf{Hom}_A(G, -) : R-\mathsf{DMod} \to E-\mathsf{Mod}$ es un funtor pleno, entonces para todo módulo firme M se tiene que $G \otimes_E \mathsf{Hom}_A(G, M) \to M$ dado por $g \otimes \alpha \mapsto (g)\alpha$, es un isomorfismo, es decir, todos los módulos firmes son G-estáticos para el generador G de la categoría.*

Demostración:
Para simplificar la notación en ésta demostración, denotaremos L al funtor $\mathsf{Hom}_A(G, -)$.

Vamos a empezar probando que $\mathsf{L}(M) \simeq \mathsf{L}(G \otimes_E \mathsf{L}(M))$. Consideramos $\eta_{N,M} : \mathsf{Hom}_E(N, \mathsf{L}(M)) \to \mathsf{Hom}_E(\mathsf{L}(G \otimes_E N), \mathsf{L}(M))$ el isomorfismo proporcionado por la adjunción, que es natural en N y $\mathsf{L}(M)$. Como $\mathsf{L}(M)$ es un módulo de $E-\mathsf{Mod}$, podemos considerar el homomorfismo

$$f = (1_{\mathsf{L}(M)})\eta_{\mathsf{L}(M),M} : \mathsf{L}(G \otimes_E \mathsf{L}(M)) \longrightarrow \mathsf{L}(M)$$

y formar el diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_E(\mathsf{L}(M), \mathsf{L}(G \otimes_E \mathsf{L}(M))) \arrow[r, "\eta_{\mathsf{L}(M),G\otimes_E\mathsf{L}(M)}"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}_E(\mathsf{L}(M),f)"'] & \mathsf{Hom}_E(\mathsf{L}(G \otimes_E \mathsf{L}(M)), \mathsf{L}(G \otimes_E \mathsf{L}(M))) \arrow[d, "\mathsf{Hom}_E(\mathsf{L}(G\otimes_E\mathsf{L}(M)),f)"] \\
\mathsf{Hom}_E(\mathsf{L}(M), \mathsf{L}(M)) \arrow[r, "\eta_{\mathsf{L}(M),M}"'] & \mathsf{Hom}_E(\mathsf{L}(G \otimes_E \mathsf{L}(M)), \mathsf{L}(M))
\end{tikzcd}$$

Tomamos $g : \mathsf{L}(M) \to \mathsf{L}(G \otimes_E \mathsf{L}(M))$ tal que

$$(g)\eta_{\mathsf{L}(M),G\otimes_E\mathsf{L}(M)} = 1_{\mathsf{L}(G\otimes_E\mathsf{L}(M))}$$

Entonces

$$(1_{\mathsf{L}(M)})\eta_{\mathsf{L}(M),M} = f = (1_{\mathsf{L}(G\otimes_E\mathsf{L}(M))})\mathsf{Hom}_E(\mathsf{L}(G \otimes_E \mathsf{L}(M)), f)$$
$$= (g)\eta_{\mathsf{L}(M),G\otimes_E\mathsf{L}(M)} * \mathsf{Hom}_E(\mathsf{L}(G \otimes_E \mathsf{L}(M)), f)$$

$$= (g)\mathsf{Hom}_E(\mathsf{L}(M), f) * \eta_{\mathsf{L}(M),M} = (g * f)\eta_{\mathsf{L}(M),M}$$

de donde $1_{\mathsf{L}(M)} = g * f$. Utilizando, ahora, el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_E(\mathsf{L}(M), \mathsf{L}(M)) \arrow[r, "\eta_{\mathsf{L}(M),M}"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}_E(\mathsf{L}(M),g)"'] & \mathsf{Hom}_E(\mathsf{L}(G \otimes_E \mathsf{L}(M)), \mathsf{L}(M)) \arrow[d, "\mathsf{Hom}_E(\mathsf{L}(G\otimes_E\mathsf{L}(M)),g)"] \\
\mathsf{Hom}_E(\mathsf{L}(M), \mathsf{L}(G \otimes_E \mathsf{L}(M))) \arrow[r, "\eta_{\mathsf{L}(M),G\otimes_E\mathsf{L}(M)}"'] & \mathsf{Hom}_E(\mathsf{L}(G \otimes_E \mathsf{L}(M)), \mathsf{L}(G \otimes_E \mathsf{L}(M)))
\end{tikzcd}$$

se tiene que

$$(1_{\mathsf{L}(M)})\eta_{\mathsf{L}(M),M} * \mathsf{Hom}_E(\mathsf{L}(G \otimes_E \mathsf{L}(M)), g) = (f)\mathsf{Hom}_E(\mathsf{L}(G \otimes_E \mathsf{L}(M)), g) = f * g$$

que debe ser igual a

$$(1_{\mathsf{L}(M)})\mathsf{Hom}_E(\mathsf{L}(M),g) * \eta_{\mathsf{L}(M),G\otimes_E \mathsf{L}(M)} = (g)\eta_{\mathsf{L}(M),G\otimes_E \mathsf{L}(M)} = 1_{\mathsf{L}(G\otimes_E \mathsf{L}(M))}$$

Es decir, $f * g = 1_{\mathsf{L}(G\otimes_E \mathsf{L}(M))}$. Concluimos que f y g son homomorfismos inversos y entonces $\mathsf{L}(M)$ y $\mathsf{L}(G \otimes_E \mathsf{L}(M))$ son isomorfos.

Como L es un funtor pleno existe $\alpha : M \to G\otimes_E \mathsf{L}(M)$ tal que $(\alpha)\mathsf{L} = g$ y $\beta : G\otimes_E \mathsf{L}(M) \to M$ tal que $f = (\beta)\mathsf{L}$. Entonces

$$(1_M)L = 1_{\mathsf{L}(M)} = g * f = (\alpha)L * (\beta)L = (\alpha * \beta)L$$

y

$$(1_{G\otimes_E \mathsf{L}(M)})L = 1_{\mathsf{L}(G\otimes_E \mathsf{L}(M))} = f * g = (\beta)L * (\alpha)L = (\beta * \alpha)L$$

Por ser L un funtor fiel podemos concluir que $1_M = \alpha * \beta$ y que $1_{G\otimes_E \mathsf{L}(M)} = \beta * \alpha$. Así, M y $G \otimes_E \mathsf{L}(M)$ son isomorfos.

Para terminar la demostración vemos que β es de la forma que afirma el enunciado. Por el razonamiento anterior $(\beta)\mathsf{L} = f = (1_{\mathsf{L}(M)})\eta_{\mathsf{L}(M),M}$. Sea $\gamma : G \otimes \mathsf{L}(M) \to M$ el homomorfismo del enunciado dada por $(g \otimes h)\gamma = (g)h$ con $g \in G$ y $h \in \mathsf{L}(M)$. Entonces $(\gamma)\mathsf{L} : \mathsf{L}(G \otimes \mathsf{L}(M)) \to \mathsf{L}(\mathsf{M})$ cumple que $(u)(\gamma)L = u * \gamma$ para cada $u : G \to G \otimes \mathsf{L}(M)$. Es decir, si $g \in G$ y $(g)u = \sum_I g_i \otimes \alpha_i$ con I un conjunto finito, entonces

$$(g)(u)(\gamma)\mathsf{L} = (g)u * \gamma = (\sum_I g_i \otimes \alpha_i)\gamma = \sum_I (g_i)\alpha_i = \sum_I (g_i)(\alpha_i)1_{\mathsf{L}(M)} =$$

$$(g)(u)(1_{\mathsf{L}(M)})\eta_{\mathsf{L}(M),M} = (g)(u)(\beta)\mathsf{L}$$

Como esta igualdad ocurre para cualquier $u \in \mathsf{L}(G \otimes_E \mathsf{L}(M))$ y cualquier $g \in G$, por ser L un funtor fiel, concluimos que $\beta = \gamma$. $\square$

Un caso particularmente importante de categorías abelianas son aquellas en las cuales los monomorfismos son aplicaciones inyectivas. Este tipo de categorías se pueden caracterizar a través de la propiedad de endoplanitud de alguno (y por lo tanto todos) sus generadores. La caracterización es la siguiente:

Proposición 5.19 *Sea G un generador de la categoría y supongamos que $\mathsf{Hom}_A(G, -) : R{-}\mathsf{DMod} \to E{-}\mathsf{Mod}$ es un funtor pleno. Entonces los monomorfismos en $R{-}\mathsf{DMod}$ son aplicaciones inyectivas si y sólo si el funtor $G \otimes_E - : E{-}\mathsf{Mod} \to R{-}\mathsf{DMod}$ conserva aplicaciones inyectivas.*

Demostración:
De nuevo vamos a denotar $\mathsf{L} = \mathsf{Hom}_A(G, -)$ a lo largo de ésta demostración.

Si los monomorfismos en $R{-}\mathsf{DMod}$ son aplicaciones inyectivas, la categoría $R{-}\mathsf{DMod}$ es abeliana. Se sigue que $G \otimes_E -$ conserva núcleos y, en particular, monomorfismos. Si $f : M \to N$ es una aplicación inyectiva en $E{-}\mathsf{Mod}$, entonces $1_G \otimes f : G \otimes_E M \to G \otimes_E N$ es un monomorfismo en $R{-}\mathsf{DMod}$ y, por hipótesis, será una aplicación inyectiva.

Por ser L un funtor pleno, para cada $M \in R{-}\mathsf{DMod}$ se tiene que $M \simeq G \otimes_E \mathsf{L}(M)$. Si $f : M \to N$ es un monomorfismo en $R{-}\mathsf{DMod}$ entonces $\mathsf{L}(f) : \mathsf{L}(M) \to \mathsf{L}(N)$ es una aplicación inyectiva y, por hipótesis, $1_G \otimes \mathsf{L}(f) : G \otimes_E \mathsf{L}(M) \to G \otimes_E \mathsf{L}(N)$ será también una aplicación inyectiva. Tenemos el diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
G \otimes_E \mathsf{L}(M) \arrow[r, "1_G \otimes \mathsf{L}(f)"] \arrow[d, "\eta_M"'] & G \otimes_E \mathsf{L}(N) \arrow[d, "\eta_N"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

$(1_G \otimes \mathsf{L}(f)) * \eta_N = \eta_M * f$ es una aplicación inyectiva, por serlo $1_G \otimes \mathsf{L}(f)$ y η_N. Como η_M es sobreyectiva, se sigue que f es una aplicación inyectiva. $\square$

5.4. Conclusiones

En esta sección vamos a agrupar todos los resutados del capítulo en un único teorema que nos permita tener una visión de las distintas propiedades que están ligadas a la abelianidad de la categoría de módulos firmes. En capítulos posteriores veremos que algunas de ellas no se cumplen en general puesto que proporcionaremos contraejemplos en los cuales no se cumplen (concretamente las propiedades (1), (2) y (3)). Quedará como problema abierto de esta tesis si las otras propiedades se cumplen siempre e incluso si algunas de ellas podrían ser equivalentes. Lo que nos dirá este teorema es que en el caso en que tengamos la abelianidad de la categoría, todas ellas serán ciertas.

Teorema 5.20 *Sea R un anillo asociativo. Las siguientes propiedades cumplen las relaciones*

$$\begin{tikzcd}
 & & (3) \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
(1) \arrow[r, Rightarrow] & (2) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & (5) \arrow[r, Rightarrow] & (6) \\
 & & (4) \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

1. *La categoría $R-$*DMod *es abeliana.*

2. *Para toda categoría filtrada pequeña $\mathcal{J}$ y todo morfismo $\varphi : M \to N$ en* $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod})$ *se cumple que* $\mathsf{Ker}'(\varinjlim \varphi) = \varinjlim \mathsf{Ker}'(\varphi)$.

3. *Para toda categoría filtrada pequeña $\mathcal{J}$ y todo monomorfismo $\varphi : M \to N$ en* $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, R-\mathsf{DMod})$ *se cumple que $\varinjlim \varphi$ es un monomorfismo.*

4. *Para todo objeto M de $R-$*DMod *se cumple que $\mathcal{S}(M)$ cumple la propiedad AB5.*

5. *Para todo generador G de la categoría $R-$*DMod, *el funtor* $\mathsf{Hom}_A(G, -) : R-\mathsf{DMod} \to E-\mathsf{Mod}$ *es un funtor pleno, siendo $E = \mathsf{End}_A(G)$.*

6. *Para todo módulo firme M y todo generador G de la categoría $R-\mathsf{DMod}$ se cumple que h : $G \otimes_E \mathsf{Hom}_A(G, M)$ es un isomorfismo, siendo $E = \mathsf{End}_A(G)$ y $(g \otimes \alpha)h = (g)\alpha$, es decir, todos los módulos firmes son G-estáticos para cualquier generador G de la categoría.*

Demostración:

$(1 \Rightarrow 2)$ Teorema 5.8 y Corolario 5.9.

$(2 \Rightarrow 3)$ Proposición 5.3.

$(2 \Rightarrow 4)$ Teorema 5.10.

$(3 \Rightarrow 5)(4 \Rightarrow 5)$ Estas dos condiciones son consecuencia de la Proposición 5.11 y la Proposición 5.12.

$(5 \Rightarrow 6)$ Proposición 5.18.

□

Capítulo 6

Álgebras Monomiales no Unitarias

6.1. Introducción

Sea k un cuerpo y X un conjunto no vacío. Sea P un conjunto de palabras sobre X y consideremos la k-álgebra libre no unitaria sobre X. Sea R el anillo cociente de esta álgebra módulo el ideal generado por las palabras en P. R es una álgebra monomial no unitaria. En este capítulo mostraremos que la categoría de módulos firmes asociada a R es Grothendieck.

A continuación generalizaremos los anillos que tienen propiedades parecidas a las álgebras monomiales no unitarias. Más concretamente, la propiedad suficiente para poder asegurar que la categoría es abeliana. Esta propiedad puede ser dualizada a la categoría de módulos cerrados, y veremos una relación existente entre las dos categorías.

Para finalizar el capítulo, ejemplos particulares de álgebras monomiales nos permitirán estudiar relaciones entre las dos categorías y los funtores canónicos C y D.

6.2. Álgebras Monomiales

Sea X un conjunto que supondremos no vacío. Escribiremos $\langle X\rangle$ para denotar el conjunto de palabras sobre X. Este conjunto tiene estructura de monoide utilizando como producto la yustaposición. El elemento unidad es la palabra vacía que escribiremos como 1_X o simplemente 1 cuando no exista confusión. Por $\langle X\rangle_0$ denotaremos el conjunto de palabras no vacías sobre X. Este conjunto tiene estructura de semigrupo con el producto mencionado ya que carece de elemento unidad.

Para cada elemento $\overline{z} \in \langle X\rangle$ existirán elementos $x_1, \cdots, x_n \in X$ tales que $\overline{z} = x_1x_2\cdots x_n$. Diremos que $\overline{z}$ es una palabra de longitud n o que $\lambda(\overline{z}) = n$. Los elementos de X vistos como elementos de $\langle X\rangle$ son elementos de longitud 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ representaremos por X^n el conjunto de todas las palabras de longitud n, es decir, $X^n = \{\overline{w} \in \langle X\rangle : \lambda(\overline{w}) = n\}$. Con esta notación $X^0 = \{1_X\}$ y $X^1 = X$.

Si $\overline{p}$ es un elemento de $\langle X\rangle$, nos referiremos habitualmente a $\overline{p}$ como una palabra sobre X o de X.

Definición 6.1 *Sean $\overline{p}$ y $\overline{q}$ elementos de $\langle X\rangle$:*

1. *Diremos que $\overline{p} \geq \overline{q}$ si existe una palabra $\overline{w}$ tal que $\overline{p} = \overline{qw}$. En este caso, $\overline{w}$ es única y la escribiremos como $\overline{w} = \overline{q}^{-1}\overline{p}$.*

2. *Diremos que $\overline{q}$ es una subpalabra propia de $\overline{p}$ si existen palabras $\overline{u}$ y $\overline{v}$ tales que $\overline{p} = \overline{uqv}$ con $\overline{u} \neq 1$ o $\overline{v} \neq 1$.*

Sea k un cuerpo y consideraremos el álgebra libre sobre $\langle X\rangle$ que escribiremos como $k\langle X\rangle$. Los elementos de $k\langle X\rangle$ son sumas de la forma $\sum_{w\in\langle X\rangle} k_w w$, con $k_w \in k$ la mayoría cero salvo un número finito. La suma y multiplicación vendrá dada de la forma usual:

$$\sum_{w\in\langle X\rangle} k_w w + \sum_{w\in\langle X\rangle} k'_w w = \sum_{w\in\langle X\rangle} (k_w + k'_w) w$$

$$(\sum_{w\in\langle X\rangle} k_w w) \cdot (\sum_{w\in\langle X\rangle} k'_w w) = \sum_{w\in\langle X\rangle} k''_w w$$

donde $k''_w = \sum_{\{p,q\in\langle X\rangle : pq=w\}} k_p k_q$.

El álgebra libre no unitaria es el subálgebra de $k\langle X\rangle_0$ generada por las palabras no vacías. Un elemento de $k\langle x\rangle_0$ es de la forma $\sum_{w\in\langle X\rangle_0} k_w w$ con $k_w \in k$ la mayoría cero salvo un número finito.

Cualquier álgebra unitaria o no unitaria es un cociente de un álgebra libre módulo un ideal bilatero. Para ello basta tomar como X un conjunto de generadores del álgebra.

Nuestro interés reside en un caso particular donde el ideal está generado por un conjunto de palabras P. Si $\overline{p}$ es una palabra de P, con $\overline{p}$ nos referiremos al elemento $1 \cdot \overline{p}$ de $k\langle X\rangle$ donde 1 es el elemento unidad de k. El ideal generado por P será escrito por (P). Estas álgebras se conocen como álgebras monomiales. Para un estudio más detallado puede consultarse [19].

Definición 6.2 *Sea I un ideal bilatero de $k\langle X\rangle$ que está generado por un subconjunto de palabras P de $\langle X\rangle$ es decir $I = (P)$, entonces el cociente entre el álgebra libre y el ideal I, $k\langle X\rangle/I$, se llamará **álgebra monomial**. Cuando el ideal I está contenido en $k\langle X\rangle_0$, el cociente $k\langle X\rangle_0/I$ se llamará **álgebra monomial no unitaria**.*

Desde este momento, salvo que se mencione lo contrario, cualquier ideal I estará generado por un conjunto de palabras P de $\langle X\rangle$.

Lema 6.3

1. *Si $1 \in P$ entonces $(P) = k\langle X\rangle$.*

2. *Si $\overline{p}, \overline{q} \in P$ y existen $\overline{u}, \overline{v} \in \langle X\rangle$ tales que $\overline{p} = \overline{uqv}$, entonces el ideal generado por P es igual al ideal generado por $P \setminus \{\overline{q}\}$.*

Demostración:

1. Sea $a \in k\langle X\rangle$ y $\overline{p} \in P$, entonces $a \cdot \overline{p} \in (P)$. Tomando $\overline{p} = 1$, resulta que $a \cdot 1 = a \in (P)$.
2. El elemento $1 \cdot \overline{p}$ de $k\langle X\rangle$ pertenece al ideal generado por $P \setminus \{\overline{q}\}$ ya que $1 \cdot \overline{p} = 1 \cdot \overline{uqv} = (1 \cdot \overline{u})(1 \cdot \overline{q})(1 \cdot \overline{v})$, por lo que $(P) \subset (P \setminus \{\overline{p}\})$.

□

El lema anterior dice que si el conjunto P tiene el elemento unidad el ideal generado sería todo el anillo, por lo que el cociente sería cero. Además, por la segunda parte del lema, un conjunto de palabras y el conjunto de palabras resultante de eliminar del primero las posibles subpalabras propias que contiene, generan el mismo ideal en $k\langle X\rangle$. Si suponemos que en el conjunto P existe algún elemento de X, por ejemplo el elemento $x \in X$, entonces al realizar el cociente todas las palabras que contienen a x serán cero, por lo que resultará redundante en el conjunto X. Estas observaciones nos llevan a la siguiente definición.

Definición 6.4 *Diremos que un subconjunto P de $\langle X\rangle$ es normalizado si:*

1. $1 \notin P$.
2. $X \bigcap P = \emptyset$.
3. *Si $\overline{p}, \overline{q} \in P$ y existen $\overline{u}, \overline{v} \in \langle X\rangle$ con $\overline{p} = \overline{uqv}$ entonces $\overline{u} = \overline{v} = 1$.*

Obsérvese que si P es un conjunto normalizado entonces $(P) \subset k\langle X\rangle_0$ por (1) y tiene sentido considerar el cociente $k\langle X\rangle_0/(P)$.

En lo que sigue P será un conjunto normalizado de palabras, $S = k\langle X\rangle_0$ y $B = k\langle x\rangle$. I será el ideal generado por P, $I = (P) = BPB$. Escribiremos $R = S/I$ y $A = B/I$.

Ejemplo 6.5 *Si $X = \{x, y\}$ entonces $P = \{xx, xy\}$ es un conjunto normalizado. Cumple trivialmente las dos primeras condiciones y la tercera es debido a que las dos palabras que forman el conjunto tienen la misma longitud, por lo que no puede ser una subpalabra de la otra.*

Lema 6.6 *Sea P un conjunto normalizado entonces el ideal $I = (P)$ puede ser descompuesto en dos k-sumandos, PB y $XBPB$. Esta desomposición no es única.*

Demostración:
Probaremos que $XBPB + PB = I$. Los elementos de I son sumas de elementos de la forma $b\overline{p}b'$ donde $b, b' \in B$ y $\overline{p} \in P$. Existirán elementos $k_w \in k$ todos cero salvo un número finito tales que $b = \sum_{\overline{w} \in \langle X\rangle} k_w \overline{w}$. Entonces $b\overline{p}b' = (\sum_{\overline{w} \in \langle X\rangle} k_w \overline{w})\overline{p}b' = \sum_{\{\overline{w} \in \langle X\rangle : \overline{w} \neq 1\}} k_w \overline{wp}b' + \overline{p}k_1 b'$, por lo que $b\overline{p}b' \in XBPB + PB$. Como los elementos de I son sumas de elementos de esta forma entonces $I \subset XBPB + PB$, y así se tiene la igualdad.

Para probar que la descomposición no es única, probaremos que $XBPB \bigcap PB \neq \emptyset$. Sea $\overline{p} \in P$, entonces $1 \cdot \overline{pp} = (1 \cdot \overline{p})(1 \cdot \overline{p})$ que es un elemento de PB. Por otro lado, sea $x \in X$ tal que $\overline{p} = x(x^{-1}\overline{p})$, entonces $1 \cdot \overline{pp} = x(1 \cdot x^{-1}\overline{p})(1 \cdot \overline{p}) \cdot (1 \cdot 1_X)$ que es un elemento de $XBPB$. □

Para cada palabra $\overline{w}$ de $\langle X\rangle$ escribiremos $P_{\overline{w}} = \{\overline{p} \in P : \overline{w} \leq \overline{p}\}$.

Lema 6.7 *Sea P un conjunto normalizador entonces:*

1. *Si* $\overline{p} \in P_{\overline{w}}$ *entonces* $\overline{w}(\overline{w}^{-1}\overline{p}) = \overline{p}$.
2. $P = \bigcup_{x \in X} P_x$.
3. *Si* $\overline{w}$ *es un elemento de* $\langle X \rangle$ *tal que* $P_{\overline{w}} \neq \emptyset$ *y* $\overline{u} < \overline{w}$ *entonces para cada* $\overline{v} < \overline{u}$ *se tiene* $P_{\overline{v}^{-1}\overline{u}} = \bigcup_{x \in X} P_{\overline{v}^{-1}\overline{u}x}$.
4. *Si* $\overline{q} \in P$ *entonces* $P_{\overline{q}} = \{\overline{q}\}$.

Demostración:

1. Como $\overline{p} \in P_w$, entonces $\overline{w} \leq \overline{p}$, por lo que existe $\overline{v}$ tal que $\overline{p} = \overline{wv}$. Con la notación anterior $\overline{v} = \overline{w}^{-1}\overline{p}$. De este modo, $\overline{p} = \overline{wv} = \overline{w}(\overline{w}^{-1}\overline{p})$.
2. Sea $\overline{p} \in P$, entonces $\overline{p} = x_1 x_2 \cdots x_n$ con $x_1, \cdots, x_n$ en X. Es claro que $x_1 \leq \overline{p}$, por lo que $\overline{p} \in P_{x_1}$.
3. Como $\overline{u} < \overline{w}$, existe $\overline{u_1} \neq 1$, tal que $\overline{w} = \overline{uu_1}$. Sea $\overline{p} \in P_{\overline{v}^{-1}\overline{u}}$ entonces $\overline{p} \in P$ y $\overline{v}^{-1}\overline{u} \leq \overline{p}$, por lo que existe $\overline{v_1}$ tal que $\overline{p} = \overline{v}^{-1}\overline{uv_1}$. Supongamos $\overline{v_1} = 1$, entonces $\overline{p} = \overline{v}^{-1}\overline{u}$. Sea $\overline{q} \in P_w$ entonces $\overline{q} = \overline{wv_2}$ para algún $\overline{v_2}$, por lo que $\overline{q} = \overline{wv_2} = \overline{uu_1v_2} = \overline{v}(\overline{v}^{-1}\overline{u})\overline{u_1v_2} = \overline{vpu_1v_2}$. De este modo $\overline{p}$ es una subpalabra propia de $\overline{q}$ y está en P, que es un conjunto normalizado, por lo que $\overline{v} = 1$ y $\overline{u_1v_2} = 1$, de donde $\overline{u_1} = 1$, lo cual es imposible, así que necesariamente $\overline{v_1} \neq 1$. Así $\overline{v_1}$ será de la forma $\overline{xv_1'}$ para algún $x \in X$ y $\overline{v_1'} \in \langle X \rangle$. De este modo, $\overline{p} = \overline{v}^{-1}\overline{uv_1} = \overline{v}^{-1}\overline{uxv_1'}$, por lo que $\overline{v}^{-1}\overline{u}x \leq \overline{p}$, obteniendo que $\overline{p} \in P_{\overline{v}^{-1}\overline{u}x}$.

   Si $\overline{p} \in P_{\overline{v}^{-1}\overline{u}x}$ entonces $\overline{p} \in P$ y $\overline{v}^{-1}\overline{u}x \leq \overline{p}$. De la desigualdad $\overline{v}^{-1}\overline{u} < \overline{v}^{-1}\overline{u}x$ se sigue que $\overline{p} \in P_{\overline{v}^{-1}\overline{u}}$.
4. Sea $\overline{p} \in P_{\overline{q}}$ entonces $\overline{p} \in P$ y $\overline{q} \leq p$. Entonces $\overline{q}$ sería una subpalabra de $\overline{p}$ en P, por lo que necesariamente $\overline{q} = \overline{p}$.

□

6.3. Módulos firmes para un álgebra monomial no unitaria

A partir del ejemplo anterior pretendemos generalizar el resultado para un álgebra monomial no unitaria. Seguiremos la notación desarrollada en la Sección 6.2, en concreto la última parte referida a la definición de los anillos. Todos los módulos serán considerados en $A-$Mod.

Lema 6.8 *Sea* $\alpha : A^{(P)} \to A^{(X)}$ *y* $\beta : A^{(X)} \to R$ *dados por*

$$\alpha((a'_{\overline{p}})_{\overline{p} \in P}) = (\sum_{\overline{p} \in P_x} (x^{-1}\overline{p})a'_{\overline{p}})_{x \in X}$$

$$\beta((a_x)_{x \in X}) = \sum_{x \in X} x a_x$$

entonces

$$A^{(P)} \xrightarrow{\alpha} A^{(X)} \xrightarrow{\beta} R \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta por la derecha.

Demostración:
Es claro que β es sobreyectiva ya que $R = XA$ y así para cada $r \in R$, existen elementos (a_x) en A todos cero salvo un número finito tal que $r = \sum_{x\in X} xa_x = \beta((a_x)_{x\in X})$.

Sea $(a'_{\overline{p}})_{\overline{p}\in P} \in A^{(P)}$ entonces

$$\beta \circ \alpha((a'_{\overline{p}})_{\overline{p}\in P}) = \beta((\sum_{\overline{p}\in P_x}(x^{-1}\overline{p})a'_{\overline{p}})_{x\in X}) = \sum_{x\in X} x(\sum_{\overline{p}\in P_x}(x^{-1}\overline{p})a'_{\overline{p}}) =$$

$$\sum_{x\in X}\sum_{\overline{p}\in P_x} xx^{-1}\overline{p}a'_{\overline{p}} = \sum_{x\in X}\sum_{\overline{p}\in P_x}\overline{p}a'_{\overline{p}} = \sum_{\overline{p}\in P}\overline{p}a'_{\overline{p}} = 0$$

, ya que $\overline{p} \in I$ y es cero considerado como elemento de R. Se ha tenido en cuenta que $\bigcup_{x\in X} P_x = P$ al ser P un conjunto normalizado.

Sea, ahora, $(a_x)_{x\in X} \in A^{(X)}$ con $0 = \sum_{x\in X} xa_x = \beta((a_x)_{x\in X})$. Para cada $a_x \neq 0$ tomamos $b_x \in B$ tal que $a_x = b_x + I$ y $b_x = 0$ si $a_x = 0$. La condición $0 = \sum_{x\in X} xa_x$ hace que $\sum_{x\in X} xb_x \in I$. Por el Lema 6.6 existen elementos $c_x \in BPB$ y $c'_{\overline{p}} \in B$, para cada $x \in X$ y $\overline{p} \in P$, todos ceros salvo un número finito tales que $\sum_{x\in X} xb_x = \sum_{x\in X} xc_x + \sum_{\overline{p}\in P}\overline{p}c_{\overline{p}} = \sum_{x\in X} xc_x + \sum_{x\in X}\sum_{\overline{p}\in P_x} x(x^{-1}\overline{p})c_{\overline{p}}$. De aquí, $b_x = c_x + \sum_{\overline{p}\in P_x}(x^{-1}\overline{p})c_{\overline{p}}$. Pero b_x ha sido elegido con la condición que $a_x = b_x + I$. Como $c_x \in I$, podemos suponer que $c_x = 0$ ya que $b_x + I = \sum_{\overline{p}\in P_x}(x^{-1}\overline{p})c_{\overline{p}} + I$. Consideramos que $b_x = \sum_{\overline{p}\in P_x}(x^{-1}\overline{p})c_{\overline{p}}$.

Tomamos $a'_{\overline{p}} = c_{\overline{p}} + I$. Entonces

$$(a_x)_{x\in X} = (b_x + I)_{x\in X} = (\sum_{\overline{p}\in P_x}(x^{-1}\overline{p})c_{\overline{p}} + I)_{x\in X} = (\sum_{\overline{p}\in P_x}(x^{-1}\overline{p})a'_x)_{x\in X} = \alpha((a'_{\overline{p}})_{\overline{p}\in P})$$

Concluimos que $\mathsf{Im}(\alpha) \subseteq \mathsf{Ker}(\beta)$. $\square$

Proposición 6.9 *Sea M un R-módulo firme y $(m_x) \in M^{(X)}$. Entonces $\sum_{x\in X} xm_x = 0$ si y sólo si para todo $x \in X$, $m_x = \sum_{\overline{p}\in P_x}(x^{-1}\overline{p})m'_{\overline{p}}$ donde $m'_{\overline{p}} \in M$ es cero para la mayoría de los $\overline{p} \in P$ salvo un número finito.*

Demostración:
Si $m_x = \sum_{\overline{p}\in P_x}(x^{-1}\overline{p})m'_{\overline{p}}$ entonces

$$\sum_{x\in X} xm_x = \sum_{x\in X}\sum_{\overline{p}\in P_x} x(x^{-1}\overline{p})m'_{\overline{p}} = \sum_{x\in X}\sum_{\overline{p}\in P_x}\overline{p}m_{\overline{p}} = 0$$

ya que $\overline{p} \in I$ y es cero considerado como elemento de R.

En el otro sentido seguiremos [25, Seite 97] y [24, I. Proposition 8.8] para producto tensorial en general pero en el caso particular de álgebras monomiales no unitarias.

Obsérvese que $R \otimes_A M = R \otimes_R M$. Veamos que los elementos de A pasan al otro lado del producto tensorial en $R \otimes_R M$. Sea $m \in M$, $r \in R$ y $a \in A$. Como M es firme entonces $M = RM$, por lo que $M = \sum_I r_i m_i$ para ciertos $r_i \in R$ y $m_i \in M$. Como $ar_i \in R$ entonces

$r \otimes am = r \otimes a \sum_I r_i m_i = \sum_I r a r_i \otimes m_i = \sum_I ra \otimes r_i m_i = ra \otimes m$. Utilizaremos el producto tensorial sobre el anillo unitario A.

Consideramos la sucesión exacta corta por la derecha del lema anterior

$$A^{(P)} \xrightarrow{\alpha} A^{(X)} \xrightarrow{\beta} R \to 0$$

Usando la exactitud por la derecha del funtor $- \otimes_A M$ obtenemos la sucesión exacta por la derecha

$$A^{(P)} \otimes_A M \overset{\alpha \otimes M}{\to} A^{(X)} \otimes_A M \overset{\beta \otimes M}{\longrightarrow} R \otimes_A M \to 0$$

y tomando los isomorfismos canónicos, deducimos la sucesión exacta corta por la derecha

$$M^{(P)} \xrightarrow{\hat{\alpha}} M^{(X)} \xrightarrow{\hat{\beta}} M \to 0$$

donde $\mathsf{Ker}(\hat{\beta}) = \mathsf{Im}(\hat{\alpha})$.

De la definición de α y β se sigue que

$$\hat{\beta}((m_x)_{x \in X}) = \sum_{x \in X} x m_x$$

$$\hat{\alpha}((m_{\overline{p}})_{\overline{p} \in P}) = (\sum_{\overline{p} \in P_x} (x^{-1}\overline{p}) m_{\overline{p}})_{x \in X}$$

Por lo que si $(m_x)_{x \in X} \in \mathsf{Ker}(\hat{\beta})$ existen $(m'_{\overline{p}})_{\overline{p} \in P} \in M^{(P)}$ con

$$a_x = \sum_{\overline{p} \in P_x} (x^{-1}\overline{p}) m'_{\overline{p}}$$

□

Corolario 6.10 *Sea M un módulo firme y $(m_x)_{x \in X}, (\overline{m_x})_{x \in X} \in M^{(X)}$. Entonces $\sum_{x \in X} x m_x = \sum_{x \in X} x \overline{m_x}$ si y sólo si existe $(m'_{\overline{p}})_{\overline{p} \in P} \in M^{(P)}$ tal que $m_x = \overline{m}_x + \sum_{\overline{p} \in P_x} (x^{-1}\overline{p}) m'_{\overline{p}}$ para todo $x \in X$.*

Demostración:
$\sum_{x \in X} x m_x = \sum_{x \in X} x \overline{m}_x$ si y sólo si $\sum_{x \in X} x(m_x - \overline{m}_x) = 0$ si y sólo si existen $(m'_p) \in M^{(P)}$ tales que $m_x - \overline{m}_x = \sum_{\overline{p} \in P_x} (x^{-1}\overline{p}) m'_p$ si y sólo si existen $(m'_{\overline{p}})_{\overline{p} \in P}$ tales que $m_x = \overline{m}_x + \sum_{\overline{p} \in P_x} (x^{-1}\overline{p}) m'_{\overline{p}}$. □

Ejemplo 6.11 *Cuando $P = \{xy\}$, entonces $P_y = \emptyset$ y $P_x = \{\overline{p} \in P : x \leq \overline{p}\} = \{xy\}$. En la proposición anterior por ser $P_y = \emptyset$, entonces $m_y = 0$ y $m_x = \sum_{\overline{p} \in P_x} (x^{-1}\overline{p}) m'_{\overline{p}} = (x^{-1}xy) m'_{xy} = y m'_{xy}$. Se ha considerado que $0 = x m_x + y m_y$, con $m_x, m_y \in M$, siendo M un $k\langle x, y \rangle/(xy)$-módulo firme. Nótese que esto es precisamente lo que se ha probado en la sección anterior.*

Sea $(m_x)_{x\in X} \in M^{(X)}$. Usando que $M = RM = XAM = XM$, podemos encontrar para cada m_x, elementos $m_{xy} \in M$ (todos cero salvo un número finito) tal que $m_x = \sum_{y\in X} ym_{xy}$. De forma recursiva podemos encontrar $m_{\overline{w}} \in M$ para cada palabra $\overline{w}$ sobre X tal que para todo $t \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{m_{\overline{w}} \neq 0 : \overline{w} \in X^t\}$ es finito y $m_{\overline{w}} = \sum_{x\in X} xm_{\overline{w}x}$. Aunque estos elementos existen siempre en el caso de módulos unitarios (y, en particular, de módulos firmes), no son necesariamente únicos. Este tipo de construcción es la idea que da lugar a los módulos de soporte que forman una familia de generadores de la categoría de módulos firmes. Esto módulos han sido desarrollados en [18, Section 5] y en la Sección 2.4.

Definición 6.12 *Una familia de elementos $(m_{\overline{w}})_{\overline{w}\in\langle X\rangle}$ de M tal que*

1. *El conjunto $\{m_{\overline{w}} \neq 0 : \overline{w} \in X^n\}$ es finito para cada $n \in \mathbb{N}$.*
2. *$m_{\overline{w}} = \sum_{x\in X} xm_{\overline{w}x}$ para cada $\overline{w} \in \langle X\rangle$.*

Se dice que es una representación unitaria o una representación unitaria de m_1. En el caso particular en que $m_1 = 0$, diremos que es una representación unitaria de cero.

Proposición 6.13 *Sea M un módulo firme, $(m_x)_{x\in X} \in M^{(X)}$ tal que $\sum_{x\in X} xm_x = 0$ y $(m_{\overline{w}})_{\overline{w}\in\langle X\rangle} \in M$ una representación unitaria. Entonces para cada palabra $\overline{u}$ con $P_{\overline{u}} \neq \emptyset$ y todo $\overline{p} \in P$ podemos encontrar $m^{\overline{u}}_{\overline{p}} \in M$, la mayoría cero, tales que para todo $\overline{w}$ con $P_{\overline{w}} \neq \emptyset$*

$$m_{\overline{w}} = \sum_{\overline{u}<\overline{w}} \sum_{\overline{p}\in P_{\overline{u}^{-1}\overline{w}}} (\overline{w}^{-1}\overline{u}\overline{p})m^{\overline{u}}_{\overline{p}}.$$

Demostración:
Haremos la demostración por inducción sobre la longitud de $\overline{w}$. Supongamos que $\lambda(\overline{w}) = 1$, entonces $\overline{w} = 1$ y $m_1 = \sum_{x\in X} xm_x = 0$ por hipótesis. Además

$$\sum_{\overline{u}<\overline{w}} \sum_{\overline{p}\in P_{\overline{u}^{-1}\overline{w}}} (\overline{w}^{-1}\overline{u}\overline{p})m^{\overline{u}}_{\overline{p}} = 0$$

ya que no existen palabras $\overline{u}$ tales que $\overline{u} < \overline{w}$.

Si $\overline{w} = x$ para algún $x \in X$, sólo hay una palabra $\overline{u} < x$ que es $\overline{u} = 1$. Entonces estamos en el caso de la Proposición 6.9, y así

$$\sum_{\overline{u}<\overline{w}} \sum_{\overline{p}\in P_{\overline{u}^{-1}\overline{w}}} (\overline{w}^{-1}\overline{u}\overline{p})m^{\overline{u}}_{\overline{p}} = \sum_{\overline{p}\in P_x} (x^{-1}\overline{p})m^{1}_{\overline{p}}.$$

Supongamos el resultado cierto para palabras de longitud $r-1$, y sea $\overline{w} = x_1x_2\cdots x_r$ y $q \in P_w$. Las palabras $\overline{u}$ tales que $\overline{u} < \overline{w}$ son de la forma $x_0x_1\cdots x_s$ con $s = 0,\cdots,r-1$ donde suponemos que $x_0 = 1$. Así, $(x_0\cdots x_{s-1})^{-1}\overline{w} = x_sx_{s+1}\cdots x_r$ para $s = 1,\cdots,r$. Si $P_{\overline{w}} \neq \emptyset$ entonces $P_{x_1x_2\cdots x_{r-1}} \neq \emptyset$ ya que $x_1x_2\cdots x_{r-1} < \overline{w} < \overline{p}$ donde $\overline{p} \in P_{\overline{w}}$. Por hipótesis de inducción aplicada a la palabra $x_1\cdots x_{r-1}$ se tiene

$$m_{x_1x_2\cdots x_{r-1}} = \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{\overline{p}\in P_{x_s\cdots x_{r-1}}} ((x_s\cdots x_{r-1})^{-1}\overline{p})m^{x_1\cdots x_{s-1}}_{\overline{p}}.$$

Para cada $x \in X$ sea

$$h_x = m_{x_1 x_2 \cdots x_{r-1} x}$$

$$\overline{h}_x = \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{\overline{p} \in P_{x_s \cdots x_{r-1} x}} (x_s \cdots x_{r-1} x)^{-1} \overline{p} m_{\overline{p}}^{x_1 \cdots x_{s-1}}.$$

Probaremos que $\sum_{x \in X} x h_x = \sum_{x \in X} x \overline{h}_x$. De Corolario 6.7(c) se obtiene (tomando $u = x_1 \cdots x_{r-1}$ y $v = x_1 \cdots x_{s-1}$)

$$\cup_{x \in X} P_{x_s \cdots x_{r-1} x} = P_{x_s \cdots x_{r-1}}$$

para cada $s \in \{1, \cdots, r-1\}$.

Entonces

$$\sum_{x \in X} x \overline{h}_x = \sum_{x \in X} x (\sum_{s=1}^{r-1} \sum_{\overline{p} \in P_{x_s \cdots x_{r-1} x}} ((x_s \cdots x_{r-1} x)^{-1} \overline{p}) m_{\overline{p}}^{x_1 \cdots x_{s-1}}) =$$

$$\sum_{s=1}^{r-1} \sum_{x \in X} \sum_{\overline{p} \in P_{x_s \cdots x_{r-1} x}} x((x_s \cdots x_{r-1} x)^{-1} \overline{p}) m_{\overline{p}}^{x_1 \cdots x_{s-1}} =$$

$$\sum_{s=1}^{r-1} \sum_{\overline{p} \in \cup_{x \in X} P_{x_s \cdots x_{r-1} x}} ((x_s \cdots x_{r-1})^{-1} \overline{p}) m_{\overline{p}}^{x_1 \cdots x_{s-1}} =$$

$$\sum_{s=1}^{r-1} \sum_{\overline{p} \in P_{x_s \cdots x_{r-1}}} ((x_s \cdots x_{r-1})^{-1} \overline{p}) m_{\overline{p}}^{x_1 \cdots x_{s-1}} =$$

$$m_{x_1 x_2 \cdots x_{r-1}} = \sum_{x \in X} x m_{x_1 x_2 \cdots x_{r-1} x} = \sum_{x \in X} x h_x.$$

Si aplicamos el Corolario 6.10 para h_x y $\overline{h}_x$, podemos encontrar elementos $m_{\overline{p}}^{x_1 \cdots x_{r-1}} \in M$, la mayoría cero, tales que

$$h_x = \overline{h}_x + \sum_{\overline{p} \in P_x} (x^{-1} \overline{p}) m_{\overline{p}}^{x_1 \cdots x_{r-1}}.$$

Cuando $x = x_r$ obtenemos que

$$m_{x_1 x_2 \cdots x_r} = h_{x_r} = \overline{h}_{x_r} + \sum_{\overline{p} \in P_{x_r}} (x_r^{-1} \overline{p}) m_{\overline{p}}^{x_1 \cdots x_{r-1}} =$$

$$\sum_{s=1}^{r-1} \sum_{\overline{p} \in P_{x_s \cdots x_r}} ((x_s \cdots x_r)^{-1} \overline{p}) m_{\overline{p}}^{x_1 \cdots x_{s-1}} + \sum_{\overline{p} \in P_{x_r}} (x_r^{-1} \overline{p}) m_{\overline{p}}^{x_1 \cdots x_{r-1}} =$$

$$\sum_{s=1}^{r} \sum_{\overline{p} \in P_{x_s \cdots x_r}} ((x_s \cdots x_r)^{-1} \overline{p}) m_{\overline{p}}^{x_1 \cdots x_{s-1}}.$$

□

La Proposición 6.9 asegura la existencia de ciertos elementos $m'_{\overline{p}} \in M$ para $\overline{p} \in P$ que cumplen $m_x = \sum_{\overline{p}\in P_x}(x^{-1}\overline{p})m'_{\overline{p}}$ cuando $\sum_{x\in X} xm_x = 0$. La siguiente proposición mejora el resultado asegurando que los elementos $m'_{\overline{p}}$ pueden ser tomados de una representación unitaria previamente elegida.

Proposición 6.14 *Sea M un R-módulo firme y $m_x \in M$ tal que $m_x = 0$ salvo un número finito. Sea $(m_{\overline{w}})_{\overline{w}\in\langle X\rangle}$ una representación unitaria. Entonces $\sum_{x\in X} xm_x = 0$ si y sólo si para todo $x \in X$ se tiene $m_x = \sum_{\overline{p}\in P_x}(x^{-1}\overline{p})m_{\overline{p}}$.*

Demostración:
La prueba hacia la izquierda es un caso particular de la Proposición 6.9.

Supongamos que $\sum_{x\in X} xm_x = 0$. Sea $x \in X$ y $\overline{q} \in P_x$, la Proposición 6.13 asegura que

$$m_{\overline{q}} = \sum_{\overline{u}<\overline{q}}\sum_{\overline{p}\in P_{\overline{u}^{-1}\overline{q}}}(\overline{q}^{-1}\overline{up})m_{\overline{p}}^{\overline{u}} =$$

$$\sum_{\overline{p}\in P_{\overline{q}}}(\overline{q}^{-1}\overline{p})m_{\overline{p}}^{1} + \sum_{1<\overline{u}<\overline{q}}\sum_{\overline{p}\in P_{\overline{u}^{-1}\overline{q}}}(\overline{q}^{-1}\overline{up})m_{\overline{p}}^{\overline{u}} =$$

$$m_{\overline{q}}^{1} + \sum_{1<\overline{u}<\overline{q}}\sum_{\overline{p}\in P_{\overline{u}^{-1}\overline{q}}}(\overline{q}^{-1}\overline{up})m_{\overline{p}}^{\overline{u}}.$$

donde se ha tenido en cuenta que $P_{\overline{q}} = \{\overline{q}\}$ por Corolario 6.7(d).

Si multiplicamos por $x^{-1}\overline{q}$ y teniendo en cuenta que $x \leq \overline{u}$, entonces si $1 < \overline{u} < \overline{q}$ obtenemos

$$(x^{-1}\overline{q})m_{\overline{q}} = (x^{-1}\overline{q})m_{\overline{q}}^{1} + \sum_{1<\overline{u}<\overline{q}}\sum_{\overline{p}\in P_{\overline{u}^{-1}\overline{q}}}((x^{-1}\overline{q})(\overline{q}^{-1}\overline{up}))m_{\overline{p}}^{\overline{u}} =$$

$$(x^{-1}\overline{q})m_{\overline{q}}^{1} + \sum_{1<\overline{u}<\overline{q}}\sum_{\overline{p}\in P_{\overline{u}^{-1}\overline{q}}}(x^{-1}\overline{up})m_{\overline{p}}^{\overline{u}} = (x^{-1}\overline{q})m_{\overline{q}}^{1}$$

porque $x^{-1}\overline{up} = 0$ ya que $\overline{p} \in I$ y $x^{-1}\overline{u} \in \langle X\rangle$.

Esto puede ser hecho para todo $x \in X$ y todo $\overline{q} \in P_x$, así

$$m_x = \sum_{\overline{q}\in P_x}(x^{-1}\overline{q})m_{\overline{q}}^{1} = \sum_{\overline{q}\in P_x}(x^{-1}\overline{q})m_{\overline{q}}.$$

□

Teorema 6.15 *Sea $\{M^\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de módulos firmes y $\prod_{\lambda\in\Lambda} M^\lambda$ el producto computado en $A-$*Mod*. Sea N un A-submódulo de $\prod_{\lambda\in\Lambda} M^\lambda$ tal que $N = RN$, entonces N es un módulo firme.*

Demostración:
Probaremos que $\mu : R\otimes_A N \to N$ dada por $\mu(r\otimes n) = rn$ es un isomorfismo. La condición $N = RN$ nos asegura que es un epimorfismo. Supongamos que $0 = \sum_{x\in X} xn_x = \mu(\sum_{x\in X} x\otimes n_x)$, faltaría probar que $\sum_{x\in X} x\otimes n_x = 0$ en $R\otimes_A N$ y así μ sería un monomorfismo.

Para cada elemento n_x tomamos una representación unitaria y definimos los elementos $n_{\overline{w}}$ para cada $\overline{w} \in \langle X\rangle$ con $n_x = \sum_{y\in X} yn_{xy}$ para cada $x \in X$ y $n_1 = 0$. Estos elementos están en $N \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} M^\lambda$ y tienen componentes $n^\lambda_{\overline{w}} \in M^\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$ y $\overline{w} \in \langle X\rangle$. Es decir, $n_{\overline{w}} = (n^\lambda_{\overline{w}})_{\lambda\in\Lambda}$

Entonces $0 = \sum_{x\in X} xn_x = \sum_{x\in X} x(n^\lambda_x)_{\lambda\in\Lambda} = (\sum_{x\in X} xn^\lambda_x)_{\lambda\in\Lambda}$, por lo que $0 = \sum_{x\in X} xn^\lambda_x$ en M^λ para cada $\lambda \in \Lambda$. M^λ es un módulo firme, aplicando la Proposición 6.14

$$n^\lambda_x = \sum_{\overline{p}\in P_x} (x^{-1}\overline{p})n^\lambda_{\overline{p}}.$$

Esto puede ser hecho para cada $\lambda \in \Lambda$, luego

$$n_x = (n^\lambda_x)_{\lambda\in\Lambda} = (\sum_{\overline{p}\in P_x} (x^{-1}\overline{p})n^\lambda_{\overline{p}})_{\lambda\in\Lambda} = \sum_{\overline{p}\in P_x} (x^{-1}\overline{p})(n^\lambda_{\overline{p}})_{\lambda\in\Lambda} = \sum_{\overline{p}\in P_x} (x^{-1}\overline{p})n_{\overline{p}}$$

y así en $R\otimes_A N$ obtenemos

$$\sum_{x\in X} x\otimes n_x = \sum_{x\in X} x\otimes \sum_{\overline{p}\in P_x} (x^{-1}\overline{p})n_{\overline{p}} = \sum_{x\in X}\sum_{\overline{p}\in P_x} x\otimes (x^{-1}\overline{p})n_{\overline{p}} =$$

$$\sum_{x\in X}\sum_{\overline{p}\in P_x} x(x^{-1}\overline{p})\otimes n_{\overline{p}} = \sum_{x\in X}\sum_{\overline{p}\in P_x} \overline{p}\otimes n_{\overline{p}} = 0.$$

ya que $p \in I$ y es cero considerado como elemento de R. $\square$

Corolario 6.16 *Sea M un módulo firme y N un A-submódulo de M tal que $N = RN$, entonces N es un módulo firme.*

Demostración:
Basta tomar en el teorema anterior el conjunto Λ con un único elemento.

$\square$

6.4. La Categoría de Módulos Firmes

Todos los módulos considerados en esta sección estarán en $A-\mathsf{Mod}$. Recordamos que un A-módulo se dice R-unitario si $M = RM$. Como $R = XA$ la condición de unitario es equivalente a que $M = XM$, ya que $M = RM = XAM = XM$, donde se ha tenido en cuenta que $M = AM$. Dado un A-módulo M podemos encontrar un submódulo maximal $\mathsf{U}(M) \subseteq M$ tal que $\mathsf{U}(M)$ es R-unitario. A este módulo lo llamamos la parte R-unitaria de M tal y como se ha visto en la Sección 2.3.

Proposición 6.17 *Sea M_α, $f_{\alpha,\beta} : M_\alpha \to M_\beta$ un sistema inverso de módulos firmes. Sea $\varprojlim M_\alpha$ el límite inverso calculado en $A-$Mod. Entonces el límite inverso calculado en $R-$DMod, $\varprojlim' M_\alpha$, existe y*

$$\varprojlim{}' M_\alpha = \mathsf{U}\left(\varprojlim M_\alpha\right).$$

Demostración:
Con la construción usual del límite inverso se tiene que $\varprojlim M_\alpha$ en $A-$Mod es un submódulo de $\prod_\alpha M_\alpha$. $\mathsf{U}\left(\varprojlim M_\alpha\right)$ es un R-submódulo unitario de $\prod_\alpha M_\alpha$. Usando Teorema 6.15 se tiene que $\mathsf{U}\left(\varprojlim M_\alpha\right)$ es un módulo firme.

Para cada β sea $p'_\beta : \mathsf{U}\left(\varprojlim M_\alpha\right) \to M_\beta$ la composición

$$\mathsf{U}\left(\varprojlim M_\alpha\right) \subseteq \varprojlim M_\alpha \xrightarrow{p_\beta} M_\beta$$

donde p_β es la proyección canónica.

Para cada $f_{\alpha\beta} : M_\alpha \to M_\beta$ se tiene que $f_{\alpha\beta} \circ p_\alpha = p_\beta$, así para cada elemento $\hat{m} \in \varprojlim M_\alpha$ se cumple que $f_{\alpha\beta}(p_\alpha(\hat{m})) = p_\beta(\hat{m})$. En particular se cumplirá para los elementos de $\mathsf{U}\left(\varprojlim M_\alpha\right) \subseteq \varprojlim M_\alpha$. Esto prueba que $f_{\alpha\beta} \circ p'_\alpha = p'_\beta$.

Supongamos que hay un módulo firme M y una familia de homomorfismos $\pi_\alpha : M \to M_\alpha$ tales que para todo $f_{\alpha\beta}$ se satisface la igualdad $f_{\alpha\beta} \circ \pi_\alpha = \pi_\beta$. La propiedad universal del límite inverso en $A-$Mod asegura la existencia de un único homomorfismo $\pi : M \to \varprojlim M_\alpha$. Pero M es firme y, en particular $RM = M$, por lo que $R\mathsf{Im}(\pi) = \mathsf{Im}(\pi)$. Así $\mathsf{Im}(\pi) \subseteq \mathsf{U}\left(\varprojlim M_\alpha\right)$ y π puede ser restringido para $\pi' : M \to \mathsf{U}\left(\varprojlim M_\alpha\right)$, que satisface $f_{\alpha\beta} \circ \pi'_\alpha = \pi'_\beta$. La unicidad de π garantiza la unicidad de π'.

□

Este resultado no es cierto en general. En realidad, es un resultado más fuerte de un tipo de anillos que engloba a las álgebras monomiales y que será tratado en la siguiente sección. En [17, Proposición 5.8] puede verse que, siguiendo la notación de la proposición anterior, en general se tiene

$$\varprojlim{}' M_\alpha = \mathsf{D}\left(\varprojlim M_\alpha\right).$$

También en [24, Proposición 5.8] puede verse el siguiente resultado consecuencia de que el producto tensorial conserve límites directos.

Proposición 6.18 *Sea M_α, $f_{\alpha,\beta} : M_\beta \to M_\alpha$ un sistema directo de módulos firmes. Sea $\varinjlim M_\alpha$ el límite directo calculado en $A-$Mod, entonces el límite directo calculado en $R-$DMod, $\varinjlim' M_\alpha$, existe y*

$$\varinjlim{}' M_\alpha = \varinjlim M_\alpha.$$

Demostración:
El módulo $\varinjlim M_\alpha$ es firme, porque

$$R \otimes_A \varinjlim M_\alpha \simeq \varinjlim R \otimes_A M_\alpha \simeq \varinjlim M_\alpha.$$

Y este módulo sastisface la propiedad universal para límites directos en $R-\mathsf{DMod}$ porque la satisface en $A-\mathsf{Mod}$ y la categoría de módulos firmes es una subcategoría plena de $A-\mathsf{Mod}$. $\square$

Dado un homomorfismo de módulos firmes $f : M \to N$ escribiremos $\mathsf{Ker}'(f)$ para el núcleo de f calculado en $R-\mathsf{DMod}$ e $\mathsf{Im}'(f)$ para la imagen de f en $R-\mathsf{DMod}$.

Proposición 6.19 *Sea $f : M \to N$ un homomorfismo de módulos firmes. Entonces $\mathsf{Ker}(f)$ y $\mathsf{Im}(f)$ calculados $A-\mathsf{Mod}$ son módulos firmes, así $\mathsf{Ker}'(f) = \mathsf{Ker}(f)$ e $\mathsf{Im}'(f) = \mathsf{Im}(f)$.*

Demostración:
El A-módulo $\mathsf{Im}(f)$ es R-unitario porque $\mathsf{Im}(f) = f(M) = f(RM) = Rf(M) = R(\mathsf{Im}(f))$ y es un submódulo de N que es un módulo firme. Usando Corolario 6.16, $\mathsf{Im}(f)$ es firme. La aplicación $M \to \mathsf{Im}(f)$ es sobreyectiva, usando Proposición 2.19, $\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Ker}(M \to \mathsf{Im}(f))$ es R-unitario y submódulo de un módulo firme, luego es firme por el Corolario 6.16.

En general $\mathsf{Ker}'(f) = \mathsf{D}\,(\mathsf{Ker}(f))$, como puede verse en en el Corolario 2.25. Como $\mathsf{Ker}(f)$ es firme entonces $\mathsf{Ker}'(f) = \mathsf{D}\,(\mathsf{Ker}(f)) = \mathsf{Ker}(f)$. $\square$

Proposición 6.20 *Sea M un módulo firme y $G = \coprod_{\sigma\in\Xi(X)} \langle\langle\sigma\rangle\rangle$ el generador de $R-\mathsf{DMod}$, entonces M es G-estático.*

Demostración:
Sea $E = \mathsf{Hom}_R(G, G)$, entonces cada elemento de $G \otimes_E \mathsf{Hom}_R(G, M)$ puede escribirse como suma de elementos de la forma $g \otimes_E \alpha$ con $g \in G$ y $\alpha \in \mathsf{Hom}_R(G, M)$. Y, para cada $g \in G$, podemos encontrar un soporte unitario τ y un homomorfismo $f : G \to G$ tal que $(\langle 1\rangle_\tau)f = g$. Así, $g \otimes \alpha = (\langle 1\rangle_\tau)f \otimes \alpha = \langle 1\rangle_\tau \otimes f * \alpha$.

Dado un elemento de $G \otimes_E \mathsf{Hom}_R(G, M)$ en la forma

$$\sum_I g_i \otimes_E \alpha_i$$

donde I es un conjunto finito, podemos encontrar un soporte suficientemente grande τ y homomorfismos $f_i : G \to G$ tales que $(\langle 1\rangle_\tau)f_i = g_i$. En el razonamiento anterior, realizado para un solo elemento g, basta tomar como τ la unión de todos los soportes unitarios que aparecen para cada elemento g de la suma. De este modo

$$\sum_I g_i \otimes \alpha_i = \sum_I (\langle 1\rangle_\tau) f_i \otimes \alpha_i = \sum_I \langle 1\rangle_\tau \otimes f_i * \alpha_i =$$

$$\langle 1\rangle_\tau \otimes (\sum_I f_i * \alpha_i) = \langle 1\rangle_\tau \otimes f$$

donde $f = \sum_I f_i * \alpha_i$. Hemos probado que todo elemento de $G \otimes_E \mathsf{Hom}_R(G, M)$ puede escribirse como $\langle 1 \rangle_\tau \otimes f$ para un cierto soporte unitario τ y un homomorfismo $f : G \to M$.

Si M es un módulo firme, para cada elemento m de M podemos encontrar un homomorfismo $\alpha : G \to M$ tal que existe $g \in G$ con $(g)\alpha = m$. Así, el homomorfismo $\varphi_M : G \otimes_E \mathsf{Hom}_R(G, M) \to M$ es sobreyectivo. Sea, ahora, $\langle 1 \rangle_\tau \otimes_E f$ un elemento del núcleo, entonces $(\langle 1 \rangle_\tau) f = 0$. Utilizando la proposición anterior $\mathsf{Ker}(f)$ es un módulo firme, por lo que $\langle 1 \rangle_\tau$ pertenece a la parte unitaria de $\mathsf{Ker}(f)$. Podemos encontrar un soporte unitario σ y un homomorfismo $h : G \to G$ tal que $h * f = 0$ y $(\langle 1 \rangle_\sigma) h = \langle 1 \rangle_\tau$. Así,

$$\langle 1 \rangle_\tau \otimes_E f = (\langle 1 \rangle_\sigma) h \otimes_E f = \langle 1 \rangle_\sigma \otimes (h * f) = \langle 1 \rangle_\sigma \otimes 0 = 0$$

Deducimos que φ_M es una aplicación inyectiva y, por tanto, es un isomorfismo. □

Proposición 6.21 *Sea M y N módulos firmes y $f : M \to N$ un homomorfismo. Son equivalentes:*

1. *f es un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$.*
2. *f es un núcleo en $R-\mathsf{DMod}$.*
3. *f es una aplicación inyectiva.*

Demostración:
$(3 \Rightarrow 2)$. Si f es una aplicación inyectiva, f es el núcleo de $N \to N/\mathsf{Im}(f)$ porque $N/\mathsf{Im}(f)$ es un módulo firme.

$(2 \Rightarrow 1)$. Si f es el núcleo de $g : N \to L$ y $h : K \to M$ es un homomorfismo tal que $h * f = 0$, entonces $h * f = 0 * f$ y usando la unicidad dada por la propiedad universal de los núcleos, $h = 0$.

$(1 \Rightarrow 3)$. El homomorfismo $\mathsf{Ker}(f) \to M$ está en $R-\mathsf{DMod}$ y al componer con f da 0. Usando que f es un monomorfismo deducimos que $\mathsf{Ker}(f) \to M$ es la aplicación cero, luego $\mathsf{Ker}(f) = 0$. □

Proposición 6.22 *Sea $0 \to K \to L \to M \to 0$ una sucesión de módulos firmes. La sucesión es exacta en $R-\mathsf{DMod}$ si y sólo si es exacta en $A-\mathsf{Mod}$.*

Demostración:
Este resultado es consecuencia de que núcleos y conúcleos calculados $R-\mathsf{DMod}$ y en $A-\mathsf{Mod}$ coinciden. □

Proposición 6.23 *Los límites directos son exactos en $R-\mathsf{DMod}$.*

Demostración:
Las sucesiones exactas, por la propisición anterior, son las mismas en $R-\mathsf{DMod}$ y $A-\mathsf{Mod}$, y el límite directo de módulos firmes en $R-\mathsf{DMod}$ es el mismo que en $A-\mathsf{Mod}$ por la

Proposición 6.18. Como el límite directo es exacto en $A-\mathsf{Mod}$ entonces es exacto en $R-\mathsf{DMod}$.

□

Teorema 6.24 *La categoría de módulos firmes para un álgebra monomial no unitaria es una categoría de Grothendieck.*

Demostración:
Usando [18, Proposition 14], $R-\mathsf{DMod}$ es una categoría aditiva con un generador y un co-generador. Es completa y cocompleta y el límite directo es exacto (Proposición 6.23). Todo monomorfismo es un núcleo (Proposición 6.21) y todo epimorfismo es un conúcleo. Así que satisface todas las condiciones para ser una categorí de Grothendieck.

$\square$

6.5. Una generalización

El Corolario 6.16 es la propiedad esencial para que $R-\mathsf{DMod}$ sea una categoría abeliana cuando R es un álgebra monomial no unitaria y da lugar a la siguiente definición.

Definición 6.25 *Se dice que $R-\mathsf{DMod}$ es cerrada para submódulos unitarios si para cada $M \in R-\mathsf{DMod}$ y N un submódulo de M tal que $RN = N$ entonces $N \in R-\mathsf{DMod}$. En otras palabras, $R-\mathsf{DMod}$ es cerrada para submódulos unitarios si todo submódulo unitario de un módulo firme es firme.*

Nota: Obérvese que no se está diciendo que todo módulo unitario sea un módulo firme. Estos anillos serán considerados en el capítulo siguiente. Es conocido que todo módulo unitario puede ponerse como imagen de un módulo firme, pero no es conocido si todo módulo unitario es submódulo de un módulo firme, ni siquiera que sea cierto en general. Si esto fuera así y se cumpliera la definición entonces todo módulo unitario sería firme.

Proposición 6.26 *Sea R un anillo no unitario. Son equivalente:*

1. *$R-\mathsf{DMod}$ es cerrada para submódulos unitarios.*
2. *Si $f : M \to N$ es un homomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$ entonces $\mathsf{Ker}(f)$ calculado en $A-\mathsf{Mod}$ es R-unitario.*

Demostración:

$(2) \Rightarrow (1)$ Sea $M \in R-\mathsf{DMod}$ y N un submódulo de M unitario. Sea $i : N \to M$ la inclusión y $\nu_N : \mathsf{D}(N) \to N$ el homomorfismo proporcionado por el funtor **D**. Como N es unitario entonces ν_N es sobreyectiva. Además la composición $i \circ \nu_N : \mathsf{D}(N) \to M$ es un homomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$ y al ser i inyectiva se tiene $\mathsf{Ker}(i \circ \nu_N) = \mathsf{Ker}(\nu_N)$ que es evanescente. Por hipótesis también será unitario, luego $\mathsf{Ker}(\nu_N) = 0$ y es inyectiva. Se concluye que ν_N es un isomorfismo y por tanto N es un módulo firme.

$(1) \Rightarrow (2)$ Sea $f : M \to N$ un homomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$, entonces $\mathsf{Im}(f)$ es un submódulo unitario de N y por hipótesis será un módulo firme. Consideramos la s.e.c en $A-\mathsf{Mod}$,

$$0 \longrightarrow \mathsf{Ker}(f) \longrightarrow M \longrightarrow \mathsf{Im}(f) \longrightarrow 0$$

M e $\mathsf{Im}(f)$ son módulos firmes, necesariamente $\mathsf{Ker}(f)$ tiene que ser unitario.

□

Corolario 6.27 *Si R es un anillo no unitario tal que $R-$DMod es cerrada para submódulos unitarios, entonces son válidos para $R-$DMod los resultados de la sección anterior.*

Demostración:
Para probar esos resultado se está utilizando que si R es un álgebra monomial no unitaria entonces $R-$DMod es cerrada para submódulos unitarios. □

De una forma dual podemos hacer la siguiente definición.

Definición 6.28 *Se dice que $R-$CMod es cerrada para cocientes libres de torsión si para cada $M \in R-$CMod y N un submódulo de M tal que M/N es libre de torsión entonces $M/N \in R-$CMod.*

Proposición 6.29 *Sea R un anillo no unitario son equivalentes:*

1. *$R-$CMod es cerrada para cocientes libres de torsión.*
2. *Si $f : M \to N$ es un homomorfismo en $R-$CMod entonces $\mathsf{Coker}(f)$ calculado en $A-$Mod es un módulo libre de torsión.*

Demostración:

(1) ⇒ (2) Sea $f : M \to N$ un homomorfismo en $R-$CMod. Por [17, Proposición 3.4], $\mathsf{Coker}(f) = N/\mathsf{Im}(f)$ es libre de torsión si y sólo si $\mathsf{Im}(f) \in R-$CMod. Como $\mathsf{Im}(f)$ es un submódulo de N es libre de torsión y cociente de un módulo cerrado ya que $\mathsf{Im}(f) \cong N/\mathsf{Ker}(f)$. Por hipótesis $\mathsf{Im}(f) \in R-$CMod, por lo que $\mathsf{Coker}(f)$ es libre de torsión.

(2) ⇒ (1) Sea $M \in R-$CMod y N un submódulo de M tal que M/N es libre de torsión. Denotamos por $\pi : M \to M/N$ la proyección que es sobreyectiva y por $\iota_{M/N} : M/N \to \mathsf{C}(M/N)$ el homomorfismo proporcionado por el funtor **C** que es inyectivo por ser M/N libre de torsión. Consideramos la composición $\iota_{M/N} \circ \pi : M \to \mathsf{C}(M/N)$ que es un homomorfismo en $R-$CMod. Por hipótesis $\mathsf{Coker}(\iota_{M/N} \circ \pi)$ es libre de torsión. Pero, al ser π sobreyectiva se tiene $\mathsf{Im}(\iota_{M/N} \circ \pi) = \mathsf{Im}(\iota_{M/N})$, luego $\mathsf{Coker}(\iota_{M/N} \circ \pi) = \mathsf{C}(M)/\mathsf{Im}(\iota_{M/N}) = \mathsf{Coker}(\iota_{M/N})$ que es de torsión (y libre de torsión). Necesariamente, $\mathsf{Coker}(\iota_{M/N}) = 0$ y así $\iota_{M/N}$ es sobreyectiva y por tanto un isomorfismo. Se concluye que $M/N \in R-$CMod.

□

Los anillos de este tipo tienen un resultado dual a la Proposición 6.21. Ahora $R-$CMod es siempre una categoría abeliana por lo que todo epimorfismo es un conúcleo.

Corolario 6.30 *Si R es un anillo tal que $R-\mathsf{CMod}$ es cerrada para cocientes libres de torsión y $f : M \to N$ es un homomorfismo en $R-\mathsf{CMod}$, son equivalentes:*

1. *f es un epimorfismo en $R-\mathsf{CMod}$.*
2. *f es una aplicación sobreyectiva.*

Demostración:
Utilizando el Corolario 2.17, f es un epimorfismo en $R-\mathsf{CMod}$ si y sólo si $0 = \mathsf{Coker}'(f) = \mathsf{C}(\mathsf{Coker}(f))$ si y sólo si $\mathsf{Coker}(f)$ es un módulo de torsión.

(1) $\Rightarrow$ (2) Si f es un epimorfismo entonces $\mathsf{Coker}(f)$ calculado en $A-\mathsf{Mod}$ es un módulo de torsión. Por la proposición anterior $\mathsf{Coker}(f)$ también es libre de torsión. Necesariamente $\mathsf{Coker}(f) = 0$, así f es sobreyectiva.

(2) $\Rightarrow$ (1) Trivial. Si f es sobreyectiva entonces $\mathsf{Coker}(f) = 0$ calculado en $A-\mathsf{Mod}$ que es un módulo de torsión. Deducimos que f es un epimorfismo en $R-\mathsf{CMod}$.

□

6.6. El módulo de caracteres

En esta sección estableceremos una relación entre los conceptos definidos anteriormente. Utilizaremos que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador inyectivo para $\mathbb{Z}-\mathsf{Mod}$.

Proposición 6.31 *Sea $M \in R-\mathsf{DMod}$ entonces $M^+ = \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \in \mathsf{CMod}-R$.*

Demostración:
Vease [13, Página 5839].

$$\mathsf{Hom}_R(R, M^+) = \mathsf{Hom}_R(R, \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cong \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong$$

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = M^+$$

□

Proposición 6.32 *Sea $M \in A-\mathsf{Mod}$ tal que M^+ es de R-torsión entonces M es evanescente.*

Demostración:
Sea σ un soporte unitario y $f : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to M$ un homomorfismo. Aplicando el funtor $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tenemos el homomorfismo $f^+ : M^+ \to \langle\langle\sigma\rangle\rangle^+$. Por la proposición anterior $\langle\langle\sigma\rangle\rangle^+ \in \mathsf{CMod}-R$ y por tanto es libre de torsión. Por hipótesis M^+ es de torsión por lo que $f^+ = 0$. Por ser $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ un cogenerador inyectivo tiene que ocurrir que $f = 0$. De este modo M es evanescente. □

Ejemplo 6.33 *El recíproco no es cierto. Tomamos $R = 2\mathbb{Z}$ y $M = 2\mathbb{Z}$. Claramente M es evanescente, porque $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} MR^n = 0$. Sin embargo, tomamos $f : 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $f(2n) = \dfrac{2n}{3} + \mathbb{Z}$ y la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$. Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene $fa_1 \cdots a_k \neq 0$ ya que $f(2)2^k = \dfrac{2^{k+1}}{3} + \mathbb{Z} \neq 0$ ya que $\dfrac{2^{k+1}}{3} \notin \mathbb{Z}$ pues 3 no divide a 2^{k+1}.*

Proposición 6.34 *Sea $M \in A-\mathsf{Mod}$, entonces M es R-unitario si y sólo si M^+ es R-libre de torsión.*

Demostración:
Sea M unitario y $f : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $fR = 0$. Sea $m \in M$ entonces existen elementos $(m_i)_{i\in I}$ en M y $(r_i)_{i\in I}$ en R siendo I un conjunto finito, tales que $m = \sum_{i\in I} r_i m_i$. Entonces $f(m) = f(\sum_{i\in I} r_i m_i) = \sum_{i\in I} f(m_i) r_i = 0$, por lo que $f = 0$ y M^+ es libre de torsión.

Si M^+ es libre de torsión, tomamos la sucesión exacta corta $0 \to RM \to M \to M/RM \to 0$ y, utilizando el generador inyectivo, obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow (M/RM)^+ \longrightarrow M^+ \longrightarrow (RM)^+ \longrightarrow 0$$

Sea $f : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $f(RM) = 0$. Entonces $f(M)R = 0$, por lo que $f = 0$ ya que M^+ es libre de torsión. Entonces $M^+ \to (RM)^+$ es un isomorfismo, por lo que $(M/RM)^+ = 0$. Como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador se tiene que $M/RM = 0$, por lo que $M = RM$, es decir, M es unitario. □

Proposición 6.35 *Sea $M \in A-\mathsf{Mod}$ tal que $M^+ \in \mathsf{CMod}-R$ entonces $M \in R-\mathsf{DMod}$.*

Demostración:
Por hipótesis

$$\begin{aligned} M^+ &\cong \mathsf{Hom}_R(R, M^+) = \mathsf{Hom}_R(R, \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cong \\ &\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = (R \otimes_R M)^+ \end{aligned}$$

M^+ es libre de torsión por lo que M es unitario. El homomorfismo $\mu_M : R \otimes_R M \to M$ es un epimorfismo del que se obtiene la s.e.c.

$$0 \longrightarrow M^+ \longrightarrow (R \otimes_R M)^+ \longrightarrow \mathsf{Ker}(\nu_M)^+ \longrightarrow 0$$

Pero los dos primeros módulos son isomorfos, así que $\mathsf{Ker}(\nu_M)^+ = 0$ y, nuevamente por la propiedad de ser cogenerador, se tendrá $\mathsf{Ker}(\nu_M) = 0$, por lo que $R \otimes_R M \cong M$ y $M \in R-\mathsf{DMod}$. □

Corolario 6.36 *Si R es un anillo no unitario tal que $\mathsf{CMod}-R$ es cerrada para cocientes libres de torsión entonces $R-\mathsf{DMod}$ es cerrada para submódulos unitarios.*

Demostración:
Sea M un R-módulo firme y N un R-submódulo unitario de M, el homomorfismo inyectivo $0 \to N \to M$ se convierte en el homomorfismo sobreyectivo $M^+ \to N^+ \to 0$. Como N es unitario entonces N^+ es libre de torsión y es el cociente de un módulo cerrado. Por hipótesis N^+ será cerrado y por la proposición anterior N es firme. □

6.7. Contraejemplos

6.7.1. Ejemplo 1

La categoría de módulos cerrados para un anillo R no unitario, $R-\mathsf{CMod}$, es una categoría de Grothendieck. La categoría de módulos firmes, $R-\mathsf{DMod}$, tiene un inicio paralelo a la categoría $R-\mathsf{CMod}$. Pueden verse los trabajos [20], [17], [11], [12], etc. Sin embargo, para $R-\mathsf{DMod}$ no ha podido ser demostrado que sea una categoría de Grothendieck, ni siquiera una categoría abeliana (Más detalles sobre el problema de la abelianidad de $R-\mathsf{DMod}$ serán dados en el siguiente capítulo).

Los primeros ejemplos de anillos R donde se conoció que $R-\mathsf{DMod}$ es una categoría abeliana y también de Grothendieck, cumplen que $R-\mathsf{DMod}$ y $R-\mathsf{CMod}$ son categorías equivalentes. Puede pensarse que la condición de abelianidad para $R-\mathsf{DMod}$ está asociada a la existencia de una equivalencia entre las dos categorías. El siguiente ejemplo muestra un anillo R tal que $R-\mathsf{DMod}$ es abeliana (Grothendieck) y no es equivalente a $R-\mathsf{CMod}$.

Proposición 6.37 *Sea $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto numerable, y $P = \{x_i x_j : i \geq j\}$. El anillo $R = k\langle X\rangle_0/(P)$ satisface las siguientes condiciones:*

1. *Es un álgebra monomial no unitaria.*
2. *La categoría $R-\mathsf{DMod}$ es Grothendieck.*
3. *Si $\{x_{\alpha_s} : s \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de elementos de X entonces existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $0 = x_{\alpha_s} \cdots x_{\alpha_2} x_{\alpha_1}$.*
4. *La categoría $R-\mathsf{CMod}$ es 0.*
5. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple $x_1 x_2 \cdots x_n \neq 0$.*
6. *La categoría $R-\mathsf{DMod}$ no es 0.*
7. *Las categorías $R-\mathsf{DMod}$ y $R-\mathsf{CMod}$ no son equivalentes.*

Nota: El por qué de este anillo nace de la idea de anillo T-nilpotente y de los resultados [16, Corolario 3.11] y [16, Corolario 3.12].

Demostración:
La condición (1) es la definición de álgebra monomial no unitaria dada en la Sección 6.2. La condición (2) es consecuencia de (1) y de Teorema 6.24

Sea $\{x_{\alpha_n} : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de elementos de X tales que $x_{\alpha_s} \cdots x_{\alpha_2} x_{\alpha_1} \neq 0$ para cada $s \in \mathbb{N}$. Entonces por la forma de definir el conjunto P se debe cumplir que $\alpha_s < \cdots < \alpha_2 < \alpha_1$ para cada $s \in \mathbb{N}$. Obtendríamos una sucesión de números naturales estrictamente decreciente sin un mínimo, lo cual resulta imposible. Deberá existir $s \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_s = \alpha_{s+1}$, por lo que $x_{\alpha_{s+1}} \cdots x_2 x_1 = 0$ en R, que prueba (3).

La condición (3) hace que R sea un anillo T-nilpotente por la derecha. Usando [16, Corollary 3.12] se concluye que $R-\mathsf{CMod} = 0$.

Si $x_1 \cdots x_n = 0$, entonces, por Lema 6.8, $x_2 \cdots x_n = \sum_{p \in P_{x_1}} (x_1^{-1} p) a'_p$ para ciertos elementos a'_p en A. Pero $P_{x_1} = \{p \in P : x_1 \preceq p\} = \{x_1 x_1\}$, luego $x_2 \cdots x_n = (x_1^{-1} x_1 x_1) a'_{x_1 x_1} = x_1 a'_{x_1 x_1}$, es decir, $x_2 \cdots x_n - x_1 a'_{x_1 x_1} = 0$. Nuevamente por el mismo lema $x_3 \cdots x_n = \sum_{p \in P_{x_2}} (x_2^{-1} p) a'_p$. En este caso $P_{x_2} = \{p \in P : x_2 \leq p\} = \{x_2 x_2, x_2 x_1\}$, luego $x_3 \cdots x_n = x_2^{-1} x_2 x_2 a'_{x_2 x_2} + x_2^{-1} x_2 x_1 a'_{x_2 x_1} = x_2 a'_{x_2 x_2} + x_1 a'_{x_2 x_1}$. Repitiendo el proceso se llega a que $x_n = \sum_{p \in P_{x_{n-1}}} (x_{n-1}^{-1} p) a'_p$ y $P_{x_{n-1}} = \{x_{n-1} x_{n-j} : j = 1, \cdots, n-1\}$ luego $x_n = x_{n-1} a'_{x_{n-1} x_{n-1}} + \cdots + x_1 a'_{x_{n-1} x_1}$. Se llegará a que $1 = \sum_{p \in P_{x_n}} (x_n^{-1} p) a'_p$ por lo que $1 \in k\langle X \rangle_0$, lo cual es imposible. Así que $x_1 \cdots x_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, que prueba (4).

La condición (5) hace que R no sea un anillo T-nilpotente por la izquierda. Usando [16, Corollary 3.11] concluimos que $R-$DMod no es 0.

La última condición es clara porque el objeto 0 se conserva por equivalencias, y una categoría con objetos que no son cero no puede ser equivalente a otra categoría donde está únicamente el objeto cero.

□

6.7.2. Ejemplo 2.

En [11] se establece cuándo $R-$DMod y $R-$CMod son equivalentes mediante los funtores canónicos D y C. En el ejemplo anterior hemos mostrado que, en general, las categorías no son equivalentes. A continuación mostraremos un ejemplo donde sí son equivalentes pero no mediante los funtores canónicos.

Trabajaremos en el anillo $k\langle X \rangle_0$ donde X será un conjunto finito. Los elementos de X serán representados como $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_s\}$ con $s \in \mathbb{N}$.

Proposición 6.38 1. *Un R-módulo M está en $R-$*CMod *si y sólo si el homomorfismo de grupos abelianos*

$$M \to M^X$$
$$m \mapsto (xm)_{x \in X}$$

es un isomorfismo.

2. *Un R-módulo M está en $R-$*DMod *si y sólo si el homomorfismo de grupos abelianos*

$$M^X \to M$$
$$(m_x)_{x \in X} \mapsto \sum_{x \in X} x m_x$$

es un isomorfismo.

Demostración:
Vease [17, Proposición 8.15] □

Proposición 6.39 *1. Sea M un R-módulo libre de torsión, entonces $\mathsf{C}(M) = M\langle X^*\rangle$ donde $X^* = \{x^* : x \in X\}$, siendo los elementos de $M\langle X^*\rangle$ sumas finitas de elementos de la forma $x^*_{\alpha_n} \cdots x^*_1 m$ con $n \in \mathbb{N}$ y $x^*_{\alpha_j} \in X^*$ para $j = 1, \cdots, n$, y definiendo las siguientes operaciones para todo $y \in X$,*

$$yx^*_{\alpha_n} \cdots x^*_{\alpha_1} m = \begin{cases} 0 & si\ n \geq 1 \quad y\ x_{\alpha_n} \neq y \\ x^*_{\alpha_{n-1}} \cdots x^*_1 m & si\ n \geq 1 \quad y\ x_{\alpha_n} = y \\ ym & si\ n = 0 \end{cases}$$

2. *Si M es un R-módulo unitario, entonces*

$$\mathsf{D}(M) = \lim_{\leftarrow} M \otimes_R \cdots \otimes_R R \otimes_R M$$

Demostración:
Vease [17, Proposición 8.17]. $\square$

Lema 6.40 *1. Si $M \in R-\mathsf{DMod}$ entonces M es libre de torsión.*

2. *Si $M \in R-\mathsf{CMod}$ entonces M es unitario.*

Demostración:

1. Si $M \in R-\mathsf{DMod}$ entonces ϕ es un isomorfismo. Sea $m \in M$ tal que $Rm = 0$. En particular, $xm = 0$ para cada $x \in X$ por lo que $\phi((m)_{x\in X}) = \sum_{x\in X} xm = 0$. Necesariamente $m = 0$. Así M es libre de torsión.
2. Si $M \in R-\mathsf{CMod}$ entonces ψ es un isomorfismo. Sea $m \in M$ y $(m_x)_{x\in X}$ el elemento de M^X tal que $m_{x_1} = m$ y $m_x = 0$ para cada $x \neq x_1$. Existe un único $m' \in M$ tal que $(m_x)_{x\in X} = \psi(m') = (xm')_{x\in X}$, luego $m = x_1 m' \in RM$, y por tanto $M = RM$. Es decir, M es unitario.

$\square$

Este lema nos permite utilizar las fórmulas de la proposición anterior para el cálculo de $\mathsf{C}(M)$ si $M \in R-\mathsf{DMod}$ o $\mathsf{D}(M)$ si $M \in R-\mathsf{CMod}$.

Proposición 6.41 *Sea M un R-módulo cerrado entonces $\mathsf{C} \circ \mathsf{D}(M) \neq M$.*

Demostración:

$$\mathsf{D}(M) = \lim_{\leftarrow} R \otimes_R \cdots \otimes_R R \otimes_R M$$

Tenemos el homomorfismo $\nu : \mathsf{D}(M) \to M$ que es sobreyectivo por ser M R-unitario. Entonces $\mathsf{C}(\nu)$ es un isomorfismo si y sólo si $\mathsf{Ker}(\nu)$ y $\mathsf{Coker}(\nu)$ son de torsión (ver [17, Proposición 5.1]). Veamos que $\mathsf{Ker}(\nu)$ no es de torsión.

Sea $m \in M$, podemos encontrar m' en M tal que $m = x_1 m'$ y $0 = x_i m$ para $i \neq 1$. La existencia del elemento m' está garantizada por ser M un módulo cerrado. El elemento

$$(0, x_2 \otimes m', x_1 \otimes x_2 \otimes x_2^* m', \cdots, x_1 \otimes \overbrace{x_2 \otimes \cdots \otimes x_2}^{k\ veces} \otimes (x_2^*)^k m)$$

está en $\mathsf{D}(M)$ ya que $0 = x_2 m'$ y

$$x_1 \otimes \overbrace{x_2 \otimes \cdots \otimes x_2}^{k-1\ veces} \otimes x_2 (x_2^*)^k m) = x_1 \otimes \overbrace{x_2 \otimes \cdots \otimes x_2}^{k-1\ veces} \otimes (x_2^*)^{k-1} m)$$

.

Sea l el elemento anterior de $\mathsf{Ker}(\nu)$. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_1^k l \neq 0$, ya que

$$x_1^k (x_1 \otimes \overbrace{x_2 \otimes \cdots \otimes x_2}^{k\ veces} \otimes (x_2^*)^k m) = x_1 \otimes \overbrace{x_1 \otimes \cdots \otimes x_1}^{k\ veces} \otimes x_2^k (x_2^*)^k m) =$$

$$x_1 \otimes \overbrace{x_1 \otimes \cdots \otimes x_1}^{k\ veces} \otimes m)$$

Entonces la componente k de $x_1^k l$ es distinta de cero, luego $x_1^k l \neq 0$, y así l no es un elemento de torsión. $\square$

Esto prueba, como ya hemos comentando, que los funtores D y C no establecen, en general, una equivalencia de categorías entre $R-$DMod y $R-$CMod. Sin embargo, en este caso concreto, las categorías sí son equivalentes.

Proposición 6.42 *Sea X un conjunto finito entonces $k\langle X\rangle_0-$*DMod *es equivalente a $k\langle X\rangle_0-$*CMod.

Demostración:
Sea M un $k\langle X\rangle_0$-módulo firme. Denotamos por $\phi : M^X \longrightarrow M$ el isomorfismo

$$((m_x)_{x\in X})\phi = \sum_{x\in X} x m_x$$

proporcionado por Proposición 6.38. Para cada $x \in X$, escribiremos $\pi_x : M^X \to M$ e $i_x : M \to M^X$ para referirnos a la proyecciones e inclusiones canónicas.

Vamos a dotar a M de estructura de $k\langle X\rangle_0$-módulo cerrado como sigue: dado $m \in M$ y $x \in X$, definimos $x \cdot m = (m)\phi^{-1} * \pi_x$. Con este producto M es, efectivamente, un módulo cerrado, pues si m es un elemento de M tal que $0 = (x \cdot m)_{x\in X} = ((m)\phi^{-1} * \pi_x)_{x\in X}$, entonces $0 = (m)\phi^{-1} * \pi_x$ para cada $x \in X$, luego $0 = (m)\phi^{-1}$, y como ϕ es un isomorfismo, debe ser $m = 0$. Además, si $(m_x)_{x\in X}$ es un elemento de M^X, tomamos $m = \sum_{x\in X} x m_x$. De este modo $((m_x)_{x\in X})\phi = \sum_{x\in X} x m_x = m$, luego $(m)\phi^{-1} = (m_x)_{x\in X}$. Entonces, $(x \cdot m)_{x\in X} = ((m)\phi^{-1} * \pi_x)_{x\in X} = (((m_z)_{z\in X})\pi_x)_{x\in X} = (m_x)_{x\in X}$. Siguiendo el primer apartado de la Proposición 6.38, concluimos que M con el producto $\cdot$ es un módulo cerrado.

Definimos el funtor $F : k\langle X\rangle_0-\mathsf{DMod} \longrightarrow k\langle X\rangle_0-\mathsf{CMod}$ por $F(M) = (M, \cdot)$ para $M \in k\langle X\rangle_0-\mathsf{DMod}$ y $F(f) = f$ para cada $k\langle X\rangle_0$-homomorfismo $f : M \to N$ en $k\langle X\rangle_0-\mathsf{DMod}$. Ya hemos visto que $(M, \cdot)$ pertenece a $k\langle X\rangle_0-\mathsf{CMod}$, faltaría ver que $f : (M, \cdot) \longrightarrow (N, \cdot)$ es un $k\langle X\rangle_0$-homomorfismo con el producto $\cdot$. Dados $m \in M$ y $x \in X$, se tiene que $x \cdot (m)f = ((m)f)\phi^{-1} * \pi_x$. Si $m = \sum_{x\in X} xm_x$, entonces $(m)\phi^{-1} = (m_x)_{x\in X}$, luego $x \cdot m = m_x$, y como f es un homomorfismo se tiene que $(m)f = (\sum_{x\in X} xm_x)f = \sum_{x\in X} x(m_x)f$, de donde $x \cdot (m)f = (m_x)f$. Utilizando estas igualdades se sigue que $(x \cdot m)f = (m_x)f = x \cdot (m)f$, por lo que f es un $k\langle X\rangle_0$-homomorfismo para el nuevo producto definido.

Es claro que F es un funtor fiel, pues si $0 = F(f) = f$, para algún homomorfismo $f : M \longrightarrow N$, entonces $f = 0$. Por otro lado sea $f : F(M) \longrightarrow F(N)$ un homomorfismo en $k\langle X\rangle_0-\mathsf{CMod}$. Este homomorfismo es de la forma $f : (M, \cdot) \longrightarrow (N, \cdot)$. Veamos que $f : M \longrightarrow N$ es también un homomorfismo. Por la forma de definir el producto $\cdot$ para cada $m \in M$ y $x \in X$ se tiene que $x \cdot (xm) = m$ y si $y \in X$ con $y \neq x$, entonces $y \cdot (xm) = 0$. Así,

$$x \cdot x(m)f = (m)f = (x \cdot xm)f = x \cdot (xm)f$$

$$y \cdot x(m)f = 0 = (y \cdot xm)f = y \cdot (xm)f$$

donde se ha utilizado en la última igualdad que f es un homomorfismo. Como estas igualdades permanecen fijados un $x \in X$ y para cada $y \in X$, siendo $(N, \cdot)$ un módulo de $k\langle X\rangle_0-\mathsf{CMod}$ se sigue que $x(m)f = (xm)f$ para cada $m \in M$ y $x \in X$. Luego $f : M \to N$ es un homomorfismo en $k\langle X\rangle_0-\mathsf{DMod}$, y $F(f) = f$. Concluimos que el funtor F es un funtor pleno.

Además, F es un funtor representativo. Si $M \in k\langle X\rangle_0-\mathsf{CMod}$, y $\psi : M \longrightarrow M^X$ es el isomorfismo proporcionado por la Proposición 6.38, definimos un producto $*$ tal que $(M, *)$ sea un $k\langle X\rangle_0$-módulo firme como sigue: dado $m \in M$ y $y \in X$, hacemos

$$y * m = \psi^{-1}((m)i_y)$$

Veamos que $\phi : (M, *)^X \longrightarrow (M, *)$ es un isomorfismo. Si $0 = \phi((m_x)_{x\in X}) = \sum_{x\in X} x * m_x$ entonces $0 = \sum_{x\in X} x * m_x = \sum_{x\in X} \psi^{-1}((m_x)i_x) = \psi^{-1}(\sum_{x\in X}(m_x)i_x) = \psi^{-1}((m_x)_{x\in X})$. Como ψ es un isomorfismo, entonces $0 = (m_x)_{x\in X}$, y ϕ es inyectiva. Sea, ahora, $m \in M$ y definimos $m_x = ((m)\psi)\pi_x$, entonces $((m_x)_{x\in X})\phi = \sum_{x\in X} x * m_x = \sum_{x\in X}((m_x)i_x)\psi^{-1} = (\sum_{x\in X}(((m)\psi)\pi_x)i_x)\psi^{-1} = ((m)\psi)\psi^{-1} = m$, por lo que ψ es sobreyectiva. Concluimos que ψ es un isomorfismo y que $(M, *)$ es un $k\langle X\rangle_0$-módulo firme.

Falta comprobar que $M = F((M, *)) = ((M, *), \cdot)$. Dados $m \in M$ y $x \in X$, se tiene que

$$x \cdot m = ((m)\phi^{-1})\pi_x$$

Si $m = ((m_y)_{y\in X})\phi = \sum_{y\in X} y * m_y = \sum_{y\in X}((m_y)i_y)\psi^{-1}$, entonces $((m)\phi^{-1})\pi_x = m_x$. Pero, desarrollando más la igualdad, se sigue que

$$m = \sum_{y\in X}((m_y)i_y)\psi^{-1} = (\sum_{y\in X}(m_y)i_y)\psi^{-1} = ((m_y)_{y\in X})\psi^{-1}$$

ψ es el isomorfismo que hace que M sea un $k\langle X\rangle_0$-módulo cerrado con el producto natural de M. De este modo, podemos concluir que

$$(m_y)_{y\in X} = (m)\psi = (ym)_{y\in X}$$

Es decir, $m_y = ym$ para cada $y \in X$. Utilizando las igualdades anteriores deducimos que

$$x \cdot m = m_x = xm$$

y así, $M = F((M, *))$.

□

Capítulo 7

La Categoría de Módulos Unitarios

A lo largo de esta memoria hemos estudiado fundamentalmente la categoría de módulos firmes para un anillo asociativo R. Existe una elección alternativa que es la categoría de módulos unitarios. En este capítulo vamos a hacer algunas consideraciones sobre esta elección y comprobaremos que si la categoría de módulos firmes no es abeliana, la de módulos unitarios tampoco lo es, lo cual nos dirá que la elección de la categoría de módulos unitarios no es una alternativa para solucionar el problema de la no abelianidad de la categoría de módulos firmes.

Veremos también que la categoría de módulos unitarios y la de módulos firmes coinciden en algunos casos importantes en lo cuales se hace la elección de la categoría de módulos unitarios para el estudio del anillo R.

7.1. Monomorfismos y núcleos

Los monomorfismos juegan un papel importante en la categoría de módulos firmes, pues probar que la categoría de módulos firmes es abeliana es equivalente a probar que todo monomorfismo es un núcleo. No obstante, hasta el momento no ha sido posible asegurar que la categoría sea abeliana en general, por lo que desconocemos si todo monomorfismo es un núcleo. Esto nos ha llevado a estudiar cómo son los monomorfismos y los núcleos en la categoría, para poder establecer posibles relaciones entre ellos, tal y como puede verse en Capitulo 3. A lo largo del capítulo trabajaremos también sobre la categoría de R-módulos unitarios.

Proposición 7.1 *Sea $\mathcal{U}$ la categoría de módulos unitarios. Sea $f : M \to N$ en $\mathcal{U}$ un morfismo, $\mathsf{Im}(f)$ la imagen de f calculada en $A-$*Mod, *$N/\mathsf{Im}(f)$ calculado en $A-$*Mod *y $p : N \to N/\mathsf{Im}(f)$ la proyección canónica. Entonces f es un núcleo en $\mathcal{U}$ si y sólo si f es el núcleo de p.*

Demostración:
Si $f : M \to N$ está en $\mathcal{U}$ entonces $\mathsf{Im}(f)$ es R-unitario. Al ser N unitario, siempre se tendrá que $N/\mathsf{Im} f$ es unitario. Esto prueba que si f está en $\mathcal{U}$ entonces p también está en $\mathcal{U}$.

Supongamos que f es el núcleo de $h : N \to C$, entonces $fh = 0$ e $Im(f) \subset \mathsf{Ker}(h)$ calculados estos objetos en $A-\mathsf{Mod}$. Probaremos que f es el núcleo de p. Si $g : L \to N$ cumple que $gp = 0$, entonces $\mathsf{Im}(g) \subset \mathsf{Ker}(p) = \mathsf{Im} f \subset \mathsf{Ker}(h)$. Así, $gh = 0$ y entonces, usando que f es el núcleo de h, existe un único morfismo $\overline{g} : L \to M$ tal que $\overline{g} f = g$. Por lo que f es el núcleo de p. □

Proposición 7.2 *Sea $f : M \to N$ un homomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$. Son equivalente:*

1. *f es un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$.*
2. *f es un monomorfismo en la categoría de R-módulos unitarios.*
3. *$\mathsf{Ker}(f)$ calculado en $A-\mathsf{Mod}$ es un R-módulo evanescente.*

Demostración:
La equivalencia entre (1) y (3) es [18, Proposition 12.5] y puede verse en [17, Proposición 5.11], y en Capítulo 3.

Supongamos (3) y sea $h : U \to M$ un homomorfismo en la categoría de R-módulos unitarios tal que $hf = 0$. Entonces $\mathsf{Im}(h) \subset \mathsf{Ker}(f)$, pero $\mathsf{Im}(h)$ es unitario y $\mathsf{Ker}(f)$ es evanescente, por lo que $\mathsf{Im}(h)$ debe ser cero, luego $h = 0$. Esto prueba que f es un monomorfismo en la categoría de R-módulos unitarios (2). La categoría de módulos firmes es una subcategoía de la categoría de módulos unitarios, así que (2) implica (1) de forma trivial. □

Nótese que si el monomorfismo de la proposición se considera en la categoría de R-módulos unitarios no podemos asegurar que sea un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$. De hecho, no podemos asegurar que sea un homomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$, ya que los módulos unitarios considerados para formar el homomorfismo no tienen por qué ser firmes. Más adelante volveremos a preguntarnos sobre la relación entre módulos unitarios y firmes, pero ahora podemos dar un resultado alternativo cuando el monomorfismo parte de la categoría de R-módulos unitarios.

Proposición 7.3 *Sea $f : M \to N$ un homomorfismo en la categoría de R-módulos unitarios entonces f es un monomorfismo si y sólo si $\mathsf{D}(f) : \mathsf{D}(M) \to \mathsf{D}(N)$ es un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$.*

Demostración:
Supongamos que f es un monomorfismo. Probaremos que $\mathsf{Ker}(\mathsf{D}(f))$ es evanescente. Sea σ un soporte y $g : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to \mathsf{D}(M)$ un homomorfismo tal que $g * \mathsf{D}(f) = 0$. Entonces $0 = g * \mathsf{D}(f) * \mu_N = g * \mu_M * f$. Como f es un monomorfismo, se tiene que $\mathsf{Ker}(f)$ es evanescente, luego $g * \mu_M = 0$. Nuevamente, $\mathsf{Ker}(\mu_M)$ es evanescente, por lo que $g = 0$. Concluimos que $\mathsf{Ker}(\mathsf{D}(f))$ es evanescente y, por tanto, un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$.

Supongamos, ahora, que $\mathsf{D}(f) : \mathsf{D}(M) \to \mathsf{D}(N)$ es un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$. Entonces la proposición anterior asegura que $\mathsf{Ker}(\mathsf{D}(f))$ es evanescente. Probaremos que $\mathsf{Ker}(f)$ es evanescente. Sea σ un soporte unitario y $g : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to M$ un homomorfismo tal que $g * f = 0$. Existe un único $\overline{g} : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to \mathsf{D}(M)$ tal que $\overline{g} * \mu_M = g$. Entonces $0 = g * f = \overline{g} * \mu_M * f = \overline{g} * \mathsf{D}(f) * \mu_N$. Como $\mathsf{Ker}(\mu_N)$ y $\mathsf{Ker}(\mathsf{D}(f))$ son evanescentes se sigue que $\overline{g} = 0$ y, de aquí, $g = 0$. Entonces $\mathsf{Ker}(f)$ es evanescente y f es un monomorfismo. □

Corolario 7.4 *Si existe un monomorfismo f que no es un núcleo en $R-\mathsf{DMod}$, entonces f es un monomorfismo que no es un núcleo en la categoría de R-módulos unitarios. En particular, si $R-\mathsf{DMod}$ no es abeliana entonces la categoría de R-módulos unitarios no es abeliana.*

Demostración:
Si f es un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$ entonces f es un monomorfismo en la categoría de R-módulos unitarios por la proposición 7.2. Si f fuera un núcleo en la categoría de R-módulos unitarios entonces sería un núcleo en $R-\mathsf{DMod}$, ya que $R-\mathsf{DMod}$ es una subcategoría de la categoría de R-módulos unitarios. Pero, por hipótesis, f no es un núcleo en $R-\mathsf{DMod}$, por lo que tampoco será un núcleo en la categoría de R-módulos unitarios.

Si $R-\mathsf{DMod}$ no es abeliana existe un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$ que no es un núcleo. El argumento anterior asegura que también será un monomorfismo que no es un núcleo en la categoría de R-módulos unitarios, por lo que no es abeliana.

□

7.2. La categoría de módulos unitarios

Hemos visto que las dos categorías (de módulos unitarios y módulos firmes) tienen igual tipo de monomorfismos: homomorfismos de A-módulos con núcleo calculado en $A-\mathsf{Mod}$ evanescente. En esta sección estudiaremos cuándo la categoría de R-módulos unitarios es abeliana y veremos que, en ése caso, es una categoría de módulos firmes. Tendrán un papel importante los anillos xst. La siguiente definición puede encontrarse en [10].

Definición 7.5 *Un anillo R no unitario se dice que es un anillo xst-derecha (izquierda) si todo submódulo de un R-módulo por la derecha (izquierda) unitario es también unitario.*

En dicho trabajo pueden encontrarse caracterizaciones de este tipo de anillos. Aquí estableceremos una nueva caracterización que muestra la relación que mantienen con los módulos firmes y cómo es determinante para asegurar la abelianidad de la categoría de módulos unitarios.

Proposición 7.6 *Sea R un anillo, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *R es un anillo xst-izquierda.*
2. *Todo R-módulo unitario es firme.*

Demostración:

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea M un R-módulo por la izquierda unitario y consideramos el homomorfismo $\mu_M : R \otimes_A M \to M$. Como M es unitario, μ_M es sobreyectiva ya que $\mathsf{Im}(\mu_M) = RM = M$. Además, $R \otimes_A M$ es R-unitario pues cada $m \in M$ puede escribirse como $m = \sum_I r_i m_i$ (con I un conjunto finito) y dado $r \in R$ podemos escribir $r \otimes m = r \otimes \sum_I r_i m_i = \sum_I r r_i \otimes m = r(\sum_I r_i \otimes m)$ que es un elemento de $R(R \otimes_A M)$. Los elementos de $R \otimes_A M$ son sumas de elementos de la forma $r \otimes m$ con $r \in R$ y $m \in M$, así $R \otimes_A M = R(R \otimes_A M)$. Como $\mathsf{Ker}(\mu_M)$ es un submódulo de $R \otimes_A M$ por (1) se tendrá que $\mathsf{Ker}(\mu_M)$ es unitario.

Sea $r \in R$ y $\sum_I r_i \otimes m_i \in \mathsf{Ker}(\mu_M)$, entonces $r(\sum_I r_i \otimes m_i) = \sum_I r r_i \otimes m_i = r \otimes (\sum_I r_i m_i) = r \otimes \mu_M(\sum_I r_i \otimes m_i) = 0$ que prueba que $R(\mathsf{Ker}(\mu_M)) = 0$. Entonces $0 =$

$R(\mathsf{Ker}(\mu_M)) = \mathsf{Ker}(\mu_M)$. Concluimos que μ_M es inyectiva y por tanto un isomorfismo. M es un R-módulo firme.

$(2) \Rightarrow (1)$ Sea M un R-módulo unitario y K un submódulo de M. El módulo M/K es también unitario y por (2) se tiene que M y M/K son módulos firmes. Utilizando 2.19 se concluye que K es R-unitario.

□

Proposición 7.7 *Si R es un anillo xst-izquierda entonces $R-\mathsf{DMod}$ es abeliana.*

Demostración:
Sea $f : M \to N$ un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$, entonces $\mathsf{Ker}(f)$ es un módulo evanescente y, al ser un submódulo de M que es unitario y R un anillo xst-izquierda, también será unitario. Necesariamente $\mathsf{Ker}f = 0$ y f es una aplicación inyectiva. Así f es el núcleo del homomorfismo $p : N \to N/\mathsf{Im}(f)$ en $A-\mathsf{Mod}$.

Para cualquier A-módulo L (en particular, para los R-módulos firmes) y cualquier homomorfismo $h : L \to N$ con $\mathsf{Im}(h) \subset \mathsf{Im}(f)$ existirá un único homomorfismo $\overline{g} : L \to M$ tal que $f \circ \overline{g} = g$. Esto prueba que todo monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$ es un núcleo y $R-\mathsf{DMod}$ es una categoría abeliana. □

Teorema 7.8 *Sea R un anillo, entonces la categoría de R-módulos por la izquierda unitarios es abeliana si y sólo si R es un anillo xst-izquierda.*

Demostración:
Supongamos que la categoría de módulos unitarios es abeliana y sea M un R-módulo unitario. Entonces el homomorfismo $\nu_M : \mathsf{D}(M) \to M$ es un monomorfismo en la categoría de módulos unitarios pues $\mathsf{Ker}(\nu_M)$ es un módulo evanescente. Tomamos $id_M : M \to M$ el homomorfismo identidad, entonces $\mathsf{Im}(id_M) = \mathsf{Im}(\nu_M)$ (ya que $\mathsf{Im}(\nu_M) = M$ por ser M unitario) y debe existir $g : M \to \mathsf{D}(M)$ tal que $id_M = g * \nu_M$.

Tomamos el homomorfismo $id_{\mathsf{D}(M)} - \nu_M * g : \mathsf{D}(M) \to \mathsf{D}(M)$, entonces $(id_{\mathsf{D}(M)} - \nu_M * g) * \nu_M = \nu_M - \nu_M * g * \nu_M = \nu_M - \nu_M = 0$, es decir, $\mathsf{Im}(id_{\mathsf{D}(M)} - \nu_M * g) \subset \mathsf{Ker}(\nu_M)$. Dado que $\mathsf{Im}(id_{\mathsf{D}(M)} - \nu_M * g)$ es unitario y $\mathsf{Ker}(\nu_M)$ es evanescente se deduce que $id_{\mathsf{D}(M)} - \nu_M * g = 0$, o, equivalente, $id_{\mathsf{D}(M)} = \nu_M * g$. Concluimos que ν_M es una aplicación inyectiva y, por tanto, un isomorfismo. M debe ser un módulo firme.

Si R es un anillo xst-izquierda entonces la categoría de módulos unitarios coincide con la categoría de módulos firmes (todo módulo unitario es un módulo firme). La proposición anterior muestra que esta última es abeliana cuando R es un anillo xst-izquierda. □

Las únicas categorías de R-módulos unitarios abelianas son aquellas que provienen de un anillo R xst-izquierda. Los módulos firmes y unitarios coinciden. Este resultado nos permite pensar que la categoría de módulos unitarios es una categoría no del todo buena, a la que debemos asegurar que sus módulos son también firmes para que tenga buenas propiedades, en particular para que sea abeliana.

Ejemplo 7.9 *Sea R un anillo no unitario tal que R es un ideal bilátero de un anillo unitario regular A. Cada R-módulo será un módulo plano en $A-\mathsf{Mod}$. En particular, todo R-módulo unitario será un R-módulo firme. Así que R es un anillo xst.*

Capítulo 8

Contraejemplos

8.1. Introducción

El estudio de la categoría de módulos firmes plantea, de entrada, una cuestión natural. ¿Tiene estructura de categoría abeliana? Son conocidos ejemplos de anillos donde la categoría es abeliana, como son el caso de las álgebras monomiales estudiadas anteriormente, o los anillos tensor-idempotentes estudiados en [11]. Sin embargo, no ha sido posible establecer si la categoría de módulos firmes es siempre abeliana [20].

A la hora de afrontar este problema resulta crucial el poder asegurar si todo monomorfismo es núcleo de su conúcleo, o, equivalente, que todo monomorfismo sea un núcleo. En el Teorema 5.20 se han establecido, además, condiciones necesarias que debe cumplir la categoría para ser abeliana.

En la primera sección daremos una respuesta negativa sobre si la categoría de módulos firmes es siempre abeliana. El anillo considerado nos permitirá encontrar un monomorfismo de módulos firmes que no va a ser un núcleo en la categoría de módulos firmes.

En la segunda sección probaremos que el funtor límite directo no es en general exacto en la categoría de módulos firmes. Los resultados del Capítulo 5 nos permitirán asegurar que tampoco en este caso la categoría es abeliana.

8.2. La categoría de módulos firmes no es siempre abeliana

Sea k un cuerpo y $X = \{x, y, z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots\}$ un conjunto numerable. Sea $S = k\langle X\rangle_0$ y $B = k\langle X\rangle$. Definimos el conjunto P como

$$P = \{xz_1\} \cup \{xz_n - z_{n-1}y : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} = \{xz_1, xz_2 - z_1y, xz_3 - z_2y, xz_4 - z_3y, \cdots\}$$

El ideal de B generado por P será I, es decir, $I = BPB$. Denotaremos por $A = B/I$ y $R = S/I$. Sea $\pi : B \to A$ la proyección canónica. Probaremos que $R-\mathsf{DMod}$ no es una categoría abeliana.

Lema 8.1 *El anillo A es graduado, es decir, $A = \coprod_{n\geq 0} k\pi(X)^n$ y $R = \coprod_{n\geq 1} k\pi(X)^n$.*

Demostración:
Es claro que $A = \sum_{n\geq 0} k\pi(X)^n$. Debido a los elementos que generan I, las relaciones que se satisfacen en A no varían los grados, salvo los monomios que contienen a xz_1 que se hacen cero. Así, dados $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que $\pi(X)^m \cap \pi(X)^n = 0$. $\square$

Lema 8.2 *(a) Sea a un elemento de A, entonces*

(1) Si $a\pi(x) = 0$, entonces $a = 0$.

(2) Si $a\pi(y) = 0$, entonces $a = 0$.

(3) Si $a\pi(z_n) = 0$, entonces existe $a' \in A$ tal que $a = a'\pi(x)^n$.

(b) Sea $(a_\alpha)_{\alpha\in X} \in A^{(X)}$ tales que $\sum_{\alpha\in X} a_\alpha\pi(\alpha) = 0$, entonces $a_x = 0$ y podemos encontrar elementos $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{(\mathbb{N})}$ tales que $a_y = -\sum_{n\geq 2} a'_n\pi(z_{n-1})$ y $a_{z_n} = a'_n\pi(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

El ideal I está generado por P y es de la forma BPB. Obsérvese que B puede descomponerse como $S + k$. Entonces $BPB = BP(S + k) = BPS + BPk = BPBX + BP$ donde se ha tenido en cuenta que $S = BX$ y k conmuta con los elementos de B siendo, además, $Bk = B$.

Utilizando la igualdad $I = BPB = BPBX + BP = IX + BP$ un elemento genérico de I puede escribirse en la forma:

$$u_x x + u_y y + \sum_{n\in\mathbb{N}} u_{z_n} z_n + b_1 x z_1 + \sum_{n\geq 2} b_n(xz_n - z_{n-1}y) =$$

$$u_x x + (u_y - \sum_{n\geq 2} b_n z_{n-1})y + \sum_{n\geq 1}(u_{z_n} + b_n x)z_n$$

donde $u_\alpha \in I$ para cada $\alpha \in X$ y $b_n \in B$ para cada $n \in \mathbb{N}$, siendo todos ceros salvo un número finito.

(a) Sea $a \in A$ y tomamos $b \in B$ tal que $a = \pi(b)$

(1) Si $a\pi(x) = 0$, entonces $\pi(bx) = 0$ por lo que $bx \in I$. Usando la descomposición anterior, $b = u_x$ con $u_x \in I$, así $a = \pi(b) = \pi(u_x) = 0$.

(2) Si $a\pi(y) = 0$, entonces $0 = \pi(b)\pi(y) = \pi(by)$ por lo que $by \in I$. Usando otra vez la descomposición anterior se obtiene que $b = u_y - \sum_{n\geq 2} b_n z_{n-1}$ y $u_{z_n} + b_n x = 0$ para $n \geq 1$. Entonces $0 = \pi(u_{z_n} + b_n x) = \pi(u_{z_n}) + \pi(b_n x) = \pi(b_n)\pi(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ ya que $0 = \pi(u_{z_n})$ al ser u_{z_n} un elemento de I. Usando (1) obtenemos que $\pi(b_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $a = \pi(b) = \pi(u_y) - \sum_{n\geq 2} \pi(b_n)\pi(z_{n-1}) = 0$.

(3) Haremos la prueba por inducción sobre n.
Si $0 = a\pi(z_1) = \pi(b)\pi(z_1)$, entonces $bz_1 \in I$ y así $b = u_{z_1} + b_1 x$. Como $u_{z_1} \in I$ se tiene que $\pi(u_{z_1}) = 0$ luego $\pi(b) = \pi(b_1)\pi(x)$.

Supongamos que hemos probado el resultado para n y que $a\pi(z_{n+1}) = 0$. Entonces $bz_{n+1} \in I$ y usando la descomposición del ideal I obtenemos que $b = u_{z_{n+1}} + b_{n+1}x$. Entonces

$$0 = a\pi(z_{n+1}) = \pi(u_{z_{n+1}} + b_{n+1}x)\pi(z_{n+1}) =$$
$$\pi(b_{n+1})\pi(xz_{n+1}) = \pi(b_{n+1})\pi(z_n y) = \pi(b_{n+1}z_n)\pi(y)$$

donde hemos utilizado que $\pi(xz_{n+1}) = \pi(z_n y)$ al ser $xz_{n+1} - z_n y$ un elemento de I.

Usando (2) obtenemos que $0 = \pi(b_{n+1}z_n) = \pi(b_{n+1})\pi(z_n)$ y por hipótesis de inducción podemos decir que $\pi(b_{n+1}) = a'\pi(x)^n$ para algún $a' \in A$, entonces $a = \pi(b) = \pi(u_{z_{n+1}} + b_{n+1}x) = \pi(b_{n+1})\pi(x) = a'\pi(x)^{n+1}$.

(b) Sean $b_x, b_y, b_{z_n} \in B$, todos cero salvo un número finito, tales que $a_x = \pi(b_x)$, $a_y = \pi(b_y)$ and $a_{z_n} = \pi(b_{z_n})$. Entonces $\pi(b_x x + b_y y + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_{z_n} z_n) = a_x\pi(x) + a_y\pi(y) + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{z_n}\pi(z_n) = 0$ por lo que $b_x x + b_y y + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_{z_n} z_n \in I$ y podemos encontrar $u_x, u_y, u_{z_n} \in I$ y $b'_n \in B$ tales que $b_x = u_x$, $b_y = u_y - \sum_{n\geq 2} b'_n z_{n-1}$ y $b_{z_n} = u_{z_n} + b'_n x$. Sea $a'_n = \pi(b'_n)$, entonces

$$\begin{aligned} a_x &= \pi(b_x) = \pi(u_x) = 0. \\ a_y &= \pi(b_y) = \pi(u_y) - \sum_{n\geq 2} \pi(b'_n)\pi(z_{n-1}) = -\sum_{n\geq 2} a'_n\pi(z_{n-1}). \\ a_{z_n} &= \pi(b_{z_n}) = \pi(u_{z_n}) + \pi(b'_n)\pi(x) = a'_n\pi(x). \end{aligned}$$

□

Definimos los soportes unitarios σ y τ en la forma

$$\tau = \{x^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\} = \{1, x, xx, xxx, \cdots\}$$

$$\sigma = \{y^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\} = \{1, y, yy, yyy, \cdots\}$$

y la aplicación $f : \langle\langle\tau\rangle\rangle \to \langle\langle\sigma\rangle\rangle$ dada por

$$(\langle \underline{z} \rangle_\tau) f = \begin{cases} 0 & \textbf{si} \quad \overline{z} = 1 \\ \pi(z_n)\langle \underline{y^n} \rangle_\sigma & \textbf{si} \quad \overline{z} = x^n \end{cases}$$

En $\langle\langle\tau\rangle\rangle$ se tienen las relaciones $\langle 1\rangle_\tau = \pi(x)\langle \underline{x} \rangle_\tau$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\langle \underline{x^n} \rangle_\tau = \pi x \langle \underline{x^{n+1}} \rangle_\tau$. De forma análoga, en σ se cumple $\langle 1\rangle_\sigma = \pi(y)\langle \underline{y} \rangle_\sigma$ y $\langle \underline{y^n} \rangle_\sigma = \pi(y)\langle \underline{y^{n+1}} \rangle_\sigma$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 8.3 *Con la definición anterior f es un homomorfismo en $R-$DMod.*

Demostración:
Debemos probar que las relaciones en $\langle\langle\tau\rangle\rangle$ se conservan por f. Utilizando que $xz_1 \in I$ y, por tanto, $\pi(xz_1) = 0$, entonces

$$\pi(x)(\langle x \rangle_\tau) f = \pi(x)(\pi(z_1)\langle y \rangle_\sigma) = 0 = (\langle 1 \rangle_\tau) f$$

También $xz_{n+1} - z_n y \in I$, por lo que $\pi(xz_{n+1}) = \pi(z_n y)$, y entonces

$$\pi(x)(\langle x^{n+1}\rangle_\tau)f = \pi(x)(\pi(z_{n+1})\langle y^{n+1}\rangle_\sigma) = \pi(z_n y)\langle y^{n+1}\rangle_\sigma =$$
$$\pi(z_n)\pi(y)\langle y^{n+1}\rangle_\sigma = \pi(z_n)\langle y^n\rangle_\sigma = (\langle x^n\rangle_\tau)f.$$

□

En los siguientes resultados estudiamos el núcleo de f para conseguir probar que f es un monomorfismo en $R-$DMod.

Lema 8.4 *Sea $m \in \langle\langle\tau\rangle\rangle$ con $(m)f = 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y $a \in A$ tales que $m = a\pi(x)^n\langle \underline{x^n}\rangle_\tau$.*

Demostración:
Como $m \in \langle\langle\tau\rangle\rangle$ podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ y $r \in R$ tales que $m = r\langle \underline{x^n}\rangle_\tau$. Entonces $0 = (m)f = r(\langle \underline{x^n}\rangle_\tau)f = r\pi(z_n)\langle \underline{y^n}\rangle_\sigma$. Entonces, usando Proposición 2.28, podemos encontrar $t \in \mathbb{N}$ con $0 = r\pi(z_n)\pi(y^t) = r\pi(z_n y^t)$. Usando ahora el Lema 8.2 de forma reiterada para la igualdad $0 = r\pi(z_n)\pi(y)^t$ obtenemos que $r\pi(z_n) = 0$ y así $r = a\pi(x)^n$ para algún $a \in A$. □

Corolario 8.5 *Sea $m \in \langle\langle\tau\rangle\rangle$ con $0 = (m)f$, entonces existe $a \in A$ tal que $m = a\langle 1\rangle_\tau$.*

Demostración:
Sabemos, por la proposición anterior, que existe $a \in A$ tal que $m = a\pi(x)^x\langle \underline{x^n}\rangle_\tau$. Pero $\pi(x)^n\langle \underline{x^n}\rangle_\tau = \langle 1\rangle_\tau$, luego $m = a\langle 1\rangle_\tau$. □

Corolario 8.6 *Los A-módulos* Ker$f$ *y A son isomorfos. En particular, f es un monomorfismo en $R-$*DMod*.*

Demostración:
Sea $\phi : A \to$ Ker$f$ la aplicación dada por $(a)\phi = a\langle 1\rangle_\tau$. El corolario anterior establece que ϕ es sobreyectiva. Además, si $0 = (a)\phi = a\langle 1\rangle_\tau$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 = a\pi(x)^n$. Usando Lema 8.2 se obtiene que $a = 0$ y así $m = 0$.

A es un R-módulo evanescente porque $\cap_{n\in\mathbb{N}} R^n A = 0$ ya que los elementos de A deben tener un grado finito. Entonces Ker$f$ calculado en $R-$Mod es un R-módulo evanescente, por lo que f es un monomorfismo en $R-$DMod. □

Proposición 8.7 *El A-módulo A satisface*

$$\mathsf{U}\left(\frac{\varprojlim \frac{A}{R^n A}}{A}\right) \neq 0$$

Demostración:
Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$a_n = \pi(x) + \pi(x)^2 + \cdots + \pi(x)^{n-1}$$

El elemento $(a_n + R^nA)_{n\in\mathbb{N}}$ está en $\varprojlim \frac{A}{R^nA}$ porque $a_n - a_{n+1} = -\pi(x)^n \in R^nA$, así $a_n + R^nA = a_{n+1} + R^nA$ in A/R^nA. Supongamos que $(a_n + R^nA)_{n\in\mathbb{N}} + A = 0$ en $\dfrac{\varprojlim \frac{A}{R^nA}}{A}$ entonces existe un elemento a en A tal que $a_n - a \in R^nA$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Podríamos encontrar así elementos b_n en R^nA con grado mayor o igual que n para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$a = a_n + b_n = \pi(x) + \pi(x)^2 + \cdots + \pi(x)^{n-1} + b_n$$

De este modo a tendría representaciones de todos los grados, lo cual contradice que a deba tener un grado finito. Deducimos que el elemento $(a_n + R^nA)_{n\in\mathbb{N}} + A$ no es cero en $\dfrac{\varprojlim \frac{A}{R^nA}}{A}$.

Probaremos que además el elemento anterior se encuentra en la parte unitaria de $\dfrac{\varprojlim \frac{A}{R^nA}}{A}$. Obsérvese que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\pi(x)a_n = \pi(x)(\pi(x) + \pi(x)^2 + \cdots + \pi(x)^{n-1}) = \pi(x)^2 + \pi(x)^3 + \cdots + \pi(x)^n = a_{n+1} - \pi(x)$$

Entonces

$$\pi(x)((a_n + R^nA)_{n\in\mathbb{N}} + A) = (a_{n+1} - \pi(x) + R^nA)_{n\in\mathbb{N}} + A = (a_{n+1} + R^nA)_{n\in\mathbb{N}} + A =$$

$$(\pi(x)+\pi(x)^2+\cdots+\pi(x)^{n-1}+\pi(x)^n+R^nA)_{n\in\mathbb{N}}+A = (\pi(x)+\pi(x)^2+\cdots+\pi(x)^{n-1}+R^nA)_{n\in\mathbb{N}}+A =$$

$$(a_n + R^nA)_{n\in\mathbb{N}} + A$$

Es decir $(a_n + R^nA)_{n\in\mathbb{N}} + A = \pi(x)((a_n + R^nA)_{n\in\mathbb{N}} + A))$ que, reiterando la igualdad, se obtiene $(a_n + R^nA)_{n\in\mathbb{N}} + A = \pi(x)^t((a_n + R^nA)_{n\in\mathbb{N}} + A))$. Así $(a_n + R^nA)_{n\in\mathbb{N}} + A$ es un elemento no nulo en la parte unitaria de $\dfrac{\varprojlim \frac{A}{R^nA}}{A}$. $\square$

Teorema 8.8 *Sea k un cuerpo y $X = \{x, y, z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots\}$ un conjunto numerable. Sea P el conjunto de palabras sobre X formado por $\{xz_1\} \cup \{xz_n - z_{n-1}y : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ e I el ideal de $k\langle X\rangle_0$ generado por P. Finalmente, sea R el anillo no unitario $k\langle X\rangle_0/I$, entonces $R-$*DMod *no es una categoría abeliana.*

Demostración:
Utilizando la Proposición 8.7 y el Corolario 3.6, el homomorfismo f es un monomorfismo en la categoría $R-$DMod que no es un núcleo. $\square$

Corolario 8.9 *Con el anillo R anterior, existe un R-módulo unitario que no es un módulo firme. Más concretamente,* $\mathsf{Im} f$ *es un módulo unitario que no es firme.*

Demostración:
Supongamos que todo módulo unitario es firme, entonces el anillo R es un anillo xst-izquierda y por el Corolario 7.7 la categoría de módulos firmes es abeliana, lo que contradice el teorema anterior. Así, debe existir un módulo unitario que no es firme.

$\mathsf{Im} f$ es un módulo unitario por ser imagen de un módulo unitario. Siguiendo la Proposición 2.19, si $\mathsf{Im} f$ fuera un módulo firme entonces $\mathsf{Ker} f$ sería un módulo unitario, que contradice que f sea un monomorfismo como establece el Corolario 8.6. □

Hemos probado que f es un monomorfismo que no es un núcleo, lo cual es fundamental para concluir que $R-\mathsf{DMod}$ no es una categoría abeliana. Ahora vamos a dar una construcción explícita de un homomorfismo $g : P \to \langle\langle\sigma\rangle\rangle$ con P un módulo firme e $\mathsf{Im} g \subset \mathsf{Im} f$, tal que no existe un homomorfismo $h : P \to \langle\langle\tau\rangle\rangle$ con $hf = g$.

Definimos el soporte unitario ρ por

$$\rho = \{y^n x^m : n, m \geq 0\} \cup \{1\} =$$
$$\{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots, y, yx, yxx, \cdots, yx^n, \cdots, y^2, y^2x, y^2x^2, \cdots, y^2x^n, \cdots\}$$

Las relaciones satisfechas en $\langle\langle\rho\rangle\rangle$ son

$$\langle y^n \rangle_\rho = \pi(y)\langle y^{n+1}\rangle_\rho + \pi(x)\langle xy^n\rangle_\rho \quad n \geq 0$$
$$\langle x^m y^n \rangle_\rho = \pi(x)\langle x^{m+1} y^n\rangle_\rho \quad n \geq 0, m \geq 1$$

Definimos la aplicación $g : \langle\langle\rho\rangle\rangle \to \langle\langle\sigma\rangle\rangle$ por

$$(\langle \underline{x^m y^n}\rangle_\rho)g = \begin{cases} 0 & \textbf{si} \quad m = 0 \\ \pi(z_m)\langle \underline{y^m}\rangle_\sigma & \textbf{si} \quad m \succeq 1 \end{cases}$$

Lema 8.10 *Con la definición anterior g es un R-homomorfismo.*

Demostración:
Debemos comprobar que g conserva las relaciones satisfechas en ρ.

$$(\langle y^n\rangle_\rho)g = 0 = \pi(x)(\pi(z_1)\langle y\rangle_\sigma) = \pi(y)(\langle y^{n+1}\rangle_\rho)g + \pi(x)(\langle xy^n\rangle_\rho)g, n \geq 0$$

ya que $\pi(x)\pi(z_1) = 0$, $(\langle y^{n+1}\rangle_\rho)g = 0$ y $\pi(z_1)\langle y^n\rangle_\sigma = (\langle xy^n\rangle_\rho)g$.

$$(\langle x^{m-1}y^n\rangle_\rho)g = \pi(z_{m-1})\langle y^{m-1}\rangle_\sigma = \pi(z_{m-1}y)\langle y^m\rangle_\sigma = \pi(x)(\pi(z_m)\langle y^m\rangle_\sigma) = \pi(x)(\langle x^m y^n\rangle_\rho)g, m \geq 2, n \geq 0$$

donde se ha utilizado que $\pi(x)\pi(z_m) = \pi(z_{m-1})\pi(y)$. □

Proposición 8.11 *No existe un homomorfismo $h : \langle\langle\rho\rangle\rangle \to \langle\langle\tau\rangle\rangle$ tal que $hf = g$.*

Demostración:
Supongamos que sí existe un homomorfismo $h : \langle\langle\rho\rangle\rangle \to \langle\langle\tau\rangle\rangle$ tal que $hf = g$. Entonces

$$(\langle x^n\rangle_\tau)f = \pi(z_n)\langle y^n\rangle_\sigma = (\langle x^n\rangle_\rho)g = (\langle x^n\rangle_\rho)hf$$

Así $(\langle x^n\rangle_\rho)h - \langle x^n\rangle_\tau =: a_n$ es un elemento de $\mathsf{Ker}f$. Utilizando que $(\langle x^n\rangle_\rho)h = \pi(x)(\langle x^{n+1}\rangle_\rho)h$ y $\langle x\rangle_\tau = \pi(x)\langle x^{n+1}\rangle_\tau$ se tiene

$$a_n = (\langle x^n\rangle_\rho)h - \langle x^n\rangle_\tau = \pi(x)(\langle x^{n+1}\rangle_\rho)h - \langle x^n\rangle_\tau = \pi(x)((\langle x^{n+1}\rangle_\rho)h - \langle x^{n+1}\rangle_\tau + \langle x^{n+1}\rangle_\tau) - \langle x^n\rangle_\tau =$$

$$\pi(x)a_{n+1} - \pi(x)\langle x^{n+1}\rangle_\tau + \langle x^n\rangle_\tau = \pi(x)a_{n+1}$$

Podemos escribir $a_1 = \pi(x)a_2 = \pi(x)^2a_3 = \cdots = \pi(x)^n a_{n+1}$, lo que prueba que $a_1 \in \mathsf{U}(\mathsf{Ker}f) = 0$, de donde $a_1 = 0$. Si repetimos el proceso con los demás elementos a_n, obtenemos que $a_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $(\langle x^n\rangle_\rho)h = \langle x^n\rangle_\tau$.

De igual forma se prueba que $(\langle x^m y^n\rangle_\rho)h = \langle x^m\rangle_\tau$, usando que $(\langle x^m\rangle_\tau)f = (\langle x^m y^n\rangle_\rho)g$ y $(\langle x^m\rangle_\rho)h = \pi(x)(\langle x^{m+1}y^n\rangle_\rho)h$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $0 = (\langle y^n\rangle_\sigma)g = (\langle y^n\rangle_\rho)hf$, por lo que $(\langle y^n\rangle_\rho)h \in \mathsf{U}(\mathsf{Ker}f)$ y usando el Corolario 8.5 podemos encontrar $a_n \in A$ tal que $(\langle y^n\rangle_\rho)h = a_n\langle 1\rangle_\tau$. Si ocurre que $0 = (\langle 1\rangle_\rho)h$ entonces

$$0 = (\langle 1\rangle_\rho)h = \pi(x)(\langle x\rangle_\rho)h + \pi(y)(\langle y\rangle_\rho)h =$$
$$\pi(x)\langle x\rangle_\tau + \pi(y)a_1\langle 1\rangle_\tau = (1 + \pi(y)a_1)\langle 1\rangle_\tau$$

Entonces usando la Proposición2.28 existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $(1 + \pi(y)a_1)\pi(x)^t = 0$. Usando de forma reiterada el Lema 8.2 debe ser $(1 + \pi(y)a_1) = 0$, pero esto no es posible pues entonces $1 \in R$, por lo que $0 \neq (\langle 1\rangle_\rho)h$. Con un argumento similar probamos que $0 \neq (\langle y^n\rangle_\rho)h$.

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$a_n\langle 1\rangle_\tau = (\langle y^n\rangle_\rho)h = \pi(y)(\langle y^{n+1}\rangle_\rho)h + \pi(x)(\langle xy^n\rangle_\rho)h$$
$$= \pi(y)a_{n+1}\langle 1\rangle_\tau + \pi(x)\langle \underline{x}\rangle_\tau = (\pi(y)a_{n+1} + 1)\langle 1\rangle_\tau$$

Deducimos que $a_n = \pi(y)a_{n+1} + 1$, por lo que

$$a_0 = \pi(y)a_1 + 1 = \pi(y)^2a_2 + \pi(y) + 1 = \cdots =$$
$$\pi(y)^n a_n + \pi(y)^{n-1} + \cdots + \pi(y) + 1$$

Como esta descomposición puede ser hecha para cada a_n, obtenemos que cada elemento a_n tendría un grado finito, lo cual es imposible.

Concluimos que no puede existe h con la propiedad antes mencionada. $\square$

El resto de la sección lo dedicaremos a probar que DMod$-R$ sí es una categoría abeliana. Esto probará que la propiedad de ser abeliana no es simétrica respecto del lado considerado para los módulos firmes.

Lema 8.12 *Sea N un módulo en* DMod$-R$ *y sea $(l_\alpha)_{\alpha\in X} \in N^{(X)}$, tal que $\sum_{\alpha\in X} l_\alpha\pi(\alpha) = 0$. Entonces $l_x = 0$ y podemos encontrar elementos $l'_t \in N$ tales que $l_y = -\sum_{t\geq 2} l'_t\pi(z_{t-1})$ y $l_{z_t} = l'_t\pi(x)$ para cada $t \in \mathbb{N}$.*

Demostración:
N es un R-módulo firme, luego $\sum_{\alpha\in X} l_\alpha \otimes \pi(\alpha) = 0 \in N \otimes_A R$. Usando [24, Proposition I.8.8] existe un conjunto finito J y una familia de elementos $n_j \in N$ y $a_{j\alpha} \in A$ con $j \in J$ y $\alpha \in X$ tales que

1. $a_{j\alpha} = 0$ para todos los $(j, \alpha) \in J \times X$ salvo un número finito.
2. $\sum_{\alpha\in X} a_{j\alpha}\pi(\alpha) = 0$ para cada $j \in J$.
3. $l_\alpha = \sum_{j\in J} n_j a_{j\alpha}$.

Usando Lema 8.2 podemos probar que $a_{jx} = 0$ para cada $j \in J$ y podemos encontrar $a'_{jt} \in A$ tal que $a_{jy} = -\sum_{t\geq 2} a'_{jt}\pi(z_{t-1})$ y $a_{jz_t} = a'_{jt}\pi(x)$ para cada $j \in J$ y cada $t \in \mathbb{N}$. Sea $l'_t = \sum_{j\in J} n_j a'_{jt}$, entonces

$$
\begin{aligned}
l_x &= \sum_{j\in J} n_j a_{jx} = 0 \\
l_y &= \sum_{j\in J} n_j a_{jy} = -\sum_{j\in J, t\geq 2} n_j a'_{jt}\pi(z_{t-1}) = -\sum_{t\geq 2}(\sum_{j\in J} n_j a'_{jt})\pi(z_{t-1}) = -\sum_{t\geq 2} l'_t\pi(z_{t-1}) \\
l_{z_t} &= \sum_{j\in J} n_j a_{jz_t} = \sum_{j\in J} n_j a'_{jt}\pi(x) = l'_t\pi(x)
\end{aligned}
$$

$\square$

Teorema 8.13 *La categoría* DMod$-R$ *es abeliana para el anillo dado en Teorema 8.8.*

Demostración:
Sea $f : M \to N$ un monomorfismo en DMod$-R$. Probaremos que f es una aplicación inyectiva, por lo que será el núcleo de $p : N \to N/M$ en Mod$-A$ y entonces f es el núcleo de p en DMod$-R$ (ver la prueba de la Proposición 7.6). Esto prueba que DMod$-R$ es una categoría abeliana.

Si probamos que Ker(f) es R-unitario, entonces Ker$(f) = 0$ porque f es un monomorfismo y Ker(f) debe ser evanescente.

Sea $w \in$ Ker$(f) \subseteq M$, entonces $w = \sum_{\alpha\in X} m_\alpha\pi(\alpha)$ para algún $(m_\alpha)_{\alpha\in X} \in M^{(X)}$. Entonces $\sum_{\alpha\in X} f(m_\alpha)\pi(\alpha) = f(w) = 0$ en N. Usando el lema anterior sabemos que existen elementos $l'_t \in N$ tales que $f(m_x) = 0$, $f(m_y) = -\sum_{t\geq 2} l'_t\pi(z_{t-1})$ y $f(m_{z_t}) = l'_t\pi(x)$.

Para cada $m_{z_t} \in M = MR$ podemos encontrar elementos (todos cero salvo un número finito) $m_{z_t\beta} \in M$ tales que $m_{z_t} = \sum_{\beta \in X} m_{z_t\beta}\pi(\beta)$, entonces

$$0 = f(m_{z_t}) - l'_t\pi(x) = (f(m_{z_t x}) - l'_t)\pi(x) + f(m_{z_t y})\pi(y) + \sum_{s \in \mathbb{N}} f(m_{z_t z_s})\pi(z_s)$$

Usando otra vez el lema anterior tenemos que $f(m_{z_t x}) - l'_t = 0$ para cada t y así $l'_t = f(m_{z_t x})$. Sea $w_x = m_x$, $w_y = m_y + \sum_{t \geq 2} m_{z_t x}\pi(z_{t-1})$ y $w_{z_t} = m_{z_t} - m_{z_t x}\pi(x)$. Estos elementos están en $\mathsf{Ker}(f)$, porque

$$\begin{aligned} f(w_x) &= f(m_x) = 0 \\ f(w_y) &= f(m_y) + \sum_{t \geq 2} f(m_{z_t x})\pi(z_{t-1} = -\sum_{t \geq 2} l'_t\pi(z_{t-1}) + \sum_{t \geq 2} l'_t\pi(z_{t-1}) = 0 \\ f(w_{z_t}) &= f(m_{z_t}) - f(m_{z_t x})\pi(x) = l'_t\pi(x) - l'_t\pi(x) = 0. \end{aligned}$$

Y tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in X} w_\alpha\pi(\alpha) &= m_x\pi(x) + (m_y + \sum_{t \geq 2} m_{z_t x}\pi(z_{t-1}))\pi(y) + \sum_{t \in \mathbb{N}} (m_{z_t} - m_{z_t x}\pi(x))\,\pi(z_t) \\ &= \sum_{\alpha \in X} m_\alpha\pi(\alpha) + \sum_{t \geq 2} m_{z_t x}\pi(z_{t-1})\pi(y) - \sum_{t \in \mathbb{N}} m_{z_t x}\pi(x)\pi(z_t) \\ &= w + \sum_{t \geq 2} m_{z_t x}\underbrace{(\pi(z_{t-1})\pi(y) - \pi(x)\pi(z_t))}_{=0} - m_{z_1 x}\underbrace{\pi(x)\pi(z_1)}_{=0} = w. \end{aligned}$$

Esto prueba que $\mathsf{Ker}(f)$ es R-unitario y así debe ocurrir que 0. De este modo, los monomorfismos son núcleos en $\mathsf{DMod}-R$ y la categoría es abeliana. $\square$

8.3. El funtor límite directo no es siempre exacto

En esta sección vamos a desarrollar un anillo R y un sistema directo de monomorfismos en $R-\mathsf{DMod}$ cuyo límite directo no sea un monomorfismo. Esta categoría dispondrá, además, de un generador proyectivo, lo cual nos permitirá comprobar que la existencia de dicho generador (que no es cierto en general) no garantiza la abelianidad de la categoría, ni siquiera la exactitud del funtor límite directo.

Sea k un cuerpo y $X = \{x, y\}$ el conjunto formado por las letras x e y. Sea $S = k\langle X \rangle_0$ y $B = k\langle X \rangle$, y consideramos el conjunto $P = \{xy - yx\}$. Obsérvese que A es el anillo de polinomios en dos variables x e y, y que R es el subanillo de A formado por los polinomios que no tienen término independiente.

Denotaremos por I el ideal de B generado por P, es decir, $I = BPB$, y consideraremos los cocientes respectivos $A = B/I$ y $R = S/I$. Sea $\pi : B \to A$ la proyección canónica. Probaremos que en $R-\mathsf{DMod}$ el funtor límite directo no es, en general, exacto.

Lema 8.14 *Sean a_x y a_y elementos de A.*

1. *Si $a_x\pi(x) + a_y\pi(y) = 0$ entonces existe $c \in A$ tal que $a_x = -c\pi(y)$ y $a_y = c\pi(x)$.*
2. *Si $a\pi(x)^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$ entonces $a = 0$.*

Demostración:
El ideal I está generado por P y es de la forma BPB. Obsérvese que B puede descomponerse como $S+k$. Entonces $BPB = BP(S+k) = BPS + BPk = BPBX + BP$ donde se ha tenido en cuenta que $S = BX$ y que k conmuta con los elementos de B siendo, además, $Bk = B$. Utilizando que $I = BPB$, entonces $I = BPB = BPBX + BP = IX + BP$

Un elemento genérico de I será de la forma

$$u_x x + u_y y + b(xy - yx) = (u_x - by)x + (u_y + bx)y$$

con $u_x, u_y \in I$ y $b \in B$.

1. Tomamos $b_x, b_y \in B$ tales que $a_x = \pi(b_x)$ y $a_y = \pi(b_y)$.

   Si $0 = a_x\pi(x) + a_y\pi(y) = \pi(b_x x + b_y y)$, entonces $b_x x + b_y y \in I$. Utilizando la descomposición anterior de los elementos de I será $b_x = u_x - by$ y $b_y = u_y + bx$, por lo que $a_x = \pi(b_x) = \pi(u_x - by) = -\pi(b)\pi(y) = c\pi(y)$ y $a_y = \pi(b_y) = \pi(u_y + bx) = \pi(b)\pi(x) = c\pi(x)$, donde $c = \pi(b)$ y se ha utilizado que $0 = \pi(u_x)$ y $0 = \pi(u_y)$ por ser u_x y u_y elementos de I.

2. A es el anillo de polinomios en dos variables x e y, y A es un dominio de integridad. Si $0 = a\pi(x)$ entonces $a = 0$ o $\pi(x) = 0$. La segunda de las igualdades no puede ser cierta, así que necesariamente $a = 0$. Supongamos el resultado cierto para $n \in \mathbb{N}$. Si $0 = a\pi(x)^{n+1} = a\pi(x)\pi(x)^n$, aplicando la hipótesis de inducción debe ser $a\pi(x) = 0$, y nuevamente por ser dominio de integridad, se tendrá que $a = 0$.

□

Sea τ el soporte unitario dado por $\langle X\rangle$. τ es el mayor soporte posible sobre X, para cada $n \in \mathbb{N}$ cumple que $\tau \cap X^n = X^n$ y está formado por todas las posibles combinaciones de las letras x e y. Consideramos el homomorfismo $f : \langle\langle\tau\rangle\rangle \to \langle\langle\tau\rangle\rangle$ definido como sigue:

1. $(\langle 1\rangle_\tau)f = 0$
2. $(\langle x\rangle_\tau)f = \pi(y)\langle 1\rangle_\tau$
3. $(\langle y\rangle_\tau)f = -\pi(x)\langle 1\rangle_\tau$
4. Si $\overline{z} \in \tau$ entonces:
   a) $(\langle \underline{z}xx\rangle_\tau)f = 0$
   b) $(\langle \underline{z}yy\rangle_\tau)f = 0$
   c) $(\langle \underline{z}yx\rangle_\tau)f = \langle \underline{z}\rangle_\tau$
   d) $(\langle \underline{z}xy\rangle_\tau)f = -\langle \underline{z}\rangle_\tau$

Proposición 8.15 *Con la definición anterior f es un homomorfismo en $R-$*DMod.

Demostración:
Tenemos que probar que las relaciones entre los generadores de $\langle\langle\tau\rangle\rangle$ se conservan mediante f.

1. $\pi(x)(\langle x\rangle_\tau)f + \pi(y)(\langle y\rangle_\tau)f = \pi(x)\pi(y)\langle 1\rangle_\tau + \pi(y)(-\pi(x))\langle 1\rangle_\tau = \pi(xy - yx)\langle 1\rangle_\tau = 0 = (\langle 1\rangle_\tau)f$
2. $\pi(x)(\langle xx\rangle_\tau)f + \pi(y)(\langle yx\rangle_\tau)f = \pi(x)\cdot 0 + \pi(y)\langle 1\rangle_\tau = (\langle x\rangle_\tau)f$
3. $\pi(x)(\langle xy\rangle_\tau)f + \pi(y)(\langle yy\rangle_\tau)f = -\pi(x)\langle 1\rangle_\tau + \pi(y)\cdot 0 = (\langle y\rangle_\tau)f$
4. Sea $\overline{z} \in \tau$. Para los elementos de la forma $\langle \underline{z}xx\rangle_\tau$y $\langle \underline{z}yy\rangle_\tau$ es claro que f conserva las relaciones porque todos las imágenes se anulan. En los otros casos:

   a) $\pi(x)(\langle x\underline{z}yx\rangle_\tau)f + \pi(y)(\langle y\underline{z}yx\rangle_\tau)f = \pi(x)\langle x\underline{z}\rangle_\tau + \pi(y)\langle y\underline{z}\rangle_\tau = \langle \underline{z}\rangle_\tau = (\langle \underline{z}yx\rangle_\tau)f$

   b) $\pi(x)(\langle x\underline{z}xy\rangle_\tau)f + \pi(y)(\langle y\underline{z}xy\rangle_\tau)f = -\pi(x)\langle x\underline{z}\rangle_\tau - \pi(y)\langle y\underline{z}\rangle_\tau = -\langle \underline{z}\rangle_\tau = (\langle \underline{z}xy\rangle_\tau)f$

□

Ahora tomamos el módulo firme $\langle\langle\tau\rangle\rangle^{(\tau)}$ y para cada $\overline{z} \in \tau$ denotamos por $i_{\overline{z}} : \langle\langle\tau\rangle\rangle \to \langle\langle\tau\rangle\rangle^{(\tau)}$ la correspondiente inclusión canónica. Definimos un homomorfismo $\alpha : \langle\langle\tau\rangle\rangle \to \langle\langle\tau\rangle\rangle^{(\tau)}$ como sigue: $(\langle 1\rangle_\tau)\alpha = 0$ y para cada $\overline{z} \in \tau$ con $\overline{z} \neq 1$

$$(\langle \underline{z}\rangle_\tau)\alpha = \sum_{\overline{s}\leq\overline{z}} (\langle \underline{zs^{-1}}\rangle_\tau)f * i_{\overline{s}}$$

Vamos a comprobar que, efectivamente, α es un homomorfismo entre módulos firmes que es un monomorfismo, pero antes necesitamos probar el siguiente lema:

Lema 8.16 *1. Sea $\overline{z} \in \tau$ entonces $\{\overline{s} \in \tau : \overline{s} < \overline{z}x\} = \{\overline{s} \in \tau : \overline{s} \leq \overline{z}\} = \{\overline{s} \in \tau : \overline{s} < \overline{z}y\}$.*

2. $X^{n+1} = \{\overline{z}x : \overline{z} \in X^n\} \cup \{\overline{z}y : \overline{z} \in X^n\}$

Demostración:
$\overline{s} < \overline{z}x$ si y sólo si existe $\overline{a} \in \tau$ con $\overline{a} \neq 1$ tal que $\overline{sa} = \overline{z}x$ si y sólo si $\overline{s}(\overline{a}x^{-1}) = \overline{sa}x^{-1} = \overline{z}xx^{-1} = \overline{z}$ si y sólo si $\overline{s} \leq \overline{z}$ ya que $\overline{a}x^{-1}$ podría ser 1 si $\overline{a} = x$.

Por otro lado, es claro que $\overline{z}x$ y $\overline{z}y$ son elementos de X^{n+1} si $\overline{z}$ es un elemento de X^n. Si $\overline{z} \in X^{n+1}$, entonces existe $\overline{z_1} \in X^n$ y $a \in X$ tal que $\overline{z} = \overline{z_1}a$. Pero $X = \{x, y\}$, luego $a = x$ o $a = y$. Así, $\overline{z} = \overline{z_1}x$ o $\overline{z} = \overline{z_1}y$. □

Proposición 8.17 *α es un homomorfismo en $R-$DMod.*

Demostración:

$$\pi(x)(\langle x\rangle_\tau)\alpha + \pi(y)(\langle y\rangle_\tau)\alpha = \pi(x)(\sum_{s\leq x}(\langle xs^{-1}\rangle_\tau)f * i_s) + \pi(y)(\sum_{s\leq y}(\langle ys^{-1}\rangle_\tau)f * i_s) =$$

$$\pi(x)((\langle x\rangle_\tau)f * i_1 + (\langle 1\rangle_\tau)f * i_x) + \pi(y)((\langle y\rangle_\tau)f * i_1 + (\langle 1\rangle_\tau)f * i_y)$$

$$= \pi(x)(\pi(y)\langle 1\rangle_\tau)i_1 + \pi(y)(-\pi(x)\langle 1\rangle_\tau)i_1 = (\pi(xy-yx)\langle 1\rangle_\tau)i_1 = 0 = (\langle 1\rangle_\tau)\alpha$$

donde se ha utilizado que $(\langle 1\rangle_\tau)f = 0$ y que $xy - yx \in I$.

Sea, ahora, $\overline{z} \in \tau$ con $\overline{z} \neq 1$, entonces

$$\pi(x)(\langle x\underline{z}\rangle_\tau)\alpha + \pi(y)(\langle y\underline{z}\rangle_\tau)\alpha = \pi(x)\sum_{\overline{s}\leq\overline{z}x}(\langle x\underline{z}\underline{s}^{-1}\rangle_\tau)f * i_{\overline{s}} + \pi(y)\sum_{\overline{s}\leq\overline{z}y}(\langle y\underline{z}\underline{s}^{-1}\rangle_\tau)f * i_{\overline{s}} =$$

$$\pi(x)\sum_{\overline{s}<\overline{z}x}(\langle x\underline{z}\underline{s}^{-1}\rangle_\tau)f * i_{\overline{s}} + \pi(y)\sum_{\overline{s}<\overline{z}y}(\langle y\underline{z}\underline{s}^{-1}\rangle_\tau)f * i_{\overline{s}} + \pi(x)(\langle 1\rangle_\tau)f * i_{\overline{z}x} + \pi(y)(\langle 1\rangle_\tau)f * i_{\overline{z}y} =$$

$$\pi(x)\sum_{\overline{s}<\overline{z}x}(\langle x\underline{z}\underline{s}^{-1}\rangle_\tau)f * i_{\overline{s}} + \pi(y)\sum_{\overline{s}<\overline{z}y}(\langle y\underline{z}\underline{s}^{-1}\rangle_\tau)f * i_{\overline{s}}$$

$$\sum_{\overline{s}\leq\overline{z}}(\pi(x)(\langle x\underline{z}\underline{s}^{-1}\rangle_\tau)f + \pi(y)(\langle y\underline{z}\underline{s}^{-1}\rangle_\tau)f) * i_{\overline{s}} = \sum_{\overline{s}\leq\overline{z}}(\langle \underline{z}\underline{s}^{-1}\rangle_\tau)f * i_{\overline{s}} = (\langle \underline{z}\rangle_\tau)\alpha$$

□

Proposición 8.18 $\mathsf{Ker}(\alpha) = \{a\langle 1\rangle_\tau : a \in A\}$

Demostración:
Si $a \in A$, entonces $(a\langle 1\rangle_\tau)\alpha = 0$, por la propia definición de α.

Supongamos que m es un elemento de $\langle\langle\tau\rangle\rangle$. Podemos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ y elementos $\{r_{\overline{z}}\}_{\overline{z}\in X^n}$ de R tales que

$$m = \sum_{\overline{z}\in X^n} r_{\overline{z}}\langle \underline{z}\rangle_\tau$$

Hacemos inducción sobre n. Consideramos $n = 1$ y $m = r_x\langle x\rangle_\tau + r_y\langle y\rangle_\tau$ tal que m es un elemento de $\mathsf{Ker}(\alpha)$. Entonces

$$0 = (m)\alpha = r_x(\langle x\rangle_\tau)\alpha + r_y(\langle y\rangle_\tau)\alpha = r_x((\langle 1\rangle_\tau)f*i_x + (\langle x\rangle_\tau)f*i_1) + r_y((\langle 1\rangle_\tau)f*i_y + (\langle y\rangle_\tau)f*i_1) =$$

$$r_x(\pi(y)\langle 1\rangle_\tau)i_1 + r_y(-\pi(x)\langle 1\rangle_\tau)i_1$$

Por lo que $0 = (r_x\pi(y) + (-r_y)\pi(x))\langle 1\rangle_\tau$. Necesariamente, por Proposición 2.28, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que para cada $\overline{z} \in X^i$, $0 = (r_x\pi(y) + (-r_y)\pi(x))\pi(\overline{z})$. En particular para el elemento de la forma $\pi(x)^i$, es decir, $0 = (r_x\pi(y) + (-r_y)\pi(x))\pi(x)^i$. Utilizando las dos propiedades del Lema 8.14, deducimos que existe $c \in C$ tal que $r_x = c\pi(x)$ y $-r_y = -c\pi(y)$. Así,

$$m = r_x\langle x\rangle_\tau + r_y\langle y\rangle_\tau = c\pi(x)\langle x\rangle_\tau + c\pi(y)\langle y\rangle_\tau = c\langle 1\rangle_\tau$$

Supongamos el resultado cierto para n y sea m un elemento de $\mathsf{Ker}(\alpha)$ de la forma $m = \sum_{\overline{z}\in X^{n+1}} r_{\overline{z}}\langle \underline{z}\rangle_\tau$. Entonces

$$0 = (m)\alpha = \sum_{\overline{z}\in X^{n+1}} r_{\overline{z}}(\langle \underline{z}\rangle_\tau)\alpha = \sum_{\overline{z}\in X^{n+1}} \sum_{\overline{s}\leq\overline{z}} r_{\overline{z}}(\langle \underline{zs}^{-1}\rangle_\tau) f * i_{\overline{s}} =$$

$$\sum_{\overline{z}\in X^{n+1}} (\sum_{\overline{s}<\overline{z}} r_{\overline{z}}(\langle \underline{zs}^{-1}\rangle_\tau) f * i_{\overline{s}} + r_{\overline{z}}(\langle 1\rangle_\tau) f * i_1) = \sum_{\overline{z}\in X^{n+1}} \sum_{\overline{s}<\overline{z}} r_{\overline{z}}(\langle \underline{zs}^{-1}\rangle_\tau) f * i_{\overline{s}} =$$

$$\sum_{\overline{z}\in X^{n}} \sum_{\overline{s}\leq\overline{z}} (r_{\overline{z}x}(\langle x\underline{zs}^{-1}\rangle_\tau) f * i_{\overline{s}} + r_{\overline{z}y}(\langle y\underline{zs}^{-1}\rangle_\tau) f * i_{\overline{s}}) = \sum_{\overline{z}\in X^{n}} \sum_{\overline{s}\leq\overline{z}} (r_{\overline{z}x}(\langle x\underline{zs}^{-1}\rangle_\tau) f + r_{\overline{z}y}(\langle y\underline{zs}^{-1}\rangle_\tau) f) * i_{\overline{s}}$$

En el sumatorio la imagen de cada $i_{\overline{s}}$ debe ser cero. En particular, para $\overline{s} = \overline{z}$. En este caso,

$$0 = r_{\overline{z}x}(\langle x\underline{zz}^{-1}\rangle_\tau) f + r_{\overline{z}y}(\langle y\underline{zz}^{-1}\rangle_\tau) f = r_{\overline{z}x}(\langle x\rangle_\tau) f + r_{\overline{z}y}(\langle y\rangle_\tau) f = (r_{\overline{z}x}\pi(y) + r_{\overline{z}y}(-\pi(x)))\langle 1\rangle_\tau$$

Así, por el razonamiento del principio de la demostración, existe $c_{\overline{z}} \in A$ para $\overline{z} \in X^n$ tal que $r_{\overline{z}x} = c_{\overline{z}}\pi(x)$ y $r_{\overline{z}y} = c_{\overline{z}}\pi(y)$. De este modo

$$m = \sum_{\overline{z}\in X^{n+1}} r_{\overline{z}}\langle \underline{z}\rangle_\tau = \sum_{\overline{z}\in X^{n}} (r_{\overline{z}x}\langle x\underline{z}\rangle_\tau + r_{\overline{z}y}\langle y\underline{z}\rangle_\tau) = \sum_{\overline{z}\in X^{n}} (c_{\overline{z}}\pi(x)\langle x\underline{z}\rangle_\tau + c_{\overline{z}}\pi(y)\langle y\underline{z}\rangle_\tau) = \sum_{\overline{z}\in X^{n}} c_{\overline{z}}\langle \underline{z}\rangle_\tau$$

Por hipótesis de inducción existe $a \in A$ tal que $m = a\langle 1\rangle_\tau$. □

Lema 8.19 *α es un monomorfismo en $R-$DMod.*

Demostración:
El módulo Ker(α) es evanescente, ya que Ker$(\alpha) \cong A$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, el ideal R^nA está formado por todos los polinomios de grado mayor o igual que n. Si existiera un elemento de $\cap_{n\in\mathbb{N}} R^nA$, dicho elemento tendría representaciones de grado mayor o igual que n para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, sería un elemento de grado infinito, lo cual es imposible. Debe ser $0 = \cap_{n\in\mathbb{N}} R^nA$, y entonces Ker$(\alpha)$ es evanescente o, equivalentemente, α un monomorfismo. □

Proposición 8.20 *El funtor límite directo no es exacto en* DMod$-R$.

Demostración:
Llamamos K al A-módulo Ker(f), y formamos la sucesión exacta por la izquierda en $A-$Mod,

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{j} \langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle \xrightarrow{\alpha} \langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle^{(\tau)}$$

Dado un A-módulo M consideramos el homomorfismo multiplicación $\pi_x : M \to M$ tal que para cada $m \in M$ se tiene $(m)\pi_x = \pi(x)m$. Como A es un anillo conmutativo, se tiene que $(\pi(x)m)\pi_x = \pi(x)\pi(x)m = \pi(x)((m)\pi_x)$ y $(\pi(y)m)\pi_x = \pi(x)\pi(y)m = \pi(y)\pi(x)m =$

$\pi(y)((m)\pi_x)$, luego π_x es un R-homomorfismo. Por otro lado, tenemos los siguientes diagramas conmutativos ya que para cada $m \in \langle\langle\tau\rangle\rangle$ se tiene que $(m)\alpha * \pi_x = ((m)\alpha)\pi_x = \pi(x)(m)\alpha = (\pi(x)m)\alpha = ((m)\pi_x)\alpha$:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{j} & \langle\langle\tau\rangle\rangle & \xrightarrow{\alpha} & \langle\langle\tau\rangle\rangle^{(\tau)} \\
\Big\| & & \pi_x\Big\downarrow & & \pi_x\Big\downarrow & & \pi_x\Big\downarrow \\
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{j} & \langle\langle\tau\rangle\rangle & \xrightarrow{\alpha} & \langle\langle\tau\rangle\rangle^{(\tau)} \\
\Big\| & & \pi_x\Big\downarrow & & \pi_x\Big\downarrow & & \pi_x\Big\downarrow \\
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{j} & \langle\langle\tau\rangle\rangle & \xrightarrow{\alpha} & \langle\langle\tau\rangle\rangle^{(\tau)} \\
\Big\| & & \pi_x\Big\downarrow & & \pi_x\Big\downarrow & & \pi_x\Big\downarrow \\
\cdots & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

En el límite, $\varinjlim K$ no se anula, ya que si $\langle 1\rangle_\tau$ se hace cero en el límite existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\langle 1\rangle_\tau)(\pi_x)^n = \pi(x)^n\langle 1\rangle_\tau = 0$. Pero, utilizando el Lema 2.28, existirá $i \in \mathbb{N}$ tal que $0 = \pi(x)^n\pi(x)^i$. Por el resultado del Lema 8.14 debe ser $\pi(x) = 0$, lo cual es imposible. Además, $\varinjlim K$ es un módulo unitario ya que si un elemento está representado por $a\langle 1\rangle_\tau$ con $a \in A$, entonces en el límite se tendrá que $a\langle 1\rangle_\tau = (a)\pi_x\langle 1\rangle_\tau = \pi(x)a\langle 1\rangle_\tau = \pi(x)(a\langle 1\rangle_\tau)$, luego $\varinjlim K \subseteq R(\varinjlim K)$, y la otra contención siempre se tiene.

Concluimos que existe un sistema directo de monomorfismos tal que el límite directo no es un monomorfismo. □

Corolario 8.21 $R-\mathsf{DMod}$ *no es una categoría abeliana.*

Demostración:
Basta utilizar el Teorema 5.20, ya que si $R-\mathsf{DMod}$ fuera abeliana, entonces el funtor límite directo sería un funtor exacto. □

La construcción anterior puede generalizarse del siguiente modo.

Proposición 8.22 *Sea R un anillo conmutativo tal que $R-\mathsf{DMod}$ es una categoría abeliana. Si $f : M \to N$ es un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$ entonces $\mathsf{Ker}(f)$ es un R-módulo de torsión con la Definición 2.14.*

Demostración:
Sea $f : M \to N$ un monomorfismo y sea $K = \mathsf{Ker}(f)$ tal que K no es un R-módulo de torsión. Existirá un elemento k de K y una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X tal que $\pi(x_{n_0})\cdots\pi(x_2)\pi(x_1)k \neq 0$ para cada $n_0 \in \mathbb{N}$. Formamos los diagramas conmutativos en $A-\mathsf{Mod}$,

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & K \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\pi_{x_1}"'] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_{x_1}"'] & N \arrow[d, "\pi_{x_1}"'] \\
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & K \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\pi_{x_2}"'] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_{x_2}"'] & N \arrow[d, "\pi_{x_2}"'] \\
{} & {} & {} & {}
\end{tikzcd}
$$

Los diagramas que aparecen son conmutativos ya que si, por ejemplo, m es un elemento de M entonces $(m)f * \pi_{x_1} = \pi(x_1)(m)f = (\pi(x_1)m)f = ((m)\pi_{x_1})f = (m)\pi_{x_1} * f$.

Claramente $\varinjlim K$ y $\varinjlim M$ no se anulan ya que el elemento k anterior no se anula para ninguna de las composiciones finitas de los homomorfismos que forman el límite. Además, $\varinjlim K$ es un módulo unitario ya que si k es un elemento de K, en cada paso k puede escribirse en el límite como $k = (k)\pi_{x_j} = \pi(x_j)k$. $\square$

Para finalizar comprobamos que el generador $\langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle$ es un generador proyectivo de $R-$DMod.

Proposición 8.23 *$\langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle$ es un módulo proyectivo de $R-$DMod.*

Demostración:
Sea $f : M \to N$ un epimorfismo y $h : \langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle \to N$ un homomorfismo en $R-$DMod. Por el Lema 3.2, existe un soporte unitario ρ con $\tau \subseteq \rho$ y un homomorfismo $g : \langle\!\langle \rho \rangle\!\rangle \to M$ tal que

$$g * f = \Phi_{\rho\tau} * h$$

Como τ es el mayor soporte unitario sobre el conjunto $\{x, y\}$, necesariamente $\rho = \tau$, luego $\Phi_{\rho\tau}$ es un isomorfismo, y así

$$h = \Phi_{\rho\tau}^{-1} * \Phi_{\rho\tau} * h = \Phi_{\rho\tau}^{-1} * g * f$$

por lo que $\Phi_{\rho\tau}^{-1} * g$ es un levantamiento de h a través de f.

$\square$

Capítulo 9

Cubiertas Planas

En capítulos anteriores hemos visto que la categoría de módulos firmes es en general no abeliana. Tampoco dispone de un generador proyectivo en general. A pesar de ello es posible la utilización de técnicas como el argumento del objeto pequeño de Quillen que nos permitirá probar la existencia de cubiertas planas.

9.1. Preliminares

En lo que sigue R será un anillo asociativo con una descripción estándar (X, k, π, I). Llamaremos $A = k\langle X\rangle/I$. Siguiendo [7]:

Definición 9.1 *Dada una clase $\mathcal{F}$ de módulos en $A-$Mod, una $\mathcal{F}$-precubierta ($\mathcal{F}$-preenvoltura) de un A-módulo M es un homomorfismo $F \xrightarrow{\varphi} M$ ($M \xrightarrow{\varphi} F$) con $F \in \mathcal{F}$, tal que $\mathsf{Hom}_A(F', F) \to \mathsf{Hom}_A(F', M) \to 0$ es exacto ($\mathsf{Hom}(M, F') \to \mathsf{Hom}(F, F') \to 0$ es exacto) para cada $F' \in \mathcal{F}$.*

Si además, cualquier homomorfismo $f : F \to F$ tal que $f * \varphi = \varphi$ ($\varphi * f = \varphi$) es un isomorfismo, entonces φ se dice que es una $\mathcal{F}$-cubierta ($\mathcal{F}$-envoltura).

Obérvese que si una $\mathcal{F}$-cubierta ($\mathcal{F}$-envoltura) existe es única salvo isomorfismo. Entonces podemos referirnos a ella como la $\mathcal{F}$-cubierta (la $\mathcal{F}$-envoltura) entendiendo su unicidad salvo isomorfismo.

Probamos una sencilla propiedad de los módulos firmes que puede verse en [21].

Lema 9.2 *Sea F un A-módulo plano. Entonces $F \in R-$DMod si y sólo si F es R-unitario.*

Demostración:
($\Rightarrow$) Esto es cierto no solo para los A-módulos planos. Cualquier módulo firme es unitario.

($\Leftarrow$) Consideramos la sucesión exacta corta

$$0 \to R \to A \to A/R \to 0.$$

Como F es plano, tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \to R \otimes_A F \to A \otimes_A F \to A/R \otimes_A F \to 0.$$

Al ser $A/R \otimes_A F \simeq F/RF = 0$ ya que $F = RF$, se sigue $R \otimes_A F \simeq A \otimes_A F \simeq F$, por lo que $F \in R-\mathsf{DMod}$. □

En lo que sigue $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$ será la clase de los A-módulos planos y firmes (o, equivalentemente, la clase de los A-módulos planos R-unitarios). Denotaremos por $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}^{\perp}$ los módulos de la clase

$$\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}^{\perp} = \{C \in A-\mathsf{Mod} : \ \mathsf{Ext}_A^1(F, C) = 0, \forall F \in \mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}\}$$

Lema 9.3 *Sea $M \in \mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$. Fijamos un cardinal regular $\aleph > \{|A|, \aleph_0\}$. Entonces para cada $y \in M$ existe un submódulo puro N de M con $|N| < \aleph$, $y \in N$ y tal que N, $M/N \in R-\mathsf{DMod}$.*

Demostración:
Recordamos que un submódulo $N \leq M$ es puro si y sólo si los sistemas $\sum a_{ij}\mathsf{x}_i = n_j$, $n_j \in N$, $a_{ij} \in A$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq h$ que tienen solución en M implica que tienen solución en N (ver, por ejemplo, [24, I.Proposition 11.2]).

Por [18, Proposition 9] y Proposición 2.29 existe un soporte unitario σ y un homomorfismo $h : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to M$ tal que $(\langle 1\rangle_\sigma)h = y$. Definimos $N_0 = \mathsf{Im}(h)$. Es claro N_0 es un módulo R-unitario por ser imagen de un módulo firme. Sea Y el conjunto de todas los sistemas lineales de h ecuaciones con k incógnitas $\sum a_{ij}\mathsf{x}_i = n_j$, con $n_j \in N_0$, entonces $|Y| < \aleph^{h(k+1)} = \aleph$. Si Z es el conjunto de todos los sistemas lineales $\sum a_{ij}\mathsf{x}_i = n_j$, con $n_j \in N_0$, se sigue que $|Z| < \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{h\in\mathbb{N}} \aleph = \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph = \aleph$.

Dado un sistema lineal $L \equiv \sum a_{ij}\mathsf{x}_i = n_j$, con $n_j \in N_0$ y una solución del sistema $y_1, y_2, \cdots, y_k$ en M, tomamos soportes unitarios $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ y homomorfismos $h_i : \langle\langle\sigma_i\rangle\rangle \to M$ tales que $(\langle 1\rangle_{\sigma_i})h_i = y_i$, para $i = 1, 2, \cdots, k$. Sea $g_{\mathrm{L}} : \coprod_{i=1}^{k} \langle\langle\sigma_i\rangle\rangle \to M$ el homomorfismo inducido. Entonces $|\mathsf{Im}(g_L)| = k \cdot \aleph_0 \cdot \aleph < \aleph$. Si repetimos este proceso para cada sistema, podemos definir $N_1 = N_0 + \sum_{L\in Z} \mathsf{Im}(g_L)$. El módulo N_1 es R-unitario porque es suma de módulos R-unitarios. Con los razonamientos anteriores podemos deducir que $|N_1| < \aleph + \aleph \cdot \aleph = \aleph$. Repitiendo el proceso realizado para construir el módulo N_1 podemos construir por inducción una cadena

$$N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_m \subseteq \cdots$$

de submódulos R-unitarios de M, tales que $|N_n| < \aleph$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $N = \sum_{n\in\mathbb{N}} N_n$, entonces $|N| < \aleph_0 \cdot \aleph = \aleph$. Además $y \in N$ y N es R-unitario por ser suma de módulos R-unitarios.

Sea $\sum a_{ij}\mathsf{x}_i = n_j$, con $n_j \in N$, un sistema lineal con solución en M. Entonces existe un cierto $l \in \mathbb{N}$ tal que cada n_j está en N_l y, por la definición de los submódulos N_n, el sistema tendrá solución en N_{l+1}, así tendrá solución en N. De este modo N es un submódulo puro de M.

Tomando el homomorfismo inyectivo $0 \to N \to M$ si tensorizamos por $R \otimes_A -$, como N es un submódulo puro de M, entonces tenemos el homomorfismo inyectivo $0 \to R \otimes_A N \to R \otimes_A M$. Como M es firme, entonces $R \otimes_A M \simeq M$, así que el módulo R-unitario N es también un módulo firme. Que M/N es un módulo firme es consecuencia de que M es firme y N es unitario. □

Corolario 9.4 *Sea $F \in \mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$ y $\aleph$ un cardinal regular con $\aleph > \{|A|, |X|, \aleph_0\}$. Existe un ordinal λ y una cadena continua de módulos en $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$, $\{N_\alpha : \alpha < \lambda\}$, tal que*

- $F = \cup_{\alpha<\lambda} N_\alpha$,
- $N_{\alpha+1}/N_\alpha \in \mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$
- $|N_0|,\ |N_{\alpha+1}/N_\alpha| < \aleph$.

Demostración:
Obsérvese que si aplicamos el Lema 9.3 a F, el submódulo firme y plano $N \subseteq F$ dado en esa Proposición cumple que N y F/N son módulos firmes y planos [24, I. Proposition 11.1].

Sea $x \in F$ entonces por el Lema 9.3 existe un submódulo puro N_0 de F con $x \in N_0$ y $|N_0| < \aleph$. Entonces F/N_0 es un módulo firme y plano. Utilizando este razonamiento con F/N_0 podemos encontrar un submódulo puro N_1' de F/N_0 que será de la forma N_1/N_0 con $N_0 \subseteq N_1 \subseteq F$. Entonces $(F/N_0)/(N_1/N_0) \simeq F/N_1$ es un módulo firme y plano. Procediendo por inducción transfinita obtenemos $N_{\alpha+1}/N_\alpha \subseteq F/N_\alpha$ con las condiciones del Lema 9.3 para un ordinal α y para un ordinal límite γ definimos $N_\gamma = \cup_{\alpha<\gamma} N_\alpha$. Debe existir un ordinal λ tal que $F = \cup_{\alpha<\lambda} N_\alpha$ con $N_\alpha \in \mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$ y $|N_0|$, $|N_{\alpha+1}/N_\alpha| < \aleph$. □

9.2. El argumento del objeto pequeño de Quillen

Esta sección probará que todo A-módulo tiene una $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-cubierta. Usaremos el argumento del objeto pequeño de Quillen (ver [21, Lemma II.3.3]) pero en una formulación más general (para categorías cocompletas) que aparece en [14, Proposition 11.5.16].

En [14, Sections 10.4 y 10.5] pueden encontrarse las definiciones básicas que vamos a necesitar. No obstante, para facilitar la lectura, las introduciremos aquí.

Definición 9.5 *Sean $i : A \to B$ y $p : X \to Y$ dos aplicaciones.*

Se dice que i (resp. p) tiene la propiedad de levantamiento a izquierda (resp. derecha) con respecto a p (resp. i) si, para cada diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

hay un levantamiento $h : B \to X$ con $i * h = f$ y $h * p = g$.

Definición 9.6 *Sea $\mathcal{A}$ una categoría e I un conjunto de aplicaciones de $\mathcal{A}$.*

- *Una aplicación es I-inyectiva si tiene la propiedad de levantamiento derecha respecto a toda aplicación de I. La clase de aplicaciones I-inyectivas se denotará por I-iny.*

- *Una aplicación es una I-cofibración si tiene la propiedad de levantamiento izquierda respecto de toda aplicación I-inyectiva. Denotaremos por I-cof la clase de todas las I-cofibraciones.*

Definición 9.7 *Sea $\mathcal{A}$ una categoría cocompleta e I un conjunto de aplicaciones de $\mathcal{A}$. Se dice que una aplicación $f : A \to B$ es un complejo I-cell relativo, si existe un sistema inductivo $(X_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ tal que:*

i) $X_0 = A$, $B = \varinjlim_{\alpha<\lambda} X_\alpha$.

ii) *Para cada $\beta < \lambda$ con $\beta + 1 < \lambda$ existe un cuadrado cocartesiano*

$$\begin{tikzcd} C_\beta \arrow[r] \arrow[d, "g_\beta"'] & X_\beta \arrow[d] \\ D_\beta \arrow[r] & X_{\beta+1} \end{tikzcd}$$

con $g_\beta \in I$.

I-cell será la clase de todos los complejos I-cell relativos.

Teorema 9.8 *(The small object argument [14, Proposition 10.5.16]) Sea $\mathcal{A}$ una categoría cocompleta e I un conjunto de aplicaciones de $\mathcal{A}$. Supongamos que los dominios de las apliaciones de I son pequeños con respecto a I-cell. Entonces existe una factorización funtorial de toda aplicación de $\mathcal{A}$ en un complejo I-cell relativo seguido por una aplicación I-inyectiva.*

Con respecto a las hipótesis del teorema, es conocido que todo A-módulo es pequeño, es decir, dado un A-módulo M hay un cardinal regular κ_M tal que $\mathsf{Hom}_A(M, -)$ conmuta con los colímites λ-dirigidos de sistemas $(M_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha<\lambda}$ donde λ es cualquier ordinal con $\mathsf{cof}(\lambda) > \kappa_M$ (Aquí $\mathsf{cof}(\lambda)$ indica la cofinalidad de λ). Podemos tomar $\kappa_M = |M|(|M|+|A|)$. Así la hipótesis en I es satisfecha para todo módulo M.

Lema 9.9 *Sea $\aleph$ el cardinal elegido en el Lema 9.3 e I un conjunto de representantes de aplicaciones inyectivas $N \to M$ en $A-\mathsf{Mod}$ con $|M| < \aleph$ y tal que $M/N \in \mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$. Si $T \to L$ es una aplicación inyectiva tal que $|L/T| < \aleph$ y $L/T \in \mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$ entonces $(T \to L) \in I - cof$.*

Demostración:
Como $|L/T| < \aleph$ existe un A-submódulo $\overline{L} \subseteq L$ con $|\overline{L}| < \aleph$ y tal que $\overline{L} \to L \to L/T$ es un epimorfismo, es decir, $L = T + \overline{L}$. Denotamos $\overline{T} = T \cap \overline{L}$ y entonces $\overline{L}/\overline{T} \simeq L/T$, por lo que $\overline{L}/\overline{T} \in \mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$. Obtenemos que la aplicación inyectiva $\overline{T} \to \overline{L}$ está en I.

Consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d, "f"] \\ L \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

donde f es I-inj. Puesto que $\overline{T} \to \overline{L}$ está en I existe $\overline{h} : \overline{L} \to V$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr] \arrow[ddd] & & V \arrow[ddd, "f"] \\
& \overline{T} \arrow[ul, hook'] \arrow[d] \arrow[ur, dotted] & \\
& \overline{L} \arrow[dl, hook] \arrow[dr, dotted] \arrow[uur, dashed, "\overline{h}"'] & \\
L \arrow[rr] & & W
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Puesto que $L = T + \overline{L}$ y considerando los homomorfismos $T \to V$ y $\overline{L} \to V$, obtenemos un homomorfismo $h : L \to V$ haciendo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr] \arrow[ddd] & & V \arrow[ddd, "f"] \\
& \overline{T} \arrow[ul, hook'] \arrow[d] \arrow[ur, dotted] & \\
& \overline{L} \arrow[dl, hook] \arrow[dr, dotted] \arrow[uur, dashed, "\overline{h}"'] & \\
L \arrow[rr] \arrow[uuurr, dashed, bend right, "h"'] & & W
\end{tikzcd}$$

conmutativo.

$\square$

Lema 9.10 *Con las mismas hipótesis del Lema 9.9, si $T \to L$ es una aplicación inyectiva tal que $L/T \in \mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$, entonces $(T \to L) \in I - cof$.*

Demostración:
Utilizando el Corolario 9.4 podemos encontrar un ordinal λ y una cadena continua de submódulos firmes de L tal que $L = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$ con $L_\alpha \subseteq L_{\alpha'}$ para cualquiera $\alpha \leq \alpha' < \lambda$, y $L_\beta = \cup_{\alpha<\beta} L_\alpha$ si $\beta < \lambda$ es un ordinal límite, donde $L_0 = T$ y $|L_{\alpha+1}/L_\alpha| < \aleph$ si $\alpha + 1 < \lambda$. Al ser $F_{R-\mathsf{DMod}}$ cerrado para extensiones se sigue que $L_\alpha/T \in \mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$ para cada $\alpha < \lambda$. Entonces, utilizando el Lema 9.9, obtenemos que $T \to L_1$ es I-cof. Así, usando inducción transfinita, tenemos que $(T \to L_\alpha) \in I$-cof para cada $\alpha < \lambda$ y, finalmente, $(T \to \cup_{\alpha<\lambda} L_\alpha = L) \in I$-cof. $\square$

Con estos lemas previos pasamos ahora a probar el resultado principal.

Teorema 9.11 *Todo A-modulo tiene una $\mathcal{F}^{\perp}_{R-\mathsf{DMod}}$-envoltura y una $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-cubierta.*

Demostración:
Sea I como en el Lema 9.9 y sea M un A-módulo. Aplicamos el Teorema 9.8 al homomorfismo $M \to 0$. Existirá una factorización de $M \to 0$ en $M \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} 0$ donde f está en I-cell y g está en I-inj. Es claro, desde la definición de la clase I-cell, que f es inyectiva y que $C/M \in \mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$.

Veamos que $C \in \mathcal{F}^{\perp}_{R-\mathsf{DMod}}$. Consideremos una sucesión exacta corta en $A-\mathsf{Mod}$, $0 \to C \to L \to F \to 0$ donde F es un módulo plano y firme. Tenemos que probar que la sucesión es escindida. Por el Lema 9.10, $C \to L$ está en I-cof y, así, puesto que $g \in I$-inj y el siguiente cuadrado

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, equal] \arrow[d] & C \arrow[d, "g"] \\ L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es conmutativo, por la propiedades de levantamiento del inicio de esta sección. Así, la sucesión exacta corta

$$0 \to C \to L \to F \to C$$

es escindida, por lo que $C \in \mathcal{F}^{\perp}_{R-\mathsf{DMod}}$.

Ahora, si $C' \in \mathcal{F}^{\perp}_{R-\mathsf{DMod}}$, tenemos una sucesión exacta larga de homología en $A-\mathsf{Mod}$:

$$\mathsf{Hom}_A(C, C') \to \mathsf{Hom}_A(M, C') \to \mathsf{Ext}^1_A(C/M, C') \to \cdots .$$

Pero $\mathsf{Ext}^1_A(C/M, C') = 0$ ya que $C/M \in \mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$, así que $M \to C$ es una $\mathcal{F}^{\perp}_{R-\mathsf{DMod}}$-preenvoltura, de hecho es un tipo especial $\mathcal{F}^{\perp}_{R-\mathsf{DMod}}$-preenvoltura. Utilizando [26, Theorem 2.2.2 and Theorem 2.2.6], obtenemos que M tiene una $\mathcal{F}^{\perp}_{R-\mathsf{DMod}}$-envoltura.

Pasamos, ahora, a probar que M tiene una $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-cubierta. Obsérvese que M tiene una $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-cubierta si y sólo si el submódulo $M' \subseteq M$ obtenido de la suma de todas las imágenes de homomorfismos $F \to M$ on $F \in \mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$ tiene una $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-cubierta. Para M', y puesto que $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$ es cerrado para sumas directas, hay una sucesión exacta corta en $A-\mathsf{Mod}$,

$$0 \to K \to G \to M' \to 0$$

donde G es un A-módulo plano y firme. Utilizando el argumento anterior existe una sucesión exacta corta en $A-\mathsf{Mod}$

$$0 \to K \to C \to F \to 0$$

donde $F \in F_{R-\mathsf{DMod}}$ y $C \in \mathcal{F}^{\perp}_{R-\mathsf{DMod}}$. Formamos el cuadrado cocartesiano y consideramos el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] & 0 \\
 & F \arrow[r, equal] \arrow[d] & F \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

con filas y columnas exactas, obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \to C \to P \to M' \to 0$$

con $C \in \mathcal{F}^{\perp}_{R-\mathsf{DMod}}$ y $P \in \mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$.

Veamos que $P \to M' \to 0$ es una $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-precubierta. Para cada $F' \in \mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$ hay una sucesión exacta larga

$$\mathsf{Hom}_A(F', P) \to \mathsf{Hom}_A(F', M') \to \mathsf{Ext}^1_A(F', C) \to \cdots .$$

Pero $\mathsf{Ext}^1_A(F', C) = 0$. Esto muestra que $P \to M' \to 0$ es una $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-precubierta especial de M y, otra vez por [26, Theorem 2.2.8], obtenemos que M' tiene una $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-cubierta. Pero entonces M tiene una $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-cubierta. (Obérvese que esta cubierta no será sobreyectiva en general).

□

Definición 9.12 *Sea M un A-modulo. Una $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-cubierta de M será llamada una cubierta plana y firme de M.*

Corolario 9.13 *Sea M un R-módulo unitario (resp. módulo firme). Entonces M tiene una cubierta plana y R-unitaria sobreyectiva (resp. una cubierta plana y firme sobreyectiva).*

Demostración:
Sea $\varphi : F \to M$ una $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-cubierta de M. Desde [18, Proposition 12] existe un epimorfismo $\psi : G \to M$, donde G es un A-módulo plano y firme (así $G \in \mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$). Existirá $f : G \to F$ tal que $\varphi \circ f = \psi$. Esto implica que φ es una aplicación sobreyectiva. □

9.3. Equivalencias de Morita

Una teoría de Morita es desarrollada en [13] para anillos no unitarios en el caso donde la equivalencia está dada por un funtor producto tensorial. Es también probado que estas equivalencias entre categorías de módulos firmes son siempre un producto tensorial para muchos tipos de anillos y es una cuestión abierta si esto es cierto para cualquier tipo de anillo. Los anillos que satisfacen esta condición para las categorías de módulos firmes por la izquierda son los anillos de Watts por la izquierda. Existe un propiedad técnica que debe ser satisfecha por un funtor continua por la derecha $F : R-\mathsf{DMod} \to S-\mathsf{DMod}$ para ser un funtor producto tensorial: para cualquier soporte unitario τ, el homomorfismo canónico

$$\varprojlim_{\sigma \in \Xi_{\mathsf{U}}(X)} F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle) \to F(\langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle)$$

es un isomorfismo (esto puede ser visto en [12, Theorem 35]). Las dos familias principales de anillos de Watts por la izquierda son los anillos idempotentes (anillos R tales que $R = R^2$) y también los anillos $R = k\langle X \rangle_0 / I$ con X un conjunto finito y sin restricciones sobre las relaciones.

Un tipo particular de equivalencias dadas por el funtor producto tensorial es como sigue: sea B un anillo unitario tal que R es un ideal bilátero sobre B, entonces podemos definir $\alpha : A \to B$ dado por $\alpha(k1_A) = k1_B$ y tal que los elementos de R son conservados por α. Podemos considerar la subcategoría plena $R-\mathsf{DMod}$ (módulos M tales que $R \otimes_A M \simeq M$) y $R-\mathsf{DMod}'$ (módulos M tales que $R \otimes_B M \simeq M$). Estas categorías son equivalents mediante los funtores $B \otimes_A - : R-\mathsf{DMod} \to R-\mathsf{DMod}'$ y $A \otimes_B - : R-\mathsf{DMod}' \to R-\mathsf{DMod}$. Este tipo especial de equivalencia de Morita es siempre inducido por un funtor producto tensorial y con los siguientes argumentos probamos que planitud, cubiertas planas y grupos de homología no dependen de la elección del anillo con indentidad en el cual R es un ideal bilátero.

Usando [13, Theorem 17] y [13, Corollary 18] haremos una descripción de las equivalencias de categorías para anillos no unitarios. En este caso, necesitamos utilizar la categoría $\mathsf{CMod}-R$ que ha sido descrita en la sección 2.3. Con las referencias anteriores las condiciones equivalentes para anillos de Watts por la izquierda son:

1. Las categorías $\mathsf{CMod}-R$ y $\mathsf{CMod}-S$ son equivalentes.

2. Las categorías $R-\mathsf{DMod}$ y $S-\mathsf{DMod}$ son equivalentes.

3. Existen bimódulos ${}_RP_S$, ${}_SQ_R$ y un contexto de Morita con homomorfismos de bimódulos $\varphi : P \otimes_S Q \to \mathsf{C}(R)$ y $\psi : Q \otimes_R P \to \mathsf{C}(S)$ tales que $\mathsf{Ker}(\varphi)$ y $\mathsf{Coker}(\varphi)$ son eventualmente anulados por R por la derecha, y $\mathsf{Ker}(\psi)$ y $\mathsf{Coker}(\psi)$ son eventualmente anulados por S por la derecha. Si este es el caso, las equivalencias en (2) son $P \otimes_S - : S-\mathsf{DMod} \to R-\mathsf{DMod}$ y $Q \otimes_R - : R-\mathsf{DMod} \to S-\mathsf{DMod}$, y las equivalencias en (1) son $\mathsf{Hom}_R(P, -) : \mathsf{CMod}-R \to \mathsf{CMod}-S$ y $\mathsf{Hom}_S(Q, -) : \mathsf{CMod}-S \to \mathsf{CMod}-R$

Si no podemos asegurar que R y S sean anillos de Watts por la izquierda, sólo necesitamos garantizar que la equivalencia dada en (2) es un funtor producto tensorial.

Diremos que dos anillos R y S son Morita equivalentes si las condiciones anteriores son satisfechas.

Proposición 9.14 *Sean R y S Morita equivalentes. Entonces un módulo $M \in R-\mathsf{DMod}$ es plano si y sólo si $Q \otimes_R M$ es plano en $S-\mathsf{DMod}$.*

Demostración:
Decimos que $M \in R-\mathsf{DMod}$ es un módulo plano si es plano considerado como módulo en la categoría $A-\mathsf{Mod}$. Esta condición es equivalente a que $M^+ = \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es inyectivo en $\mathsf{Mod}-A$. El módulo M^+ está en $R-\mathsf{CMod}$ (ver [13, Page 5839])) y como el funtor de localización es exacto, M^+ es inyectivo en $R-\mathsf{CMod}$ si y sólo si es inyectivo en $A-\mathsf{Mod}$.

Ser inyectivo es una propiedad categórica que se conserva por equivalencias, así M^+ es inyectivo en $R-\mathsf{CMod}$ si y sólo si $\mathsf{Hom}_S(Q, M^+)$ es inyectivo $S-\mathsf{CMod}$.

$$\mathsf{Hom}_S(Q, \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) = \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(Q \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

entonces $\mathsf{Hom}_S(Q, M^+) = (Q \otimes_R M)^+$ y este módulo es inyectivo en $S-\mathsf{CMod}$ si y sólo si $Q \otimes_R M$ es plano en $S-\mathsf{DMod}$. $\square$

Teorema 9.15 *Precubiertas y cubiertas planas en la categoría de módulos firmes son conservadas por equivalencias de Morita.*

Demostración:
Sea $M \in R-\mathsf{DMod}$ y $\varphi : F \to M$ una precubierta plana y firme de M. Probaremos que $id_Q \otimes \varphi : Q \otimes_R F \to Q \otimes M$ es una precubierta plana y firme de $Q \otimes_R M$. Usando el resultado anterior $Q \otimes_R F$ es un módulo plano por ser F un módulo plano. Sea $\psi : F' \to Q \otimes_R M$ un homomorfismo en $S-\mathsf{DMod}$ con F' un módulo plano. Por ser $Q \otimes_R -$ una equivalencia podemos encontrar $M' \in R-\mathsf{DMod}$ tal que $Q \otimes_R M' \simeq F'$. Utilizando la proposición anterior M' es plano en $R-\mathsf{DMod}$ ya que F' es plano en $S-\mathsf{DMod}$. Denotamos por $\alpha : Q \otimes_R M' \to F'$ el isomorfismo anterior y consideramos la composición $\alpha * \psi : Q \otimes_R M' \to Q \otimes_R M$. Otra vez, por ser $Q \otimes_R -$ una equivalencia, existe un único homomorfismo $h : M' \to M$ tal que $1_Q \otimes_R h = \alpha * \psi$. Como φ es una precubierta plana de M existirá $h' : M' \to F$ tal que $h' * \varphi = h$. Aplicando la equivalencia tenemos el homomorfismo $1_Q \otimes h' : Q \otimes_R M' \to Q \otimes_R F$. Además,

$$(1_Q \otimes h') * (1_Q \otimes \varphi) = 1_Q \otimes (h' * \varphi) = 1_Q \otimes h = \alpha * \psi$$

α es un isomorfismo, así que $\psi = \alpha^{-1} * (1_Q \otimes h') * (1_Q \otimes \varphi) = (1_Q \otimes \alpha^{-1} * h') * (1_Q \otimes \varphi)$, que prueba que $1_Q \otimes \varphi$ es una precubierta plana.

Supongamos, ahora, que φ es una cubierta plana y firme de M y probaremos que $1_Q \otimes \varphi$ es una cubierta plana y firme de $Q \otimes_R M$. El razonamiento anterior prueba que es una precubierta y quedará por demostrar la condión de cubierta. Sea $f : Q \otimes_R F \to Q \otimes_R F$ tal que $f * (1_Q \otimes \varphi) = 1_Q \otimes \varphi$. Utilizando que $Q \otimes_R -$ es una equivalencia, existe un único homomorfismo $f' : F \to F$ tal que $1_Q \otimes f' = f$. Entonces $1_Q \otimes \varphi = f * 1_Q \otimes \varphi = (1_Q \otimes f') * (1_Q \otimes \varphi) = 1_Q \otimes (f' * \varphi)$. Por la equivalencia, se tiene que $\varphi = f' * \varphi$ y, por ser φ una cubierta, f' es un isomorfismo. Así, $f = 1_Q \otimes f'$ es un isomorfismo, por ser $Q \otimes_R -$ es una equivalencia. Concluimos que $1_Q \otimes \varphi$ es una cubierta plana y firme de $Q \otimes_R M$.

$\square$

9.4. Abelianidad y cubiertas planas

Para finalizar el capítulo daremos una caracterización de los núcleos en $R-\mathsf{DMod}$ usando cubiertas planas.

Proposición 9.16 *Sea $M, N \in R-\mathsf{DMod}$, $f : M \to N$ un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$ y $\varphi : P \to M$ la $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-cubierta de M. Si $\varphi * f : P \to \mathsf{Im}(f)$ es la $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-cubierta de $\mathsf{Im}(f)$ entonces $M \simeq \mathsf{D}(\mathsf{Im}(f))$.*

Demostración:
$f : M \to N$ es un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$, por lo que podemos considerar la sucesión exacta corta en $A-\mathsf{Mod}$

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \xrightarrow{\ f\ } \mathsf{Im}(f) \longrightarrow 0$$

siendo $K = \mathsf{Ker}(f)$ un R-módulo evanescente. Aplicando la exactitud del funtor $\mathsf{Hom}_R(G, -)$ por la izquierda y utilizando que $\mathsf{Hom}_R(G, K) = 0$ por ser K un módulo evanescente, tenemos el homomorfismo inyectivo

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(G, M) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_R(G,f)} \mathsf{Hom}_R(G, \mathsf{Im}(f))$$

Para mayor comodidad utilizaremos la notación $\mathsf{L}(-) = \mathsf{Hom}_R(G, -)$. Si $\alpha : G \to \mathsf{Im}(f)$ es un homomorfismo, al ser G un módulo plano y, por hipótesis, $\varphi * f : P \to \mathsf{Im}(f)$ la $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-cubierta de $\mathsf{Im}(f)$, existirá $g : G \to P$ tal que $\alpha = g * \varphi * f = (g * \varphi) * f = (g * \varphi)\mathsf{L}(f)$. Probamos, así, que $\mathsf{L}(f)$ es también una aplicación sobreyectiva, por lo que $\mathsf{L}(M) \simeq \mathsf{L}(\mathsf{Im}(f))$.

Denotamos $I = \mathsf{L}(M)$ y por $\eta_M : G^{(I)} \to M$ el homomorfismo canónico dado por $((g_\alpha)_{\alpha\in I})\eta_M = \sum_I (g_\alpha)\alpha$. Del mismo modo, hacemos $\eta_{\mathsf{Im}(f)} : G^{(\mathsf{L}(\mathsf{Im}(f)))} \to \mathsf{Im}(f)$ el correspondiente homomorfismo. Pero los elementos del conjunto $\mathsf{L}(\mathsf{Im}(f))$ pueden ponerse en la forma $\alpha * f$ con α un elemento de I. Así, utilizando que $I = \mathsf{L}(M) \simeq \mathsf{L}(\mathsf{Im}(f))$, el homomorfismo $\eta_{\mathsf{L}(\mathsf{Im}(f))}$ puede escribirse como $\eta_{\mathsf{L}(\mathsf{Im}(f))} : G^{(I)} \to \mathsf{Im}(f)$ siendo $\eta_{\mathsf{L}(\mathsf{Im}(f))}((g_\alpha)_{\alpha\in I}) = \sum_{\alpha\in I}(g_\alpha)(\alpha * f)$.

Por la propia definición es claro que $\eta_{\mathsf{L}(\mathsf{Im}(f))} = \eta_M * f$. Además, como M e $\mathsf{Im}(f)$ son módulos unitarios η_M y $\eta_{\mathsf{L}(\mathsf{Im}(f))}$ son aplicaciones sobreyectivas siguiendo [18, Proposition 13]. Tenemos el diagrama conmutativo en $A-\mathsf{Mod}$

$$\begin{array}{ccccc}
G^{(I)} & \xrightarrow{\eta_M} & M & \longrightarrow & 0 \\
\Big\| & & \Big\downarrow f & & \\
G^{(I)} & \xrightarrow[\eta_{\mathsf{L}(\mathsf{Im}(f))}]{} & \mathsf{Im}(f) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Sea $K_1 = \mathsf{Ker}\eta_M$ y $K_2 = \mathsf{Ker}\eta_{\mathsf{L}(\mathsf{Im}(f))}$. Probaremos que $\mathsf{U}(K_1) = \mathsf{U}(K_2)$.

Si $(g_\alpha)_{\alpha\in I} \in K_1$ entonces $((g_\alpha)_{\alpha\in I})\eta_{\mathsf{L}(\mathsf{Im}(f))} = ((g_\alpha)_{\alpha\in I})\eta_M * f = 0$, por lo que $((g_\alpha)_{\alpha\in I}) \in K_2$, y probamos así que $K_1 \subseteq K_2$. Necesariamente, $\mathsf{U}(K_1) \subseteq \mathsf{U}(K_2)$. Por otro lado, sea

$((g_\alpha)_{\alpha\in I}) \in \mathsf{U}(K_2)$. Entonces $0 = ((g_\alpha)_{\alpha\in I})\eta_{\mathsf{L}(\mathsf{Im}(f))}$ y existe un soporte unitario τ y un homomorfismo $\beta : \langle\langle\tau\rangle\rangle \to G^{(I)}$ tal que $((g_\alpha)_{\alpha\in I}) = (\langle 1\rangle_\tau)\beta$ con $\mathsf{Im}\beta \subseteq \mathsf{U}(K_2)$. Entonces $\beta*\eta_M*f = \beta*\eta_{L(\mathsf{Im}(f))} = 0$. Como f es un monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$ y $\beta*\eta_M : \langle\langle\tau\rangle\rangle \to M$ es un homomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$, necesariamente $0 = \beta*\eta_M$. Así, $\mathsf{Im}\beta \subseteq \mathsf{U}(\mathsf{Ker}(\eta_M)) = \mathsf{U}(K_1)$ y, en particular, $((g_\alpha)_{\alpha\in I}) = (\langle 1\rangle_\tau)\beta \in \mathsf{U}(K_1)$

Siguiendo la construcción del funtor D que aparece en [18, Section 7] se cumple que $\mathsf{D}(M) = G^{(I)}/\mathsf{U}(K_1)$ y $\mathsf{D}(\mathsf{Im}(f)) = G^{(I)}/\mathsf{U}(K_2)$. Por el razonamiento anterior, concluimos que $\mathsf{D}(M) \simeq \mathsf{D}(\mathsf{Im}(f))$. Al ser M firme, necesariamente $M \simeq \mathsf{D}(M)$, por lo que $M \simeq \mathsf{D}(\mathsf{Im}(f))$. Además este isomorfismo viene dado por el homomorfismo $\nu_M^{-1} * \mathsf{D}(f) = \overline{f} : M \to \mathsf{D}(\mathsf{Im}(f))$ que cumple $\overline{f} * \nu_{\mathsf{Im}(f)} = f$.

□

Proposición 9.17 *Sea $f : M \to N$ un homomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$, entonces f es un núcleo si y sólo si $\varphi * f : P \to \mathsf{Im}(f)$ es la $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-cubierta de $\mathsf{Im}(f)$ siendo $\varphi : P \to M$ la $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-cubierta de M.*

Demostración:
Supongamos que $f : M \to N$ es un núcleo en $R-\mathsf{DMod}$ y que $\varphi : P \to M$ es la $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-cubierta de M. Sea F un R-módulo plano y firme y $h : F \to \mathsf{Im}(f) \subseteq N$ un homomorfismo. Podemos considerar el homomorfismo de módulos firmes $h : F \to N$, y como f es un núcleo e $\mathsf{Im}h \subseteq \mathsf{Im}(f)$ existirá $\overline{h} : F \to M$ tal que $h = \overline{h} * f$. Ahora, utilizando que $\varphi : P \to M$ es la cubierta plana y firme de M y que F es un módulo plano y firme, existirá un homomorfismo $g : F \to P$ tal que $\overline{h} = g * \varphi$. Entonces $h = \overline{h} * f = g * (\varphi * f)$. Así, $\varphi * f : P \to \mathsf{Im}(f)$ es una $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-precubierta de $\mathsf{Im}(f)$.

Sea $h : P \to P$ tal que $h*(\varphi*f) = \varphi*f$. Entonces $0 = (\varphi - h*\varphi)*f$. Como f es un núcleo, $\mathsf{Ker}(f)$ es evanescente y, además, $\mathsf{Im}(\varphi - h * \varphi) \subseteq \mathsf{Ker}(f)$ es unitario. Entonces $0 = \varphi - h * \varphi$, es decir, $\varphi = h * \varphi$. Por ser φ una cubierta plana y firme necesariamente h es un isomorfismo. Concluimos que $f * \varphi$ es una $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-cubierta de $\mathsf{Im}(f)$.

Supongamos, ahora, que $\varphi*f : P \to \mathsf{Im}(f)$ es la $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-cubierta de $\mathsf{Im}(f)$ siendo $\varphi : P \to M$ la $\mathcal{F}_{R-\mathsf{DMod}}$-cubierta de M. Por la proposición anterior $M \simeq \mathsf{D}(\mathsf{Im}(f))$. Sea $F \in R-\mathsf{DMod}$ y $g : F \to N$ un homomorfismo tal que $\mathsf{Im}(g) \subseteq \mathsf{Im}(f)$. Utilizando [18, Proposition 13] existe un único homomorfismo $\overline{g} : F \to \mathsf{D}(\mathsf{Im}(f))$ tal que $\overline{g}*\nu_{\mathsf{Im}(f)} = g$. Tomando $\overline{f} : M \to \mathsf{D}(\mathsf{Im}(f))$ el isomorfismo de la proposición anterior, entonces $\overline{f} * \overline{f}^{-1} * f = \overline{g} * \nu_{\mathsf{Im}(f)} = g$. De este modo $\overline{g} * \overline{f}^{-1}$ es un levantamiento de g y concluimos que f debe ser un núcleo.

□

Corolario 9.18 *Sea R un anillo no unitario, entonces $R-\mathsf{DMod}$ es abeliana si y sólo para cada monomorfismo $f : M \to N$ en $R-\mathsf{DMod}$ la cubierta plana de M e $\mathsf{Im}f$ son isomorfas.*

Demostración:
$R-\mathsf{DMod}$ es abeliana si y sólo si todo monomorfismo en $R-\mathsf{DMod}$ es un núcleo. El resultado se sigue de la proposición anterior. □

Índice alfabético

Bibliografía

Artículos derivados de esta tesis

[A] González-Férez, J.; Marín, L. *The category of firm modules for nonunital monomial algebra*, Communications in Algebra 36(3), pp. 1078–1087 (2008).

[B] González-Férez, J.; Marín, L.: *The category of firm modules need not be abelian.*, Journal of Algebra 318(1), pp. 377–392 (2007).

[C] Estrada, S.; González-Férez, J.; Marín, L.: *Quillen's small object argument in the category of firm modules*, Journal of Algebra 319(6), pp. 2518–2532 (2008).

Otras Referencias

[1] Anderson, F.W.; Fuller, K.R.: *Rings and Categories of Modules*, 2nd Ed. New York: Springer-Verlag Inc., 1992

[2] Adámek, J., Rosický, J.: Locally presentable and accessible categories, Vol. 189, Cambridge Univ. Press, 1994.

[3] Borcaux, F.: *Handbook of Categorical Algebra 1. Basic Category Theory*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge Univ. Press, 1994.

[4] Crivei, S., García, J.L.: *Gruson-Jensen duality for idempotent rings*, Comm. Alg. **33** (2005), 3949-3966.

[5] Cuntz, J.: *Morita Invariance in Cyclic Homology for Nonunital Algebras*, K-Theory **15** (1998), 301–305.

[6] Eklof, P.C., Trlifaj, J.: *How to make Ext vanish*, Bull. London Math. Soc. **33(1)** (2001), 41-51.

[7] Enochs, E.: *Injective and flat covers, envelopes and resolvents*, Israel J. Math. **39** (1981), 189-209.

[8] Enochs, E., Jenda, O.M.G.: *Relative homological algebra*, De Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 30, Walter De Gruyter, Berlin/New York, 2000.

.

[9] Faith, D.: *Rings, modules and categories*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 190. Springer-Verlag, New York/Heidelberg, 1973.

[10] García, J.L.; Marín, L.: *Rings having Morita-like equivalence*. Communications in Algebra, 27(2), 665–680 (1999). Marcel-Dekker.

[11] García, J.L.; Marín, L.: *Some Properties of Tensor-Idempotent Rings* Contemporary Mathematics vol. 259, pp. 223–235, 2000

[12] García, J.L.; Marín, L.: *Watts Theorems for Associative Rings*. Communications in Algebra, 29(12), 5799–5834 (2001). Marcel Dekker.

[13] García, J.L.; Marín, L.: *Morita Theory for Associative Rings*. Communications in Algebra, 29(12), 5735–5856 (2001). Marcel Dekker.

[14] Hirschhorn, P.S.: *Localization, cellularization and homotopy colimits*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[15] Komatsu, H.: *The category of s-unital modules*, Math. J. Okayama Univ. 29, pp. 65–91, 1987.

[16] Marín, L.: *Morita equivalence based on contexts for various categories of modules over associative rings* J. Pure Appl. Algebra 1998, 133, pp. 219–232.

[17] Marín, L.:*Caterogorías de Módulos para anillos asociativos y Equivalencias de Morita*. Tesis Doctoral. 1998.

[18] Marín, L.: *The construction of a generator for R*-DMod. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics; Marcel-Dekker: New York-Basel, 2000; 210, 287–296.

[19] Okninski, J.: *Semigroup Algebras*. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics. Marcel Dekker, INC. 1991.

[20] Quillen, D.G.: *Module theory over nonunital rings* 1997 notes, unpublished.

[21] Quillen, D.G.: *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 43, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1967.

[22] Quillen, D.G.: *K_0 for nonunital rings and Morita invariance*, J. Reine Angew. Math. **472**(1996), 197-217.

[23] Schubert, H.: *Categories*. Springer-Verlag, 1972.

[24] Stenström, B.: *Rings of quotients.* Springer-Verlag, 1975.

[25] Wisbauer, R.: *Grundlagen der Modul- und Ringtheorie* Verlag Reinhard Fischer, München, 1988

[26] Xu J.: *Flat covers of modules*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1634, Springer-Verlag, 1996.