



UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

TESIS DOCTORAL

**Geometría global de superficies espaciales en espacios producto
lorentzianos**

Alma Luisa Albuje Brotons

2008



UNIVERSIDAD
DE MURCIA

DPTO. DE MATEMÁTICAS

Geometría global de superficies espaciales en espacios producto lorentzianos

Don Víctor Jiménez López, Profesor Titular de Universidad del Área de Análisis Matemático y Director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia

INFORMA: Que la Tesis Doctoral titulada “**Geometría global de superficies espaciales en espacios producto lorentzianos**”, ha sido realizada por D^a Alma Luisa Albuje Brotons, bajo la inmediata dirección y supervisión de D. Luis José Alías Linares, y que el Departamento ha dado su conformidad para que sea presentada ante la Comisión de Doctorado.

En Murcia, a 8 de septiembre de 2008

Fdo: Víctor Jiménez López



UNIVERSIDAD
DE MURCIA

DPTO. DE MATEMÁTICAS

Geometría global de superficies espaciales en espacios producto lorentzianos

D. Luis José Alías Linares, Catedrático de Universidad del Área de Geometría y Topología en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia

AUTORIZA: La presentación de la Tesis Doctoral titulada “**Geometría global de superficies espaciales en espacios producto lorentzianos**”, realizada por D^a Alma Luisa Albuje Brotons, bajo mi inmediata dirección y supervisión, en el Departamento de Matemáticas, y que presenta para la obtención del Grado de Doctor por la Universidad de Murcia.

En Murcia, a 8 de septiembre de 2008

Fdo: Luis José Alías Linares

Un tren hacia...

Hace aproximadamente 15 años un gran profesor, **Baldomero Espartero**, o como siempre lo recordaré: Don Baldomero, me regaló un billete de primera clase para un maravilloso y largo viaje y, por supuesto, no lo dejé escapar. En el aula, todos nos mirábamos desconcertados cada vez que Don Baldomero repetía aquello de la importancia del orden de las operaciones, y nos enseñaba a resolver ecuaciones. Y, al mismo tiempo que escribía una de estas ecuaciones en la pizarra con sus inconfundibles *equis* caligráficas, nos repetía aquella frase tan misteriosa: *No os extrañéis, una equis no es siempre igual a otra equis, hay que aprender a distinguirlas*. Y aquí empezó todo... Con esta frase empecé a intuir todo lo que ignoraba, la grandiosidad de un mundo que desconocía casi por completo; el billete para adentrarme en él lo tenía en mis manos, sólo tenía que subirme al tren.

Al principio los cristales del tren estaban empañados, ¡qué pena! No se observaba bien el paisaje. Poco a poco, muy lentamente, el tiempo fue mejorando. Conocí a muchos compañeros de asiento, hablaban conmigo y me mostraban el paisaje y los diferentes detalles del camino, desde los más cercanos hasta algunos tan lejanos como la línea del horizonte. Algunos, los más especiales, te explicaban el porqué de cada detalle y te mostraban los indicios que aseguraban su existencia, para que más adelante fueras capaz de observar a tu alrededor, aprender sin su ayuda y compartir tus conocimientos. Y entre este grupo de gente, recuerdo con especial cariño a **Carmen Gómez**, mucho más que una profesora de Filosofía y de Lógica, y, como no, a **Maribel Fuertes**, mi profesora de Matemáticas. Nos enseñasteis a observar siempre con atención y a ser no sólo críticos, sino autocríticos.

El tren hizo su primera parada. Aunque por supuesto estaba aún muy lejos de su destino, no todo el mundo es amante de los viajes y muchos, mareados, decidieron quedarse en el camino. Sin embargo, otros tantos se subieron al tren, renovando el aire del interior. Durante el segundo tramo, el tren empezó a penetrar en lugares más escarpados y por caminos más sinuosos aunque de gran belleza. Había indicaciones en cada recodo del terreno, pero no eran fáciles de leer. Todo era más sencillo cuando alguien, sentado cerca en el vagón, te prestaba sus gafas y te instaba a observar, a leer y a comprender las señales. Y, de nuevo, había quien te enseñaba a graduarte tus propias gafas según el momento y la ocasión. Muchos nombres podrían aparecer aquí, a todos os debo el saber apreciar la belleza escondida en las montañas y querer encontrarla. La lista sería interminable, pero sin duda hay un nombre a destacar, **Salvador Segura**. Te debo especialmente el guiarme durante buena parte del viaje y el hacerme ver que éste no acababa en la siguiente parada, que aún quedaban nuevas maravillas por descubrir. También me presentaste a mis posteriores compañeros de viaje, y aunque unos asientos más allá, sigues ahí sentado, siempre dispuesto a ayudar.

Después de la segunda parada, llegó el último y más gratificante tramo del viaje. He contado con la inmensa suerte de compartir asiento con un viajero nato, con un amante del mundo en el que nos adentramos, **Luis Alías**, mi director de tesis. Junto a tus enseñanzas el viaje está llegando a su destino. Pero ya sé que el destino no es más que otra estación repleta de trenes, esperando llenarse

para partir de nuevo a la búsqueda de las profundidades de este mundo. Lo sé porque ha formado parte de tus enseñanzas, no quieres que llegue al final sin conocer los horarios de los nuevos trenes e incluso el primer tramo de su recorrido, aunque ignoremos por completo su destino definitivo.

El último tramo del viaje me ha sorprendido con maravillosas paradas en lugares tan insospechados como Rio de Janeiro, donde tuve la gran oportunidad de compartir asiento con **Marcos Dajczer** y aprender de sus conocimientos, y como Lovaina, donde conocí a nuevos viajeros: **Stefan Haesen**, **Leopold Verstraelen**, **Franki Dillen...** que muy amablemente se ofrecieron a acompañarme y de este modo enriquecer mi experiencia.

Estoy compartiendo vagón con un grupo excepcional de personas: los miembros del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia, y sobre todo **Ángel**, **Pascual**, **M^a Ángeles** y **José**, siempre ahí, dispuestos a ayudar en todo lo posible y a compartir conmigo sus experiencias y conocimientos.

En el tren hay más gente, mucha más. Gente con la que tomarse un café, o simplemente con la que compartir una conversación disfrutando de su compañía. No podría nombrarlos a todos, por lo que prefiero no nombrar a ninguno, siempre os agradeceré vuestra compañía. Todos ellos, mis **amigos** y **compañeros**, me hicieron el viaje más ameno, sin ellos no sé si habría llegado hasta aquí.

Y por último, aquellos que estaban ya antes de intuir que algún día me embarcaría en este viaje, que están y que estarán siempre: mi **familia**, ayudándome con el equipaje, animándome a continuar e incluso dispuestos a empujar el tren para sacarlo de un socavón.

A todos y cada uno de vosotros, gracias, gracias y mil GRACIAS.

A mi familia.

Índice general

Introduction	3
Introducción	17
1. Preliminares	31
1.1. El espacio producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$.	31
1.2. Superficies espaciales en $M^2 \times \mathbb{R}_1$.	33
1.3. Grafos espaciales sobre M^2 .	36
2. Algunos resultados de tipo Calabi-Bernstein	41
2.1. Versión paramétrica	42
2.2. Versión no paramétrica	43
2.3. Dualidad entre grafos minimales y maximales	48
2.4. Más ejemplos de grafos maximales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$	55
3. Resultados locales sobre superficies maximales	61
3.1. Motivación	62
3.2. Parabolicidad relativa de superficies maximales	63
3.3. Parabolicidad de grafos enteros maximales	70
3.4. Una desigualdad integral local para superficies maximales	73
4. Superficies espaciales de curvatura media constante en espacios tipo <i>steady state</i>	77
4.1. Motivación	77
4.2. Superficies espaciales de curvatura media constante en el espacio <i>steady state</i>	80
4.3. Superficies espaciales de curvatura media constante en espacios tipo <i>steady state</i> .	87
4.4. El caso n -dimensional de hipersuperficies	92

5. Superficies con curvatura de Gauss constante	95
5.1. Motivación y preliminares.	96
5.2. Una fórmula integral	99
5.2.1. Superficies en un espacio producto riemanniano.	99
5.2.2. Superficies en un espacio producto lorentziano.	102
5.3. Grafos enteros en un espacio producto.	104
5.4. Superficies espaciales completas de revolución en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ con curvatura de Gauss constante	108
Bibliografía	113
Índice terminológico	118

Introduction

The study of extremal surfaces in a given 3-dimensional manifold has generated a great research interest in the field of global differential geometry of surfaces. In particular, in the case where we consider Riemannian manifolds, *minimal surfaces* have been object of numerous research works in differential geometry. Bernstein [Ber] provided one of the most important contributions in this context: the so called Bernstein theorem which asserts that

the only entire minimal graphs in the Euclidean space \mathbb{R}^3 are the planes.

The analogous surfaces to minimal surfaces in a 3-dimensional Lorentzian manifold are the *maximal surfaces*.

A *maximal* surface in a 3-dimensional Lorentzian manifold is a spacelike surface with zero mean curvature. By *spacelike* we mean that the induced metric on the surface from the Lorentzian metric of the ambient space is a Riemannian metric. Maximal surfaces are, precisely, those surfaces which locally maximize area among all nearby surfaces having the same boundary (for the details see [Fra] and [BrFl]). Besides of their mathematical interest, maximal surfaces and, more generally, spacelike surfaces with constant mean curvature have also a great importance in General Relativity.

From a physic point of view, the importance of maximal surfaces -or in general maximal hypersurfaces in a Lorentzian space of arbitrary dimension- is well known since in 1944 Lichnerowicz [Lic] proved that the Cauchy problem with initial conditions on a maximal surface has a particularly nice form, since it is reduced to a first order linear differential system, and to a second order non-linear elliptic differential equation. On the other hand, spacelike hypersurfaces of constant mean curvature are usually considered as mathematical models that describe physical situations where the total of energy is proportional to the volume of the hypersurface. This is due to the fact that the natural behaviour of such surfaces is to converge to minimum energy states. Moreover, spacelike hypersurfaces with non-zero constant mean curvature are used in the study of singularities and of the propagation of gravitational waves, as we can see, for instance, in [Lic], [MaTi] and [Stu].

From a mathematical point of view, spacelike surfaces with constant mean curvature, and in particular maximal surfaces, present interesting Bernstein type properties. A mathematical property or result is said to be of Bernstein type when, under some suitable hypothesis, it allows us to conclude some uniqueness results for certain surfaces or hypersurfaces in a given ambient space. In

fact, one of the most relevant results in the context of global geometry of spacelike surfaces is the well-known Calabi-Bernstein theorem, which appears in a natural way from the Bernstein theorem for minimal surfaces in the Euclidean space \mathbb{R}^3 . The Calabi-Bernstein theorem was established in 1970 by Calabi [Cal] and, in its *non-parametric version*, it asserts that

the only entire maximal graphs in the Lorentz-Minkowski 3-dimensional space, \mathbb{R}_1^3 , are the spacelike planes.

The Calabi-Bernstein theorem can be also formulated in a *parametric version*. In that case, the Calabi-Bernstein theorem states that

the only complete maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski 3-dimensional space, \mathbb{R}_1^3 , are the spacelike planes.

It is worth pointing out here a first fundamental difference between the global geometry of minimal surfaces in \mathbb{R}^3 and that of maximal surfaces in \mathbb{R}_1^3 , since it is well-known that there exist non-planar complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 , such as the catenoid or the helicoid.

The Calabi-Bernstein theorem has been the origin of a wide and productive branch of research in the context of the actual differential geometry. Firstly, this result admits a natural extension to maximal hypersurfaces in arbitrary dimension n . In fact, Calabi [Cal] showed that for $n \leq 4$ the only complete maximal hypersurfaces in \mathbb{R}_1^{n+1} are the spacelike hyperplanes, and Cheng and Yau [ChYa] extended this result to arbitrary dimension. This fact shows another important difference with its analogous Riemannian problem, since the Bernstein theorem is not valid in dimension $n > 7$ (see for instance [BGG]). Later, several authors have approximated the Calabi-Bernstein theorem for maximal surfaces in \mathbb{R}_1^3 ($n = 2$) from different point of views, providing new proofs of this result either in its parametric version or in its non-parametric version (Kobayashi [Kob], McNertey [McN], Estudillo and Romero [EsRo1, EsRo2, EsRo3], Romero [Rom], Alías and Palmer [AlPa2, AlPa3]).

On the other hand, it is worth observing that there does not exist any analogous result to the Calabi-Bernstein theorem for timelike entire graphs in the Lorentz-Minkowski space \mathbb{R}_1^3 . To see it, just observe that if z stands for the timelike coordinate in \mathbb{R}_1^3 , the graph determined by

$$y = z \tanh x$$

is an example of a non-flat entire timelike graph in \mathbb{R}_1^3 with zero mean curvature. The best result in this direction is due to Milnor [Mil], and it establishes that any timelike entire graph with zero mean curvature in \mathbb{R}_1^3 must be conformally equivalent to the Minkowski plane \mathbb{R}_1^2 .

The Euclidean space \mathbb{R}^3 and the Lorentz-Minkowski space \mathbb{R}_1^3 are the simplest examples of a Riemannian, respectively Lorentzian, 3-dimensional manifold. A natural generalization of these

two spaces is the following. Let $(M^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ be a connected Riemannian surface, and consider the 3-dimensional product manifold $M^2 \times \mathbb{R}$ endowed with the metric

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_M + \varepsilon dt^2,$$

where $\varepsilon = \pm 1$. In the case where $\varepsilon = 1$ we obtain in that way a standard Riemannian product, whereas in the case $\varepsilon = -1$ we obtain a Lorentzian manifold that, in order to avoid confusion, it will be usually denoted by $M^2 \times \mathbb{R}_1$. Observe that the Euclidean space and the Lorentz-Minkowski space are particular cases of the product spaces that we have just defined when we consider $M = \mathbb{R}^2$ the Euclidean plane.

Along all these recent years, the theory of surfaces in Riemannian products of the form $M^2 \times \mathbb{R}$ has suffered a big development, especially since in [AbRo] Abresch and Rosenberg generalized the Hopf theorem to the homogeneous product spaces $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Specifically, entire minimal graphs, or more generally constant mean curvature graphs, immersed into those spaces have generated a big interest since Rosenberg [Ros] and Meeks and Rosenberg [MeRo] studied some aspects on the geometry of minimal surfaces immersed into a Riemannian product space. In fact, several authors have successfully obtained some results of Bernstein type in this context (see for instance [ADR, EsRo]). Nevertheless, in order to establish a Bernstein type result in these ambient spaces, it is a necessary assumption to ask the Gaussian curvature of the surface M^2 to be non-negative. This assumption is necessary since there exist examples of non-trivial entire minimal graphs in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (see for instance the works of Duc and Hieu [DuHi1, DuHi2], Duc and Salavessa [DuSa], Nelli and Rosenberg [NeRo], Montiel and Onnis [MoOn] and Onnis [Onn]).

On the other hand, the conformal structure of a complete minimal surface has a strong influence on its global properties. In particular, a problem of special relevance in differential geometry is to decide whether a particular minimal surface is parabolic or not. A Riemannian surface (Σ^2, g) with non-empty smooth boundary, $\partial\Sigma \neq \emptyset$, is said to be *relatively parabolic* when any bounded harmonic function over the surface is completely determined by its boundary values. An interesting and useful characterization of the relative parabolicity of a given surface Σ^2 is the existence of a proper non-negative superharmonic function over Σ (see for instance the surveys on this topic of Meeks and Pérez [MePe] and Pérez [Per]). On the other hand, classically a Riemannian surface without boundary is said to be *parabolic* if it does not admit any negative subharmonic function. However, in several texts, as for instance the survey of Grigor'yan [Gri], the term *recurrence* is introduced to define the following parabolicity property for Riemannian surfaces without boundary. A Riemannian surface (Σ, g) is said to be *recurrent* if for any open subset $O \subset \Sigma$ with smooth boundary, $\Sigma \setminus O$ is a relatively parabolic surface in the sense of surfaces with non-empty boundary. It is worth observing that both concepts coincide, which follows from the fact that a Riemannian manifold without boundary is recurrent precisely when almost all Brownian paths are dense on the manifold [Gri, Theorem 5.1]. As a small remark, it must be said that the terminology that is actually used by the mathematical community related to this topic is not unified in the bibliography. In fact,

many authors use the term parabolicity in the context of surfaces with non-empty boundary, and the term recurrence or non-hyperbolicity for surfaces without boundary, although the definitions are equivalent in any case.

There are several works that give evidence of the narrow relation existing between the parabolicity condition and minimal surfaces; moreover, these works show that parabolicity is a powerful tool in the study of the geometry of minimal surfaces. For instance, in the survey [MePe] and the references therein, we can find a quite extensive relation of the main problems and open questions in differential geometry relating both concepts. On the other hand, one of the fundamental ideas in the proof of the Bernstein type theorem for minimal surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}$ by Alías, Dajczer and Ripoll [ADR] is that of proving that, under the assumptions of the theorem, any complete minimal surface in $M^2 \times \mathbb{R}$ is necessarily parabolic. The importance of the study of parabolicity is also clear since it is a concept which lies in the borderline between several branches of mathematics, such as Riemannian geometry, stochastic analysis, partial differential equations and potential theory. For that reason, it favours the interrelation between different branches of mathematical research, and in particular of the different techniques and useful tools used in those areas. A fundamental reference to study in depth the concepts of parabolicity and relative parabolicity is the survey of Grigor'yan [Gri].

Recently, Fernández and López [FeLo] have extended the study of maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski 3-dimensional space, \mathbb{R}_1^3 , by considering the problem from a local point of view. Specifically, they have proved that maximal surfaces with non-empty smooth boundary in \mathbb{R}_1^3 are relatively parabolic when the Lorentzian norm in \mathbb{R}_1^3 is a proper and eventually positive function over the maximal surface.

Along the previous lines we have presented a brief summary of some of the actual research lines in mathematics related to the study of minimal surfaces (respectively, maximal surfaces) in 3-dimensional Riemannian manifolds (respectively, Lorentzian manifolds). Nevertheless, until this moment the study of this type of problems for maximal surfaces in a Lorentzian product space of the type $M^2 \times \mathbb{R}_1$ has not still been proposed. In view of the wide research work made on minimal surfaces in Riemannian product spaces, it is natural to ask first what can be said about the global geometry of maximal surfaces in the analogous Lorentzian product spaces. As we have said before, the different generalizations and extensions of the Calabi-Bernstein theorem have constituted, and still constitute nowadays, a productive branch of mathematical research. However, all these extensions try to generalize the Calabi-Bernstein theorem for surfaces, or hypersurfaces, in the same ambient space: the $(n + 1)$ -dimensional Lorentz-Minkowski space \mathbb{R}_1^{n+1} . For that reason, we propose ourselves as a **first objective** of this doctoral thesis the study of the global geometry of maximal surfaces in a Lorentzian product space of the form $M^2 \times \mathbb{R}_1$, in order to obtain some results of Calabi-Bernstein type in this context, both in its parametric form and in its non-parametric one.

As a **second objective**, we will start the study of maximal surfaces in Lorentzian product spaces from a local point of view. In that way, following the ideas introduced by Fernández and

López [FeLo], we plan to study some properties of relative parabolicity of a maximal surface in $M^2 \times \mathbb{R}_1$ with non-empty smooth boundary. Moreover, we will insist on the possible relations that can be established between this kind of local results and the Calabi-Bernstein type global results.

The Lorentzian products $M^2 \times \mathbb{R}_1$ are a particular case of a wider family of 3-dimensional Lorentzian manifolds, the cosmological models known as *generalized Robertson-Walker spaces*. Following the terminology introduced in [ARS1], given $(M^2, \langle, \rangle_M)$ a connected Riemannian surface, a generalized *Robertson-Walker* space-time is defined as the topological product $M^2 \times \mathbb{R}$ endowed with the Lorentzian metric

$$\langle, \rangle = \varrho^2(t) \langle, \rangle_M - dt^2,$$

where $\varrho \in C^\infty(\mathbb{R})$ is a positive smooth function. The function ϱ is usually known as the warping function, and it is usual to denote the Lorentzian manifold that we have just obtained as $M^2_{\varrho} \times \mathbb{R}_1$. Alías, Romero and Sánchez, [ARS1, ARS2, ARS3], have obtained several Calabi-Bernstein type results for compact spacelike surfaces with constant mean curvature, not only in the case where the ambient space is a generalized *Robertson-Walker* space, but also for more general Lorentzian ambient spaces, by means of some interesting integral formulae.

Generalized *Robertson-Walker* spaces admit a foliation by means of the totally umbilical spacelike surfaces $M \times \{t\}$, $t \in \mathbb{R}$, with constant mean curvature

$$H(t) = \frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)},$$

known in the literature as *slices*. There are only two cases, up to homothety, for which all the slices of $M^2_{\varrho} \times \mathbb{R}_1$ have the same mean curvature, that can be supposed to be $H(t) = 0$ or $H(t) = 1$. The first case corresponds to the Lorentzian product spaces $M^2 \times \mathbb{R}_1$, whereas the second case is given when the warping function is $\varrho(t) = e^t$, and therefore the corresponding generalized *Robertson-Walker* space is $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$. Consequently, the analogous surfaces to the maximal surfaces in these new spaces are the spacelike surfaces with constant mean curvature $H = 1$.

As a particular case of this new family of Lorentzian manifolds, when $M^2 = \mathbb{R}^2$ is the Euclidean plane, the corresponding generalized *Robertson-Walker* space $\mathbb{R}^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ is isometric to the open region of the 3-dimensional *de Sitter space* known as the *steady state space* (see [AlA13]). For this reason, we will call the generalized *Robertson-Walker* spaces of the form $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ as *steady state type spaces*. The *de Sitter* space is a complete, simply connected, 3-dimensional Lorentzian manifold with constant sectional curvature 1, so it can be considered as the analogous space to the Euclidean sphere in the 4-dimensional Lorentz-Minkowski space-time.

In 1977 Goddard [God] conjectured that the only complete spacelike surfaces with constant mean curvature in the *de Sitter* space should be the totally umbilical ones. This conjecture is false, as it shows the existence of the hyperbolic cylinders studied by Montiel in [Mon1] (for more details see Section 4.2 of Chapter 4 in this memory). However, none of this hyperbolic cylinders is fully

contained in the steady state space. Although the Goddard conjecture has a negative answer, it has motivated numerous research works, since several authors have tried to prove the validity of the conjecture under certain additional assumptions. For instance, Akutagawa [Aku] and Ramanathan [Ram] showed independently in 1987 that the Goddard conjecture is valid with the extra hypothesis on the constant mean curvature $H^2 \leq 1$.

In [Mon1] Montiel also gave a positive answer to the Goddard conjecture in the compact case, that is, the only compact spacelike surfaces with constant mean curvature in the *de Sitter* space are the totally umbilical compact spacelike surfaces. However, again, none of these surfaces is contained in the steady state space. In fact, as we will see later, the steady state space does not admit any compact spacelike surface. It was also Montiel [Mon2] who later proved the existence of complete, non-compact and non-totally umbilical spacelike surfaces in the steady state space, with constant mean curvature $H \geq 1$. Consequently, the Goddard conjecture is also false when we restrict the ambient space to the steady state space.

In view of this results, we pose as a **third objective** of this research work the study of spacelike surfaces with constant mean curvature, and in particular with $H = 1$, in steady state type spaces, trying to obtain new Calabi-Bersntein type results in this context. When we consider the particular case $M^2 = \mathbb{R}^2$, that is, when we consider the steady state space, we hope that our results complement the known results until this moment related to the Goddard conjecture. That is, we want to prove the Goddard conjecture in the steady state space under certain suitable additional assumptions.

Since Sophie Germain [Ger] introduced the mean curvature while she was studying some problems related to elasticity, the mean curvature has become the most important, and of course the most studied, extrinsic geometric invariant. However, from an intrinsic point of view the Gaussian curvature is without any doubt the most famous geometric invariant throughout the history of differential geometry. In spite of its name, it was Olinde Rodrigues [Rod] the first one who studied some comparison results between the area element of a given surface and the corresponding area element of its spherical map, and therefore the first one who considered the Gaussian curvature in the way we know it today. Nevertheless, it is due to Gauss [Gau] the well-known *Gauss Egregium theorem* that asserts that the Gaussian curvature is a geometric concept that only depends on the metric of the surface, that is, it is an intrinsic geometric invariant.

As it seems natural, the first problem that was considered in this context was the study and characterization of complete surfaces with constant Gaussian curvature in the Euclidean space \mathbb{R}^3 . Firstly, Liebmann [Lie] characterized the spheres as the only complete surfaces in \mathbb{R}^3 with constant positive Gaussian curvature, and Hilbert [Hil] showed that there does not exist complete surfaces with constant negative Gaussian curvature in the Euclidean space. Finally, Hartman and Nirenberg [HaNi], Stoker [Sto] and Massey [Mas] showed, independently, that a complete surface with zero Gaussian curvature in the Euclidean space \mathbb{R}^3 is a cylinder over a simple planar complete curve.

Recently Aledo, Espinar and Gálvez [AEG1, AEG2] have considered the analogous problem for complete surfaces with constant Gaussian curvature in the homogeneous product spaces $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Specifically, in [AEG1] they have proved that, up to an isometry of the ambient space, there exists a unique complete surface with constant Gaussian curvature $K > 1$ in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and with $K > 0$ in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Moreover, these surfaces are rotationally invariant. They also showed that there exists an infinite family of complete rotationally invariant surfaces with constant Gaussian curvature, for any value $-1 \leq K < 0$, in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. They also gave a Hilbert type result to prove the non-existence of complete surfaces with constant Gaussian curvature $K \leq -1$ both in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Lately, in [AEG2] they also proved the non-existence of such surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ for $0 < K < 1$. On the other hand, in [EGR] Espinar, Gálvez and Rosenberg have established that the only complete surfaces with constant extrinsic curvature both in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ are the rotationally invariant spheres.

Nevertheless, in a similar way of what it happened when we considered spacelike surfaces with constant mean curvature in a Lorentzian product, we observe that again, until this moment, no results are known in this direction when we consider spacelike surfaces with constant Gaussian curvature in Lorentzian product spaces. For that reason, we propose ourselves as a **fourth** and last **objective** of this work to obtain some uniqueness results for spacelike surfaces with constant Gaussian curvature in Lorentzian product spaces of the form $M^2 \times \mathbb{R}_1$.

It is worth observing here that, in the proof by Aledo, Espinar and Gálvez of their Liebmann type results for surfaces with constant Gaussian curvature in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, [AEG1], the authors use as a fundamental tool the complex variable, and in particular the existence of a determined holomorphic differential form. However, we can not apply this same techniques in the Lorentzian case, and this is due mainly to the fact that the behaviour of rotationally invariant spacelike surfaces with constant Gaussian curvature in $M^2 \times \mathbb{R}_1$ differs from the behaviour of rotationally invariant surfaces with constant Gaussian curvature in the Riemannian product $M^2 \times \mathbb{R}$. Along this work we will use different tools based on an integral formula for compact surfaces, that will be also valid in the Riemannian case. For that reason, we will take advantage of the situation in order to try to contribute with some original results to the Riemannian case.

Once we have presented the context in which this doctoral thesis is set, and once we have exposed the main objectives of it, we will describe how it is organized. This research work is made up of five chapters. The **first chapter** is a preliminar chapter which is devoted to present the general concepts and properties that we will need along this work, and in particular, we will establish the specific preliminaries that we will need in the first half of the memory.

We will begin the chapter describing the Lorentzian product spaces $M^2 \times \mathbb{R}_1$, since they constitute the ambient space where we are going to work. We will describe the main properties of a Lorentzian product space $M^2 \times \mathbb{R}_1$, focusing our attention in how the geometry of the manifold $M^2 \times \mathbb{R}_1$ is completely determined from the geometry of the surface M^2 . Afterwards, we will

introduce the spacelike surfaces as the elements that are going to be the direct objects of our study. On the one hand, we will recall the Gauss and Weingarten formulae as the derivation laws in the ambient space of a tangent vector field over the spacelike surface in the direction of another tangent vector field and in the direction of the normal vector field N , respectively. On the other hand, we will also recall the fundamental equations of a spacelike surface: the Gauss and Codazzi equations.

In this first chapter, we will also introduce two functions that will play a fundamental role along our work: the height function, h , of a spacelike surface over $M^2 \times \mathbb{R}_1$, and the function Θ , that measures the hyperbolic angle between the timelike unitary vector fields ∂_t and N . We will obtain expressions for the gradient and the Laplacian operators of both functions over a spacelike surface Σ , and we will see that these expressions are highly simplified when we consider a maximal surface. Finally, we will make a detailed study of the geometry of spacelike graphs over the Lorentzian product $M^2 \times \mathbb{R}_1$, obtaining explicit expressions for the second fundamental form and for the mean curvature function of the graph in terms of the differential operators of the function u that determines it.

In the **second chapter** we will study the global geometry of maximal surfaces in a Lorentzian product space $M^2 \times \mathbb{R}_1$, establishing new Calabi-Bernstein type results for such surfaces. We will start the chapter proving an auxiliary topological result, but of great interest by itself. Specifically, we will show that if $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$ is a complete spacelike surface, the surface M^2 is necessarily complete and the projection $\Pi = \pi_M \circ f : \Sigma \rightarrow M$ is a covering map (Lemma 2.1.1, [A1A11]). As an interesting consequence of this result, it can be deduced that in the case where M is a simply connected Riemannian surface, any complete spacelike surface Σ is necessarily an entire graph.

From the geometric point of view, we will give a first Calabi-Bernstein type result for compact spacelike surfaces, showing that the only compact maximal surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}_1$, where M^2 is a necessarily compact surface, are the slices. However, we will focus our work in the study of non necessarily compact but complete spacelike surfaces, that is, surfaces for which the induced Riemannian metric from the Lorentzian metric of the ambient space is complete. In this context, we will establish the following parametric version of a Calabi-Bernstein type result for complete maximal surfaces in the Lorentzian product space $M^2 \times \mathbb{R}_1$ (Theorem 2.1.3, [A1A11]):

Given M^2 a Riemannian surface with non-negative Gaussian curvature, $K_M \geq 0$, any complete maximal surface in $M^2 \times \mathbb{R}_1$ is totally geodesic. Moreover, if $K_M > 0$ at some point of M , then Σ is a slice.

It is worth observing that, on the contrary of what happens when we consider entire graphs in Riemannian ambient spaces, or maximal entire graphs in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space, a spacelike entire graph in $M^2 \times \mathbb{R}_1$ is not necessarily complete. Nevertheless, we will give a similar result for maximal surfaces which are complete with respect to the metric induced from the metric of the Riemannian product $M^2 \times \mathbb{R}$ (Theorem 2.2.1, [A1A11]):

Given M^2 a Riemannian surface with non-negative Gaussian curvature, $K_M \geq 0$, any maximal surface in $M^2 \times \mathbb{R}_1$ which is complete with respect to the metric induced from the Riemannian product $M^2 \times \mathbb{R}$ is totally geodesic. Moreover, if $K_M > 0$ at some point of Σ , then M is necessarily complete and Σ is a slice.

And as a consequence of this result, we will finally deduce a non-parametric version of a Calabi-Bernstein type result for entire maximal graphs (Theorem 2.2.3, [AlA11]):

Given M^2 a complete Riemannian surface with non-negative Gaussian curvature, any entire maximal graph $\Sigma(u)$ in $M^2 \times \mathbb{R}_1$ is totally geodesic. Moreover, if $K_M > 0$ at some point of M , then u is constant.

Along the rest of the chapter, we will present several examples of entire maximal graphs in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ that show that the assumptions that we have considered on the Gaussian curvature of M are necessary. These examples are constructed via two essentially different methods. The first of them is based on a nice duality result which establishes that given $\Omega \subset M^2$ a simply connected domain of a Riemannian surface M^2 , there exists a non-totally geodesic minimal graph in $\Omega \times \mathbb{R}$ if and only if there exists a non-totally geodesic maximal graph in $\Omega \times \mathbb{R}_1$, (Theorem 2.3.1, [AlA11]). In particular, this result will allow us to construct non-totally geodesic entire maximal graphs in the Lorentzian product space $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ from known entire minimal graphs in the Riemannian product $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Moreover, among the different maximal graphs that we will obtain, we will observe that there are complete and non-complete graphs, what shows up the fact that an entire maximal graph in a Lorentzian product space is not necessarily complete.

Finally, we will present an alternative method for obtaining new non-totally geodesic entire maximal graphs. We will obtain these new graphs directly from the partial differential equation that characterizes entire maximal graphs in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$. Although the complexity of this equation does not allow us to give a general solution, it is possible to obtain explicit solutions of the equation for particular type of functions. In particular, among other examples we will obtain two new families of entire maximal graphs in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$. The first of them consists on non-complete entire maximal graphs defined by functions that only depend on the second variable, and the second one is composed of complete entire maximal graphs determined by a radial function.

In the **third chapter** of this memory we will make a small break in order to change the point of view in our study of maximal surfaces in Lorentzian product spaces: we will consider problems of local nature. Firstly, we will start studying maximal surfaces with non-empty smooth boundary, $\partial\Sigma \neq \emptyset$, and specifically we will give the following relative parabolicity criterium for maximal surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}_1$ (Theorem 3.2.3, [AlA12]),

Given M^2 a complete Riemannian surface with non-negative Gaussian curvature, consider Σ a maximal surface in $M^2 \times \mathbb{R}_1$ with non-empty boundary, $\partial\Sigma \neq \emptyset$, and suppose

that the function $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$\phi(p) = r^2(p) - h^2(p), \quad r(p) = \text{dist}_M(\Pi(p), x_0), \quad x_0 \in M$$

is eventually positive and proper. Then Σ is a relatively parabolic surface.

Considering this result, we ask ourselves for the existence of natural conditions on the geometry of the immersion that imply the assumptions of the above theorem. In this context we will prove that, under the same assumptions on the surface M , any proper maximal immersion $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$ with non-empty boundary which is eventually contained in

$$\mathcal{W}_a = \{(x, t) \in M^2 \times \mathbb{R}_1 : |t| \leq a\hat{r}(x)\}$$

for some $0 < a < 1$ is relatively parabolic, (Corollary 3.2.5, [AlA12]).

Following with the same philosophy of looking for more natural or simpler situations where we can apply our parabolicity criterium, we will prove that every spacelike graph $\Sigma(u)$ over a starlike domain $\Omega \subset M$ is relatively parabolic. Moreover, this fact will allow us to give an alternative proof of the non-parametric version of our Calabi-Bernstein type theorem.

In the last section of the chapter, we will present another local approach to our Calabi-Bernstein results. This time, the local approach will be given in terms of a local integral inequality for the square of the norm of the second fundamental form (Theorem 3.4.1, [AlA11]). Specifically, we will prove that

Consider M^2 an analytic Riemannian surface with non-negative Gaussian curvature, $K_M \geq 0$, and $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$ a maximal surface in $M^2 \times \mathbb{R}_1$. Consider $p \in \Sigma$ and $R > 0$ such that the geodesic disc of radius R centered at p satisfies $D(p, R) \subset\subset \Sigma$. Then, for any $0 < r < R$ it holds

$$0 \leq \int_{D(p, R)} \|A\|^2 d\Sigma \leq c_r \frac{L(r)}{r \log(R/r)},$$

where $L(r)$ stands for the length of the geodesic circle of radius r centered at p , and $c_r = \frac{\pi^2(1+\alpha_r^2)^2}{4\alpha_r \arctan \alpha_r} > 0$ being $\alpha_r = -\inf_{D(p, r)} \Theta \geq 1$.

We will observe again that this local result has important global repercussions, since we will be able to prove that, under completeness assumption of the surface Σ , the obtained integral inequality implies the parametric version of our Calabi-Bernstein type theorem for complete maximal surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}_1$. As another application of this local approach we are able to estimate the maximum possible geodesic radius in terms of a positive local constant. A similar estimate for stable minimal surfaces in 3-dimensional Riemannian manifolds with non-negative Ricci curvature was given by Schoen in [Sch], and for non-flat spacelike surfaces having non-negative Gaussian curvature and zero mean curvature in a flat 4-dimensional Lorentzian space was given by Alías and Palmer [AlPa1].

In the **fourth chapter** we will study spacelike surfaces with constant mean curvature in generalized *Robertson-Walker* spaces of the form $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$. Before asserting the main results of this chapter, we will establish the notation and the basic definitions that we will need along the chapter. In particular, we are going to define the *de Sitter* space, and the steady state space as an open half of the first one. We will also check that the space $\mathbb{R}^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ is globally isometric to the steady state space. In fact, we will give an explicit expression of a global isometry between both spaces.

Once the basic preliminaries have been established, we will study firstly spacelike surfaces with constant mean curvature in the steady state space. This is due to the fact that we can give an alternative proof of our results in this space without making use of the specific techniques of the generalized *Robertson-Walker* spaces. Our results will be based on the generalized maximum principle by Omori-Yau [Omo, Yau]. In particular, we will observe that the steady state space admits a foliation by means of a family of totally umbilical spacelike surfaces, and we will prove the following Calabi-Bernstein type result (Theorem 4.2.3, [AlAl3]).

The only complete spacelike surfaces with constant mean curvature contained in a slab of the steady state space are the leaves of the foliation.

In the case where the surface is only bounded from above, we will also establish a similar result asking certain additional assumptions on the constant mean curvature of the surface.

These results can be extended in a natural way to the steady state type spaces $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ in the case where the Gaussian curvature of the surface M is non-negative. In this context, we will obtain an analogous Calabi-Bernstein type result (Theorem 4.3.2, [AlAl3]),

Given M^2 a (necessarily complete) Riemannian surface with non-negative Gaussian curvature, $K_M \geq 0$, any complete spacelike surface with constant mean curvature immersed into $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ and contained in a slab is necessarily a slice.

In the last section of this chapter we will generalize our results to arbitrary dimension. That is, we will consider the same type of problems for spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in an $(n + 1)$ -dimensional space of the form $M^n_{e^t} \times \mathbb{R}_1$, being M^n a Riemannian n -dimensional manifold. Nevertheless, in arbitrary dimension we only can assure that, under the same assumptions, the hypersurface must have constant mean curvature $H = 1$. This is due to the fact that to deduce that in the 2-dimensional case the surface must be a slice we use specific parabolicity techniques for the study of surfaces.

Finally, in the **fifth chapter** we will study surfaces with constant Gaussian curvature in product spaces, not only in the Lorentzian case, but exceptionally we will also consider Riemannian product spaces. This exception has two main reasons. Firstly, and on the contrary of what happens with minimal, or constant mean curvature, surfaces in a Riemannian product space, the study of surfaces

with constant Gaussian curvature in these product spaces is relatively recent, so there are still numerous open questions related to this topic. In fact, the problem of classifying the surfaces with constant Gaussian curvature in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ has been recently proposed by Alencar, do Carmo and Tribuzy in [ACT]. Therefore, we can consider that this work has been the starting point of the study of such surfaces. Secondly, the techniques we are going to use for the study of spacelike surfaces with constant Gaussian curvature in a Lorentzian product space can be easily adapted to the case of two-sided surfaces (and which are transversal to the vector field ∂_t at every point) with constant Gaussian curvature in a Riemannian product space.

We will begin the chapter summing up the basic preliminaries related to the geometry of space-like surfaces immersed into a Lorentzian product that we will need along this chapter, and we will extend them also to the case of two-sided surfaces immersed into a Riemannian product. Taking into account these preliminaries, we will prove as a first result of this chapter that, under compactness assumption on the surface, the following integral formula holds (Theorem 5.2.1, [AAA])

$$\int_{\Sigma} \Theta (2(K - \kappa_M) + \kappa_M(1 - \Theta^2)) = 0,$$

where K stands for the (non necessarily constant) Gaussian curvature of the surface Σ and κ_M denotes the Gaussian curvature of the surface M along the immersion. This integral formula is the fundamental tool of this chapter, and it will allow us to obtain some interesting consequences, both in the Riemannian and in the Lorentzian case.

As a first application of our integral formula we will obtain the following result for compact surfaces, with non necessarily constant Gaussian curvature (Theorems 5.2.2 and 5.2.4, [AAA]).

Let M^2 be a compact Riemannian surface with positive Gaussian curvature, $K_M > 0$, on a dense subset of M . Then, the only compact two-sided surfaces such that its function Θ does not change sign (respectively, spacelike surfaces) in $M^2 \times \mathbb{R}$ (respectively, $M^2 \times \mathbb{R}_1$) satisfying $K \geq K_M$ (respectively, $K \leq K_M$) over Σ are the slices.

Moreover, in the particular case where M^2 is either the sphere or the real projective plane, we will deduce as an interesting consequence of the above theorem that the only compact two-sided surfaces in the Riemannian product $M^2 \times \mathbb{R}$ such that its angle function does not change sign, and the only complete spacelike surfaces in the Lorentzian product $M^2 \times \mathbb{R}_1$, are the slices.

Finally, we will obtain an explicit expression for the Gaussian curvature of a graph (a spacelike graph in the Lorentzian case) on a product ambient space, in order to state our results for entire graphs. This point of view will allow us to find examples that will show that our results are no longer true when we consider $M^2 = \mathbb{H}^2$ the hyperbolic plane. In fact, we will obtain particular solutions to the differential equation of the constant Gaussian curvature of an entire graph both in the Riemannian and in the Lorentzian case. It is worth observing that the obtained solutions correspond to complete rotationally invariant surfaces with constant Gaussian curvature in the

product spaces $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$, as we can see from the classification of the complete rotationally invariant spacelike surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ given in the last section.

Introducción

El estudio de las superficies extremales de una variedad 3-dimensional dada ha generado gran interés investigador en el campo de la geometría global de superficies. En particular, en el caso en que consideremos variedades riemannianas, las *superficies minimales* han sido objeto de numerosos trabajos de investigación en geometría diferencial. Bernstein [Ber] aportó posiblemente uno de los resultados más importantes en este contexto: el teorema que lleva su nombre y que afirma que

los únicos grafos enteros minimales en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 son los planos.

Las superficies análogas a las superficies minimales en una variedad lorentziana 3-dimensional son las denominadas *superficies maximales*.

Una superficie *maximal* en una variedad lorentziana 3-dimensional es una superficie espacial con curvatura media idénticamente nula. Por el término *espacial* nos referimos al hecho de que la métrica inducida sobre la superficie a partir de la métrica del espacio ambiente es una métrica riemanniana. Las superficies maximales son, precisamente, aquellas superficies que maximizan localmente el área de entre todas las superficies cercanas compartiendo la misma frontera (véase, por ejemplo, [Fra, BrFl]). El estudio de las superficies maximales y, en general, de las superficies espaciales con curvatura media constante en variedades lorentzianas no sólo tiene interés desde un punto de vista puramente matemático, sino también por sus diversas aplicaciones físicas.

Desde un punto de vista físico, la importancia en relatividad general de las superficies maximales -o en general de las hipersuperficies maximales en un espacio lorentziano de dimensión arbitraria- queda clara desde que en 1944 Lichnerowicz [Lic] demostró que el problema de Cauchy con condiciones iniciales sobre una superficie maximal adquiere una forma particularmente agradable, reduciéndose a un sistema diferencial lineal de primer orden y a una ecuación diferencial no lineal elíptica de segundo orden. Por otro lado, las hipersuperficies espaciales con curvatura media constante se utilizan habitualmente como modelos matemáticos que describen situaciones físicas en las que el total de energía es proporcional al volumen de la hipersuperficie, debido a la tendencia natural de los sistemas a estabilizarse en estados de mínima energía. Además, las hipersuperficies espaciales con curvatura media constante no nula son utilizadas en el estudio de singularidades y de la propagación de ondas gravitacionales, como puede verse, por ejemplo, en [Lic, MaTi, Stu].

Desde un punto de vista matemático, las superficies espaciales con curvatura media constante, y en particular las superficies maximales, presentan interesantes propiedades de tipo Bernstein. Diremos que un resultado o propiedad es de *tipo Bernstein* cuando, bajo las hipótesis adecuadas, nos permita concluir la unicidad de ciertas superficies o hipersuperficies en un determinado espacio ambiente. De hecho, uno de los resultados más relevantes en el ámbito de la geometría global de superficies espaciales es el conocido *teorema de Calabi-Bernstein*, que surge de un modo natural a partir del teorema de Bernstein para superficies en \mathbb{R}^3 . El teorema de Calabi-Bernstein fue establecido por Calabi [Cal] en 1970, y afirma, en su *versión no paramétrica*, que

los únicos grafos enteros maximales en el espacio de Lorentz-Minkowski 3-dimensional, \mathbb{R}_1^3 , son los planos espaciales.

El teorema de Calabi-Bernstein también se puede formular en su *versión paramétrica* afirmando que

las únicas superficies maximales completas en \mathbb{R}_1^3 son los planos espaciales.

Conviene señalar aquí una primera diferencia fundamental entre la geometría global de superficies minimales en \mathbb{R}^3 y la de superficies maximales en \mathbb{R}_1^3 , puesto que es bien conocido que existen superficies minimales completas en \mathbb{R}^3 no planas, como son el catenoide y el helicoide.

El teorema de Calabi-Bernstein ha sido el germen de una amplia y productiva rama de investigación en el ámbito de la geometría diferencial actual. En primer lugar, este resultado admite una extensión natural a hipersuperficies maximales en dimensión arbitraria n . De hecho, Calabi [Cal] demostró que para $n \leq 4$ las únicas hipersuperficies maximales completas en \mathbb{R}_1^{n+1} son los hiperplanos espaciales, y Cheng y Yau [ChYa] extendieron este resultado a dimensión arbitraria. Este hecho muestra otra diferencia importante con su problema análogo riemanniano, puesto que el teorema de Bernstein deja de ser válido en dimensión $n > 7$ (véase [BGG]). Con posterioridad, han sido diversos los autores que se han aproximado, desde diferentes puntos de vista, al teorema de Calabi-Bernstein para superficies maximales en \mathbb{R}_1^3 ($n = 2$) proporcionando nuevas pruebas de éste, tanto en su versión paramétrica como en la no paramétrica (Kobayashi [Kob], McNertey [McN], Estudillo y Romero [EsRo1, EsRo2, EsRo3], Romero [Rom], Alías y Palmer [AlPa2, AlPa3]).

Por otro lado, merece la pena observar que no existe un resultado análogo al teorema de Calabi-Bernstein para el caso de grafos enteros temporales en \mathbb{R}_1^3 . En efecto, si z denota la coordenada temporal en \mathbb{R}_1^3 , el grafo determinado por

$$y = z \tanh x$$

es un ejemplo de un grafo temporal entero en \mathbb{R}_1^3 con curvatura media cero, que ni siquiera es llano. Lo mejor que se puede decir en esta situación es que la superficie debe ser conformemente equivalente al plano de Minkowski \mathbb{R}_1^2 , según un resultado de Milnor [Mil].

El espacio euclídeo \mathbb{R}^3 y el espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^3 son los ejemplos más básicos de una variedad 3-dimensional riemanniana y lorentziana, respectivamente. Una generalización natural de ellos es la siguiente. Sea $(M^2, \langle, \rangle_M)$ una superficie riemanniana conexa, y consideremos la variedad producto 3-dimensional $M^2 \times \mathbb{R}$ dotada de la métrica

$$\langle, \rangle = \langle, \rangle_M + \varepsilon dt^2,$$

donde $\varepsilon = \pm 1$. En el caso en que $\varepsilon = 1$ obtenemos un espacio producto riemanniano estándar, mientras que en el caso $\varepsilon = -1$ obtenemos una variedad lorentziana que denotaremos usualmente por $M^2 \times \mathbb{R}_1$ a fin de distinguirla del producto riemanniano. Observemos que el espacio euclídeo y el espacio de Lorentz-Minkowski son un caso particular de los espacios que acabamos de definir sin más que considerar $M = \mathbb{R}^2$ el plano euclídeo.

A lo largo de los últimos años, el estudio y la investigación en el campo de la teoría de superficies en espacios producto riemannianos $M^2 \times \mathbb{R}$ ha experimentado un importante desarrollo, especialmente desde que en [AbRo] Abresch y Rosenberg generalizaran el teorema de Hopf a los espacios producto homogéneos $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. En concreto, a partir de los trabajos de Rosenberg [Ros] y de Meeks y Rosenberg [MeRo] donde estudian determinados aspectos de la geometría de superficies minimales inmersas en un espacio producto riemanniano, los grafos enteros minimales inmersos en dichos espacios, y más generalmente los grafos con curvatura media constante, han generado gran interés. De hecho, diversos autores han obtenido con éxito algunos resultados de tipo Bernstein en este contexto (véanse, por ejemplo, [ADR, EsRo]). No obstante, una condición indispensable para poder establecer un resultado de tipo Bernstein en este espacio ambiente es exigir como hipótesis que la curvatura de Gauss de la superficie M^2 sea no negativa. Esta hipótesis es necesaria puesto que se conocen ejemplos de grafos enteros minimales no triviales sobre $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (véanse, por ejemplo, los trabajos de Duc y Hieu [DuHi1, DuHi2], Duc y Salavessa [DuSa], Nelli y Rosenberg [NeRo], Montiel y Onnis [MoOn] y Onnis [Onn]).

Por otro lado, la estructura conforme de una superficie minimal completa tiene una fuerte influencia sobre sus propiedades globales. En particular, un problema de especial relevancia en geometría diferencial es el de decidir si una determinada superficie minimal es parabólica o no lo es. Se dice que una superficie riemanniana (Σ^2, g) con frontera no vacía, $\partial\Sigma \neq \emptyset$, es *relativamente parabólica* si cualquier función armónica acotada sobre la superficie viene determinada por los valores que toma en su frontera. Una caracterización interesante, y útil en la práctica, de la parabolicidad relativa de una superficie dada Σ^2 es la existencia de una función superarmónica propia no negativa sobre Σ , (véanse por ejemplo los trabajos de Meeks y Pérez [MePe] y de Pérez [Per]). Por otro lado, clásicamente se dice que una superficie riemanniana sin frontera es *parabólica* si no admite ninguna función subarmónica negativa. No obstante, en otros textos, como por ejemplo el trabajo de Grigor'yan [Gri], se introduce el término de *recurrencia* para definir la siguiente propiedad de parabolicidad para superficies riemannianas sin frontera. Se dice que una superficie riemanniana (Σ, g) es *recurrente* si dado cualquier conjunto abierto $O \subset \Sigma$ con frontera diferencia-

ble, $\Sigma \setminus O$ es una superficie relativamente parabólica vista como una superficie con frontera no vacía. Merece la pena observar que ambos conceptos coinciden, lo que se sigue de la observación de que una variedad riemanniana sin frontera es recurrente precisamente cuando casi todos los caminos brownianos son densos en la variedad, [Gri, Theorem 5.1]. Como una pequeña observación, hay que aclarar que la terminología usada actualmente por la comunidad matemática con respecto a este concepto no está unificada en la bibliografía. De hecho, en muchos textos usan el término parabolicidad en el contexto de superficies con frontera no vacía, y hablan de recurrencia o de no hiperbolicidad para el caso de superficies sin frontera, aunque las definiciones son equivalentes en cualquier caso.

Hay diversos trabajos que dejan constancia de la estrecha relación existente entre la condición de parabolicidad y las superficies minimales; y más aún, que muestran cómo la parabolicidad es una fuerte herramienta para el estudio de la geometría de las superficies minimales. Por ejemplo, en el trabajo de Meeks y Pérez [MePe] y en las referencias que en éste se hallan, podemos encontrar una relación bastante completa de los principales problemas y cuestiones abiertas en geometría diferencial relacionando ambos conceptos. Por otro lado, cabe destacar que una de las ideas fundamentales de la prueba del teorema de tipo Bernstein para superficies minimales en $M^2 \times \mathbb{R}$ de Alías, Dajczer y Ripoll [ADR] es la de demostrar que, bajo las hipótesis del teorema, toda superficie minimal completa en $M^2 \times \mathbb{R}$ ha de ser necesariamente parabólica. La importancia del estudio de la parabolicidad también queda plenamente justificada por el hecho de que se trata de un concepto que mantiene una estrecha relación con diversas áreas de la matemática, tales como la geometría riemanniana, el análisis estocástico, las ecuaciones en derivadas parciales y la teoría potencial, por lo que permite interrelacionar distintas áreas de la investigación matemática, y por ende las técnicas y herramientas clásicas utilizadas frecuentemente en dichas áreas. Una referencia fundamental para profundizar en el estudio de las propiedades de parabolicidad y parabolicidad relativa es el texto de Grigor'yan [Gri].

Recientemente, Fernández y López [FeLo] han continuado el estudio de las superficies maximales en el espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^3 tratando el problema desde un punto de vista local. En concreto, han probado que las superficies maximales con frontera no vacía en \mathbb{R}_1^3 son relativamente parabólicas cuando la norma lorentziana de \mathbb{R}_1^3 sea una función eventualmente positiva y propia sobre la superficie maximal.

A lo largo de las páginas anteriores hemos presentado un breve resumen de algunas de las líneas actuales de investigación en matemática referentes al estudio de las superficies minimales (respectivamente, maximales), en variedades riemannianas (respectivamente, lorentzianas) 3-dimensionales. No obstante, hasta el momento no se ha planteado el estudio de este tipo de problemas para superficies maximales en un espacio producto lorentziano del tipo $M^2 \times \mathbb{R}_1$. A la vista del amplio trabajo de investigación realizado sobre superficies minimales en espacios producto riemannianos, parece natural preguntarse en primer lugar qué puede decirse sobre la geometría global de las superficies

maximales en los correspondientes espacios producto lorentzianos. Como ya hemos mencionado antes, las distintas generalizaciones y extensiones del teorema de Calabi-Bernstein han constituido, y aún constituyen hoy en día, una productiva rama en la investigación matemática. Sin embargo, en todos ellos se buscan generalizaciones del teorema de Calabi-Bernstein considerando el mismo espacio ambiente, es decir, el espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^{n+1} . Por ello, nos planteamos como un **primer objetivo** en esta tesis el estudio de la geometría global de superficies maximales en un espacio producto lorentziano del tipo $M^2 \times \mathbb{R}_1$, a fin de buscar resultados de tipo Calabi-Bernstein, tanto en su versión paramétrica como en su versión no paramétrica.

Como un **segundo objetivo**, nos proponemos tratar el estudio de las superficies maximales en espacios producto lorentzianos desde un punto de vista local. Así, siguiendo las ideas de Fernández y López [FeLo], nos planteamos el estudio de las propiedades de parabolicidad relativa de una superficie maximal en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ con frontera diferenciable no vacía. Y no sólo eso, sino que insistiremos en las relaciones que se pueden establecer entre este tipo de resultados de tipo local y los resultados globales de tipo Calabi-Bernstein.

Los espacios producto lorentzianos $M^2 \times \mathbb{R}_1$ son un caso particular de una familia más grande de variedades lorentzianas 3-dimensionales, los modelos cosmológicos conocidos como *espacios de Robertson-Walker generalizados*. Siguiendo la terminología introducida en [ARS1], si $(M^2, \langle, \rangle_M)$ es una superficie riemanniana conexa, un espacio de *Robertson-Walker* generalizado se define como el espacio-tiempo resultante de dotar al producto topológico $M^2 \times \mathbb{R}$ de la métrica lorentziana

$$\langle, \rangle = \varrho^2(t) \langle, \rangle_M - dt^2,$$

donde $\varrho \in C^\infty(\mathbb{R})$ es una función diferenciable positiva. La función ϱ es conocida como función *warping*, y es usual denotar a la variedad lorentziana así obtenida por $M^2_{\varrho} \times \mathbb{R}_1$. Alías, Romero y Sánchez, [ARS1, ARS2, ARS3], han obtenido diversos resultados de tipo Calabi-Bernstein para superficies espaciales compactas con curvatura media constante mediante interesantes fórmulas integrales, no sólo para el caso en que el espacio ambiente sea un espacio de *Robertson-Walker* generalizado, sino también en espacios ambiente lorentzianos más generales.

Los espacios de *Robertson-Walker* generalizados admiten una foliación por las superficies espaciales totalmente umbilicales $M \times \{t\}, t \in \mathbb{R}$, de curvatura media constante

$$H(t) = \frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)},$$

conocidas en la literatura como *slices*. Únicamente hay dos casos, salvo homotecia, para los que todos los *slices* de $M^2_{\varrho} \times \mathbb{R}_1$ tienen la misma curvatura media, que podemos suponer $H(t) = 0$ o $H(t) = 1$. El primer caso se corresponde con los espacios producto lorentzianos $M^2 \times \mathbb{R}_1$, mientras que el segundo lo obtenemos en el caso en que la función *warping* sea $\varrho(t) = e^t$, y por tanto el espacio de *Robertson-Walker* generalizado correspondiente es del tipo $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$. De este modo,

las superficies análogas a las superficies maximales en estos nuevos espacios son las superficies espaciales con curvatura media constante $H = 1$.

Como un caso particular de esta nueva familia de variedades lorentzianas, se tiene que cuando $M^2 = \mathbb{R}^2$ es el plano euclídeo, el espacio resultante $\mathbb{R}^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ es isométrico a la región abierta del espacio de *de Sitter* 3-dimensional conocida como el espacio *steady state*, (véase [AlAl3]). Por esta razón, llamaremos a los espacios generalizados de *Robertson-Walker* del tipo $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ *espacios tipo steady state*. El espacio de *de Sitter* es una variedad lorentziana 3-dimensional completa y simplemente conexa, con curvatura seccional constante uno, por lo que puede considerarse como el espacio análogo a la esfera euclídea en el espacio-tiempo 4-dimensional de Lorentz-Minkowski.

En 1977 Goddard [God] conjeturó que las únicas superficies espaciales completas con curvatura media constante en el espacio de *de Sitter* debían ser las totalmente umbilicales. Esta conjetura así enunciada es falsa, como lo demuestra la existencia de los cilindros hiperbólicos estudiados por Montiel en [Mon1], (para más detalles véase la Sección 4.2 del Capítulo 4 de esta memoria). Sin embargo, ninguno de estos cilindros hiperbólicos está completamente contenido en el espacio *steady state*. A pesar de tener una respuesta negativa, la conjetura de Goddard ha motivado numerosos trabajos posteriores de investigación, puesto que en diversas ocasiones se ha buscado demostrar la validez de la conjetura bajo ciertas hipótesis adicionales. Así, por ejemplo, Akutagawa [Aku] y Ramanathan [Ram] demostraron en 1987, y de modo independiente, la conjetura de Goddard bajo la hipótesis adicional $H^2 \leq 1$.

En [Mon1] Montiel también dio una respuesta afirmativa a la conjetura de Goddard en el caso compacto, es decir, las únicas superficies espaciales compactas con curvatura media constante en el espacio de *de Sitter* son las superficies espaciales compactas totalmente umbilicales. Pero, de nuevo, ninguna de estas superficies está contenida en el espacio *steady state*. De hecho, como ya veremos, el espacio *steady state* no admite superficies espaciales compactas. Fue de nuevo Montiel en [Mon2] quien más adelante demostró la existencia de superficies espaciales completas, no compactas y no totalmente umbilicales en el espacio *steady state*, con curvatura media constante $H \geq 1$, probando por tanto que la conjetura de Goddard tampoco es cierta en este espacio.

A la vista de estos resultados, nos planteamos como un **tercer objetivo** de esta memoria de investigación estudiar las superficies espaciales con curvatura media constante, y en particular con $H = 1$, en espacios tipo *steady state*, tratando de obtener resultados originales de tipo Calabi-Bernstein en este contexto. Cuando particularicemos nuestros resultados al caso $M^2 = \mathbb{R}^2$, es decir al espacio *steady state*, esperamos que los resultados obtenidos complementen los resultados conocidos hasta el momento referentes a la conjetura de Goddard. Es decir, nos proponemos probar la conjetura de Goddard en el espacio *steady state* bajo ciertas hipótesis adicionales adecuadas.

A pesar de que la curvatura media es el invariante geométrico extrínseco más importante y estudiado desde que Sophie Germain [Ger] lo introdujo mientras estudiaba algunos problemas de elasticidad, desde un punto de vista intrínseco la curvatura de Gauss es sin duda el invariante

geométrico que más ha captado la atención de los matemáticos a lo largo de la historia. En concreto, un problema interesante es el de caracterizar y determinar las superficies con curvatura de Gauss constante inmersas en un determinado espacio ambiente. A pesar de su nombre, fue Olinde Rodrigues [Rod] el primero que se planteó comparar el elemento de área de una superficie con el de su correspondiente aplicación esférica, y por tanto el primero en estudiar la función curvatura de Gauss tal y como la conocemos hoy en día. No obstante, debemos a Gauss [Gau] el conocido *teorema egregium de Gauss* que afirma que la curvatura de Gauss es un concepto que sólo depende de la métrica de la superficie, es decir, es un invariante geométrico intrínseco.

Como parece natural, el primer problema que se consideró en este contexto fue el de estudiar y caracterizar las superficies completas con curvatura de Gauss constante en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 . Así, Liebmann [Lie] caracterizó a las esferas como las únicas superficies completas en \mathbb{R}^3 con curvatura de Gauss constante positiva, y Hilbert [Hil] demostró la no existencia de superficies completas con curvatura de Gauss constante negativa en el espacio euclídeo. Por último, Hartman y Nirenberg [HaNi], Stoker [Sto] y Massey [Mas] probaron de forma independiente que una superficie completa con curvatura de Gauss idénticamente nula en \mathbb{R}^3 ha de ser un cilindro recto sobre una curva plana, simple y definida para todo valor de su parámetro arco.

Recientemente Aledo, Espinar y Gálvez [AEG1, AEG2] han abordado el problema análogo para superficies completas con curvatura de Gauss constante en los espacios producto homogéneos $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. En concreto, en [AEG1] han probado que, salvo isometría, existe una única superficie completa con curvatura de Gauss constante $K > 1$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y $K > 0$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, siendo estas superficies rotacionalmente invariantes. Además, han demostrado que existe una familia infinita de superficies completas de revolución en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura de Gauss constante K para cada valor $-1 \leq K < 0$. Por último, también dan un resultado de tipo Hilbert para probar la no existencia de superficies completas, con curvatura de Gauss constante $K < -1$, tanto en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ como en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Más tarde, en [AEG2] probaron también la no existencia de tales superficies en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ para el caso $0 < K < 1$. Por otro lado, en [EGR] Espinar, Gálvez y Rosenberg han establecido que las únicas superficies completas con curvatura extrínseca constante en los productos homogéneos $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ son las esferas rotacionales.

No obstante, igual que ocurría con las superficies de curvatura media constante, observamos de nuevo que hasta el momento no se conocen resultados en esta dirección en el caso en que consideremos superficies espaciales con curvatura de Gauss constante en espacios producto lorentzianos. Es por ello que nos planteamos como un **cuarto** y último **objetivo** de esta memoria encontrar resultados de unicidad para superficies espaciales con curvatura de Gauss constante en productos lorentzianos del tipo $M^2 \times \mathbb{R}_1$.

Cabe destacar también que, en la prueba de Aledo, Espinar y Gálvez de los resultados de tipo Liebmann para superficies con curvatura de Gauss constante en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, [AEG1], los autores utilizan como una herramienta fundamental la variable compleja, y en particular la

existencia de una cierta diferencial holomorfa. Sin embargo, no podemos aplicar esta misma técnica al caso lorentziano debido principalmente a que el comportamiento de las superficies espaciales de revolución con curvatura de Gauss constante en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ difiere mucho del de las superficies de revolución con curvatura de Gauss constante en el producto riemanniano $M^2 \times \mathbb{R}$. En este trabajo emplearemos técnicas diferentes basadas en fórmulas integrales para superficies compactas que también son válidas en el caso riemanniano. Por ello aprovecharemos esta situación para intentar contribuir también con resultados originales en el caso riemanniano.

Una vez que hemos presentado el contexto en el cual queda enmarcada esta tesis doctoral, y que hemos expuesto los principales objetivos de ésta, pasamos a describir cómo se encuentra estructurada. Esta memoria de investigación consta de cinco capítulos. El **primer capítulo** es un capítulo preliminar, dedicado a la presentación de los conceptos y propiedades generales que necesitaremos a lo largo de este trabajo, así como de los preliminares específicos necesarios para la primera parte de la tesis.

Comenzaremos el capítulo definiendo los espacios producto lorentzianos $M^2 \times \mathbb{R}_1$ como los espacios ambiente en los cuales vamos a trabajar. Describiremos las principales propiedades de un producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$, haciendo especial hincapié en el modo en que la geometría de $M^2 \times \mathbb{R}_1$ queda completamente determinada a partir de la geometría de la superficie M^2 . A continuación, introduciremos las superficies espaciales como los elementos que serán objeto directo de nuestro estudio. Por un lado, recordaremos las fórmulas de Gauss y Weingarten como las leyes de derivación en el espacio ambiente de un campo tangente a la superficie espacial en la dirección de otro campo tangente y del campo normal N , respectivamente. Y por otro, las ecuaciones fundamentales de una superficie espacial: la ecuación de Gauss y la ecuación de Codazzi.

Aprovecharemos también este primer capítulo para definir dos de las funciones que jugarán un papel fundamental a lo largo de esta memoria: la función altura h de una superficie espacial sobre $M^2 \times \mathbb{R}_1$ y la función Θ , que mide el ángulo hiperbólico entre los campos vectoriales temporales y unitarios ∂_t y N . Obtendremos expresiones para los operadores gradiente y laplaciano de ambas funciones sobre una superficie espacial Σ y veremos cómo estas expresiones se simplifican notablemente en el caso especial de considerar una superficie maximal, es decir, en el caso en que $H = 0$. Por último, vamos a realizar un estudio detallado de la geometría de los grafos espaciales sobre $M^2 \times \mathbb{R}_1$, obteniendo expresiones explícitas para la segunda forma fundamental y para la función curvatura media de un grafo espacial en función de los operadores diferenciales de la función u que lo determine.

A lo largo del **segundo capítulo** vamos a analizar la geometría global de las superficies maximales en un espacio producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$, estableciendo nuevos resultados de tipo Calabi-Bernstein para dichas superficies. Comenzamos el capítulo probando un resultado topológico auxiliar, pero que tiene gran interés por sí mismo. En concreto, probaremos que si tenemos una superficie espacial completa $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$, entonces la superficie M^2 es necesariamente comple-

ta, y la proyección $\Pi = \pi_M \circ f : \Sigma \rightarrow M$ es una aplicación recubridora (Lema 2.1.1, [AlA11]). Como una consecuencia interesante de este lema se deduce que en el caso en que M sea una superficie riemanniana simplemente conexa, toda superficie espacial completa Σ es un grafo entero.

Ya desde el punto de vista geométrico que nos concierne, damos un primer resultado de tipo Calabi-Bernstein para superficies espaciales compactas, probando que las únicas superficies compactas maximales en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ son los *slices*. No obstante, centraremos nuestro trabajo en el estudio de superficies espaciales completas, es decir, superficies tales que la métrica riemanniana inducida a partir de la métrica lorentziana del espacio ambiente sea completa, pero no necesariamente compactas. En este contexto, estableceremos en primer lugar la siguiente versión paramétrica de un resultado de Calabi-Bernstein para superficies completas maximales en el producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$ (Teorema 2.1.3, [AlA11]):

Dada M^2 una superficie riemanniana con curvatura de Gauss no negativa, $K_M \geq 0$, toda superficie maximal completa en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ es totalmente geodésica. Además, si $K_M > 0$ para algún punto de M , entonces Σ es un slice.

Hay que tener en cuenta que, al contrario de lo que ocurre cuando consideramos grafos enteros en espacios ambiente riemannianos o grafos enteros maximales en el espacio 3-dimensional de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^3 , un grafo entero espacial en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ no es necesariamente completo. Por tanto, no podemos probar *a priori* que cualquier grafo entero maximal en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ deba ser totalmente geodésico como consecuencia del resultado anterior. No obstante, demostraremos un resultado similar para superficies maximales que sean completas con respecto a la métrica inducida a partir de la métrica del producto riemanniano $M^2 \times \mathbb{R}$ (Teorema 2.2.1, [AlA11]):

Dada M^2 una superficie riemanniana con curvatura de Gauss no negativa, $K_M \geq 0$, cualquier superficie maximal en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ que sea completa con respecto a la métrica inducida por el producto riemanniano $M^2 \times \mathbb{R}$ es totalmente geodésica. Además, si $K_M > 0$ en algún punto de Σ , entonces M es necesariamente completa y Σ es un slice.

Y como consecuencia de este resultado, deduciremos finalmente una versión no paramétrica de un resultado de tipo Calabi-Bernstein para grafos enteros maximales (Teorema 2.2.3, [AlA11]):

Dada M^2 una superficie riemanniana completa con curvatura de Gauss no negativa, $K_M \geq 0$, cualquier grafo entero maximal $\Sigma(u)$ en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ es totalmente geodésico. Además, si $K_M > 0$ en algún punto de M , entonces u es constante.

En lo que resta de capítulo, vamos a presentar diversos ejemplos de grafos enteros maximales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ que muestran que las hipótesis consideradas sobre la curvatura de Gauss de M son necesarias. Estos ejemplos vendrán contruidos de dos modos esencialmente distintos. El primero

de ellos se basa en un bonito resultado de dualidad que establece que dado $\Omega \subset M^2$ un dominio simplemente conexo de una superficie riemanniana M^2 , existe un grafo minimal no totalmente geodésico en $\Omega \times \mathbb{R}$ si y sólo si existe un grafo maximal no totalmente geodésico en $\Omega \times \mathbb{R}_1$, (Teorema 2.3.1, [A1A11]). En particular, este resultado nos permitirá construir grafos enteros maximales no totalmente geodésicos en el producto lorentziano $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ a partir de grafos enteros minimales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ previamente conocidos. Además, entre los distintos grafos maximales que vamos a obtener, observaremos que hay grafos completos y grafos no completos, por lo que vamos a poner de manifiesto el hecho de que un grafo entero maximal en un producto lorentziano no tiene que ser necesariamente completo.

Por último, estableceremos un nuevo procedimiento para la obtención de nuevos grafos enteros maximales no totalmente geodésicos. Esta vez obtendremos los grafos directamente a partir de la ecuación en derivadas parciales que caracteriza los grafos maximales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$. A pesar de que la complejidad de esta ecuación no nos permite dar una solución general de ella, sí es posible encontrar, para tipos particulares de funciones, soluciones explícitas a la ecuación. En particular, entre otros ejemplos obtendremos dos nuevas familias de grafos enteros maximales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$, la primera de ellas se trata de grafos no completos que vienen determinados por funciones que dependen únicamente de una variable, y la segunda está formada por grafos enteros maximales completos determinados por una función radial.

En el **tercer capítulo** de esta memoria vamos a hacer un breve paréntesis para cambiar el punto de vista en nuestro estudio de las superficies maximales en espacios producto lorentzianos, y pasaremos a considerar problemas de naturaleza local. En primer lugar, nos plantearemos el estudio de superficies maximales con frontera no vacía, $\partial\Sigma \neq \emptyset$, y en concreto vamos a probar el siguiente criterio de parabolicidad relativa para superficies maximales en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ (Teorema 3.2.3, [A1A12]),

Dada M^2 una superficie riemanniana completa con curvatura de Gauss no negativa, $K_M \geq 0$, consideremos Σ una superficie maximal en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ con frontera no vacía, $\partial\Sigma \neq \emptyset$, y supongamos que la función $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(p) = r^2(p) - h^2(p), \quad r(p) = \text{dist}_M(\Pi(p), x_0), \quad x_0 \in M$$

es una función eventualmente positiva y propia. Entonces Σ es una superficie relativamente parabólica.

A la vista de este resultado, nos preguntamos por la existencia de condiciones naturales sobre la geometría de la inmersión bajo las cuales se verifiquen las hipótesis de este teorema. En este contexto probaremos que, bajo las mismas hipótesis sobre la superficie M , cualquier inmersión maximal propia $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$ con frontera no vacía que eventualmente esté contenida en

$$\mathcal{W}_a = \{(x, t) \in M^2 \times \mathbb{R}_1 : |t| \leq a\hat{r}(x)\}$$

para cualquier $0 < a < 1$ es relativamente parabólica, (Corolario 3.2.5, [AlA12]).

Continuando con la misma filosofía de buscar situaciones *sencillas* o naturales donde podamos aplicar nuestro criterio de parabolicidad, demostraremos que todo grafo espacial $\Sigma(u)$ sobre un dominio estrellado $\Omega \subset M$ es relativamente parabólico. Además, este hecho nos permitirá dar una demostración alternativa a la versión no paramétrica de nuestro teorema de Calabi-Bernstein.

En la última sección del capítulo, presentaremos otra aproximación local a nuestros resultados de Calabi-Bernstein. Esta vez, el enfoque local viene dado en términos de una desigualdad integral local para el cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental (Teorema 3.4.1, [AlA11]). En concreto, probamos que:

Consideremos M^2 una superficie riemanniana analítica con curvatura de Gauss no negativa, $K_M \geq 0$, y $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$ una superficie maximal en $M^2 \times \mathbb{R}_1$. Sean $p \in \Sigma$ y $R > 0$ de modo que el disco geodésico de radio R centrado en p satisfaga $D(p, R) \subset\subset \Sigma$. Entonces, para cualquier $0 < r < R$ se tiene

$$0 \leq \int_{D(p,R)} \|A\|^2 d\Sigma \leq c_r \frac{L(r)}{r \log(R/r)},$$

donde $L(r)$ denota la longitud del círculo geodésico de radio r centrado en el punto p y $c_r = \frac{\pi^2(1+\alpha_r^2)^2}{4\alpha_r \arctan \alpha_r} > 0$, siendo a su vez $\alpha_r = -\inf_{D(p,r)} \Theta \geq 1$.

De nuevo observamos que este resultado local tiene importantes repercusiones globales, puesto que probaremos que, bajo la hipótesis de completitud de la superficie Σ , la desigualdad integral obtenida implica la versión paramétrica de nuestro resultado de Calabi-Bernstein para superficies maximales completas en $M^2 \times \mathbb{R}_1$. Como otra aplicación de esta aproximación local somos capaces de estimar el máximo radio geodésico posible en términos de una constante local positiva. Una estimación similar para superficies minimales estables en variedades riemannianas 3-dimensionales con curvatura de Ricci no negativa fue dada por Schoen en [Sch], y para superficies espaciales no llanas con curvatura de Gauss no negativa y curvatura media nula en un espacio llano lorentziano 4-dimensional por Alías y Palmer en [AlPa1].

En el **cuarto capítulo** vamos a estudiar superficies espaciales con curvatura media constante en espacios de *Robertson-Walker* generalizados de la forma $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$. Previamente a la obtención de los resultados principales del capítulo, estableceremos la notación y las definiciones básicas que necesitaremos a lo largo de éste. En particular, definiremos el espacio de *de Sitter* y el espacio *steady state* como *una mitad* abierta del primero, y comprobaremos que el espacio $\mathbb{R}^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ es globalmente isométrico al espacio *steady state*. De hecho, daremos una expresión explícita de una isometría global entre ambos espacios.

Una vez establecidos estos preliminares, pasaremos a estudiar en primer lugar las superficies espaciales con curvatura media constante en el espacio *steady state*. Esto es debido a que podemos

dar una prueba alternativa de nuestros resultados en este espacio sin utilizar las técnicas específicas de los espacios de *Robertson-Walker* generalizados, basándonos en el conocido principio del máximo generalizado de Omori-Yau [Omo, Yau]. En concreto, tras observar que el espacio *steady state* admite una foliación por medio de una familia de superficies espaciales totalmente umbilicales, probaremos el siguiente resultado de tipo Calabi-Bernstein (Teorema 4.2.3, [AlA13]),

Las únicas superficies espaciales completas con curvatura media constante contenidas en una banda del espacio steady state son las hojas de la foliación.

En el caso en que la superficie sólo esté acotada superiormente también estableceremos un resultado similar imponiendo ciertas hipótesis adicionales sobre la curvatura media constante de la superficie.

Estos resultados se pueden extender de un modo natural a los espacios tipo *steady state* $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ en el caso en que la curvatura de Gauss de la superficie M sea no negativa, obteniendo el correspondiente resultado de tipo Calabi-Bernstein en este contexto (Teorema 4.3.2, [AlA13]),

Sea M^2 una superficie riemanniana (necesariamente completa) con curvatura de Gauss no negativa, $K_M \geq 0$. Entonces cualquier superficie espacial completa con curvatura media constante inmersa en $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ y contenida en una banda es un slice.

En la última sección del capítulo vamos a dar un salto a dimensión arbitraria, para observar que los resultados obtenidos en dimensión $n = 2$ se pueden trasladar parcialmente a hipersuperficies espaciales con curvatura media constante en un espacio $(n + 1)$ -dimensional del tipo $M^n_{e^t} \times \mathbb{R}_1$, siendo M^n una variedad riemanniana n -dimensional. No obstante, en dimensión arbitraria sólo podremos asegurar, bajo las mismas hipótesis que en el caso 2-dimensional, que la hipersuperficie tiene que tener curvatura media constante $H = 1$. Esto es debido a que, para concluir en el caso 2-dimensional que la superficie sea un *slice*, usamos técnicas de parabolicidad específicas para el estudio de superficies.

Por último, en el **quinto capítulo** estudiamos superficies con curvatura de Gauss constante en espacios producto. Haciendo una excepción, no sólo consideraremos espacios producto lorentzianos, sino también riemannianos. Esta excepción se debe fundamentalmente a dos causas. En primer lugar, y al contrario de lo que sucede con las superficies minimales o de curvatura media constante en los espacios producto riemannianos, el estudio de las superficies con curvatura de Gauss constante en estos espacios es relativamente reciente, por lo que quedan numerosas cuestiones abiertas por resolver. De hecho, el problema de clasificar las superficies con curvatura de Gauss constante en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ fue propuesto por Alencar, do Carmo y Tribuzy en [ACT], por lo que podemos considerar que este trabajo ha sido el punto de partida para el estudio de dichas superficies. En segundo lugar, las técnicas utilizadas para el estudio de superficies espaciales con curvatura de Gauss constante en un espacio producto lorentziano se pueden adaptar fácilmente para el estudio

de superficies *two-sided* (que además sean transversales al campo vectorial ∂_t en todo punto) con curvatura de Gauss constante en un producto riemanniano.

Vamos a comenzar el capítulo resumiendo los preliminares básicos referentes a la geometría de superficies espaciales inmersas en un producto lorentziano necesarios en este capítulo, y extendiéndolos para englobar también el caso de superficies *two-sided* inmersas en un espacio producto riemanniano. A partir de aquí demostraremos en primer lugar que, bajo la hipótesis de compacidad de la superficie, se verifica la siguiente fórmula integral (Teorema 5.2.1, [AAA])

$$\int_{\Sigma} \Theta (2(K - \kappa_M) + \kappa_M(1 - \Theta^2)) = 0,$$

donde K denota la función curvatura de Gauss de la superficie Σ (no necesariamente constante) y κ_M la curvatura de Gauss de la superficie M a lo largo de la inmersión. Esta fórmula integral va a ser la herramienta fundamental de este capítulo y nos permitirá obtener interesantes consecuencias, tanto en el caso riemanniano como en el lorentziano.

Como una primera aplicación de la fórmula integral anterior obtendremos el siguiente resultado para superficies compactas con curvatura de Gauss no necesariamente constante en espacios producto (Teoremas 5.2.2 y 5.2.4, [AAA]).

*Sea M^2 una superficie riemanniana compacta con curvatura de Gauss positiva, $K_M > 0$, sobre un subconjunto denso de M . Entonces, las únicas superficies compactas *two-sided* tales que su función Θ no cambie de signo (respectivamente, superficies espaciales) en $M^2 \times \mathbb{R}$ (respectivamente, $M^2 \times \mathbb{R}_1$) verificando $K \geq K_M$ (respectivamente, $K \leq K_M$) sobre Σ son los *slices*.*

Además, en el caso particular en que M^2 sea la esfera o el plano proyectivo real, deduciremos como una interesante consecuencia del teorema anterior que las únicas superficies compactas *two-sided* en el producto riemanniano $M^2 \times \mathbb{R}$ tales que su función ángulo no cambie de signo y las únicas superficies completas espaciales en el producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$ son los *slices*.

Por último, calcularemos la curvatura de Gauss de un grafo (espacial en el caso lorentziano) sobre un espacio producto en función de los operadores diferenciales de la función que determina el grafo, y enunciaremos nuestros resultados para grafos enteros en términos de las ecuaciones diferenciales obtenidas. Este enfoque nos va a permitir encontrar ejemplos que muestren que nuestros resultados dejan de ser ciertos cuando consideramos $M^2 = \mathbb{H}^2$ el plano hiperbólico. De hecho, vamos a encontrar soluciones particulares a la ecuación diferencial de la curvatura de Gauss constante de un grafo entero en este caso. Cabe destacar que las soluciones que obtendremos se van a corresponder con superficies de revolución completas con curvatura de Gauss constante en los espacios producto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$, como podremos observar en la clasificación de las superficies espaciales de revolución completas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ realizada en la última sección.

Capítulo 1

Preliminares

Sumario. El objetivo de este primer capítulo es introducir todos los conceptos básicos que aparecerán de un modo significativo a lo largo de esta memoria. En particular, introducimos el espacio producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$ y definimos las superficies espaciales en $M^2 \times \mathbb{R}_1$. En concreto introducimos el concepto de superficie maximal y establecemos algunas fórmulas y expresiones generales. Por último, estudiamos con más detalle la geometría de los grafos enteros espaciales.

Abstract. *The aim of this first chapter is to introduce the basic concepts that will appear lately along this work. In particular, we introduce the Lorentzian product space $M^2 \times \mathbb{R}_1$ and we define the spacelike surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}_1$. Specifically, we introduce the concept of maximal surface and we establish some general expressions and formulae. Finally, we study the geometry of entire spacelike graphs with a bit more of detail.*

1.1. El espacio producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$.

El objetivo de este capítulo es el de introducir todos aquellos conceptos y objetos que serán clave para nuestro trabajo, reflejando también algunas de sus propiedades y características principales. Entre todos estos objetos, el primero a considerar es sin duda el espacio ambiente en el que va a estar enmarcado nuestro trabajo, es decir, el espacio producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$. Dada $(M^2, \langle, \rangle_M)$ una superficie riemanniana conexa, denotaremos por $M^2 \times \mathbb{R}_1$ a la variedad lorentziana 3-dimensional obtenida al dotar a la variedad producto $M^2 \times \mathbb{R}$ de la métrica lorentziana

$$\langle, \rangle = \pi_M^*(\langle, \rangle_M) - \pi_{\mathbb{R}}^*(dt^2).$$

En la expresión de la métrica intervienen las proyecciones π_M y $\pi_{\mathbb{R}}$ del espacio producto $M^2 \times \mathbb{R}$ sobre los factores M y \mathbb{R} , respectivamente. No obstante, a fin de simplificar, haremos un abuso de

notación y escribiremos como es usual

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_M - dt^2. \quad (1.1)$$

Como una primera observación tengamos en cuenta que

$$\partial_t = (\partial/\partial t)_{(x,t)}, \quad x \in M, t \in \mathbb{R}$$

es un campo vectorial temporal y unitario globalmente definido sobre $M^2 \times \mathbb{R}_1$. Esto nos permite descomponer todo campo vectorial tangente U en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ como $U = (U^*)^\sim - \langle U, \partial_t \rangle \partial_t$, siendo $U^* = \pi_M^*(U) \in \mathfrak{X}(M)$ la proyección de U sobre M^2 , y $(U^*)^\sim$ su levantamiento a $M^2 \times \mathbb{R}_1$. Sin embargo, de ahora en adelante, identificaremos todo campo vectorial en $\mathfrak{X}(M)$ con su levantamiento a $\mathfrak{X}(M^2 \times \mathbb{R}_1)$, por lo que escribiremos simplemente

$$U = U^* - \langle U, \partial_t \rangle \partial_t.$$

Una característica básica de la geometría de los espacios productos es que queda completamente determinada a partir de la geometría de la superficie M^2 . De este modo, podemos comprobar directamente a partir de (1.1) y de la fórmula de Koszul que la conexión de Levi-Civita del espacio ambiente, $\bar{\nabla}$, se expresa en función de la conexión de Levi-Civita de la superficie M^2 , D , como

$$\bar{\nabla}_U V = D_{U^*} V^*, \quad (1.2)$$

para cualesquiera U y V vectores tangentes sobre $M^2 \times \mathbb{R}_1$.

La expresión (1.2) permite, entre otras cosas, dar una expresión del tensor curvatura de Riemann de $M^2 \times \mathbb{R}_1$, \bar{R} , en función de la curvatura de Gauss de la superficie M^2 . Para ello, tenemos que fijar en primer lugar un signo para el operador curvatura, puesto que no hay unanimidad en la literatura con respecto a esto. A lo largo de la tesis, consideraremos que \bar{R} viene definido como

$$\bar{R}(U, V)W = \bar{\nabla}_{[U, V]}W - [\bar{\nabla}_U, \bar{\nabla}_V]W$$

para cualesquiera U, V y W campos vectoriales tangentes a $M^2 \times \mathbb{R}_1$, aplicando de este modo el criterio para el signo de la curvatura establecido en [ONE], entre otros. Puesto que M es una superficie, y por tanto una variedad 2-dimensional, su curvatura de Gauss $K_M \in \mathcal{C}^\infty(M)$ contiene toda la información que nos proporcionaría su correspondiente tensor curvatura de Riemann. De hecho, están relacionados como sigue,

$$\begin{aligned} R_M(U^*, V^*)W^* &= K_M(\pi_M) \{ \langle U^*, W^* \rangle_M V^* - \langle V^*, W^* \rangle_M U^* \} \\ &= K_M(\pi_M) (\langle U, W \rangle V - \langle V, W \rangle U) + \\ &\quad K_M(\pi_M) \langle W, \partial_t \rangle (\langle U, \partial_t \rangle V - \langle V, \partial_t \rangle U) + \\ &\quad K_M(\pi_M) (\langle U, W \rangle \langle V, \partial_t \rangle - \langle V, W \rangle \langle U, \partial_t \rangle) \partial_t. \end{aligned} \quad (1.3)$$

A partir de (1.2) y (1.3) se sigue de modo inmediato que

$$\begin{aligned} \overline{R}(U, V)W &= K_M(\pi_M)(\langle U, W \rangle V - \langle V, W \rangle U) + \\ &K_M(\pi_M)\langle W, \partial_t \rangle (\langle U, \partial_t \rangle V - \langle V, \partial_t \rangle U) + \\ &K_M(\pi_M)(\langle U, W \rangle \langle V, \partial_t \rangle - \langle V, W \rangle \langle U, \partial_t \rangle) \partial_t. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Tomando trazas en (1.4) podemos encontrar también una expresión análoga para el tensor curvatura de Ricci del espacio ambiente $M^2 \times \mathbb{R}_1$, $\overline{\text{Ric}}$,

$$\overline{\text{Ric}}(U, V) = K_M(\pi_M)\{\langle U, V \rangle + \langle U, \partial_t \rangle \langle V, \partial_t \rangle\}. \quad (1.5)$$

1.2. Superficies espaciales en $M^2 \times \mathbb{R}_1$.

Una vez determinado nuestro espacio ambiente, vamos a definir los elementos que serán objeto directo de nuestro estudio: las superficies espaciales. Una inmersión diferenciable $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$ de una superficie conexa Σ^2 en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ se dice que es una superficie espacial si la métrica inducida sobre Σ a partir de la métrica del espacio ambiente via la inmersión es una métrica riemanniana. Como es usual, también denotaremos la métrica inducida mediante $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En primer lugar cabe destacar que, por ser $M^2 \times \mathbb{R}_1$ una variedad temporalmente orientable, $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$ es una superficie orientable en el sentido que existe un único campo vectorial normal, temporal y unitario sobre Σ , N , en la misma orientación temporal que ∂_t , es decir

$$\langle N, \partial_t \rangle \leq -1 < 0 \quad \text{sobre } \Sigma.$$

Nos referiremos a N como la aplicación de Gauss de Σ apuntando hacia el futuro, y denotaremos por $\Theta : \Sigma \rightarrow (-\infty, -1]$ a la función diferenciable sobre Σ dada por

$$\Theta = \langle N, \partial_t \rangle.$$

Observemos que la función Θ mide el ángulo hiperbólico θ entre los dos campos vectoriales temporales apuntando hacia el futuro N y ∂_t . De hecho, esta relación viene dada por $\cosh \theta = -\Theta$.

Es bien conocido que las conexiones de Levi-Civita de $M^2 \times \mathbb{R}_1$ y Σ , $\overline{\nabla}$ y ∇ respectivamente, vienen relacionadas por las fórmulas de Gauss y Weingarten de la superficie espacial, que son respectivamente

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle AX, Y \rangle N \quad (1.6)$$

y

$$AX = -\overline{\nabla}_X N, \quad (1.7)$$

para cualesquiera campos vectoriales tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ y donde $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ representa el operador forma (o segunda forma fundamental) de Σ con respecto a su aplicación de Gauss apuntando hacia el futuro N . Por otro lado, la curvatura de Gauss de la superficie Σ se puede expresar en función del operador forma y de la curvatura del espacio-tiempo ambiente por medio de la ecuación de Gauss, que en general viene dada por

$$K = \overline{K} - \det A, \quad (1.8)$$

donde \overline{K} denota la curvatura seccional en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ del plano tangente a Σ . Considerando $\{E_1, E_2\}$ una base ortonormal local sobre Σ , obtenemos a partir de (1.4) que

$$\overline{K} = \langle \overline{R}(E_1, E_2)E_1, E_2 \rangle = \kappa_M(1 + \langle E_1, \partial_t^\top \rangle^2 + \langle E_2, \partial_t^\top \rangle^2) = \kappa_M(1 + \|\partial_t^\top\|^2), \quad (1.9)$$

donde para simplificar κ_M representa la curvatura de Gauss de M a lo largo de la superficie espacial Σ , es decir, $\kappa_M = K_M \circ \Pi \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ siendo $\Pi = \pi_M \circ f : \Sigma \rightarrow M$ la proyección de Σ sobre M . A lo largo de la tesis emplearemos la siguiente notación, si Z es un campo vectorial a lo largo de la inmersión $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$, entonces $Z^\top \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ denota la componente tangente de Z a lo largo de Σ , es decir,

$$Z = Z^\top - \langle N, Z \rangle N,$$

y $\|\cdot\|$ denota la norma de un campo vectorial sobre Σ . En particular, $\partial_t^\top = \partial_t + \Theta N$, luego

$$-1 = \|\partial_t^\top\|^2 - \Theta^2. \quad (1.10)$$

Como consecuencia de estas observaciones, la ecuación (1.8) se puede reescribir en nuestro caso particular como

$$K = \kappa_M \Theta^2 - \det A. \quad (1.11)$$

Consideremos ahora la ecuación de Codazzi de la superficie Σ . Dicha ecuación describe, para cualesquiera campos vectoriales tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, la componente tangente de $\overline{R}(X, Y)N$ en función de la derivada covariante del operador forma, y viene dada por

$$(\overline{R}(X, Y)N)^\top = (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, \quad (1.12)$$

siendo $\nabla_X A$ la derivada covariante de A , es decir,

$$(\nabla_X A)Y = \nabla_X (AY) - A(\nabla_X Y).$$

Teniendo en cuenta (1.4), la ecuación de Codazzi para superficies espaciales en espacios producto lorentzianos se puede simplificar y obtenemos

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X + \kappa_M \Theta (\langle X, \partial_t^\top \rangle Y - \langle Y, \partial_t^\top \rangle X). \quad (1.13)$$

Dada una superficie espacial $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$, llamaremos función altura de Σ , y la denotaremos por h , a la proyección de la superficie Σ sobre \mathbb{R} , es decir, $h \in C^\infty(\Sigma)$ es la función diferenciable definida por

$$h = \pi_{\mathbb{R}} \circ f.$$

Observemos ahora que el gradiente de $\pi_{\mathbb{R}}$ en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ es

$$\bar{\nabla} \pi_{\mathbb{R}} = -\langle \bar{\nabla} \pi_{\mathbb{R}}, \partial_t \rangle \partial_t = -\partial_t,$$

y, por tanto, el gradiente de h sobre Σ viene dado por

$$\nabla h = (\bar{\nabla} \pi_{\mathbb{R}})^\top = -\partial_t^\top.$$

Volviendo ahora a (1.10) tenemos que

$$\|\nabla h\|^2 = \Theta^2 - 1. \quad (1.14)$$

La relación (1.2) entre las conexiones de Levi-Civita del espacio ambiente y de la superficie Σ implica, en particular, que ∂_t es un campo paralelo sobre $M^2 \times \mathbb{R}_1$ y por tanto

$$\bar{\nabla}_X \partial_t = 0 \quad (1.15)$$

para cualquier campo vectorial tangente $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Y si escribimos ahora $\partial_t = -\nabla h - \Theta N$ a lo largo de la superficie Σ , y usamos las fórmulas de Gauss (1.6) y Weingarten (1.7), obtenemos fácilmente a partir de (1.15) que

$$\nabla_X \nabla h = \Theta AX \quad (1.16)$$

para cualquier $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Por tanto, el laplaciano en Σ de la función altura viene dado por

$$\Delta h = \Theta \operatorname{tr} A = -2H\Theta, \quad (1.17)$$

donde $H = -(1/2)\operatorname{tr} A$ es la curvatura media de Σ relativa a N . La elección del signo $-$ en la definición de H viene motivada por el siguiente hecho. El vector curvatura media de la superficie espacial Σ viene definido como el vector temporal $\vec{H} = HN$, y por tanto $H(p) > 0$ para un punto $p \in \Sigma$ si y sólo si $\vec{H}(p)$ está en la misma orientación temporal que N , y en consecuencia que ∂_t .

Por otro lado, de (1.15) también se deduce que

$$X(\Theta) = \langle \bar{\nabla}_X N, \partial_t \rangle = \langle AX, \nabla h \rangle = \langle X, A\nabla h \rangle$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, y por tanto tenemos la siguiente expresión para el gradiente de Θ en Σ ,

$$\nabla \Theta = A\nabla h. \quad (1.18)$$

Tomando derivadas covariantes en esta última expresión, y aplicando la ecuación de Codazzi (1.13) y las expresiones (1.14) y (1.16) obtenemos que

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla \Theta &= (\nabla_X A)(\nabla h) + A(\nabla_X \nabla h) \\ &= (\nabla_{\nabla h} A)(X) + \kappa_M \Theta (\langle X, \partial_t^\top \rangle \nabla h - \langle \nabla h, \partial_t^\top \rangle X) + \Theta A^2 X \\ &= (\nabla_{\nabla h} A)(X) + \kappa_M \Theta ((\Theta^2 - 1)X - \langle X, \nabla h \rangle \nabla h) + \Theta A^2 X,\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Consecuentemente, teniendo en cuenta que las contracciones conmutan con las derivadas covariantes y que por tanto

$$\text{tr}(\nabla_{\nabla h} A) = \nabla_{\nabla h}(\text{tr} A) = -2\langle \nabla H, \nabla h \rangle,$$

el laplaciano de Θ viene dado por

$$\begin{aligned}\Delta \Theta &= \text{tr}(\nabla_{\nabla h} A) + \kappa_M \Theta (\Theta^2 - 1) + \Theta \text{tr}(A^2) \\ &= -2\langle \nabla H, \nabla h \rangle + \Theta (\kappa_M (\Theta^2 - 1) + \|A\|^2),\end{aligned}\tag{1.19}$$

donde $\|A\|^2 = \text{tr}(A^2)$.

A lo largo de la primera parte de la tesis trabajaremos con un tipo particular de superficies espaciales: las superficies maximales. Se dice que una superficie espacial Σ es una superficie maximal si su curvatura media se anula sobre Σ . Como una primera propiedad de las superficies maximales, observemos que la ecuación (1.17) implica que si Σ es una superficie maximal entonces h es una función armónica, es decir, $\Delta h = 0$ sobre Σ . Por otro lado, por el teorema de Cayley-Hamilton se sabe que para toda superficie maximal se verifica la identidad

$$A^2 = \frac{1}{2}\|A\|^2 I,\tag{1.20}$$

donde I denota la aplicación identidad sobre $\mathfrak{X}(\Sigma)$, y además $\|A\|^2 = -2 \det A$. Por tanto, la ecuación de Gauss (1.11) se puede expresar en el caso particular de superficies maximales como

$$K = \kappa_M \Theta^2 + \frac{1}{2}\|A\|^2.\tag{1.21}$$

Por último, a partir de (1.14), (1.18) y (1.20) se obtiene otra identidad interesante,

$$\|\nabla \Theta\|^2 = \frac{1}{2}\|A\|^2 \|\nabla h\|^2 = \frac{1}{2}\|A\|^2 (\Theta^2 - 1)\tag{1.22}$$

sobre una superficie maximal Σ .

1.3. Grafos espaciales sobre M^2 .

Consideremos $\Omega \subset M^2$ un dominio conexo. Toda función diferenciable $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ determina un grafo sobre Ω dado por

$$\Sigma(u) = \{(x, u(x)) : x \in \Omega\} \subset M^2 \times \mathbb{R}_1.$$

Se dice que el grafo $\Sigma(u)$ es entero cuando $\Omega = M$. Todo grafo $\Sigma(u)$ se puede ver como la imagen de la inmersión $f_u : \Omega \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$ dada por

$$f_u(x) = (x, u(x)), \quad x \in \Omega.$$

Estudiemos la geometría de estos grafos, y para ello calculemos en primer lugar la aplicación diferencial de la inmersión f_u . Dados $x \in \Omega$ y $v \in T_x M$ se tiene por definición que

$$df_u(v) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f_u(\alpha(s))$$

para cualquier curva diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^2$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces,

$$df_u(v) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\alpha(s), u(\alpha(s))) = (v, du_p(v)) = v + \langle Du(x), v \rangle_M \partial_t|_{(x, u(x))}, \quad (1.23)$$

donde Du denota el gradiente de u sobre Ω . A partir de la expresión obtenida para df_u se comprueba inmediatamente que f_u es, como hemos afirmado, una inmersión. Por otro lado, también a partir de (1.23), podemos obtener la expresión general de la métrica inducida sobre Ω via el grafo. Dados $v, w \in T_x M$ se tiene de modo inmediato que

$$\langle v, w \rangle = \langle df_u(v), df_u(w) \rangle = \langle v, w \rangle_M - \langle Du(x), v \rangle_M \langle Du(x), w \rangle_M,$$

es decir, la métrica inducida sobre Ω de la métrica lorentziana del espacio ambiente $M^2 \times \mathbb{R}_1$ via el grafo $\Sigma(u)$ viene dada por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_M - du^2. \quad (1.24)$$

Observemos ahora que el campo vectorial

$$\eta(x) = Du(x) + \partial_t|_{(x, u(x))}$$

es un campo vectorial normal a la superficie, puesto que dado cualquier $v \in T_x M$ se tiene

$$\langle df_u(v), \eta(x) \rangle = \langle v + \langle Du(x), v \rangle_M \partial_t|_{(x, u(x))}, Du(x) + \partial_t|_{(x, u(x))} \rangle = 0.$$

Por otro lado, como

$$\langle \eta(x), \eta(x) \rangle = \langle Du(x) + \partial_t|_{(x, u(x))}, Du(x) + \partial_t|_{(x, u(x))} \rangle = |Du|^2 - 1,$$

f_u determinará un grafo espacial en $\Omega \times \mathbb{R}_1$ si y sólo si se verifica la desigualdad $|Du|^2 < 1$ en todo Ω , siendo $|Du|$ la norma del gradiente de u con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ sobre Ω . Supondremos de ahora en adelante que $\Sigma(u)$ es un grafo espacial sobre $\Omega \times \mathbb{R}_1$. En este caso podemos construir la aplicación de Gauss apuntando hacia el futuro de $\Sigma(u)$ como el campo vectorial

$$N(x) = \frac{\eta(x)}{|\eta(x)|} = \frac{1}{\sqrt{1 - |Du(x)|^2}} (Du(x) + \partial_t|_{(x, u(x))}), \quad x \in \Omega. \quad (1.25)$$

Y por tanto podemos comprobar también que

$$\Theta(x) = \langle N(x), \partial_t|_{x,u(x)} \rangle = \frac{-1}{\sqrt{1 - |Du(x)|^2}} \leq -1.$$

Nuestro objetivo ahora es obtener una expresión para la curvatura media de $\Sigma(u)$, a fin de caracterizar los grafos maximales como aquellos que verifiquen cierta ecuación en derivadas parciales. Para hallar la curvatura media es necesario en primer lugar calcular el operador forma de $\Sigma(u)$. Para ello, nos apoyaremos fuertemente en la fórmula de Weingarten (1.7). A pesar de que en geometría diferencial es usual identificar cada elemento con su imagen bajo una inmersión diferenciable -y de hecho eso es lo que hemos hecho hasta el momento y lo que continuaremos haciendo de modo sistemático a lo largo de esta memoria-, en ocasiones es necesario ser preciso con la notación empleada. Así, la fórmula de Weingarten establece que dado cualquier campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\bar{\nabla}_{df_u(X)} N = -df_u(AX). \quad (1.26)$$

Calculemos en primer lugar $\bar{\nabla}_{df_u(X)} N$. Teniendo en cuenta las propiedades básicas de la conexión de Levi-Civita se tiene que

$$\bar{\nabla}_{df_u(X)} N = \bar{\nabla}_{df_u(X)} \left(\frac{1}{|\eta|} \eta \right) = \frac{1}{|\eta|} \bar{\nabla}_{df_u(X)} \eta + df_u(X) \left(\frac{1}{|\eta|} \right) \eta. \quad (1.27)$$

Por un lado se tiene a partir de (1.2) que

$$\bar{\nabla}_{df_u(X)} \eta = \bar{\nabla}_{(X + \langle Du, X \rangle_M \partial_t)} (Du + \partial_t) = D_X Du,$$

donde recordemos que por D estamos denotando la conexión de Levi-Civita de M , y por otro lado,

$$df_u(X) \left(\frac{1}{|\eta|} \right) = X \left(\frac{1}{\sqrt{1 - |Du|^2}} \right) = \frac{\langle D_X Du, Du \rangle_M}{(1 - |Du|^2)^{3/2}}.$$

Por tanto, sustituyendo las dos últimas expresiones en (1.27) obtenemos que

$$\bar{\nabla}_{df_u(X)} N = \frac{D_X Du}{\sqrt{1 - |Du|^2}} + \frac{\langle D_X Du, Du \rangle_M}{(1 - |Du|^2)^{3/2}} (Du + \partial_t). \quad (1.28)$$

Tengamos en cuenta también que de (1.23) se deduce

$$df_u(AX) = AX + \langle Du, AX \rangle_M \partial_t. \quad (1.29)$$

Sustituyendo (1.28) y (1.29) en la identidad (1.26) e identificando las partes tangentes, se tiene finalmente que

$$AX = -\frac{1}{\sqrt{1 - |Du|^2}} D_X Du - \frac{\langle D_X Du, Du \rangle_M}{(1 - |Du|^2)^{3/2}} Du, \quad (1.30)$$

para cualquier campo vectorial tangente X sobre Ω .

Sea ahora $\{E_1, E_2\}$ un referencial ortonormal local de $\mathfrak{X}(M)$ con respecto a la métrica \langle, \rangle_M . Tomando trazas en la expresión (1.30) con respecto a dicho referencial obtenemos con un cálculo directo que la función curvatura media H_u de un grafo espacial $\Sigma(u)$ viene dada por

$$2H_u(1 - |Du|^2)^{3/2} = (1 - |Du|^2)\Delta_M u + D^2u(Du, Du),$$

donde Δ_M y D^2 representan los operadores laplaciano y hessiano sobre $(M^2, \langle, \rangle_M)$ respectivamente. Esta expresión puede reescribirse de un modo más compacto usando el operador divergencia. De este modo, la expresión para H_u queda finalmente

$$2H_u = \text{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 - |Du|^2}} \right),$$

siendo Div el operador divergencia sobre Ω con respecto a la métrica \langle, \rangle_M . Observemos que, en particular, $\Sigma(u)$ será un grafo maximal si y sólo si la función u satisface la siguiente ecuación en derivadas parciales sobre el dominio Ω ,

$$\text{Maximal}[u] = \text{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 - |Du|^2}} \right) = 0, \quad |Du|^2 < 1. \quad (1.31)$$

Usualmente nos referiremos a esta ecuación como la ecuación de las superficies maximales.

Aunque la ecuación de las superficies maximales no es fácil de abordar en general, podemos observar que las funciones constantes constituyen una familia trivial de soluciones de (1.31). Aún más, los grafos determinados por dichas funciones son también ejemplos de superficies espaciales totalmente geodésicas como podemos observar a partir de (1.30).

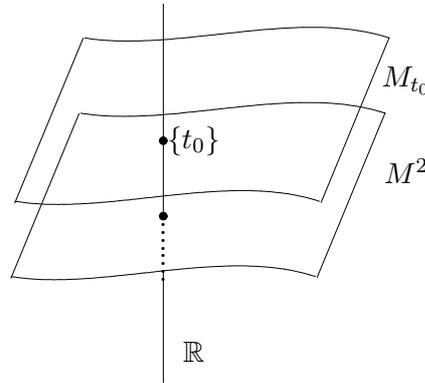


Figura 1.1: Un slice $\Sigma_{t_0} = M^2 \times \{t_0\}$.

De hecho, los grafos enteros determinados por las funciones constantes

$$\Sigma_{t_0} = \Sigma(t_0) = \{(x, t_0) : x \in M\} = M^2 \times \{t_0\}$$

son conocidos tradicionalmente en la literatura como *slices*. (El término *slice* es un anglicismo usado frecuentemente en este contexto y que no admite una traducción natural al español, por ello utilizaremos la palabra extranjera sin traducción a lo largo de esta memoria).

De hecho, los *slices* constituyen una foliación de $M^2 \times \mathbb{R}_1$ por hojas totalmente geodésicas isométricas a la superficie M^2 . Observemos que los *slices* se caracterizan como las superficies espaciales con función altura constante $h = t_0$, o equivalentemente, a partir de (1.14), como las superficies espaciales tales que la función Θ vale constantemente -1 .

Capítulo 2

Algunos resultados de tipo Calabi-Bernstein

Sumario. En este capítulo establecemos nuevos resultados de tipo Calabi-Bernstein para superficies maximales inmersas en $M^2 \times \mathbb{R}_1$. En particular, cuando M es una superficie riemanniana (necesariamente completa) con curvatura de Gauss no negativa K_M , probamos que cualquier superficie maximal completa en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ tiene que ser totalmente geodésica. Además, si M no es llana concluimos que debe ser un *slice* $M \times \{t_0\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Probamos que lo mismo ocurre si la superficie maximal es completa con respecto a la métrica inducida de la del producto riemanniano $M^2 \times \mathbb{R}$. Esto nos permite dar también una versión no paramétrica del teorema de tipo Calabi-Bernstein para grafos enteros maximales en $M^2 \times \mathbb{R}_1$, bajo las mismas hipótesis sobre K_M . Por último, construimos contraejemplos que muestran que nuestros resultados de tipo Calabi-Bernstein no son ciertos sin la hipótesis $K_M \geq 0$. Estos ejemplos se construyen de dos modos distintos, via un resultado de dualidad entre grafos minimales y maximales, y de un modo directo obteniendo soluciones particulares de la ecuación de los grafos maximales.

Abstract. *In this chapter we establish new Calabi-Bernstein results for maximal surfaces immersed into $M^2 \times \mathbb{R}_1$. In particular, when M is a (necessarily complete) Riemannian surface with non-negative Gaussian curvature K_M , we prove that any complete maximal surface in $M^2 \times \mathbb{R}_1$ must be totally geodesic. Besides, if M is non-flat we conclude that it must be a slice $M \times \{t_0\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$. We prove that the same happens if the maximal surface is complete with respect to the metric induced from the Riemannian product $M^2 \times \mathbb{R}$. This allows us to give also a non-parametric version of the Calabi-Bernstein theorem for entire maximal graphs in $M^2 \times \mathbb{R}_1$, under the same assumptions on K_M . Moreover, we also construct counterexamples which show that our Calabi-Bernstein results are no longer true without the hypothesis $K_M \geq 0$. These examples are constructed in two different forms, via a duality result between minimal and maximal graphs, and in a direct way giving particular solutions to the maximal surface equation.*

2.1. Versión paramétrica

Para poder demostrar los resultados principales de esta sección necesitamos en primer lugar un resultado topológico auxiliar que tiene interés por sí mismo.

Lema 2.1.1. *Sea M^2 una superficie riemanniana. Si $M^2 \times \mathbb{R}_1$ admite una superficie espacial completa $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$, entonces M es una superficie necesariamente completa y la proyección $\Pi = \pi_M \circ f : \Sigma \rightarrow M$ es una aplicación recubridora.*

Demostración. Para probar este lema seguimos las ideas de la prueba de [ARS1, Lemma 3.1]. Sea $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$ una superficie espacial y consideremos $\Pi = \pi_M \circ f : \Sigma \rightarrow M$ su proyección sobre M . No es difícil ver en primer lugar que $\Pi^*(\langle, \rangle_M) \geq \langle, \rangle$, donde por \langle, \rangle denotamos la métrica riemanniana sobre Σ inducida de la métrica del espacio ambiente lorentziano. De hecho, dados $p \in \Sigma$ y $v \in T_p \Sigma$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= \langle df_p(v), df_p(v) \rangle \\ &= \langle d\Pi_p(v), d\Pi_p(v) \rangle_M - \langle df_p(v), \partial_t \rangle^2 \\ &\leq \langle d\Pi_p(v), d\Pi_p(v) \rangle_M. \end{aligned}$$

Esta desigualdad implica que Π es un difeomorfismo local que aumenta la distancia entre las superficies riemannianas $(\Sigma, \langle, \rangle)$ y (M, \langle, \rangle_M) . La prueba se sigue teniendo en cuenta que si una aplicación, de una variedad riemanniana conexa y completa M_1 en otra variedad riemanniana conexa M_2 de la misma dimensión, aumenta la distancia, entonces es una aplicación recubridora y M_2 es completa ([KoNo, Chapter VIII, Lemma 8.1]). \square

Como una interesante consecuencia del lema anterior observemos que cuando M^2 es una superficie riemanniana completa simplemente conexa, cualquier superficie espacial completa en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ es un grafo entero. De hecho, cuando consideramos M^2 simplemente conexa, la proyección Π es un difeomorfismo entre Σ y M , y por tanto Σ se puede escribir como el grafo sobre M determinado por la función $u = h \circ \Pi^{-1} \in C^\infty(M)$.

Por otro lado también se deduce del Lema 2.1.1 que si $M^2 \times \mathbb{R}_1$ admite una superficie espacial compacta, entonces M^2 es necesariamente compacta (véase [ARS1, Proposition 3.2 (i)]). Con esto, y como una consecuencia directa de (1.17), se tiene lo siguiente.

Proposición 2.1.2. *Sea M^2 una superficie riemanniana (necesariamente compacta). Entonces las únicas superficies compactas maximales en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ son los slices $M \times \{t_0\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$.*

Bajo hipótesis de completitud, tenemos la siguiente versión paramétrica de un resultado de tipo Calabi-Bernstein en $M^2 \times \mathbb{R}_1$.

Teorema 2.1.3. *Sea M^2 una superficie riemanniana (necesariamente completa) con curvatura de Gauss no negativa, $K_M \geq 0$. Entonces toda superficie maximal completa en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ es totalmente geodésica. Además, si $K_M > 0$ para algún punto de M , entonces Σ es un slice $M \times \{t_0\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$.*

Como consecuencia directa del Teorema 2.1.3 tenemos que,

Corolario 2.1.4. *Sea M^2 una superficie riemanniana completa no llana con curvatura de Gauss no negativa, $K_M \geq 0$. Entonces las únicas superficies maximales completas en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ son los slices $M \times \{t_0\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$.*

Es interesante destacar que las hipótesis que consideramos sobre la curvatura de Gauss de la superficie M son necesarias. Para ello observemos en primer lugar que si $M^2 = \mathbb{R}^2$ es el plano euclídeo llano, entonces $M^2 \times \mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_1^3$ es precisamente el espacio de Lorentz-Minkowski 3-dimensional, y cualquier plano afín espacial en \mathbb{R}_1^3 que no sea horizontal determina una superficie completa totalmente geodésica que no es un slice. Por otro lado, veremos en las Secciones 2.3 y 2.4 que la hipótesis $K_M \geq 0$ es necesaria presentando ejemplos de superficies maximales completas no totalmente geodésicas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$, siendo \mathbb{H}^2 el plano hiperbólico.

Prueba del Teorema 2.1.3. Por ser Σ una superficie maximal y $\kappa_M \geq 0$, a partir de la ecuación de Gauss (1.21) deducimos que $K \geq 0$ sobre Σ . Por tanto, Σ es una superficie riemanniana completa con curvatura de Gauss no negativa, luego por un resultado clásico de parabolicidad debido a Ahlfors [Ahl] y Blanc-Fiala-Huber [Hub] podemos concluir que Σ es parabólica, en el sentido que toda función subarmónica no positiva sobre la superficie debe ser constante.

Recordemos que $\Theta \leq -1 < 0$. A partir de las expresiones (1.19) y (1.22) podemos calcular fácilmente

$$\Delta \left(\frac{1}{\Theta} \right) = -\frac{\Delta \Theta}{\Theta^2} + \frac{2\|\nabla \Theta\|^2}{\Theta^3} = -\frac{1}{\Theta} \left(\kappa_M(\Theta^2 - 1) + \frac{\|A\|^2}{\Theta^2} \right) \geq 0. \quad (2.1)$$

Es decir, $1/\Theta$ es una función negativa y subarmónica sobre la superficie parabólica Σ , y en consecuencia debe ser constante. En particular $\Theta = \Theta_0 \leq -1$ es constante sobre Σ , y de (2.1) se deduce que $\|A\|^2 = 0$ y $\kappa_M(\Theta_0^2 - 1) = 0$ sobre Σ . Por tanto, Σ es totalmente geodésica en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ y, si $\kappa_M > 0$ en algún punto de Σ , entonces debe ser $\Theta_0 = -1$, que teniendo en cuenta (1.14) se traduce en que h sea constante y equivalentemente en que Σ sea un slice. Finalmente, basta observar que puesto que la proyección $\Pi : \Sigma \rightarrow M$ es una aplicación recubridora (Lema 2.1.1), es en particular una aplicación sobreyectiva, luego $\kappa_M > 0$ en algún punto de Σ si y sólo si se verifica $K_M > 0$ para algún punto de M . \square

2.2. Versión no paramétrica

Una de las principales diferencias entre la geometría de superficies en espacios riemannianos y la geometría de superficies espaciales en espacios lorentzianos reside en el siguiente hecho: al

contrario de lo que ocurre cuando consideramos grafos enteros en espacios producto riemannianos, un grafo entero espacial en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ no es necesariamente completo en el sentido que la métrica riemanniana inducida (1.24) no es necesariamente completa sobre M . Por ejemplo, considérese la función $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(x_1, x_2) = \int_0^{|x_1|} \sqrt{1 - e^{-s}} ds$$

cuando $|x_1| \geq 1$, y $u(x_1, x_2) = \phi(x_1)$ cuando $|x_1| < 1$, donde $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ es una extensión diferenciable de la función anterior satisfaciendo $\phi'(s)^2 < 1$ para todo $s \in (-1, 1)$. La función u así definida determina un grafo entero espacial $\Sigma(u)$ en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_1^3$ que no es completo. De hecho, observemos que la curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma(u)$ dada por $\alpha(s) = (s, 0, u(s, 0))$ es una curva divergente en $\Sigma(u)$ de longitud finita, puesto que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\alpha'(s)\| ds = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \phi'(s)^2} ds + 2 \int_1^{+\infty} e^{-s/2} ds < 2(1 + 2/\sqrt{e}).$$

En las Secciones 2.3 y 2.4 construiremos nuevos ejemplos de grafos enteros maximales no completos en el espacio producto lorentziano $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$.

Por esta razón, el resultado de Calabi-Bernstein dado en el Teorema 2.1.3 no implica en principio que, bajo las mismas hipótesis sobre la superficie M , cualquier grafo entero maximal en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ deba ser totalmente geodésico. Se sabe que esto es cierto para grafos enteros maximales en ciertos espacios ambiente, por ejemplo en el espacio de Lorentz-Minkowski [Rom], y en espacios de Robertson-Walker de la forma $\mathbb{R}_\rho^2 \times \mathbb{R}_1$ bajo ciertas hipótesis sobre la función *warping* ρ [LaRo]. No obstante, aunque no podamos deducir un resultado similar para grafos enteros maximales en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ como consecuencia directa del Teorema 2.1.3, vamos a obtener dicho resultado como consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 2.2.1. *Sea M^2 una superficie riemanniana (no necesariamente completa) con curvatura de Gauss no negativa, $K_M \geq 0$. Entonces cualquier superficie maximal Σ^2 en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ que sea completa con respecto a la métrica inducida por el producto riemanniano $M^2 \times \mathbb{R}$ es totalmente geodésica. Además, si $K_M > 0$ en algún punto de Σ , entonces M es necesariamente completa y Σ es un slice $M \times \{t_0\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$.*

Obsérvese que si M^2 es una superficie completa y $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$ es una superficie espacial propiamente inmersa en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ (es decir, la anti-imagen de un conjunto compacto mediante f es también un conjunto compacto), la métrica inducida sobre Σ de la métrica del producto riemanniano $M^2 \times \mathbb{R}$ es completa. Esta afirmación es consecuencia del siguiente hecho topológico más general: si $f : (\Sigma^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma) \rightarrow (\overline{M}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{M}})$ es una inmersión isométrica propia de una superficie Σ en una variedad riemanniana completa \overline{M}^3 , entonces Σ también es completa. Probemos este hecho viendo que toda sucesión de Cauchy sobre Σ es necesariamente convergente. Sea $\{q_n\}_n \subset \Sigma$ una sucesión de Cauchy, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para cualesquiera $m, n \geq n_0$ se tiene

que $d_\Sigma(q_m, q_n) < \varepsilon$, donde d_Σ es la distancia sobre Σ asociada a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$. Por ser f una inmersión isométrica se tiene que $d_{\overline{M}}(f(q_m), f(q_n)) \leq d_\Sigma(q_m, q_n)$, luego $\{f(q_n)\}_n \subset \overline{M}$ es también una sucesión de Cauchy que es convergente a un cierto $\bar{q} \in \overline{M}$ por completitud de \overline{M} . Consideremos ahora cualquier subconjunto compacto $K \subset \overline{M}$ de modo que $\bar{q} \in \text{int}(K)$. Por un lado se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $f(q_n) \in K$ para todo $n \geq n_0$. Por otro lado, como f es una aplicación propia, la anti-imagen de un conjunto compacto es compacta, luego $f^{-1}(K) \subset \Sigma$ es un subconjunto compacto de modo que $q_n \in f^{-1}(K)$ para todo $n \geq n_0$. En consecuencia, la sucesión $\{q_n\}_{n \geq n_0}$ tiene una subsucesión convergente hacia un cierto $q \in f^{-1}(K) \subset \Sigma$. Y en definitiva, la sucesión original $\{q_n\}_n \subset \Sigma$ es convergente hacia el mismo punto q . Con este razonamiento queda probado el siguiente corolario.

Corolario 2.2.2. *Sea M^2 una superficie riemanniana completa con curvatura de Gauss no negativa, $K_M \geq 0$. Entonces cualquier superficie maximal Σ^2 propiamente inmersa en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ es totalmente geodésica. Además, si $K_M > 0$ en algún punto de Σ , entonces M es necesariamente completa y Σ es un slice $M \times \{t_0\}$.*

Las hipótesis de este corolario se verifican, por ejemplo, cuando M^2 es completa y $\Sigma \subset M^2 \times \mathbb{R}_1$ es una superficie maximal cerrada y embebida. Luego en particular las hipótesis del corolario son ciertas para grafos enteros maximales, por lo que se sigue finalmente la siguiente versión no paramétrica de nuestro resultado de tipo Calabi-Bernstein.

Teorema 2.2.3. *Sea M^2 una superficie riemanniana completa con curvatura de Gauss no negativa, $K_M \geq 0$. Entonces cualquier grafo entero maximal $\Sigma(u)$ en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ es totalmente geodésico. Además, si $K_M > 0$ en algún punto de M , entonces u es constante.*

Y como consecuencia directa de este teorema se tiene lo siguiente.

Corolario 2.2.4. *Sea M^2 una superficie riemanniana completa no llana con curvatura de Gauss no negativa, $K_M \geq 0$. Entonces las únicas soluciones enteras a la ecuación de las superficies maximales (1.31) son las funciones constantes.*

Cabe destacar que como otro corolario interesante del Teorema 2.2.1 se sigue la versión paramétrica del resultado de tipo Calabi-Bernstein dado en la sección anterior, Teorema 2.1.3. Esto es debido a que la hipótesis exigida sobre la completitud de Σ en el Teorema 2.1.3 es más débil que la exigida en el Teorema 2.2.1. De hecho, si para simplificar denotamos por $g' = \langle \cdot, \cdot \rangle_M + dh^2$ a la métrica inducida sobre Σ de la métrica del producto riemanniano $M^2 \times \mathbb{R}$ y por $g = \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_M - dh^2$ a la inducida a partir de la métrica del producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$, se tiene que para todo campo vectorial X tangente sobre Σ

$$g'(X, X) \geq g(X, X).$$

Esto implica que $L' \geq L$, siendo L' y L las longitudes de una curva sobre Σ asociadas a las métricas riemannianas g' y g respectivamente. Por tanto, si g es una métrica completa g' también lo será.

No obstante, a pesar de tratarse de un resultado más débil, la prueba directa e independiente de la versión paramétrica del resultado de tipo Calabi-Bernstein dada en la sección anterior es interesante por sí misma dada su gran sencillez.

La prueba del Teorema 2.2.1, y por ende del Teorema 2.2.3, sigue las ideas introducidas por Romero en su prueba de [Rom, Theorem], (véase también la prueba de [LaRo, Theorem A]), que a su vez se basa en la prueba de Chern del teorema clásico de Bernstein para grafos enteros minimales en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 [Che]. De nuevo veremos que los ejemplos que presentaremos en las Secciones 2.3 y 2.4 muestran que la hipótesis $K_M \geq 0$ es necesaria.

Prueba del Teorema 2.2.1. Sea Σ una superficie maximal en $M^2 \times \mathbb{R}_1$. Para simplificar denotaremos otra vez por $g = \langle, \rangle$ a la métrica riemanniana inducida sobre Σ a partir de la métrica del espacio producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$. Puesto que $1 - \Theta \geq 2 > 0$, podemos considerar sobre Σ la siguiente métrica conforme

$$\hat{g} = (1 - \Theta)^2 g.$$

Dadas dos métricas conformes es bien conocido que existen expresiones que nos permiten relacionar los distintos invariantes geométricos, y los operadores diferenciales, correspondientes a ambas métricas. En nuestro caso, la relación entre las curvaturas de Gauss \hat{K} y K de las métricas conformes (Σ, \hat{g}) y (Σ, g) , respectivamente, viene dada por

$$(1 - \Theta)^2 \hat{K} = K - \Delta \log(1 - \Theta). \quad (2.2)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (1.19) y (1.22) que hemos obtenido para $\Delta \Theta$ y $\|\nabla \Theta\|^2$ respectivamente, podemos calcular

$$\Delta \log(1 - \Theta) = -\frac{\Delta \Theta}{1 - \Theta} - \frac{\|\nabla \Theta\|^2}{(1 - \Theta)^2} = \frac{1}{2} \|A\|^2 + \Theta(\Theta + 1)\kappa_M,$$

que teniendo en cuenta la ecuación de Gauss (1.21) se puede reescribir del modo más simple

$$\Delta \log(1 - \Theta) = K + \Theta \kappa_M. \quad (2.3)$$

Sustituyendo ahora la expresión (2.3) en la relación (2.2) concluimos que $\hat{K} \geq 0$ sobre Σ .

Recordemos que todo campo vectorial $V \in \mathfrak{X}(M^2 \times \mathbb{R}_1)$ admite una única descomposición como la suma de sus proyecciones sobre los factores M y \mathbb{R} , es decir

$$V = V^* - \langle V, \partial_t \rangle \partial_t,$$

siendo $V^* = \pi_M^*(V)$. En particular, obtenemos las siguientes descomposiciones para todo campo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ tangente a la superficie y para la aplicación futura de Gauss de la superficie, N ,

$$X = X^* - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t = X^* + X(h) \partial_t \quad (2.4)$$

y

$$N = N^* - \langle N, \partial_t \rangle \partial_t = N^* - \Theta \partial_t.$$

A partir de estas descomposiciones tenemos por un lado la siguiente desigualdad,

$$\hat{g}(X, X) = (1 - \Theta)^2 g(X, X) \geq \Theta^2 g(X, X) = \Theta^2 |X^*|^2 - \Theta^2 X(h)^2 \quad (2.5)$$

para cualquier campo vectorial tangente $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, donde recordemos que $|\cdot|$ denota la norma con respecto a la métrica original $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ sobre M . Y, por otro lado, se obtienen las siguientes identidades,

$$|N^*|^2 = \Theta^2 - 1 \quad \text{y} \quad \Theta X(h) = -\langle X^*, N^* \rangle_M.$$

Por tanto, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\Theta^2 X(h)^2 = \langle X^*, N^* \rangle_M^2 \leq |X^*|^2 |N^*|^2 = |X^*|^2 (\Theta^2 - 1),$$

que finalmente junto con (2.5) implica que

$$\hat{g}(X, X) \geq |X^*|^2 = \langle X^*, X^* \rangle_M. \quad (2.6)$$

Sea de nuevo g' la métrica riemanniana inducida sobre Σ del espacio producto riemanniano $M^2 \times \mathbb{R}$. A partir de (2.4) obtenemos de un modo inmediato las expresiones

$$g(X, X) = |X^*|^2 - X(h)^2 \quad \text{y} \quad g'(X, X) = |X^*|^2 + X(h)^2.$$

Por tanto, se verifica

$$|X^*|^2 = \frac{1}{2}(g(X, X) + g'(X, X)) \geq \frac{1}{2}g'(X, X),$$

luego finalmente por (2.6) se tiene que

$$\hat{g}(X, X) \geq |X^*|^2 \geq \frac{1}{2}g'(X, X)$$

para cualquier vector tangente $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Como por hipótesis la métrica g' es completa sobre Σ , por un argumento de comparación de métricas similar al utilizado antes, la métrica \hat{g} también es completa.

Resumiendo, (Σ^2, \hat{g}) es una superficie riemanniana completa con curvatura de Gauss no negativa, por lo que concluimos que es una superficie parabólica gracias al mismo resultado clásico de parabolicidad de Ahlfors y Blanc-Fiala-Huber que hemos usado en la prueba del Teorema 2.1.3. Como ya hemos nombrado antes existen relaciones entre los distintos operadores diferenciales asociados a dos métricas conformes. En particular, el laplaciano Δ en Σ con respecto a la métrica g y el laplaciano $\hat{\Delta}$ en Σ con respecto a la métrica conforme \hat{g} verifican

$$\Delta = (1 - \Theta)^2 \hat{\Delta},$$

lo que implica que la subarmonicidad se preserva bajo cambios conformes de la métrica. En consecuencia (Σ, g) también es una superficie parabólica. A partir de aquí la prueba del teorema se sigue de un modo análogo a la prueba del Teorema 2.1.3, puesto que por (2.1) sabemos que $1/\Theta$ es una función negativa subarmónica sobre (Σ^2, g) . \square

2.3. Dualidad entre grafos minimales y maximales

En 1970 Calabi [Cal] introdujo un bonito resultado de dualidad entre las soluciones de la ecuación de las superficies minimales en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , es decir superficies con curvatura media nula, y las soluciones de la ecuación de las superficies maximales en el espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^3 . Téngase en cuenta que podemos escribir \mathbb{R}^3 como el espacio producto riemanniano $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ y \mathbb{R}_1^3 como el espacio producto lorentziano $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_1$. De este modo los espacios producto riemannianos $M^2 \times \mathbb{R}$ y los espacios producto lorentzianos $M^2 \times \mathbb{R}_1$ pueden verse como una generalización natural de estos espacios clásicos. A partir de esta observación podemos demostrar que se verifica el mismo resultado de dualidad entre soluciones de la ecuación de las superficies minimales en un espacio producto riemanniano $M^2 \times \mathbb{R}$ y soluciones de la ecuación de las superficies maximales en un espacio producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$. Para ello, es necesario observar en primer lugar que una función diferenciable u sobre un dominio conexo $\Omega \subseteq M^2$ determina un grafo minimal $\Sigma(u)$ en $M^2 \times \mathbb{R}$ si y sólo si u satisface la siguiente ecuación en derivadas parciales sobre Ω ,

$$\text{Minimal}[u] = \text{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 0, \quad (2.7)$$

donde, al igual que en (1.31), Div y D representan los operadores divergencia y gradiente asociados a la métrica \langle, \rangle_M , respectivamente. Para deducir la ecuación de las superficies minimales hay que encontrar previamente la expresión de la curvatura media de un grafo en $M \times \mathbb{R}$. Esta expresión se obtiene con un cálculo análogo al realizado en el Capítulo 1 de preliminares para obtener la correspondiente expresión para la curvatura media de un grafo maximal en $M^2 \times \mathbb{R}_1$. Dada la similitud de ambos desarrollos, no incluiremos aquí los detalles.

Teorema 2.3.1. *Sea $\Omega \subseteq M^2$ un dominio simplemente conexo de una superficie riemanniana M^2 . Entonces existe una solución no trivial u a la ecuación de las superficies minimales sobre Ω ,*

$$\text{Minimal}[u] = 0,$$

si y sólo si existe una solución no trivial w a la ecuación de las superficies maximales sobre Ω ,

$$\text{Maximal}[w] = 0, \quad |Dw|^2 < 1.$$

Por una *solución no trivial* nos referimos aquí a una solución que determine un grafo maximal no totalmente geodésico. Observemos que, a partir de la expresión (1.30), se concluye que el grafo espacial determinado por una función diferenciable $u \in C^\infty(\Sigma)$ es totalmente geodésico en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ si y sólo si Du es un campo paralelo sobre Ω (basta observar para ello que si $\Sigma(u)$ es totalmente geodésico, entonces $\langle AX, Du \rangle_M = 0$ para cualquier campo vectorial tangente X sobre Σ). De un modo similar, un grafo determinado por una función u es totalmente geodésico en $M^2 \times \mathbb{R}$ si y sólo si Du es paralelo sobre Ω . Consecuentemente, soluciones no triviales a la ecuación de las superficies minimales (o maximales) se corresponden con soluciones con gradiente no paralelo.

La prueba del Teorema 2.3.1 sigue las ideas introducidas por Alías y Palmer [AlPa2] en una prueba alternativa que dieron del resultado de dualidad establecido por Calabi.

Demostración. Por ser $\Omega \subseteq M$ un dominio simplemente conexo de una superficie riemanniana, es a su vez una superficie riemanniana y orientable, y por tanto Ω está dotada de un elemento de área globalmente definido, $d\Omega$, y de una estructura casi compleja J . No es difícil comprobar que dado cualquier campo vectorial X sobre Ω se verifica la siguiente identidad

$$\text{Div } X d\Omega = d\omega_{JX}, \quad (2.8)$$

donde por ω_{JX} denotamos la 1-forma sobre Ω métricamente equivalente al campo JX , es decir,

$$\omega_{JX}(Y) = \langle JX, Y \rangle_M.$$

Supongamos que u es una solución no trivial de (2.7) sobre el dominio Ω . Entonces por (2.8) se tiene que la 1-forma ω_{JU} es cerrada sobre Ω , siendo U el campo vectorial sobre Ω dado por

$$U = \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}.$$

Es bien conocido que toda 1-forma cerrada sobre un dominio simplemente conexo es exacta, y por tanto existe una función diferenciable $w \in C^\infty(\Omega)$ de modo que

$$JU = Dw. \quad (2.9)$$

Veamos que w va a determinar un grafo maximal en $\Omega \times \mathbb{R}_1$. Teniendo en cuenta que J es una isometría, obtenemos a partir de (2.9) que

$$|Dw|^2 = \frac{|Du|^2}{1 + |Du|^2} < 1. \quad (2.10)$$

Por tanto la función w define un grafo espacial sobre Ω . Por otro lado, a partir de (2.9) y (2.10) podemos ver que

$$JW = D(-u), \quad (2.11)$$

donde

$$W = \frac{Dw}{\sqrt{1 - |Dw|^2}}.$$

Es decir, la 1-forma ω_{JW} es exacta en Ω , y por tanto también es cerrada. De nuevo teniendo en cuenta (2.8), esto es equivalente a que $\text{Maximal}[w] = 0$. Además, las relaciones (2.9) y (2.11) nos permiten afirmar que Du es paralelo si y sólo si Dw es paralelo. Con un argumento similar, empezando con una solución no trivial de $\text{Maximal}[w] = 0$ con $|Dw|^2 < 1$ sobre Ω , podemos obtener una solución no trivial de $\text{Minimal}[u] = 0$. \square

El interés que tiene el Teorema 2.3.1 en nuestro contexto es que nos permite construir nuevas soluciones de la ecuación de las superficies maximales a partir de soluciones conocidas de la ecuación de las superficies minimales y viceversa. En particular, como una aplicación de este teorema podemos construir contraejemplos que muestran que los resultados que hemos obtenido en las Secciones 2.1 y 2.2 no son ciertos en general cuando M tiene curvatura de Gauss negativa, y por tanto muestran que es indispensable exigir ciertas hipótesis sobre la geometría de M . Más concretamente construiremos estos ejemplos en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$.

Antes de presentar dichos ejemplos, necesitamos introducir el siguiente lema técnico. Este resultado nos va a proporcionar una condición suficiente para garantizar la completitud de un grafo espacial en $M^2 \times \mathbb{R}_1$.

Lema 2.3.2. *Sea M^2 una superficie riemanniana y completa, y sea $u \in C^\infty(M)$ una función diferenciable sobre M que determina un grafo espacial en $M^2 \times \mathbb{R}_1$. Entonces si*

$$\sup_{x \in M} |Du(x)|^2 < 1,$$

el correspondiente grafo $\Sigma(u)$ es una superficie completa.

Demostración. Teniendo en cuenta la expresión (1.24) de la métrica inducida sobre M^2 via el grafo, y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que para cualquier $p \in M$ y $v \in T_p M$,

$$\langle v, v \rangle = \langle v, v \rangle_M - \langle v, Du \rangle_M^2 \geq (1 - \sup_{x \in M} |Du(x)|^2) \langle v, v \rangle_M.$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ es una métrica completa y $1 - \sup_{x \in M} |Du(x)|^2 > 0$ por hipótesis, con el mismo argumento de comparación de métricas que hemos utilizado en las secciones anteriores concluimos que la métrica inducida via el grafo, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, es completa sobre M^2 . \square

Es interesante observar que el lema anterior proporciona una condición suficiente para la completitud de un grafo espacial, pero no necesaria. De hecho veamos que el plano hiperbólico visto como un grafo en \mathbb{R}_1^3 es un grafo espacial que satisface $\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |Du(x)|^2 = 1$. Consideremos entonces $M^2 \times \mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_1^3$, es decir el caso $M^2 = \mathbb{R}^2$. El plano hiperbólico se puede ver como el grafo determinado por la función

$$u(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2},$$

luego $Du(x, y) = \left(\frac{x}{u}, \frac{y}{u}\right)$, y por tanto

$$|Du(x, y)|^2 = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} < 1, \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Consecuentemente, se tiene que

$$\sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} |Du(x, y)|^2 = 1.$$

Y, sin embargo, es bien conocido que el plano hiperbólico es una superficie completa.

Volvamos de nuevo a los ejemplos que nos proponíamos construir en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$. Consideraremos el modelo del semiplano para el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , es decir,

$$\mathbb{H}^2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$$

dotado de la métrica riemanniana completa

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}^2} = \frac{1}{x_2^2}(dx_1^2 + dx_2^2).$$

Siguiendo este modelo, la métrica hiperbólica es conforme a la métrica llana euclídea, lo que nos va a permitir relacionar los distintos operadores diferenciales de ambas métricas y expresar la ecuación de las superficies minimales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ en función de los operadores euclídeos. Así, dada una función diferenciable $u = u(x) \in C^\infty(\mathbb{H}^2)$, su gradiente hiperbólico Du en \mathbb{H}^2 y su gradiente euclídeo D_0u en \mathbb{R}^2 están relacionados mediante

$$Du(x) = x_2^2 D_0u(x), \quad x = (x_1, x_2), \quad (2.12)$$

y por tanto se verifica

$$|Du(x)|^2 = x_2^2 |D_0u(x)|_0^2, \quad (2.13)$$

donde por $|\cdot|$ y $|\cdot|_0$ denotamos, respectivamente, a la norma de un campo vectorial en \mathbb{H}^2 y en \mathbb{R}^2 . En particular,

$$\frac{Du(x)}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}} = \frac{x_2^2 D_0u(x)}{\sqrt{1 + x_2^2 |D_0u(x)|_0^2}}. \quad (2.14)$$

Por otro lado, los operadores divergencia correspondientes a la métrica hiperbólica, Div , y a la métrica euclídea, Div_0 , están relacionadas mediante

$$\text{Div} = \text{Div}_0 - \frac{2}{x_2} dx_2. \quad (2.15)$$

Finalmente, gracias a (2.14) y (2.15) podemos escribir la ecuación de las superficies minimales en el producto riemanniano $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ como

$$\text{Minimal}[u] = \frac{x_2^2 \Delta_0 u}{\sqrt{1 + x_2^2 |D_0u|_0^2}} - \frac{x_2^2}{(1 + x_2^2 |D_0u|_0^2)^{3/2}} (x_2 u_{x_2} |D_0u|_0^2 + x_2^2 Q(u)), \quad (2.16)$$

donde $\Delta_0 u$ representa el laplaciano euclídeo de la función u y

$$Q(u) = u_{x_1}^2 u_{x_1 x_1} + 2u_{x_1} u_{x_2} u_{x_1 x_2} + u_{x_2}^2 u_{x_2 x_2}.$$

Consideremos ahora la función diferenciable

$$u(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 + x_2^2). \quad (2.17)$$

Con unos sencillos cálculos podemos comprobar que u verifica

$$u_{x_2} = \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \Delta_0 u = 0, \quad Q(u) = \frac{-8}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

y

$$|D_0 u|_0^2 = \frac{4}{x_1^2 + x_2^2}. \quad (2.18)$$

Y sustituyendo en la ecuación (2.16), se comprueba que u satisface $\text{Minimal}[u] = 0$, por lo que determina un grafo entero minimal no trivial en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. De un modo análogo, la función

$$u(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \quad (2.19)$$

también determina un grafo entero minimal no trivial en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ya que de nuevo podemos calcular

$$u_{x_2} = \frac{-2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \Delta_0 u = 0, \quad Q(u) = \frac{2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^4}$$

y

$$|D_0 u|_0^2 = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad (2.20)$$

y por tanto $\text{Minimal}[u] = 0$. Hasta donde conocemos estos ejemplos, debidos a Montaldo y Onnis [MoOn, Examples 2.3 y 2.4] (véase también [Onn]), son los primeros ejemplos explícitos de grafos enteros minimales no triviales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. No obstante, se pueden encontrar resultados previos sobre la existencia de dichos grafos minimales en [DuHi1], [DuHi2], [DuSa] y [NeRo]. A partir de estos grafos enteros minimales, y a través de nuestro resultado de dualidad, podemos dar los siguientes ejemplos de grafos enteros maximales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$.

Ejemplo 2.3.3. Aplicando el Teorema 2.3.1 al grafo entero minimal determinado por la función (2.17), sabemos que existe una función diferenciable $w \in C^\infty(\mathbb{H}^2)$ que define un grafo entero maximal no trivial en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$. Con esto se pone de manifiesto que la hipótesis $K_M \geq 0$ en el Teorema 2.2.3 y en el Corolario 2.2.4 es necesaria. Además, veamos que el grafo entero maximal determinado por w es también completo, en el sentido que la métrica inducida sobre \mathbb{H}^2 via el grafo es completa. La demostración del Teorema 2.3.1 no sólo nos asegura la existencia del grafo maximal sino que, por tratarse de una demostración constructiva, nos proporciona expresiones explícitas para el gradiente de la función w y su norma en términos del gradiente de la función u , que es conocido. En concreto, a partir de (2.10) sabemos que

$$|Dw|^2 = 1 - \frac{1}{1 + |Du|^2}.$$

En nuestro caso, teniendo en cuenta (2.13) y (2.18) tenemos

$$|Dw|^2 = 1 - \frac{1}{1 + x_2^2 |D_0 u|_0^2} = \frac{4x_2^2}{x_1^2 + 5x_2^2} \leq \frac{4}{5},$$

luego el grafo determinado por w es completo en virtud del Lema 2.3.2. De este modo, el ejemplo también muestra que la hipótesis $K_M \geq 0$ en el Teorema 2.1.3 y en el Corolario 2.1.4 también es necesaria.

Por último observemos que es posible recuperar la función w que determina el grafo maximal a partir de (2.9). De hecho, teniendo en cuenta la relación (2.12) entre los gradientes hiperbólico y euclídeo, la relación (2.9) se puede expresar como

$$D_0 w = (w_{x_1}, w_{x_2}) = \frac{1}{\sqrt{1 + x_2^2} |D_0 u|_0^2} J_0(D_0 u), \tag{2.21}$$

siendo J_0 la $\pi/2$ -rotación positiva en el plano, es decir,

$$J_0(D_0 u) = J_0(u_{x_1}, u_{x_2}) = (-u_{x_2}, u_{x_1}).$$

A partir de aquí, con un sencillo cálculo se tiene que

$$w_{x_1} = -\frac{2x_2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + 5x_2^2)}} \quad \text{y} \quad w_{x_2} = \frac{2x_1}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + 5x_2^2)}},$$

e integrando ambas ecuaciones obtenemos finalmente la siguiente expresión para w en términos de una integral elíptica de primera especie:

$$w(x_1, x_2) = i \frac{2}{\sqrt{5}} F \left(\arcsin \left(i \frac{x_1}{x_2} \right), \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + c,$$

donde c es una constante real, i representa la unidad imaginaria, y $F(\phi, k)$ representa la integral elíptica de primera especie de módulo elíptico k y amplitud de Jacobi ϕ . Para simplificar podemos suponer $c = 0$, salvo una traslación en el espacio ambiente que es una isometría (véase la Figura 2.1).

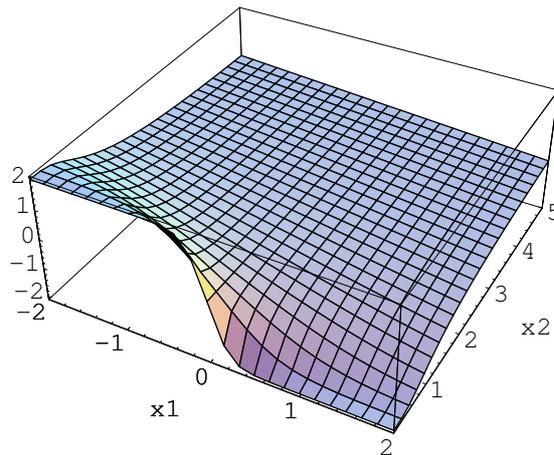


Figura 2.1: El grafo maximal completo en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ dado por $w(x_1, x_2) = i \frac{2}{\sqrt{5}} F \left(\arcsin \left(i \frac{x_1}{x_2} \right), \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$.

Ejemplo 2.3.4. Como en el ejemplo anterior, mediante el Teorema 2.3.1 podemos asociarle al grafo entero minimal no trivial en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ determinado por la función (2.19) su correspondiente grafo entero maximal dual no trivial en el producto lorentziano $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$. Sin embargo, al contrario que en el Ejemplo 2.3.3, este ejemplo no determina una superficie completa. Para comprobarlo, vamos a encontrar una curva divergente con longitud finita en el grafo maximal. Sea $w \in C^\infty(\mathbb{H}^2)$ la función diferenciable que define el grafo entero maximal $\Sigma(w)$. De nuevo podemos obtener el gradiente de la función w a partir del gradiente de la función u mediante la relación (2.21), y es un cálculo inmediato comprobar que en este caso obtenemos

$$w_{x_1} = -\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_2^2}} u_{x_2} = \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_2^2}}, \quad (2.22)$$

y

$$w_{x_2} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_2^2}} u_{x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_2^2}}. \quad (2.23)$$

Consideremos $\alpha : (0, 1) \rightarrow \Sigma(w)$ la curva divergente en $\Sigma(w)$ dada por $\alpha(s) = (0, s, w(0, s))$. Entonces $\alpha'(s) = (0, 1, w_{x_2}(0, s))$ y

$$\|\alpha'(s)\|^2 = \frac{1}{s^2} - w_{x_2}(0, s)^2 = \frac{1}{1 + s^2},$$

lo que implica que α tiene longitud finita ya que

$$L(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'(s)\| ds = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} = \operatorname{arcsinh}(1) = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Luego el grafo $\Sigma(w)$ no es completo.

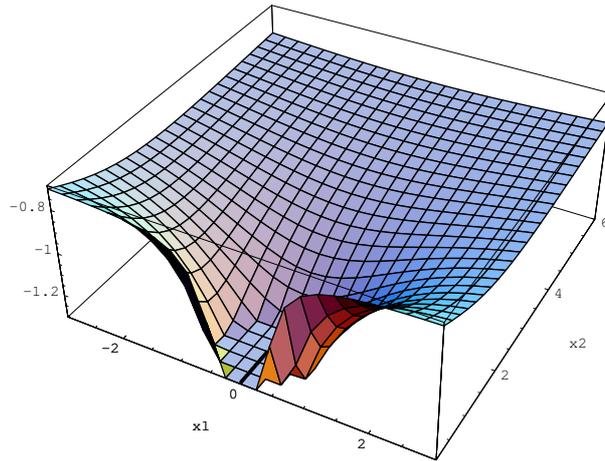


Figura 2.2: El grafo maximal no completo en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ dado por $w(x_1, x_2) = \ln \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2(x_2 + \sqrt{x_2^2 + (x_1^2 + x_2^2)^2})} \right)$ y la correspondiente curva divergente de longitud finita.

Integrando (2.22) y (2.23) obtenemos que

$$w(x_1, x_2) = \ln \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2 \left(x_2 + \sqrt{x_2^2 + (x_1^2 + x_2^2)^2} \right)} \right) + c,$$

donde de nuevo c es una constante real que podemos suponer nula (véase la Figura 2.2).

Recientemente, Gálvez y Rosenberg [GaRo] han demostrado la existencia de grafos enteros minimales no triviales sobre un espacio producto del tipo $M^2 \times \mathbb{R}$, siendo M^2 una superficie riemanniana completa, simplemente conexa, con curvatura de Gauss no necesariamente constante acotada superiormente por una constante negativa, es decir $K_M \leq c < 0$ para una cierta constante $c < 0$. De nuevo, gracias a nuestro teorema de dualidad, Teorema 2.3.1, deducimos la existencia de grafos enteros maximales no triviales sobre el correspondiente espacio producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$. De este modo se pone de manifiesto que la versión no paramétrica del teorema de tipo Calabi-Bernstein para superficies maximales en $M^2 \times \mathbb{R}_1$, Teorema 2.2.3, deja de ser cierto cuando M^2 es una superficie riemanniana completa, simplemente conexa, con curvatura de Gauss no necesariamente constante satisfaciendo $K_M \leq c < 0$.

2.4. Más ejemplos de grafos maximales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$

En esta sección introducimos un nuevo procedimiento para la obtención de nuevos grafos enteros maximales no triviales, completos y no completos, en el producto lorentziano $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$. De hecho, vamos a encontrar diferentes familias de ejemplos resolviendo directamente la ecuación de las superficies maximales para tipos particulares de funciones diferenciables.

Con un cálculo análogo al de la sección anterior, a partir de (2.12), (2.14) y (2.15) se puede ver que una función diferenciable u sobre \mathbb{H}^2 determina un grafo entero maximal en el producto lorentziano $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ si y sólo si satisface

$$\text{Maximal}[u] = (1 - x_2^2 |D_0 u|_0^2) x_2^2 \Delta_0 u + x_2^2 (x_2 u_{x_2} |D_0 u|_0^2 + x_2^2 Q(u)) = 0 \quad (2.24)$$

y

$$x_2^2 |D_0 u|_0^2 < 1. \quad (2.25)$$

Ejemplo 2.4.1. En primer lugar, vamos a buscar soluciones de la ecuación de las superficies maximales que dependan únicamente de una variable. Si consideramos en primer lugar soluciones del tipo $u(x_1, x_2) = u(x_1)$, entonces la ecuación (2.24) se reduce a

$$u''(x_1) = 0,$$

por lo que u debe ser de la forma

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Además u debe satisfacer la desigualdad (2.25), por lo que

$$x_2^2 u'(x_1)^2 = a^2 x_2^2 < 1.$$

Como estamos interesados en encontrar grafos enteros, la función u debe estar bien definida en todo \mathbb{H}^2 , y el único caso posible donde se satisface la desigualdad anterior es cuando $a = 0$. Consecuentemente, se tiene necesariamente que

$$u(x_1, x_2) = b, \quad b \in \mathbb{R},$$

luego los ejemplos obtenidos se corresponden con los *slices*.

Es más interesante el estudio de soluciones que dependan únicamente de la segunda variable $u(x_1, x_2) = u(x_2)$. En este caso, la función u determinará una superficie maximal cuando verifique

$$u''(x_2) + x_2 u'(x_2)^3 = 0 \tag{2.26}$$

y

$$x_2^2 u'(x_2)^2 < 1. \tag{2.27}$$

Integrando la ecuación diferencial (2.26) obtenemos

$$u(x_1, x_2) = u(x_2) = \ln \left(x_2 + \sqrt{a + x_2^2} \right) + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \geq 0,$$

donde de nuevo podemos suponer $b = 0$ salvo una isometría en el espacio ambiente. Teniendo en cuenta (2.27), la función u debe verificar

$$x_2^2 u'(x_2)^2 = \frac{x_2^2}{a + x_2^2} < 1,$$

y esta desigualdad es cierta para todo $x_2 > 0$ si y sólo si $a > 0$. Resumiendo, hemos obtenido explícitamente una familia de grafos enteros maximales sobre $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$, $\Sigma_a(u)$ ($a > 0$), (véase la Figura 2.3 para el caso $a = 1/2$ y $b = 0$).

Veamos que estos grafos no se corresponden con superficies completas, y de nuevo lo haremos encontrando una curva divergente de longitud finita. Consideremos la curva divergente sobre $\Sigma_a(u)$, $\alpha : (1, \infty) \rightarrow \Sigma_a(u)$, dada por

$$\alpha(s) = (0, s, u(s)).$$

Entonces $\alpha'(s) = (0, 1, u'(s))$, y podemos calcular

$$\|\alpha'(s)\|^2 = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{a^2 + s^2} = \frac{a}{s^2(a + s^2)}.$$

La longitud de la curva α es finita puesto que

$$L(\alpha) = \int_1^\infty \|\alpha'(s)\| ds = \int_1^\infty \sqrt{\frac{a}{s^2(a + s^2)}} ds = \operatorname{arcsinh}(\sqrt{a}),$$

y en consecuencia $\Sigma_a(u)$ no es completo.

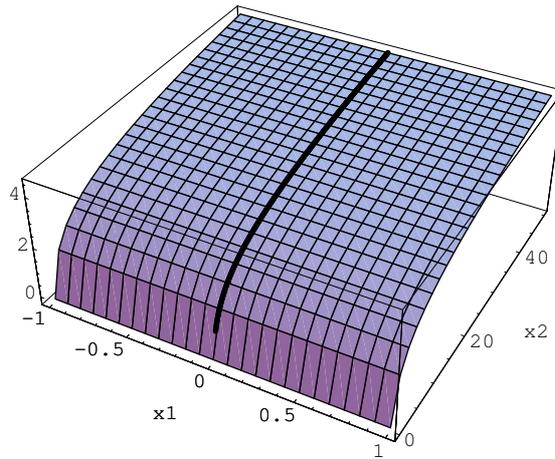


Figura 2.3: El grafo maximal no completo en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ dado por $u(x_1, x_2) = \ln \left(x_2 + \sqrt{\frac{1}{2} + x_2^2} \right)$ y la correspondiente curva divergente de longitud finita.

Ejemplo 2.4.2. Otra clase de funciones que nos proporciona una nueva familia de grafos enteros en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ es la clase de las funciones radiales. Es decir, vamos a considerar soluciones a la ecuación de las superficies maximales del tipo

$$u(x_1, x_2) = f(x_1^2 + x_2^2).$$

En este caso es inmediato comprobar que las condiciones para que u determine un grafo maximal en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$, (2.24) y (2.25), se traducen en

$$f'(z) + z f''(z) = 0 \quad (2.28)$$

y

$$4x_2^2 f'(z)^2 < 1, \quad (2.29)$$

donde $z = x_1^2 + x_2^2 > 0$. Integrando la ecuación (2.28) obtenemos

$$f(z) = a \ln z + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

luego sustituyendo en (2.29) se tiene que verificar

$$\frac{4a^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} < 1$$

en \mathbb{H}^2 . Por tanto ha de ser $a^2 < 1/4$. Consecuentemente, las funciones

$$u(x_1, x_2) = a \ln(x_1^2 + x_2^2) + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad -1/2 < a < 1/2$$

determinan otra familia de grafos enteros maximales (véase la Figura 2.4 para el caso $a = 1/4$ y $b = 0$). Al igual que en los ejemplos anteriores, podemos suponer siempre $b = 0$ salvo una isometría.

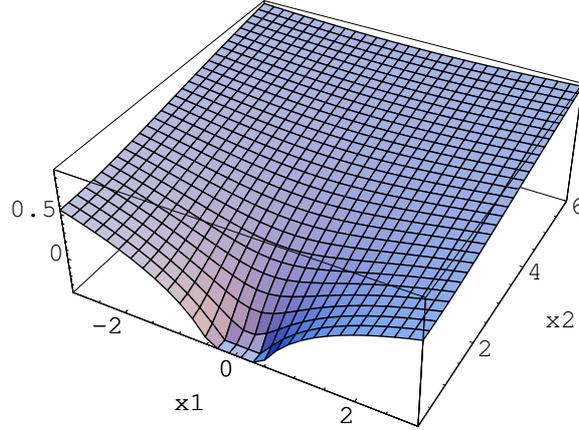


Figura 2.4: El grafo maximal completo en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ dado por $u(x_1, x_2) = \frac{1}{4} \ln(x_1^2 + x_2^2)$.

Además, de nuevo como una aplicación del Lema 2.3.2, podemos observar que estos grafos también son completos. De hecho, con un cálculo directo podemos calcular

$$|Du|^2 = x_2^2 |D_0 u|_0^2 = \frac{4a^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2},$$

y como $a^2 < 1/4$, se sigue que

$$\sup_{x \in \mathbb{H}^2} |Du(x)|^2 \leq 4a^2 < 1.$$

Luego el grafo es completo en virtud del Lema 2.3.2.

Ejemplo 2.4.3. Por último, nos proponemos buscar soluciones a la ecuación de las superficies maximales del tipo

$$u(x_1, x_2) = f\left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right).$$

En este caso, podemos calcular

$$u_{x_1}(x_1, x_2) = -\frac{2x_1 x_2 f'(z)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \quad \text{y} \quad u_{x_2}(x_1, x_2) = -\frac{(x_2^2 - x_1^2) f'(z)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

siendo $z = x_2/(x_1^2 + x_2^2)$, y las condiciones para que u defina un grafo maximal son

$$z f'(z)^3 + f''(z) = 0 \tag{2.30}$$

y

$$x_2^2 |D_0 u|_0^2 = \frac{x_2^2 f'(z)^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} < 1. \tag{2.31}$$

Integrando (2.30) obtenemos

$$f(z) = \ln \left(z + \sqrt{z^2 + a} \right) + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \geq 0,$$

por lo que (2.31) queda

$$\frac{x_2^2}{x_2^2 + a(x_1^2 + x_2^2)^2} < 1,$$

luego para que se verifique la desigualdad tiene que ser $a > 0$. Por tanto, considerando de nuevo $b = 0$, hemos obtenido la familia de grafos enteros maximales $\Sigma_a(u)$ sobre $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ determinados por

$$u(x_1, x_2) = \ln \left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{\frac{x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + a} \right) = \ln \left(\frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 + a(x_1^2 + x_2^2)^2}}{x_1^2 + x_2^2} \right),$$

donde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Veamos que, de nuevo, los grafos enteros maximales obtenidos de esta manera no son completos. Para ello, consideremos la curva divergente $\alpha : (0, 1) \rightarrow \Sigma_a(u)$ dada por

$$\alpha(s) = (0, s, u(0, s)).$$

Entonces $\alpha'(s) = (0, 1, u_{x_2}(0, s))$, luego $\|\alpha'(s)\|^2 = \frac{1}{s^2} - u_{x_2}(0, s)^2$. Como tenemos

$$u_{x_2}(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)\sqrt{x_2^2 + a(x_1^2 + x_2^2)^2}},$$

entonces

$$\|\alpha'(s)\|^2 = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2(1 + as^2)} = \frac{a}{1 + as^2},$$

luego finalmente

$$\int_0^1 \|\alpha'(s)\| ds = \sqrt{a} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + as^2}} ds = \operatorname{arcsinh}(\sqrt{a}).$$

Por tanto α es una curva divergente de longitud finita, por lo que los grafos enteros $\Sigma_a(u)$ no son superficies maximales completas.

Es inmediato observar que en el caso particular en que $a = 1$, el grafo $\Sigma_1(u)$ es, salvo por una isometría, el grafo entero maximal que hemos obtenido mediante el resultado de dualidad en el Ejemplo 2.3.4 de la sección anterior.

Finalmente, de un modo análogo se puede ver que no existen grafos enteros maximales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ determinados por funciones del tipo $u(x_1, x_2) = f\left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right)$, ya que en este caso las condiciones (2.24) y (2.25) son incompatibles.

Capítulo 3

Resultados locales sobre superficies maximales

Sumario. En este capítulo introducimos dos aproximaciones locales a nuestros resultados de tipo Calabi-Bernstein. En primer lugar, establecemos un criterio de parabolicidad para superficies maximales con frontera diferenciable no vacía inmersas en el espacio producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$, donde M^2 es una superficie riemanniana conexa con curvatura de Gauss no negativa. En particular deducimos que cualquier grafo maximal sobre un dominio estrellado $\Omega \subseteq M$ es parabólico. Esto nos permite dar una prueba alternativa a la versión no paramétrica del resultado de tipo Calabi-Bernstein para grafos enteros maximales en $M^2 \times \mathbb{R}_1$. Por otro lado, también introducimos otra aproximación local a nuestro resultado de tipo Calabi-Bernstein mediante una desigualdad integral local para el cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental de la superficie. En este caso, esta aproximación local proporciona una prueba alternativa de la versión paramétrica del resultado de Calabi-Bernstein para superficies maximales completas en $M^2 \times \mathbb{R}_1$.

Abstract. *In this chapter we introduce two local approaches to our Calabi-Bernstein results. Firstly, we establish some parabolicity criteria for maximal surfaces with non-empty smooth boundary immersed into the Lorentzian product space $M^2 \times \mathbb{R}_1$, being M^2 a connected Riemannian surface with non-negative Gaussian curvature. In particular we deduce that every maximal graph over a starlike domain $\Omega \subseteq M$ is parabolic. This allows us to give an alternative proof of the non-parametric version of the Calabi-Bernstein result for entire maximal graphs in $M^2 \times \mathbb{R}_1$. On the other hand, we also introduce another local approach to our Calabi-Bernstein result by means of a local integral inequality for the squared norm of the second fundamental form of the surface. In that case, this local approach provides an alternative proof of the parametric version of the Calabi-Bernstein result for complete maximal surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}_1$.*

3.1. Motivación

Hasta ahora hemos presentado resultados de naturaleza esencialmente global relativos a la geometría de superficies maximales en espacios productos lorentzianos $M^2 \times \mathbb{R}_1$. No obstante, uno de los aspectos más interesantes de la geometría diferencial es la interrelación existente entre las propiedades locales y las propiedades globales de cualquier variedad semi-riemanniana. Como su propio nombre indica, entendemos por propiedades locales aquellas propiedades que dependen del comportamiento de la variedad, o de la superficie en nuestro caso, en un entorno de un punto, y por propiedades globales aquellas que dependen del comportamiento de la superficie como un todo, sin distinguir puntos particulares. Por tanto, los problemas de naturaleza global dependen fuertemente de la topología de la superficie. Los problemas de naturaleza local constituyen una parte fundamental en el estudio de cualquier tema en geometría diferencial, y residen en los fundamentos de ésta. De hecho, las bases de la geometría diferencial están basadas en resultados locales, y en muchas ocasiones los resultados de naturaleza global se obtienen como generalizaciones y extensiones de propiedades previamente conocidas de carácter local.

En este capítulo vamos a hacer un breve paréntesis para cambiar el punto de vista en el estudio de las superficies maximales en $M^2 \times \mathbb{R}_1$, y trataremos el problema desde un punto de vista local. Lógicamente, los resultados de naturaleza local no requieren hipótesis tan fuertes sobre la topología de la superficie, y por tanto no podemos pretender ni aplicar el mismo tipo de técnicas que en los problemas de naturaleza global, ni obtener los mismos resultados que obtuvimos en el capítulo anterior. No obstante, no podemos olvidar que el objetivo de esta memoria es el de plantear y resolver problemas de naturaleza global relativos a la geometría de las superficies espaciales, y maximales en particular, en espacios productos lorentzianos. En este sentido hay que destacar que los resultados de carácter local que vamos a obtener en este capítulo, además de tener un gran interés geométrico por ellos mismos, nos van a permitir recuperar nuestros resultados globales de tipo Calabi-Bernstein bajo las hipótesis globales que sean necesarias en cada caso.

En concreto, presentamos dos aproximaciones locales distintas. La primera de ellas está referida al caso de superficies maximales con frontera no vacía. Para esta clase de superficies se puede definir una propiedad de parabolicidad adecuada, y en cierto modo relacionada con la definición de parabolicidad clásica: la parabolicidad relativa. Teniendo en cuenta este concepto damos un criterio de parabolicidad que, al aplicarlo al caso concreto de grafos maximales, conlleva como consecuencia la versión no paramétrica del teorema de Calabi-Bernstein para grafos enteros maximales en $M^2 \times \mathbb{R}_1$. La segunda aproximación local se trata de una desigualdad integral local para el cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental de una superficie maximal sobre discos geodésicos centrados en un punto dado. Bajo la hipótesis adicional de completitud, esta desigualdad implica la versión paramétrica del resultado de tipo Calabi-Bernstein para superficies maximales completas en $M^2 \times \mathbb{R}_1$. De este modo alcanzamos en este capítulo un doble objetivo, por un lado proporcionamos nuevos resultados, de naturaleza local, sobre la geometría de las superficies maximales

en $M^2 \times \mathbb{R}_1$, y por otro proporcionamos pruebas alternativas a los resultados centrales del capítulo anterior. Con esto estamos poniendo de manifiesto las relaciones existentes entre los resultados de naturaleza local y los resultados de naturaleza global en este tópico de la geometría diferencial.

3.2. Parabolicidad relativa de superficies maximales

Se dice que una superficie riemanniana (Σ, g) con frontera no vacía, $\partial\Sigma \neq \emptyset$, es relativamente parabólica si toda función armónica acotada sobre Σ viene determinada por los valores que toma en su frontera. Para probar los principales resultados de esta sección, necesitamos el siguiente criterio de parabolicidad relativa.

Lema 3.2.1. *Sea Σ^2 una superficie riemanniana con frontera no vacía, $\partial\Sigma \neq \emptyset$. Si Σ^2 admite una función continua $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ propia, eventualmente positiva y superarmónica en sentido débil, entonces Σ^2 es relativamente parabólica.*

Conviene aclarar aquí que se dice que una función continua $\psi \in C^0(\Sigma)$ es superarmónica en sentido débil si dada cualquier bola geodésica $B \subset \Sigma$ y dada cualquier función armónica φ sobre B de modo que se verifique $\psi \geq \varphi$ sobre la frontera de la bola geodésica, ∂B , se tiene que $\psi \geq \varphi$ sobre toda la bola geodésica B . En particular, en el caso en que ψ sea una función diferenciable sobre Σ , la superarmonicidad en sentido débil de la función ψ es equivalente a la superarmonicidad clásica, es decir, a que su laplaciano sea no positivo, $\Delta\psi \leq 0$. Por otro lado, diremos que una propiedad se satisface eventualmente cuando se verifique en el complementario de un conjunto compacto, mientras que por una función propia nos referimos a su significado topológico, es decir, una función se dice que es propia si la anti-imagen de un conjunto compacto es un conjunto compacto.

Prueba del Lema 3.2.1. La prueba del lema sigue las ideas del resultado análogo para funciones propias diferenciables dado por Meeks y Pérez [MePe] y [Per]. No obstante, para dar un mayor sentido de completitud a nuestros resultados haremos un esbozo de la prueba.

Para demostrar que Σ^2 es relativamente parabólica basta probar que si φ es una función armónica acotada que se anula en la frontera, $\varphi|_{\partial\Sigma} \equiv 0$, entonces φ es idénticamente cero sobre Σ , $\varphi \equiv 0$. Sea $K \subset \Sigma$ un conjunto compacto de modo que la función ψ sea positiva y superarmónica en sentido débil sobre $\Sigma \setminus K$. Observemos que gracias al principio del máximo de las funciones armónicas basta probar que $\varphi|_{\Sigma \setminus K} \equiv 0$. Supongamos que existe un cierto punto $p_0 \in \Sigma \setminus K$ de modo que $\varphi(p_0) \neq 0$. Puesto que $\psi(p_0) > 0$, existe una constante $a \in \mathbb{R}$ de modo que $a\varphi(p_0) > \psi(p_0) > 0$. Por ser φ una función armónica, la función $\eta = \psi - a\varphi : \Sigma \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$ es superarmónica en sentido débil sobre $\Sigma \setminus K$. Por otro lado, por ser ψ propia y positiva sobre $\Sigma \setminus K$, η es una función positiva sobre el complementario del conjunto compacto $K' = \{p \in \Sigma \setminus K : \psi(p) \leq C\}$ donde $C = \sup_{p \in \Sigma \setminus K} a\varphi(p) > 0$. Finalmente, puesto que $\eta(p_0) < 0$, η alcanza un mínimo en $\Sigma \setminus K$ en un

punto interior, lo que contradice el principio del mínimo para funciones superarmónicas en sentido débil. \square

Las funciones continuas superarmónicas en sentido débil admiten la siguiente caracterización: una función continua $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ es superarmónica en sentido débil si y sólo si para toda función diferenciable con soporte compacto $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$ se tiene que

$$\int_{\Sigma} \psi \Delta \varphi \leq 0,$$

(véase por ejemplo [GiTr, Chapter 2]). A partir de aquí, y del hecho de que la integral de una función acotada sobre un subconjunto de medida nula se anula, se concluye que si una función ψ es superarmónica en sentido débil sobre $\Sigma \setminus \Lambda$, siendo Λ un conjunto de medida nula, entonces ψ también es superarmónica en sentido débil sobre toda la superficie Σ .

La parabolicidad relativa de una superficie con frontera no vacía guarda una interesante relación con el concepto clásico de parabolicidad para superficies sin frontera. De hecho, una superficie riemanniana (Σ, g) sin frontera es parabólica si y sólo si para cualquier conjunto abierto no vacío $O \subset \Sigma$ con frontera diferenciable su complementario $\Sigma \setminus O$ es relativamente parabólico como una superficie con frontera. Este hecho se debe a que una variedad riemanniana sin frontera es parabólica precisamente cuando casi todos los caminos brownianos son densos en la variedad (véase [Per] y [Gri, Theorem 5.1]). Para un estudio más detallado y extenso sobre la parabolicidad y la parabolicidad relativa, se pueden consultar las referencias [Gri] y [Per] entre otras.

Dada una función diferenciable sobre la superficie M^2 , $\hat{\psi} \in \mathcal{C}^\infty(M)$, podemos considerar su levantamiento a $M^2 \times \mathbb{R}_1$, $\bar{\psi} \in \mathcal{C}^\infty(M^2 \times \mathbb{R}_1)$, dado por

$$\bar{\psi}(x, t) = \hat{\psi}(x).$$

Además también asociaremos a la función $\hat{\psi} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ la función diferenciable $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ definida como $\psi = \bar{\psi} \circ f$. En este contexto, podemos expresar el laplaciano en Σ de la función ψ en términos del laplaciano de $\bar{\psi}$ en $M^2 \times \mathbb{R}_1$, $\bar{\Delta} \bar{\psi}$, y de los operadores diferenciales de $\hat{\psi}$ como sigue.

Lema 3.2.2. *A lo largo de una superficie espacial $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$ se tiene que*

$$\Delta \psi = \bar{\Delta} \bar{\psi} + 2H \langle N^*, \hat{\nabla} \hat{\psi} \rangle_M + \hat{\nabla}^2 \hat{\psi} \langle N^*, N^* \rangle, \quad (3.1)$$

donde $N^* = \pi_M^*(N) = N + \Theta \partial_t$, y $\hat{\nabla}$ y $\hat{\nabla}^2$ denotan los operadores gradiente y hessiano sobre M , respectivamente.

Demostración. Teniendo en cuenta que el gradiente de ψ en Σ y el gradiente de $\bar{\psi}$ en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ vienen relacionados mediante $\bar{\nabla} \bar{\psi} = \nabla \psi - \langle \bar{\psi}, N \rangle N$, se obtiene a partir de las fórmulas de Gauss (1.6) y de Weingarten (1.7) que

$$(\bar{\nabla}_X \bar{\nabla} \bar{\psi})^\top = \nabla_X \nabla \psi + \langle \bar{\nabla} \bar{\psi}, N \rangle AX$$

para cualquier campo vectorial tangente $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Por tanto, la correspondiente relación entre los hessianos de $\bar{\psi}$ y ψ en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ y Σ viene dada por

$$\bar{\nabla}^2 \bar{\psi}(X, X) = \nabla^2 \psi(X, X) + \langle AX, X \rangle \langle \bar{\nabla} \bar{\psi}, N \rangle$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. A partir de aquí es inmediato observar que

$$\bar{\Delta} \bar{\psi} = \Delta \psi - 2H \langle \bar{\nabla} \bar{\psi}, N \rangle - \bar{\nabla}^2 \bar{\psi}(N, N). \quad (3.2)$$

Observemos ahora que la función $\bar{\psi}$ no depende de t , y por tanto $\bar{\nabla} \bar{\psi}(x, t) = \hat{\nabla} \hat{\psi}(x)$. A partir de aquí se tiene $\bar{\nabla}_N \bar{\nabla} \bar{\psi} = \hat{\nabla}_{N^*} \hat{\nabla} \hat{\psi}$ y consecuentemente

$$\bar{\nabla}^2 \bar{\psi}(N, N) = \hat{\nabla}^2 \hat{\psi}(N^*, N^*).$$

El lema queda probado a partir de (3.2). □

En [FeLo, Theorem 3.1] Fernández y López han probado que las superficies propiamente inmersas con frontera no vacía en el espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^3 son relativamente parabólicas si la norma lorentziana sobre la superficie maximal en \mathbb{R}_1^3 es eventualmente positiva y propia. Nuestro resultado principal en esta sección generaliza este criterio de parabolicidad relativa para el caso de superficies maximales espaciales en $M^2 \times \mathbb{R}_1$, donde M^2 es una superficie riemanniana completa con curvatura de Gauss no negativa. Consideremos la función $\hat{r} : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\hat{r}(x) = \text{dist}_M(x, x_0)$ para un punto fijo $x_0 \in M$. Observemos que \hat{r} es una función diferenciable casi en todo M . En concreto, \hat{r} es una función diferenciable sobre $M \setminus \text{Cut}(x_0)$, donde $\text{Cut}(x_0)$ representa el lugar de corte de x_0 en M . Es bien conocido que $\dim(\text{Cut}(x_0)) < 2$, y que por tanto $\text{Cut}(x_0)$ es un subconjunto de medida nula. Siendo coherentes con la notación anterior, denotaremos por $\bar{r}(x, t) = \hat{r}(x)$ al levantamiento de \hat{r} a $M^2 \times \mathbb{R}_1$, y dada una superficie espacial $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$, r representará la restricción de \bar{r} a Σ , $r = \bar{r}|_\Sigma = \bar{r} \circ f$. Observemos además que puesto que por el Lema 2.1.1 la proyección $\Pi : \Sigma \rightarrow M$ es una aplicación recubridora, se verifica que $\dim(\Pi^{-1}(\text{Cut}(x_0))) = \dim(\text{Cut}(x_0)) < 2$, y por tanto r es también una función diferenciable casi en todo Σ .

En este contexto, probamos el siguiente criterio de parabolicidad relativa para superficies maximales en $M^2 \times \mathbb{R}_1$,

Teorema 3.2.3. *Sea M^2 una superficie riemanniana completa con curvatura de Gauss no negativa. Consideremos Σ una superficie maximal en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ con frontera no vacía, $\partial \Sigma \neq \emptyset$, y supongamos que la función $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\phi(p) = r^2(p) - h^2(p)$$

es eventualmente positiva y propia. Entonces Σ es una superficie relativamente parabólica.

Cabe destacar que la función $\phi(p) = r^2(p) - h^2(p)$ es la generalización natural de la norma lorentziana en \mathbb{R}_1^3 al espacio $M^2 \times \mathbb{R}_1$, ya que en el caso particular donde $M = \mathbb{R}^2$, y por tanto $M^2 \times \mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_1^3$, ambas funciones coinciden sobre Σ .

Es interesante observar que la hipótesis sobre la no negatividad de la curvatura de Gauss de M es necesaria. De hecho, sea $M^2 = \mathbb{H}^2$ y consideremos $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ un dominio conexo de \mathbb{H}^2 con frontera diferenciable. Entonces, para cualquier valor fijo $t_0 \in \mathbb{R}$, $\Sigma_{t_0} = \{(x, t_0) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} : x \in \Omega\}$ es una superficie maximal trivialmente no relativamente parabólica en $\Omega \times \mathbb{R}_1$ para la cual la función ϕ es eventualmente positiva y propia.

Prueba del Teorema 3.2.3. Sea $a > 1$ y consideremos $K = \{p \in \Sigma : \phi(p) \leq a\} \subseteq \Sigma$. Por ser ϕ eventualmente positiva y propia K es un conjunto compacto. Así, puesto que la parabolicidad relativa no se ve afectada al añadir o quitar subconjuntos compactos (véase [Per]), Σ es una superficie relativamente parabólica si y sólo si $\Sigma \setminus K$ también es relativamente parabólica.

Por construcción de K la función $\log \phi : \Sigma \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$ está bien definida, y es una función propia y positiva sobre $\Sigma \setminus K$. Por tanto, para probar que $\Sigma \setminus K$ es una superficie relativamente parabólica bastará con ver que $\log \phi$ es superarmónica en sentido débil sobre $\Sigma \setminus K$. Equivalentemente, bastará con probar que $\log \phi$ es una función superarmónica en el subconjunto denso $\Sigma' \subset \Sigma \setminus K$ donde sea diferenciable. En lo que sigue de prueba trabajaremos en dicho subconjunto Σ' . A partir de las expresiones (1.14) y (1.17) se obtiene

$$\Delta h^2 = 2h\Delta h + 2\|\nabla h\|^2 = 2(\Theta^2 - 1). \quad (3.3)$$

Por otro lado, como la función \bar{r} no depende de t se tiene $\bar{\nabla}\bar{r}(x, t) = \hat{\nabla}\hat{r}(x)$, y tomando divergencias $\bar{\Delta}\bar{r}(x, t) = \hat{\Delta}\hat{r}(x)$. Por tanto

$$\bar{\Delta}\bar{r}^2(x, t) = 2\bar{r}(x, t)\bar{\Delta}\bar{r}(x, t) + 2\|\bar{\nabla}\bar{r}(x, t)\|^2 = 2(\hat{r}(x)\hat{\Delta}\hat{r}(x) + 1), \quad (3.4)$$

ya que es un hecho conocido que $\|\bar{\nabla}\bar{r}\|^2 = \|\hat{\nabla}\hat{r}\|_M^2 = 1$. Aplicando ahora el Lema 3.2.2 a la función $\psi = r^2$ se tiene que

$$\Delta r^2 = \bar{\Delta}\bar{r}^2 + \hat{\nabla}^2\hat{r}^2(N^*, N^*) = 2(r\hat{\Delta}\hat{r} + 1) + \hat{\nabla}^2\hat{r}^2(N^*, N^*). \quad (3.5)$$

Para estudiar el último término de (3.5) necesitamos calcular previamente el hessiano sobre M de la función \hat{r}^2 en un punto dado $x \in M$. Dados $v, w \in T_x M$ tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}^2\hat{r}^2(v, w) &= 2\langle \hat{\nabla}_v(\hat{r}\hat{\nabla}\hat{r}), w \rangle_M \\ &= 2\hat{r}(x)\hat{\nabla}^2\hat{r}(v, w) + 2\langle \hat{\nabla}\hat{r}(x), v \rangle_M \langle \hat{\nabla}\hat{r}(x), w \rangle_M. \end{aligned}$$

En particular, consideremos un vector tangente $\tau \in T_x M$ de modo que $\tau \perp_M \hat{\nabla}\hat{r}$, siendo $\|\tau\|_M = 1$. Como $\|\hat{\nabla}\hat{r}\|_M^2 = 1$, tenemos $\hat{\nabla}^2\hat{r}^2(\hat{\nabla}\hat{r}, \hat{\nabla}\hat{r}) = \frac{1}{2}\hat{\nabla}\hat{r}(\|\hat{\nabla}\hat{r}\|) = 0$ y $\hat{\nabla}^2\hat{r}^2(\hat{\nabla}\hat{r}, \tau) = \frac{1}{2}\tau(\|\hat{\nabla}\hat{r}\|) = 0$,

luego

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}^2 \hat{r}^2(\hat{\nabla} \hat{r}(x), \hat{\nabla} \hat{r}(x)) &= 2, \\ \hat{\nabla}^2 \hat{r}^2(\hat{\nabla} \hat{r}(x), \tau) &= 0 \quad \text{y} \\ \hat{\nabla}^2 \hat{r}^2(\tau, \tau) &= 2\hat{r}(x)\hat{\nabla}^2 \hat{r}(\tau, \tau) = 2\hat{r}(x)\hat{\Delta} \hat{r}(x).\end{aligned}$$

Como todo vector tangente $v \in T_x M$ admite una descomposición del tipo

$$v = \langle v, \hat{\nabla} \hat{r}(x) \rangle_M \hat{\nabla} \hat{r}(x) + \langle v, \tau \rangle_M \tau,$$

finalmente obtenemos la expresión

$$\hat{\nabla}^2 \hat{r}^2(v, v) = 2\langle v, \hat{\nabla} \hat{r} \rangle_M^2 + 2\hat{r}(x)\hat{\Delta} \hat{r}(x)\langle v, \tau \rangle_M^2.$$

Por tanto, a lo largo de la superficie Σ' se tiene que

$$\hat{\nabla}^2 \hat{r}^2(N^*, N^*) = 2\langle N^*, \hat{\nabla} \hat{r} \rangle_M^2 + 2\hat{r}(x)\hat{\Delta} \hat{r}(x)\langle N^*, \tau \rangle_M^2$$

y (3.5) puede escribirse como

$$\frac{1}{2}\Delta r^2 = r\hat{\Delta} \hat{r}(1 + \langle N^*, \tau \rangle_M^2) + 1 + \langle N^*, \hat{\nabla} \hat{r} \rangle_M^2. \quad (3.6)$$

A partir de (3.3) y (3.6) obtenemos ahora que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta \phi &= \frac{1}{2}\Delta r^2 - \frac{1}{2}\Delta h^2 \\ &= r\hat{\Delta} \hat{r}(1 + \langle N^*, \tau \rangle_M^2) + \langle N^*, \hat{\nabla} \hat{r} \rangle_M^2 + 2 - \Theta^2.\end{aligned} \quad (3.7)$$

Como M^2 es una superficie completa con curvatura de Gauss no negativa, el teorema de comparación de laplacianos implica que $\hat{\Delta} \hat{r} \leq 1/\hat{r}$ (véase [ScYa, Corollary 1.2, Chapter 1]), luego sobre Σ' se verifica la desigualdad

$$r\hat{\Delta} \hat{r} \leq 1.$$

Aplicando esta desigualdad en (3.7), se tiene

$$\frac{1}{2}\Delta \phi \leq \|N^*\|^2 + 3 - \Theta^2 = 2, \quad (3.8)$$

ya que $\|N^*\|^2 = \Theta^2 - 1$.

Por otro lado, $\nabla \phi = 2r\nabla r - 2h\nabla h$, luego

$$\|\nabla \phi\|^2 = 4r^2\|\nabla r\|^2 - 8rh\langle \nabla r, \nabla h \rangle + 4h^2\|\nabla h\|^2.$$

A partir de las descomposiciones $\bar{\nabla} \bar{r} = \nabla r - \langle \bar{\nabla} \bar{r}, N \rangle N$ y $\partial_t = -\nabla h - \Theta N$, y teniendo en cuenta de nuevo que $\|\bar{\nabla} \bar{r}\|^2 = 1$ y $\langle \bar{\nabla} \bar{r}, \partial_t \rangle = 0$, se sigue que

$$\|\nabla r\|^2 = 1 + \langle \bar{\nabla} \bar{r}, N \rangle^2 \quad \text{y} \quad \langle \nabla r, \nabla h \rangle = -\Theta \langle \bar{\nabla} \bar{r}, N \rangle,$$

que juntamente con (1.14) implica que

$$\begin{aligned}\|\nabla\phi\|^2 &= 4r^2(1 + \langle \bar{\nabla}\bar{r}, N \rangle^2) + 8rh\Theta\langle \bar{\nabla}\bar{r}, N \rangle + 4h^2(\Theta^2 - 1) \\ &= 4\phi + 4(r\langle \bar{\nabla}\bar{r}, N \rangle + h\Theta)^2 \geq 4\phi.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Finalmente, a partir de (3.8) y (3.9), se obtiene la desigualdad

$$\Delta \log(\phi) = \frac{1}{\phi^2} (\phi\Delta\phi - \|\nabla\phi\|^2) \leq 0,\tag{3.10}$$

por lo que concluimos que $\log \phi$ es superarmónica sobre Σ' . Por tanto, $\log \phi$ es una función positiva, propia y superarmónica en sentido débil sobre $\Sigma \setminus K$. En consecuencia $\Sigma \setminus K$ es relativamente parabólica, y finalmente Σ también es relativamente parabólica. \square

Parece interesante proponernos la búsqueda de ciertas condiciones naturales sobre la inmersión bajo las cuales se satisfagan las hipótesis del Teorema 3.2.3. En este contexto, podemos probar el siguiente resultado.

Proposición 3.2.4. *Sea M^2 una superficie riemanniana y consideremos una inmersión espacial propia $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$ que eventualmente se encuentre contenida en*

$$\mathcal{W}_a = \{(x, t) \in M^2 \times \mathbb{R}_1 : |t| \leq a\hat{r}(x)\},$$

donde a es una constante de modo que $0 < a < 1$. Entonces la función $\phi = r^2 - h^2$ es eventualmente positiva y propia sobre la superficie Σ .

Por tanto, como una consecuencia inmediata de la Proposición 3.2.4 y del Teorema 3.2.3, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.5. *Sea M^2 una superficie riemanniana completa con curvatura de Gauss no negativa. Entonces cualquier inmersión maximal propia $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$ con frontera no vacía que eventualmente esté contenida en \mathcal{W}_a para algún $0 < a < 1$ es relativamente parabólica.*

Demostración de la Proposición 3.2.4. Por estar $f(\Sigma)$ eventualmente contenida en \mathcal{W}_a , existe un conjunto compacto $K \subset \Sigma$ de modo que $h^2(p) \leq a^2r^2(p)$ para todo $p \in \Sigma \setminus K$ y por tanto $\phi = r^2 - h^2 > a^2r^2 - h^2 \geq 0$ sobre $\Sigma \setminus K$.

Con un razonamiento topológico elemental se puede ver que, para probar que ϕ es una función propia, basta con demostrar que $(\phi|_{\Sigma \setminus K})^{-1}([0, b])$ es un conjunto compacto para cualquier $b > 0$. Consideremos la función $\bar{\phi} : \mathcal{W}_a \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\bar{\phi}(x, t) = \hat{r}^2(x) - t^2$. Se tiene $\phi|_{\Sigma \setminus K} = \bar{\phi} \circ f|_{\Sigma \setminus K}$ y, en consecuencia, $(\phi|_{\Sigma \setminus K})^{-1}([0, b]) = f^{-1}(\bar{\phi}^{-1}([0, b]))$. Como f es propia, es suficiente con probar que $\bar{\phi}^{-1}([0, b]) \in \mathcal{W}_a$ es compacto. Observemos que, por definición de \mathcal{W}_a , dado $(x, t) \in \mathcal{W}_a$ se tiene

$$\bar{\phi}(x, t) = \hat{r}^2(x) - t^2 \geq \hat{r}^2(x) - a^2\hat{r}^2(x) = (1 - a^2)\hat{r}^2(x).$$

Por tanto, para cada $(x, t) \in \bar{\phi}^{-1}([0, b]) \subset \mathcal{W}_a$, tenemos que

$$\hat{r}^2(x) \leq c^2 := \frac{b}{1-a^2},$$

lo que implica que $\bar{\phi}^{-1}([0, b]) \subset \overline{B(x_0, c)} \times [-ac, ac]$, donde $\overline{B(x_0, c)}$ representa el disco geodésico cerrado en M de radio c centrado en x_0 (véase la Figura 3.1). Luego finalmente la proposición queda probada por ser $\overline{B(x_0, c)} \times [-ac, ac]$ un conjunto compacto en $M^2 \times \mathbb{R}$.

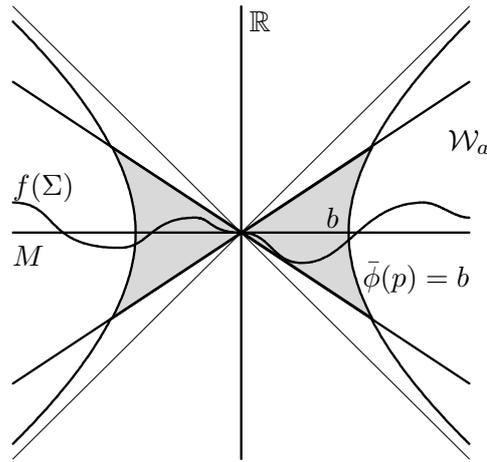


Figura 3.1: $\bar{\phi}^{-1}([0, b])$ es compacto bajo las hipótesis de la Proposición 3.2.4.

□

Como ya hemos indicado al principio de esta sección, una superficie riemanniana (Σ, g) sin frontera es parabólica si dado cualquier conjunto abierto no vacío $O \subset \Sigma$ con frontera diferenciable, $\Sigma \setminus O$ es relativamente parabólica (vista como una superficie con frontera). Por tanto, como otra consecuencia del Teorema 3.2.3 podemos establecer lo siguiente.

Corolario 3.2.6. *Sea M^2 una superficie riemanniana completa con curvatura de Gauss no negativa, y sea Σ una superficie maximal en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ sin frontera, $\partial\Sigma = \emptyset$. Si la función $\phi = r^2 - h^2$ es eventualmente positiva y propia sobre Σ , entonces Σ es parabólica.*

Demostración. Basta observar que si ϕ es una función eventualmente positiva y propia sobre Σ , entonces también lo será cuando consideremos su restricción a $\Sigma \setminus O$ para cualquier $O \subset \Sigma$ abierto no vacío con frontera diferenciable. Por tanto, la superficie maximal con frontera no vacía $\Sigma \setminus O$ es relativamente parabólica en virtud del Teorema 3.2.3, y en consecuencia Σ es una superficie parabólica.

□

3.3. Parabolicidad de grafos enteros maximales

El objetivo de esta sección es dar una prueba alternativa de la parabolicidad de los grafos enteros maximales, que ya demostramos en la Sección 2.2 del Capítulo 2, apoyada en los resultados obtenidos en la sección anterior. De este modo, también conseguimos dar una prueba alternativa de la versión no paramétrica de nuestro resultado de tipo Calabi-Bernstein, Teorema 2.1.3.

Consideremos $\Omega \subseteq M$ un dominio conexo y sea $x_0 \in \text{int}(\Omega)$. Diremos que Ω es un dominio estrellado con respecto a x_0 si para todo $x \in \Omega$ existe un segmento de geodésica minimizante (no necesariamente único) uniendo x_0 y x que esté completamente contenido en Ω . Obviamente, si M es una superficie riemanniana completa, M es estrellada con respecto a cualquiera de sus puntos.

Proposición 3.3.1. *Consideremos M^2 una superficie riemanniana completa y $\Sigma(u)$ un grafo espacial sobre un dominio Ω estrellado con respecto a algún punto $x_0 \in \text{int}(\Omega)$. Entonces la función $\phi = r^2 - h^2$ es eventualmente positiva y propia sobre $\Sigma(u)$.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $u(x_0) = 0$. Considerando el embebimiento estándar $x \in \Omega \leftrightarrow (x, u(x)) \in \Sigma(u)$ observamos que $\Sigma(u)$ es homeomorfo a Ω , y teniendo en cuenta que la tesis de nuestro resultado es puramente topológica, será suficiente con probar que la función $\varphi = \hat{r}^2 - u^2$ es eventualmente positiva y propia sobre Ω . Consideremos

$$\mathcal{W} = \{(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R} : \hat{r}^2(x) - t^2 \geq 0\}.$$

Probaremos en primer lugar que φ es positiva para todo $x \in \Omega - \{x_0\}$. Es decir, veamos que

$$\Sigma(u) - \{(x_0, 0)\} \subset \text{int}(\mathcal{W}).$$

Dado $x \neq x_0$, sea $\gamma : [0, l] \rightarrow \Omega$ el segmento de geodésica minimizante de modo que $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(l) = x$ y $l = \text{dist}_M(x_0, x) = \hat{r}(x) > 0$. Sea $\alpha(s) = (\gamma(s), u(s)) \in \Sigma(u)$, donde $u(s) := u(\gamma(s))$ para simplificar la notación. Por ser $\Sigma(u)$ una superficie espacial, $\alpha'(s) = (\gamma'(s), u'(s)) \neq (0, 0)$ es un vector espacial, es decir,

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = \|\gamma'(s)\|_M^2 - u'(s)^2 = 1 - u'(s)^2 > 0.$$

Consecuentemente $-1 < u'(s) < 1$ para todo $0 \leq s \leq l = \hat{r}(x)$, e integrando tenemos

$$-\hat{r}(x) < u(x) < \hat{r}(x). \quad (3.11)$$

Por tanto $\varphi(x) > 0$ y $(x, u(x)) \in \text{int}(\mathcal{W})$ para todo $x \in \Omega$, $x \neq x_0$.

Nos falta por probar que φ es una función propia. Consideremos sobre $M^2 \times \mathbb{R}$ la métrica riemanniana estándar, $\langle \cdot, \cdot \rangle_M + dt^2$, y denotemos por $\text{dist}_+(\cdot, \cdot)$ a la distancia asociada a esta métrica riemanniana. Vamos a ver ahora que

$$\text{dist}_+((x, t), \partial\mathcal{W}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \min\{\hat{r}(x) - t, \hat{r}(x) + t\} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{r}(x) - |t|) \quad (3.12)$$

para todo $(x, t) \in \mathcal{W}$. Observemos para ello que $\partial\mathcal{W} = \partial\mathcal{W}^+ \cup \partial\mathcal{W}^-$, siendo

$$\partial\mathcal{W}^+ = \{(x, \hat{r}(x) : x \in \Omega)\} \quad \text{y} \quad \partial\mathcal{W}^- = \{(x, -\hat{r}(x) : x \in \Omega)\}.$$

Por tanto,

$$\text{dist}_+((x, t), \partial\mathcal{W}) = \min\{\text{dist}_+((x, t), \partial\mathcal{W}^+), \text{dist}_+((x, t), \partial\mathcal{W}^-)\}.$$

Para $x = x_0$ la expresión (3.12) se satisface trivialmente, puesto que $\hat{r}(x_0) = 0$ y $t = 0$ necesariamente. Consideremos ahora $x \neq x_0$ y sea $\gamma : [0, \hat{r}(x)] \rightarrow \Omega$ un segmento de geodésica minimizante de modo que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(\hat{r}(x)) = x$. Calcularemos en primer lugar $\text{dist}_+((x, t), \partial\mathcal{W}^+)$. Debido al carácter minimizante de la geodésica γ , para cada $s \in [0, \hat{r}(x)]$ tenemos que $\hat{r}(\gamma(s)) = s$, luego $(\gamma(s), s) \in \partial\mathcal{W}^+$ y

$$\text{dist}_+((x, t), (\gamma(s), s))^2 = \text{dist}_M(x, \gamma(s))^2 + (t - s)^2 = (\hat{r}(x) - s)^2 + (t - s)^2.$$

Observemos que esta expresión alcanza su mínimo en $s_0 = (\hat{r}(x) + t)/2$, y

$$\text{dist}_+((x, t), (\gamma(s_0), s_0)) = \frac{1}{\sqrt{2}}|\hat{r}(x) - t| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{r}(x) - t). \quad (3.13)$$

Afirmamos ahora que $\text{dist}_+((x, t), \partial\mathcal{W}^+)$ viene dada precisamente por la expresión (3.13). De hecho, dado $y \in \Omega$ tenemos que

$$\text{dist}_M(x, y) \geq |\text{dist}_M(x_0, x) - \text{dist}_M(x_0, y)| = |\hat{r}(x) - \hat{r}(y)|,$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \text{dist}_+((x, t), (y, \hat{r}(y)))^2 &= \text{dist}_M(x, y)^2 + (t - \hat{r}(y))^2 \\ &\geq (\hat{r}(x) - \hat{r}(y))^2 + (t - \hat{r}(y))^2 \\ &\geq \min_{s \geq 0} ((\hat{r}(x) - s)^2 + (t - s)^2) = \frac{1}{2}(\hat{r}(x) - t)^2. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\text{dist}_+((x, t), \partial\mathcal{W}^+) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{r}(x) - t). \quad (3.14)$$

Utilizando un argumento similar para $\partial\mathcal{W}^-$,

$$\text{dist}_+((x, t), \partial\mathcal{W}^-) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{r}(x) + t). \quad (3.15)$$

A partir de (3.14) y (3.15) se sigue la expresión (3.12).

Sea $x \in \Omega$, $x \neq x_0$, y consideremos $\gamma : [0, \hat{r}(x)] \rightarrow \Omega$ un segmento de geodésica minimizante de modo que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(\hat{r}(x)) = x$. Entonces $(\gamma(s), u(s)) \in \mathcal{W}$, donde recordemos que por definición $u(s) = u(\gamma(s))$, y a partir de (3.12) se tiene que

$$\text{dist}_+((\gamma(s), u(s)), \partial\mathcal{W}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(s - |u(s)|). \quad (3.16)$$

Esto implica en particular que $\text{dist}_+((\gamma(s), u(s)), \partial\mathcal{W})$ es una función positiva y creciente para todo $0 < s \leq \hat{r}(x)$. Por tanto, si consideramos $\delta > 0$ suficientemente pequeño para que el disco geodésico B_δ satisfaga $B_\delta = B(x_0, \delta) \subset\subset \Omega$, se tendrá que

$$\text{dist}_+((x, u(x)), \partial\mathcal{W}) \geq \varepsilon > 0 \quad \text{para todo } x \in \Omega \setminus B_\delta, \quad (3.17)$$

donde

$$\varepsilon = \min_{x \in \partial B_\delta} \text{dist}_+((x, u(x)), \partial\mathcal{W}) > 0,$$

(véase la Figura 3.2).

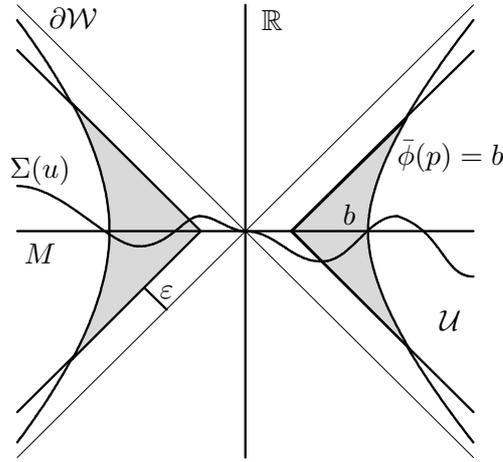


Figura 3.2: $\text{dist}_+((x, t), \partial\mathcal{W}) \geq \varepsilon$ eventualmente en Ω .

Probemos finalmente que φ es una función propia sobre Ω . Puesto que podemos descomponer Ω como $\Omega = \bar{B}_\delta \cup (\Omega \setminus B_\delta)$ con \bar{B}_δ compacto, será suficiente probar que $\varphi|_{\Omega \setminus B_\delta}$ es propia sobre $\Omega \setminus B_\delta$. Consideremos el embebimiento estándar $f : \Omega \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}$ dado por $f(x) = (x, u(x))$, y definamos $\bar{\phi} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $\bar{\phi}(x, t) = \hat{r}^2(x) - t^2$. Observemos en primer lugar que f es trivialmente propia ya que si tomamos $A \subset \Omega \times \mathbb{R}$ compacto entonces

$$f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\pi_\Omega(A) \times \pi_{\mathbb{R}}(A)) = \pi_\Omega(A) \cap u^{-1}(\pi_{\mathbb{R}}(A))$$

es compacto, siendo $\pi_\Omega : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ y $\pi_{\mathbb{R}} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las proyecciones naturales del producto $\Omega \times \mathbb{R}$ sobre cada uno de sus factores. A partir de (3.17) se tiene que

$$f(\Omega \setminus B_\delta) \subset \mathcal{U} = \{(x, t) \in \mathcal{W} : \text{dist}_+((x, t), \partial\mathcal{W}) \geq \varepsilon\},$$

y por tanto $\varphi|_{\Omega \setminus B_\delta} = \bar{\phi}|_{\mathcal{U}} \circ f|_{\Omega \setminus B_\delta}$. La función $f|_{\Omega \setminus B_\delta} : \Omega \setminus B_\delta \rightarrow \mathcal{U}$ es propia. De hecho, para cualquier conjunto compacto $A \subset \mathcal{U}$ se tiene que $(f|_{\Omega \setminus B_\delta})^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap (\Omega \setminus B_\delta)$ es también compacto. Resumiendo, bastará con probar que $\bar{\phi}|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ es propia o, equivalentemente, que para cualquier

$b > 0$, $(\bar{\phi}|_{\mathcal{U}})^{-1}([0, b]) = \mathcal{U} \cap \bar{\phi}^{-1}([0, b])$ es un conjunto compacto. Sea $(x, t) \in \mathcal{U} \cap \bar{\phi}^{-1}([0, b])$. Como $(x, t) \in \mathcal{U}$, se sigue de (3.12) que

$$|t| \leq \hat{r}(x) - \sqrt{2}\varepsilon.$$

Y puesto que $\bar{\phi}(x, t) \leq b$, se tiene

$$\hat{r}^2(x) - b \leq t^2 \leq (\hat{r}(x) - \sqrt{2}\varepsilon)^2,$$

es decir

$$\hat{r}(x) \leq c := \frac{2\varepsilon^2 + b}{2\sqrt{2}\varepsilon}.$$

Esto implica que $(\bar{\phi}|_{\mathcal{U}})^{-1}([0, b]) \subset \bar{B}(x_0, c) \times [\sqrt{2}\varepsilon - c, c - \sqrt{2}\varepsilon]$ es compacto, con lo que queda probada la Proposición 3.3.1. \square

Como ya hemos adelantado antes, como otra consecuencia del Teorema 3.2.3 podemos dar una prueba alternativa para la versión no paramétrica de nuestro resultado de tipo Calabi-Bernstein, Teorema 2.2.3. De hecho, podemos aplicar la Proposición 3.3.1 en el caso en que $\Omega = M^2$ sea una superficie riemanniana completa, concluyendo que la función $\phi = r^2 - h^2$ es una función eventualmente positiva y propia para todo grafo entero $\Sigma(u)$ en $M^2 \times \mathbb{R}_1$. Entonces, gracias al Corolario 3.2.6, $\Sigma(u)$ tiene que ser una superficie parabólica. A partir de aquí, la prueba sigue como la del Teorema 2.1.3 probando que $1/\Theta$ es una función negativa subarmónica sobre $\Sigma(u)$.

3.4. Una desigualdad integral local para superficies maximales

Alías y Palmer introdujeron en [AlPa3] un nuevo enfoque de la versión paramétrica del teorema de Calabi-Bernstein en el espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^3 basado en una desigualdad integral local para la curvatura de Gauss de una superficie maximal en \mathbb{R}_1^3 fuertemente relacionada con la geometría local de la superficie y con la imagen de su aplicación de Gauss. Como una aplicación de esta desigualdad dieron una nueva prueba del teorema de Calabi-Bernstein en \mathbb{R}_1^3 en su versión paramétrica. El objetivo de esta sección es generalizar esta aproximación local al caso de superficies maximales en los espacios producto lorentzianos $M^2 \times \mathbb{R}_1$. En este contexto, nuestro resultado principal en esta sección es la siguiente extensión de [AlPa3, Theorem 1].

Teorema 3.4.1. *Sea M^2 una superficie riemanniana analítica con curvatura de Gauss no negativa, $K_M \geq 0$, y consideremos $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$ una superficie maximal en $M^2 \times \mathbb{R}_1$. Sea p un punto fijo de Σ y $R > 0$ un número real positivo de modo que el disco geodésico de radio R centrado en p satisfaga $D(p, R) \subset\subset \Sigma$. Entonces, para cualquier $0 < r < R$ se tiene*

$$0 \leq \int_{D(p, R)} \|A\|^2 d\Sigma \leq c_r \frac{L(r)}{r \log(R/r)}, \quad (3.18)$$

siendo $L(r)$ la longitud del círculo geodésico de radio r centrado en p , y

$$c_r = \frac{\pi^2(1 + \alpha_r^2)^2}{4\alpha_r \arctan \alpha_r} > 0$$

donde a su vez

$$\alpha_r = \sup_{D(p,r)} \cosh \theta \geq 1,$$

representando θ el ángulo hiperbólico entre N y ∂_t a lo largo de Σ .

Cabe destacar que a pesar del claro carácter local del Teorema 3.4.1, éste tiene consecuencias globales importantes. En particular, si pedimos que Σ sea completa, la desigualdad integral local (3.18) implica la versión paramétrica del resultado de Calabi-Bernstein dada en el Teorema 2.1.3. Para comprobarlo, observemos en primer lugar que si Σ es completa, entonces podemos considerar R tan grande como queramos en (3.18) para un punto fijo arbitrario $p \in \Sigma$ y $r > 0$ fijo, luego tomando límites cuando R tiende a infinito obtenemos

$$\int_{D(p,r)} \|A\|^2 d\Sigma = 0.$$

Por tanto $\|A\|^2 = 0$, o equivalentemente, Σ es totalmente geodésica. Ahora bien, por (1.18) esto implica que $\Theta = \Theta_0 \leq -1$ es constante sobre Σ , luego por (1.19) si se verifica $K_M > 0$ para algún punto de M ha de ser $\Theta_0 = -1$. Finalmente, teniendo en cuenta (1.14) concluimos que h es contante, y por tanto Σ es un slice.

La demostración del Teorema 3.4.1 es una aplicación de la siguiente propiedad intrínseca debida a Alías y Palmer.

Lema 3.4.2. [AlPa3, Lemma 3] Sea Σ una superficie riemanniana analítica con curvatura de Gauss no negativa $K \geq 0$. Sea ψ una función diferenciable sobre Σ que satisfaga

$$\psi \Delta \psi \geq 0$$

sobre Σ . Entonces, para $0 < r < R$ se verifica

$$\int_{D_r} \psi \Delta \psi \leq \frac{2L(r)}{r \log(R/r)} \sup_{D_R} \psi^2,$$

donde D_r es el disco geodésico de radio r centrado en un punto fijo de Σ , $D_r \subset D_R \subset \subset \Sigma$, y $L(r)$ representa la longitud del círculo geodésico de radio r , ∂D_r .

Demostración del Teorema 3.4.1. En primer lugar tengamos en cuenta que por ser M analítica y por estar Σ localmente determinada mediante la ecuación de las superficies maximales (1.31) entonces Σ , dotada con la métrica inducida del producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$, es también una superficie riemanniana analítica. Por otro lado, gracias a la ecuación de Gauss (1.21) sabemos

que la curvatura de Gauss de Σ es no negativa, $K \geq 0$. Consecuentemente, podemos aplicar el Lema 3.4.2 a una función diferenciable adecuada ψ . Consideremos $\psi = \arctan \Theta$. A partir de las expresiones (1.19) y (1.22) para $\Delta\Theta$ y $\|\nabla\Theta\|^2$ podemos calcular

$$\Delta\psi = \frac{\Delta\Theta}{1+\Theta^2} - \frac{2\Theta\|\nabla\Theta\|^2}{(1+\Theta^2)^2} = \frac{2\Theta}{(1+\Theta^2)^2}\|A\|^2 + \frac{(\Theta^2-1)\Theta}{1+\Theta^2}\kappa_M,$$

luego teniendo en cuenta que la función $\Theta \arctan \Theta$ es no negativa, que $\Theta \leq -1$ y que $\kappa_M \geq 0$ obtenemos

$$\psi\Delta\psi = \frac{2\Theta \arctan \Theta}{(1+\Theta^2)^2}\|A\|^2 + \frac{(\Theta^2-1)\Theta \arctan \Theta}{1+\Theta^2}\kappa_M \geq \phi(\Theta)\|A\|^2, \quad (3.19)$$

donde

$$\phi(s) = \frac{2s \arctan s}{(1+s^2)^2}.$$

Observemos ahora que la función $\phi(s)$ es estrictamente creciente para $s \leq -1$. Entonces, puesto que por construcción $-\alpha_r \leq \Theta \leq -1$ sobre $D(p, r)$, tenemos

$$\phi(\Theta) \geq \phi(-\alpha_r) = \frac{2\alpha_r \arctan \alpha_r}{(1+\alpha_r^2)^2} \quad \text{sobre } D(p, r),$$

que junto con (3.19) implica que

$$\psi\Delta\psi \geq \frac{2\alpha_r \arctan \alpha_r}{(1+\alpha_r^2)^2}\|A\|^2 \quad \text{sobre } D(p, r).$$

Integrando ahora esta desigualdad sobre el disco geodésico $D(p, r)$ y usando la desigualdad integral que nos proporciona el Lema 3.4.2 es un sencillo cálculo concluir que

$$0 \leq \frac{2\alpha_r \arctan \alpha_r}{(1+\alpha_r^2)^2} \int_{D(p, r)} \|A\|^2 d\Sigma \leq \int_{D(p, r)} \psi\Delta\psi \leq \frac{\pi^2}{2} \frac{L(r)}{r \log(R/r)},$$

lo que implica (3.18). □

Como una aplicación del Teorema 3.4.1 obtenemos la siguiente estimación para el máximo radio geodésico posible.

Corolario 3.4.3. *Sea M^2 una superficie riemanniana analítica con curvatura de Gauss no negativa y sea $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_1$ una superficie maximal en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ no totalmente geodésica. Supongamos que $p \in \Sigma$ es un punto para el cual $\|A\|(p) \neq 0$ y sea $r > 0$ un número real positivo de modo que $D_r = D(p, r) \subset\subset \Sigma$. Entonces*

$$R \leq r e^{C_r}$$

para cualquier $R > r$ tal que $D(p, R) \subset\subset \Sigma$, donde

$$C_r = \frac{c_r L(r)}{r \int_{D_r} \|A\|^2 d\Sigma} > 0$$

es una constante local positiva que únicamente depende de la geometría de $f|_{D(p, r)}$.

Superficies espaciales de curvatura media constante en espacios tipo steady state

Sumario. En este capítulo consideramos superficies espaciales completas con curvatura media constante en un producto *warped* de la forma $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$, donde M^2 es una superficie riemanniana conexa. En particular probamos que si la superficie está acotada del infinito del espacio ambiente debe ser necesariamente un *slice*. También damos otras consecuencias para superficies que estén acotadas sólo del infinito pasado o futuro. En el caso particular donde $M^2 = \mathbb{R}^2$, el producto *warped* $\mathbb{R}^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ es isométricamente equivalente a la región abierta del espacio de *de Sitter* conocida como el *steady state space*. Para superficies espaciales en el *steady state space* damos una prueba alternativa de nuestros resultados. Finalmente, damos algunos resultados parciales en el caso n -dimensional para hipersuperficies espaciales con curvatura media constante.

Abstract. *In this chapter we consider complete spacelike surfaces with constant mean curvature in a warped product space of the form $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$, where M^2 is a connected Riemannian surface. In particular we prove that if the surface is bounded away from the infinity of the ambient space it must be necessarily a slice. We also give some other consequences for surfaces which are bounded away either from the past or from the future infinite. In the particular case where $M^2 = \mathbb{R}^2$, the warped product $\mathbb{R}^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ is isometrically equivalent to the open region of the de Sitter space known as the steady state space. We give an alternative proof of our results for spacelike surfaces in the steady state space. Finally, we give some partial results in the n -dimensional case for spacelike hypersurfaces with constant mean curvature.*

4.1. Motivación

A lo largo de los capítulos anteriores hemos establecido diversos resultados sobre la geometría global y local de superficies maximales en espacios producto lorentzianos del tipo $M^2 \times \mathbb{R}_1$. La

familia de los espacios producto lorentzianos forma parte de una familia más extensa, la de los llamados espacios de *Robertson-Walker* generalizados introducidos por primera vez en [ARS1]. Sea de nuevo M^2 una superficie riemanniana conexa, y consideremos la variedad diferenciable $M^2 \times \mathbb{R}$ dotada de la métrica lorentziana

$$\langle, \rangle = (\varrho \circ \pi_{\mathbb{R}})^2 \pi_M^* (\langle, \rangle_M) - \pi_{\mathbb{R}}^* (dt^2),$$

donde $\varrho : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ es una función positiva diferenciable. Es usual dar la expresión de la métrica de un modo simplificado, es decir,

$$\langle, \rangle = \varrho^2(t) \langle, \rangle_M - dt^2.$$

Denotaremos por $M^2_{\varrho} \times \mathbb{R}_1$ a la variedad lorentziana resultante, y nos referiremos a ella como un producto de *Robertson-Walker* generalizado. La función $\varrho \in C^\infty(\mathbb{R})$ se conoce usualmente como función *warping*. (Con el término *warping* adoptaremos el mismo criterio que con el término *slice*; dada su gran aceptación entre los matemáticos hispano-hablantes optaremos por no traducirlo). Estos espacios tienen la característica común de que admiten una foliación por las superficies espaciales totalmente umbilicales $M^2 \times \{t_0\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, conocidas usualmente como *slices*. Los *slices* son, en particular, superficies espaciales con curvatura media constante

$$H(t) = \frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}.$$

Únicamente hay dos casos para los cuales todos los *slices* tienen la misma curvatura media constante, es decir, para los que $H(t)$ es independiente de t . En el primer caso la función *warping* es constante, en consecuencia $H(t) = 0$ y el espacio es homotético a un espacio producto de los ya estudiados. El segundo caso se da, salvo una homotecia, cuando $\varrho(t) = e^t$, en cuyo caso $H(t) = 1$. Como una extensión natural del estudio de las superficies maximales en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ nos planteamos por tanto el estudio de superficies espaciales en $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ con curvatura media constante $H = 1$.

El espacio más sencillo de este tipo se obtiene al considerar $M^2 = \mathbb{R}^2$. De este modo tenemos el producto $\mathbb{R}^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$, que de hecho es un espacio clásico de *Robertson-Walker* y que admite una realización como un trozo abierto del espacio de *de Sitter* \mathbb{S}_1^3 . Veámoslo con mayor detalle. Sea \mathbb{R}_1^4 el espacio 4-dimensional de Lorentz-Minkowski, es decir, el espacio vectorial real \mathbb{R}^4 dotado de la métrica lorentziana

$$\langle, \rangle = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

donde (x_0, x_1, x_2, x_3) son las coordenadas canónicas de \mathbb{R}^4 . El espacio de *de Sitter* se define como la hipercuádrica de \mathbb{R}_1^4 formada por todos los vectores unitarios espaciales en \mathbb{R}_1^4 , es decir

$$\mathbb{S}_1^3 = \{x \in \mathbb{R}_1^4 : \langle x, x \rangle = 1\}$$

dotada de la métrica inducida del espacio 4-dimensional de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^4 . El espacio de *de Sitter* es una variedad lorentziana 3-dimensional completa y simplemente conexa con curvatura seccional constante uno. Por tanto, podemos considerar \mathbb{S}_1^3 como el equivalente a la esfera euclídea en geometría lorentziana.

Tomemos ahora un vector nulo distinto de cero $a \in \mathbb{R}_1^4$ que apunte hacia el pasado, es decir, $\langle a, a \rangle = 0$ y $\langle a, e_0 \rangle > 0$ donde $e_0 = (1, 0, 0, 0)$, y consideremos la región abierta del espacio de *de Sitter* dada por

$$\mathcal{H}^3 = \{x \in \mathbb{S}_1^3 : \langle x, a \rangle > 0\}.$$

La región abierta \mathcal{H}^3 conforma el modelo del universo conocido en la bibliografía como *steady state*, propuesto por Bondi y Gold [BoGo] y Hoyle [Hoy] como un modelo que permanece igual tanto en todos sus puntos y direcciones (es decir, espacialmente isotrópico y homogéneo), como en todos los tiempos (véase [BoGo, Section 14.8] y [Wei, Section 5.2]). El espacio *steady state* es una variedad no completa puesto que es sólo una mitad abierta del espacio de *de Sitter*, y tiene como frontera a la superficie nula

$$L_0 = \{x \in \mathbb{S}_1^3 : \langle x, a \rangle = 0\}.$$

La superficie nula L_0 representa el infinito pasado de \mathcal{H}^3 , representado también por \mathcal{J}^- ; y la frontera límite

$$L_\infty = \{x \in \mathbb{S}_1^3 : \langle x, a \rangle = \infty\}$$

representa su infinito futuro, denotado usualmente por \mathcal{J}^+ . Veamos entonces que $\mathbb{R}_{e_t \times \mathbb{R}_1}^2$, es decir el espacio vectorial real \mathbb{R}^3 dotado de la métrica lorentziana

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = e^{2t}(dx_1^2 + dx_2^2) - dt^2,$$

es isométricamente equivalente al espacio *steady state*, \mathcal{H}^3 . Para ello, sea $b \in \mathbb{R}_1^4$ otro vector nulo de modo que $\langle a, b \rangle = 1$ y consideremos la aplicación $\Phi : \mathcal{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{e_t \times \mathbb{R}_1}^2$ dada por

$$\Phi(x) = \left(\frac{x - \langle x, a \rangle b - \langle x, b \rangle a}{\langle x, a \rangle}, \log(\langle x, a \rangle) \right). \quad (4.1)$$

Es un cálculo directo obtener la diferencial de esta aplicación, y comprobar que dado un punto $x \in \mathcal{H}^3$ y un vector tangente $v \in T_x \mathcal{H}^3$

$$(d\Phi)_x(v) = \left(\frac{(v - \langle v, a \rangle b - \langle v, b \rangle a) \langle x, a \rangle - \langle v, a \rangle (x - \langle x, a \rangle b - \langle x, b \rangle a)}{\langle x, a \rangle^2}, \frac{\langle v, a \rangle}{\langle x, a \rangle} \right),$$

y que Φ es una isometría entre ambos espacios que conserva la orientación temporal puesto que

$$\langle (d\Phi)_x(v), (d\Phi)_x(v) \rangle = \langle v, v \rangle$$

y

$$(d\Phi)_x(e_0) = \left(\frac{(e_0 - \langle e_0, a \rangle b - \langle e_0, b \rangle a) \langle x, a \rangle - \langle e_0, a \rangle (x - \langle x, a \rangle b - \langle x, b \rangle a)}{\langle x, a \rangle^2}, \frac{\langle e_0, a \rangle}{\langle x, a \rangle} \right)$$

con $\frac{\langle e_0, a \rangle}{\langle x, a \rangle} > 0$. Es por esta razón por la que nos referiremos a los espacios de *Robertson-Walker* generalizados $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ como espacios tipo *steady state*. Otro ejemplo particular de espacio tipo *steady state* lo obtenemos al considerar como M^2 el 2-toro llano, obteniendo el *de Sitter cusp* definido en [Gal].

Aunque los resultados principales de este capítulo los daremos para el caso general de superficies espaciales con curvatura media constante en un espacio tipo *steady state*, para el caso particular del espacio *steady state* podemos dar una prueba alternativa de nuestros resultados sin necesidad de utilizar las técnicas y herramientas específicas de los espacios de *Robertson-Walker* generalizados.

4.2. Superficies espaciales de curvatura media constante en el espacio *steady state*

En el Capítulo 1 hemos introducido las definiciones y herramientas básicas para el estudio de superficies espaciales en productos lorentzianos. De un modo análogo, diremos ahora que una inmersión diferenciable $f : \Sigma^2 \rightarrow \mathcal{H}^3$ de una superficie conexa 2-dimensional Σ^2 en el espacio *steady state* es una superficie espacial si f induce una métrica riemanniana sobre Σ , que la denotaremos por \langle, \rangle como es usual. En este caso, está bien definida la aplicación de Gauss de Σ apuntando hacia el futuro como el único campo vectorial normal, temporal y unitario N globalmente definido sobre Σ que está orientado hacia el futuro, es decir $\langle N, e_0 \rangle < 0$.

El espacio *steady state*, \mathcal{H}^3 , admite una foliación por medio de las superficies espaciales totalmente umbilicales

$$L_\tau = \{x \in \mathcal{H}^3 : \langle x, a \rangle = \tau\}, \quad \tau > 0,$$

con función curvatura media constante $H = 1$ con respecto a su aplicación de Gauss apuntando hacia el futuro

$$N_\tau(x) = x - \frac{1}{\tau}a.$$

Además, cada una de estas superficies espaciales L_τ es isométrica al plano euclídeo \mathbb{R}^2 . De hecho, si identificamos \mathbb{R}^2 con el complemento ortogonal en \mathbb{R}^4_1 al plano lorentziano generado por a y e_0 , entonces la aplicación $\phi_\tau : L_\tau \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\phi_\tau(x) = x - \frac{\tau + \langle a, e_0 \rangle \langle x, e_0 \rangle}{\langle a, e_0 \rangle^2} a - \frac{\tau}{\langle a, e_0 \rangle} e_0$$

determina una isometría entre L_τ y \mathbb{R}^2 .

En 1977 Goddard, [God], conjeturó que las únicas superficies espaciales completas de curvatura media constante en el espacio de *de Sitter* debían ser las totalmente umbilicales. Esta conjetura así enunciada es falsa, como lo demuestra la existencia de los cilindros hiperbólicos estudiados por

Montiel en [Mon1]. Para construir estos ejemplos consideremos la aplicación diferenciable $f : \mathbb{S}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + x_3^2.$$

Dado $r^2 > 1$, se denomina cilindro hiperbólico sobre \mathbb{S}_1^3 a la superficie $\tilde{M}^2 = f^{-1}(r^2)$. Veamos que los cilindros hiperbólicos son superficies espaciales completas de curvatura media constante, pero no totalmente umbilicales. En primer lugar, es fácil comprobar con un cálculo estándar que si x es un punto de $f^{-1}(r^2)$ se tiene que

$$\bar{\nabla} f(x) = 2(Z(x) - r^2 x),$$

siendo $Z(x) = (0, 0, x_2, x_3)$. Y por tanto

$$\langle \bar{\nabla} f(x), \bar{\nabla} f(x) \rangle = 4(\langle Z, Z \rangle - 2r^2 \langle Z, x \rangle + r^4 \langle x, x \rangle) = 4r^2(1 - r^2) < 0,$$

luego $\tilde{M}^2 = f^{-1}(r^2)$ es una superficie espacial. Por otro lado, observemos que para todo punto $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ de $f^{-1}(r^2)$ tenemos que

$$\begin{aligned} x_2^2 + x_3^2 &= r^2 \\ -x_0^2 + x_1^2 &= 1 - r^2, \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\tilde{M}^2 = \mathbb{H}^1(-\sqrt{r^2 - 1}) \times \mathbb{S}^1(r),$$

luego \tilde{M} es una superficie completa por serlo $\mathbb{H}^1(-\sqrt{r^2 - 1})$ y $\mathbb{S}^1(r)$. Para demostrar que \tilde{M}^2 tiene curvatura media constante calculemos el operador forma del embebimiento $\tilde{M} \hookrightarrow \mathbb{S}_1^3$. Se sabe que la aplicación de Gauss de dicho embebimiento es

$$N(x) = \frac{\bar{\nabla} f(x)}{|\bar{\nabla} f(x)|} = \frac{1}{r\sqrt{r^2 - 1}}(Z(x) - r^2 x).$$

Consideremos ahora $X = (X_1, X_2) \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ siendo X_1 y X_2 campos sobre $\mathbb{H}^1(-\sqrt{r^2 - 1})$ y $\mathbb{S}^1(r)$ respectivamente, entonces con un cálculo directo se prueba que

$$AX = -\bar{\nabla}_X N = \frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}}(X_1, 0) + \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r}(0, X_2).$$

Luego finalmente los cilindros hiperbólicos tienen curvatura media constante

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}} + \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r} \right) = \frac{1}{2r\sqrt{r^2 - 1}}(1 - 2r^2).$$

Además, puesto que los valores propios no son iguales queda claro que los cilindros hiperbólicos no son superficies totalmente umbilicales. Sin embargo, ninguno de estos cilindros hiperbólicos está contenido en el espacio *steady state*.

A pesar de tener una respuesta negativa, la conjetura de Goddard ha motivado diversos trabajos posteriores de investigación, donde se ha demostrado la validez de la conjetura bajo ciertas hipótesis adicionales. Así, por ejemplo, Akutagawa [Aku] y Ramanathan [Ram] demostraron en 1987, y de modo independiente, la conjetura bajo la hipótesis adicional $H^2 \leq 1$.

En [Mon1] Montiel también dio una respuesta afirmativa a la conjetura de Goddard en el caso compacto, es decir, las únicas superficies espaciales compactas de curvatura media constante en \mathbb{S}_1^3 son las superficies espaciales totalmente umbilicales. Pero, de nuevo, como consecuencia del Lema 4.2.1 que veremos a continuación el espacio *steady state* no admite superficies espaciales compactas. Fue de nuevo Montiel, [Mon2], quien más adelante demostró la existencia de superficies espaciales completas, no compactas y no totalmente umbilicales en el espacio *steady state* con curvatura media constante $H \geq 1$, probando por tanto que la conjetura de Goddard tampoco es cierta en \mathcal{H}^3 .

Motivados por estos resultados, vamos a demostrar la conjetura de Goddard para superficies espaciales completas de curvatura media constante en el espacio *steady state* bajo ciertas hipótesis de acotación de la superficie. Decimos que una superficie espacial $f : \Sigma^2 \rightarrow \mathcal{H}^3$ está acotada del infinito futuro de \mathcal{H}^3 si existe una constante $\bar{\tau} > 0$ de modo que

$$f(\Sigma) \subset \{x \in \mathcal{H}^3 : \langle x, a \rangle \leq \bar{\tau}\},$$

y decimos que está acotada del infinito pasado de \mathcal{H}^3 si existe una constante $\underline{\tau} > 0$ de modo que

$$f(\Sigma) \subset \{x \in \mathcal{H}^3 : \langle x, a \rangle \geq \underline{\tau}\}.$$

Finalmente, diremos que Σ está acotada del infinito si está acotada tanto del infinito futuro como del pasado. Es decir, Σ está acotada del infinito de \mathcal{H}^3 si existen constantes $0 < \underline{\tau} < \bar{\tau}$ de modo que $f(\Sigma)$ está contenida en la banda acotada por $L_{\underline{\tau}}$ y $L_{\bar{\tau}}$.

Como un primer resultado, podemos establecer el siguiente lema para superficies espaciales completas en el espacio *steady state*, con curvatura media no necesariamente constante y acotadas del infinito futuro.

Lema 4.2.1. *Sea $f : \Sigma^2 \rightarrow \mathcal{H}^3$ una superficie espacial completa. Si Σ está acotada del infinito futuro de \mathcal{H}^3 , entonces Σ es difeomorfa a \mathbb{R}^2 . En particular no existen superficies espaciales compactas (sin frontera) en \mathcal{H}^3 .*

Demostración. Puesto que ya hemos visto que L_1 es difeomorfo a \mathbb{R}^2 , para ver que la superficie Σ es difeomorfa a \mathbb{R}^2 bastará probar que su proyección geodésica ortogonal sobre L_1 es un difeomorfismo. Observemos que el espacio *steady state* se puede parametrizar globalmente mediante el difeomorfismo $\Phi : L_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}^3$ dado por $\Phi(q, t) = \gamma_q(t)$, donde

$$\gamma_q(t) = e^t q - \sinh(t) a$$

representa la única geodésica unitaria (apuntando hacia el futuro) ortogonal a L_1 y que pasa por el punto $q \in L_1$. Entonces, la proyección geodésica ortogonal de \mathcal{H}^3 sobre L_1 es la aplicación que asigna a cada $x \in \mathcal{H}^3$ el punto $\Psi(x) \in L_1$ tal que $x = \Phi(\Psi(x), t)$ para un cierto valor t (véase la Figura 4.1). No es difícil comprobar que dicha proyección viene dada por

$$\Psi(x) = \frac{1}{\langle x, a \rangle} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\langle x, a \rangle^2} \right) a, \quad x \in \mathcal{H}^3.$$

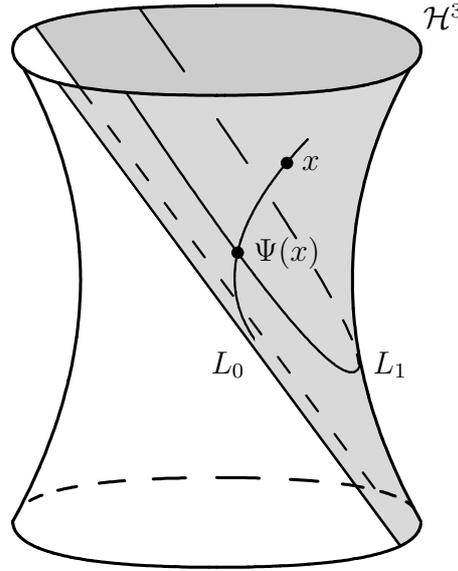


Figura 4.1: La proyección geodésica ortogonal de \mathcal{H}^3 sobre L_1 .

Sea $f : \Sigma^2 \rightarrow \mathcal{H}^3$ una superficie espacial completa. La proyección geodésica ortogonal de Σ sobre L_1 es la aplicación $\Pi = \Psi \circ f : \Sigma \rightarrow L_1$ que viene dada por

$$\Pi(p) = \frac{1}{\langle f(p), a \rangle} f(p) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\langle f(p), a \rangle^2} \right) a, \quad p \in \Sigma.$$

Con un cálculo directo obtenemos la siguiente expresión para su aplicación diferencial,

$$d\Pi_p(v) = \frac{1}{\langle f(p), a \rangle} df_p(v) - \frac{\langle df_p(v), a \rangle}{\langle f(p), a \rangle^2} f(p) + \frac{\langle df_p(v), a \rangle}{\langle f(p), a \rangle^3} a$$

para cualquier $p \in \Sigma$ y cualquier vector tangente $v \in T_p \Sigma$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \langle d\Pi_p(v), d\Pi_p(v) \rangle_o &= \frac{1}{\langle f(p), a \rangle^2} \langle df_p(v), df_p(v) \rangle + \frac{\langle df_p(v), a \rangle^2}{\langle f(p), a \rangle^4} \\ &\geq \frac{1}{\langle f(p), a \rangle^2} \langle df_p(v), df_p(v) \rangle, \end{aligned} \quad (4.2)$$

es decir,

$$\Pi^*(\langle, \rangle_o) \geq \frac{1}{\langle f, a \rangle^2} \langle, \rangle,$$

donde por $\langle \cdot, \cdot \rangle_o$ nos referimos a la métrica euclídea sobre L_1 y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la métrica riemanniana sobre Σ . Y como por hipótesis Σ está acotada del infinito futuro de \mathcal{H}^3 , se sigue que

$$\Pi^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_o) \geq \frac{1}{\bar{\tau}^2} \langle \cdot, \cdot \rangle \quad (4.3)$$

para cierta constante positivo $\bar{\tau}$.

Se sigue de (4.2) que Π es un difeomorfismo local. Para concluir que Π es un difeomorfismo global aplicamos el siguiente argumento topológico, similar al empleado en la prueba del Lema 2.1.1. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una métrica riemanniana completa sobre Σ , la métrica homotética $\widetilde{\langle \cdot, \cdot \rangle} = (1/\bar{\tau}^2)\langle \cdot, \cdot \rangle$ es también una métrica riemanniana completa. Además, gracias a (4.3), la aplicación

$$\Pi : (\Sigma, \widetilde{\langle \cdot, \cdot \rangle}) \rightarrow (L_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_o)$$

aumenta la distancia. De este modo por [KoNo, Lemma 8.1, Chapter VII] concluimos que Π es una aplicación recubridora y, por ser L_1 una superficie simplemente conexa, tenemos finalmente que Π es de hecho un difeomorfismo global entre Σ y L_1 . \square

Dada una superficie espacial $f : \Sigma^2 \rightarrow \mathcal{H}^3$, consideremos la función diferenciable $u \in C^\infty(\Sigma)$ definida como

$$u(p) = \langle f(p), a \rangle, \quad p \in \Sigma.$$

Observemos que el gradiente de u en Σ viene dado por

$$\nabla u = a^\top,$$

donde a^\top representa la componente tangencial de a a lo largo de Σ , es decir,

$$a = a^\top - \langle N, a \rangle N + \langle f, a \rangle f = \nabla u - \langle N, a \rangle N + \langle f, a \rangle f. \quad (4.4)$$

Derivando en (4.4) con respecto a un campo vectorial tangente $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, y usando las fórmulas de Gauss y Weingarten, obtenemos fácilmente que

$$\nabla_X \nabla u = -\langle N, a \rangle AX - uX.$$

Por tanto, el laplaciano de la función u sobre Σ es

$$\Delta u = 2H \langle N, a \rangle - 2u. \quad (4.5)$$

Por otro lado, también se concluye de (4.4) que

$$\|\nabla u\|^2 = \langle N, a \rangle^2 - u^2, \quad (4.6)$$

donde recordemos que $\|\cdot\|$ representa la norma de un campo vectorial sobre Σ . Tengamos en cuenta también que, por ser a un vector nulo apuntando hacia el pasado y N un vector temporal apuntando

hacia el futuro, se tiene que $\langle N, a \rangle > 0$ sobre Σ . Y por otro lado, por definición de \mathcal{H}^3 , observemos que u es una función positiva sobre la superficie Σ .

Los resultados principales de este capítulo se apoyan en el conocido principio del máximo de Omori-Yau [Omo, Yau] enunciado a continuación.

Lema 4.2.2. Principio del máximo generalizado de Omori-Yau.

Sea M^2 una superficie riemanniana completa con curvatura de Gauss acotada inferiormente. Si $u \in C^\infty(M)$ está acotada superiormente sobre M existe una sucesión de puntos $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ de modo que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(p_k) = \sup_M u, \quad \|\nabla u(p_k)\| < 1/k \quad \text{y} \quad \Delta u(p_k) < 1/k.$$

Con todo esto, tenemos los preliminares necesarios para probar el siguiente resultado.

Teorema 4.2.3. *Las únicas superficies espaciales completas $f : \Sigma^2 \rightarrow \mathcal{H}^3$ de curvatura media constante acotadas del infinito de \mathcal{H}^3 son las superficies espaciales totalmente umbilicales L_τ .*

Demostración. La ecuación de Gauss de Σ en \mathcal{H}^3 describe la curvatura de Gauss de Σ , K , en términos del operador forma, y viene dada por

$$K = 1 - \det(A).$$

Ahora bien, para toda superficie riemanniana en cualquier espacio ambiente 3-dimensional se verifica

$$\det(A) = 2H^2 - \frac{\|A\|^2}{2},$$

siendo $\|A\|^2 = \text{tr}(A^2)$. Además, es bien conocido que se verifica la desigualdad $\|A\|^2 \geq 2H^2$, dándose la igualdad en los puntos umbilicales de Σ . Teniendo en cuenta esto, obtenemos finalmente que

$$K = 1 - 2H^2 + \frac{\|A\|^2}{2} \geq 1 - H^2. \quad (4.7)$$

Por tanto, la curvatura de Gauss de Σ está acotada inferiormente por la constante $1 - H^2$. Por hipótesis Σ está acotada del infinito, es decir u está acotada tanto superior como inferiormente por constantes positivas. Podemos por tanto aplicar el Lema 4.2.2 a la función u , concluyendo que existe una sucesión de puntos $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en Σ de modo que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(p_k) = \sup_\Sigma u < \infty, \quad (4.8)$$

$$\|\nabla u(p_k)\|^2 = \langle N(p_k), a \rangle^2 - u^2(p_k) < 1/k^2 \quad (4.9)$$

y

$$\Delta u(p_k) = 2(H \langle N(p_k), a \rangle - u(p_k)) < 1/k.$$

A partir de esta última desigualdad, y teniendo en cuenta que $\langle N, a \rangle > 0$ sobre Σ , tenemos que

$$H < \frac{u(p_k)}{\langle N(p_k), a \rangle} + \frac{1}{2\langle N(p_k), a \rangle k}. \quad (4.10)$$

Por otro lado, tomando límites en la desigualdad (4.9) y teniendo en cuenta (4.8) obtenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle N(p_k), a \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} u(p_k) = \sup_{\Sigma} u,$$

luego tomando límites en (4.10) concluimos que $H \leq 1$.

De un modo similar, podemos aplicar el Lema 4.2.2 a la función $-u$. Observemos que esto lo podemos hacer sin ninguna hipótesis de acotación sobre Σ , puesto que u es siempre una función positiva sobre Σ . De este modo obtenemos otra sucesión $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en Σ de modo que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(q_k) = \inf_{\Sigma} u > 0,$$

$$\|\nabla u(q_k)\|^2 = \langle N(q_k), a \rangle^2 - u^2(q_k) < 1/k^2$$

y

$$\Delta u(q_k) = 2(H\langle N(q_k), a \rangle - u(q_k)) > -1/k.$$

La desigualdad a la que llegamos en este caso es

$$H > \frac{u(q_k)}{\langle N(q_k), a \rangle} - \frac{1}{2\langle N(q_k), a \rangle k}.$$

Tomando límites de un modo análogo al anterior, y teniendo en cuenta ahora que Σ está acotada del infinito pasado, concluimos que $H \geq 1$. Luego finalmente $H = 1$. A partir de aquí se concluye, gracias al resultado de Akutagawa [Aku] y Ramanathan [Ram] mencionado anteriormente, que Σ tiene que ser una superficie totalmente umbilical de la foliación L_{τ} . No obstante, podemos dar una prueba diferente y directa de este hecho.

Por ser $H = 1$, deducimos de (4.7) que la curvatura de Gauss de Σ es no negativa. En consecuencia Σ es una superficie riemanniana completa con curvatura de Gauss no negativa luego, igual que en la prueba del Teorema 2.1.3, por el resultado de parabolicidad de Ahlfors [Ahl] y Blanc-Fiala-Huber [Hub] concluimos que Σ es una superficie parabólica, en el sentido que toda función subarmónica acotada superiormente sobre la superficie es constante. A partir de (4.6), y teniendo en cuenta que $\langle N, a \rangle > 0$, obtenemos que

$$\langle N, a \rangle - u \geq 0$$

sobre Σ . Entonces (4.5) implica que $\Delta u \geq 0$. Resumiendo, u es una función subarmónica acotada superiormente sobre la superficie parabólica Σ , luego es constante. Equivalentemente Σ es una de las superficies espaciales totalmente umbilicales L_{τ} . \square

4.3 Superficies espaciales de curvatura media constante en espacios tipo *steady state*

Como consecuencia del Lema 4.2.1 y de la prueba del Teorema 4.2.3 podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 4.2.4. *Las únicas superficies espaciales completas $f : \Sigma^2 \rightarrow \mathcal{H}^3$ de curvatura media constante H , acotadas del infinito futuro de \mathcal{H}^3 y con vector curvatura media apuntando hacia el futuro son las superficies totalmente umbilicales L_τ .*

Demostración. En este caso la función u verifica $0 < u < \bar{\tau}$ para una cierta constante $\bar{\tau} > 0$. Por tanto, la primera parte de la prueba del Teorema 4.2.3 continúa siendo válida obteniendo $H \leq 1$. Por otro lado, (4.7) implica que $H^2 > 1$ puesto que en caso contrario Σ sería compacta por el teorema de Bonnet-Myers, lo que no es posible por el Lema 4.2.1. Además, como el vector curvatura media apunta hacia el futuro, $H \geq 0$. Resumiendo $H = 1$, y prosiguiendo como en el Teorema 4.2.3 concluimos que Σ es una superficie espacial totalmente umbilical L_τ . \square

Cabe destacar que no podemos establecer un resultado análogo al Teorema 4.2.4 para superficies acotadas del infinito pasado de \mathcal{H}^3 . De hecho, los ejemplos de Montiel en [Mon2] a los que hacemos mención al principio de esta sección son ejemplos de superficies espaciales completas en \mathcal{H}^3 acotadas del infinito pasado. Por otro lado, recientemente Caminha y Lima han obtenido en [CaLi] nuevas caracterizaciones interesantes de las superficies espaciales totalmente umbilicales L_τ en \mathcal{H}^3 .

4.3. Superficies espaciales de curvatura media constante en espacios tipo *steady state*.

Muchas de las propiedades y definiciones que establecíamos para los espacios producto y para las superficies espaciales inmersas en ellos se pueden trasladar a estos nuevos espacios ambiente. Consideremos $f : \Sigma^2 \rightarrow M_{e^t}^2 \times \mathbb{R}_1$ una superficie espacial. De nuevo tenemos que

$$\partial_t = (\partial/\partial t)_{(t,x)}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in M$$

es un campo vectorial unitario y temporal, globalmente definido en el espacio ambiente, que determina una orientación temporal sobre $M_{e^t}^2 \times \mathbb{R}_1$. Por tanto, la aplicación de Gauss apuntando hacia el futuro de Σ viene definida como el único campo vectorial N unitario, temporal y normal, globalmente definido sobre Σ en la misma orientación temporal que ∂_t . Y, análogamente, también es posible definir la función diferenciable $\Theta : \Sigma \rightarrow (-\infty, -1]$ dada por

$$\Theta(p) = \langle N, \partial_t \rangle(p), \quad p \in \Sigma.$$

En este nuevo contexto, la función altura de una superficie espacial también jugará un papel importante. Recordemos que dada una superficie $f : \Sigma^2 \rightarrow M_{e^t}^2 \times \mathbb{R}_1$, la función altura h de Σ se define como la proyección de Σ sobre \mathbb{R} , es decir, $h \in C^\infty(\Sigma)$ es la función diferenciable dada por

$h = \pi_{\mathbb{R}} \circ f$. Volviendo al caso particular del espacio *steady state*, es decir, el caso donde $M^2 = \mathbb{R}^2$, se deduce de la isometría entre ambos espacios (4.1) que la función altura de Σ se puede escribir en términos de la función u como

$$h(p) = \log u(\Phi^{-1}(f(p))), \quad p \in \Sigma.$$

Consecuentemente, las superficies espaciales totalmente umbilicales L_τ para las cuales la función u toma el valor constante $u = \tau$ se corresponden mediante esta isometría con los *slices* $\mathbb{R}^2 \times \{\log(\tau)\}$. De hecho, dado un espacio tiempo tipo *steady state*, cada hoja de la foliación $M^2 \times \{t\}$ de $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$, que de nuevo llamaremos *slice*, es una superficie espacial totalmente umbilical con curvatura media constante $H = 1$.

De acuerdo con la terminología introducida en la sección anterior para el estudio de superficies en el espacio *steady state*, diremos que una superficie espacial $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ está acotada del infinito futuro de $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ si existe una constante $\bar{t} \in \mathbb{R}$ de modo que

$$f(\Sigma) \subset \{(x, t) \in M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1 : t \leq \bar{t}\},$$

y diremos que Σ está acotada del infinito pasado de $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ si existe una constante $\underline{t} \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(\Sigma) \subset \{(x, t) \in M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1 : t \geq \underline{t}\}.$$

Por último, diremos simplemente que Σ está acotada del infinito si está acotada tanto del infinito futuro como del pasado .

El siguiente resultado es la extensión natural del Lema 4.2.1 a esta situación más general, y el análogo al Lema 2.1.1.

Lema 4.3.1. *Sea M^2 una superficie riemanniana. Si $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ admite una superficie espacial completa Σ acotada del infinito futuro, entonces M es necesariamente completa y la proyección $\Pi = \pi_M \circ f : \Sigma \rightarrow M$ es una aplicación recubridora.*

Demostración. La prueba sigue las ideas de [ARS1, Lemma 3.1]. Consideremos $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ una superficie espacial completa y sea $\Pi = \pi_M \circ f : \Sigma \rightarrow M$ su proyección sobre M . Observemos que dado un punto $p \in \Sigma$ y $v \in T_p \Sigma$

$$\langle v, v \rangle = -\langle df_p(v), \partial_t \rangle^2 + e^{2h(p)} \langle d\Pi_p(v), d\Pi_p(v) \rangle_M \leq e^{2h(p)} \langle d\Pi_p(v), d\Pi_p(v) \rangle_M.$$

Por tanto $\Pi^*(\langle, \rangle_M) \geq (1/e^{2h})\langle, \rangle$. Además, como Σ está acotada del infinito futuro, se sigue de esta desigualdad que

$$\Pi^*(\langle, \rangle_M) \geq \frac{1}{e^{2\bar{t}}}\langle, \rangle = \widetilde{\langle, \rangle}$$

para un cierto número real \bar{t} . Con un razonamiento igual al de la prueba del Lema 4.2.1 concluimos que $\Pi : (\Sigma, \widetilde{\langle, \rangle}) \rightarrow (M, \langle, \rangle_M)$ es un difeomorfismo local que aumenta la distancia. La prueba concluye

como la prueba del Lema 2.1.1, teniendo en cuenta que si una aplicación de una variedad riemanniana completa y conexa M_1 en otra variedad riemanniana conexa M_2 de la misma dimensión aumenta la distancia, entonces es una aplicación recubridora y M_2 es una variedad necesariamente completa [KoNo, Chapter VII, Lemma 8.1]. \square

Sea $f : \Sigma^2 \rightarrow M_{e^t}^2 \times \mathbb{R}_1$ una superficie espacial con función altura h . Observemos que, igual que en el caso producto, el gradiente de $\pi_{\mathbb{R}}$ en $M_{e^t}^2 \times \mathbb{R}_1$ es

$$\bar{\nabla} \pi_{\mathbb{R}} = -\langle \bar{\nabla} \pi_{\mathbb{R}}, \partial_t \rangle \partial_t = -\partial_t.$$

Luego el gradiente de h sobre Σ viene dado por

$$\nabla h = (\bar{\nabla} \pi_{\mathbb{R}})^\top = -\partial_t^\top.$$

Recordemos que $\partial_t = \partial_t^\top - \Theta N$, luego en particular

$$\|\nabla h\|^2 = \Theta^2 - 1. \quad (4.11)$$

La conexión de Levi-Civita del espacio ambiente $M_{e^t}^2 \times \mathbb{R}_1$, $\bar{\nabla}$, está relacionada con la conexión de Levi-Civita de la superficie M^2 , D , de la siguiente manera. Dados $U, V \in \mathfrak{X}(M)$ se verifica

$$\bar{\nabla}_U V = D_U V + \langle U, V \rangle \partial_t, \quad (4.12)$$

$$\bar{\nabla}_{\partial_t} U = \bar{\nabla}_U \partial_t = U \quad (4.13)$$

y

$$\bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t = 0. \quad (4.14)$$

Consideremos ahora el campo vectorial temporal sobre $M_{e^t}^2 \times \mathbb{R}_1$ definido por

$$Y(x, t) = e^t (\partial / \partial t)(x, t), \quad (x, t) \in M_{e^t}^2 \times \mathbb{R}_1.$$

A partir de (4.13) y (4.14) obtenemos que

$$\bar{\nabla}_Z Y = e^t Z \quad (4.15)$$

para cualquier campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(M_{e^t}^2 \times \mathbb{R}_1)$. Escribiendo $\partial_t = -\nabla h - \Theta N$ a lo largo de la superficie Σ , y utilizando las fórmulas de Gauss y Weingarten, no es difícil obtener a partir de (4.15) la expresión

$$e^h X = \langle \nabla e^h, X \rangle \partial_t - e^h \nabla_X \nabla h + e^h \langle AX, \nabla h \rangle N + e^h \Theta AX - e^h X(\Theta)N$$

para cualquier campo tangente $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. En consecuencia,

$$\nabla_X \nabla h = \Theta AX - X - \langle \nabla h, X \rangle \nabla h$$

para cualquier $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, y el laplaciano en Σ de la función altura viene dado por

$$\Delta h = -2H\Theta - (2 + \|\nabla h\|^2). \quad (4.16)$$

Con todo esto, estamos preparados para establecer el resultado principal de esta sección, que es la extensión natural del Teorema 4.2.3 a la familia más extensa de espacios tipo *steady state*.

Teorema 4.3.2. *Sea M^2 una superficie riemanniana (necesariamente completa) con curvatura de Gauss no negativa, $K_M \geq 0$, y sea $f : \Sigma^2 \rightarrow M_{e^t}^2 \times \mathbb{R}_1$ una superficie espacial completa con curvatura media constante H . Si Σ está acotada del infinito entonces es necesariamente un slice $M \times \{t_0\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$.*

Demostración. La ecuación de Gauss de Σ viene dada por

$$K = \overline{K} - \det A,$$

siendo K y \overline{K} la curvatura de Gauss de Σ y la curvatura seccional en $M_{e^t}^2 \times \mathbb{R}_1$ del plano tangente a Σ , respectivamente. Por otro lado, teniendo en cuenta la expresión del tensor curvatura de $M_{e^t}^2 \times \mathbb{R}_1$, \overline{R} , en función de la curvatura de Gauss de la superficie M y de la función *warping* (véase por ejemplo [ONe, Proposition 42]) se prueba fácilmente que

$$\overline{K} = \langle \overline{R}(E_1, E_2)E_1, E_2 \rangle = \frac{\kappa_M}{e^{2h}}(1 + \langle E_1, \partial_t^\top \rangle^2 + \langle E_2, \partial_t^\top \rangle^2) + 1 = \frac{\kappa_M}{e^{2h}}\Theta^2 + 1, \quad (4.17)$$

donde $\{E_1, E_2\}$ es una base ortonormal local sobre Σ y κ_M denota la curvatura de Gauss de M a lo largo de la superficie Σ . Teniendo en cuenta (4.17), la ecuación de Gauss puede reescribirse como

$$K = \frac{\kappa_M}{e^{2h}}\Theta^2 + 1 - \det(A).$$

Finalmente, siguiendo el mismo argumento utilizado para obtener la desigualdad (4.7) en la prueba del Teorema 4.2.3 tenemos

$$\det A \leq H^2,$$

y por tanto

$$K \geq \frac{\kappa_M}{e^{2h}}\Theta^2 + 1 - H^2 \geq 1 - H^2. \quad (4.18)$$

Consecuentemente, la curvatura de Gauss de Σ está acotada inferiormente, por lo que podemos aplicar el principio del máximo de Omori-Yau, Lema 4.2.2, a la función altura h (que por hipótesis está acotada, tanto superior como inferiormente). De este modo, obtenemos una sucesión $\{p_k\}$ en Σ de modo que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(p_k) = \sup_{\Sigma} h < +\infty, \quad \|\nabla h(p_k)\|^2 = \Theta^2(p_k) - 1 < 1/k^2$$

y

$$\Delta h(p_k) = -2H\Theta(p_k) - (2 + \|\nabla h(p_k)\|^2) < 1/k. \quad (4.19)$$

Por tanto $\lim_{k \rightarrow \infty} \Theta(p_k) = -1$, y tomando límites en (4.19) tenemos la desigualdad $H \leq 1$.

De un modo similar, podemos aplicar el principio del máximo de Omori-Yau a la función $-h$, obteniendo otra sucesión de puntos en Σ , $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(q_k) = \inf_{\Sigma} h > -\infty, \quad \|\nabla h(q_k)\|^2 = \Theta^2(q_k) - 1 < 1/k^2$$

y

$$\Delta h(q_k) = -2H\Theta(q_k) - (2 + \|\nabla h(q_k)\|^2) > -1/k. \quad (4.20)$$

De nuevo obtenemos $\lim_{k \rightarrow \infty} \Theta(q_k) = -1$, y tomando límites en (4.20) obtenemos ahora que $H \geq 1$. Luego finalmente $H = 1$.

A partir de aquí, como (4.18) implica que la curvatura de Gauss de Σ es no negativa y Σ es por hipótesis completa, se concluye que Σ es una superficie parabólica. Para terminar la prueba, basta observar que a partir de (4.16) y (4.11) se obtiene que

$$\Delta h = -2\Theta - (2 + \|\nabla h\|^2) = -2\Theta - (1 + \Theta^2) = -(\Theta + 1)^2 \leq 0,$$

por lo que h es una función superarmónica acotada inferiormente sobre la superficie parabólica Σ , luego tiene que ser constante, siendo Σ un *slice*. \square

La extensión natural del Teorema 4.2.4 es también cierta para superficies en $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$. No escribiremos la demostración puesto que se sigue del Lema 4.3.1 y de la prueba del Teorema 4.3.2 de un modo análogo a la prueba del Teorema 4.2.4.

Teorema 4.3.3. *Sea M^2 una superficie riemanniana completa con curvatura de Gauss no negativa. Las únicas superficies espaciales completas $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ con curvatura media constante H , acotadas del infinito futuro de $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ y con vector curvatura media apuntando hacia el futuro son los slices.*

Tengamos en cuenta que, en realidad, en la primera parte de la prueba de los Teoremas 4.2.3 y 4.3.2 hemos demostrado algo más fuerte. Esto se debe a que la hipótesis sobre la curvatura media constante de la superficie no es necesaria para aplicar el principio del máximo de Omori-Yau. Teniendo en cuenta esto, de la prueba podemos extraer el siguiente hecho: dada una superficie espacial completa Σ sobre \mathcal{H}^3 , o $M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ según el caso, acotada del infinito futuro se verifica $\inf_{\Sigma} H \leq 1$. Por el contrario, si Σ está acotada del infinito pasado lo que obtenemos es $\sup_{\Sigma} H \geq 1$.

Cuando consideramos superficies acotadas únicamente del infinito futuro o pasado podemos deducir, bajo ciertas hipótesis adicionales sobre la curvatura media, las siguientes consecuencias del Teorema 4.3.2.

Corolario 4.3.4. *Sea M^2 una superficie riemanniana con curvatura de Gauss no negativa. Las únicas superficies espaciales completas $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2_{e^t} \times \mathbb{R}_1$ con curvatura media constante $H \leq 1$ y acotadas del infinito pasado son los slices $M^2 \times \{t_0\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$.*

Corolario 4.3.5. *Sea M^2 una superficie riemanniana completa con curvatura de Gauss no negativa. Las únicas superficies espaciales completas $f : \Sigma^2 \rightarrow M_{e^t}^2 \times \mathbb{R}_1$ con curvatura media constante $H \geq 1$ y acotadas del infinito futuro son los slices $M^2 \times \{t_0\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$.*

Demostración. El Corolario 4.3.4 se deriva directamente de la prueba del Teorema 4.3.2. Con respecto al segundo corolario, siguiendo los pasos de la prueba del Teorema 4.3.2 demostramos que $H = 1$, y como consecuencia que Σ es una superficie parabólica. Consideremos ahora la función diferenciable $e^h \in C^\infty(\Sigma)$. A partir de (4.16) y (4.11) podemos calcular fácilmente

$$\Delta e^h = e^h(\Delta h + \|\nabla h\|^2) = -2e^h(1 + \Theta) \geq 0.$$

Por tanto e^h es una función subarmónica acotada superiormente sobre la superficie parabólica Σ . Esto implica que debe ser constante, por lo que h también es constante siendo Σ un *slice*. \square

4.4. El caso n -dimensional de hipersuperficies

Observemos que todos los resultados mostrados en las secciones anteriores están referidos a superficies, y por tanto a dimensión $n = 2$. No obstante, cabe destacar que en el caso n -dimensional podemos establecer algunos resultados parciales interesantes. Más concretamente, podemos dar interesantes acotaciones para la curvatura media cuando consideramos hipersuperficies espaciales completas de curvatura media constante en el espacio *steady state* o en los espacios tipo *steady state*. No obstante, las técnicas que hemos empleado en este capítulo para obtener los resultados de unicidad y probar que las superficies espaciales han de ser necesariamente las superficies totalmente umbilicales del tipo L_τ son técnicas de parabolicidad específicas para dimensión $n = 2$, por lo que no podemos extender estos resultados a dimensión arbitraria utilizando las mismas herramientas matemáticas.

Todas las definiciones introducidas en las secciones anteriores referentes a superficies espaciales, tales como la definición de la función altura o las definiciones de superficies espaciales acotadas del infinito, son análogas en el caso n -dimensional. Por otro lado, omitiremos en esta sección las demostraciones a fin de no repetir los mismos razonamientos ya realizados, ya que las pruebas son análogas a las que hemos desarrollado en las secciones anteriores. De hecho, casi todos los cálculos son similares, teniendo cuidado únicamente en pequeños detalles. La diferencia más destacada es seguramente la siguiente: el principio del máximo de Omori-Yau es válido en dimensión arbitraria, aunque tenemos que considerar como hipótesis una variedad riemanniana M^n con curvatura de Ricci acotada inferiormente. De este modo, tenemos que fijarnos que ahora las acotaciones hay que realizarlas sobre la curvatura de Ricci. Sin embargo las ideas principales son siempre las mismas.

Por otro lado, enunciaremos sólo los resultados para hipersuperficies espaciales con curvatura media constante en el espacio $M_{e^t}^n \times \mathbb{R}_1$, puesto que de nuevo se puede probar como un caso

particular que, cuando $M^n = \mathbb{R}^n$ es el espacio euclídeo, $\mathbb{R}_{e^t}^n \times \mathbb{R}_1$ es una realización del espacio *steady state* $(n + 1)$ -dimensional \mathcal{H}^{n+1} .

En primer lugar, el Lema 4.3.1 admite una extensión natural e inmediata al caso n -dimensional.

Lema 4.4.1. *Sea M^n una variedad riemanniana. Si $M_{e^t}^n \times \mathbb{R}_1$ admite una hipersuperficie espacial completa Σ acotada del infinito futuro, entonces M es necesariamente completa y la proyección $\Pi = \pi_M \circ f : \Sigma \rightarrow M$ es una aplicación recubridora.*

Y con respecto a los Teoremas 4.3.2 y 4.3.3 podemos obtener en dimensión arbitraria las siguientes generalizaciones.

Teorema 4.4.2. *Sea M^n una variedad riemanniana (necesariamente completa) con curvatura seccional no negativa y sea $f : \Sigma^n \rightarrow M_{e^t}^n \times \mathbb{R}_1$ una hipersuperficie espacial completa con curvatura media constante H . Entonces, si Σ está acotada del infinito, $H = 1$ necesariamente.*

Teorema 4.4.3. *Sea M^n una variedad riemanniana (necesariamente completa) con curvatura seccional no negativa y sea $f : \Sigma^n \rightarrow M_{e^t}^n \times \mathbb{R}_1$ una hipersuperficie espacial completa con curvatura media constante H . Entonces, si Σ está acotada del infinito futuro y tiene vector curvatura media apuntando hacia el futuro, se tiene $2\sqrt{n-1}/n \leq H \leq 1$.*

Como una observación final a esta sección podemos observar que, del mismo modo que en la Sección 4.2 hemos introducido los cilindros hiperbólicos en el espacio de *de Sitter* 3-dimensional, se pueden construir en el espacio de *de Sitter* $(n + 1)$ -dimensional, \mathbb{S}_1^{n+1} , los cilindros hiperbólicos generalizados. Para ello, dado un número entero k tal que $0 < k < n$ y dado $r^2 > 1$, podemos considerar la hipersuperficie de \mathbb{S}_1^{n+1} dada por

$$\tilde{M}^n = \mathbb{H}^{n-k}(-\sqrt{r^2 - 1}) \times \mathbb{S}^k(r).$$

Podemos comprobar de un modo análogo al caso 2-dimensional que todas las hipersuperficies así obtenidas son hipersuperficies espaciales, completas y con curvatura media constante, pero no totalmente umbilicales. Y, de nuevo, ninguna de ellas está contenida en el espacio *steady state* $(n + 1)$ -dimensional \mathcal{H}^{n+1} .

Capítulo 5

Superficies con curvatura de Gauss constante

Sumario. En este capítulo damos algunos resultados interesantes referentes a la geometría de superficies *two-sided* con curvatura de Gauss constante en un espacio producto riemanniano $M^2 \times \mathbb{R}$, y de superficies espaciales en un espacio producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$. Como un primer resultado, establecemos una fórmula integral para superficies compactas en un espacio producto. Esta fórmula integral nos permite deducir algunas consecuencias interesantes. Por ejemplo, cuando M^2 es la esfera \mathbb{S}^2 o el plano proyectivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, caracterizamos los *slices* como las únicas superficies compactas *two-sided* con curvatura de Gauss constante en el producto riemanniano $M^2 \times \mathbb{R}$ tales que su función ángulo no cambia de signo. Además, damos resultados más débiles en el caso en que la curvatura de Gauss de la superficie no sea necesariamente constante. Obtenemos resultados similares para superficies espaciales en un producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$. También formulamos nuestros resultados en términos de grafos enteros en un espacio producto. Finalmente, mostramos que nuestras conclusiones dejan de ser válidas cuando $M^2 = \mathbb{H}^2$ es el plano hiperbólico.

Abstract. *In this chapter we give some interesting results concerning the geometry of two-sided surfaces with constant Gaussian curvature in a Riemannian product space $M^2 \times \mathbb{R}$, and of spacelike surfaces in a Lorentzian product space $M^2 \times \mathbb{R}_1$. As a first result, we establish a nice integral formula for compact surfaces in a product space. This integral formula allows us to derive some interesting consequences. For instance, when M^2 is either the sphere \mathbb{S}^2 , or the real projective plane $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, we characterize the slices as the only compact two-sided surfaces with constant Gaussian curvature in the Riemannian product $M^2 \times \mathbb{R}$ such that its angle function does not change sign. Moreover, we also give some weaker results when we do not ask the Gaussian curvature to be necessarily constant. Similar results are also established for spacelike surfaces in a Lorentzian product $M^2 \times \mathbb{R}_1$. We also formulate our results in terms of entire graphs in a product space. Finally we show that our results are no longer true when $M^2 = \mathbb{H}^2$ is the hyperbolic plane.*

5.1. Motivación y preliminares.

En los capítulos anteriores nos hemos centrado en estudiar y obtener propiedades geométricas de superficies espaciales con curvatura media constante en ciertos tipos de espacios producto lorentzianos. La curvatura media es posiblemente el invariante extrínseco más importante, y el más estudiado, en el ámbito de la geometría diferencial de subvariedades y en particular de superficies, no sólo por su importancia desde un punto de vista puramente matemático, sino también por su interés físico. No obstante, existe otra familia de invariantes geométricos bien conocidos y estudiados: los invariantes intrínsecos que dependen únicamente de la métrica de la superficie, sin tener en cuenta la forma en que la superficie está inmersa en el espacio ambiente. El más conocido de los invariantes intrínsecos de una superficie es, sin duda, la curvatura de Gauss.

Es este último capítulo consideraremos superficies con curvatura de Gauss constante en espacios producto. Aunque hasta el momento hemos trabajado siempre con superficies espaciales en espacios producto lorentzianos del tipo $M^2 \times \mathbb{R}_1$, haremos una excepción en este último capítulo para incluir en nuestro estudio el caso de superficies con curvatura de Gauss constante en espacios producto riemannianos del tipo $M^2 \times \mathbb{R}$. Tenemos un motivo doble para proponer esta extensión. En primer lugar hay que destacar que es posible unificar la notación y las técnicas necesarias para estudiar ambos casos, salvo determinados detalles puntuales. Por ello es posible introducir el caso riemanniano de un modo natural sin que esto suponga un cambio radical en el planteamiento de la tesis, ya que comenzaremos el estudio de los dos casos simultáneamente. En segundo lugar, a lo largo de los últimos años ha aumentado notablemente el interés por el estudio de las superficies con curvatura de Gauss constante en los espacios producto riemannianos $M^2 \times \mathbb{R}$ (véase por ejemplo [AEG1, AEG2]). Los resultados que vamos a obtener siguen la filosofía de estos trabajos, y extienden algunos de los resultados contenidos en ellos. Finalmente, cabe decir que la razón por la cual no hemos intentado abordar el caso riemanniano en los capítulos anteriores es porque las superficies completas con curvatura media nula, $H = 0$, en espacios producto riemannianos, es decir las superficies minimales, han sido ya ampliamente estudiadas en los últimos años, véase entre otros [MeRo, Ros]. En particular, Alías, Dajczer y Ripoll [ADR] dieron resultados de tipo Bernstein en este contexto.

A fin de trabajar simultáneamente en los casos riemanniano y lorentziano hemos de unificar la notación a utilizar. Aunque en el Capítulo 1 desarrollamos los preliminares básicos para el estudio de superficies espaciales en el producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$, a continuación repasaremos brevemente los preliminares que necesitaremos a lo largo de este capítulo con el objetivo de introducirlos también para superficies en el producto riemanniano $M^2 \times \mathbb{R}$. Sea M^2 una superficie riemanniana conexa, y denotemos por $M^2 \times \mathbb{R}_c$ a la variedad producto $M^2 \times \mathbb{R}$ dotada de la métrica

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_M + \varepsilon dt^2,$$

donde por c denotamos el índice de la variedad producto y $\varepsilon = \pm 1$ según el caso. En particular, en

el caso en que el espacio producto sea riemanniano tendremos $c = 0$ y $\varepsilon = 1$, mientras que cuando consideremos un espacio producto lorentziano tendremos $c = 1$ y $\varepsilon = -1$. Obsérvese que ∂_t es un campo vectorial globalmente definido sobre $M^2 \times \mathbb{R}_c$ que verifica $\langle \partial_t, \partial_t \rangle = \varepsilon$. Además, ∂_t es un campo vectorial paralelo y

$$\bar{\nabla} \pi_{\mathbb{R}} = \varepsilon \partial_t,$$

donde recordemos que por $\bar{\nabla}$ denotamos la conexión de Levi-Civita del espacio ambiente $M^2 \times \mathbb{R}_c$ y $\pi_{\mathbb{R}}$ representa la proyección de $M^2 \times \mathbb{R}_c$ sobre el factor \mathbb{R} .

Consideremos ahora $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_c$ una superficie conexa inmersa en $M^2 \times \mathbb{R}_c$. En el caso en que el espacio ambiente $M^2 \times \mathbb{R}_c$ sea lorentziano supondremos, tal y como hemos hecho hasta el momento, que Σ es una superficie espacial. Por el contrario, en el caso en que $M^2 \times \mathbb{R}_c$ sea un espacio producto riemanniano supondremos que la superficie Σ^2 es *two-sided* en $M^2 \times \mathbb{R}$. Se dice que una superficie Σ^2 en $M^2 \times \mathbb{R}$ es *two-sided* si su fibrado normal es trivial, es decir, si existe un campo vectorial normal y unitario globalmente definido sobre Σ , N , al que nos referiremos, también en este caso, como la aplicación normal de Gauss de la superficie Σ . Por ejemplo, cualquier superficie con curvatura media constante no nula es trivialmente una superficie *two-sided*. Esta hipótesis nos permite definir también en el caso riemanniano la función diferenciable $\Theta : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Theta(p) = \langle N(p), \partial_t(p) \rangle, \quad p \in \Sigma.$$

En el caso riemanniano la función Θ mide el coseno del ángulo determinado por los vectores unitarios N y ∂_t , por lo que nos referiremos a ella como la función ángulo de la superficie Σ .

Siendo ∇ la conexión de Levi-Civita de Σ , las fórmulas de Gauss y Weingarten para una superficie Σ en $M^2 \times \mathbb{R}_c$ vienen dadas, respectivamente, por

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \varepsilon \langle AX, Y \rangle N, \quad (5.1)$$

y

$$AX = -\bar{\nabla}_X N \quad (5.2)$$

para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, donde $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ denota el operador forma de Σ con respecto a N . Recordemos que la función altura de una superficie inmersa $f : \Sigma^2 \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}_c$ es la función diferenciable $h \in C^\infty(\Sigma)$ definida como la proyección de la inmersión sobre el factor \mathbb{R} , es decir, $h = \pi_{\mathbb{R}} \circ f$. Entonces, el gradiente de h sobre Σ viene dado por

$$\nabla h = (\bar{\nabla} \pi_{\mathbb{R}})^\top = \varepsilon \partial_t^\top,$$

siendo $(\cdot)^\top$ la componente tangente de un campo vectorial en $\mathfrak{X}(M^2 \times \mathbb{R}_c)$ sobre Σ . Teniendo en cuenta que podemos descomponer ∂_t como

$$\partial_t = \partial_t^\top + \varepsilon \Theta N, \quad (5.3)$$

obtenemos de modo inmediato que

$$\|\nabla h\|^2 = \varepsilon(1 - \Theta^2), \quad (5.4)$$

donde $\|\cdot\|$ representa la norma de un campo vectorial sobre Σ . Por otro lado, como ∂_t es paralelo en $M^2 \times \mathbb{R}_c$, tomando derivadas covariantes en (5.3) y aplicando las fórmulas de Gauss (5.1) y de Weingarten (5.2) obtenemos

$$\nabla_X \nabla h = \Theta AX \quad (5.5)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, luego tomando trazas concluimos que el laplaciano de la función altura en Σ viene dado por

$$\Delta h = 2\varepsilon H\Theta, \quad (5.6)$$

donde $H = \frac{\varepsilon}{2} \text{tr}(A)$ representa la curvatura media de la superficie Σ .

Bajo las hipótesis sobre Σ que hemos establecido anteriormente, es fácil ver con un razonamiento análogo al del Capítulo 1 que la ecuación de Gauss de la superficie Σ en $M^2 \times \mathbb{R}_c$ viene dada por

$$K = \kappa_M \Theta^2 + \varepsilon \det A, \quad (5.7)$$

donde K representa la curvatura de Gauss de la superficie Σ y κ_M la curvatura de Gauss de M a lo largo de la superficie Σ . Por otro lado la ecuación de Codazzi establece en nuestro caso que, dados X e Y dos campos vectoriales tangentes sobre Σ ,

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X + \kappa_M \Theta (\langle Y, \nabla h \rangle X - \langle X, \nabla h \rangle Y). \quad (5.8)$$

Finalmente, calculemos el gradiente y el laplaciano de la función $\Theta = \langle N, \partial_t \rangle$. Teniendo en cuenta de nuevo que ∂_t es un campo vectorial paralelo sobre $M^2 \times \mathbb{R}_c$, y aplicando la fórmula de Weingarten (5.2), se tiene para todo campo tangente $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ que

$$X(\Theta) = \langle \bar{\nabla}_X N, \partial_t \rangle = -\langle AX, \partial_t^\top \rangle = -\varepsilon \langle A(\nabla h), X \rangle,$$

y por tanto

$$\nabla \Theta = -\varepsilon A \nabla h. \quad (5.9)$$

Tomando derivadas covariantes en (5.9), y aplicando la ecuación de Codazzi (5.8) y las expresiones (5.4) y (5.5), obtenemos de un modo análogo al desarrollo realizado en el Capítulo 1 que dado $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ se verifica

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla \Theta &= -\varepsilon ((\nabla_X A)(\nabla h) + A(\nabla_X \nabla h)) \\ &= -\varepsilon ((\nabla_{\nabla h} A)(X) + \kappa_M \Theta (\varepsilon(1 - \Theta^2)X - \langle X, \nabla h \rangle \nabla h) + \Theta A^2 X). \end{aligned}$$

Por último, tomando trazas en la expresión anterior y teniendo en cuenta que las contracciones conmutan con las derivadas covariantes concluimos que el laplaciano de Θ en Σ viene dado por

$$\Delta \Theta = -2\langle \nabla h, \nabla H \rangle - \kappa_M \Theta (1 - \Theta^2) - \varepsilon \Theta \|A\|^2, \quad (5.10)$$

donde recordemos que $\|A\|^2 = \text{tr}(A^2)$. Veamos que con ayuda de la ecuación de Gauss esta fórmula se puede reescribir, a fin de obtener una expresión más conveniente para nuestro trabajo. Como ya vimos en la prueba del Teorema 4.2.3 se satisface la igualdad $\|A\|^2 - 4H^2 + 2 \det A = 0$ sobre Σ , luego por la ecuación de Gauss (5.7) se tiene que

$$\varepsilon\|A\|^2 = 4\varepsilon H^2 - 2\varepsilon \det A = \varepsilon 4H^2 + 2(\kappa_M \Theta^2 - K),$$

por lo que sustituyendo en (5.10) obtenemos finalmente que

$$\Delta\Theta = -2\langle \nabla h, \nabla H \rangle - 4\varepsilon H^2 \Theta + \Theta (2(K - \kappa_M) + \kappa_M(1 - \Theta^2)). \quad (5.11)$$

5.2. Una fórmula integral

El principal resultado de esta sección es la siguiente fórmula integral para superficies compactas en los espacios producto $M^2 \times \mathbb{R}_c$.

Teorema 5.2.1. *Sea Σ^2 una superficie compacta inmersa en $M^2 \times \mathbb{R}_c$ y supongamos, tal y como hemos asumido en la sección anterior, que Σ es una superficie espacial en el caso en que $M^2 \times \mathbb{R}_c$ sea un espacio producto lorentziano y que Σ es una superficie two-sided en el caso en que el espacio ambiente sea riemanniano. Entonces,*

$$\int_{\Sigma} \Theta (2(K - \kappa_M) + \kappa_M(1 - \Theta^2)) = 0. \quad (5.12)$$

Demostración. A partir de la expresión (5.6) para el laplaciano de la función altura, se sigue fácilmente que

$$\text{div}(H\nabla h) = \langle \nabla H, \nabla h \rangle + H\Delta h = \langle \nabla H, \nabla h \rangle + 2\varepsilon H^2 \Theta, \quad (5.13)$$

siendo div el operador divergencia sobre la superficie Σ . Por tanto, a partir de (5.11) y (5.13) obtenemos

$$\Delta\Theta + 2 \text{div}(H\nabla h) = \Theta (2(K - \kappa_M) + \kappa_M(1 - \Theta^2)).$$

Finalmente, integrando la última expresión sobre la superficie compacta Σ , y aplicando el teorema de la divergencia, se sigue el resultado deseado. \square

De esta fórmula integral se pueden extraer interesantes consecuencias, tanto en el caso riemanniano como en el caso lorentziano. Para estudiarlas conviene distinguir ambos casos.

5.2.1. Superficies en un espacio producto riemanniano.

Consideremos en primer lugar Σ^2 una superficie inmersa en un espacio producto riemanniano $M^2 \times \mathbb{R}$. Recordemos que en este caso estamos suponiendo que Σ es una superficie *two-sided*, y que

por tanto la función ángulo $\Theta = \langle N, \partial_t \rangle$ está globalmente definida. Tengamos en cuenta que si Σ es localmente un grafo sobre M^2 entonces necesariamente se tiene $\Theta < 0$ o $\Theta > 0$ sobre Σ . Esto es debido a que, precisamente, Σ es un grafo local si es una superficie transversal a ∂_t en todo punto, y por tanto Θ no se puede anular en ningún punto (en la Sección 5.3 damos la expresión explícita de la función Θ sobre un grafo). Consecuentemente, asumir que la función ángulo no cambie de signo es una hipótesis más débil que suponer que la superficie es un grafo local. Como ya han observado otros autores (véase por ejemplo [AlDa, ADR] y [EsRo]), la función ángulo es una función natural a considerar si se quiere concluir que una superficie es necesariamente un *slice*, puesto que en este caso se tiene necesariamente $\Theta^2 = 1$ como se puede observar a partir de (5.4).

Como una primera aplicación de nuestra fórmula integral (5.12) obtenemos el siguiente resultado para superficies compactas *two-sided*, donde observemos que no asumimos ni que la curvatura de Gauss de M^2 ni que la curvatura de Gauss de Σ^2 sean constantes.

Teorema 5.2.2. *Sea M^2 una superficie riemanniana compacta con curvatura de Gauss no negativa $K_M \geq 0$ (respectivamente, con curvatura de Gauss no positiva $K_M \leq 0$), y supongamos que $K_M > 0$ (respectivamente, $K_M < 0$) sobre un subconjunto denso de M . Las únicas superficies compactas *two-sided* Σ en el producto riemanniano $M^2 \times \mathbb{R}$ tales que su función ángulo Θ no cambie de signo y que se verifique $K \geq K_M$ sobre Σ (respectivamente, $K \leq K_M$) son los *slices*.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que la función ángulo satisface $\Theta \leq 0$. Vamos a considerar el caso donde $K_M \geq 0$ (el caso $K_M \leq 0$ se prueba de un modo análogo). A partir de nuestras hipótesis tenemos que $K \geq \kappa_M \geq 0$ sobre Σ . Por tanto, como $1 - \Theta^2 \geq 0$, se verifica la desigualdad

$$\Theta (2(K - \kappa_M) + \kappa_M(1 - \Theta^2)) \leq 0,$$

y además, esta expresión se anula en un punto dado $p \in \Sigma$ si y sólo si

- (i) $\Theta(p) = 0$,
- (ii) o bien $\Theta(p) < 0$, $K(p) = \kappa_M(p)$ y $\kappa_M(p)(1 - \Theta^2(p)) = 0$.

Por tanto, teniendo en cuenta el Teorema 5.2.1 se concluye que

$$\Theta (2(K - \kappa_M) + \kappa_M(1 - \Theta^2)) = 0 \quad \text{sobre } \Sigma. \quad (5.14)$$

Afirmamos, y probaremos enseguida, que (5.14) implica que para cada punto $p \in \Sigma$ tenemos únicamente dos posibilidades: $\Theta(p) = 0$ o $\Theta(p) = -1$. Una vez probado este hecho, por continuidad se tendrá que la función Θ debe ser constante sobre Σ , bien sea $\Theta = 0$ o $\Theta = -1$. No obstante, obsérvese que el caso $\Theta = 0$ no se puede dar. De hecho, gracias a (5.4) y a la compacidad de Σ , sabemos que siempre existen puntos para los cuales $\Theta = -1$: los puntos críticos de la función altura h . Resumiendo, $\Theta = -1$ sobre Σ , lo que significa que la superficie es un *slice*.

Sólo nos falta por probar que de (5.14) se deduce que $\Theta(p) = 0$ o $\Theta(p) = -1$ para todo punto $p \in \Sigma$. Dado $p \in \Sigma$, si $\Theta(p) = 0$ no hay nada más que probar. Por tanto, supongamos que $\Theta(p) < 0$. Si $\kappa_M(p) \neq 0$, por (ii) tendremos que $\Theta(p) = -1$. Por otro lado, si $\kappa_M(p) = 0$ razonamos como sigue. Por ser $\Theta(p) < 0$, sabemos que Σ es localmente un grafo en un entorno de p , es decir, existen un subconjunto abierto $\Omega \subset M^2$ y una función diferenciable $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $\mathcal{W} = \{(x, u(x)) : x \in \Omega\} \subset \Sigma$ es un entorno abierto de p , siendo $p = (x_0, u(x_0))$ para un cierto $x_0 \in \Omega$. En particular se tiene $\Theta < 0$ sobre \mathcal{W} . Recordemos ahora que estamos suponiendo que K_M es una función positiva sobre un subconjunto denso de M^2 . Por tanto, podemos encontrar una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset \Omega$ convergente a x_0 de modo que $K_M(x_k) > 0$ para todo $k \geq 1$. Sea $p_k = (x_k, u(x_k)) \in \mathcal{W}$, y observemos que $\kappa_M(p_k) = K_M(x_k) > 0$ y $\Theta(p_k) < 0$ para todo $k \geq 1$. Por tanto, por (ii) se tiene que $\Theta(p_k) = -1$ para todo $k \geq 1$, y por continuidad de Θ , $\Theta(p) = -1$, lo que concluye la prueba. \square

Como es bien conocido, las únicas superficies riemannianas completas con curvatura de Gauss constante positiva son, salvo una homotecia, la esfera \mathbb{S}^2 y el plano proyectivo real \mathbb{RP}^2 . Por tanto, como consecuencia del Teorema 5.2.2 obtenemos el siguiente resultado para superficies con curvatura de Gauss constante.

Corolario 5.2.3. *Sea M^2 la esfera \mathbb{S}^2 o el plano proyectivo real \mathbb{RP}^2 . Entonces,*

- (i) *las únicas superficies two-sided compactas Σ en el producto riemanniano $M^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura de Gauss constante y tales que su función ángulo Θ no cambie de signo son los slices, y*
- (ii) *las únicas superficies two-sided completas Σ en el producto riemanniano $M^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura de Gauss constante y tales que exista un cierto $\delta > 0$ de modo que $\Theta \leq -\delta < 0$ son los slices.*

Observemos que cualquier cilindro $\gamma \times \mathbb{R}$ sobre una curva completa γ en M^2 es una superficie *two-sided* completa y no compacta con curvatura de Gauss constante $K = 0$ y función ángulo $\Theta = 0$. Por tanto la hipótesis sobre Θ en (ii) es necesaria. En [AEG1] Aledo, Espinar y Gálvez propusieron la siguiente pregunta: ¿los *slices* son las únicas superficies completas en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura de Gauss constante $0 < K \leq 1$? Los mismos autores probaron más tarde en [AEG2] que no existen tales superficies cuando $0 < K < 1$, pero la pregunta continúa abierta para el caso $K = 1$. El Corolario 5.2.3 da una respuesta parcial a esta pregunta en el siguiente sentido, las únicas superficies completas en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura de Gauss constante $K = 1$ y tales que su función ángulo no cambia de signo son los *slices*. En particular, probamos que los únicos grafos enteros sobre $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ son los *slices*.

Prueba del Corolario 5.2.3. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\Theta \leq 0$ en ambos casos. Nuestro primer objetivo será probar que la hipótesis considerada sobre Θ en el caso (ii) implica que la superficie Σ es necesariamente compacta, y por tanto el caso (ii) se sigue del caso

(i). Por hipótesis existe un cierto $\delta > 0$ de modo que $\Theta(p) \leq -\delta < 0$ para cada punto $p \in \Sigma$. Consideremos la proyección $\Pi : \Sigma^2 \rightarrow M^2$ de Σ^2 sobre el factor M^2 . Dado un punto $p \in \Sigma$ y un vector tangente $v \in T_p\Sigma$ no es difícil ver que

$$\langle d\Pi_p(v), d\Pi_p(v) \rangle_M \geq c\langle v, v \rangle \quad (5.15)$$

donde $c = \frac{1}{\delta^2} > 0$. Por ser \langle, \rangle una métrica riemanniana completa sobre Σ , con un razonamiento de comparación de métricas similar a los que ya hemos usado anteriormente, la métrica homotética $\widetilde{\langle, \rangle} = c\langle, \rangle$ también es completa. Entonces, por (5.15) la aplicación

$$\Pi : (\Sigma^2, \widetilde{\langle, \rangle}) \rightarrow (M^2, \langle, \rangle_M)$$

es un difeomorfismo local que aumenta la distancia. Luego por [KoNo, Chapter VIII, Lemma 8.1] se tiene que Π es una aplicación recubridora. Por tanto, como el recubrimiento universal de M^2 es la esfera \mathbb{S}^2 , que es una superficie compacta, concluimos que Σ también tiene que ser una superficie compacta.

Probemos ahora el caso (i). Gracias a la compacidad de Σ , existe un punto $p_0 \in \Sigma$ de modo que $h(p_0) = \min_{\Sigma} h$. Entonces $\nabla h(p_0) = 0$, luego por (5.4) se tiene que $\Theta(p_0) = -1$, y además $\nabla^2 h_{p_0}(v, v) \geq 0$ para todo $v \in T_{p_0}\Sigma$, donde $\nabla^2 h$ denota el operador hessiano de la función altura h sobre Σ . En particular, si consideramos la base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_{p_0}\Sigma$ formada por las direcciones principales, a partir de (5.5) se deduce que

$$\nabla^2 h_{p_0}(e_i, e_i) = -\kappa_i(p_0) \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

siendo κ_i la curvatura principal de Σ asociada a la dirección principal e_i , es decir $A_{p_0}(e_i) = \kappa_i e_i$. Por tanto $(\det A)(p_0) \geq 0$, y de la ecuación de Gauss (5.7) concluimos que

$$K = K(p_0) = K_M \Theta^2(p_0) + (\det A)(p_0) \geq K_M.$$

A partir de aquí el resultado se sigue como una consecuencia directa del Teorema 5.2.2. \square

5.2.2. Superficies en un espacio producto lorentziano.

Consideremos ahora el caso en que Σ^2 sea una superficie espacial inmersa en un espacio producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$. Recordemos que, en este caso, N denota la aplicación de Gauss apuntando hacia el futuro, y la función Θ satisface $\Theta = \langle N, \partial_t \rangle \leq -1 < 0$. En particular, siempre tenemos $\Theta < 0$, y además $\Theta(p) = -1$ si y sólo si p es un punto crítico de la función altura h . En este caso podemos deducir resultados análogos a los obtenidos para el caso riemanniano en la subsección anterior. A pesar de que las demostraciones sean análogas a las del caso riemanniano las incluiremos con la finalidad de escribir una subsección autocontenida.

Teorema 5.2.4. *Sea M^2 una superficie riemanniana compacta con curvatura de Gauss no negativa, $K_M \geq 0$ (respectivamente, curvatura de Gauss no positiva $K_M \leq 0$), y supongamos que $K_M > 0$ (respectivamente, $K_M < 0$) sobre un subconjunto denso de M^2 . Las únicas superficies espaciales compactas Σ en el producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$ verificando $K \leq K_M$ (respectivamente, $K \geq K_M$) son los slices.*

Demostración. Probaremos únicamente el caso donde $K_M \geq 0$, ya que el caso $K_M \leq 0$ es análogo. Por hipótesis sabemos que $K \leq \kappa_M$ y $\kappa_M \geq 0$. Además tenemos $\Theta \leq -1$, luego $1 - \Theta^2 < 0$. Por tanto, se tiene la desigualdad

$$\Theta (2(K - \kappa_M) + \kappa_M(1 - \Theta^2)) \geq 0,$$

dándose la igualdad para un punto $p \in \Sigma$ si y sólo si

$$K(p) = \kappa_M(p) \quad \text{y} \quad \kappa_M(p)(1 - \Theta^2(p)) = 0.$$

Aplicando ahora la fórmula integral (5.12) y teniendo en cuenta que $\Theta < 0$, se tiene que

$$2(K - \kappa_M) + \kappa_M(1 - \Theta^2) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma,$$

luego en particular para cada punto $p \in \Sigma$ se satisface

$$\kappa_M(p)(1 - \Theta^2(p)) = 0. \tag{5.16}$$

Veamos ahora que a partir de (5.16) se deduce que $\Theta = -1$. Recordemos por un lado que, por definición, $\kappa_M = K_M \circ \Pi \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, y por otro que la proyección $\Pi : \Sigma \rightarrow M$ es una aplicación recubridora por el Lema 2.1.1. A partir de aquí, es inmediato probar que si consideramos el conjunto $U = \{x \in M : K_M(x) > 0\} \subset M$, entonces $\mathcal{U} = \Pi^{-1}(U) = \{p \in \Sigma : \kappa_M > 0\} \subset \Sigma$ es un subconjunto denso en Σ por ser U denso en M . A partir de (5.16) tenemos que $\Theta(p) = -1$ para todo $p \in \mathcal{U} \subset \Sigma$. Luego finalmente, gracias a la continuidad de la función Θ , $\Theta = -1$ en Σ , lo que concluye la prueba. \square

Como consecuencia del Teorema 5.2.4 deducimos el siguiente resultado para superficies espaciales completas con curvatura de Gauss constante en \mathbb{S}^2 o en \mathbb{RP}^2 , siendo éste el resultado análogo en el caso lorentziano al Corolario 5.2.3 antes establecido.

Corolario 5.2.5. *Sea M^2 la esfera \mathbb{S}^2 o el plano proyectivo real \mathbb{RP}^2 . Las únicas superficies espaciales completas Σ en el espacio producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{R}_1$ con curvatura de Gauss constante son los slices.*

Demostración. Observemos en primer lugar que bajo nuestras hipótesis Σ es necesariamente una superficie compacta. De hecho, como $\Pi : \Sigma \rightarrow M$ es una aplicación recubridora, y el recubridor

universal de M es la esfera \mathbb{S}^2 , \mathbb{S}^2 también recubre a la superficie Σ , por lo que Σ es necesariamente una superficie compacta. Consideremos ahora $p_0 \in \Sigma$ de modo que $h(p_0) = \min_{\Sigma} h$. Entonces por (5.4) se tiene $\Theta(p_0) = -1$, y además $\nabla^2 h_{p_0}(v, v) \geq 0$ para todo $v \in T_{p_0}\Sigma$. Sea de nuevo $\{e_1, e_2\}$ la base ortonormal de $T_{p_0}\Sigma$ formada por las direcciones principales. A partir de la expresión (5.5) se tiene que

$$\nabla^2 h_{p_0}(e_i, e_i) = -\kappa_i(p_0) \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Por tanto $(\det A)(p_0) \geq 0$ y por la ecuación de Gauss (5.7) se deduce que

$$K = K(p_0) = K_M \Theta^2(p_0) - (\det A)(p_0) \leq K_M.$$

La prueba se sigue aplicando el Teorema 5.2.4. □

5.3. Grafos enteros en un espacio producto.

Como una bonita consecuencia de los resultados presentados en la sección anterior, nos proponemos enunciarlos en términos de grafos enteros en un espacio producto del tipo $M^2 \times \mathbb{R}_c$. Como ya hicimos al principio de este capítulo, repasaremos brevemente algunos de los detalles ya introducidos en la Sección 1.3 del Capítulo 1 sobre la geometría de los grafos enteros en espacios producto lorentzianos, a fin de introducirlos también para grafos enteros en espacios producto riemannianos. Consideremos $\Omega \subseteq M^2$ un dominio conexo. Cualquier función diferenciable $u \in C^\infty(\Omega)$ determina un grafo sobre Ω dado por $\Sigma(u) = \{(x, u(x)) : x \in \Omega\} \subset M^2 \times \mathbb{R}_c$. La métrica inducida sobre Ω a partir de la métrica del espacio ambiente via el grafo $\Sigma(u)$ viene dada por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_M + \varepsilon du^2. \quad (5.17)$$

En particular, y como ya vimos, en el caso en que el espacio ambiente sea lorentziano, $\Sigma(u)$ será una superficie espacial en $M^2 \times \mathbb{R}_1$ si y sólo si $|Du|^2 < 1$ en todo Ω , donde recordemos que Du denota el gradiente de u con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ sobre Ω y $|Du|^2 = \langle Du, Du \rangle_M$. Un grafo se dice que es entero si $\Omega = M^2$.

Sea $\Sigma(u)$ un grafo sobre un dominio $\Omega \subseteq M$, que supondremos espacial en el caso en que el espacio ambiente sea lorentziano, y consideremos que la orientación del grafo viene dada por el campo normal definido por

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon |Du|^2}} (-\varepsilon \partial_t + Du),$$

y por tanto

$$\Theta = \frac{-1}{\sqrt{1 + \varepsilon |Du|^2}} < 0.$$

Obsérvese que, tanto en el caso riemanniano como en el caso lorentziano, N es un campo globalmente definido, por lo que en particular todo grafo sobre un espacio producto riemanniano es

siempre una superficie *two-sided*. Calculemos ahora la expresión para la curvatura de Gauss de un grafo $\Sigma(u)$. Por la ecuación de Gauss (5.7) sabemos que

$$K = K_M \Theta^2 + \varepsilon \det A = \frac{K_M}{1 + \varepsilon |Du|^2} + \varepsilon \det A.$$

Sea $\{E_1, E_2\}$ una base local ortonormal sobre Ω (con respecto a la métrica \langle, \rangle_M) y observemos que

$$\det A = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})},$$

siendo $g_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle$ y $h_{ij} = \langle AE_i, E_j \rangle$ para $1 \leq i, j \leq 2$. A partir de la expresión de la métrica (5.17) tenemos que $g_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon E_i(u) E_j(u)$, luego

$$\det(g_{ij}) = 1 + \varepsilon |Du|^2.$$

Un cálculo directo nos permite establecer que

$$\bar{\nabla}_{E_i} N = \frac{-\varepsilon \langle D_{E_i} Du, Du \rangle}{1 + \varepsilon |Du|^2} N + \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon |Du|^2}} D_{E_i} Du,$$

por lo que se tiene

$$h_{ij} = \langle AE_i, E_j \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{E_i} N, E_j \rangle = -\frac{D^2 u(E_i, E_j)}{\sqrt{1 + \varepsilon |Du|^2}},$$

siendo $D^2 u$ el operador hessiano de la función u con respecto a la métrica \langle, \rangle_M sobre Ω . Por tanto

$$\det(h_{ij}) = \frac{\det(D^2 u)}{1 + \varepsilon |Du|^2},$$

y en consecuencia la ecuación de Gauss de $\Sigma(u)$ se puede reescribir como

$$K = \frac{K_M}{1 + \varepsilon |Du|^2} + \varepsilon \frac{\det(D^2 u)}{(1 + \varepsilon |Du|^2)^2},$$

con la restricción $|Du|^2 < 1$ en el caso en que $\varepsilon = -1$.

Teniendo esto en cuenta, los Corolarios 5.2.3 y 5.2.5 se pueden formular en términos de grafos enteros de la manera siguiente.

Corolario 5.3.1. *Sea M^2 la esfera \mathbb{S}^2 o el plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$. Las únicas soluciones enteras sobre M^2 a la ecuación*

$$(1 + |Du|^2)^2 K = 1 + |Du|^2 + \det(D^2 u),$$

o a la ecuación

$$(1 - |Du|^2)^2 K = 1 - |Du|^2 - \det(D^2 u), \quad |Du|^2 < 1,$$

donde Du y $D^2 u$ denotan el gradiente y el hessiano de una función u sobre M^2 respectivamente, son las funciones constantes, y $K = 1$ necesariamente. En particular, si $K \neq 1$, no existen soluciones sobre M^2 a ninguna de las ecuaciones anteriores.

Por otro lado, nuestros Teoremas 5.2.2 y 5.2.4 nos permiten dar el siguiente resultado más general, donde observemos que no asumimos ni que la curvatura de Gauss de M^2 ni que la curvatura de Gauss del grafo $\Sigma(u)$ sean constantes.

Corolario 5.3.2. *Sea M^2 una superficie riemanniana compacta con curvatura de Gauss no negativa $K_M \geq 0$ (respectivamente, con curvatura de Gauss no positiva $K \leq 0$), y supongamos que $K_M > 0$ (respectivamente, $K_M < 0$) sobre un subconjunto denso de M^2 . Entonces,*

(i) *las únicas soluciones enteras sobre M^2 a la ecuación*

$$(1 + |Du|^2)^2 K = (1 + |Du|^2) K_M + \det(D^2u),$$

donde K es una función diferenciable sobre M^2 verificando $K \geq K_M$ ($K \leq K_M$, respectivamente) son las funciones constantes, y $K = K_M$ necesariamente.

(ii) *las únicas soluciones enteras sobre M^2 a la ecuación*

$$(1 - |Du|^2)^2 K = (1 - |Du|^2) K_M - \det(D^2u), \quad |Du|^2 < 1,$$

donde K es una función diferenciable sobre M^2 verificando $K \leq K_M$ ($K \geq K_M$, respectivamente) son las funciones constantes, y $K = K_M$ necesariamente.

Es interesante destacar que el Corolario 5.3.1 no es válido cuando $M^2 = \mathbb{H}^2$ es el plano hiperbólico, puesto que existen soluciones enteras no triviales a la correspondiente ecuación de las superficies con curvatura de Gauss constante,

$$K = \frac{-1}{1 + \varepsilon |Du|^2} + \varepsilon \frac{\det(D^2u)}{(1 + \varepsilon |Du|^2)^2}, \quad (5.18)$$

con la restricción $|Du|^2 < 1$ cuando $\varepsilon = -1$. Para obtener soluciones particulares de esta ecuación es conveniente considerar el modelo de Minkowski del plano hiperbólico. Sea \mathbb{R}_1^3 el espacio de Lorentz-Minkowski, es decir el espacio vectorial \mathbb{R}^3 con coordenadas canónicas $x = (x_0, x_1, x_2)$ dotado de la métrica lorentziana

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2. \quad (5.19)$$

El plano hiperbólico \mathbb{H}^2 es la superficie riemanniana completa, simplemente conexa, con curvatura seccional constante -1 que admite una realización como el hiperboloide de \mathbb{R}_1^3 formado por todos los vectores unitarios temporales apuntando hacia el futuro,

$$\mathbb{H}^2 = \{x \in \mathbb{R}_1^3 : \langle x, x \rangle = -1, x_0 \geq 1\} \subset \mathbb{R}_1^3, \quad (5.20)$$

dotado de la métrica riemanniana inducida de la métrica llana de \mathbb{R}_1^3 .

Ejemplo 5.3.3. Vamos a buscar soluciones no triviales de la ecuación (5.18) sobre \mathbb{H}^2 del tipo $u(x) = f(x_0)$ para una cierta función diferenciable $f(x_0)$ con $x_0 \geq 1$. Dada una función u definida de ese modo, es inmediato comprobar que su gradiente viene dado por $Du(x) = -f'(x_0)e_0^\top$, siendo e_0^\top la parte tangente de $e_0 = (1, 0, 0)$ a lo largo del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , es decir,

$$e_0 = e_0^\top + x_0x. \quad (5.21)$$

En particular, se tiene

$$|Du(x)|^2 = f'(x_0)^2(x_0^2 - 1).$$

Por otro lado, multiplicando ambos términos de la expresión (5.21) por $f'(x_0)$ y tomando derivadas covariantes se tiene

$$D_X Du = f''(x_0)\langle X, e_0^\top \rangle e_0^\top + x_0 f'(x_0) X$$

para cualquier campo vectorial X tangente a \mathbb{H}^2 . Se sigue de aquí que

$$\det(D^2u) = x_0 f'(x_0) f''(x_0) (x_0^2 - 1) + x_0^2 f'(x_0)^2.$$

Por tanto, la ecuación diferencial de un grafo con curvatura de Gauss constante determinado por una función del tipo $u(x) = f(x_0)$ se expresa finalmente como

$$(1 + \varepsilon f'(x_0)^2 (x_0^2 - 1))^2 K = -1 - \varepsilon f'(x_0)^2 (x_0^2 - 1) + \varepsilon (x_0 f'(x_0) f''(x_0) (x_0^2 - 1) + x_0^2 f'(x_0)^2). \quad (5.22)$$

Se puede comprobar fácilmente que

$$f(x_0) = \sqrt{\frac{\varepsilon(1+K)}{-K}} \log \left(\sqrt{1 - K(x_0^2 - 1)} + \sqrt{-K} x_0 \right),$$

con $K < 0$ y $\varepsilon(1+K) > 0$, es solución de la ecuación diferencial (5.22). En particular, tenemos que

- si $\varepsilon = 1$, entonces $-1 < K < 0$, y
- si $\varepsilon = -1$, entonces $K < -1$.

Es bien conocido que en el caso riemanniano, $\varepsilon = 1$, todo grafo entero en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es completo. En particular, los grafos enteros construidos en el Ejemplo 5.3.3 son completos para el caso $\varepsilon = 1$. Sin embargo, cuando el espacio ambiente es lorentziano un grafo entero espacial en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ no es necesariamente completo, como ya hemos visto, por ejemplo, en los Ejemplos 2.3.4, 2.4.1 y 2.4.3 del Capítulo 2. Más aún, con un cálculo directo podemos comprobar que en el Ejemplo 2.4.1 hemos construido grafos enteros espaciales con curvatura de Gauss constante -1 en el espacio producto lorentziano $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ que no son completos. Veamos que los grafos obtenidos en el Ejemplo 5.3.3 también son completos en el caso $\varepsilon = -1$. Para cada $x \in \mathbb{H}^2$ se tiene que

$$|Du(x)|^2 = f'(x_0)^2(x_0^2 - 1) = \frac{-(1+K)(x_0^2 - 1)}{1 - K(x_0^2 - 1)}, \quad \text{con } K < -1,$$

luego

$$\sup_{x \in \mathbb{H}^2} |Du(x)|^2 = \sup_{x_0 \geq 1} f'(x_0)^2(x_0^2 - 1) = 1 - \frac{1}{|K|} < 1.$$

Por tanto la completitud de los grafos queda probada en virtud del Lema 2.3.2.

5.4. Superficies espaciales completas de revolución en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ con curvatura de Gauss constante

En [AEG1] Aledo, Espinar y Gálvez dieron una clasificación de las superficies completas de revolución con curvatura de Gauss constante en el producto riemanniano $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. En particular, clasificaron los grafos enteros de revolución con curvatura de Gauss constante en dicho espacio. Los grafos enteros obtenidos en el Ejemplo 5.3.3 para el caso riemanniano, $\varepsilon = 1$, coinciden con los grafos de revolución construidos por Aledo, Espinar y Gálvez. De hecho, si trabajamos en el modelo de Minkowski para el plano hiperbólico (5.20), y suponemos que el eje de revolución viene dado por $E = \{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, los grafos enteros de revolución en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_c$ son precisamente aquellos grafos enteros que vienen determinados por una función del tipo $u(x) = f(x_0) \in C^\infty(\mathbb{H}^2)$. Esto es debido a que, en general, un grafo es una superficie de revolución si y sólo si la función que lo determina depende únicamente de la distancia de cada punto del grafo al eje de revolución. En nuestro caso, esta distancia depende exclusivamente de la coordenada x_0 puesto que dado $(x, t) = (x_0, x_1, x_2, t) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_c$, como $\langle x, x \rangle = -1$, se tiene que

$$\text{dist}((x, t), E) = (x_0 - 1)^2 + x_1^2 + x_2^2 = (x_0 - 1)^2 + x_0^2 - 1 = 2x_0(x_0 - 1),$$

donde por dist denotamos a la distancia asociada a la métrica del producto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_c$.

Consideremos ahora el problema análogo de clasificación de las superficies espaciales completas de revolución con curvatura de Gauss constante en el espacio producto lorentziano $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$. Por ser \mathbb{H}^2 una superficie simplemente conexa, como consecuencia del Lema 2.1.1 toda superficie espacial completa en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ tiene que ser un grafo entero espacial. Por tanto, las superficies espaciales completas de revolución con curvatura de Gauss constante en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ son los grafos enteros determinados por las soluciones de la ecuación diferencial (5.22). No obstante, clásicamente las superficies de revolución se han estudiado a partir de su curva generatriz. Veamos en nuestro caso que también podemos clasificar las superficies completas de revolución con curvatura de Gauss constante de este modo, y así comprobaremos que la solución obtenida de la ecuación (5.22) es única salvo una traslación en el espacio ambiente.

Como ya hemos hecho antes, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el eje de revolución viene dado por $E = \{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$. Cualquier superficie espacial de revolución se puede obtener rotando alrededor del eje una curva espacial del tipo

$$\alpha \subset \{(x_0, x_1, x_2, t) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}.$$

Además, siempre podemos considerar que la curva α está parametrizada por la longitud de arco. Es decir, podemos suponer que α admite una parametrización del tipo

$$\alpha(u) = (\cosh k(u), \sinh k(u), 0, h(u)),$$

siendo k y h dos funciones diferenciables de modo que $k \geq 0$. Además,

$$\alpha'(u) = (k'(u) \sinh k(u), k'(u) \cosh k(u), 0, h'(u)),$$

y por tanto, como α está parametrizada por la longitud de arco,

$$\|\alpha'(u)\|^2 = k'(u)^2 - h'(u)^2 = 1.$$

La superficie de revolución queda completamente determinada una vez que conocemos la curva α , y viene parametrizada por

$$\Psi(u, v) = (\cosh k(u), \sinh k(u) \cos v, \sinh k(u) \sin v, h(u)). \quad (5.23)$$

Resumiendo, una superficie espacial de revolución en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ viene caracterizada por dos funciones diferenciables k y h , siendo k una función no negativa. Con un cálculo estándar podemos calcular directamente a partir de la parametrización de la superficie de revolución (5.23) la métrica inducida sobre ella, que viene dada por

$$g = du^2 + \sinh^2 k(u) dv^2.$$

Observemos que esta parametrización está bien definida en los puntos para los cuales k es una función positiva. Para aquellos puntos en los cuales $k(u) = 0$ (5.23), Ψ ni siquiera es una inmersión. No obstante, este problema se puede solventar exigiendo a la superficie que *pegue* bien en los puntos donde $k(u) = 0$, que se corresponden precisamente con los puntos en los que la superficie corta al eje de revolución.

Consideremos por un momento una situación más general en la que nos encontremos con una métrica del tipo

$$g = du^2 + f^2(u) dv^2,$$

siendo f una función diferenciable no negativa sobre un intervalo adecuado. A partir de la métrica, que además proviene de una parametrización ortogonal, es inmediato calcular la curvatura de Gauss, y comprobar que viene dada por

$$K = -\frac{f''(u)}{f(u)}. \quad (5.24)$$

La solución general a (5.24) viene dada por

$$f(u) = \begin{cases} A \cos(\sqrt{K}u) + B \sin(\sqrt{K}u), & \text{si } K > 0 \\ Au + B, & \text{si } K = 0, \\ A \cosh(\sqrt{-K}u) + B \sinh(\sqrt{-K}u), & \text{si } K < 0 \end{cases}$$

siendo A y B dos constantes reales. Tengamos en cuenta antes de proseguir que en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ no existen superficies espaciales completas con curvatura de Gauss constante positiva. Esto es debido a que en este caso, por el teorema de Bonnet-Myers, la superficie debería de ser compacta, lo que

entra en contradicción con el Lema 2.1.1 puesto que \mathbb{H}^2 no es una superficie compacta. Por tanto, estudiaremos únicamente los casos $K = 0$ y $K < 0$.

Estudiemos en primer lugar el caso de superficies espaciales completas de revolución con $K = 0$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$. En este caso tendremos

$$\sinh k(u) = Au + B.$$

Como la superficie es un grafo entero, tiene que cortar necesariamente al eje de revolución en el único punto para el cual $k(u) = 0$. Considerando un cambio adecuado del parámetro, podemos suponer que el punto de corte se produce cuando $u = 0$, y por tanto $\sinh k(u) = Au$. En consecuencia,

$$k(u) = \operatorname{arcsinh}(Au).$$

A partir de aquí se obtiene de modo inmediato que

$$k'(u)^2 = \frac{A^2}{1 + A^2u^2}.$$

Tengamos en cuenta ahora que, para que la superficie de revolución sea completa, la función $k(u)$ tiene que estar bien definida para todo $u \geq 0$, pero

$$\lim_{u \rightarrow \infty} k'(u)^2 = 0,$$

luego la curva no puede ser espacial. Concluyendo, no existen superficies espaciales completas de revolución en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ con curvatura de Gauss constante $K = 0$.

Consideremos ahora superficies espaciales completas de revolución con curvatura de Gauss constante $K < 0$. Ahora tenemos

$$\sinh k(u) = A \cosh(\sqrt{-K}u) + B \sinh(\sqrt{-K}u).$$

De nuevo podemos suponer que el punto de intersección con el eje de revolución se da cuando $u = 0$, y por tanto la curva deberá estar definida para todo $u \geq 0$. En este caso se tiene

$$\sinh k(u) = B \sinh(\sqrt{-K}u),$$

es decir,

$$k(u) = \operatorname{arcsinh}(B \sinh(\sqrt{-K}u)).$$

Por tanto

$$k'(u)^2 = \frac{-KB^2 \cosh^2(\sqrt{-K}u)}{1 + B^2 \sinh^2(\sqrt{-K}u)}$$

y

$$h'(u)^2 = k'(u)^2 - 1 = \frac{-KB^2 \cosh^2(\sqrt{-K}u)}{1 + B^2 \sinh^2(\sqrt{-K}u)} - 1.$$

Por otro lado, para que la superficie de revolución así obtenida se pueda extender de un modo diferenciable en el punto de corte con el eje de revolución ha de ser $h'(0) = 0$, y en consecuencia

$$0 = h'(0)^2 = -KB^2 - 1.$$

De este modo se tiene

$$k'(u)^2 = \frac{-K \cosh^2(\sqrt{-K}u)}{-K + \sinh^2(\sqrt{-K}u)},$$

que debe verificar $k'(u)^2 \geq 1$ para que α sea una curva espacial. Estudiemos el comportamiento de esta función, y para ello sea

$$f(u) = \frac{-K \cosh^2(\sqrt{-K}u)}{-K + \sinh^2(\sqrt{-K}u)}. \quad (5.25)$$

Es inmediato comprobar que $f'(u)$ se anula bien cuando $K = -1$, bien cuando $u = 0$. De hecho, en el caso $K = -1$ las expresiones obtenidas se simplifican notablemente obteniendo que $k(u) = \pm u$ y $h(u) = t_0 \in \mathbb{R}$, necesariamente. En este caso, la parametrización de la superficie se simplifica a

$$\Psi(u, v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, \cosh u, t_0), \quad t_0 \in \mathbb{R}$$

que se corresponde con los *slices*.

Supongamos ahora que $K \neq -1$, entonces $u = 0$ es el único punto crítico de f , y además $f(0) = 1$. La curva α , y por tanto la correspondiente superficie de revolución, será espacial cuando $u = 0$ sea un mínimo absoluto de la función (5.25). Pero

$$f''(0) = -2(K + 1) > 0$$

si y sólo si $K < -1$. Luego, concluyendo, para cada constante $K < -1$ existe una superficie espacial de revolución determinada por

$$k(u) = \operatorname{arcsinh} \left(\frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}u) \right)$$

y

$$h(u) = \sqrt{\frac{1+K}{K}} \log \left(\cosh(\sqrt{-K}u) + \sqrt{-K + \sinh^2(\sqrt{-K}u)} \right).$$

Además, la métrica inducida sobre la superficie de la métrica del espacio ambiente viene dada por

$$g = du^2 - \frac{1}{K} \sinh^2(\sqrt{-K}u) dv^2.$$

Resumiendo, los únicos grafos enteros de revolución con curvatura de Gauss constante en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ son los *slices* o satisfacen $K < -1$ y vienen parametrizados por

$$\Psi(u, v) = \left(\sqrt{\frac{-K + \sinh^2(\sqrt{-K}u)}{-K}}, \frac{\sinh(\sqrt{-K}u)}{\sqrt{-K}} \cos v, \frac{\sinh(\sqrt{-K}u)}{\sqrt{-K}} \sin v, h(u) \right). \quad (5.26)$$

Si queremos hallar una expresión estándar de estas superficies como grafos enteros, es decir, si buscamos una función $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{H}^2)$ de modo que

$$\Sigma(w) = \{(x, w(x)), x \in \mathbb{H}^2\}$$

sea una reparametrización de las superficies de revolución obtenidas, bastará con observar que la función w viene dada por

$$w(x) = h(u(x)) \quad \text{con} \quad x_0 = \cosh(k(u(x))).$$

Teniendo en cuenta la expresión explícita que hemos obtenido para la función $k(u)$, con unos sencillos cálculos trigonométricos se comprueba inmediatamente que

$$-K + \sinh^2(\sqrt{-K}u) = -Kx_0^2 \quad \text{y} \quad \cosh^2(\sqrt{-K}u) = 1 - K(x_0^2 - 1),$$

y por tanto

$$w(x) = \sqrt{\frac{1+K}{K}} \log \left(\sqrt{1 - K(x_0^2 - 1)} + \sqrt{-K}x_0 \right).$$

Observamos de este modo que estos grafos coinciden con los obtenidos en el Ejemplo 5.3.3 para el caso lorentziano, luego en particular las superficies que hemos construido son completas. Como consecuencias interesantes de esta clasificación se deduce, por un lado, que la ecuación diferencial (5.22) no tiene más soluciones que las ya obtenidas, y por otro que no existen grafos enteros de revolución con curvatura de Gauss constante no completos en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$.

Bibliografía

- [AbRo] U. Abresch y H. Rosenberg, A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Acta Math.* **193** (2004), 141–174.
- [Ahl] L.V. Ahlfors, Sur le type d'une surface de Riemann, *C.R. Acad. Sci. Paris* **201** (1935), 30–32.
- [Aku] K. Akutagawa, On spacelike hypersurfaces with constant mean curvautre in the de Sitter space, *Math. Z.* **196** (1987), 13–19.
- [Alb2] A.L. Albuje, Global behaviour of maximal surfaces in Lorentzian product spaces, *Differential Geometry and its Applications. Proceedings of the 10th International Conference on DGA2007. World Scientific* (2008), 22–32.
- [Alb1] A.L. Albuje, New examples of entire maximal graphs in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$, *Differential Geom. Appl.* **26** (2008), 456–462.
- [AAA] A.L. Albuje, J.A. Aledo y L.J. Alías, On the scalar curvature of hypersurfaces in spaces with a Killing field, aparecerá en *Adv. Geom.*
- [AlA13] A.L. Albuje y L.J. Alías, Spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the steady state space, aparecerá en *Proc. Amer. Math. Soc.* Disponible en <http://arxiv.org/abs/0709.4398>.
- [AlA11] A.L. Albuje y L.J. Alías, Calabi-Bernstein results for maximal surfaces in Lorentzian product spaces, pendiente de publicación. Disponible en <http://arxiv.org/abs/0709.4363>.
- [AlA12] A.L. Albuje y L.J. Alías, Parabolicity of maximal surfaces in Lorentzian product spaces, pendiente de publicación. Disponible en <http://arxiv.org/abs/0804.1798>.
- [AEG1] J.A. Aledo, J.M. Espinar y J.A. Gálvez, Complete surfaces of constant mean curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **29** (2007), 347–363.
- [AEG2] J.A. Aledo, J.M. Espinar y J.A. Gálvez, Surfaces with constant curvature in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Height estimates and representation, *Bull. Braz. Math. Soc.* **38** (2007), 533–554.

- [ACT] H. Alencar, M. do Carmo y R. Tribuzy, A theorem of Hopf and the Cauchy-Riemann inequality, *Comm. Anal. Geom.* **15** (2007), 283–298.
- [AlDa] L.J. Alías y M. Dajczer, Constant mean curvature hypersurfaces in warped product spaces, *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2) **50** (2007), 511–526.
- [ADR] L.J. Alías, M. Dajczer y J. Ripoll, A Bernstein-type theorem for Riemannian manifolds with a Killing field, *Ann. Global Anal. Geom.* **31** (2007), 363–373.
- [AlPa1] L.J. Alías y B. Palmer, Zero mean curvature surfaces with non-negative curvature in flat Lorentzian 4-spaces, *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **455** (1999), 631–636.
- [AlPa2] L.J. Alías y B. Palmer, A duality result between the minimal surface equation and the maximal surface equation, *An. Acad. Brasil Ciênc.* **73** (2001), 161–164.
- [AlPa3] L.J. Alías y B. Palmer, On the Gaussian curvature of maximal surfaces and the Calabi-Bernstein theorem, *Bull. London Math. Soc.* **33** (2001), 454–458.
- [ARS1] L.J. Alías, A. Romero y M. Sánchez, Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes, *Gen. Relativity Gravitation* **27** (1995), 71–84.
- [ARS2] L.J. Alías, A. Romero y M. Sánchez, Spacelike hypersurfaces of constant mean curvature and Calabi-Bernstein type problems, *Tohoku Math. J.* **49** (1997), 337–345.
- [ARS3] L.J. Alías, A. Romero y M. Sánchez, Spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in certain spacetimes, Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysis, *Nonlinear Anal.* **30** (1997), 655–661.
- [Ber] S.N. Bernstein, Sur une théorème de géométrie et ses applications aux dérivées partielles du type elliptique, *Comm. Inst. Sci. Math. Mech. Univ. Kharkov* **15** (1915-17), 38–45.
- [BGG] E. Bombieri, E. De Giorgi y E. Giusti, Minimal cones and the Bernstein problem, *Invent. Math.* **7** (1969), 243–268.
- [BoGo] H. Bondi y T. Gold, On the generation of magnetism by fluid motion, *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* **108** (1948), 252–270.
- [BrFl] D. Brill y F. Flaherty, Isolated maximal surfaces in spacetime, *Comm. Math. Phys.* **50** (1976), 157–165.
- [Cal] E. Calabi, Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations, *Proc. Symp. Pure Math.*, **15** (1970), 223–230.

- [CaLi] A. Caminha y H.F. de Lima, Complete vertical graphs with constant mean curvature in semi-Riemannian warped products, aparecerá en *Bulletin of the Belgian Math. Soc.* Disponible en <http://arxiv.org/abs/math/0609602>.
- [ChYa] S.Y. Cheng y S.T. Yau, Maximal spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski space, *Ann. of Math.* **104** (1976), 407–419.
- [Che] S.S. Chern, Simple proofs of two theorems in minimal surfaces, *Enseignement Math.* (2) **15** (1969), 53–61.
- [DuHi1] D.M. Duc y N.V. Hieu, Graphs with prescribed mean curvature on hyperbolic spaces, *Manuscripta Math.* **83** (1994), 111–121.
- [DuHi2] D.M. Duc y N.V. Hieu, Graphs with prescribed mean curvature on Poincaré disk, *Bull. London Math. Soc.* **27** (1995), 353–358.
- [DuSa] D.M. Duc y I.M.C. Salavessa, On a class of graphs with prescribed mean curvature, *Manuscripta Math.* **82** (1994), 227–239.
- [EGR] J. Espinar, J.A. Gálvez y H. Rosenberg, Complete surfaces with positive extrinsic curvature in product spaces, aparecerá en *Comment. Math. Helv.*
- [EsRo] J. Espinar y H. Rosenberg, Complete constant mean curvature surfaces and Bernstein type theorems in $M \times \mathbb{R}$, pendiente de publicación.
- [EsRo1] F.J.M. Estudillo y A. Romero, On maximal surfaces in the n -dimensional Lorentz-Minkowski space, *Geom. Dedicata* **38** (1991), 167–174.
- [EsRo2] F.J.M. Estudillo y A. Romero, Generalized maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space \mathbb{L}^3 , *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **111** (1992), 515–524.
- [EsRo3] F.J.M. Estudillo y A. Romero, On the Gauss curvature of maximal surfaces in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space, *Comment. Math. Helv.* **69** (1994), 1–4.
- [FeLo] I. Fernández y F.J. López, Relative parabolicity of zero mean curvature surfaces in \mathbb{R}^3 and \mathbb{R}_1^3 , pendiente de publicación. Disponible en <http://arxiv.org/abs/math/0410435>.
- [Fra] T. Frankel, Applications of Duschek’s formula to cosmology and minimal surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **81** (1975), 579–582.
- [Gal] G.J. Galloway, Cosmological spacetimes with $\Lambda > 0$, Advances in differential geometry and general relativity, 87–101, *Contemp. Math.* **359**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

- [GaRo] J.A. Gálvez y H. Rosenberg, Minimal surfaces and harmonic diffeomorphisms from the complex plane onto a Hadamard surface, pendiente de publicación.
- [Gau] C.F. Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores classis mathematicae* **6** (1828), 99–146.
- [Ger] S. Germain, Mémoire sur la courbure des surfaces, (1831), *J. Reine Angew. Math.*
- [GiTr] D. Gilbarg y N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Berlin, 2001.
- [God] A.J. Goddard, Some remarks on the existence of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **82** (1977), 489–495.
- [Gri] A. Grigor'yan, Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.* **36** (1999), 135–249.
- [HaNi] P. Hartman y L. Nirenberg, On spherical images whose Jacobians do not change signs, *Amer. J. Math.* **81** (1959), 901–920.
- [HaEl] S.W. Hawking y G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [Hil] D. Hilbert, Über Flächen von konstanter Gausscher Krümmung, *Trans. Amer. Math. Soc.* **2** (1901), 87–99.
- [Hoy] F. Hoyle, A new model for the expanding universe, *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* **108** (1948), 372–382.
- [Hub] A. Huber, On subharmonic functions and differential geometry in the large, *Comment. Math. Helv.* **32** (1957), 13–72.
- [Kob] O. Kobayashi, Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space \mathbb{L}^3 , *Tokyo J. Math.* **6** (1983), 297–309.
- [KoNo] S. Kobayashi y K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. II, Interscience, New York, 1969.
- [LaRo] J.M. Latorre y A. Romero, New examples of Calabi-Bernstein problems for some nonlinear equations, *Differential Geom. Appl.* **15** (2001), 153–163.
- [Lic] A. Lichnerowicz, L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps, *J. Math. Pures Appl.* **23** (1944), 37–63.
- [Lie] H. Liebmann, Ueber die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung, *Math. Ann.* **53** (1990), 81–112.

- [MaTi] J.E. Marsden y F.J. Tipler, Maximal hypersurfaces and foliations of constant mean curvature in general relativity, *Phys. Rep.* **66** (1980), 109–139.
- [Mas] W.S. Massey, Surfaces of Gaussian curvature zero in Euclidean 3-space, *Tôhoku Math. J.* **14** (1962), 73–79.
- [McN] L.V. McNertey, *One-parameter families of surfaces with constant curvature in Lorentz 3-space*, Ph.D. thesis, Brown University (USA), 1980.
- [MePe] W. Meeks y J. Pérez, Conformal properties on classical minimal surface theory, *Surv. Differ. Geom.*, IX, 275–335, Int. Press, Somerville, MA, 2004.
- [MeRo] W.H. Meeks y H. Rosenberg, The theory of minimal surfaces in $M \times \mathbb{R}$, *Comment. Math. Helv.* **80** (2005), 811–858.
- [Mil] T.K. Milnor, A conformal analog of Bernstein’s theorem for timelike surfaces in Minkowski 3-space, *Contemp. Math.* **64** (1987), 123–132.
- [MoOn] S. Montaldo y I.I. Onnis, A note on surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, aparecerá en *Boll. Un. Mat. Ital. B*.
- [Mon1] S. Montiel, An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in the de Sitter space and applications to the case of constant mean curvature, *Indiana Univ. Math. J.* **37** (1988), 909–917.
- [Mon2] S. Montiel, Complete non-compact spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter spaces, *J. Math. Soc. Japan*, **55** (2003), 915–938.
- [NeRo] B. Nelli y H. Rosenberg, Minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Bull. Braz. Math. Soc.* **33** (2002), 263–292.
- [Omo] H. Omori, Isometric immersions of Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan* **19** (1967), 205–214.
- [ONe] B. O’Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York, 1983.
- [Onn] I.I. Onnis, *Superfícies em certos espaços homogêneos tridimensionais*, Ph.D. thesis, Universidade Estadual de Campinas (Brazil), 2005.
- [Per] J. Pérez, Parabolicity and minimal surfaces. Joint work with Francisco J. López *Clay Math. Proc.*, 2, Global theory of minimal surfaces, 163–174, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

- [Ram] J. Ramanathan, Complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter space, *Indiana Univ. Math. J.* **36** (1987), 349–359.
- [Rod] O. Rodrigues, Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces, et sur la transformation d’une classe d’intégrales doubles, qui ont un rapport direct avec les formules de cette théorie, *Correspondance sur l’Ec. Polyt.* **3** (1815), 162–182.
- [Rom] A. Romero, Simple proof of Calabi-Bernstein’s theorem on maximal surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996), 1315–1317.
- [Ros] H. Rosenberg, Minimal surfaces in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, *Illinois J. Math.* **46** (2002), 1177–1195.
- [Sch] R. Schoen, Estimates for stable minimal surfaces in three dimensional manifolds, Seminar on minimal submanifolds, 111–126, *Ann. of Math. Stud.*, **103**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1983.
- [ScYa] R. Schoen y S.T. Yau, *Lectures on Differential Geometry*, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology Volume I, International Press, Boston, 1994.
- [Sto] J. Stoker, Developable surfaces in the large, *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961), 627–635.
- [Stu] S. Stumbles, Hypersurfaces of constant mean extrinsic curvature, *Ann. Physics* **133** (1981), 28–56.
- [Wei] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [Yau] S.T. Yau, Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.* **28** (1975), 201–228.

Índice terminológico

- aplicación de Gauss, 97
 - apuntando hacia el futuro, 33, 80, 87
- cilindro en $M^2 \times \mathbb{R}$, 101
- cilindro hiperbólico, 81, 93
- conexión de Levi-Civita de $M^2 \times \mathbb{R}_1$, 32
- conjetura de Goddard, 22, 80
- curvatura de Gauss
 - de M^2 a lo largo de una sup. espacial, 34
 - de una superficie espacial, 34
- curvatura de Ricci de $M^2 \times \mathbb{R}_1$, 33
- curvatura de Riemann, 32
 - de M^2 , 32
 - de $M^2 \times \mathbb{R}_1$, 33
- curvatura media, 35, 98
 - de un *slice*, 78
- de Sitter cusp*, 80
- dominio estrellado, 70
- ecuación de Codazzi, 34, 35, 98
- ecuación de Gauss, 34, 98
 - de una superficie maximal, 36
- espacio 4-dim. de Lorentz-Minkowski, 78
- espacio *steady state*, 22, 79
 - infinito futuro, 79
 - infinito pasado, 79
 - proyección geodésica ortogonal, 83
 - superficie espacial acotada del infinito, 82
 - futuro, 82
 - pasado, 82
- espacio de *de Sitter*, 22, 78
- espacio de Robertson-Walker, 44
- espacio de Robertson-Walker generalizado, 21, 78
- espacio producto, 19, 96
 - lorentziano, 19, 31
 - riemanniano, 19
- espacio tipo *steady state*, 22, 80
 - conexión de Levi-Civita, 89
 - superficie espacial acotada del infinito, 88
 - futuro, 88
 - pasado, 88
- eventualmente, 63
- fórmula de Gauss, 33, 97
- fórmula de Weingarten, 34, 97
- función Θ , 33, 87, 97
- función ángulo, 97
- función *warping*, 21, 78
- función altura, h , 35, 87, 97
- función distancia, 65
- grafo entero, 37, 104
 - aplicación de Gauss, 38, 104
 - aplicación diferencial, 37
 - condición suficiente de completitud, 50
 - curvatura de Gauss, 105
 - curvatura media, 39
 - función Θ , 38, 104
 - métrica inducida, 37, 104
 - operador forma, 38
- grafo entero espacial, 37
- grafo local, 100

- inmersión propia, 44
- operador forma, 34, 97
- parabolicidad, 19, 43, 64
 - criterio de Ahlfors y Blanc-Fiala-Huber, 43
- parabolicidad relativa, 19, 63
- plano hiperbólico
 - modelo del hiperboloide, 50, 106
 - modelo del semiplano, 51
- principio del máximo de Omori-Yau, 85
- recurrencia, 19
- slice*, 21, 40, 78
- superarmonicidad en sentido débil, 63
- superficie *two-sided*, 97
- superficie espacial, 17, 33
 - completa, 44
 - de revolución en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$, 109
 - orientable, 33
- superficie maximal, 17, 36
 - ecuación de, 39
 - solución no trivial, 48
- superficie minimal, 48
 - ecuación de, 48
 - solución no trivial, 48
- teorema de Bernstein, 17
- teorema de Bonnet-Myers, 87
- teorema de Calabi-Bernstein
 - versión no paramétrica, 18
 - versión paramétrica, 18
- teorema egregium de Gauss, 23