



Universidad de Murcia

Facultad de Economía y Empresa

Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa

TESIS DOCTORAL

**MODELOS DE FRONTERA ESTOCÁSTICA
DISTRIBUCIÓN DE LA INEFICIENCIA**

Realizada por:

María Concepción Pérez Cárceles

Dirigida por el profesor:

Dr. D. Juan Gómez García

Murcia, diciembre de 2012

*Porque siempre estuvieron conmigo,
incansables a lo largo del camino.*

A mi apoyo, mi marido

A mi guía, mi director

A mi motivación, mis padres

ÍNDICE DE CONTENIDOS

Introducción

Capítulo 1. Marco conceptual, objetivos e hipótesis

1. Introducción.....	29
2. Concepto de eficiencia. El problema de su medición	30
3. Métodos paramétricos de estimación de la eficiencia	38
3.1. Aproximación de Frontera Estocástica (SFA).....	39
4. Planteamiento de la investigación.....	47
5. Objetivos e hipótesis de la investigación	49
5.1. Objetivos generales.....	49
5.2. Objetivos específicos	49
5.3. Hipótesis.....	51

Capítulo 2. Forma funcional de la función frontera

1. Introducción.....	57
2. Características económicas de la función de producción.....	58
3. Características empíricas de la función de producción.....	62

4. Formas funcionales tradicionales.....	64
4.1. Forma funcional Cobb-Douglas.....	65
4.2. Forma funcional de Elasticidad de Sustitución Constante	70
5. Formas funcionales flexibles	73
5.1. Forma funcional Transcendental Logarítmica o translog	77
5.2. Formas Fourier flexible, generalizada Leontief y cuadrática	82

Capítulo 3. Estimación de funciones frontera

1. Introducción.....	87
2. Estimación de fronteras determinísticas.....	88
2.1. Programación matemática.....	89
2.2. Mínimos Cuadrados Ordinarios Corregidos	92
2.3. Mínimos Cuadrados Ordinarios Modificados.....	93
3. Estimación de fronteras estocásticas.....	94
3.1. Máxima Verosimilitud	97
3.1.1. Modelo half normal	97
3.1.2. Modelo normal truncada.....	103
3.1.3. Modelo exponencial	108
3.1.4. Modelo gamma.....	111
3.2. Método de los Momentos	115

3.2.1. Modelo half normal.....	118
3.2.2. Modelo normal truncada	119
3.2.3. Modelo exponencial.....	120
3.2.4. Modelo gamma	122
4. Estimación de fronteras con datos de panel.....	124
4.1. Eficiencia invariante en el tiempo.....	125
4.2. Eficiencia variante en el tiempo.....	129
4.2.1. Máxima Verosimilitud	129
4.2.2. Método de los Momentos	132
5. Estimación de la eficiencia en costes.....	133

Capítulo 4. Distribución de la componente de ineficiencia

1. Introducción.....	145
2. Planteamiento previo	148
3. Distribución half normal	150
3.1. Frontera de producción.....	151
3.2. Frontera de costes	155
4. Distribución normal truncada.....	158
4.1. Frontera de producción.....	159
4.2. Frontera de costes	162
5. Distribución exponencial	164

5.1. Frontera de producción	165
5.2. Frontera de costes.....	167
6. Distribución gamma.....	170
6.1. Frontera de Producción	171
6.2. Frontera de Costes	173
7. Bondad del ajuste.....	175

Capítulo 5. Aplicación al Sistema Bancario Español

1. Introducción.....	183
2. Descripción de la muestra. Datos y variables	184
3. Estimación de la eficiencia técnica.....	188
3.1. Supuesto half normal	189
Caso 1: Muestra de cajas de ahorros	189
Caso 2: Muestra de bancos	194
Caso 3: Muestra de cajas de ahorros y bancos.....	197
3.2. Supuesto exponencial.....	202
Caso 1: Muestra de cajas de ahorros	202
Caso 2: Muestra de bancos	206
Caso 3: Muestra de cajas de ahorros y bancos.....	210
4. Estimación de la eficiencia en costes	214
4.1. Supuesto half normal	215

Caso 1: Muestra de cajas de ahorros.....	215
Caso 2: Muestra de bancos.....	219
Caso 3: Muestra de cajas de ahorros y bancos	223
4.2. Supuesto exponencial	232
Caso 1: Muestra de cajas de ahorros.....	232
Caso 2: Muestra de bancos.....	236
Caso 3: Muestra de cajas de ahorros y bancos	240
5. Análisis de los resultados.....	250
5.1. Estimación de la ineficiencia técnica.....	259
5.2. Estimación de la ineficiencia en costes	262

Conclusiones y líneas de investigación

Referencias bibliográficas

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1	VARIABLES SELECCIONADAS	186
Tabla 2	Estadísticos descriptivos. Cajas de ahorros, I=44	187
Tabla 3	Estadísticos descriptivos. Bancos, I=30	187
Tabla 4	Estadísticos descriptivos. Cajas de ahorros y bancos, I=74	188
Tabla 5	Modelo frontera estocástica de producción bajo el supuesto half normal. Cajas de ahorros	189
Tabla 6	Modelo frontera estocástica de producción bajo el supuesto half normal. Bancos	194
Tabla 7	Modelo frontera estocástica de producción bajo el supuesto half normal. Cajas de ahorros y bancos	198
Tabla 8	Modelo frontera estocástica de producción bajo el supuesto exponencial. Cajas de ahorros	202
Tabla 9	Modelo frontera estocástica de producción bajo el supuesto exponencial. Bancos	206
Tabla 10	Modelo frontera estocástica de producción bajo el supuesto exponencial. Cajas de ahorros y bancos	210
Tabla 11	Modelo frontera estocástica de costes bajo el supuesto half normal. Cajas de ahorros	215
Tabla 12	Modelo frontera estocástica de costes bajo el supuesto half normal. Bancos	219

Tabla 13	Modelo frontera estocástica de costes bajo el supuesto half normal. Cajas de ahorros y bancos	223
Tabla 14	Modelo frontera estocástica de costes de tipo translog bajo el supuesto half normal. Cajas de ahorros y bancos	227
Tabla 15	Modelo frontera estocástica de costes bajo el supuesto exponencial. Cajas de ahorros	232
Tabla 16	Modelo frontera estocástica de costes bajo el supuesto exponencial. Bancos	237
Tabla 17	Modelo frontera estocástica de costes bajo el supuesto exponencial. Cajas de ahorros y bancos	241
Tabla 18	Modelo frontera estocástica de costes de tipo translog bajo el supuesto exponencial. Cajas de ahorros y bancos	245
Tabla 19	Estimaciones cajas de ahorros	251
Tabla 20	Estimaciones bancos	252
Tabla 21	Estimaciones cajas de ahorros y bancos	253
Tabla 22	Estimaciones cajas de ahorros y bancos. Función translog	255

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1	Eficiencia técnica y asignativa	32
Figura 2	Eficiencia técnica de la unidad P	35
Figura 3	Función frontera estocástica de producción	42
Figura 4	Histograma de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Cajas de ahorros	191
Figura 5	Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Cajas de ahorros	191
Figura 6	Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Cajas de ahorros	192
Figura 7	Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Cajas de ahorros	193
Figura 8	Histograma de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Bancos	195
Figura 9	Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Bancos	195
Figura 10	Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Bancos	196
Figura 11	Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Bancos	197
Figura 12	Histograma de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Cajas de ahorros y bancos	199

Figura 13	Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Cajas de ahorros y bancos	199
Figura 14	Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Cajas de ahorros y bancos	200
Figura 15	Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Cajas de ahorros y bancos	201
Figura 16	Histograma de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Cajas de ahorros	203
Figura 17	Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Cajas de ahorros	204
Figura 18	Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Cajas de ahorros	205
Figura 19	Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Cajas de ahorros	205
Figura 20	Histograma de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Bancos	207
Figura 21	Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Bancos	208
Figura 22	Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Bancos	209
Figura 23	Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Bancos	209
Figura 24	Histograma de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Cajas de ahorros y bancos	211

Figura 25	Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Cajas de ahorros y bancos	212
Figura 26	Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Cajas de ahorros y bancos	213
Figura 27	Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Cajas de ahorros y bancos	213
Figura 28	Histograma de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Cajas de ahorros	216
Figura 29	Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Cajas de ahorros	217
Figura 30	Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Cajas de ahorros	218
Figura 31	Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Cajas de ahorros	218
Figura 32	Histograma de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Bancos	220
Figura 33	Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Bancos	221
Figura 34	Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Bancos	222
Figura 35	Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Bancos	222
Figura 36	Histograma de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Cajas de ahorros y bancos	224

Figura 37	Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Cajas de ahorros y bancos	225
Figura 38	Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Cajas de ahorros y bancos	226
Figura 39	Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Cajas de ahorros y bancos	226
Figura 40	Histograma de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes translog. Cajas de ahorros y bancos	229
Figura 41	Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes translog. Cajas de ahorros y bancos	230
Figura 42	Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes translog. Cajas de ahorros y bancos	231
Figura 43	Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes translog. Cajas de ahorros y bancos	231
Figura 44	Histograma de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Cajas de ahorros	234
Figura 45	Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Cajas de ahorros	234
Figura 46	Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Cajas de ahorros	235
Figura 47	Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Cajas de ahorros	236
Figura 48	Histograma de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Bancos	238

Figura 49	Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Bancos	238
Figura 50	Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Bancos	239
Figura 51	Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Bancos	240
Figura 52	Histograma de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Cajas de ahorros y bancos	242
Figura 53	Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Cajas de ahorros y bancos	243
Figura 54	Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Cajas de ahorros y bancos	244
Figura 55	Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Cajas de ahorros y bancos	244
Figura 56	Histograma de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes translog. Cajas de ahorros y bancos	247
Figura 57	Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes translog. Cajas de ahorros y bancos	247
Figura 58	Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes translog. Cajas de ahorros y bancos	248
Figura 59	Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes translog. Cajas de ahorros y bancos	249
Figura 60	Resultados ineficiencia técnica estimada. Cajas de ahorros	259

Figura 61	Resultados ineficiencia técnica estimada. Bancos	260
Figura 62	Resultados ineficiencia técnica estimada. Cajas de ahorros y bancos	261
Figura 63	Resultados ineficiencia en costes estimada. Cajas de ahorros	262
Figura 64	Resultados ineficiencia en costes estimada. Bancos	263
Figura 65	Resultados ineficiencia en costes estimada. Cajas de ahorros y bancos	264
Figura 66	Resultados ineficiencia en costes estimada. Cajas de ahorros y bancos (translog)	265

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el sistema bancario español se ha visto sometido a fuertes transformaciones debido a causas coyunturales en ocasiones, pero que fundamentalmente obedecen a factores estructurales. Las fuerzas que han impulsado los cambios de la banca y su entorno competitivo pueden resumirse en: desregulación o liberalización financiera, internacionalización o globalización de los mercados financieros, desintermediación y avance tecnológico. El actual contexto de crisis económico-financiera ha puesto en entredicho los beneficios generados por los procesos de desregulación, dados los efectos que una mayor desregulación de la actividad bancaria ha tenido sobre la intensidad de la competencia y, por tanto, sobre la rentabilidad y estabilidad financieras. Además, el incremento generalizado de la cultura financiera de los consumidores ha influido para que sean más sensibles al precio de los productos y servicios financieros y demanden una mejor calidad de servicio. Esta serie de cambios han dado lugar a un nuevo entorno bancario caracterizado por una elevada rivalidad entre las empresas del sector y una competencia creciente procedente de empresas que tradicionalmente no han pertenecido al ámbito bancario.

En este contexto, resulta crucial que las entidades bancarias españolas promuevan las estrategias más adecuadas para desarrollar con éxito su actividad y potenciar las ventajas competitivas con las que mejorar su posición en el sector. Un sector en el que han coexistido dos tipos de entidades financieras, bancos y cajas de ahorros, que presentan numerosas características específicas.

A diferencia de los bancos, las cajas de ahorros plantearon un modelo de negocio basado en la proximidad a su área geográfica de origen, la comercialización de productos bancarios tradicionales y la aplicación de estrategias de crecimiento moderadas. Además, las características especiales de

sus gobiernos implicaban un autoabastecimiento de recursos propios mediante la capitalización de beneficios autogenerados. No obstante, a medida que las cajas de ahorros han ido equiparando su oferta de productos a la de los bancos, las diferencias estructurales han contribuido a dificultar su situación ante problemas como la elevada exposición al sector inmobiliario y la dependencia de los mercados de financiación mayorista, manifestándose en un exceso de capacidad instalada, pérdida de rentabilidad y encarecimiento de la financiación. En consecuencia, ante la caída generalizada de los márgenes financieros de las entidades españolas en la última década, el mantenimiento de una rentabilidad aceptable exige la implantación de una política de incremento de la productividad y control de costes.

La metodología más utilizada a este respecto es el análisis de las economías de escala donde se plantea una función de costes que establece aproximadamente la misma eficiencia para todas las entidades evaluadas. Un grado de dispersión significativo de los costes bancarios entre entidades con escala y combinación de producto similares justificará la propuesta de una función de costes que admita diferencias en la eficiencia.

La importancia del análisis de eficiencia y sus implicaciones adquiere relevancia debido a que mayores niveles de eficiencia permiten aumentos de productividad y con ello ventajas competitivas y creación de valor económico. En las metodologías aplicadas para realizar este análisis, normalmente, no se conocen las tecnologías de producción y las ineficiencias deben medirse en relación a una frontera de costes o producción que se estima a partir de los datos. De este modo, las medidas de ineficiencia se obtienen como desviaciones en costes o en producción tomando como referencia los niveles óptimos estimados en lugar de los determinados por la mejor tecnología teórica.

Son numerosas las aportaciones que tienen como objeto la estimación puntual de la eficiencia en la banca. Algunos de los trabajos más destacables de la última década han estudiado los niveles de eficiencia en distintos países, Altunbas y Chakravarty (2001), Casu y Molyneux (2003), Ataullah *et al.* (2004) y Weill (2009), otros han comparado los resultados alcanzados mediante distintas metodologías, Isik y Hassan (2002), Casu *et al.* (2004), Weill (2004), Fitzpatrick y McQuinn (2007) y Delis *et al.* (2009). Algunos estudios que emplean técnicas no paramétricas son: Lin *et al.* (2007), Ariff y Can (2008), Pasiouras *et al.* (2008), Al Shamsi *et al.* (2009) y Figueira *et al.* (2009). Entre los que, como la investigación que nos ocupa, utilizan metodologías paramétricas, se encuentran aquellos que estiman puntualmente la eficiencia en costes, Girardone *et al.* (2004), Kraft *et al.* (2006) y Kao y Liu (2009) y los que comparan los resultados de diferentes tipos de eficiencia, Färe *et al.* (2004), Chen *et al.* (2005) y Portela y Thanassoulis (2007). En el caso del sistema bancario español, destacan los estudios de eficiencia de Maudos y Pastor (2000), Kumbhakar *et al.* (2001), Carbó *et al.* (2002, 2004), Maudos *et al.* (2002), Tortosa-Ausina (2002, 2003), Maudos y Pastor (2003) y Gómez-Gallego (2012).

Aigner *et al.* (1997) y Meeusen y van den Broeck (1977) introdujeron por primera vez una función estocástica de producción en la aproximación paramétrica. Esta aproximación modifica la función de producción determinística para permitir la inclusión de ineficiencias y de un término de error aleatorio. Esta componente aleatoria incluye diferencias de corto plazo debidas a la suerte que, temporalmente, sitúan a una unidad en una posición de producción superior o inferior, así como medidas de error debidas a la falta de especificación. Para diferenciar la componente de ineficiencia de la puramente aleatoria en el término de error, se utilizan diferentes supuestos distribucionales. Puesto que las ineficiencias sólo disminuyen la producción por debajo de los niveles de la frontera y las fluctuaciones aleatorias pueden tanto

incrementar como disminuir la producción, se suponen distribuciones asimétricas para la ineficiencia y simétricas en el caso de las fluctuaciones aleatorias. En lo que se refiere al término de efectos de ineficiencia, los estudios pioneros citados anteriormente establecen el supuesto de una distribución exponencial o half normal, mientras que Stevenson (1980) y Greene (1990) proponen distribuciones más flexibles, como la normal truncada y la gamma, respectivamente.

Son numerosos los estudios que utilizan la aproximación de frontera estocástica para estimar la ineficiencia de instituciones bancarias y no justifican el supuesto distribucional establecido sobre el término de ineficiencia, es más, la mayoría ni siquiera lo especifica. Algunas excepciones son Yuengert (1993), que utilizó los supuestos gamma y half normal y Mester (1996), que concluyó la robustez de sus resultados bajo los supuestos half normal, normal truncada y exponencial. No obstante, Greene (1990) argumentó que distribuciones alternativas a la half normal podrían ser más apropiadas para aproximar la eficiencia de las instituciones financieras mientras que, según Behr y Tente (2008), el supuesto más utilizado en la literatura es el half normal debido a que el incremento de flexibilidad que experimentan los modelos con distribuciones de dos parámetros no compensa las dificultades que plantea su aplicación práctica.

Aunque no existe consenso en la literatura sobre la forma distribucional más apropiada para el término de ineficiencia, son numerosos los estudios que defienden que el establecimiento de un supuesto distribucional de forma arbitraria podría llevar a errores significativos en la estimación. Greene (1993) concluyó que el supuesto distribucional importa considerablemente en base a las diferencias encontradas en los parámetros estimados y en los resultados de eficiencia obtenidos bajo cada supuesto, Bauer *et al.* (1998) indicaron que la arbitrariedad en la elección de la distribución puede generar errores significativos en las estimaciones individuales de la eficiencia, de hecho

Kumbhakar y Lovell (2000) presentaron correlaciones de las estimaciones de ineficiencia en costes que oscilaron desde 0.747, entre exponencial y gamma, hasta 0.980, entre half normal y normal truncada. Por lo tanto, la importancia del problema del supuesto distribucional de la ineficiencia está justificada, especialmente, porque los modelos que establecen diferentes supuestos distribucionales para la ineficiencia generan resultados empíricos diferentes.

Las recientes aportaciones de Wang y Schmidt (2009) y Bhandari (2011) desarrollaron la expresión de la distribución teórica de la ineficiencia técnica estimada cuando el término de ineficiencia se supone distribuido según una half normal y una normal truncada con el objetivo de contrastar la validez de los respectivos supuestos. Para ello, se realiza una comparación entre la distribución empírica u observada de la ineficiencia estimada y la distribución teórica que ésta debería presentar si los supuestos distribucionales del modelo son correctos. En esta línea, Wang *et al.* (2011) plantearon utilizar el test de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov para indicar si la discrepancia entre las distribuciones observada y teórica de la ineficiencia estimada es o no significativa y, por lo tanto, si el supuesto distribucional establecido a priori en el modelo de frontera estocástica es o no el apropiado.

Puesto que, como se ha expuesto, los supuestos distribucionales del modelo deberían validarse contrastando el ajuste entre la distribución observada de la ineficiencia estimada y la distribución teórica que la ineficiencia estimada debería tener si el supuesto distribucional fuese correcto, en esta tesis se plantea como objetivo conocer la expresión de esta última bajo diferentes supuestos distribucionales.

La tesis está organizada en dos partes diferenciadas. La primera parte engloba el marco teórico de la investigación y la segunda consiste en un marco empírico en el que se plantea una aplicación del desarrollo teórico obtenido.

El marco teórico amplía la metodología existente sobre los supuestos distribucionales half normal y normal truncada presentando las expresiones de la ineficiencia estimada y su distribución teórica para una función de costes y obtiene las distribuciones teóricas correspondientes al supuesto exponencial en modelos de frontera estocástica de producción y costes.

El marco experimental plantea y resuelve el problema de selección de la distribución del término de ineficiencia proponiendo la distribución half normal, por ser la usada más comúnmente en la literatura, y la exponencial, cuyo desarrollo metodológico se ha realizado en esta investigación.

La aplicación de la técnica desarrollada se realiza sobre una muestra de datos del sistema bancario español en el año 2009. Como se ha explicado en esta introducción, se trata de un sector en el que la obtención de una estimación precisa de la ineficiencia tiene especial relevancia en la actualidad, dado que se considera un indicador para la toma de decisiones estratégicas de índole empresarial, institucional e incluso político. Concretamente, Pérez-Cárceles *et al.* (2012) y Gómez-Gallego *et al.* (2012) demostraron la importancia de la ineficiencia en costes estimada y de su distribución, respectivamente, como indicadores de inestabilidad financiera en el sistema bancario español. De ahí el interés por perfeccionar la aproximación de frontera estocástica aportando el marco teórico que permita justificar la elección del supuesto distribucional establecido a priori sobre el término de ineficiencia.

Capítulo 1

MARCO CONCEPTUAL, OBJETIVOS E HIPÓTESIS

1. Introducción

El análisis económico del comportamiento de las empresas presenta con frecuencia un supuesto básico que consiste en la maximización del beneficio, de manera que las empresas se identifican como eficientes. Sin embargo, en la realidad se asume la existencia de ineficiencia debido a que, aunque el objetivo común de las empresas sea la maximización del beneficio, no todas lo alcanzan.

La maximización del beneficio exige que una empresa tome correctamente las tres decisiones siguientes (Álvarez, 2001):

Elegir el output que maximice el beneficio de entre todos los niveles de producción posibles.

De entre las combinaciones de inputs que producen el nivel de output anterior, seleccionar la que minimiza el coste de producción.

Producir el output elegido con la cantidad mínima de inputs posible.

En base a estas decisiones, se pueden distinguir tres tipos de eficiencia de manera que una empresa puede presentar cualquier combinación de los mismos:

Eficiencia de Escala: cuando la empresa produce en una escala de tamaño óptimo que permite maximizar el beneficio.

Eficiencia Asignativa: cuando la empresa combina los inputs en la proporción que minimiza su coste de producción.

Eficiencia Técnica o Tecnológica: cuando la empresa obtiene el máximo output posible para la combinación de inputs seleccionada.

La medición de la eficiencia de una empresa consiste en comparar su situación real con la situación óptima alcanzable por la misma. El problema radica en que esa situación óptima es desconocida, ya que no se tiene información exacta sobre las condiciones de la empresa así como del mercado en que se desenvuelve. Farrell (1957) solucionó esta cuestión determinando empíricamente una referencia a partir de lo que hacen otras empresas parecidas. La eficiencia de una unidad se mide comparándola con una referencia o frontera obtenida a partir de las mejores prácticas observadas. Es, por tanto, un concepto de eficiencia relativo.

La obtención de la frontera de mejores prácticas ha dado lugar a múltiples metodologías en función del objetivo del análisis y de la disponibilidad de la información requerida en cada método. El presente capítulo tiene por objetivo definir los diferentes tipos de eficiencia, presentar las aproximaciones metodológicas para llevar a cabo su medición, señalar las fortalezas y debilidades de cada técnica y exponer los argumentos que justifican la selección de una de ellas para esta investigación.

2. Concepto de eficiencia. El problema de su medición

La definición del marco conceptual del término de eficiencia es una tarea complicada debido a las múltiples acepciones que existen en la teoría económica. Por ejemplo, en un contexto macroeconómico, un sistema económico se considera eficiente cuando ha alcanzado una situación en la que ninguna entidad puede mejorar su posición sin empeorar la de otro. Sin embargo, en un contexto microeconómico, como el que nos ocupa, el concepto de eficiencia debe calcularse en relación con los recursos empleados por una empresa para realizar su producción. En este caso, la función de producción

representa la relación técnica que define las posibilidades de transformación eficiente, dado el conjunto de técnicas factibles. En la realidad, puesto que la función de producción suele ser desconocida, se utilizan los datos observados de niveles de input y output para construir una función empírica.

Los pioneros en la medición de la eficiencia fueron Koopmans (1951) y Debreu (1951), siendo este último quien ofreció la primera medida concreta de eficiencia técnica. Para Koopmans una unidad es técnicamente eficiente si y solo si el aumento de algún output o la disminución de algún input sólo es posible disminuyendo algún otro output o aumentando algún otro input, es decir, si la unidad desarrolla su producción en la frontera de posibilidades de producción. Debreu completa este desarrollo proponiendo una medida radial denominada “coeficiente de utilización de recursos” para calcular el grado de eficiencia con que actúa una unidad productiva determinada. Se trata de una ratio de orientación input que establece como medida de la eficiencia técnica “la máxima reducción equiproporcional posible en todos los inputs para un nivel dado de outputs”.

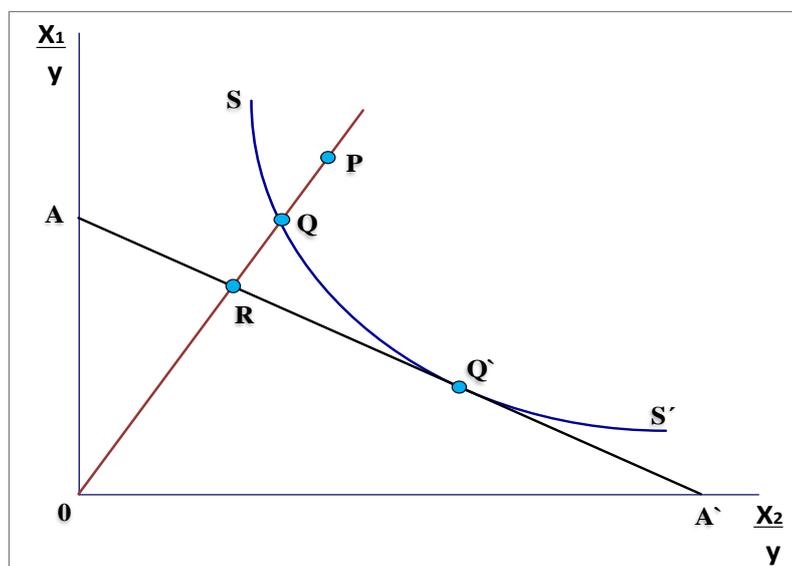
Färe *et al.* (1994) destacaron como principal ventaja de estas medidas radiales su independencia de las unidades de medida. Por otro lado, presentaron el inconveniente de asociar la eficiencia con la máxima contracción posible de inputs (o aumento proporcional de outputs) cuando pueden existir holguras en algunos de ellos, algo que no ocurre con la definición más genérica de Koopmans. De este modo, una unidad puede ser considerada eficiente según el planteamiento de Debreu y, sin embargo, ineficiente según la definición más amplia de Koopmans.

Los trabajos de Koopmans y Debreu fueron continuados por Farrell (1957), quien logró sentar las bases conceptuales a partir de las cuales se han propuesto los distintos métodos de medición de la eficiencia. Farrell inició su trabajo

estableciendo una diferenciación entre lo que denomina Eficiencia Técnica, la habilidad para producir la mayor cantidad de output a partir de un input dado, y Eficiencia Asignativa, la medida en que se combinan los factores en una proporción correcta dados sus precios. La combinación de ambas proporciona una medida de Eficiencia Económica.

Farrell se apoya en el análisis gráfico que se reproduce continuación para calcular las medidas de eficiencia asociadas a ambos conceptos. En la figura 1 se presenta el caso de un ejemplo con rendimientos constantes de escala y orientación output en el que las unidades usan dos inputs, x_1 y x_2 , para producir un único output y . Para medir la eficiencia técnica, se establece una isocuenta unitaria de entidades completamente eficientes SS' .

Figura 1. Eficiencia técnica y asignativa



Fuente: Farrell (1957)

A partir de esta isocuenta, una entidad que utiliza la combinación de factores productivos representada por el punto P para producir una unidad de output, presenta una ineficiencia técnica que puede calcularse mediante la distancia QP ,

que es la cantidad en la que podrían reducirse proporcionalmente todos los inputs sin reducir output. La ratio QP/OP representa el porcentaje en que podrían reducirse proporcionalmente todos los inputs para alcanzar una producción técnicamente eficiente. En consecuencia, como medida de la eficiencia técnica, Farrell propone $1-QP/OP$, lo que proporciona un indicador del grado de ineficiencia técnica de la unidad, el cociente OQ/OP . La eficiencia técnica toma un valor entre cero y la unidad, de manera que un valor igual a uno indica que la unidad es eficiente técnicamente, por ejemplo, el punto Q.

La figura 1 también permite establecer una medida de la eficiencia asignativa. Si se supone que los precios de los factores productivos están representados por la pendiente de la recta AA' , el punto Q' resulta eficiente asignativamente porque el coste es mínimo. Tanto Q como Q' son técnicamente eficientes (están en la isocuanta) pero los costes de producción en Q' son tan sólo una fracción, OR/OQ , de los costes de producción en Q. Precisamente ese cociente es el que se identifica con la eficiencia precio o asignativa de Q. Puesto que la eficiencia asignativa mide exclusivamente el exceso de costes en que se está incurriendo por combinar los inputs de una forma diferente a la óptima, la fracción anterior también mide la eficiencia asignativa de la entidad P. Al igual que la eficiencia técnica, la eficiencia asignativa varía entre cero y uno, estando más próxima a la unidad conforme más eficiente es la entidad analizada.

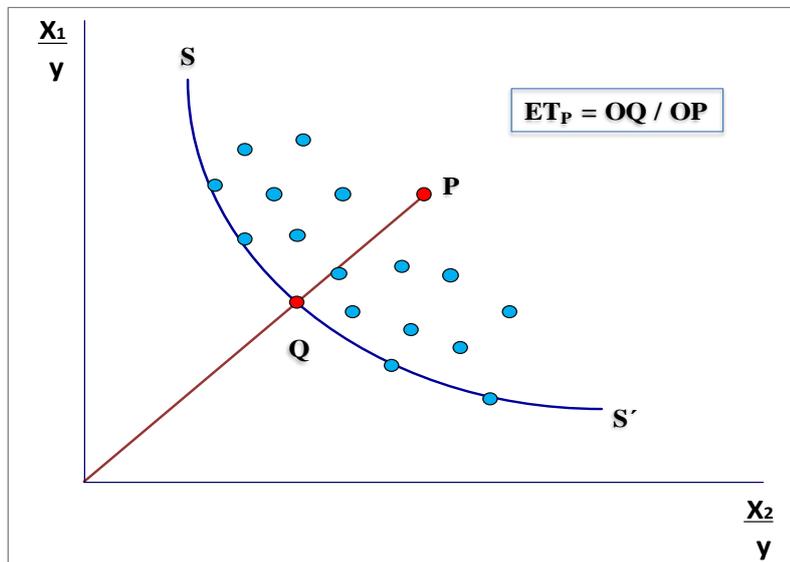
Por último, se define la eficiencia económica o total mediante la ratio OR/OP , que puede obtenerse como el producto de la eficiencia técnica y la eficiencia asignativa y coincide con la proporción de los costes de una unidad que fuese completamente eficiente. Se trata de un concepto más amplio que el de eficiencia técnica porque, además de medir los niveles de inputs en relación a los niveles de outputs, tiene en cuenta la elección óptima de los niveles y combinación de inputs y/o outputs dados los precios de mercado para optimizar el objetivo económico, normalmente minimización de costes o

maximización de beneficios. La eficiencia económica implica tanto eficiencia técnica como asignativa, es decir, los niveles óptimos de inputs y/o outputs se seleccionan en base a la tecnología de producción y a los precios de mercado. Algunas unidades que son eficientes técnicamente son ineficientes económicamente, dependiendo de la relación entre las capacidades de gestión de la unidad en la optimización del uso de la tecnología y la respuesta a las señales de mercado. En cuanto a la disponibilidad de datos, mientras que el cálculo de la eficiencia técnica requiere únicamente datos sobre inputs y outputs, el de la eficiencia económica requiere también datos de los precios de inputs y outputs.

Estas medidas de eficiencia suponen conocida la función de producción de la unidad eficiente, representada por la isocuanta SS' . Las situaciones reales sin embargo, no se suelen caracterizar por el conocimiento de esas relaciones técnicas, que deben estimarse a partir de las observaciones muestrales.

Farrell también consideró este problema en su trabajo y propuso un método de estimación de la función de producción empírica a partir de los datos de las entidades implicadas en la evaluación. La figura 2 representa mediante puntos las combinaciones de factores utilizadas por diferentes unidades productivas para obtener una unidad de output. La isocuanta que se va a estimar debe cumplir dos condiciones: ser convexa y no tener pendiente positiva en ningún punto. La primera indica que, si dos puntos se pueden alcanzar en la práctica, entonces también se podrá obtener cualquier otro que sea una media ponderada de aquellos; mientras que la segunda asegura que el aumento de los factores utilizados no implicará nunca una reducción en la cantidad de producto.

Figura 2. Eficiencia técnica de la unidad P



Fuente: Farrell (1957)

A partir de estas condiciones es fácil deducir que la isocuanta eficiente está representada por la curva SS' , es decir, por el conjunto de puntos más próximos al origen, que representan las unidades más eficientes en términos relativos que pueden unirse a través de una curva convexa sin pendiente positiva en ningún punto.

Determinada la isocuanta eficiente, el proceso de medición de la eficiencia de cualquier unidad consiste en comparar cada entidad no perteneciente a la isocuanta con otra entidad eficiente que utilice los factores productivos en la misma proporción, esto es, que se encuentre en el mismo radio vector desde el origen. En general, esa comparación se realizará con unidades hipotéticas que se encuentran sobre la isocuanta eficiente empleando los factores en la misma proporción pero que no se corresponden necesariamente con una observación real. Así, en la figura anterior, la eficiencia del punto P se mide comparando los factores que utiliza con los de la unidad ficticia Q.

Los modelos de evaluación de la eficiencia pueden clasificarse en dos grandes grupos, dependiendo de que la función de producción sea o no de tipo frontera. Los modelos de tipo frontera estiman el valor máximo de output que puede alcanzarse en proporción a los inputs según las unidades más eficientes de la muestra. De otra forma, los modelos tipo no frontera calculan el valor medio del output que puede obtenerse dado un nivel de input.

Mediante el enfoque no frontera, la referencia se construye con la información proporcionada por todas las unidades que componen la muestra, incluyendo a aquellas que presentan unos peores resultados. Sin embargo, los modelos tipo frontera reflejan mejor el comportamiento maximizador al que se refiere la eficiencia porque comparan el comportamiento de unas unidades (ineficientes) con el de las unidades que alcanzan la máxima producción y, por tanto, se sitúan en la frontera.

Esta investigación aplica un modelo tipo frontera para medir la eficiencia por lo que, a continuación, se define el concepto de función frontera y se exponen las principales características de las distintas técnicas aplicables al cálculo de la misma.

El concepto de función de producción frontera se interpreta como la relación técnica que define el máximo nivel de output que se puede obtener dado un nivel de input y una tecnología. Es decir, la función frontera representa el límite máximo de producción que sirve de referencia para el cálculo de la ineficiencia del resto de las unidades observadas. Sin embargo, como la frontera no es observable en la práctica, normalmente se calcula a partir de las mejores prácticas observadas de entre todas las unidades evaluadas.

Las aproximaciones utilizadas en la estimación empírica de la frontera, en general, suelen dividirse en paramétricas y no paramétricas, en función de que se requiera o no especificar una forma funcional para la misma.

En la actualidad, no existe acuerdo sobre el método más apropiado para determinar la frontera de mejor práctica sobre la que medir las eficiencias relativas, ya que ambos grupos de aproximaciones pueden presentar ventajas e inconvenientes. En este sentido, los métodos no paramétricos no consideran la existencia de un error aleatorio en el proceso de estimación de la eficiencia, identificando como ineficiencia cualquier desviación aleatoria de la frontera eficiente. Del mismo modo, pueden existir confusiones entre efectos de eficiencia y errores en las aproximaciones paramétricas debido a que se impone una forma funcional concreta a la frontera que puede no estar especificada correctamente.

Berger y Humphrey (1997) realizaron comparaciones entre clasificaciones de eficiencia paramétricas y no paramétricas, así como entre las diferentes aproximaciones paramétricas y no paramétricas, obteniendo diferencias significativas en las clasificaciones de las mismas instituciones financieras. Posteriormente, Bauer *et al.* (1998) argumentaron una diferenciación en el tipo de eficiencia calculado por cada metodología. Según su estudio, la mayoría de los primeros modelos frontera presentaban análisis de eficiencia técnica, tanto si eran de tipo no paramétrico (Charnes *et al.*, 1978) como paramétrico (Aigner *et al.*, 1977). Sin embargo, actualmente se observa una diferenciación en los conceptos de eficiencia que suele calcular cada metodología. Los estudios no paramétricos continúan calculando eficiencia técnica, además de eficiencia en costes, beneficios o ingresos (Gómez-Gallego, 2012), mientras que las metodologías no paramétricas se centran en la eficiencia económica debido, en parte, a la multiplicidad de outputs interviniente en el análisis de la eficiencia técnica.

El estudio que se presenta a continuación se aplica al ámbito del sector bancario español. Puesto que, en el ámbito de las instituciones financieras, los precios existen y la minimización del coste constituye un importante objetivo, el concepto de eficiencia que resulta más apropiado es el económico. En consecuencia, se ha seleccionado una metodología de tipo paramétrico para estimar la eficiencia, concretamente, la Aproximación de Frontera Estocástica.

3. Métodos paramétricos de estimación de la eficiencia

En la metodología paramétrica la función frontera se estima a partir de las mejores prácticas observadas en la muestra de unidades evaluadas. Para ello, es necesario especificar una determinada relación funcional entre las variables así como suponer la distribución de las componentes que identifican las ineficiencias y variaciones aleatorias, en su caso.

La principal ventaja de estos métodos radica en que contemplan la existencia de un término de error puramente aleatorio que recoge el efecto de variables que no están bajo el control de la unidad productiva, con lo que se evita su inclusión en el término de ineficiencia.

Las distintas metodologías paramétricas difieren en los supuestos realizados sobre la forma funcional de la frontera, el tratamiento del error aleatorio y las distribuciones supuestas para la ineficiencia y el error aleatorio. Se distinguen dos grandes grupos: métodos determinísticos (Aigner y Chu, 1968), que atribuyen a la ineficiencia toda desviación de las unidades respecto a la frontera, y métodos estocásticos, que contemplan tanto la ineficiencia como el error aleatorio como causantes de las desviaciones. Entre los métodos estocásticos cabe destacar la Aproximación de Frontera Estocástica (SFA), propuesta de

forma simultánea por Aigner *et al.* (1977) y Meeusen y van den Broeck (1977), que ha sido la más utilizada en la literatura, así como la Aproximación de Frontera Gruesa (TFA), propuesta por Berger y Humphrey (1991), y la Aproximación de Libre Distribución (DFA), desarrollada por Berger (1993).

La Aproximación de Frontera Gruesa consiste en estimar dos funciones frontera distintas, una para las unidades del cuartil de costes inferior, cuyas eficiencias promedio se suponen mayores, y otra para las unidades del cuartil de costes superior. Según los supuestos establecidos, los términos de error dentro de los cuartiles de coste inferior y superior reflejan medidas de error aleatorio, mientras que las diferencias entre ellos se deben a ineficiencias y factores de mercado.

La Aproximación de Libre Distribución, a diferencia de SFA, no impone una forma específica para la distribución de la ineficiencia; sin embargo, supone un nivel de eficiencia constante para cada unidad en el período de estudio. El estimador de ineficiencia de cada unidad se obtiene como la diferencia entre su residuo promedio y el de la unidad que pertenece a la frontera eficiente, ya que se supone que el promedio del error aleatorio tiende a cero a lo largo del período.

3.1. Aproximación de Frontera Estocástica (SFA)

El modelo de frontera estocástica supone una modificación de la frontera determinística que, aunque presenta mayor complejidad en su estimación, permite reconocer la posible influencia de perturbaciones aleatorias en el análisis. De hecho, las funciones frontera de tipo determinístico presentan como principal característica que atribuyen toda la desviación de la frontera a la ineficiencia.

Una función frontera determinística de producción puede escribirse como:

$$y_i = f(x_i; \beta) \cdot ET_i \quad (1.3.1)$$

donde y_i representa el output de la unidad i , $i = 1, \dots, I$, x_i es el vector de los N inputs utilizados por la unidad i , $f(x_i; \beta)$ es la frontera de producción y β es un vector de parámetros a estimar. ET_i es la eficiencia técnica orientada al output de la unidad i y se define como el ratio del output observado sobre el máximo output alcanzable:

$$ET_i = \frac{y_i}{f(x_i; \beta)} \quad (1.3.2)$$

donde el output alcanzado por la unidad de producción i alcanza el valor máximo de $f(x_i; \beta)$ si, y solo si, $ET_i = 1$. En otro caso, $ET_i < 1$ proporciona una medida del déficit del output alcanzado por la unidad i sobre el máximo alcanzable.

Las fronteras de producción determinísticas no reconocen la naturaleza estocástica de la producción, ya que no recogen el efecto que sobre la producción puedan ejercer perturbaciones aleatorias no controlables por la unidad, atribuyendo a ineficiencia técnica la totalidad del déficit del output observado, y_i , sobre el máximo output alcanzable, $f(x_i; \beta)$.

Surge la necesidad de desarrollar un modelo más realista que atribuya las variaciones en el output no asociadas con variaciones en los inputs, a una combinación de efectos aleatorios y de ineficiencia.

La Aproximación de Frontera Estocástica modifica la función de producción o costes de tipo determinístico para permitir la inclusión de error aleatorio en la perturbación. De este modo, la perturbación estocástica compuesta incluye una

componente de efectos de ineficiencia y otra de errores aleatorios. Esta última incluye diferencias de corto plazo debidas a la suerte, así como a errores debidos a la exclusión de variables explicativas o a falta de especificación.

La especificación de un modelo de frontera de producción estocástica puede expresarse como sigue:

$$y_i = f(x_i; \beta) \cdot \exp[v_i] \cdot ET_i \quad (1.3.3)$$

donde $[f(x_i; \beta) \cdot \exp[v_i]]$ es la frontera de producción estocástica, que incluye una parte determinística $f(x_i; \beta)$ y una parte estocástica $\exp[v_i]$, que representa el efecto de las perturbaciones aleatorias en cada unidad. En este caso, la eficiencia técnica se define como:

$$ET_i = \frac{y_i}{f(x_i; \beta) \cdot \exp[v_i]} \quad (1.3.4)$$

Según esta ratio, y_i alcanza el valor máximo de $[f(x_i; \beta) \cdot \exp[v_i]]$ si, y sólo si, $ET_i = 1$. En otro caso, $ET_i < 1$ indica la proporción del máximo output alcanzada por la unidad i .

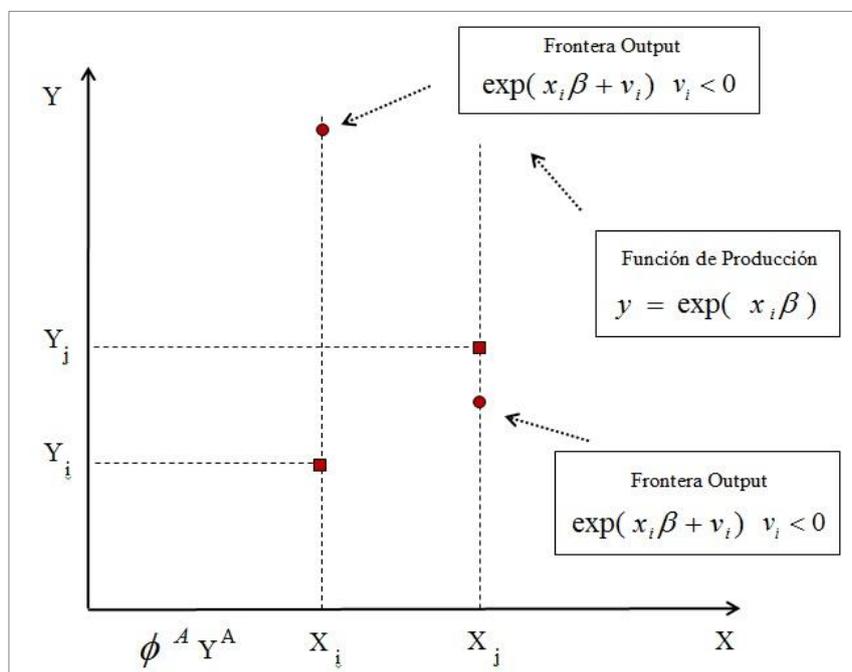
Puesto que las ineficiencias sólo incrementan los costes o reducen la producción con respecto a los niveles de la frontera y , en cambio, las fluctuaciones aleatorias pueden tanto incrementarlos como disminuirlos, se establecen supuestos de distribuciones asimétricas para el término de ineficiencia y simétricas para las fluctuaciones aleatorias.

Aigner *et al.* (1977) y Meeusen y van den Broeck (1977) propusieron independientemente la función de producción de la frontera estocástica y establecieron el supuesto de errores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) según una normal con media cero y varianza constante, e

independientes del término de efectos de ineficiencia, que se supone i.i.d. según una distribución exponencial o half normal.

La figura 3 representa la componente determinística de un modelo frontera de producción, $y_i = \exp[x_i\beta]$, suponiendo rendimientos de escala decrecientes. Los valores observados de input y output se identifican con un cuadrado y los valores del output frontera estocástica, $y_i^* = \exp[x_i\beta + v_i]$, con un círculo. Estos últimos, y_i^* , y_j^* , no se observan porque los errores aleatorios, v_i y v_j , no son observables; pero pueden encontrarse tanto sobre la función de producción, cuando v_i es positivo, como bajo la misma, cuando v_j es negativo. Los outputs observados pueden ser mayores que la parte determinística de la frontera si los errores aleatorios son mayores que los efectos de ineficiencia (por ejemplo, $y_i > \exp[x_i\beta]$ si $v_i > u_i$).

Figura 3. Función frontera estocástica de producción



Fuente: Coelli *et al.* (1998)

Las primeras estimaciones de funciones de producción estocásticas solamente calculaban la eficiencia media de la muestra, no siendo posible obtener una medida de la eficiencia de cada empresa. Jondrow *et al.* (1982) encontraron una medida de la eficiencia individual de cada unidad basada en la media (o moda) del término de ineficiencia condicionada a la estimación de la perturbación estocástica compuesta. De esta forma, es posible establecer clasificaciones de eficiencia y realizar comparaciones entre las unidades.

**PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN,
OBJETIVOS E HIPÓTESIS**

4. Planteamiento de la investigación

La aproximación de frontera estocástica es una metodología que ha sido desarrollada y aplicada durante las tres últimas décadas, especialmente en áreas de economía. Su objetivo principal es el de reconocer la posibilidad de que las unidades evaluadas puedan situarse por encima o por debajo de la frontera debido a la influencia de factores de tipo estocástico. Desde el modelo original propuesto por Aigner *et al.* (1977) y Meeusen y van den Broeck (1977), se han sucedido numerosos desarrollos en distintos aspectos del modelo: estimación individual de la ineficiencia, métodos de estimación, forma funcional de la frontera, supuestos distribucionales, variabilidad temporal del término de ineficiencia, ...

Recientemente, los avances relacionados con la validez del supuesto distribucional impuesto al término de efectos de ineficiencia han sido numerosos y de impacto considerable. En este contexto, esta investigación aporta los desarrollos metodológicos necesarios para analizar la validez del supuesto en modelos tanto de producción como de costes en los casos de las distribuciones half normal, normal truncada y exponencial. Asimismo, aporta evidencia sobre esta cuestión en el sistema bancario español, un sector de la economía cuyos niveles de ineficiencia han sido evaluados en numerosas ocasiones mediante SFA pero, sin embargo, no se había contrastado la validez del supuesto distribucional del término de ineficiencia.

Algunas de las aportaciones metodológicas más relevantes en este ámbito son el desarrollo del método de estimación por máxima verosimilitud para una función de costes cuando la ineficiencia se supone distribuida conforme a una normal truncada y a una gamma (Stevenson, 1980), el procedimiento de estimación de puntuaciones individuales de ineficiencia para una función de

producción bajo los supuestos distribucionales half normal y exponencial (Jondrow *et al.*, 1982) y gamma (Greene, 1990) del término de ineficiencia, el método de máxima verosimilitud para una función de producción bajo los supuestos distribucionales half normal, exponencial, normal truncada y gamma, así como el procedimiento de estimación de ineficiencias individuales en los dos últimos supuestos (Greene, 1993), la expresión de la distribución teórica de la ineficiencia estimada para una frontera de producción bajo los supuestos half normal (Wang y Schmidt, 2009) y normal truncada (Bhandari, 2011) y las propuestas de tests de bondad de ajuste (Wang *et al.*, 2011).

Esta investigación se propone evaluar el efecto que el establecimiento de un determinado supuesto distribucional sobre el término de ineficiencia puede tener sobre la estimación del modelo de frontera estocástica. Para ello, es necesario homogeneizar las aportaciones teóricas existentes en la literatura y obtener los desarrollos metodológicos que las complementen de manera que sea posible realizar las comparaciones entre los modelos bajo los distintos supuestos distribucionales del término de ineficiencia, tanto para una frontera de producción como de costes.

Finalmente, se realiza una evaluación de la eficiencia del sistema bancario español en el año previo al inicio del reciente proceso de reordenación del sector. En este contexto, resulta crucial que las entidades adopten estrategias óptimas que les dirijan con éxito a la mejora de sus ventajas competitivas y de su situación en el sistema. El objetivo consiste en argumentar la importancia del supuesto distribucional del término de ineficiencia en los resultados empíricos de ineficiencia estimada, ya que éstos suponen una referencia para establecer las estrategias de mejora.

La investigación plantea tres objetivos generales relacionados con el desarrollo metodológico en el proceso de selección del supuesto distribucional, la

evaluación del efecto del supuesto distribucional sobre la estimación del modelo y la selección del supuesto distribucional que mejor representa los valores reales, y éstos se desagregan en diversos objetivos específicos. A continuación, se formulan los objetivos generales y específicos y las correspondientes hipótesis a contrastar.

5. Objetivos e hipótesis de la investigación

5.1. Objetivos generales

Objetivo G-1. Establecer una metodología de selección de la forma distribucional adecuada para el término de ineficiencia en modelos de frontera estocástica.

Objetivo G-2. Evaluar el efecto que produce el supuesto distribucional establecido sobre el término de ineficiencia en los resultados de la estimación del modelo para el sector bancario español.

Objetivo G-3. Seleccionar la forma distribucional del término de ineficiencia que mejor representa los valores reales en el sector bancario español.

5.2. Objetivos específicos

En relación al Objetivo G-1.

Objetivo 1. Obtener un estimador de ineficiencia y la expresión de su distribución teórica cuando el término de ineficiencia del modelo frontera estocástica de costes se supone distribuido según una half normal.

Objetivo 2. Obtener un estimador de ineficiencia y la expresión de su distribución teórica cuando el término de ineficiencia del modelo frontera estocástica de costes se supone distribuido según una normal truncada.

Objetivo 3. Obtener un estimador de ineficiencia de un modelo frontera estocástica de costes y las expresiones de las distribuciones teóricas de la ineficiencia estimada para los modelos de frontera estocástica de producción y costes cuando el término de ineficiencia se supone distribuido según una exponencial.

Objetivo 4. Obtener un estimador de ineficiencia cuando el término de ineficiencia del modelo frontera estocástica de costes se supone distribuido según una gamma.

En relación al Objetivo G-2.

Objetivo 5. En el sistema bancario español, bancos y cajas de ahorros, evaluar el efecto que produce el supuesto distribucional del término de ineficiencia sobre la frontera estimada.

Objetivo 6. En el sistema bancario español, bancos y cajas de ahorros, evaluar el efecto que produce el supuesto distribucional del término de ineficiencia sobre la ineficiencia estimada.

En relación al Objetivo G-3.

Objetivo 7. En el sistema bancario español, bancos y cajas de ahorros, analizar si el supuesto de distribución half normal es adecuado para estimar la eficiencia.

Objetivo 8. En el sistema bancario español, bancos y cajas de ahorros, analizar si el supuesto de distribución exponencial es adecuado para estimar la eficiencia.

5.3. Hipótesis

H-1: En las cajas de ahorros, el supuesto distribucional del término de ineficiencia no influye sobre la frontera de producción estimada.

H-2: En los bancos, el supuesto distribucional del término de ineficiencia no influye sobre la frontera de producción estimada.

H-3: En el sistema bancario español, el supuesto distribucional del término de ineficiencia no influye sobre la frontera de producción estimada.

H-4: En las cajas de ahorros, el supuesto distribucional del término de ineficiencia no influye sobre la frontera de costes estimada.

H-5: En los bancos, el supuesto distribucional del término de ineficiencia no influye sobre la frontera de costes estimada.

H-6: En el sistema bancario español, el supuesto distribucional del término de ineficiencia no influye sobre la frontera de costes estimada.

H-7: En las cajas de ahorros, el supuesto establecido sobre la distribución del término de efectos de ineficiencia no afecta a la ineficiencia técnica estimada.

H-8: En los bancos, el supuesto establecido sobre la distribución del término de efectos de ineficiencia no afecta a la ineficiencia técnica estimada.

H-9: En el sistema bancario español, el supuesto establecido sobre la distribución del término de efectos de ineficiencia no afecta a la ineficiencia técnica estimada.

H-10: En las cajas de ahorros, el supuesto establecido sobre la distribución del término de efectos de ineficiencia no afecta a la ineficiencia en costes estimada.

H-11: En los bancos, el supuesto establecido sobre la distribución del término de efectos de ineficiencia no afecta a la ineficiencia en costes estimada.

H-12: En el sistema bancario español, el supuesto establecido sobre la distribución del término de efectos de ineficiencia no afecta a la ineficiencia en costes estimada.

H-13: En las cajas de ahorros, el supuesto de distribución half normal del término de ineficiencia es adecuado para estimar la eficiencia técnica.

H-14: En los bancos, el supuesto de distribución half normal del término de ineficiencia es adecuado para estimar la eficiencia técnica.

H-15: En el sistema bancario español, el supuesto de distribución half normal del término de ineficiencia es adecuado para estimar la eficiencia técnica.

H-16: En las cajas de ahorros, el supuesto de distribución half normal del término de ineficiencia es adecuado para estimar la eficiencia en costes.

H-17: En los bancos, el supuesto de distribución half normal del término de ineficiencia es adecuado para estimar la eficiencia en costes.

H-18: En el sistema bancario español, el supuesto de distribución half normal del término de ineficiencia es adecuado para estimar la eficiencia en costes.

H-19: En las cajas de ahorros, el supuesto de distribución exponencial del término de ineficiencia es adecuado para estimar la eficiencia técnica.

H-20: En los bancos, el supuesto de distribución exponencial del término de ineficiencia es adecuado para estimar la eficiencia técnica.

H-21: En el sistema bancario español, el supuesto de distribución exponencial del término de ineficiencia es adecuado para estimar la eficiencia técnica.

H-22: En las cajas de ahorros, el supuesto de distribución exponencial del término de ineficiencia es adecuado para estimar la eficiencia en costes.

H-23: En los bancos, el supuesto de distribución exponencial del término de ineficiencia es adecuado para estimar la eficiencia en costes.

H-24: En el sistema bancario español, el supuesto de distribución exponencial del término de ineficiencia es adecuado para estimar la eficiencia en costes.

Capítulo 2

FORMA FUNCIONAL DE LA FUNCIÓN FRONTERA

1. Introducción

La metodología SFA se basa en el conocimiento de la función frontera que relaciona los factores productivos con los niveles óptimos de producción, costes o beneficios. En la realidad, tal relación técnica suele ser desconocida y la forma en que ésta se aproxima constituye la esencia de los diferentes métodos de estimación de las puntuaciones de eficiencia.

La elección de una forma funcional concreta de entre las posibles, establece una serie de restricciones en los resultados del análisis. Formas funcionales tradicionales en el análisis económico como la lineal, Cobb-Douglas o CES, restringen las principales características económicas de la función de producción. En el caso de la función de producción Cobb-Douglas, propuesta en Cobb y Douglas en 1928, las elasticidades output son constantes para cualquier nivel de factor y de producción y la elasticidad de sustitución entre inputs coincide con la unidad. Estas características se deben a la especificación de la forma funcional y no guardan relación con los datos reales utilizados en el análisis empírico. La aparición de la función CES, propuesta por Arrow, Chenery, Minhas y Solow en 1961, supone un avance porque permite que la elasticidad de sustitución tome cualquier valor real, aunque los rendimientos a escala continúan siendo independientes de las cantidades de output e inputs, lo que supone un claro inconveniente para comprobar la hipótesis clásica sobre la existencia de rendimientos crecientes y decrecientes a escala. En este sentido, algunos autores han introducido modificaciones sobre la función de producción CES de manera que pudiera comprobarse dicha hipótesis. Este es el caso del trabajo realizado por Zellner y Revankar (1969) en el que se introduce una función de producción CES con elasticidad de escala variable en función del nivel de output y se presentan rendimientos crecientes a escala, cada vez en

menor proporción, que pasan a ser decrecientes al llegar a una determinada escala.

Posteriormente, se introdujeron las formas funcionales homotéticas, de las que las homogéneas son un caso especial. Las funciones de producción radio-homotéticas sugeridas por Färe (1975) consisten en una transformación homotética de una función de producción radio-homogénea de manera que la elasticidad de escala depende tanto del output como de la combinación de inputs.

Todas estas propuestas de generalización de la forma funcional Cobb-Douglas presentan dificultades adicionales en su estimación así como problemas en la interpretación de los parámetros.

En este capítulo se describen distintas formas de representar la función de producción que se utiliza como frontera estocástica en el modelo de aproximación de frontera estocástica. Algunas implicaciones que pueden afectar a la selección de la forma funcional son la disponibilidad de suficientes datos, las propiedades de los mismos y la disponibilidad de programas estadísticos apropiados. Previamente, y siguiendo la línea de Álvarez *et al.* (2003), se destacan las características más interesantes desde el punto de vista del análisis económico: productividades marginales, rendimientos a escala y posibilidades de sustitución entre factores; así como las propiedades de homogeneidad y homoteticidad, que simplifican el análisis empírico.

2. Características económicas de la función de producción

En este apartado se analizan las características más relevantes desde el punto de vista económico de las funciones de producción: las productividades

marginales, los rendimientos a escala y las posibilidades de sustitución entre inputs.

Productividad marginal

La productividad marginal de un factor se define como la cantidad en la que varía la producción cuando se aumenta la utilización del factor en una unidad adicional, manteniendo constantes los demás factores.

Si se supone una función de producción de dos inputs, $y = f(x_1, x_2)$, las productividades marginales se calculan como las derivadas parciales en función de cada factor productivo: $\partial y / \partial x_1$ y $\partial y / \partial x_2$.

La tecnología se define como monótona cuando las productividades marginales son siempre positivas, es decir, incrementos en las cantidades de input aumentan siempre la producción.

Rendimientos a escala

La elasticidad de escala, que consiste en la elasticidad del output respecto a un input, es una medida adimensional de las variaciones en la producción debidas a cambios en el nivel de utilización del input en cuestión, concretamente, mide el porcentaje en que aumenta el output cuando el input aumenta en un uno por ciento.

El concepto de elasticidad de escala $E_{y/x}$, es decir, la elasticidad del output y en relación al input x, puede calcularse mediante la siguiente expresión:

$$E_{y/x} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{x}{y} \quad (2.2.1)$$

En el caso de una función de producción de dos inputs, x_1 y x_2 , la elasticidad de escala viene dada por:

$$E_{y/x} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{y} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{y} \quad (2.2.2)$$

La elasticidad de escala $E_{y/x}$ determina la existencia y grado de los rendimientos a escala. De la expresión anterior se deducen los siguientes casos:

- a) $E_{y/x} = 1$: rendimientos constantes a escala. Un aumento del 1% en los inputs lleva a un aumento del 1% en la producción.
- b) $E_{y/x} > 1$: rendimientos crecientes a escala. Un aumento del 1% en los inputs lleva a un aumento mayor del 1% en la producción.
- c) $E_{y/x} < 1$: rendimientos decrecientes a escala. Un aumento del 1% en los inputs lleva a un aumento menor del 1% en la producción.

Como puede deducirse, el concepto de rendimientos a escala se refiere a las variaciones de la producción ante aumentos de todos los inputs en la misma proporción, es decir, ante incrementos en la escala de la DMU¹.

Existe una dualidad entre las funciones de producción y de costes que hace corresponder los rendimientos crecientes a escala en la producción con una función de costes medios decreciente siempre que se cumplan los requisitos siguientes:

- la función de producción presenta la misma relación marginal de sustitución entre inputs, independientemente sus niveles.
- el precio de los inputs se mantiene constante.

¹ Decision Making Unit

- la DMU se orienta a la minimización de costes.

Sustitución entre factores

La función de producción presenta varios inputs capaces de producir un determinado nivel de output, que también puede producirse mediante la sustitución de unos inputs por otros. La posibilidad de sustituir inputs en el proceso productivo permite a la DMU reducir las pérdidas debidas a un incremento en el precio de un input concreto o, por el contrario, incrementar los beneficios debidos a un descenso en el precio de un input.

La relación técnica de sustitución (RTS) mide la variación requerida de un factor de producción para compensar la variación ocurrida en otro factor. Diferenciando totalmente e igualando a cero:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (2.2.3)$$

$$RTS = \frac{dx_1}{dx_2} = - \frac{\partial y / \partial x_2}{\partial y / \partial x_1} \quad (2.2.4)$$

Esta relación implica que para que la producción se mantenga constante, una disminución de x_1 debe compensarse con un aumento de x_2 . El valor absoluto de RTS es una función de la relación entre los inputs de manera que cuanto mayor sea la relación x_1/x_2 , menos input x_2 será necesario para compensar una disminución dada de x_1 o, lo que es lo mismo, cuanto menor sea la relación x_1/x_2 , será necesario más input x_2 para compensar una disminución de x_1 .

En procesos productivos que consten de dos inputs, la capacidad de sustitución, entendida como el coste de oportunidad de un input en términos de otro, podría medirse mediante la pendiente de la isocuanta, dx_1/dx_2 , aunque este valor depende de las unidades de medida.

La elasticidad de sustitución según Hicks (1932) se constituye como una medida de las posibilidades de sustitución entre dos inputs. Se define como el porcentaje en que varía el cociente entre dos inputs cuando la RTS varía en un uno por ciento.

$$E_S = \frac{\Delta(x_1/x_2)/(x_1/x_2)}{\Delta RTS/RTS} = \frac{\Delta(x_1/x_2)}{\Delta RTS} \cdot \frac{RTS}{x_1/x_2} \cong \frac{d(x_1/x_2)}{d(RTS)} \cdot \frac{RTS}{x_1/x_2} \quad (2.2.5)$$

En el supuesto de minimización de costes, la RTS entre dos inputs coincide con el cociente de sus precios, por lo que puede definirse como el porcentaje en que varía la proporción entre dos inputs cuando el cociente de sus precios varía en un uno por ciento.

3. Características empíricas de la función de producción

Las características empíricas de la función de producción no son relevantes desde el punto de vista del comportamiento económico, pero mejoran la operatividad práctica de la función. A continuación, se destacan la homogeneidad y la homoteticidad.

Homogeneidad

Se dice que una función de producción es homogénea de grado k cuando, al multiplicar todos los inputs por una misma constante λ , la producción queda multiplicada por λ^k . Es decir:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.3.1)$$

donde λ es cualquier número real.

Si la función es homogénea de grado k , mediante la aplicación del teorema de Euler, se obtiene el resultado siguiente:

$$\sum_i \frac{\partial y}{\partial x_i} x_i = ky \quad (2.3.2)$$

es decir,

$$k = \sum_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{y} = \sum_i E_{y/x_i} \quad (2.3.3)$$

La suma de las elasticidades output de todos los inputs es igual al grado de homogeneidad de la función. De este modo, si la función es homogénea de grado k , presentará rendimientos a escala crecientes, constantes o decrecientes, dependiendo de si k es mayor, igual o menor que la unidad. Cuando se estima una función homogénea, se reduce el número de parámetros a estimar y es posible imponer un tipo de rendimientos a escala en todo el dominio.

En una función homogénea de grado k , sus primeras derivadas son homogéneas de grado $k - 1$. De este modo, si una función de producción es homogénea de grado uno, las productividades marginales de los factores serán homogéneas de grado cero. Es decir, si se incrementa la cantidad de los factores, la productividad marginal no varía y, por lo tanto, la relación técnica de sustitución tampoco. En este sentido, es posible afirmar que algunos de los comportamientos de las DMUs no dependen de la escala de las operaciones.

Homoteticidad

Una función de producción homotética es una transformación monótona creciente de una función de producción homogénea y puede expresarse como:

$$y = g[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] \quad (2.3.4)$$

donde la función f es homogénea de cualquier grado y g es una transformación monótona. Por lo tanto, una función de producción homogénea es homotética, mientras que una función homotética no siempre es homogénea.

Las funciones de producción homotéticas suponen una generalización de las funciones homogéneas porque, preservando las propiedades interesantes de las funciones homogéneas, permiten que los rendimientos a escala varíen en función del nivel de producción.

4. Formas funcionales tradicionales

En el análisis económico, las formas funcionales conocidas como tradicionales son la lineal, la Cobb-Douglas y la de Elasticidad de Sustitución Constante. Se trata de funciones restrictivas que dificultan la obtención de resultados que provengan exclusivamente de los datos empíricos. No obstante, la función Cobb-Douglas es la más utilizada en el contexto económico, ya que sus generalizaciones no han supuesto avances significativos y presentan problemas de estimación e interpretación de los parámetros (Álvarez *et al.*, 2003).

El trabajo de González (1997) estudia en profundidad la función Cobb-Douglas, así como dos de las formas funcionales que superan algunas de sus limitaciones: la forma funcional de elasticidad de sustitución constante, donde la elasticidad de sustitución puede tomar valores distintos de la unidad, y la función transcendental logarítmica, donde la elasticidad de sustitución puede cambiar ante variaciones del producto o de las proporciones de los factores.

En esta sección se presentan las características de las formas funcionales tradicionales menos restrictivas: Cobb-Douglas y Elasticidad de Sustitución Constante.

4.1. Forma funcional Cobb-Douglas

La forma funcional Cobb-Douglas es una de las más utilizadas en la estimación econométrica de funciones de producción. Se generó a partir de la observación empírica de la estabilidad en el tiempo de la proporción de las rentas del trabajo sobre el valor del producto total de los Estados Unidos. La principal razón de su utilidad es la escasa complejidad que presenta su estimación aunque, dado que es una función homogénea, presenta restricciones en los rendimientos a escala y en las elasticidades de sustitución.

La función de producción Cobb-Douglas para el caso de dos inputs, puede expresarse como:

$$y = Ax_1^\alpha x_2^\beta \quad (2.4.1)$$

donde se cumple que $A > 0$, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ para todo $y > 0$, $x_i > 0$ con $i=1,2$; siendo y el nivel de producción, x_i el nivel de cada input y A , α y β los parámetros a estimar. El parámetro A se interpreta como una medida de la eficiencia técnica de la DMU, ya que para cada combinación de inputs, cuanto mayor es A , mayor es el nivel de producción. Los parámetros α y β representan las elasticidades del output con respecto a cada input.

Productividad marginal

En el caso de la función de producción Cobb-Douglas anterior, las productividades marginales de cada factor pueden calcularse como:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \alpha Ax_1^{\alpha-1} x_2^\beta = \alpha \frac{y}{x_1} \quad (2.4.2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \beta Ax_1^\alpha x_2^{\beta-1} = \beta \frac{y}{x_2} \quad (2.4.3)$$

Estas productividades marginales de los factores son positivas para todos los valores de inputs admisibles como dominio de la función, lo que indica que ante aumentos de un input, manteniendo constante el otro, el producto siempre aumenta.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = \alpha(\alpha - 1) Ax_1^{\alpha-2} x_2^\beta = \frac{\alpha(\alpha - 1) Ax_2^\beta}{x_1^{2-\alpha}} \quad (2.4.4)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = \beta(\beta - 1) Ax_1^\alpha x_2^{\beta-2} = \frac{\beta(\beta - 1) Ax_1^\alpha}{x_2^{2-\beta}} \quad (2.4.5)$$

La segunda derivada resulta negativa, lo que indica que la productividad marginal es decreciente, es decir, a medida que se incrementa el uso de un input, manteniendo el otro constante, el incremento del producto es cada vez menor.

Rendimientos a escala

Sustituyendo las productividades marginales resultantes para la función Cobb-Douglas en las expresiones dadas para la elasticidad de escala, se obtiene:

$$E_{y/x_1} = \alpha \frac{y}{x_1} \cdot \frac{x_1}{y} = \alpha \quad (2.4.6)$$

$$E_{y/x_2} = \beta \frac{y}{x_2} \cdot \frac{x_2}{y} = \beta \quad (2.4.7)$$

$$E_{y/x} = \alpha \frac{y}{x_1} \cdot \frac{x_1}{y} + \beta \frac{y}{x_2} \cdot \frac{x_2}{y} = \alpha + \beta \quad (2.4.8)$$

Así, la elasticidad de escala en la función de producción Cobb-Douglas depende de los parámetros α y β , observándose rendimientos constantes, rendimientos crecientes o rendimientos decrecientes a escala según que $(\alpha + \beta) = 1$, $(\alpha + \beta) > 1$ ó $(\alpha + \beta) < 1$, respectivamente.

Sustitución de factores

La relación técnica de sustitución (RTS) coincide con:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = - \frac{\partial y / \partial x_2}{\partial y / \partial x_1} = \frac{\beta \alpha x_1^\alpha x_2^{\beta-1}}{\alpha \beta x_1^{\alpha-1} x_2^\beta} = - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{x_1}{x_2} < 0 \quad (2.4.9)$$

Desarrollando por partes, se concluye que la elasticidad de sustitución de la función de producción Cobb-Douglas es constante e igual a la unidad:

$$d\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{1}{x_2} dx_1 - \frac{x_1}{x_2^2} dx_2 = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{dx_1}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{dx_2}{x_2} = \frac{x_1}{x_2} \left(\frac{dx_1}{x_1} - \frac{dx_2}{x_2} \right) \quad (2.4.10)$$

$$d(\text{RTS}) = d\left(-\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{x_1}{x_2}\right) = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{x_1}{x_2} \left(\frac{dx_1}{x_1} - \frac{dx_2}{x_2} \right) \quad (2.4.11)$$

$$\frac{\text{RTS}}{x_1/x_2} = \frac{-\beta x_1/\alpha x_2}{x_1/x_2} = -\frac{\beta}{\alpha} \quad (2.4.12)$$

$$E_s = \frac{d(x_1/x_2)}{d(\text{RTS})} \cdot \frac{\text{RTS}}{x_1/x_2} = -\frac{\alpha}{\beta} \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) = 1 \quad (2.4.13)$$

Homogeneidad

La función de producción Cobb-Douglas es una función de producción homogénea de grado $(\alpha + \beta)$, ya que al multiplicar los factores de producción por una constante $\lambda > 0$, la función queda multiplicada por $\lambda^{\alpha+\beta}$. Esta propiedad puede observarse a continuación:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = A(\lambda x_1)^\alpha (\lambda x_2)^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} A x_1^\alpha x_2^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} f(x_1, x_2) = \lambda^{\alpha+\beta} y \quad (2.4.14)$$

Por lo tanto, los rendimientos a escala son constantes en todo el dominio de la función y coinciden con la suma de los exponentes de los factores.

En el caso en el que la función Cobb-Douglas es homogénea de grado 1, es decir, cuando $\alpha + \beta = 1$, puede escribirse:

$$y = A x_1^\alpha x_2^\beta = A x_1^{1-\beta} x_2^\beta = A x_1 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^\beta \quad (2.4.15)$$

$$\frac{y}{x_1} = A \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^\beta \quad (2.4.16)$$

$$\ln \left(\frac{y}{x_1} \right) = \ln A + \beta \ln \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \quad (2.4.17)$$

Como puede observarse, como la función de producción es homogénea, es posible reducir el número de parámetros a estimar. Concretamente, si la función Cobb-Douglas es homogénea de grado 1, sólo es necesario estimar dos de los tres parámetros iniciales, puesto que $\alpha = 1 - \beta$.

Homoteticidad

La función de producción Cobb-Douglas es homotética puesto que su isocuanta es siempre negativa y proporcional a la relación de los factores de producción, así como independiente del nivel de producción. La pendiente de las isocuantas no cambia a lo largo de cualquier radio vector que sale del origen, de manera que puede conocerse el mapa completo de isocuantas a partir de una sola porque el resto son expansiones o contracciones de la misma. Puede comprobarse que la pendiente de las isocuantas sólo depende de la proporción de factores (radio vector concreto) que, en el caso de la función Cobb-Douglas, es siempre constante porque la RTS entre los factores de producción siempre es la misma:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{x_1}{x_2} \quad (2.4.18)$$

La facilidad de estimación de la función de producción Cobb-Douglas ha hecho que se trate de la función más utilizada en la estimación econométrica de funciones de producción. Sin embargo, presenta una serie de propiedades, como la homogeneidad, que restringen las posibles elasticidades de sustitución y efectos de escala.

4.2. Forma funcional de Elasticidad de Sustitución Constante

La función de elasticidad de sustitución constante (CES) surge ante la necesidad de superar las rigideces establecidas por la función Cobb-Douglas. Su expresión para dos inputs es la siguiente:

$$y = A(\alpha x_1^{-\theta} + (1 - \alpha)x_2^{-\theta})^{-u/\theta} \quad (2.4.19)$$

donde θ , A , u y α son parámetros a estimar y se cumple que $A > 0$, $0 < \alpha < 1$, $u > 0$ y $-1 < \theta < 0$ para todo y , x_1 , $x_2 > 0$. El parámetro A tiene el mismo significado que en el caso Cobb-Douglas, el parámetro de distribución del input 1 o parámetro de intensidad, α , representa la participación del input 1 en la producción, siendo $(1 - \alpha)$ la participación del input 2. El parámetro de sustitución θ está relacionado con la elasticidad de sustitución E_S y el parámetro u es el indicador del tipo de rendimientos a escala.

Productividad marginal

Dada la forma funcional CES anterior, las productividades marginales de cada uno de los inputs resultan:

$$\frac{dy}{dx_1} = -\frac{u}{\theta} A(\alpha x_1^{-\theta} + (1 - \alpha)x_2^{-\theta})^{-(u/\theta)-1} (-\theta)\alpha x_1^{-\theta-1} \quad (2.4.20)$$

$$\frac{dy}{dx_2} = -\frac{u}{\theta} A(\alpha x_1^{-\theta} + (1 - \alpha)x_2^{-\theta})^{-(u/\theta)-1} (-\theta)(1 - \alpha)x_2^{-\theta-1} \quad (2.4.21)$$

Rendimientos de escala

La elasticidad de escala, $E_{y/x}$, es constante:

$$E_{y/x} = -\frac{u}{\theta} A(\alpha x_1^{-\theta} + (1-\alpha)x_2^{-\theta})^{-u/\theta-1} \cdot (-\theta)\alpha x_1^{-\theta-1} \frac{x_1}{y} -$$

$$-\frac{u}{\theta} A(\alpha x_1^{-\theta} + (1-\alpha)x_2^{-\theta})^{-u/\theta-1} \cdot (-\theta)(1-\alpha)x_2^{-\theta-1} \frac{x_2}{y} \quad (2.4.22)$$

$$E_{y/x} = -\frac{u}{\theta} (-\theta\alpha x_1^{-\theta})(\alpha x_1^{-\theta} + (1-\alpha)x_2^{-\theta})^{-1} -$$

$$-\frac{u}{\theta} (-\theta(1-\alpha)x_2^{-\theta})(\alpha x_1^{-\theta} + (1-\alpha)x_2^{-\theta})^{-1} \quad (2.4.23)$$

$$E_{y/x} = u(\alpha x_1^{-\theta} + (1-\alpha)x_2^{-\theta})(\alpha x_1^{-\theta} + (1-\alpha)x_2^{-\theta})^{-1} = u \quad (2.4.24)$$

Por lo tanto, existen rendimientos crecientes, decrecientes o constantes a escala según que $u > 1$, $u < 1$ ó $u = 1$, respectivamente.

Sustitución de los factores

La relación técnica de sustitución resulta:

$$RTS = \frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{\partial y / \partial x_2}{\partial y / \partial x_1} =$$

$$= -\frac{uA(\alpha x_1^{-\theta} + (1-\alpha)x_2^{-\theta})^{-(u/\theta)-1} (1-\alpha)x_2^{-\theta-1}}{uA(\alpha x_1^{-\theta} + (1-\alpha)x_2^{-\theta})^{-(u/\theta)-1} \alpha x_1^{-\theta-1}} \quad (2.4.25)$$

$$RTS = -\frac{(1-\alpha)}{\alpha} \cdot \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\theta+1} \quad (2.4.26)$$

La elasticidad de sustitución de la función de producción CES es constante pero, a diferencia de la Cobb-Douglas, puede tomar valores distintos de la unidad en función del parámetro θ :

$$E_S = \frac{d(x_1/x_2)}{d(RTS)} \cdot \frac{RTS}{x_1/x_1} \quad (2.4.27)$$

$$E_S = \frac{-(1-\alpha)}{\alpha} \cdot \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\theta+1} \cdot \left(\frac{-(1-\alpha)}{\alpha} \cdot (\theta+1) \cdot \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\theta}\right)^{-1} = \frac{1}{1+\theta} \quad (2.4.28)$$

La función CES coincide con la función Cobb-Douglas cuando $\theta=0$ y, por tanto, la elasticidad de sustitución coincide con la unidad. En el caso en que $\theta=-1$ y $u=1$ coincide con una función lineal.

Homogeneidad

Al igual que el caso Cobb-Douglas, la función de producción CES es homogénea de grado u , ya que si multiplicamos los factores de producción por una constante λ , la función queda multiplicada por λ^u . Es decir:

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1, \lambda x_2) &= A(\alpha(\lambda x_1)^{-\theta} + (1-\alpha)(\lambda x_2)^{-\theta})^{-u/\theta} = \\ &= A(\alpha\lambda^{-\theta}x_1^{-\theta} + (1-\alpha)\lambda^{-\theta}x_2^{-\theta})^{-u/\theta} = \\ &= A(\lambda^{-\theta}(\alpha x_1^{-\theta} + (1-\alpha)x_2^{-\theta}))^{-u/\theta} = \\ &= (\lambda^{-\theta})^{-u/\theta} A(\alpha x_1^{-\theta} + (1-\alpha)x_2^{-\theta})^{-u/\theta} = \\ &= \lambda^u A(\alpha x_1^{-\theta} + (1-\alpha)x_2^{-\theta})^{-u/\theta} = \lambda^u \cdot f(x_1, x_2) = \lambda^u \cdot y \quad (2.4.29) \end{aligned}$$

Homoteticidad

La función de producción CES es homotética, es decir, la relación marginal de sustitución entre inputs es la misma, independientemente del nivel de output:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{(1-\alpha)}{\alpha} \cdot \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\theta+1} \quad (2.4.30)$$

Por lo tanto, a lo largo de una recta trazada desde el origen, es decir dada una proporción determinada entre inputs, la pendiente de las isocuantas es la misma. La pendiente es negativa cuando $0 < \alpha < 1$, existiendo varias clases de isocuantas según el valor del parámetro de sustitución θ . Es posible distinguir los siguientes casos:

- $\theta = -1$. La isocuanta es una línea recta representativa de dos inputs perfectamente sustituibles y cuya pendiente es $-(1-\alpha)/\alpha$. En este caso, E_S es infinita.
- $-1 < \theta < 0$. La isocuanta corta a los ejes de coordenadas y $E_S > 1$.
- $\theta = 0$. La isocuanta es la correspondiente a la función de producción Cobb-Douglas y es asintótica en relación a los ejes de coordenadas.
- $\theta > 0$. La isocuanta es asintótica a los ejes de coordenadas y $0 < E_S < 1$. Se trata de la isocuanta más común.
- $\theta = \infty$. Esto implica que si $x_1 > x_2 \rightarrow dx_1/dx_2 = \infty$ y si $x_1 < x_2 \rightarrow dx_1/dx_2 = 0$. La isocuanta es rectangular con pendiente $-(1-\alpha)/\alpha$ cuando $x_1 = x_2$, situándose el vértice de su ángulo en la línea de 45 grados desde el origen. En cualquier caso, E_S es cero.

5. Formas funcionales flexibles

La propiedad de flexibilidad de la forma funcional implica que ésta sea consistente con las hipótesis teóricas para que los resultados empíricos sean consecuencia única de los datos utilizados e independientes de la forma funcional seleccionada.

Según Diewert (1974), para satisfacer la propiedad de flexibilidad es deseable utilizar formas funcionales que no impongan restricciones y proporcionen una buena aproximación local a una función arbitraria dos veces diferenciable. De esta manera, restricciones como la homogeneidad, homoteticidad, rendimientos constantes a escala o elasticidad de sustitución constante pueden contrastarse de forma empírica en lugar de ser impuestas a priori.

El coste de oportunidad de la ausencia de hipótesis restrictivas en las formas funcionales flexibles se encuentra en el incremento de la cantidad de información necesaria para especificar adecuadamente tales relaciones. Según Caves *et al.* (1980), se pueden destacar las siguientes desventajas de las formas funcionales flexibles: el incumplimiento de las condiciones de regularidad de la producción, la estimación de un número excesivo de parámetros y la imposibilidad de utilizar observaciones con niveles nulos.

Las restricciones que imponen las formas funcionales están relacionadas con el número de parámetros que presentan. Concretamente, las productividades marginales presentan una restricción cuando las formas funcionales no presentan suficientes términos, es decir, suficientes parámetros.

Álvarez *et al.* (2003) desarrollaron un ejemplo para una función de producción lineal que presenta tantos parámetros como inputs y cuyas productividades marginales resultan constantes.

Dada la función $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, entonces,

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \alpha_1 \quad (2.5.1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \alpha_2 \quad (2.5.2)$$

Si se añade una iteración entre las variables, se consigue que la productividad marginal de un factor dependa de la cantidad del otro. Dada la función $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_{12} x_1 x_2$, entonces,

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \alpha_1 + \alpha_{12} x_2 \quad (2.5.3)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \alpha_2 + \alpha_{12} x_1 \quad (2.5.4)$$

En las segundas derivadas, las dos productividades son constantes frente a cambios del input analizado y varían igualmente ante variaciones del otro input:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 0 \quad (2.5.5)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 0 \quad (2.5.6)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = \alpha_{12} \quad (2.5.7)$$

Para que desaparezcan también las restricciones en las segundas derivadas, deben añadirse dos términos cuadráticos con sus respectivos parámetros. De esta manera, se consigue que la productividad marginal de cada input varíe en función de la cantidad usada de ambos, siendo esa variación distinta en función de la cantidad empleada del propio input e igual ante variaciones de la cantidad empleada del otro input. Dada la función $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_{12} x_1 x_2 + \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{22} x_2^2$, entonces,

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \alpha_1 + \alpha_{12}x_2 + 2\alpha_{11}x_1 \quad (2.5.8)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \alpha_2 + \alpha_{12}x_1 + 2\alpha_{22}x_2 \quad (2.5.9)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 2\alpha_{11} \quad (2.5.10)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 2\alpha_{22} \quad (2.5.11)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = \alpha_{12} \quad (2.5.12)$$

Por lo tanto, puede observarse que el número de parámetros incluidos en la función influyen en la flexibilidad de la misma. En un modelo con k variables explicativas, las formas funcionales deberían presentar $(k + 1)(k + 2)/2$ parámetros para poder modelizar todas las características de interés de un proceso productivo.

Las formas funcionales flexibles quedan definidas como las especificaciones que incluyen tantos parámetros como elementos necesarios para caracterizar la tecnología que se pretende modelizar (Diewert, 1971), por lo que las características de la tecnología no quedan restringidas a priori. La forma funcional Cobb-Douglas tiene tantos parámetros como inputs más uno y la CES tantos como inputs más dos, es decir, contienen un número de parámetros menor que el número de características que pretenden modelizar.

De entre las formas funcionales flexibles desarrolladas en la literatura (ver Thompson, 1988), las más empleadas en el análisis empírico son la translog, la generalizada de Leontief, la cuadrática normalizada y la Fourier flexible.

5.1. Forma funcional Transcendental Logarítmica o translog

La forma funcional flexible más usada en los trabajos empíricos es la forma logarítmico transcendental o translog propuesta por Christensen *et al.* (1973), que consiste en una generalización de la función Cobb-Douglas mediante el desarrollo en serie de Taylor de segundo orden:

$$\ln y = \alpha_0 + \sum_n^N \alpha_n \ln x_n + \sum_n^N \sum_p^P \alpha_{np} \ln x_n \ln x_p \quad (2.5.13)$$

dado que $\ln x_n \cdot \ln x_p = \ln x_p \cdot \ln x_n$, necesariamente se cumple que $\alpha_{np} = \alpha_{pn}$ y la función translog puede escribirse como:

$$\ln y = \alpha_0 + \sum_n^N \alpha_n \ln x_n + \frac{1}{2} \sum_n^N \alpha_{nn} (\ln x_n)^2 + \sum_n^N \sum_p^P \alpha_{np} \ln x_n \ln x_p \quad (2.5.14)$$

Productividad marginal

En el caso de dos inputs, la función translog se expresa como:

$$\ln y = \ln \alpha_0 + \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 + \alpha_3 (\ln x_1)^2 + \alpha_4 (\ln x_2)^2 + \alpha_5 \ln x_1 \ln x_2 \quad (2.5.15)$$

De manera que las productividades marginales de cada factor resultan:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{y}{x_1} (\alpha_1 + 2\alpha_3 \ln x_1 + \alpha_5 \ln x_2) \quad (2.5.16)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{y}{x_2} (\alpha_2 + 2\alpha_4 \ln x_2 + \alpha_5 \ln x_1) \quad (2.5.17)$$

Rendimientos a escala

En cuanto a la elasticidad de escala:

$$\begin{aligned} E_{y/x} &= \frac{y}{x_1} (\alpha_1 + 2\alpha_3 \ln x_1 + \alpha_5 \ln x_2) \frac{x_1}{y} + \frac{y}{x_2} (\alpha_2 + 2\alpha_4 \ln x_2 + \alpha_5 \ln x_1) \frac{x_2}{y} = \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 + (2\alpha_3 + \alpha_5) \ln x_1 + (2\alpha_4 + \alpha_5) \ln x_2 \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

Mientras que en el caso de las funciones de producción Cobb-Douglas y CES la elasticidad de escala es constante (lo que implica la posibilidad de obtener curvas de costes medios continuamente crecientes, decrecientes o constantes con el output, pero no el poder comprobar la hipótesis clásica sobre la existencia de una curva de costes medios en forma de U), en el caso de la función de producción translog la elasticidad de escala es variable, lo que permite verificar dicha hipótesis.

Tanto las elasticidades output como los productos marginales dependen de los parámetros de la función de producción y de las cantidades de inputs usadas por cada individuo. Por tanto, la interpretación separada de los parámetros resulta complicada y poco interesante, salvo en el caso particular en el que los valores de los inputs coinciden con la unidad y, entonces, las elasticidades output son iguales a los parámetros de primer orden de la función de producción.

Sustitución de factores

La función de producción translog tiene una elasticidad de sustitución variable, ya que depende del nivel de output y del nivel de utilización de los respectivos inputs.

$$E_S = \frac{d(x_1/x_2)}{d(RTS)} \cdot \frac{RTS}{x_1/x_2} = \frac{x_1/x_2 (dx_1/x_1 - dx_2/x_2)}{d(RTS)} \cdot \frac{RTS}{x_1/x_2} \quad (2.5.19)$$

donde:

$$\begin{aligned} -\alpha_1 \frac{1}{x_1} dx_1 - 2\alpha_3 \ln x_1 \frac{1}{x_1} dx_1 - \alpha_5 \ln x_2 \frac{1}{x_1} dx_1 = \\ = \alpha_2 \frac{1}{x_2} dx_2 + 2\alpha_4 \ln x_2 \frac{1}{x_2} dx_2 + \alpha_5 \ln x_1 \frac{1}{x_2} dx_2 \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

$$-\frac{1}{x_1} dx_1 (\alpha_1 + 2\alpha_3 \ln x_1 + \alpha_5 \ln x_2) = \frac{1}{x_2} dx_2 (\alpha_2 + 2\alpha_4 \ln x_2 + \alpha_5 \ln x_1) \quad (2.5.21)$$

$$RTS = \frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{x_1 (\alpha_2 + 2\alpha_4 \ln x_2 + \alpha_5 \ln x_1)}{x_2 (\alpha_1 + 2\alpha_3 \ln x_1 + \alpha_5 \ln x_2)} \quad (2.5.22)$$

$d(RTS) =$

$$\begin{aligned} = -\left[\frac{\alpha_5 (\alpha_1 + 2\alpha_3 \ln x_1 + \alpha_5 \ln x_2) - 2\alpha_3 (\alpha_2 + 2\alpha_4 \ln x_2 + \alpha_5 \ln x_1)}{(\alpha_1 + 2\alpha_3 \ln x_1 + \alpha_5 \ln x_2)^2} \frac{dx_1}{x_1} \right. \\ \left. + \frac{2\alpha_4 (\alpha_1 + 2\alpha_3 \ln x_1 + \alpha_5 \ln x_2) - \alpha_5 (\alpha_2 + 2\alpha_4 \ln x_2 + \alpha_5 \ln x_1)}{(\alpha_1 + 2\alpha_3 \ln x_1 + \alpha_5 \ln x_2)^2} \frac{dx_2}{x_2} \right] \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

Mientras que la elasticidad de sustitución entre inputs en las funciones de producción Cobb-Douglas y CES es constante, en el caso de la función de

producción translog varía con el output y/o con la proporción de los factores productivos utilizados y puede tomar valores distintos a la unidad.

Homogeneidad

Berndt y Christensen (1973) demostraron que la función translog no satisface la monotonía y la cuasiconcavidad globalmente. Existe al menos un valor de las variables explicativas donde no se cumplen estas propiedades, por lo que deben investigarse en cada punto o en el punto de aproximación, es decir, de forma exacta y aproximada.

En una dimensión local, la cuasiconcavidad requiere que todos los menores principales de la matriz hessiana de derivadas segundas sean no-negativos.

La propiedad de homogeneidad puede imponerse en la función translog mediante la siguiente restricción paramétrica:

$$\sum_n \alpha_{np} = 0 \quad \forall n \quad (2.5.24)$$

que indica que existen tantas restricciones como factores de producción.

Pueden imponerse rendimientos constantes de escala cuando se añade la siguiente condición a las restricciones de homogeneidad:

$$\sum_n \alpha_n = 1 \quad (2.5.25)$$

Homoteticidad

La función de producción translog es una función de producción no homotética ya que su isocuanta puede ser cóncava o convexa, con una pendiente positiva o negativa que varía a lo largo del nivel de producción.

Dado que la isocuanta es la curva de igual producto, la variación de la cantidad a lo largo de la misma es cero y por lo tanto:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{(\alpha_2 + 2\alpha_4 \ln x_2 + \alpha_5 \ln x_1)}{(\alpha_1 + 2\alpha_3 \ln x_1 + \alpha_5 \ln x_2)} \quad (2.5.26)$$

La pendiente de la isocuanta depende del signo de los parámetros, pudiendo ser positiva o negativa.

Otra cuestión a destacar sobre las funciones de producción translog es que dichas funciones de producción no tienen la correspondiente función dual de costes. Es decir, a diferencia de las funciones Cobb-Douglas y CES, no existe una correspondencia directa entre las funciones de producción y costes porque el parámetro de escala en la función de producción translog se relaciona sólo de forma aproximada con la elasticidad del coste respecto de la producción.

Burgess (1974) usó la forma funcional translog para representar la función de coste multiproducto:

$$\begin{aligned} \ln C = & \alpha_0 + \sum_m^M \alpha_m \ln y_m + \frac{1}{2} \sum_m^M \sum_q^Q \alpha_{mq} \ln y_m \ln y_q + \sum_n^N \alpha_n \ln w_n + \\ & + \frac{1}{2} \sum_n^N \sum_p^P \alpha_{np} \ln w_n \ln w_p + \sum_m^M \sum_n^N \alpha_{mn} \ln y_m \ln w_n \end{aligned} \quad (2.5.27)$$

siendo C el coste total y w el precio de los inputs utilizados. El comportamiento optimizador de los agentes requiere que la función de costes cumpla la propiedad de homogeneidad de grado uno en los precios de los inputs. Para imponer esta propiedad se establecen las siguientes restricciones paramétricas:

$$\sum_n^N \alpha_n = 1 \quad ; \quad \sum_n^N \alpha_{np} \quad \forall p \quad ; \quad \sum_n^N \alpha_{mn} = 0 \quad (2.5.28)$$

Para imponer homoteticidad se utiliza la restricción $\alpha_{mn} = 0$, mientras que la homogeneidad queda impuesta mediante las restricciones $\alpha_{mn} = 0$; $\alpha_{mq} = 0$.

Mediante la aplicación del lema de Shephard a la función de costes, se obtienen las participaciones de cada factor en los costes:

$$\frac{\partial \ln C}{\partial \ln w_n} = \frac{\partial C}{\partial w_n} \cdot \frac{w_n}{C} = x_n \cdot \frac{w_n}{C} = S_n \quad (2.5.29)$$

Las elasticidades de sustitución pueden calcularse como:

$$ES_{np} = \frac{\beta_{np} + (x_n w_n/C)(x_p w_p/C)}{(x_n w_n/C)(x_p w_p/C)} \quad (2.5.30)$$

$$ES_{nn} = \frac{\beta_{nn} + (x_n w_n/C)^2 - (x_n w_n/C)}{(x_n w_n/C)^2} \quad (2.5.31)$$

En el caso en el que se anulen los términos de segundo orden de la función, $\alpha_{np} = 0$, la función coincide con la Cobb-Douglas y la elasticidad de sustitución entre dos factores coincide con la unidad.

5.2. Formas funcionales Fourier flexible, generalizada Leontief y cuadrática

La superioridad de la forma funcional Fourier, propuesta por Gallant (1981, 1982), se centra en la capacidad para aproximar globalmente la función en todo el dominio de datos. Los términos trigonométricos son mutuamente ortogonales

en el intervalo $[0,2\pi]$, por lo que cada término adicional puede hacer que la aproximación de la función sea más cercana a los verdaderos datos. Esto se debe a la inclusión de transformaciones trigonométricas de las variables en la función translog estándar. Estudios como McAllister y Mcmanus (1993), Mitchell y Onvural (1996) y Berger y Mester (1997) demuestran que esta función proporciona un mejor ajuste de los datos.

$$\begin{aligned}
 \ln C = & \alpha_0 + \sum_m^M \alpha_m \ln y_m + \frac{1}{2} \sum_m^M \sum_q^Q \alpha_{mq} \ln y_m \ln y_q + \sum_n^N \alpha_n \ln w_n \\
 & + \frac{1}{2} \sum_n^N \sum_p^P \alpha_{np} \ln w_n \ln w_p + \sum_m^M \sum_n^N \alpha_{mn} \ln y_m \ln w_n + \sum_m a_m \cos(y_m) \\
 & + \sum_m b_m \sin(y_m) + \sum_n c_n \cos(w_n) + \sum_n d_n \sin(w_n) \\
 & + \sum_{mq} e_{mq} [\cos(y_m) + \cos(y_q)] + \sum_{mq} f_{mq} [\sin(y_m) + \sin(y_q)] \\
 & + \sum_{mq} g_{mq} [\cos(y_m) - \cos(y_q)] + \sum_{mq} h_{mq} [\sin(y_m) - \sin(y_q)] \\
 & + \sum_{np} i_{np} [\cos(w_n) + \cos(w_p)] + \sum_{np} l_{np} [\sin(w_n) + \sin(w_p)] \\
 & + \sum_{np} r_{np} [\cos(w_n) - \cos(w_p)] \\
 & + \sum_{np} s_{np} [\sin(w_n) - \sin(w_p)] \tag{2.5.32}
 \end{aligned}$$

Es importante que las adiciones trigonométricas mantengan coherencia con el tamaño de la muestra. Su argumento debe fijarse en el rango $[0,2\pi]$ y, según Gallant (1981), el número de coeficientes se corrige reduciendo el número de los regresores para tratar la posible multicolinealidad.

La función generalizada de Leontief es también una expansión de Taylor de segundo orden (Diewert, 1971) que, a diferencia de la translog, transforma las variables independientes tomando raíces cuadradas en lugar de logaritmos.

$$y = \alpha_0 + \sum_n \alpha_n x_n^{1/2} + \frac{1}{2} \sum_n \sum_p \alpha_{np} x_n^{1/2} x_p^{1/2} \quad (2.5.33)$$

Debido a la ausencia de logaritmos, a diferencia de la translog, esta forma funcional permite la inclusión de observaciones nulas en los inputs.

Hall (1973) sugirió la combinación de la forma funcional Leontief y la forma lineal generalizada para formar la función de coste multiproducto “híbrido Diewert” cuyo principal inconveniente es que contiene demasiados parámetros para estimar.

$$C = \sum_m \sum_q \sum_n \sum_p \alpha_{mqnp} (y_m y_q x_n x_p)^{1/2} \quad (2.5.34)$$

La función de producción cuadrática propuesta por Lau (1974) presenta la ventaja de que permite a las variables tomar valores nulos y puede escribirse como:

$$y = \alpha_0 + \sum_n \alpha_n x_n + \frac{1}{2} \left[\sum_n \sum_p \alpha_{np} x_n x_p \right] \quad (2.5.35)$$

Capítulo 3

ESTIMACIÓN DE FUNCIONES FRONTERA

1. Introducción

En el presente capítulo se describen los métodos más frecuentemente utilizados para estimar las funciones frontera de producción, de costes, determinísticas o estocásticas. La estimación de una frontera estocástica puede realizarse mediante el Método de Máxima Verosimilitud y el Método de los Momentos. Siguiendo la sugerencia realizada por Coelli (1995), el más utilizado ha sido el primero de ellos. Además, de acuerdo con Olson *et al.* (1980) el Método de Máxima Verosimilitud proporciona estimaciones más eficientes cuando se dispone de muestras de tamaño grande, mientras que la estimación por el Método de los Momentos presenta diversos problemas. Si el valor del parámetro correspondiente a la desviación estándar de la ineficiencia sobre la del error aleatorio es pequeño, puede ocurrir que el error estándar del término de ineficiencia presente valores inferiores a cero, mientras que si este parámetro es elevado, la varianza del término aleatorio puede ser negativa.

El capítulo se estructura de la siguiente forma: en primer lugar, se presentan los procedimientos de estimación de fronteras determinísticas. A continuación, se expone el método de estimación por Máxima Verosimilitud para cada supuesto distribucional del término de ineficiencia a partir de la aportación de Kumbhakar y Lovell (2000) y, de este modo, se obtienen las expresiones de los estimadores de la ineficiencia bajo cada supuesto distribucional. En tercer lugar, se desarrolla el Método de los Momentos, que divide la primera etapa del método anterior en dos fases. Mientras que la primera de éstas es independiente del supuesto distribucional, la segunda se desarrolla para cada supuesto distribucional del término de ineficiencia. Finalmente, puesto que el método aplicado en este estudio es el de Máxima Verosimilitud, se destacan las variaciones más importantes del mismo en el caso en que la frontera estocástica que se estima sea de costes, así como si se dispone de datos de panel.

2. Estimación de fronteras determinísticas

Un modelo de frontera de producción puede escribirse como:

$$y_i = f(x_i; \beta) \cdot ET_i \quad (3.2.1)$$

donde y_i representa el output alcanzado por la unidad i , $i = 1, \dots, I$, x_i es el vector de los N inputs utilizados por la unidad i , $f(x_i; \beta)$ es la frontera de producción y β es un vector de parámetros a estimar.

La eficiencia técnica de la unidad i , ET_i , se define como la ratio que representa el output observado sobre el máximo output alcanzable:

$$ET_i = \frac{y_i}{f(x_i; \beta)} \quad (3.2.2)$$

donde el output alcanzado por la unidad de producción i alcanza el valor máximo de $f(x_i; \beta)$ si, y solo si, $ET_i = 1$. En otro caso, $ET_i < 1$, representa el déficit del output alcanzado por la unidad i sobre el máximo alcanzable.

Como puede observarse, la especificación de la frontera de producción en la ecuación (3.2.1) es determinística, ya que no recoge el efecto que sobre la producción puedan ejercer perturbaciones aleatorias no controlables por la unidad, atribuyendo la totalidad del déficit del output observado y_i sobre el máximo output alcanzable $f(x_i; \beta)$ a ineficiencia técnica.

La ecuación del modelo de frontera de producción (3.2.1) también puede expresarse como:

$$y_i = f(x_i; \beta) \cdot \exp[-u_i] \quad (3.2.3)$$

donde se establece la restricción $u_i \geq 0$ para que se cumpla $ET_i = \exp[-u_i] \leq 1$.

Si se supone una forma funcional Cobb-Douglas en términos de los logaritmos de las variables, el modelo frontera de producción determinístico puede formularse como sigue:

$$\ln y_i = \beta_0 + \sum_n \beta_n \ln x_{ni} - u_i \quad (3.2.4)$$

donde $u_i \geq 0$ garantiza que $y_i \leq f(x_i; \beta)$ y, por lo tanto, $f(x_i; \beta)$ es frontera de producción.

A continuación, se presentan los tres métodos propuestos por Kumbhakar y Lovell (2000) para la estimación de modelos de frontera determinística.

2.1. Programación matemática

Aigner y Chu (1968) expusieron dos modelos de programación matemática para estimar los parámetros de la frontera de producción determinística presentada en la ecuación (3.2.1). Un primer modelo de programación lineal tiene como objetivo calcular los valores del vector de parámetros β para el que se minimiza la suma de las desviaciones del output observado de cada unidad con respecto al máximo output alcanzable:

$$\begin{aligned} & \min \sum_i u_i \\ & \text{sujeto a } \left[\beta_0 + \sum_n \beta_n \ln x_{ni} \right] \geq \ln y_i \quad i = 1, \dots, I \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Un segundo modelo de programación cuadrática tiene como objetivo calcular los valores del vector de parámetros β que minimiza la suma de los cuadrados de las desviaciones del output observado de cada unidad respecto al máximo output alcanzable:

$$\begin{aligned} & \min \sum_i u_i^2 \\ & \text{sujeto a } \left[\beta_0 + \sum_n \beta_n \ln x_{ni} \right] \geq \ln y_i \quad i = 1, \dots, I \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Una vez se han calculado los valores del vector de parámetros, mediante cada modelo, la eficiencia técnica de cada unidad viene dada por las desviaciones entre la frontera y el output observado:

$$u_i = \left[\beta_0 + \sum_n \beta_n \ln x_{ni} \right] - \ln y_i \quad i = 1, \dots, I \quad (3.2.7)$$

Una importante desventaja de este procedimiento es que no proporciona errores estándar de los valores calculados para los parámetros y, en consecuencia, no se puede aplicar inferencia estadística. Schmidt (1976) trata de solucionar esta limitación demostrando que el cálculo mediante programación matemática puede proporcionar una interpretación estadística si se impone un supuesto distribucional sobre el término u_i .

Los valores calculados mediante el modelo de la expresión (3.2.5) coinciden con las estimaciones máximo verosímiles de los parámetros de la frontera de producción determinística si se supone una distribución exponencial para u_i como:

$$f(u) = \frac{1}{\sigma_u} \exp \left[-\frac{u}{\sigma_u} \right], \quad u \geq 0 \quad (3.2.8)$$

y la función de log-verosimilitud resulta:

$$\ln L = \ln \sigma_u - \frac{1}{\sigma_u} \sum_i |u_i| \quad (3.2.9)$$

Los valores de los parámetros calculados mediante el modelo de la ecuación (3.2.6) coinciden con las estimaciones máximo verosímiles de los parámetros de la frontera de producción determinística si se supone una distribución half normal para u_i como:

$$f(u) = \frac{2}{\sigma_u \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{u^2}{2\sigma_u^2} \right], \quad u \geq 0 \quad (3.2.10)$$

con función de log-verosimilitud:

$$\ln L = k - \frac{1}{2} \ln \sigma_u^2 - \frac{1}{2\sigma_u^2} \sum_i u_i^2 \quad (3.2.11)$$

donde k es una constante. Greene (1980a) sugirió un modelo en el que el término u_i se distribuye conforme a una gamma que satisface las condiciones de regularidad para obtener propiedades asintóticas de los estimadores máximo verosímiles. Sin embargo, no existe un modelo de programación matemática que se corresponda con el procedimiento de máxima verosimilitud cuando el término u_i se distribuye según una gamma.

2.2. Mínimos Cuadrados Ordinarios Corregidos

Winsten (1957) propuso el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios Corregidos (MCOC), que es un método de estimación del modelo de producción frontera determinística en dos etapas. La primera etapa consiste en la estimación de los parámetros de la frontera mediante mínimos cuadrados ordinarios (MCO). Como resultado, se obtienen estimaciones consistentes e insesgadas de los parámetros, excepto del término independiente, cuya estimación es consistente pero sesgada. La segunda etapa pretende corregir el sesgo del término independiente y, para ello, realiza la siguiente modificación:

$$\hat{\beta}_0^* = \hat{\beta}_0 + \max_i \{\hat{u}_i\} \quad (3.2.12)$$

donde los \hat{u}_i son los residuos MCO, que se corrigen de forma opuesta:

$$-\hat{u}_i^* = \hat{u}_i - \max_i \{\hat{u}_i\} \quad (3.2.13)$$

Los residuos MCOC, \hat{u}_i^* , son no negativos con al menos uno cero, por lo que generan una frontera de producción estimada que supone un límite superior de los outputs de las unidades analizadas. Sin embargo, esta frontera estimada presenta el inconveniente de ser paralela a la obtenida mediante la regresión MCO porque sólo se corrige el término independiente de la misma, es decir, la tecnología de producción dada por la frontera coincide con una tecnología asociada a un comportamiento medio.

Así, los residuos MCO pueden utilizarse para obtener estimaciones consistentes de la eficiencia técnica de cada unidad mediante $ET_i = \exp[-\hat{u}_i^*]$.

2.3. Mínimos Cuadrados Ordinarios Modificados

Afriat (1972) y Richmond (1974) propusieron el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios Modificados (MCOM), que es una variación en el método MCOC. Se trata de un procedimiento de estimación en dos etapas en el que, en la primera de ellas, se calcula el vector de parámetros β mediante MCO. Para aplicar la segunda etapa se requiere establecer un supuesto distribucional sobre las perturbaciones. Concretamente, se propusieron distribuciones de una sola cola, como la exponencial o la half normal, que implican que niveles mayores de ineficiencia técnica son cada vez menos probables. La segunda etapa consiste en modificar el término independiente estimado por MCO mediante la media de la distribución supuesta para la ineficiencia. Bajo este proceso de estimación, las ecuaciones correspondientes a (3.2.12) y (3.2.13) son:

$$\hat{\beta}_0^{**} = \hat{\beta}_0 + E(\hat{u}_i) \quad (3.2.14)$$

y

$$-\hat{u}_i^{**} = \hat{u}_i - E(\hat{u}_i) \quad (3.2.15)$$

Como puede observarse, al igual que en MCOC, el método MCOM utiliza los residuos MCO para obtener estimaciones consistentes de la eficiencia técnica de cada unidad.

Una deficiencia importante del procedimiento de mínimos cuadrados ordinarios modificados es que no garantiza que todos los outputs queden limitados superiormente por la frontera de producción estimada. Esto es, si una unidad presenta un residuo MCO positivo suficientemente alto es posible que $[\hat{u}_i - E(\hat{u}_i)] > 0$, resultando un valor de eficiencia técnica mayor que la unidad. Del mismo modo, es posible que MCOM modifique el término independiente estimado tanto que ninguna unidad resulte técnicamente eficiente. Finalmente,

al igual que en el caso de MCOC, la frontera de producción MCOM es paralela a la de la regresión MCO.

3. Estimación de fronteras estocásticas

El modelo de frontera estocástica supone una modificación de la frontera determinística que, aunque presenta mayor complejidad en su estimación, permite reconocer la posible influencia de perturbaciones aleatorias en el análisis.

La especificación de un modelo de frontera de producción estocástica puede expresarse como sigue:

$$y_i = f(x_i; \beta) \cdot \exp[v_i] \cdot ET_i \quad (3.3.1)$$

donde $[f(x_i; \beta) \cdot \exp[v_i]]$ es la frontera de producción estocástica, que incluye una parte determinística $f(x_i; \beta)$ y una parte estocástica $\exp[v_i]$ que representa el efecto de las perturbaciones aleatorias en cada unidad. En este caso, la eficiencia técnica se define como:

$$ET_i = \frac{y_i}{\hat{f}(x_i; \beta) \cdot \exp[v_i]} \quad (3.3.2)$$

Según esta ratio, y_i alcanza el valor máximo de $[f(x_i; \beta) \cdot \exp[v_i]]$ si y sólo si $ET_i = 1$. En otro caso, $ET_i < 1$ indica la proporción del máximo output alcanzada por la unidad i .

El modelo de frontera de producción estocástica se conoce como el modelo de error compuesto, ya que presenta un término de error con dos componentes. Una de ellas recoge las deficiencias en producción debidas a ineficiencia técnica

y la otra, los shocks aleatorios fuera del control de la unidad productiva que pueden afectar al output.

Aigner *et al.* (1977) y Meeusen y van den Broeck (1977) propusieron simultáneamente el modelo frontera de producción estocástica en el que se supone que $f(x_i; \beta)$ presenta una forma funcional Cobb-Douglas con las variables expresadas en términos logarítmicos:

$$\ln y_i = \beta_0 + \sum_n \beta_n \ln x_{ni} + v_i - u_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (3.3.3)$$

donde el término de error recoge los efectos de v_i , que es la componente aleatoria de dos colas, y de u_i , la componente de ineficiencia técnica no negativa. Por lo tanto, el término de error $\varepsilon_i = v_i - u_i$ es asimétrico.

El test sobre la presencia de ineficiencia técnica en los datos utiliza los residuos MCO para determinar si no existe ineficiencia técnica ($u_i = 0$) y el término de error es simétrico o si, por el contrario, existe ineficiencia técnica ($u_i > 0$) y el término de error es asimétrico (Kumbhakar y Lovell, 2000).

Schmidt y Lin (1984) propusieron el test estadístico $m_3/(m_2)^{3/2}$, donde m_2 y m_3 son los momentos muestrales segundo y tercero de los residuos MCO. De manera que $m_3 < 0$ indica la existencia de residuos MCO asimétricos negativos y sugiere la presencia de ineficiencia técnica en los datos, mientras que $m_3 > 0$ es un indicador de residuos MCO asimétricos positivos, sugiriendo una mala especificación del modelo.

Existe un test alternativo propuesto por Coelli (1995) según el cual el estadístico $m_3/(6m_2^3/I)^{1/2}$ se distribuye asintóticamente según una $N(0,1)$ bajo la hipótesis nula de asimetría nula en los errores de la ecuación (3.3.3).

La ventaja de estos test es que utilizan los residuos obtenidos a partir de una sencilla estimación MCO, frente al inconveniente de que se utilizan distribuciones asintóticas cuando las muestras suelen ser relativamente pequeñas.

Desde ahora y en el resto de esta sección, se supone evidencia sobre la existencia de ineficiencia técnica, lo que justifica la estimación de una frontera de producción de tipo estocástico.

Este proceso de estimación se marca dos importantes objetivos: obtener estimaciones de los parámetros β de la tecnología de producción en $f(x; \beta)$ y obtener estimaciones de la eficiencia técnica de cada unidad productiva. Para lograr el segundo objetivo es necesario realizar una estimación separada del error aleatorio v_i y la ineficiencia técnica u_i a partir de las estimaciones de ε_i para cada unidad, lo que implica el establecimiento de supuestos distribucionales sobre las dos componentes de la perturbación. Suponiendo que v_i y u_i se distribuyen independientemente de los inputs, x_i , la estimación de la ecuación (3.3.3) mediante MCO proporciona estimaciones consistentes de los β , pero no de β_0 . Además, con MCO tampoco se obtienen estimaciones de eficiencia técnica específicas de cada unidad.

A continuación, se exponen el método de estimación por máxima verosimilitud (MV) y el método de los momentos (MM) que, a diferencia de MCO, proporcionan estimaciones consistentes del término independiente, así como estimaciones de la eficiencia técnica de cada unidad.

3.1. Máxima Verosimilitud

La estimación por el método de máxima verosimilitud (MV) se articula en dos etapas. En la primera de ellas se estiman todos los parámetros del modelo mediante MV. La segunda etapa consiste en la estimación de la eficiencia técnica de cada unidad mediante la descomposición de los residuos estimados por MV en una componente de error aleatorio y otra de ineficiencia técnica.

Dada la frontera de producción estocástica expuesta en la ecuación (3.3.3), se establecen los siguientes supuestos:

- (i) los v_i se distribuyen idéntica e independientemente según una $N(0, \sigma_v^2)$.
- (ii) los u_i se distribuyen idéntica e independientemente según una distribución asimétrica.
- (iii) los v_i y los u_i se distribuyen independientemente entre sí y con los regresores.

A continuación, se analiza el proceso de estimación por máxima verosimilitud bajo distintos supuestos distribucionales establecidos sobre el término de ineficiencia.

3.1.1. Modelo half normal

Tal y como se propuso en Aigner *et al.* (1977), la distribución half normal, $N^+(0, \sigma_u^2)$, puede ser un supuesto distribucional a establecer sobre el término de ineficiencia. Su función de densidad es la siguiente:

$$f(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right], \quad u \geq 0 \quad (3.3.4)$$

con media $E(u) = \sqrt{2/\pi} \sigma_u$ y varianza $V(u) = (\pi - 2/\pi)\sigma_u^2$, donde σ_u^2 es la varianza de la $N(0, \sigma_u^2)$.

En cuanto al término aleatorio, como se indica en el supuesto (i), se distribuye según una normal estándar cuya función de densidad es:

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left[-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right], \quad -\infty < v < \infty \quad (3.3.5)$$

Debido al supuesto establecido en (iii), la función de densidad conjunta de u y v puede calcularse mediante el producto de sus funciones de densidad marginales:

$$f(u, v) = \frac{1}{\pi\sigma_u\sigma_v} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_u^2}u^2 - \frac{1}{2\sigma_v^2}v^2\right], \quad u \geq 0 \quad -\infty < v < \infty \quad (3.3.6)$$

Puesto que la perturbación estocástica puede calcularse como $\varepsilon = v - u$, la función de densidad conjunta para u y ε coincide con:

$$f(u, \varepsilon) = \frac{1}{\pi\sigma_u\sigma_v} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_u^2}u^2 - \frac{1}{2\sigma_v^2}(u^2 + \varepsilon^2 + 2u\varepsilon)\right],$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (3.3.7)$$

La función de densidad marginal de ε se obtiene integrando la expresión anterior en función de u (Aigner *et al.*, 1977):

$$f(\varepsilon) = \int_0^\infty f(u, \varepsilon) du = \frac{2}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right)\right], \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (3.3.8)$$

donde $\sigma = (\sigma_u^2 + \sigma_v^2)^{1/2}$, $\lambda = \sigma_u/\sigma_v$ y $\Phi(\cdot)$ y $\phi(\cdot)$ son funciones de distribución y densidad normales estándar, respectivamente.

Según Kumbhakar y Lovell (2000), el cambio en la notación de σ_u^2 y σ_v^2 a σ y λ se debe a la importancia del nuevo parámetro λ como indicador de la contribución relativa de u y v en la determinación de la perturbación estocástica. Concretamente, si $\lambda \rightarrow 0$ entonces, o $\sigma_v^2 \rightarrow +\infty$ o $\sigma_u^2 \rightarrow 0$, es decir, el error aleatorio contribuye en mayor medida que la ineficiencia técnica en la formación de ε . Bajo estas condiciones, el proceso de estimación coincide con el de un modelo sin ineficiencia técnica. Por el contrario, cuando $\lambda \rightarrow +\infty$, es decir, o $\sigma_u^2 \rightarrow +\infty$ o $\sigma_v^2 \rightarrow 0$, la ineficiencia técnica domina al error aleatorio en la determinación de ε . Este supuesto hace coincidir el modelo con una frontera de producción determinística sin ruido.

La perturbación aleatoria ε se distribuye asimétricamente con media y varianza:

$$E(\varepsilon) = -E(u) = -\sigma_u \sqrt{2/\pi} \quad (3.3.9)$$

$$V(\varepsilon) = \frac{\pi - 2}{\pi} \sigma_u^2 + \sigma_v^2 \quad (3.3.10)$$

Los parámetros σ y λ se estiman conjuntamente con los parámetros β de la función de producción.

La función de log-verosimilitud para una muestra de I unidades puede desarrollarse a partir de la ecuación (3.3.8) como:

$$L = \prod_i f(\varepsilon_i) = \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right)^I \cdot \left(\frac{1}{\sigma}\right)^I \cdot \sum_i \Phi\left(\frac{-\varepsilon_i \lambda}{\sigma}\right) \cdot \exp\left(\sum_i \frac{-\varepsilon_i^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.3.11)$$

$$\ln L = k - I \ln \sigma + \sum_i \ln \Phi\left(-\frac{\varepsilon_i \lambda}{\sigma}\right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_i \varepsilon_i^2 \quad (3.3.12)$$

o, en otros términos,

$$\ln L(y|\beta, \lambda, \sigma^2) = k - I \ln \sigma + \sum_i \ln \left[1 - \Phi \left([y_i - x'_i \beta] \frac{\lambda}{\sigma} \right) \right] - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_i (y_i - x'_i \beta)^2 \quad (3.3.13)$$

donde k es un término constante.

La maximización de la función de log-verosimilitud con respecto a cada uno de los parámetros proporciona estimaciones consistentes de los mismos. Las expresiones concretas se presentan en Aigner *et al.* (1977):

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{\lambda}{\sigma} \sum_i \frac{\phi \left([y_i - x'_i \beta] \frac{\lambda}{\sigma} \right)}{1 - \Phi \left([y_i - x'_i \beta] \frac{\lambda}{\sigma} \right)} x_i + \frac{1}{\sigma^2} \sum_i (y_i - x'_i \beta) x_i \quad (3.3.14)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\sigma} \sum_i \frac{\phi \left([y_i - x'_i \beta] \frac{\lambda}{\sigma} \right)}{1 - \Phi \left([y_i - x'_i \beta] \frac{\lambda}{\sigma} \right)} (y_i - x'_i \beta) \quad (3.3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = & -\frac{I}{2\sigma^2} + \frac{\lambda}{2\sigma^3} \sum_i \frac{\phi \left([y_i - x'_i \beta] \frac{\lambda}{\sigma} \right)}{1 - \Phi \left([y_i - x'_i \beta] \frac{\lambda}{\sigma} \right)} (y_i - x'_i \beta) + \\ & + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_i (y_i - x'_i \beta)^2 \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Una vez finalizada la primera etapa de estimación por MV y obtenidos los estimadores máximo verosímiles de los parámetros β , λ y σ^2 , la segunda etapa pretende obtener estimaciones de la eficiencia técnica de cada unidad.

A partir de los $\hat{\beta}$ se pueden obtener estimaciones de $\varepsilon_i = v_i - u_i$, $\hat{\varepsilon}_i$, que contienen información sobre u_i . Si ε_i es mayor que cero, es probable que la ineficiencia

técnica no sea elevada puesto que $E(v_i) = 0$, lo que sugiere que la unidad sería relativamente eficiente. Por el contrario, si ε_i es menor que cero, es probable que exista una ineficiencia técnica elevada, lo que sugiere que la unidad es relativamente ineficiente. Jondrow *et al.* (1982) propusieron utilizar la distribución condicionada de u_i dado ε_i , que reporta la información sobre u_i contenida en ε_i . Si se supone $u_i \sim N^+(0, \sigma_u^2)$, la distribución condicionada de u dado ε es:

$$f(u|\varepsilon) = \frac{f(u, \varepsilon)}{f(\varepsilon)} = \frac{1}{\sigma_* \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(u - \mu_*)^2}{2\sigma_*^2}\right] / \left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right)\right], \quad u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (3.3.17)$$

donde $\mu_* = -\varepsilon\sigma_u^2/\sigma^2$ y $\sigma_*^2 = \sigma_u^2\sigma_v^2/\sigma^2$. Puesto que $f(u|\varepsilon)$ se distribuye según una $N^+(\mu_*, \sigma_*^2)$, tanto la media como la moda de esta distribución pueden utilizarse como estimaciones puntuales para la ineficiencia de cada unidad:

$$E(u|\varepsilon) = \mu_* + \sigma_* \left[\frac{\phi(-\mu_*/\sigma_*)}{1 - \Phi(-\mu_*/\sigma_*)} \right] = \sigma_* \left[\frac{\phi(\varepsilon\lambda/\sigma)}{1 - \Phi(\varepsilon\lambda/\sigma)} - \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right) \right] \quad (3.3.18)$$

y

$$M(u|\varepsilon) = \begin{cases} -\varepsilon\sigma_u^2/\sigma^2 & \text{si } \varepsilon \leq 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3.3.19)$$

Las expresiones anteriores son válidas para $\varepsilon = \varepsilon_i$. Por tanto, a partir de los valores estimados de ε_i , se pueden obtener las correspondientes estimaciones de u_i que, como se ha indicado, son $E(u_i|\hat{\varepsilon}_i)$.

Una vez se ha obtenido la estimación puntual de la ineficiencia, es posible obtener las estimaciones de la eficiencia técnica de cada unidad analizada mediante:

$$ET_i = \exp[-\hat{u}_i] \quad (3.3.20)$$

donde \hat{u}_i puede ser tanto $E(u_i|\hat{\varepsilon}_i)$ como $M(u_i|\hat{\varepsilon}_i)$, aunque normalmente se considera la media.

Battese y Coelli (1988) propusieron una estimación puntual alternativa de ET_i :

$$ET_i = E(\exp[-u_i]|\varepsilon_i) = \frac{1 - \Phi(\sigma_* - \mu_{*i}/\sigma_*)}{1 - \Phi(-\mu_{*i}/\sigma_*)} \cdot \exp\left[-\mu_{*i} + \frac{1}{2}\sigma_*^2\right] \quad (3.3.21)$$

El estimador de la ecuación (3.3.20) que utiliza la media puede dar un resultado diferente que el estimador de la ecuación (3.3.21) puesto que las expresiones $\exp[-E(u_i|\varepsilon_i)]$ y $E(\exp[-u_i]|\varepsilon_i)$ no coinciden.

A continuación, se desarrolla el procedimiento de estimación de la eficiencia técnica mediante intervalos de confianza. Dado que $(u_i|\varepsilon_i)$ se distribuye según una $N^+(\mu_*, \sigma_*^2)$, Horrace y Schmidt (1996) propusieron los siguientes límites inferior y superior de la eficiencia técnica dada por $(\exp[-u_i]|\varepsilon_i)$ a un nivel de confianza $(1 - \alpha)$:

$$\begin{aligned} \text{lím Inf}_i &= \exp[-\mu_{*i} - z_l \sigma_*] \\ \text{lím Sup}_i &= \exp[-\mu_{*i} - z_s \sigma_*] \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

donde

$$P(Z > z_l) = \frac{\alpha}{2} \left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu_{*i}}{\sigma_*}\right) \right]$$

$$P(Z > z_S) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu_{*i}}{\sigma_*}\right)\right] \quad (3.3.23)$$

y Z se distribuye según una $N(0,1)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} z_l &= \Phi^{-1}\left(\left[1 - \frac{\alpha}{2}\right] \left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu_{*i}}{\sigma_*}\right)\right]\right) \\ z_S &= \Phi^{-1}\left(\left[1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right] \left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu_{*i}}{\sigma_*}\right)\right]\right) \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

3.1.2. Modelo normal truncada

Stevenson (1980) propuso una distribución normal truncada para el término de ineficiencia técnica con el objetivo de flexibilizar su comportamiento bajo el supuesto half normal propuesto por Aigner *et al.* (1977). Concretamente, la distribución normal truncada generaliza la distribución half normal incluyendo otro parámetro de posición que permite a la distribución normal truncada en cero presentar una moda no nula:

$$f(u) = \frac{1}{\left[1 - \Phi\left(\frac{-\mu}{\sigma_u}\right)\right] \sqrt{2\pi}\sigma_u} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u - \mu}{\sigma_u}\right)^2\right], \quad u \geq 0 \quad (3.3.25)$$

donde μ es la moda y σ_u^2 la varianza de la distribución normal que se trunca en cero, $N(0, \sigma_u^2)$. La media y la varianza de la ineficiencia son, respectivamente,

$$E(u) = \mu + \sigma \phi(\mu/\sigma) / [1 - \Phi(\mu/\sigma)] \text{ y}$$

$$\text{Var}(u) = \sigma^2 [1 - \mu/\sigma \cdot \phi(\mu/\sigma) / [1 - \Phi(\mu/\sigma)] - (\phi(\mu/\sigma) / [1 - \Phi(\mu/\sigma)])^2].$$

La función $f(u)$ presenta la densidad de una variable distribuida normalmente con media μ , posiblemente distinta de cero, truncada en cero, por lo tanto, la

función de densidad half normal puede obtenerse como un caso particular de la normal truncada cuando $\mu = 0$.

La función de densidad conjunta de u y v puede calcularse como el producto de sus funciones de densidad marginales debido al supuesto (iii):

$$f(u, v) = \frac{1}{\left[1 - \Phi\left(\frac{-\mu}{\sigma_u}\right)\right] 2\pi\sigma_u\sigma_v} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u - \mu}{\sigma_u}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sigma_v}\right)^2\right]\right],$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < v < \infty \quad (3.3.26)$$

La densidad conjunta de u y ε puede expresarse como:

$$f(u, \varepsilon) = \frac{1}{\left[1 - \Phi\left(\frac{-\mu}{\sigma_u}\right)\right] 2\pi\sigma_u\sigma_v} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u - \mu}{\sigma_u}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon + u}{\sigma_v}\right)^2\right]\right],$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (3.3.27)$$

La densidad marginal de ε se obtiene integrando la expresión (3.3.27) con respecto a u tal y como se muestra a continuación:

$$f(\varepsilon) = \int_0^{\infty} f(u, \varepsilon) du = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu + \varepsilon}{\sigma}\right)^2\right]}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{\Phi\left(\frac{\mu}{\lambda\sigma} - \frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma_u}\right)}, \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (3.3.28)$$

Donde $\sigma = (\sigma_u^2 + \sigma_v^2)^{1/2}$ y $\lambda = \sigma_u/\sigma_v$, como en el modelo half normal. Si $\mu = 0$, la ecuación (3.3.28) coincide con la función de densidad marginal de la half normal presentada en la ecuación (3.3.8). La perturbación estocástica se distribuye asimétricamente con media y varianza:

$$E(\varepsilon) = -E(u) = -\frac{\mu\omega}{2} - \frac{\sigma_u\omega}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma_u}\right)^2\right] \quad (3.3.29)$$

$$V(\varepsilon) = \mu^2 \frac{\omega}{2} \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) + \frac{\omega}{2} \left(\frac{\pi - \omega}{\pi}\right) \sigma_u^2 + \sigma_v^2 \quad (3.3.30)$$

donde $\omega = [\Phi(\mu/\sigma_u)]^{-1}$.

La función de log-verosimilitud para una muestra de I unidades puede expresarse como:

$$L = \prod_i f(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma_u}\right)} \right)^I \cdot \sum_i \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma\lambda} - \frac{\varepsilon_i\lambda}{\sigma}\right) \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\varepsilon_i + \mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (3.3.31)$$

$$\ln L = k - I \ln \sigma - I \ln \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma_u}\right) + \sum_i \ln \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma\lambda} - \frac{\varepsilon_i\lambda}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\varepsilon_i + \mu}{\sigma}\right)^2 \quad (3.3.32)$$

donde $\sigma_u = \lambda\sigma/\sqrt{1 + \lambda^2}$.

De otra forma:

$\ln L(y|\beta, \mu, \sigma, \lambda) =$

$$\begin{aligned} &= k - I \ln \sigma - I \ln \Phi\left(\frac{\mu\sqrt{1 + \lambda^2}}{\lambda\sigma}\right) + \sum_i \ln \Phi\left(\frac{\mu}{\lambda\sigma} - (y_i - x'_i\beta) \frac{\lambda}{\sigma}\right) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{(y_i - x'_i\beta) + \mu}{\sigma}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

A continuación, se presentan las derivadas necesarias para maximizar la función de log-verosimilitud con respecto a cada parámetro y obtener estimaciones máximo verosímiles de los mismos.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{\lambda}{\sigma} \sum_i \frac{\phi\left(\frac{\mu}{\lambda\sigma} - \ln(y_i - x'_i\beta) \frac{\lambda}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\mu}{\lambda\sigma} - \ln(y_i - x'_i\beta) \frac{\lambda}{\sigma}\right)} x_i + \frac{1}{\sigma} \sum_i \left(\frac{(y_i - x'_i\beta) + \mu}{\sigma}\right) x_i \quad (3.3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= -\frac{I\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda\sigma} \cdot \frac{\phi\left(\ln \frac{\mu\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda\sigma}\right)}{\Phi\left(\ln \frac{\mu\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda\sigma}\right)} + \frac{1}{\lambda\sigma} \sum_i \frac{\phi\left(\frac{\mu}{\lambda\sigma} - \ln(y_i - x'_i\beta) \frac{\lambda}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\mu}{\lambda\sigma} - \ln(y_i - x'_i\beta) \frac{\lambda}{\sigma}\right)} = \\ &= -\frac{1}{\sigma} \sum_i \frac{(y_i - x'_i\beta) + \mu}{\sigma} \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= -\frac{I}{\sigma} + \frac{I\mu\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda\sigma^2} \cdot \frac{\phi\left(\ln \frac{\mu\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda\sigma}\right)}{\Phi\left(\ln \frac{\mu\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda\sigma}\right)} + \\ &+ \left(-\frac{\mu}{\lambda\sigma^2} + (y_i - x'_i\beta) \frac{\lambda}{\sigma^2}\right) \sum_i \frac{\phi\left(\frac{\mu}{\lambda\sigma} - \ln(y_i - x'_i\beta) \frac{\lambda}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\mu}{\lambda\sigma} - \ln(y_i - x'_i\beta) \frac{\lambda}{\sigma}\right)} + \\ &+ \frac{(y_i - x'_i\beta) + \mu}{\sigma^2} \sum_i \frac{(y_i - x'_i\beta) + \mu}{\sigma} \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} &= \frac{I\mu\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda\sigma^2} \cdot \frac{\phi\left(\ln \frac{\mu\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda\sigma}\right)}{\Phi\left(\ln \frac{\mu\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda\sigma}\right)} + \\ &+ \left(-\frac{\mu}{\sigma\lambda^2} - (y_i - x'_i\beta) \frac{1}{\sigma}\right) \sum_i \frac{\phi\left(\frac{\mu}{\lambda\sigma} - \ln(y_i - x'_i\beta) \frac{\lambda}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\mu}{\lambda\sigma} - \ln(y_i - x'_i\beta) \frac{\lambda}{\sigma}\right)} \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

Para obtener la información de u contenida en la perturbación estocástica, se calcula la distribución condicionada de u dado ε , que puede expresarse como:

$$f(u|\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_* \sqrt{2\pi} [1 - \Phi(-\tilde{\mu}/\sigma_*)]} \cdot \exp\left[-\frac{(u - \tilde{\mu})^2}{2\sigma_*^2}\right], \quad u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (3.3.38)$$

La distribución de $f(u|\varepsilon)$ se distribuye según una normal $N^+(\tilde{\mu}_i, \sigma_*^2)$, donde $\tilde{\mu}_i = (-\sigma_u^2 \varepsilon_i + \mu \sigma_v^2) / \sigma^2$ y $\sigma_*^2 = \sigma_u^2 \sigma_v^2 / \sigma^2$. Es posible realizar estimaciones puntuales de la ineficiencia técnica de cada unidad mediante la media y la moda de la misma:

$$E(u|\varepsilon) = \sigma_* \left[\frac{\tilde{\mu}}{\sigma_*} + \frac{\phi(\tilde{\mu}/\sigma_*)}{1 - \Phi(-\tilde{\mu}/\sigma_*)} \right] \quad (3.3.39)$$

y

$$M(u|\varepsilon) = \begin{cases} \tilde{\mu} & \text{si } \tilde{\mu} \geq 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3.3.40)$$

Las estimaciones puntuales de la eficiencia técnica de cada unidad productiva se obtienen bien sustituyendo tanto $E(u_i|\varepsilon_i)$ como $M(u_i|\varepsilon_i)$ en la ecuación (3.3.20), bien mediante:

$$ET_i = E(\exp[-u_i]|\varepsilon_i) = \frac{1 - \Phi[\sigma_* - (\tilde{\mu}_i/\sigma_*)]}{1 - \Phi(-\tilde{\mu}_i/\sigma_*)} \cdot \exp\left[-\tilde{\mu}_i + \frac{1}{2}\sigma_*^2\right] \quad (3.3.41)$$

que coincide con la ecuación (3.3.21) cuando $\mu = 0$.

Sus respectivos intervalos de confianza pueden obtenerse aplicando a las expresiones (3.3.22)-(3.3.24) la nueva densidad condicionada para el caso normal truncada.

3.1.3. Modelo exponencial

Dado el modelo de frontera de producción estocástica expresado en la ecuación (3.3.3), Aigner *et al.* (1977) propusieron los supuestos half normal y exponencial para la distribución de la ineficiencia técnica. La función de densidad en el último caso es la siguiente:

$$f(u) = \frac{1}{\sigma_u} \exp\left[-\frac{u}{\sigma_u}\right], \quad u \geq 0 \quad (3.3.42)$$

donde $1/\sigma_u > 0$ y la media y la varianza son $E[u] = 1/(1/\sigma_u) = \sigma_u$ y $\text{Var}[u] = 1/(1/\sigma_u)^2 = \sigma_u^2$, respectivamente.

Dados el supuesto (iii) y la función densidad para el término aleatorio establecida por el expresión (3.3.5), la función de densidad conjunta de u y v puede expresarse como:

$$f(u, v) = \frac{1}{\sigma_u \sigma_v \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u}{\sigma_u} - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sigma_v}\right)^2\right], \quad u \geq 0 \quad -\infty < v < \infty \quad (3.3.43)$$

Puesto que la perturbación aleatoria se calcula como $\varepsilon = v - u$, la función de densidad conjunta de u y ε resulta:

$$f(u, \varepsilon) = \frac{1}{\sigma_u \sigma_v \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u}{\sigma_u} - \frac{1}{2\sigma_v^2}(\varepsilon^2 + u^2 + 2\varepsilon u)\right],$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (3.3.44)$$

La función de densidad de la perturbación estocástica puede hallarse integrando la expresión anterior en función de u y coincide con la ecuación 19 de Aigner *et al.* (1977):

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_u} \Phi \left(-\frac{\varepsilon}{\sigma_v} - \frac{\sigma_v}{\sigma_u} \right) \cdot \exp \left[\frac{\sigma_v^2}{2\sigma_u^2} + \frac{\varepsilon}{\sigma_u} \right], \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (3.3.45)$$

El término de error compuesto ε se distribuye asimétricamente con media y varianza:

$$E(\varepsilon) = -E(u) = -\sigma_u \quad (3.3.46)$$

$$V(\varepsilon) = \sigma_u^2 + \sigma_v^2 \quad (3.3.47)$$

La distribución de la perturbación estocástica depende de los parámetros de desviación típica σ_u y σ_v . Cuando el cociente σ_u/σ_v se incrementa, la distribución se asemeja a una exponencial negativa, mientras que si se incrementa σ_v/σ_u , la distribución tiende a una normal.

La función de log-verosimilitud para una muestra de I unidades puede obtenerse mediante:

$$L = \prod_i f(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\sigma_u} \right)^I \cdot \sum_i \Phi \left(-\frac{\varepsilon_i}{\sigma_v} - \frac{\sigma_v}{\sigma_u} \right) \cdot \exp \sum_i \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_u} + \frac{\sigma_v^2}{2\sigma_u^2} \right) \quad (3.3.48)$$

$$\ln L = -I \ln \sigma_u + \sum_i \ln \Phi \left(-\frac{\varepsilon_i}{\sigma_v} - \frac{\sigma_v}{\sigma_u} \right) + I \frac{\sigma_v^2}{2\sigma_u^2} + \sum_i \frac{\varepsilon_i}{\sigma_u} \quad (3.3.49)$$

o, de otra forma,

$$\ln L(y|\beta, \sigma_u, \sigma_v) =$$

$$= -I \ln \sigma_u + I \frac{\sigma_v^2}{2\sigma_u^2} + \sum_i \ln \Phi \left(-\frac{1}{\sigma_v} (y_i - x'_i \beta) - \frac{\sigma_v}{\sigma_u} \right) + \sum_i \frac{1}{\sigma_u} (y_i - x'_i \beta) \quad (3.3.50)$$

La función de log-verosimilitud se maximiza respecto a cada parámetro para obtener estimaciones máximo verosímiles de los mismos. Behr y Tente (2008)

proporcionaron las derivadas de la función de log-verosimilitud para el caso exponencial:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma_v} \sum_i \frac{\phi\left(-\frac{1}{\sigma_v}(y_i - x'_i \beta) - \frac{\sigma_v}{\sigma_u}\right)}{\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_v}(y_i - x'_i \beta) - \frac{\sigma_v}{\sigma_u}\right)} x_i - \frac{1}{\sigma_u} \sum_i x_i \quad (3.3.51)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_u} = -\frac{I}{\sigma_u} - I \frac{\sigma_v^2}{\sigma_u^3} + \frac{\sigma_v}{\sigma_u^2} \sum_i \frac{\phi\left(-\frac{1}{\sigma_v}(y_i - x'_i \beta) - \frac{\sigma_v}{\sigma_u}\right)}{\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_v}(y_i - x'_i \beta) - \frac{\sigma_v}{\sigma_u}\right)} - \frac{1}{\sigma_u^2} \sum_i (y_i - x'_i \beta) \quad (3.3.52)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_v} = I \frac{\sigma_v}{\sigma_u^2} + \left(\frac{1}{\sigma_v^2} \sum_i (y_i - x'_i \beta) - \frac{1}{\sigma_u} \right) \sum_i \frac{\phi\left(-\frac{1}{\sigma_v}(y_i - x'_i \beta) - \frac{\sigma_v}{\sigma_u}\right)}{\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_v}(y_i - x'_i \beta) - \frac{\sigma_v}{\sigma_u}\right)} \quad (3.3.53)$$

Una vez estimados los parámetros de la frontera de producción, al igual que en el caso half normal, las estimaciones puntuales de eficiencia técnica pueden obtenerse tanto mediante la media como mediante la moda de la distribución condicionada de u dado ε .

Si se incorpora la notación $\Omega = -\tilde{\mu}/\sigma_v$ y $\tilde{\mu} = -\varepsilon - (\sigma_v^2/\sigma_u)$, la expresión (3.3.50) se simplifica como:

$$\ln L = -I \ln \sigma_u + \sum_i \ln \Phi(-\Omega) + I \sigma_v^2 / 2 \sigma_u^2 + \sum_i \varepsilon_i / \sigma_u \quad (3.3.54)$$

Por lo tanto, la distribución $f(u|\varepsilon)$ cuando u se supone distribuida según una exponencial puede expresarse como:

$$f(u|\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi} \Phi(-\tilde{\mu}/\sigma_v)} \cdot \exp\left[-\frac{(u - \tilde{\mu})^2}{2\sigma^2}\right], \quad u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (3.3.55)$$

La función de u condicionada a ε se distribuye según una $N^+(\tilde{\mu}, \sigma_v^2)$ cuya media es:

$$E(u|\varepsilon) = \tilde{\mu} + \sigma_v \left[\frac{\phi(-\tilde{\mu}/\sigma_v)}{1 - \Phi(-\tilde{\mu}/\sigma_v)} \right] = \sigma_v \left[\frac{\phi(\Omega)}{\Phi(-\Omega)} - \Omega \right] \quad (3.3.56)$$

Otro estimador puntual es la moda de la distribución condicionada, que puede expresarse como:

$$M(u|\varepsilon) = \begin{cases} \tilde{\mu} & \text{si } \tilde{\mu}_i \geq 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3.3.57)$$

Las estimaciones puntuales de la eficiencia técnica de cada unidad se obtienen sustituyendo $E(u_i|\varepsilon_i)$ o $M(u_i|\varepsilon_i)$ en la ecuación (3.3.20). Sus correspondientes intervalos de confianza pueden calcularse de la forma descrita en las ecuaciones (3.3.22)-(3.3.24).

3.1.4. Modelo gamma

Greene (1980 a, b) y Stevenson (1980) establecieron el supuesto distribucional gamma para el término de ineficiencia y Greene (1990) profundizó en el análisis bajo el supuesto. La distribución gamma supuesta para u generaliza la distribución exponencial de un parámetro introduciendo un parámetro adicional a estimar y, por lo tanto, proporciona un modelo más flexible para representar la ineficiencia a partir de la información contenida en los datos muestrales.

La función de densidad gamma puede expresarse como:

$$f(u) = \frac{(1/\sigma_u)^p}{\Gamma(p)} u^{p-1} \exp\left[-\frac{u}{\sigma_u}\right], \quad u \geq 0 \quad (3.3.58)$$

donde $1/\sigma_u, p > 0$, con media $E[u] = p/(1/\sigma_u)$ y varianza $\text{Var}(u) = p/(1/\sigma_u)^2$.

Cuando $p = 1$, la función de densidad gamma coincide con la función de densidad de la distribución exponencial. Cuando $0 < p < 1$, la densidad gamma tiene la forma de una densidad exponencial y por lo tanto, la mayor parte de la distribución se concentra cerca de cero. Cuando $p > 1$, la densidad se concentra en un punto lejano de cero.

La función de densidad conjunta de u y v puede calcularse como el producto de sus respectivas funciones de densidad marginales, ya que ambas variables son independientes entre sí:

$$f(u, v) = \frac{(1/\sigma_u)^p}{\sqrt{2\pi}\sigma_v\Gamma(p)} u^{p-1} \exp\left[\frac{-u}{\sigma_u} - \frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right], \quad u \geq 0 \quad -\infty < v < \infty \quad (3.3.59)$$

y, por lo tanto, la función de densidad conjunta de u y $\varepsilon = v - u$ es:

$$f(u, \varepsilon) = \frac{(1/\sigma_u)^p}{\sqrt{2\pi}\sigma_v\Gamma(p)} u^{p-1} \exp\left[\frac{-u}{\sigma_u} - \frac{(\varepsilon + u)^2}{2\sigma_v^2}\right], \quad u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (3.3.60)$$

A partir de la ecuación anterior, la función de densidad marginal de ε se obtiene integrando con respecto a u :

$$f(\varepsilon) = \frac{(1/\sigma_u)^p}{\sqrt{2\pi}\Gamma(p)} \sigma_v^{p-1} \exp\left[\frac{\varepsilon}{\sigma_u} + \frac{\sigma_v^2}{2\sigma_u^2}\right] \int_w^\infty (t - w)^{p-1} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt, \\ -\infty < \varepsilon < \infty \quad (3.3.61)$$

donde $w = (\varepsilon/\sigma_u) + (\sigma_v/\sigma_u)$ y ε se distribuye asimétricamente con media y varianza:

$$E(\varepsilon) = -E(u) = -p\sigma_u \quad (3.3.62)$$

$$V(\varepsilon) = \sigma_v^2 + p\sigma_u^2 \quad (3.3.63)$$

Stevenson mostró que la ecuación (3.3.61) tiende a la densidad de la perturbación para el caso exponencial dada en la ecuación (3.3.45).

El término integral de la ecuación (3.3.61) presenta algunos problemas de estimación y Beckers y Hammond (1987) obtuvieron una expresión alternativa para $f(\varepsilon)$ que no restringe el parámetro p a valores enteros:

$$f(\varepsilon) = \frac{(1/\sigma_u)^p}{\Gamma(p)\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_u^2}\right] \int_0^\infty u^{p-1} \exp\left[-\frac{u}{\sigma_u} - \frac{u\varepsilon}{\sigma_v^2} - \frac{u^2}{2\sigma_v^2}\right] du, \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (3.3.64)$$

donde la integral

$$\int_0^\infty u^{p-1} \exp\left[-\left(\frac{1}{\sigma_u} + \frac{\varepsilon}{\sigma_v^2}\right)u - \frac{u^2}{2\sigma_v^2}\right] du = J(p, \sigma_u, \sigma_v, \varepsilon) \quad (3.3.65)$$

presenta una expresión definida conocida.

La función de log-verosimilitud de la perturbación estocástica para una muestra de tamaño I puede escribirse como:

$$L = \frac{1}{[\Gamma(p)\sigma_u^p\sqrt{2\pi}\sigma_v]^I} \cdot \exp\left[-\sum_i \frac{\varepsilon_i^2}{2\sigma_u^2}\right] \cdot \sum_i J_i(p, \sigma_u, \sigma_v, \varepsilon) \quad (3.3.66)$$

$$\begin{aligned} \ln L &= k - I \ln \Gamma(p) - p I \ln \sigma_u - I \ln \sigma_v - \frac{1}{2\sigma_v^2} \sum_i \varepsilon_i^2 + \sum_i \ln J_i(p, \sigma_u, \sigma_v, \varepsilon) = \\ &= k - I \ln \Gamma(p) - p I \ln \sigma_u + I \left(\frac{\sigma_v^2}{2\sigma_u^2}\right) + \sum_i \frac{\varepsilon_i}{\sigma_u} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_i \ln \Phi \left[-\frac{(\varepsilon_i + \sigma_v^2/\sigma_u)}{\sigma_v} \right] + \sum_i \ln h(p, \varepsilon_i) \quad (3.3.67)$$

donde $h(p, \varepsilon_i) = E(z^{p-1} | z > 0, \varepsilon_i)$ y $z \sim N[-(\varepsilon_i + \sigma_v^2/\sigma_u), \sigma_v^2]$.

Greene (1990) proporcionó las derivadas de esta función con respecto a los parámetros para obtener las estimaciones de máxima verosimilitud de los mismos:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{\sigma_v^2} \left(\varepsilon + \frac{h(p, \varepsilon)}{h(p-1, \varepsilon)} \right) = -\frac{1}{\sigma_v^2} (\varepsilon + E(u|\varepsilon)) \quad (3.3.68)$$

A partir de la especificación original, $\varepsilon = y - \beta'x$, por lo tanto:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma_v^2} \left(\varepsilon + \frac{h(p, \varepsilon)}{h(p-1, \varepsilon)} \right) x \quad (3.3.69)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial (1/\sigma_u)} = \frac{p}{1/\sigma_u} - \frac{h(p, \varepsilon)}{h(p-1, \varepsilon)} = E[u] - E[u/\varepsilon] \quad (3.3.70)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \ln \frac{1}{\sigma_u} - \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} + E[\ln u/\varepsilon] \quad (3.3.71)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_v^2} &= \frac{1}{2\sigma_v^2} \left(\frac{\varepsilon^2}{\sigma_v^2} - 1 \right) + \frac{h(p+1, \varepsilon) + 2\varepsilon h(p, \varepsilon)}{2\sigma_v^4 h(p-1, \varepsilon)} = \\ &= \frac{1}{2\sigma_v^2} \left(\frac{\varepsilon^2}{\sigma_v^2} - 1 \right) + \frac{1}{2\sigma_v^4} [E[u^2/\varepsilon] + 2\varepsilon E[u/\varepsilon]] \end{aligned} \quad (3.3.72)$$

Para obtener las estimaciones de la eficiencia técnica de cada unidad, es necesario conocer la expresión de la función de densidad condicionada de u dado ε :

$$f(u|\varepsilon) = \frac{u^{p-1} \cdot \exp \left[- \left(\frac{1}{\sigma_u} + \frac{\varepsilon}{\sigma_v^2} \right) u - \frac{u^2}{2\sigma_v^2} \right]}{J(p, \sigma_u, \sigma_v, \varepsilon)}, \quad u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (3.3.73)$$

Una estimación puntual de la ineficiencia técnica puede realizarse mediante:

$$E(u|\varepsilon) = \frac{h(p, \varepsilon)}{h(p-1, \varepsilon)} \quad (3.3.74)$$

Las estimaciones puntuales de la eficiencia técnica de cada unidad se obtienen sustituyendo $E(u_i|\varepsilon_i)$ en la ecuación (3.3.20). Sus correspondientes intervalos de confianza pueden calcularse de la forma descrita en las ecuaciones (3.3.22)-(3.3.24).

3.2. Método de los Momentos

El Método de los Momentos (MM) constituye una alternativa al método MV que consiste en modificar la primera de las dos etapas del mismo dividiéndola en dos fases. En la primera de ellas se aplica el método de estimación MCO para obtener estimaciones consistentes de todos los parámetros de la frontera de producción, a excepción del término independiente. En la segunda fase se utiliza el método de los momentos, que consiste en la solución de un sistema de ecuaciones construido al igualar los k primeros momentos muestrales con los k primeros momentos poblacionales, de manera que se obtendrá un sistema diferente para cada supuesto distribucional establecido sobre la ineficiencia técnica. Este procedimiento de estimación en dos fases es equivalente a la aplicación de MCOM a un modelo de frontera de producción estocástica. Una vez se han obtenido las estimaciones consistentes del término independiente y de los parámetros que caracterizan la estructura de las componentes de la perturbación estocástica, se desarrolla la segunda etapa de MV, en la que se

utiliza la metodología propuesta por Jondrow *et al.* (1982) para estimar la ineficiencia técnica de cada unidad productiva.

Este método proporciona estimaciones consistentes de todos los parámetros del modelo, aunque ineficientes comparadas con las estimaciones máximo verosímiles. Por otra parte, puesto que el MM sólo utiliza los supuestos distribucionales a partir de la segunda fase, los estimadores obtenidos en la primera fase son robustos a los supuestos distribucionales sobre v y u .

Se comienza reescribiendo el modelo de producción estocástica dado en la ecuación (3.3.3) como:

$$\ln y_i = [\beta_0 - E(\varepsilon_i)] + \sum_n \beta_n \ln x_{ni} + [\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)] \quad (3.3.75)$$

donde $\varepsilon_i = v_i - u_i$ y las componentes de la perturbación cumplen los supuestos establecidos en la definición de frontera estocástica (i)-(iii). Entre ellos, se supone que v_i se distribuye simétricamente con media cero y que $u_i \geq 0$ y, debido a esto, puede escribirse:

$$\begin{aligned} E[\varepsilon - E[\varepsilon]] &= E[v - u - E[v - u]] = \\ &= E[v - u - E[v] + E[u]] = E[v - (u - E[u])] \end{aligned} \quad (3.3.76)$$

De manera que la ecuación (3.3.75) puede escribirse como sigue:

$$\ln y_i = [\beta_0 - E(u_i)] + \sum_n \beta_n \ln x_{ni} + v_i - [u_i - E(u_i)] \quad (3.3.77)$$

La nueva perturbación modificada $\{v_i - [u_i - E(u_i)]\}$ tiene media cero y varianza constante y, por lo tanto, MCO puede utilizarse en la primera fase del procedimiento de estimación por el método de los momentos para obtener estimaciones consistentes de los β .

La segunda etapa consiste en la estimación de β_0 y los parámetros involucrados en la estructura de los componentes del error mediante el método de los momentos. Para ello, deben calcularse los momentos centrados de la perturbación ε (momentos teóricos, μ_r):

$$\mu_r = E[(\varepsilon - E[\varepsilon])^r] = E[\{v - (u - E[u])\}^r] \quad (3.3.78)$$

para los órdenes 2 y 3, pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= E[(\varepsilon - E[\varepsilon])^2] = E[\{v - (u - E[u])\}^2] = E[\varepsilon^2 + E^2[\varepsilon] - 2\varepsilon E[\varepsilon]] = \\ &= E[\varepsilon^2] - E^2[\varepsilon] = \text{var}(\varepsilon) = \text{var}(v) + \text{var}(u) \end{aligned} \quad (3.3.79)$$

$$\begin{aligned} \mu_3 &= E[(\varepsilon - E[\varepsilon])^3] = E[\{v - (u - E[u])\}^3] = \\ &= E[v^3] - 3E[v^2]E[u - E[u]] + 3E[v]E[(u - E[u])^2] - E[(u - E[u])^3] = \\ &= -E[(u - E[u])^3] \end{aligned} \quad (3.3.80)$$

donde:

$$E[(u - E[u])^3] = E[u^3] - 3E[u^2]E[u] + 3E[u](E[u])^2 - (E[u])^3 \quad (3.3.81)$$

Posteriormente, cada uno de estos momentos teóricos se identifica con el momento de los residuos MCO (momentos muestrales, m_r) del orden correspondiente y, mediante la solución del sistema, se obtienen las expresiones de los estimadores.

3.2.1. Modelo half normal

La segunda etapa del procedimiento de estimación por el método de los momentos supone una distribución asimétrica para el término de ineficiencia. Siguiendo a Olson *et al.* (1980), se propone una distribución half normal como la de la ecuación (3.3.4) y el objetivo es la estimación de β_0 , σ_u^2 y σ_v^2 .

Mediante el cálculo de las ecuaciones de cada momento centrado de la perturbación según el procedimiento detallado en (3.3.78)-(3.3.81), se obtiene:

$$\mu_2(\varepsilon) = \sigma_v^2 + \frac{\pi - 2}{\pi} \sigma_u^2 \quad (3.3.82)$$

$$\mu_3(\varepsilon) = \sqrt{2/\pi} (1 - 4/\pi) \sigma_u^3 \quad (3.3.83)$$

donde $\mu_3(\varepsilon) = -E(u^3)$.

Igualando las ecuaciones (3.3.82) y (3.3.83) a sus correspondientes momentos centrados de los residuos MCO:

$$m_2 = \sigma_v^2 + \frac{\pi - 2}{\pi} \sigma_u^2 \quad (3.3.84)$$

$$m_3 = \sqrt{2/\pi} (1 - 4/\pi) \sigma_u^3 \quad (3.3.85)$$

Por lo tanto, las estimaciones de los parámetros resultan:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \left(\frac{m_3}{\sqrt{2/\pi} (1 - 4/\pi)} \right)^{2/3} \quad (3.3.86)$$

y

$$\hat{\sigma}_v^2 = m_2 - \frac{\pi - 2}{\pi} \hat{\sigma}_u^2 \quad (3.3.87)$$

Por último, puede obtenerse una estimación consistente de β_0 a partir de:

$$\hat{\beta}_0 = [\beta_0 - E(\hat{u}_i)] + \sqrt{2/\pi} \hat{\sigma}_u = \text{término independiente MCO} + \sqrt{2/\pi} \hat{\sigma}_u \quad (3.3.88)$$

La etapa final consiste en aplicar el procedimiento propuesto por Jondrow *et al.* (1982) para obtener una estimación puntual mediante las expresiones de $E(u_i|\varepsilon_i)$ o $M(u_i|\varepsilon_i)$, así como Horrace y Schmidt (1996) para obtener intervalos de confianza.

3.2.2. Modelo normal truncada

En Harris (1992) se obtienen las expresiones de los momentos centrados de los residuos MCO de orden dos, tres y cuatro que permiten plantear las respectivas ecuaciones para obtener las estimaciones de los parámetros σ_v^2 , σ_u y μ .

$$\mu_2 = \sigma^2 - \frac{\mu\sigma_u\phi(\mu/\sigma_u)}{\Phi(\mu/\sigma_u)} - \frac{\sigma_u^2\phi^2(\mu/\sigma_u)}{\Phi^2(\mu/\sigma_u)} \quad (3.3.89)$$

$$\mu_3 = \frac{\sigma_u(\sigma_u^2 - \mu^2)\phi(\mu/\sigma_u)}{\Phi(\mu/\sigma_u)} - \frac{3\mu\sigma_u\phi^2(\mu/\sigma_u)}{\Phi^2(\mu/\sigma_u)} - \frac{2\sigma_u^3\phi^3(\mu/\sigma_u)}{\Phi^3(\mu/\sigma_u)} \quad (3.3.90)$$

$$\begin{aligned} \mu_4 = 3\sigma^4 - \frac{\mu\sigma_u(\mu^2 + 3\sigma^2 + 3\sigma_v^2)\phi(\mu/\sigma_u)}{\Phi(\mu/\sigma_u)} - \frac{2\sigma_u^2(2\mu^2 + \sigma^2 + 2\sigma_v^2)\phi^2(\mu/\sigma_u)}{\Phi^2(\mu/\sigma_u)} - \\ - \frac{6\mu\sigma_u^3\phi^3(\mu/\sigma_u)}{\Phi^3(\mu/\sigma_u)} - \frac{3\sigma_u^4\phi^4(\mu/\sigma_u)}{\Phi^4(\mu/\sigma_u)} \end{aligned} \quad (3.3.91)$$

donde $\sigma^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$ y ϕ y Φ son las funciones de densidad y distribución normal estándar, respectivamente.

Ninguna de las tres ecuaciones es lineal en los parámetros y, por lo tanto, el sistema no es resoluble algebraicamente. Harris propone resolver el sistema de ecuaciones iterativamente usando la rutina IMSL (International Mathematical and Statistical Libraries, 1980).

A este respecto, Greene (1993) afirmó que, en el caso del modelo normal truncada, no parece existir un estimador conveniente por el método de los momentos.

3.2.3. Modelo exponencial

Greene (1993) desarrolló el procedimiento de estimación por el método de los momentos de los parámetros β_0 , $1/\sigma_u$ y σ_v^2 cuando se supone una distribución exponencial como la de la ecuación (3.3.42) para el término de ineficiencia.

En primer lugar, se calculan los momentos no centrados de la ineficiencia técnica a partir de la expresión:

$$E[u^r] = \frac{\Gamma(1+r)}{(1/\sigma_u)^r} \quad (3.3.92)$$

y se obtiene:

$$E[u] = \frac{\Gamma(2)}{1/\sigma_u} = \frac{1}{1/\sigma_u} \quad (3.3.93)$$

$$E[u^2] = \frac{\Gamma(3)}{(1/\sigma_u)^2} = \frac{2}{(1/\sigma_u)^2} \quad (3.3.94)$$

$$E[u^3] = \frac{\Gamma(4)}{(1/\sigma_u)^3} = \frac{6}{(1/\sigma_u)^3} \quad (3.3.95)$$

A partir de estos momentos no centrados, se presentan las expresiones de cada momento centrado de la perturbación:

$$\mu_2 = \sigma_v^2 + \frac{1}{(1/\sigma_u)^2} \quad (3.3.96)$$

$$\mu_3 = -\frac{2}{(1/\sigma_u)^3} \quad (3.3.97)$$

Una vez calculados los momentos centrados de la perturbación, se aplica el método de los momentos igualándolos a sus correspondientes momentos residuales:

$$m_2 = \sigma_v^2 + \frac{1}{(1/\sigma_u)^2} \quad (3.3.98)$$

$$m_3 = -\frac{2}{(1/\sigma_u)^3} \quad (3.3.99)$$

por lo tanto:

$$\hat{\sigma}_v^2 = m_2 - \frac{1}{\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_u}\right)^2} \quad (3.3.100)$$

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_u} = \left(\frac{-2}{m_3}\right)^{1/3} \quad (3.3.101)$$

y

$$\hat{\beta}_0 = [\beta_0 - E(\hat{u}_i)] - \frac{1}{\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_u}\right)} = \text{término independiente MCO} - \frac{1}{\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_u}\right)} \quad (3.3.102)$$

3.2.4. Modelo gamma

En el caso en que se supone una distribución gamma para el término de ineficiencia como la de la expresión (3.3.58), Greene (1993) desarrolló el procedimiento de estimación por el método de los momentos de los parámetros β_0 , p , $1/\sigma_u$ y σ_v^2 .

Los momentos no centrados de la ineficiencia técnica pueden calcularse a partir de la expresión:

$$E[u^r] = \frac{\Gamma(p+r)}{\Gamma(p)(1/\sigma_u)^r} \quad (3.3.103)$$

y resultan:

$$E[u] = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)1/\sigma_u} = \frac{p}{1/\sigma_u} \quad (3.3.104)$$

$$E[u^2] = \frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(p)(1/\sigma_u)^2} = \frac{p(p+1)}{(1/\sigma_u)^2} \quad (3.3.105)$$

$$E[u^3] = \frac{\Gamma(p+3)}{\Gamma(p)(1/\sigma_u)^3} = \frac{p(p+1)(p+2)}{(1/\sigma_u)^3} \quad (3.3.106)$$

Si se sustituyen las expresiones (3.3.104)-(3.3.106) en las ecuaciones de los correspondientes momentos centrados de la perturbación estocástica (3.3.79) y (3.3.80), se obtiene:

$$\mu_2 = \sigma_v^2 + \frac{p}{(1/\sigma_u)^2} \quad (3.3.107)$$

$$\mu_3 = -\frac{2p}{(1/\sigma_u)^3} \quad (3.3.108)$$

Mediante la misma metodología, puede hallarse el momento de orden cuatro aunque, para simplificar el cálculo, se utiliza:

$$\mu_{4*} = E[(\varepsilon - E[\varepsilon])^4] - 3\text{var}^2(\varepsilon) = \frac{6p}{(1/\sigma_u)^4} \quad (3.3.109)$$

Una vez calculados los momentos centrales de la perturbación, se aplica el método de los momentos igualándolos a sus correspondientes momentos residuales:

$$m_2 = \sigma_v^2 + \frac{p}{(1/\sigma_u)^2} \quad (3.3.110)$$

$$m_3 = -\frac{2p}{(1/\sigma_u)^3} \quad (3.3.111)$$

$$m_{4*} = \frac{6p}{(1/\sigma_u)^4} \quad (3.3.112)$$

Despejando en el sistema anterior, se obtienen las expresiones de los estimadores por el método de los momentos:

$$\hat{\sigma}_v^2 = m_2 - \frac{\hat{p}}{(1/\hat{\sigma}_u)^2} \quad (3.3.113)$$

$$\hat{p} = \frac{-(1/\hat{\sigma}_u)^3 m_3}{2} \quad (3.3.114)$$

$$1/\hat{\sigma}_u = \frac{-3m_3}{m_{4*}} \quad (3.3.115)$$

El estimador corregido por el método de los momentos del término independiente resulta:

$$\hat{\beta}_0 = [\beta_0 - E(\hat{u}_i)] - \frac{p}{1/\sigma_u} = \text{término independiente MCO} - \frac{p}{1/\sigma_u} \quad (3.3.116)$$

4. Estimación de fronteras con datos de panel

Según Schmidt y Sickles (1984), los modelos de frontera estocástica suelen presentar tres debilidades. Primera, la varianza de la distribución de ineficiencia condicionada a la perturbación no tiende a cero cuando aumenta el tamaño muestral (Jondrow *et al.* 1982), de manera que la ineficiencia de una unidad específica puede estimarse, aunque no de forma consistente. Segundo, la estimación máximo verosímil del modelo frontera de producción estocástica, así como la distinción entre eficiencia técnica y error aleatorio, requieren fuertes supuestos distribucionales sobre cada una de las componentes del error. Sin embargo, la relación de la robustez de los resultados con estos supuestos no es clara. Tercero, debe suponerse independencia entre la componente de ineficiencia y los regresores para realizar la estimación máximo verosímil, sin embargo, es razonable que si una unidad conoce su nivel de ineficiencia técnica, esto pueda afectar, por ejemplo, a su selección de los inputs.

Las tres limitaciones descritas son potencialmente evitables si se dispone de datos de panel, es decir de T observaciones para cada una de las I unidades. En primer lugar, la eficiencia técnica de cada unidad muestral puede estimarse consistentemente cuando T tiende a infinito, no todas las técnicas de panel se apoyan sobre fuertes supuestos distribucionales y, por último, las repetidas observaciones de cada unidad pueden sustituir los supuestos de independencia.

Sin embargo, los modelos frontera de producción con datos de panel requieren el establecimiento de un supuesto sobre la variabilidad temporal de la eficiencia técnica. Puede considerarse una eficiencia técnica que, aunque varía entre

unidades, es invariante en el período estudiado, o bien puede permitirse que la eficiencia varíe tanto entre unidades como a lo largo del tiempo.

Para simplificar la notación, se supondrá en esta sección que el panel es equilibrado en el sentido de que se dispone de T observaciones para cada unidad.

4.1. Eficiencia invariante en el tiempo

Si se supone que se dispone de datos sobre I unidades, $i = 1, \dots, I$, a lo largo de T períodos de tiempo, $t = 1, \dots, T$, un modelo frontera estocástica de producción de tipo Cobb-Douglas con eficiencia técnica invariante en el tiempo puede expresarse como sigue:

$$\ln y_{it} = \beta_0 + \sum_n \beta_n \ln x_{nit} + v_{it} - u_i \quad (3.4.1)$$

donde v_{it} representa el error aleatorio, $u_i \geq 0$ representa la ineficiencia técnica y se supone inexistencia de cambio técnico, es decir, la estructura de producción se supone constante a lo largo del tiempo.

Por tanto, la única diferencia de este modelo y el presentado en la ecuación (3.3.3) es la inclusión de subíndices temporales en el output, los inputs y el error aleatorio.

Según Kumbhakar y Lovell (2000), existen tres métodos de estimación de los modelos frontera de producción con datos de panel: el modelo de efectos fijos, el modelo de efectos aleatorios y la aproximación por máxima verosimilitud. Este último método es el más utilizado en el análisis empírico. En cuanto a los resultados obtenidos, la literatura reporta varias comparaciones de las tres

metodologías que coinciden en que generan ordenaciones de eficiencia similares (Gong y Sickles, 1989; Bauer *et al.*, 1993; Bauer y Hancock, 1993). Por lo tanto, únicamente se profundizará en el desarrollo de la estimación máximo verosímil y, dado que este procedimiento de estimación con datos de panel es idéntico al desarrollado para datos de corte transversal, sólo se presenta el caso de un supuesto distribucional.

Se establecen en el modelo frontera de producción estocástica dado por la ecuación (3.4.1) los siguientes supuestos distribucionales:

- (i) los v_{it} se distribuyen idéntica e independientemente según una $N(0, \sigma_v^2)$.
- (ii) los u_i se distribuyen idéntica e independientemente según una distribución asimétrica.
- (iii) los v_{it} y los u_i se distribuyen independientemente entre sí y con los regresores.

Por lo tanto, la función de densidad de $v = (v_1, \dots, v_T)'$, que depende del tiempo, viene dada por la siguiente generalización de la ecuación (3.3.5):

$$f(v) = \frac{1}{(2\pi)^{T/2} \sigma_v^T} \cdot \exp \left[\frac{-v'v}{2\sigma_v^2} \right] \quad (3.4.2)$$

Pitt y Lee (1981) establecieron el supuesto de half normalidad de la ineficiencia en (ii), de manera que la función de densidad u , que es independiente del tiempo, viene expresada en la ecuación (3.3.4).

Dado el supuesto de independencia (iii), la función de densidad conjunta de u y v resulta:

$$f(u, v) = \frac{2}{(2\pi)^{(T+1)/2} \sigma_u \sigma_v^T} \cdot \exp \left[-\frac{u^2}{2\sigma_u^2} - \frac{v'v}{2\sigma_v^2} \right] \quad (3.4.3)$$

y la función de densidad conjunta de u y $\varepsilon = (v_1 - u, \dots, v_T - u)'$ puede escribirse como:

$$f(u, \varepsilon) = \frac{2}{(2\pi)^{(T+1)/2} \sigma_u \sigma_v^T} \cdot \exp \left[-\frac{(u - \mu_*)^2}{2\sigma_*^2} - \frac{\varepsilon' \varepsilon}{2\sigma_v^2} + \frac{\mu_*^2}{2\sigma_*^2} \right] \quad (3.4.4)$$

donde

$$\mu_* = -\frac{T\sigma_u^2 \bar{\varepsilon}}{\sigma_v^2 + T\sigma_u^2} \quad (3.4.5)$$

$$\sigma_*^2 = \frac{\sigma_u^2 \sigma_v^2}{\sigma_v^2 + T\sigma_u^2} \quad (3.4.6)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{T} \sum_t \varepsilon_{it} \quad (3.4.7)$$

La función de densidad marginal de la perturbación aleatoria se calcula como:

$$f(\varepsilon) = \int_0^\infty f(u, \varepsilon) du = \frac{2[1 - \Phi(-\mu_*/\sigma_*)]}{(2\pi)^{T/2} \sigma_v^{T-1} (\sigma_v^2 + T\sigma_u^2)^{1/2}} \cdot \exp \left[-\frac{\varepsilon' \varepsilon}{2\sigma_v^2} + \frac{\mu_*^2}{2\sigma_*^2} \right] \quad (3.4.8)$$

A partir de la ecuación anterior, se obtiene la expresión de la función de log-verosimilitud para una muestra de I unidades observadas durante T períodos de tiempo:

$$\begin{aligned} \ln L = k - \frac{I(T-1)}{2} \ln \sigma_v^2 - \frac{I}{2} \ln (\sigma_v^2 + T\sigma_u^2) + \sum_i \ln \left[1 - \Phi \left(-\frac{\mu_{*i}}{\sigma_*} \right) \right] - \\ - \frac{\sum_i \varepsilon_i' \varepsilon_i}{2\sigma_v^2} + \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\mu_{*i}}{\sigma_*} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

La función de log-verosimilitud puede maximizarse con respecto a los parámetros para obtener las estimaciones máximo verosímiles de β , σ_v^2 y σ_u^2 .

La siguiente etapa consiste en obtener estimaciones de la eficiencia invariante en el tiempo para cada unidad. Para ello, se genera la distribución condicionada de la ineficiencia dada la perturbación:

$$f(u|\varepsilon) = \frac{f(u, \varepsilon)}{f(\varepsilon)} = \frac{1}{\sigma_* \sqrt{2\pi} \left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right)\right]} \cdot \exp\left[-\frac{(u - \mu_*)^2}{2\sigma_*^2}\right] \quad (3.4.10)$$

cuya distribución es una $N^+(\mu_*, \sigma_*^2)$.

Tanto la media como la moda de esta distribución pueden usarse como estimaciones puntuales de la ineficiencia técnica:

$$E(u|\varepsilon) = \mu_* + \sigma_* \left[\frac{\Phi(-\mu_*/\sigma_*)}{1 - \Phi(-\mu_*/\sigma_*)} \right] \quad (3.4.11)$$

y

$$M(u|\varepsilon) = \begin{cases} \mu_* & \text{si } \varepsilon \leq 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3.4.12)$$

Las estimaciones puntuales de la ineficiencia técnica de cada unidad pueden obtenerse sustituyendo tanto $E(u_i|\hat{\varepsilon}_i)$ como $M(u_i|\hat{\varepsilon}_i)$ en el lugar de \hat{u}_i en la expresión (3.3.20); o alternativamente:

$$E(\exp[-u_i]|\varepsilon_i) = \frac{1 - \Phi(\sigma_* - \mu_{*i}/\sigma_*)}{1 - \Phi(-\mu_{*i}/\sigma_*)} \cdot \exp\left[-\mu_{*i} + \frac{1}{2}\sigma_*^2\right] \quad (3.4.13)$$

Los intervalos de confianza pueden calcularse realizando los cambios apropiados en la notación de las ecuaciones (3.3.22)-(3.3.24) del modelo de máxima verosimilitud para datos de corte transversal.

4.2. Eficiencia variante en el tiempo

El supuesto de eficiencia invariante en el tiempo puede resultar demasiado restrictivo, especialmente cuando se analizan unidades de decisión que se desenvuelven en entornos competitivos o cuando se dispone de información para muchos períodos de tiempo. En esta sección se relaja este supuesto y aparece la necesidad de estimar parámetros adicionales.

Los procedimientos de estimación bajo este supuesto son el método de máxima verosimilitud y el método de los momentos, ambos desarrollados en Kumbhakar y Lovell (2000).

4.2.1. Máxima Verosimilitud

La expresión del modelo frontera estocástica para datos de panel con eficiencia variante en el tiempo es la siguiente:

$$\ln y_{it} = \beta_0 + \sum_n \beta_n \ln x_{nit} + v_{it} - u_{it} \quad (3.4.14)$$

donde

$$u_{it} = \beta_t \cdot u_i \quad (3.4.15)$$

suponiendo $u_i \sim \text{iid } N^+(0, \sigma_u^2)$ y $v_{it} \sim \text{iid } N(0, \sigma_v^2)$.

La perturbación estocástica se define como $\varepsilon_{it} = v_{it} - u_{it} = v_{it} - \beta_t \cdot u_i$ donde $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{iT})'$, por lo tanto:

$$f(\varepsilon_i) = \int_0^\infty f(\varepsilon_i, u_i) du_i = \int_0^\infty \prod_t f(\varepsilon_{it} - \beta_t \cdot u_i) f(u_i) du_i =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{(2\pi)^{(T+1)/2} \sigma_v^T \sigma_u} \cdot \int_0^\infty \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\sum_t (\varepsilon_{it} - \beta_t \cdot u_i)^2}{\sigma_v^2} + \frac{u_i^2}{\sigma_u^2} \right) \right] du_i = \\
 &= \frac{2\sigma_* \exp \left[-\frac{1}{2} a_{i*} \right]}{(2\pi)^{T/2} \sigma_v^T \sigma_u} \int_0^\infty \frac{1}{\sigma_* \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_*^2} (u_i - \mu_{i*})^2 \right] du_i \quad (3.4.16)
 \end{aligned}$$

donde:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sigma_* \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_*^2} (u_i - \mu_{i*})^2 \right] du_i = 1 - \Phi \left(-\frac{\mu_{i*}}{\sigma_*} \right) \quad (3.4.17)$$

$$\mu_{i*} = \frac{(\sum_t \beta_t \cdot \varepsilon_{it}) \sigma_v^2}{(\sigma_v^2 + \sigma_u^2 \sum_t \beta_t^2)} \quad (3.4.18)$$

$$\sigma_*^2 = \frac{\sigma_v^2 \sigma_u^2}{\sigma_v^2 + \sigma_u^2 \sum_t \beta_t^2} \quad (3.4.19)$$

$$a_{i*} = \frac{1}{\sigma_v^2} \left[\sum_t \varepsilon_{it}^2 - \frac{\sigma_u^2 (\sum_t \beta_t \cdot \varepsilon_{it})^2}{\sigma_v^2 + \sigma_u^2 \sum_t \beta_t^2} \right] \quad (3.4.20)$$

La función de log-verosimilitud resulta:

$$\ln L = k - \frac{I}{2} \ln \sigma_*^2 - \frac{1}{2} \sum_i a_{*i} - \frac{I \cdot T}{2} \ln \sigma_v^2 - \frac{I}{2} \ln \sigma_u^2 + \sum_i \ln \left[1 - \Phi \left(-\frac{\mu_{i*}}{\sigma_*} \right) \right] \quad (3.4.21)$$

y puede maximizarse para obtener las estimaciones de β , β_t , σ_u^2 y σ_v^2 .

La función de densidad de la ineficiencia condicionada a la perturbación se distribuye según una $N^+(\mu_{*i}, \sigma_*^2)$.

Un estimador de u_i puede obtenerse a partir de la media o la moda de $(u_i|\varepsilon_i)$, cuyas expresiones vienen dadas por:

$$E(u|\varepsilon) = \mu_* + \sigma_* \left[\frac{\phi(-\mu_*/\sigma_*)}{1 - \Phi(-\mu_*/\sigma_*)} \right] \quad (3.4.22)$$

y

$$M(u|\varepsilon) = \begin{cases} u_* & \text{si } \sum_t \beta_t \cdot \varepsilon_t \geq 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3.4.23)$$

Una vez estimado u_i , puede estimarse u_{it} como $\hat{u}_{it} = \hat{u}_i \cdot \hat{\beta}_t$, donde \hat{u}_i puede ser $E(u_i|\varepsilon_i)$ o $M(u_i|\varepsilon_i)$ y $\hat{\beta}_t$ son las estimaciones máximo verosímiles de β_t , $t = 1, \dots, T$, sujeto a una normalización como $\beta_1 = 1$ o $\beta_T = 1$.

Un estimador alternativo es:

$$\begin{aligned} E(\exp[-u_{it}]|\varepsilon_i) &= E(\exp[-u_i \cdot \beta_t]|\varepsilon_i) = \\ &= \frac{1 - \Phi(\beta_t \sigma_* - \mu_{*i}/\sigma_*)}{1 - \Phi(-\mu_{*i}/\sigma_*)} \cdot \exp \left[-\beta_t \cdot \mu_{*i} + \frac{1}{2} \beta_t^2 \cdot \sigma_*^2 \right] \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

La dependencia temporal de los coeficientes se ha formulado mediante dos tipos de expresiones:

Kumbhakar (1990) especificó $\beta(t)$ como una función paramétrica del tiempo cuya expresión es:

$$\beta(t) = \left[1 + \exp[\gamma t + \delta t^2] \right]^{-1} \quad (3.4.25)$$

La función $\beta(t)$ cumple que $0 \leq \beta(t) \leq 1$ y será monótonamente creciente o decreciente, cóncava o convexa, dependiendo de los signos y las magnitudes de

los dos parámetros γ y δ . Si $\gamma = \delta = 0$, entonces, la eficiencia técnica es invariante en el tiempo.

Battese y Coelli (1992) proponen una función alternativa que presenta sólo un parámetro adicional γ a estimar:

$$\beta(t) = \exp[-\gamma(t - T)] \quad (3.4.26)$$

La función $\beta(t)$ cumple que $\beta(t) \geq 0$ y $\beta(t)$ decrece a una tasa creciente si $\gamma > 0$, crece a una tasa creciente si $\gamma < 0$, o permanece constante si $\gamma = 0$.

4.2.2. Método de los Momentos

Para estimar el modelo frontera de producción usando una aproximación por el método de los momentos, se comienza reescribiendo la ecuación (3.4.14) como

$$\begin{aligned} \ln y_{it} &= \beta_0 - \beta_t \cdot \sqrt{2/\pi} \sigma_u + \sum_n \beta_n \ln x_{nit} + v_{it} - (u_{it} - E(u_{it})) = \\ &= \beta_t^* + \sum_n \beta_n \ln x_{nit} + v_{it} - u_{it}^* \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

donde $u_{it} = u_i \cdot \beta_t$ y $E(u_{it}) = \beta_t \cdot \sqrt{2/\pi} \sigma_u$.

En la primera etapa se estima la ecuación (3.4.27) mediante MCO añadiendo dummies de tiempo cuyos coeficientes son β^* .

En la segunda etapa, se utilizan los residuos de la regresión anterior para calcular momentos terceros para cada t:

$$m_{3t} = \beta_t^3 \cdot E(u_i - E(u_i))^3 = \beta_t^3 \cdot \sigma_u^3 \cdot \left[\sqrt{2/\pi} (1 - 4/\pi) \right] \quad (3.4.28)$$

entonces,

$$\beta_t \sigma_u = \left[\frac{m_{3t}}{\sqrt{2/\pi}} \left(1 - \frac{4}{\pi}\right)^{-1} \right]^{1/3}, \quad t = 1, \dots, T \quad (3.4.29)$$

La normalización $\beta_1 = 1$ en la ecuación (3.4.29) permite obtener estimaciones de σ_u y β_t , $t = 2, \dots, T$.

En cuanto al término independiente,

$$\hat{\beta}_0 = (1/T) \sum_t \hat{\beta}_t^* + \hat{\beta}_t \hat{\sigma}_u \sqrt{2/\pi} \quad (3.4.30)$$

Dado que la varianza de ε_{it}^* es $[\sigma_v^2 + \beta_t^2 \sigma_u^2 (1 - 2/\pi)]$, σ_v^2 puede estimarse como:

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{I \cdot T} \sum_i \sum_t \hat{\varepsilon}_{it}^{*2} - \frac{1}{T} \hat{\sigma}_u^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \sum_t \hat{\beta}_t^2 \quad (3.4.31)$$

En el cuarto paso, los valores estimados de β , β_t , σ_v^2 y σ_u^2 se usan para obtener estimaciones de u_i tanto a partir de $E(u_i|\varepsilon_i)$ como a partir de $M(u_i|\varepsilon_i)$. Las estimaciones de u_{it} se obtienen posteriormente a partir de $\hat{u}_{it} = E(u_i|\varepsilon_i) \cdot \hat{\beta}_t$, $\hat{u}_{it} = M(u_i|\varepsilon_i) \cdot \hat{\beta}_t$ o $E(\exp[-u_{it}]|\varepsilon_i)$.

5. Estimación de la eficiencia en costes

En este epígrafe se plantea el procedimiento a seguir para aplicar métodos de estimación a una frontera estocástica de costes. En este sentido, Kumbhakar y Lovell (2000) desarrollan brevemente los procedimientos que son paralelos a los expuestos previamente para fronteras estocásticas de producción.

La característica más significativa y valiosa de la estimación de una frontera de costes consiste en que permite analizar fenómenos en los que las unidades analizadas producen múltiples outputs. Para ello, es indispensable disponer de información sobre los precios de los inputs, así como de las cantidades de inputs y outputs. Además, puesto que el comportamiento óptimo consiste en la minimización del coste, se trata de un proceso de estimación especialmente apropiado para entornos competitivos en los que los precios de los inputs son exógenos.

El análisis se basa en una frontera de costes que puede expresarse como:

$$C_i \geq c(y_i, w_i; \beta), \quad i = 1, \dots, I \quad (3.5.1)$$

donde $C_i = \sum_n w_{ni} x_{ni}$ es el coste en el que incurre la unidad i , $y_i = (y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{Mi}) \geq 0$ es un vector del output producido por la unidad i , $w_i = (w_{1i}, w_{2i}, \dots, w_{Ni}) > 0$ es el vector de precios de inputs de la unidad i , $c(y_i, w_i; \beta)$ es la frontera de costes común para todas las unidades y β es el vector de parámetros a estimar.

La eficiencia en costes de una unidad i puede expresarse mediante:

$$EC_i = \frac{c(y_i, w_i; \beta)}{C_i} \quad (3.5.2)$$

es decir, como el ratio del mínimo coste realizable sobre el coste observado. Dado que la frontera de costes se establece como un límite inferior (3.5.1), la eficiencia en costes definida según la expresión (3.5.2) nunca superará la unidad. Se trata de una frontera determinística, por lo que todo el exceso del coste observado sobre el mínimo alcanzable se atribuye a ineficiencia en costes.

Una frontera de costes estocástica puede expresarse como:

$$C_i \geq c(y_i, w_i; \beta) \cdot \exp[v_i], \quad i = 1, \dots, I \quad (3.5.3)$$

donde $c(y_i, w_i; \beta)$ es la parte determinística común para todas las unidades y $\exp[v_i]$ es la parte aleatoria específica de cada unidad.

En un modelo estocástico, la eficiencia en costes de una unidad i se calcula mediante la expresión:

$$EC_i = \frac{c(y_i, w_i; \beta) \cdot \exp[v_i]}{C_i} \quad (3.5.4)$$

Si se supone una forma funcional Cobb-Douglas en términos de los logaritmos de las variables, el modelo estocástico frontera de costes dado en la ecuación (3.5.3) puede escribirse como:

$$\ln C_i \geq \beta_0 + \beta_y \ln y_i + \sum_n \beta_n \ln w_{ni} + v_i = \beta_0 + \beta_y \ln y_i + \sum_n \beta_n \ln w_{ni} + v_i + u_i \quad (3.5.5)$$

donde v_i es la componente simétrica que recoge los efectos aleatorios y u_i representa la componente asimétrica de la ineficiencia en costes, siendo la perturbación estocástica total $\varepsilon_i = v_i + u_i$.

Una frontera de costes debe presentar homogeneidad lineal en los precios de los inputs y debe tener en cuenta la restricción $\beta_k = 1 - \sum_{n \neq k} \beta_n$, de manera que el modelo de frontera de costes debe expresarse como:

$$\ln \left(\frac{C_i}{w_{ki}} \right) = \beta_0 + \beta_y \ln y_i + \sum_{n \neq k} \beta_n \ln \left(\frac{w_{ni}}{w_{ki}} \right) + v_i + u_i \quad (3.5.6)$$

Aplicando la expresión (3.3.20), la eficiencia en costes puede medirse mediante:

$$EC_i = \exp[-u_i] \quad (3.5.7)$$

La estructura del modelo estocástico de frontera de costes es la misma que la del modelo estocástico de frontera de producción por lo que, excepto por algunos cambios de signo en la perturbación estocástica, el desarrollo de los procesos de estimación MV y MM será paralelo al expuesto en las secciones previas. Por este motivo, se presenta únicamente de forma resumida el proceso de estimación MV, que es el utilizado en este estudio, bajo el supuesto de distribución half normal de la ineficiencia en costes.

Dado un modelo estocástico de frontera de costes como el de la ecuación (3.5.6), el proceso de estimación por máxima verosimilitud requiere el establecimiento de los siguientes supuestos:

- (i) los v_i se distribuyen idéntica e independientemente según una $N(0, \sigma_v^2)$.
- (ii) los u_i se distribuyen idéntica e independientemente según una $N^+(0, \sigma_u^2)$.
- (iii) los v_i y los u_i se distribuyen independientemente entre sí y con los regresores.

Las funciones de densidad de u y v se presentan en las ecuaciones (3.3.4) y (3.3.5), respectivamente.

$$\begin{aligned}
 f(\varepsilon) &= \int_0^\infty f(u, \varepsilon) du = \int_0^\infty \frac{2}{2\pi\sigma_u\sigma_v} \cdot \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_u^2} - \frac{(\varepsilon - u)^2}{2\sigma_v^2}\right] du = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{-\varepsilon\lambda}{\sigma}\right)\right] \cdot \exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{2}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right), \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (3.5.8)
 \end{aligned}$$

donde $\sigma = (\sigma_u^2 + \sigma_v^2)^{1/2}$, $\lambda = \sigma_u/\sigma_v$ y $\Phi(\cdot)$ y $\phi(\cdot)$ son funciones de distribución y densidad normales estándar, respectivamente.

La perturbación aleatoria ε se distribuye asimétricamente con media y varianza:

$$E(\varepsilon) = E(u) = \sigma_u \sqrt{2/\pi} \quad (3.5.9)$$

$$V(\varepsilon) = \frac{\pi - 2}{\pi} \sigma_u^2 + \sigma_v^2 \quad (3.5.10)$$

La función de log-verosimilitud, que puede maximizarse con respecto a los parámetros para obtener estimaciones máximo verosímiles de los mismos, presenta la siguiente expresión:

$$\ln L = k - \ln \sigma + \sum_i \ln \Phi \left(\frac{\varepsilon_i \lambda}{\sigma} \right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_i \varepsilon_i^2 \quad (3.5.11)$$

Siguiendo el procedimiento de estimación de la ineficiencia técnica para cada unidad propuesto por Jondrow *et al.* (1982), el procedimiento de estimación de la eficiencia en costes comienza con la obtención de la distribución de u condicionada a ε :

$$\frac{f(u, \varepsilon)}{f(\varepsilon)} = \frac{1}{\sigma_* \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left[-\frac{(u - \mu_*)^2}{2\sigma_*^2} \right] / \left[1 - \Phi \left(-\frac{\mu_*}{\sigma_*} \right) \right],$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (3.5.12)$$

donde $\mu_* = \varepsilon \sigma_u^2 / \sigma^2$ y $\sigma_*^2 = \sigma_u^2 \sigma_v^2 / \sigma^2$. Puesto que $f(u|\varepsilon)$ se distribuye según una $N^+(\mu_*, \sigma_*^2)$, tanto la media como la moda de esta distribución pueden utilizarse como estimaciones puntuales para la ineficiencia de cada unidad:

$$E(u|\varepsilon) = \mu_* + \sigma_* \frac{\Phi(-\mu_*/\sigma_*)}{1 - \Phi(-\mu_*/\sigma_*)} = \sigma_* \left[\frac{\Phi(\varepsilon\lambda/\sigma)}{1 - \Phi(-\varepsilon\lambda/\sigma)} + \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma} \right) \right] \quad (3.5.13)$$

y

$$M(u|\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon\sigma_u^2/\sigma^2 & \text{si } \varepsilon \geq 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3.5.14)$$

Las expresiones anteriores son válidas para $\varepsilon = \varepsilon_i$. Por tanto, a partir de los valores estimados de ε_i , se pueden obtener las correspondientes estimaciones de u_i , $E(u_i|\hat{\varepsilon}_i)$.

Una vez se ha obtenido la estimación puntual de u_i , es posible obtener las estimaciones de la eficiencias en costes de cada unidad analizada mediante la sustitución en \hat{u}_i tanto de $E(u_i|\hat{\varepsilon}_i)$ como de $M(u_i|\hat{\varepsilon}_i)$ en la expresión (3.3.20). Battese y Coelli (1988) propusieron una estimación puntual alternativa:

$$EC_i = E(\exp[-u_i]|\varepsilon_i) = \frac{1 - \Phi(\sigma_* - \mu_{*i}/\sigma_*)}{1 - \Phi(-\mu_{*i}/\sigma_*)} \cdot \exp\left[-\mu_{*i} + \frac{1}{2}\sigma_*^2\right] \quad (3.5.15)$$

Independientemente del estimador utilizado, las estimaciones de la eficiencia en costes no son consistentes debido a que la variación asociada con la distribución de $(u|\varepsilon)$ es independiente de i .

Horrace y Schmidt (1996) proponen unos límites de intervalos de confianza que se presentan en las ecuaciones (3.3.22)-(3.3.24) y pueden utilizarse para estimar la eficiencia en costes.

En el caso en el que se dispone de datos de panel, los supuestos realizados para estimar el modelo de frontera estocástica de costes por MV son los siguientes:

- (i) los v_{it} se distribuyen idéntica e independientemente según una $N(0, \sigma_v^2)$.
- (ii) los u_i se distribuyen idéntica e independientemente según una $N^+(0, \sigma_u^2)$.
- (iii) los v_{it} y los u_i se distribuyen independientemente entre sí y con los regresores.

La función de densidad marginal de la perturbación aleatoria se calcula como:

$$f(\varepsilon) = \int_0^{\infty} f(u, \varepsilon) du = \frac{2[1 - \Phi(-\mu_*/\sigma_*)]}{(2\pi)^{T/2} \sigma_v^{T-1} (\sigma_v^2 + T\sigma_u^2)^{1/2}} \cdot \exp\left[-\frac{\varepsilon'\varepsilon}{2\sigma_v^2} + \frac{\mu_*^2}{2\sigma_*^2}\right],$$

$$-\infty < \varepsilon < \infty \quad (3.5.16)$$

donde $\mu_* = \varepsilon\sigma_u^2/\sigma^2$ y $\sigma_*^2 = \sigma_u^2\sigma_v^2/\sigma^2$.

A partir de la ecuación anterior, se obtiene la expresión de la función de log-verosimilitud para una muestra de I unidades observadas durante T períodos de tiempo:

$$\ln L = k - \frac{I(T-1)}{2} \ln \sigma_v^2 - \frac{I}{2} \ln (\sigma_v^2 + T\sigma_u^2) + \sum_i \ln \left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu_{*i}}{\sigma_*}\right) \right] -$$

$$-\frac{\sum_i \varepsilon_i' \varepsilon_i}{2\sigma_v^2} + \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\mu_{*i}}{\sigma_*}\right)^2 \quad (3.5.17)$$

donde $\mu_{*i} = T\sigma_u^2 \bar{\varepsilon}_i / (\sigma_v^2 + T\sigma_u^2)$ y $\sigma_*^2 = \sigma_u^2 \sigma_v^2 / (\sigma_v^2 + T\sigma_u^2)$. La función de log-verosimilitud puede maximizarse con respecto a los parámetros para obtener las estimaciones máximo verosímiles de β , σ_v^2 y σ_u^2 .

La siguiente etapa consiste en obtener estimaciones de la ineficiencia invariante en el tiempo para cada unidad. Para ello, se genera la distribución condicionada de la ineficiencia dada la perturbación:

$$f(u|\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_* \sqrt{2\pi} \left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right) \right]} \cdot \exp\left[-\frac{(u - \mu_*)^2}{2\sigma_*^2}\right],$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (3.5.18)$$

cuya distribución es una $N^+(\mu_*, \sigma_*^2)$.

Tanto la media como la moda de esta distribución pueden usarse como estimaciones puntuales de la ineficiencia en costes:

$$E(u|\varepsilon) = \mu_* + \sigma_* \left[\frac{\Phi(-\mu_*/\sigma_*)}{1 - \Phi(-\mu_*/\sigma_*)} \right] \quad (3.5.19)$$

y

$$M(u|\varepsilon) = \begin{cases} \mu_* & \text{si } \varepsilon \leq 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3.5.20)$$

Estos estimadores son consistentes y pueden utilizarse para obtener estimaciones de eficiencia en costes para cada unidad sustituyéndolas en la ecuación (3.5.7). Una expresión alternativa para obtener estimaciones de eficiencia en costes es la siguiente:

$$E(\exp[-u_i]|\varepsilon_i) = \frac{1 - \Phi(\sigma_* - \mu_{*i}/\sigma_*)}{1 - \Phi(-\mu_{*i}/\sigma_*)} \cdot \exp\left[-\mu_{*i} + \frac{1}{2}\sigma_*^2\right] \quad (3.5.21)$$

Los intervalos de confianza pueden obtenerse realizando los cambios apropiados en la notación del modelo de máxima verosimilitud para datos de corte transversal expuesto en las ecuaciones (3.3.22)-(3.3.24).

Si se supone que la eficiencia en costes es variante en el tiempo, se modifica el supuesto (ii) de manera que se establece que los u_{it} se distribuyen idéntica e independientemente según una $N^+(0, \sigma_u^2)$ y la perturbación estocástica se define como $\varepsilon_{it} = v_{it} + u_{it} = v_{it} + \beta_t \cdot u_i$ donde $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{iT})'$, por lo tanto:

$$f(\varepsilon_i) = \frac{2\sigma_* \exp\left[-\frac{1}{2}a_{i*}\right]}{(2\pi)^{T/2} \sigma_v^T \sigma_u} \int_0^\infty \frac{1}{\sigma_* \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_*^2}(u_i - \mu_{i*})^2\right] du_i \quad (3.5.22)$$

$-\infty < \varepsilon < \infty$

donde:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma_* \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_*^2} (u_i - \mu_{i*})^2 \right] du_i = 1 - \Phi \left(-\frac{\mu_{i*}}{\sigma_*} \right) \quad (3.5.23)$$

$$\mu_{i*} = -\frac{(\sum_t \beta_t \cdot \varepsilon_{it}) \sigma_v^2}{(\sigma_v^2 + \sigma_u^2 \sum_t \beta_t^2)} \quad (3.5.24)$$

$$\sigma_*^2 = \frac{\sigma_v^2 \sigma_u^2}{\sigma_v^2 + \sigma_u^2 \sum_t \beta_t^2} \quad (3.5.25)$$

$$a_{i*} = \frac{1}{\sigma_v^2} \left[\sum_t \varepsilon_{it}^2 - \frac{\sigma_u^2 (\sum_t \beta_t \cdot \varepsilon_{it})^2}{\sigma_v^2 + \sigma_u^2 \sum_t \beta_t^2} \right] \quad (3.5.26)$$

La función de log-verosimilitud a maximizar para obtener las estimaciones de β , β_v , σ_u^2 y σ_v^2 , es:

$$\ln L = k - \frac{I}{2} \ln \sigma_*^2 - \frac{1}{2} \sum_i a_{i*} - \frac{I \cdot T}{2} \ln \sigma_v^2 - \frac{I}{2} \ln \sigma_u^2 + \sum_i \ln \left[1 - \Phi \left(-\frac{\mu_{i*}}{\sigma_*} \right) \right] \quad (3.5.27)$$

Un estimador de u_i puede obtenerse a partir de la media o la moda de $(u_i | \varepsilon_i)$, cuyas expresiones vienen dadas por:

$$E(u|\varepsilon) = \mu_* + \sigma_* \left[\frac{\phi(-\mu_*/\sigma_*)}{1 - \Phi(-\mu_*/\sigma_*)} \right] \quad (3.5.28)$$

y

$$M(u|\varepsilon) = \begin{cases} u_* & \text{si } \sum_t \beta_t \cdot \varepsilon_t \geq 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3.5.29)$$

La estimación de la ineficiencia en costes para cada unidad en cada período de tiempo, u_{it} , puede estimarse mediante $\hat{u}_{it} = \hat{u}_i \cdot \hat{\beta}_t$, donde \hat{u}_i puede ser tanto $E(u_i|\varepsilon_i)$ como $M(u_i|\varepsilon_i)$ y $\hat{\beta}_t$ son las estimaciones máximo verosímiles de β_t , $t = 1, \dots, T$, sujeto a una normalización como $\beta_1 = 1$ o $\beta_T = 1$.

Un estimador alternativo es:

$$\begin{aligned}
 E(\exp[-u_{it}]|\varepsilon_i) &= E(\exp[-u_i \cdot \beta_t]|\varepsilon_i) = \\
 &= \left[\frac{1 - \Phi(\beta_t \sigma_* - \mu_{*i}/\sigma_*)}{1 - \Phi(-\mu_{*i}/\sigma_*)} \right] \cdot \exp \left[-\beta_t \cdot \mu_{*i} + \frac{1}{2} \beta_t^2 \cdot \sigma_*^2 \right] \quad (3.5.30)
 \end{aligned}$$

Capítulo 4

DISTRIBUCIÓN DE LA COMPONENTE DE INEFICIENCIA

1. Introducción

Los trabajos pioneros sobre la estimación de fronteras estocásticas, Aigner *et al.* (1977) y Meesuen y van den Broeck (1977), establecieron los supuestos de una distribución exponencial o half normal para el término de ineficiencia. Sin embargo, no existe una razón que justifique la elección de distribuciones que necesariamente tengan moda nula. Las especificaciones de formas distribucionales más generales, como la normal truncada (Stevenson, 1980) y la gamma de dos parámetros (Greene, 1990) han aliviado parcialmente este problema. No obstante, las medidas de eficiencia resultantes pueden ser sensibles a los supuestos distribucionales. Kumbhakar y Lovell (2000) aportaron estimaciones basadas en la frontera de costes planteada en Greene (1990) y obtuvieron correlaciones para las estimaciones de ineficiencias que oscilaron desde 0.747, entre exponencial y gamma, hasta 0.980, entre half normal y normal truncada. Greene (1993) concluye que el supuesto distribucional importa considerablemente en base a las diferencias en los parámetros estimados bajo cada supuesto.

Este capítulo se inspira en la necesidad de contrastar la adecuación de la distribución supuesta a priori para el término de ineficiencia. De hecho, aunque se ha demostrado la influencia de este supuesto en la estimación, aún no existe consenso en la literatura sobre la forma distribucional más apropiada.

Una primera idea podría llevar al planteamiento erróneo que consiste en comparar el histograma de las ineficiencias estimadas con la distribución supuesta para los efectos de ineficiencia. Esto es, cuando la distribución del término de ineficiencia se supone exponencial, se espera que la ineficiencia estimada también se distribuya según una exponencial.

Los supuestos distribucionales del modelo deben contrastarse comparando el histograma de ineficiencias estimadas, \hat{u}_i , con la distribución teórica que el estimador de ineficiencia debería tener si los supuestos distribucionales del modelo son correctos.

En lo que se refiere al histograma de las ineficiencias estimadas, Jondrow *et al.* (1982) presentaron la expresión del estimador de la ineficiencia, \hat{u}_i , para los casos en los que se supone la distribución half normal y exponencial para el término de ineficiencia. Se trata de la esperanza de la distribución condicionada de la ineficiencia, u_i , dada la perturbación estocástica, ε_i , que es una variable aleatoria observable. Siguiendo esta línea, Greene (1990) desarrolló la expresión del estimador de ineficiencia bajo los supuestos de distribución normal truncada y gamma.

Los avances en la obtención de las expresiones de las distribuciones teóricas de los estimadores de ineficiencia, \hat{u}_i , para los distintos supuestos distribucionales utilizados hasta hoy en la literatura son mucho más recientes. Wang y Schmidt (2009) y Bhandari (2011) desarrollan la expresión de la distribución teórica del estimador de ineficiencia técnica cuando el término de ineficiencia se supone distribuido según una half normal y una normal truncada, respectivamente.

La comparación de las distribuciones puede llevarse a cabo mediante un test de bondad del ajuste. El estudio de Wang *et al.* (2011) utiliza el estadístico de Kolmogorov-Smirnov para determinar si la discrepancia entre las distribuciones es o no significativa, lo que permite concluir si el supuesto distribucional establecido a priori en el modelo de frontera estocástica es o no el apropiado.

En base a la literatura existente, es posible realizar el procedimiento de contraste de la adecuación del supuesto distribucional impuesto a priori al término de ineficiencia sólo en los casos de las distribuciones half normal y

normal truncada. En el caso de los supuestos distribucionales exponencial y gamma, aún no se han desarrollado las respectivas expresiones de las distribuciones teóricas de los estimadores de ineficiencia.

El objetivo general que se persigue en este capítulo, además de la presentación de los resultados reportados en la literatura, es obtener la expresión de la distribución teórica de la ineficiencia estimada cuando el término de ineficiencia se supone exponencial, así como completar la literatura desarrollando las expresiones de la ineficiencia estimada, técnica y en costes, y de su distribución teórica bajo cada supuesto distribucional para fronteras estocásticas de producción y de costes.

Concretamente, se desarrolla el proceso de estimación MV de una frontera de costes para obtener las expresiones del estimador de ineficiencia en costes y su función de densidad teórica cuando se supone una distribución half normal para el término de efectos de ineficiencia. En el caso en el que se establece el supuesto distribucional normal truncada sobre el término de efectos de ineficiencia en costes, se obtiene la expresión del estimador de la ineficiencia y su distribución teórica. Cuando el término de ineficiencia se supone distribuido según una exponencial, se obtiene la expresión del estimador de la ineficiencia, así como las funciones de densidad teóricas del estimador de ineficiencia para un modelo frontera de costes y para un modelo frontera de producción. Por último, se presenta la expresión del estimador de ineficiencia en costes si se supone una distribución gamma para el término de ineficiencia.

2. Planteamiento previo

Aigner *et al.* (1977) y Meeusen y van den Broeck (1977) propusieron de forma independiente el modelo de frontera de producción estocástica, en el que un error aleatorio adicional, v_i , se añade a la variable aleatoria no negativa, u_i , para componer la perturbación aleatoria de la siguiente ecuación:

$$\ln y_i = \beta_0 + \sum_n \beta_n \ln x_{ni} + v_i - u_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (4.2.1)$$

donde $\ln y_i$ es el logaritmo de la producción de la DMU $_i$, $\ln x_i$ es el logaritmo de las cantidades de inputs de la DMU $_i$ y β es un vector de parámetros desconocidos a estimar. El error aleatorio v_i tiene en cuenta errores no sistemáticos como los de medida o especificación y otros factores aleatorios que pudieran influir sobre el output. Aigner *et al.* (1977) establecieron el supuesto de que las v_i eran independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) según una normal con media cero y varianza constante, σ_v^2 ; independientes de los efectos de la ineficiencia, u_i , que se suponen i.i.d. según una distribución exponencial o half normal.

En lo que se refiere a la distribución observada de la ineficiencia estimada, Jondrow *et al.* (1982) sugirieron estimar la ineficiencia, u_i , mediante la esperanza de la distribución condicionada, $E(u_i|\varepsilon_i)$, evaluada en $\varepsilon_i = \hat{\varepsilon}_i$. En un modelo de frontera estocástica de producción, se define $\hat{\beta}$ como la estimación máximo verosímil de β y $\hat{\varepsilon}_i = y_i - X_i\hat{\beta}$ como la estimación de la perturbación aleatoria ε_i . Dado que la estimación de la ineficiencia es una función de ε_i , es una variable aleatoria y su distribución tiene relación con la distribución de ε_i .

En esta exposición se ignora el error de estimación de β . Es decir, se considera $\hat{u}_i = E(u_i|\varepsilon_i)$ mientras, en la práctica, \hat{u}_i se evalúa en $\varepsilon_i = \hat{\varepsilon}_i$. La diferencia entre

ε_i y $\hat{\varepsilon}_i$ es únicamente la contribución del error de estimación de β , ya que $\varepsilon_i = y_i - X_i\beta$ y $\hat{\varepsilon}_i = y_i - X_i\hat{\beta}$.²

La función de densidad de la ineficiencia, u , condicionada a la perturbación, ε , puede calcularse mediante el cociente entre la función de densidad conjunta de ambas variables y la función de densidad de la perturbación. Considerando las transformaciones $z_1 = z_1(u, v) = u$ y $z_2 = z_2(u, v) = \varepsilon = v - u$, se obtiene $u = z_1$ y $v = z_2 + z_1$. Así, $f_{z_1, z_2} = f_{u, v} |\partial(u, v) / \partial(z_1, z_2)|$ donde:

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(z_1, z_2)} \right| = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial z_1} & \frac{\partial u}{\partial z_2} \\ \frac{\partial v}{\partial z_1} & \frac{\partial v}{\partial z_2} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 - 0 = 1 \quad (4.2.2)$$

Si se considera una frontera de costes, $z_1 = z_1(u, v) = u$ y $z_2 = z_2(u, v) = \varepsilon = v + u$, y se obtiene $u = z_1$ y $v = z_2 - z_1$, donde:

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(z_1, z_2)} \right| = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial z_1} & \frac{\partial u}{\partial z_2} \\ \frac{\partial v}{\partial z_1} & \frac{\partial v}{\partial z_2} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1 - 0 = 1 \quad (4.2.3)$$

Así, tanto para una frontera de producción como para una frontera de costes, se cumple que:

$$f_{u, \varepsilon}(u, \varepsilon) = f_{u, v}(u, v(u, \varepsilon)) \quad (4.2.4)$$

donde f representa la función de densidad. Por lo tanto, la función de densidad condicionada está dada por:

² Se omitirá el subíndice "i" en \hat{u} , u , v y ε para simplificar la notación.

$$f_{u,\varepsilon}(u|\varepsilon) = \frac{f_{u,\varepsilon}(u, \varepsilon)}{f_{\varepsilon}(\varepsilon)} \quad (4.2.5)$$

y, según Jondrow *et al.* (1982), tanto la media, $E(u|\varepsilon)$, como la moda, $M(u|\varepsilon)$, pueden utilizarse como estimaciones puntuales de la ineficiencia.

En lo que se refiere a la distribución teórica del estimador de ineficiencia, Wang y Schmidt (2009) presentan un procedimiento de obtención de la función de densidad del estimador en el caso en el que se ha supuesto una distribución half normal para el término de ineficiencia.

Puesto que \hat{u} es una función monótona de ε , la función $\hat{u} = E(u|\varepsilon) = h(\varepsilon)$ puede invertirse y, mediante el cambio de variable $\varepsilon = h^{-1}(\hat{u}) = g(\hat{u})$ y el cálculo del término Jacobiano $|g'(\hat{u})|$, se obtiene:

$$f_{\hat{u}}(\hat{u}) = f_{\varepsilon}(g(\hat{u})) \cdot |g'(\hat{u})| \quad (4.2.6)$$

donde $g'(\hat{u})$ puede calcularse como la derivada de ε en función de \hat{u} , $\partial\varepsilon/\partial\hat{u}$ o, lo que es lo mismo, la inversa de la derivada de \hat{u} en función de ε , $[\partial\hat{u}/\partial\varepsilon]^{-1}$.

3. Distribución half normal

El trabajo de Jondrow *et al.* (1982) supone una distribución half normal para el término de ineficiencia en un modelo de frontera estocástica de producción y desarrolla la expresión del estimador de ineficiencia $\hat{u}_i = E(u_i|\varepsilon_i)$. Posteriormente, Wang y Schmidt (2009) plantearon el análisis de selección distribucional y obtuvieron la función de densidad teórica que la ineficiencia técnica estimada debería presentar cuando se ha supuesto una distribución half normal para el término de ineficiencia técnica. A partir de estas aportaciones, es posible desarrollar el proceso de estimación MV de una frontera de costes para

obtener las expresiones del estimador de ineficiencia en costes y obtener su función de densidad teórica.

Se supone que los efectos de ineficiencia y el error aleatorio se distribuyen, respectivamente, según las siguientes ecuaciones:

$$f(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right], \quad u \geq 0 \quad (4.3.1)$$

con media $E(u) = \sqrt{2/\pi} \sigma_u$ y varianza $V(u) = (\pi - 2/\pi)\sigma_u^2$, donde σ_u^2 es la varianza de la $N(0, \sigma_u^2)$.

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left[-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right], \quad -\infty < v < \infty \quad (4.3.2)$$

La densidad conjunta de u y v es el producto de sus densidades marginales, dado que son independientes:

$$f(u, v) = \frac{1}{\pi\sigma_u\sigma_v} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_u^2}u^2 - \frac{1}{2\sigma_v^2}v^2\right], \quad u \geq 0 \quad -\infty < v < \infty \quad (4.3.3)$$

3.1. Frontera de producción

Realizando la transformación descrita en las ecuaciones (4.2.2) y (4.2.4), la función de densidad conjunta de u y ε , cuando $\varepsilon = v - u$, es:

$$f(u, \varepsilon) = \frac{1}{\pi\sigma_u\sigma_v} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_u^2}u^2 - \frac{1}{2\sigma_v^2}(u^2 + \varepsilon^2 + 2u\varepsilon)\right],$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.3.4)$$

Según Aigner *et al.* (1977), la función de densidad de la perturbación estocástica puede expresarse como:

$$f(\varepsilon) = \int_0^{\infty} f(u, \varepsilon) du = \frac{2}{\sigma} \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right)\right], \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.3.5)$$

donde $\sigma = (\sigma_u^2 + \sigma_v^2)^{1/2}$, $\lambda = \sigma_u/\sigma_v$ y $\Phi(\cdot)$ y $\phi(\cdot)$ son funciones de distribución y densidad normales estándar, respectivamente.

O, de forma equivalente,

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right)\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\varepsilon^2\right], \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.3.6)$$

La perturbación aleatoria ε se distribuye asimétricamente con media $E(\varepsilon) = -E(u) = -\sigma_u\sqrt{2/\pi}$ y varianza $V(\varepsilon) = [(\pi - 2)/\pi]\sigma_u^2 + \sigma_v^2$.

De este modo, la densidad condicionada de u dado ε se calcula a partir de la expresión (4.2.5) y puede escribirse como:

$$f(u|\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_*\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right)} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_*^2}u^2 - \frac{1}{\sigma_v^2}u\varepsilon - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right)^2\right],$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.3.7)$$

donde $\sigma_* = \sigma_u\sigma_v/\sigma$. Con un breve desarrollo algebraico, se simplifica a:

$$f(u|\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_*\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right)} \cdot \exp\left[\frac{-1}{2\sigma_*^2}(u + \sigma_u^2\varepsilon/\sigma^2)^2\right],$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.3.8)$$

Excepto por el término $1 - \Phi(\varepsilon\lambda/\sigma)$, se trata de la densidad de una $N(\mu_*, \sigma_*^2)$, con $\mu_* = -\sigma_u^2\varepsilon/\sigma^2$ y $\sigma_*^2 = \sigma_u^2\sigma_v^2/\sigma^2$. Finalmente, Φ se calcula en el punto $\varepsilon\lambda/\sigma = -\mu_*/\sigma_*$, y así $(1 - \Phi)$ es la probabilidad de que la variable $N(\mu_*, \sigma_*^2)$ sea positiva. De este modo, la expresión de la función de densidad condicionada $f(u|\varepsilon)$ es la densidad de una variable $N(\mu_*, \sigma_*^2)$ truncada en cero.

Siguiendo el planteamiento desarrollado por Jondrow *et al.* (1982), puede utilizarse como estimación puntual de la ineficiencia, u , tanto la media como la moda de la distribución condicionada $f(u|\varepsilon)$. La media es:

$$\hat{u} = E(u|\varepsilon) = \mu_* + \sigma_* \frac{\phi(-\mu_*/\sigma_*)}{1 - \Phi(-\mu_*/\sigma_*)} \quad (4.3.9)$$

o, alternativamente,

$$\hat{u} = E(u|\varepsilon) = \sigma_* \left[\frac{\phi(\varepsilon\lambda/\sigma)}{1 - \Phi(\varepsilon\lambda/\sigma)} - \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right) \right] \quad (4.3.10)$$

La función $E(u|\varepsilon)$ es no negativa y monótona en ε . Los parámetros μ_* y σ_* son desconocidos, de manera que para usar cualquiera de las expresiones anteriores deben sustituirse por sus estimaciones, $\hat{\mu}_*$ y $\hat{\sigma}_*$, y se estará calculando $\hat{E}(u|\varepsilon)$ en lugar de $E(u|\varepsilon)$. La variabilidad debida al error muestral desaparece asintóticamente y, por lo tanto, esta diferenciación puede ignorarse para muestras suficientemente grandes.

A continuación, se abrevia la expresión del estimador de ineficiencia de manera que:

$$\hat{u} = E(u|\varepsilon) = \sigma_* \left[c \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right) - \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right) \right] \quad (4.3.11)$$

donde $c(s) = \phi(s)/1 - \Phi(s)$.

Se calcula la derivada de \hat{u} con respecto a ε para, mediante su inversa, obtener la función $g'(\hat{u})$ de la expresión (4.2.6):

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}}{d\varepsilon} &= \sigma_* \frac{\lambda}{\sigma} \cdot c' \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma} \right) - \sigma_* \frac{\lambda}{\sigma} = \\ &= \frac{\sigma_u \sigma_v}{\sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}} \cdot \frac{\sigma_u}{\sigma_v \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}} \cdot c' \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma} \right) - \frac{\sigma_u \sigma_v}{\sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}} \cdot \frac{\sigma_u}{\sigma_v \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}} = \\ &= \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} \left[c' \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma} \right) - 1 \right] = \sigma_* \cdot \left[c' \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

$$\begin{aligned} g'(\hat{u}) &= \frac{d\varepsilon}{d\hat{u}} = \left[\frac{d\hat{u}}{d\varepsilon} \right]^{-1} = \frac{1}{\sigma_* \left[-1 + c' \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma} \right) \right]} = \\ &= \frac{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}{\sigma_u^2 \left[-1 + c' \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma} \right) \right]} = \frac{\sigma^2}{\sigma_u^2 \left| -1 + c' \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma} \right) \right|} \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

donde $c'(s) = -s \cdot c(s) + c^2(s)$.

Por lo tanto, sustituyendo las expresiones (4.3.5) y (4.3.13) en la ecuación (4.2.6), se obtiene:

$$\begin{aligned} f(\hat{u}) &= \frac{2\sigma \cdot \phi \left(\frac{g(\hat{u})}{\sigma} \right) \cdot \left[1 - \Phi \left(\frac{g(\hat{u}) \cdot \lambda}{\sigma} \right) \right]}{\sigma_u^2 \left| -1 + c'(g(\hat{u}) \cdot \lambda/\sigma) \right|} = \frac{2\sigma \cdot \phi \left(\frac{g(\hat{u})}{\sigma} \right) \cdot \Phi \left(\frac{-g(\hat{u}) \cdot \lambda}{\sigma} \right)}{\sigma_u^2 \left| -1 + c'(g(\hat{u}) \cdot \lambda/\sigma) \right|}, \\ &\hat{u} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

la función de densidad teórica de la estimación de la ineficiencia técnica si se supone que la ineficiencia técnica se distribuye conforme a una half normal.

3.2. Frontera de costes

La función de densidad conjunta de u y ε para una frontera de costes puede obtenerse habiendo considerado previamente las transformaciones presentadas en las expresiones (4.2.3) y (4.2.4) y se obtiene:

$$f(u, \varepsilon) = \frac{1}{\pi\sigma_u\sigma_v} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_u^2}u^2 - \frac{1}{2\sigma_v^2}(u^2 + \varepsilon^2 - 2u\varepsilon)\right],$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.3.15)$$

Según Stevenson (1980), la función de densidad de la perturbación de una frontera de costes se expresa como:

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{-\varepsilon\lambda}{\sigma}\right)\right], \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.3.16)$$

donde $\sigma = (\sigma_u^2 + \sigma_v^2)^{1/2}$, $\lambda = \sigma_u/\sigma_v$ y $\Phi(\cdot)$ y $\phi(\cdot)$ son funciones de distribución y densidad normales estándar, respectivamente.

O, de forma equivalente,

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{-\varepsilon\lambda}{\sigma}\right)\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\varepsilon^2\right], \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.3.17)$$

De este modo, la densidad condicionada de u dado ε se calcula mediante la expresión (4.2.5) y resulta:

$$f(u|\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_*} \cdot \frac{1}{1 - \Phi\left(\frac{-\varepsilon\lambda}{\sigma}\right)} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_*^2}u^2 + \frac{1}{\sigma_v^2}u\varepsilon - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right)^2\right],$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.3.18)$$

donde $\sigma_* = \sigma_u\sigma_v/\sigma$. Con un breve desarrollo algebraico, se simplifica a:

$$f(u|\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_*} \cdot \frac{1}{1 - \Phi\left(\frac{-\varepsilon\lambda}{\sigma}\right)} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma_*^2}(u - \sigma_u^2\varepsilon/\sigma^2)^2\right],$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.3.19)$$

La función de distribución normal se calcula en $-\varepsilon\lambda/\sigma = \mu_*/\sigma_*$, de manera que $(1 - \Phi)$ es la probabilidad de que la variable $N(\mu_*, \sigma_*^2)$ sea positiva y $f(u|\varepsilon)$ es la densidad de una variable $N(\mu_*, \sigma_*^2)$ truncada en cero.

A partir de la expresión proporcionada por Jondrow *et al.* (1982) según la cual la media de la distribución condicionada puede utilizarse como estimación puntual de la ineficiencia técnica, la expresión de la estimación puntual de la ineficiencia en costes es la siguiente:

$$\hat{u} = E(u|\varepsilon) = \mu_* + \sigma_* \frac{\phi(\mu_*/\sigma_*)}{1 - \Phi(\mu_*/\sigma_*)} \quad (4.3.20)$$

Debe tenerse en cuenta que $-\varepsilon\lambda/\sigma = \mu_*/\sigma_*$, donde $\lambda = \sigma_u/\sigma_v$. De este modo, se obtiene:

$$\hat{u} = E(u|\varepsilon) = \sigma_* \left[\frac{\phi(\varepsilon\lambda/\sigma)}{1 - \Phi(-\varepsilon\lambda/\sigma)} + \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right) \right] \quad (4.3.21)$$

También puede escribirse \hat{u} como:

$$\hat{u} = E(u|\varepsilon) = \sigma_* \left[c \left(-\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right) + \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right) \right] \quad (4.3.22)$$

donde $c(s) = \phi(s)/1 - \Phi(s)$.

A partir de la ecuación (4.3.21):

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}}{d\varepsilon} &= \sigma_* \frac{-\lambda}{\sigma} \cdot c' \left(\frac{-\varepsilon\lambda}{\sigma} \right) + \sigma_* \frac{\lambda}{\sigma} = \\ &= \frac{\sigma_u \sigma_v}{\sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}} \cdot \frac{-\sigma_u}{\sigma_v \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}} \cdot c' \left(\frac{-\varepsilon\lambda}{\sigma} \right) + \frac{\sigma_u \sigma_v}{\sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}} \cdot \frac{\sigma_u}{\sigma_v \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}} = \\ &= \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} \left[-c' \left(\frac{-\varepsilon\lambda}{\sigma} \right) + 1 \right] = \sigma_* \cdot \left[-c' \left(\frac{-\varepsilon\lambda}{\sigma} \right) + 1 \right] \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

$$g'(\hat{u}) = \frac{d\varepsilon}{d\hat{u}} = \left[\frac{d\hat{u}}{d\varepsilon} \right]^{-1} = \frac{1}{\sigma_* \left[1 - c' \left(\frac{-\varepsilon\lambda}{\sigma} \right) \right]} = \frac{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}{\sigma_u^2 \left[1 - c' \left(\frac{-\varepsilon\lambda}{\sigma} \right) \right]} \quad (4.3.24)$$

De manera que:

$$g'(\hat{u}) = \frac{\sigma^2}{\sigma_u^2 [1 - c'(-\varepsilon\lambda/\sigma)]} \quad (4.3.25)$$

donde $c'(s) = -s \cdot c(s) + c^2(s)$.

Por lo tanto, sustituyendo las expresiones (4.3.17) y (4.3.25) en la expresión (4.2.6), se obtiene:

$$\begin{aligned} f(\hat{u}) &= \frac{2\sigma \cdot \phi \left(\frac{g(\hat{u})}{\sigma} \right) \cdot \left[1 - \Phi \left(\frac{-g(\hat{u}) \cdot \lambda}{\sigma} \right) \right]}{\sigma_u^2 |1 - c'(-g(\hat{u}) \cdot \lambda/\sigma)|} = \\ &= \frac{2\sigma \cdot \phi \left(\frac{g(\hat{u})}{\sigma} \right) \cdot \Phi \left(\frac{g(\hat{u}) \cdot \lambda}{\sigma} \right)}{\sigma_u^2 |1 - c'(-g(\hat{u}) \cdot \lambda/\sigma)|}, \quad \hat{u} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

como función de densidad teórica del estimador de la ineficiencia en costes cuando se supone una distribución half normal para la ineficiencia.

4. Distribución normal truncada

Stevenson (1980) propuso la distribución normal truncada, que flexibiliza el supuesto de moda nula establecido en el caso half normal y desarrolló el proceso de estimación MV. Greene (1993) presentó la expresión del estimador de la ineficiencia técnica. Recientemente, Bhandari (2011) desarrolló la función de densidad teórica del estimador de ineficiencia bajo el supuesto distribucional de una normal truncada para los efectos de ineficiencia técnica incluidos en la perturbación de la frontera estocástica. Por lo tanto, las aportaciones en esta sección consisten en la obtención de la expresión del estimador de la ineficiencia en costes y su distribución teórica.

La función de densidad de la componente de efectos aleatorios viene dada por la ecuación (4.3.2) y la de los efectos de ineficiencia es:

$$f(u) = \frac{1}{\left[1 - \Phi\left(\frac{-\mu}{\sigma_u}\right)\right] \sqrt{2\pi}\sigma_u} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u - \mu}{\sigma_u}\right)^2\right], \quad u \geq 0 \quad (4.4.1)$$

donde μ es la moda de la distribución normal que se trunca en cero con media

$E(u) = \mu + \sigma \phi(\mu/\sigma)/[1 - \Phi(\mu/\sigma)]$ y varianza

$\text{Var}(u) = \sigma^2[1 - \mu/\sigma \cdot \phi(\mu/\sigma)/[1 - \Phi(\mu/\sigma)] - (\phi(\mu/\sigma)/[1 - \Phi(\mu/\sigma)])^2]$,

donde σ_u^2 es la varianza de la $N(0, \sigma_u^2)$.

La función de densidad conjunta de u y v se calcula como el producto de las funciones de densidad marginales:

$$f(u, v) = \frac{1}{\left[1 - \Phi\left(\frac{-\mu}{\sigma_u}\right)\right] 2\pi\sigma_u\sigma_v} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u - \mu}{\sigma_u}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sigma_v}\right)^2\right]\right],$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < v < \infty \quad (4.4.2)$$

4.1. Frontera de producción

La función de densidad conjunta de u y ε se obtiene a partir de la transformación indicada en la ecuación (4.2.4), de manera que:

$$f(u, \varepsilon) = \frac{1}{\left[1 - \Phi\left(\frac{-\mu}{\sigma_u}\right)\right] 2\pi\sigma_u\sigma_v} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u - \mu}{\sigma_u}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon + u}{\sigma_v}\right)^2\right]\right],$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.4.3)$$

La función de densidad de la perturbación estocástica de una frontera de producción puede calcularse a partir de la expresión de la función de densidad de la perturbación de un modelo de frontera estocástica de costes dada en la ecuación (4.2.5) de Stevenson (1980) y coincide con la expresión proporcionada por Bhandari (2011):

$$f(\varepsilon) = \int_0^{\infty} f_{u,\varepsilon}(u, \varepsilon) du = \frac{\left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\lambda\sigma} + \frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right)\right]}{\left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma_u}\right)\right] \sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu + \varepsilon}{\sigma}\right)^2\right],$$

$$-\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.4.4)$$

donde $\sigma^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$ y $\lambda = \sigma_u/\sigma_v$.

La perturbación estocástica se distribuye asimétricamente con media $E(\varepsilon) = -E(u) = -\mu\omega/2 - \sigma_u\omega/\sqrt{2\pi} \exp[-1/2(\mu/\sigma_u)^2]$ y varianza $\mu^2\omega/2(1-\omega/2) + \omega/2(\pi-\omega/\pi)\sigma_u^2 + \sigma_v^2$, donde $\omega = [\Phi(\mu/\sigma_u)]^{-1}$.

En el caso concreto en el que $\mu = 0$, puede comprobarse que esta expresión coincide con la ecuación (4.3.6), equivalente para el caso half normal.

La función de densidad condicionada se calcula a partir de la expresión (4.2.5) y resulta:

$$f(u|\varepsilon) = \frac{\sigma}{\left[1 - \Phi\left(\frac{-\mu}{\sigma\lambda} + \frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right)\right] \sigma_u \sigma_v \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u-\mu}{\sigma_u}\right)^2 + \left(\frac{u+\varepsilon}{\sigma_v}\right)^2 - \left(\frac{\mu+\varepsilon}{\sigma}\right)^2\right]\right],$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.4.5)$$

Según Greene (1993), la expresión de la estimación específica de una unidad en una frontera de producción se obtiene reemplazando $\varepsilon\lambda/\sigma$ en la expresión (4.3.10) por $\varepsilon\lambda/\sigma + \mu/\sigma\lambda$. De esta manera, la estimación de la ineficiencia técnica resulta:

$$\hat{u} = E(u|\varepsilon) = \sigma_* \left[\frac{\phi\left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda}\right)} - \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda}\right) \right] \quad (4.4.6)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\hat{u} = E(u|\varepsilon) = \sigma_* \left[c \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda} \right) - \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda} \right) \right] \quad (4.4.7)$$

donde $\sigma_* = \sigma_u \sigma_v / \sigma$.

Siguiendo el desarrollo expuesto por Bhandari (2011):

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{u}}{d\varepsilon} &= -\sigma_* \frac{\lambda}{\sigma} + \sigma_* c' \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda} \right) = \\
 &= \frac{-\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} + \frac{\sigma_u \sigma_v}{\sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}} \cdot c' \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda} \right) \cdot \frac{+\sigma_u}{\sigma_v \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}} = \\
 &= \frac{-\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} + \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} \cdot c' \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda} \right) \tag{4.4.8}
 \end{aligned}$$

$$g'(\hat{u}) = \frac{d\varepsilon}{d\hat{u}} = \left[\frac{d\hat{u}}{d\varepsilon} \right]^{-1} = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} \left[c' \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda} \right) - 1 \right] \tag{4.4.9}$$

donde $c'(s) = -s \cdot c(s) + c^2(s)$.

Finalmente, sustituyendo (4.4.4) y (4.4.9) en (4.2.6) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 f(\hat{u}) &= \frac{\left[1 - \Phi \left(-\frac{\mu}{\lambda\sigma} + \frac{g(\hat{u})\lambda}{\sigma} \right) \right]}{\left[1 - \Phi \left(-\frac{\mu}{\sigma_u} \right) \right] \sigma \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu + g(\hat{u})}{\sigma} \right)^2 \right] \cdot \\
 &\cdot \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} \left| c' \left(\frac{g(\hat{u})\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda} \right) - 1 \right|, \quad \hat{u} \geq 0 \tag{4.4.10}
 \end{aligned}$$

que es la función de densidad teórica del estimador de la ineficiencia técnica cuando se supone una distribución normal truncada para el término de ineficiencia de la perturbación estocástica.

4.2. Frontera de costes

La función de densidad conjunta de u y ε se obtiene a partir de la transformación descrita en la ecuación (4.2.4), de manera que:

$$f(u, \varepsilon) = \frac{1}{\left[1 - \Phi\left(\frac{-\mu}{\sigma_u}\right)\right] 2\pi\sigma_u\sigma_v} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u - \mu}{\sigma_u}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon - u}{\sigma_v}\right)^2\right]\right],$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.4.11)$$

Por otra parte, la función de densidad de la perturbación estocástica viene dada por la ecuación 5 de Stevenson (1980) y coincide con la transformación para frontera de costes de la expresión de Bhandari (2011).

$$f(\varepsilon) = \int_0^{\infty} f_{u,\varepsilon}(u, \varepsilon) du = \frac{\left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\lambda\sigma} - \frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right)\right]}{\left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma_u}\right)\right] \sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \varepsilon}{\sigma}\right)^2\right],$$

$$-\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.4.12)$$

En el caso concreto en el que $\mu = 0$, la ecuación (4.4.12) coincide con la correspondiente para el caso half normal, ecuación (4.3.17).

La función de densidad condicionada se calcula mediante la expresión (4.2.5) y resulta:

$$f(u|\varepsilon) = \frac{\sigma}{\left[1 - \Phi\left(\frac{-\mu}{\sigma\lambda} - \frac{\varepsilon\lambda}{\sigma}\right)\right] \sigma_u\sigma_v\sqrt{2\pi}} \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u - \mu}{\sigma_u}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon - u}{\sigma_v}\right)^2 - \left(\frac{\mu - \varepsilon}{\sigma}\right)^2\right]\right],$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.4.13)$$

Según Greene (1993), la expresión del estimador de ineficiencia en costes se obtiene reemplazando $\varepsilon\lambda/\sigma$ en la expresión (4.3.21) por $\varepsilon\lambda/\sigma + \mu/\sigma\lambda$. De manera que resulta:

$$\hat{u} = E(u|\varepsilon) = \sigma_* \left[\frac{\Phi\left(\frac{-\varepsilon\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{-\varepsilon\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda}\right)} - \left(\frac{-\varepsilon\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda}\right) \right] \quad (4.4.14)$$

Bhandari (2011) presenta el procedimiento a desarrollar para obtener la función de densidad teórica de la ineficiencia técnica. De manera que, para el caso de una frontera de costes:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}}{d\varepsilon} &= \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} + \sigma_* c' \left(\frac{-\varepsilon\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{-\varepsilon\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda} \right) = \\ &= \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} + \frac{\sigma_u \sigma_v}{\sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}} \cdot c' \left(\frac{-\varepsilon\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda} \right) \cdot \frac{-\sigma_u}{\sigma_v \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}} = \\ &= \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} \cdot c' \left(\frac{-\varepsilon\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda} \right) \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

$$g'(\hat{u}) = \frac{d\varepsilon}{d\hat{u}} = \left[\frac{d\hat{u}}{d\varepsilon} \right]^{-1} = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} \left[1 - c' \left(\frac{-\varepsilon\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda} \right) \right] \quad (4.4.16)$$

donde $c'(s) = -s \cdot c(s) + c^2(s)$.

Finalmente, sustituyendo las expresiones (4.4.12) y (4.4.16) en la ecuación (4.2.6) se obtiene la función de densidad teórica del estimador de la ineficiencia en costes cuando se supone una distribución normal truncada para el término de ineficiencia de la perturbación estocástica:

$$f(\hat{u}) = \frac{\left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\lambda\sigma} - \frac{g(\hat{u})\lambda}{\sigma}\right)\right]}{\left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma_u}\right)\right] \sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - g(\hat{u})}{\sigma}\right)^2\right] \cdot \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} \left|1 - c' \left(\frac{-g(\hat{u})\lambda}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma\lambda}\right)\right|, \quad \hat{u} \geq 0 \quad (4.4.17)$$

5. Distribución exponencial

Jondrow *et al.* (1982) presentaron la expresión del estimador de la ineficiencia en un modelo de frontera de producción estocástica en el que se ha supuesto una distribución exponencial para el término de ineficiencia de la perturbación. Esta sección pretende aportar la expresión del estimador de la ineficiencia para el caso de una función de costes cuando el término de ineficiencia se distribuye según una exponencial, así como las funciones de densidad teóricas del estimador de ineficiencia para un modelo frontera de costes y para un modelo frontera de producción.

La función de densidad supuesta para el término de efectos aleatorios se presenta en la ecuación (4.3.2), mientras que la del término de ineficiencia es la siguiente:

$$f(u) = \frac{1}{\sigma_u} \exp\left(-\frac{u}{\sigma_u}\right), \quad u \geq 0 \quad (4.5.1)$$

donde $1/\sigma_u > 0$, con media $E[u] = 1/(1/\sigma_u) = \sigma_u$ y $\text{Var}[u] = 1/(1/\sigma_u)^2 = \sigma_u^2$.

De manera que la función de densidad conjunta de u y v se obtiene como producto de las marginales:

$$f(u, v) = \frac{1}{\sigma_u \sigma_v \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{u}{\sigma_u} - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\sigma_v} \right)^2 \right], \quad u \geq 0 \quad -\infty < v < \infty \quad (4.5.2)$$

5.1. Frontera de producción

En el caso de una frontera de producción, la función de densidad conjunta de u y ε puede obtenerse a partir de la transformación indicada en (4.2.4):

$$f(u, \varepsilon) = \frac{1}{\sigma_u \sigma_v \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{u}{\sigma_u} - \frac{1}{2\sigma_v^2} (\varepsilon^2 + u^2 + 2\varepsilon u) \right],$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.5.3)$$

La función de densidad de la perturbación estocástica para el caso de una frontera de producción viene dada por la ecuación 19 en Aigner *et al.* (1977):

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_u} \Phi \left(-\frac{\varepsilon}{\sigma_v} - \frac{\sigma_v}{\sigma_u} \right) \cdot \exp \left[\frac{\sigma_v^2}{2\sigma_u^2} + \frac{\varepsilon}{\sigma_u} \right], \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.5.4)$$

El término de error compuesto ε se distribuye asimétricamente con media $E(\varepsilon) = -E(u) = -\sigma_u$ y varianza $V(\varepsilon) = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$.

La función de densidad de u condicionada a ε puede calcularse como el cociente entre la función de densidad conjunta y la función de densidad marginal de ε , como se indicó en la ecuación (4.2.5):

$$f(u|\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi} \left[1 - \Phi \left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u} + \frac{\varepsilon}{\sigma_v} \right) \right]} \cdot \exp \left[-\frac{u}{\sigma_u} - \frac{\varepsilon^2}{2\sigma_v^2} - \frac{u^2}{2\sigma_v^2} - \frac{2\varepsilon u}{2\sigma_v^2} - \frac{\sigma_v^2}{2\sigma_u^2} - \frac{\varepsilon}{\sigma_u} \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi} \left[1 - \Phi\left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u} + \frac{\varepsilon}{\sigma_v}\right)\right]} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_v^2}(\varepsilon^2 + u^2 + 2\varepsilon u) - \frac{u}{\sigma_u} - \frac{\sigma_v^2}{2\sigma_u^2} - \frac{\varepsilon}{\sigma_u}\right] = \\
 &= \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi} \left[1 - \Phi\left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u} + \frac{\varepsilon}{\sigma_v}\right)\right]} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_v^2}\left[u + \left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u} + \frac{\varepsilon}{\sigma_v}\right)\right]^2\right], \\
 &u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \tag{4.5.5}
 \end{aligned}$$

De acuerdo con Jondrow *et al.* (1982), se puede identificar la función de densidad de u condicionada a ε como la de una normal de media $-(\varepsilon + \sigma_v^2/\sigma_u)$ y varianza σ_v^2 , truncada en cero. Del mismo modo que en el caso half normal, el valor esperado de la distribución condicionada puede considerarse una estimación puntual de la ineficiencia técnica:

$$\hat{u} = E(u|\varepsilon) = \sigma_v \left[\frac{\phi\left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u} + \frac{\varepsilon}{\sigma_v}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u} + \frac{\varepsilon}{\sigma_v}\right)} - \left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u} + \frac{\varepsilon}{\sigma_v}\right) \right] \tag{4.5.6}$$

o, de otra forma,

$$\hat{u} = E(u|\varepsilon) = \sigma_v \left[c\left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u} + \frac{\varepsilon}{\sigma_v}\right) - \left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u} + \frac{\varepsilon}{\sigma_v}\right) \right] \tag{4.5.7}$$

A continuación, se obtiene la distribución del estimador de la ineficiencia técnica. Para ello, se calcula:

$$\frac{d\hat{u}}{d\varepsilon} = \sigma_v \cdot \left[\frac{1}{\sigma_v} c'\left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u} + \frac{\varepsilon}{\sigma_v}\right) - \frac{1}{\sigma_v} \right] \tag{4.5.8}$$

$$g'(\hat{u}) = \frac{d\varepsilon}{d\hat{u}} = \left[\frac{d\hat{u}}{d\varepsilon} \right]^{-1} = \frac{1}{\left[c'\left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u} + \frac{\varepsilon}{\sigma_v}\right) - 1 \right]} \tag{4.5.9}$$

donde $c'(s) = -s \cdot c(s) + c^2(s)$ y el Jacobiano coincide con el valor absoluto de la expresión (4.5.9).

Por lo tanto, sustituyendo las ecuaciones (4.5.4) y (4.5.9) en la expresión (4.2.6), se obtiene:

$$f(\hat{u}) = \frac{\left[1 - \Phi\left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u} + \frac{g(\hat{u})}{\sigma_v}\right)\right] \cdot \exp\left[\frac{\sigma_v^2}{2\sigma_u^2} + \frac{g(\hat{u})}{\sigma_u}\right]}{\sigma_u \left|c'\left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u} + \frac{g(\hat{u})}{\sigma_v}\right) - 1\right|}, \quad \hat{u} \geq 0 \quad (4.5.10)$$

como función de densidad teórica del estimador de la ineficiencia técnica cuando se supone una distribución exponencial para el término de efectos de ineficiencia del modelo de frontera estocástica de producción.

5.2. Frontera de costes

Considerando las transformaciones desarrolladas con detalle en las ecuaciones (4.2.3) y (4.2.4), puede escribirse:

$$\begin{aligned} f(u, \varepsilon) &= \frac{1}{\sigma_u \sigma_v \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u}{\sigma_u} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon - u}{\sigma_v}\right)^2\right] = \\ &= \frac{1}{\sigma_u \sigma_v \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u}{\sigma_u} - \frac{1}{2\sigma_v^2}(\varepsilon^2 + u^2 - 2\varepsilon u)\right], \quad u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.5.11) \end{aligned}$$

La función de densidad de la perturbación estocástica para el caso de una frontera de producción viene dada por la ecuación 19 en Aigner *et al.* (1977). A partir de ésta, puede hallarse la función de densidad de la perturbación estocástica para una frontera de costes:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_u} \left[1 - \Phi \left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u} - \frac{\varepsilon}{\sigma_v} \right) \right] \cdot \exp \left[\frac{\sigma_v^2}{2\sigma_u^2} - \frac{\varepsilon}{\sigma_u} \right], \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.5.12)$$

La función condicionada de u dado ε se calcula como el cociente entre la función de densidad conjunta y la función de densidad marginal de ε , como se indica en la expresión (4.2.5):

$$\begin{aligned} f(u|\varepsilon) &= \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi} \left[1 - \Phi \left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u} - \frac{\varepsilon}{\sigma_v} \right) \right]} \cdot \exp \left[-\frac{u}{\sigma_u} - \frac{\varepsilon^2}{2\sigma_v^2} - \frac{u^2}{2\sigma_v^2} + \frac{2\varepsilon u}{2\sigma_v^2} - \frac{\sigma_v^2}{2\sigma_u^2} + \frac{\varepsilon}{\sigma_u} \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi} \left[1 - \Phi \left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u} - \frac{\varepsilon}{\sigma_v} \right) \right]} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_v^2} (\varepsilon^2 + u^2 - 2\varepsilon u) - \frac{u}{\sigma_u} - \frac{\sigma_v^2}{2\sigma_u^2} + \frac{\varepsilon}{\sigma_u} \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi} \left[1 - \Phi \left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u} - \frac{\varepsilon}{\sigma_v} \right) \right]} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_v^2} \left[u - \left(\varepsilon - \frac{\sigma_v^2}{\sigma_u} \right) \right]^2 \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi} \left[1 - \Phi \left(\frac{\sigma_v}{\sigma_u} - \frac{\varepsilon}{\sigma_v} \right) \right]} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_v^2} \left[u + \left(\frac{\sigma_v^2}{\sigma_u} - \varepsilon \right) \right]^2 \right], \\ &\quad u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.5.13) \end{aligned}$$

De este modo, se puede identificar la función de densidad de u condicionada a ε con la de una normal truncada. Concretamente, como se indica en Jondrow *et al.* (1982), la ecuación (4.5.13) expresa la distribución de una normal de media $\varepsilon - \sigma_v^2/\sigma_u$ y varianza σ_v^2 , truncada en cero.

Por tanto, la estimación puntual de la ineficiencia en costes bajo el supuesto de distribución exponencial puede hallarse a partir de la expresión de Jondrow *et al.* (1982) para la ineficiencia técnica y resulta:

$$\hat{u} = E(u|\varepsilon) = \sigma_v \left[\frac{\Phi\left(\frac{\sigma_v - \varepsilon}{\sigma_u}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\sigma_v - \varepsilon}{\sigma_u}\right)} - \left(\frac{\sigma_v - \varepsilon}{\sigma_u}\right) \right] \quad (4.5.14)$$

o, de forma equivalente,

$$\hat{u} = E(u|\varepsilon) = \sigma_v \left[c\left(\frac{\sigma_v - \varepsilon}{\sigma_u}\right) - \left(\frac{\sigma_v - \varepsilon}{\sigma_u}\right) \right] \quad (4.5.15)$$

Para obtener la distribución del estimador de la ineficiencia en costes, se parte de la expresión (4.5.14) y se calcula:

$$\frac{d\hat{u}}{d\varepsilon} = \sigma_v \cdot \left[\frac{-1}{\sigma_u} c'\left(\frac{\sigma_v - \varepsilon}{\sigma_u}\right) + \frac{1}{\sigma_v} \right] \quad (4.5.16)$$

$$g'(\hat{u}) = \frac{d\varepsilon}{d\hat{u}} = \left[\frac{d\hat{u}}{d\varepsilon} \right]^{-1} = \frac{1}{\left[1 - c'\left(\frac{\sigma_v - \varepsilon}{\sigma_u}\right) \right]} \quad (4.5.17)$$

donde $c'(s) = -s \cdot c(s) + c^2(s)$ y el Jacobiano coincide con el valor absoluto de la expresión (4.5.17).

Por lo tanto, sustituyendo las ecuaciones (4.5.12) y (4.5.17) en la expresión (4.2.6), se obtiene:

$$f(\hat{u}) = \frac{\left[1 - \Phi\left(\frac{\sigma_v - g(\hat{u})}{\sigma_u}\right) \right] \cdot \exp\left[\frac{\sigma_v^2}{2\sigma_u^2} - \frac{g(\hat{u})}{\sigma_u}\right]}{\sigma_u \left| 1 - c'\left(\frac{\sigma_v - g(\hat{u})}{\sigma_u}\right) \right|}, \quad \hat{u} \geq 0 \quad (4.5.18)$$

como función de densidad teórica del estimador de la ineficiencia en costes cuando se supone una distribución exponencial para la componente de ineficiencia de la perturbación estocástica.

6. Distribución gamma

Stevenson (1982) propuso la distribución gamma de dos parámetros para el término de ineficiencia de la perturbación estocástica y presentó el desarrollo del proceso de estimación por MV en una frontera de costes. Este nuevo supuesto consigue una representación de la eficiencia más flexible puesto que generaliza la distribución exponencial, sugerida por Aigner *et al.* (1977), introduciendo un parámetro adicional a estimar. Greene (1990) presentó la expresión del estimador de ineficiencia en una frontera de producción. La presente sección obtiene la expresión del estimador de ineficiencia para una frontera de costes.

Los efectos aleatorios se suponen distribuidos según una normal y los efectos de ineficiencia se suponen distribuidos de acuerdo a la siguiente función de densidad:

$$f(u) = \frac{(1/\sigma_u)^p}{\Gamma(p)} u^{p-1} \exp\left[-\frac{u}{\sigma_u}\right], \quad u \geq 0 \quad (4.6.1)$$

donde $1/\sigma_u, p > 0$, con media $E[u] = p/(1/\sigma_u)$ y varianza $\text{Var}(u) = p/(1/\sigma_u)^2$.

La función de densidad conjunta de u y v puede calcularse como el producto de las funciones de densidad marginales debido al supuesto que establece la independencia entre las variables:

$$f(u, v) = \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sigma_v}\right)^2\right] \cdot \frac{(1/\sigma_u)^p}{\Gamma(p)} u^{p-1} \cdot \exp\left[\frac{-u}{\sigma_u}\right],$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < v < \infty \quad (4.6.2)$$

6.1. Frontera de Producción

Mediante la transformación indicada en las expresiones (4.2.2) y (4.2.4), la función de densidad conjunta de u y ε tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 f(u, \varepsilon) &= \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon + u}{\sigma_v}\right)^2\right] \cdot \frac{(1/\sigma_u)^p}{\Gamma(p)} u^{p-1} \cdot \exp\left[\frac{-u}{\sigma_u}\right] = \\
 &= \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_v}\right)^2\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sigma_v}\right)^2\right] \cdot \exp\left[\frac{-\varepsilon u}{\sigma_v^2}\right] \frac{(1/\sigma_u)^p}{\Gamma(p)} u^{p-1} \exp\left[\frac{-u}{\sigma_u}\right] = \\
 &= k \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_v}\right)^2\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sigma_v}\right)^2 - u\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_v^2} + \frac{1}{\sigma_u}\right)\right] u^{p-1}, \\
 &\quad u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \tag{4.6.3}
 \end{aligned}$$

donde k es un producto de constantes. Entonces,

$$\begin{aligned}
 f(u, \varepsilon) &= k \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_v}\right)^2\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_v^2}\left(u^2 + 2u\sigma_v^2\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_v^2} + \frac{1}{\sigma_u}\right)\right)\right] u^{p-1} = \\
 &= k \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_v}\right)^2\right] \cdot \\
 &\quad \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_v^2}\left[u^2 + 2u\left(\varepsilon + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_u}\right) + \left(\varepsilon + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_u}\right)^2 - \left(\varepsilon + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_u}\right)^2\right]\right] u^{p-1} = \\
 &= k \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_v}\right)^2 + \frac{1}{2\sigma_v^2}\left(\varepsilon + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_u}\right)^2\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_v^2}\left[u + \left(\varepsilon + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_u}\right)\right]^2\right] u^{p-1}, \\
 &\quad u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \tag{4.6.4}
 \end{aligned}$$

La distribución marginal de ε se obtiene integrando la ecuación (4.6.4) en función de u :

$$f(\varepsilon) = \frac{(1/\sigma_u)^p}{\sqrt{2\pi}\Gamma(p)} \sigma_v^{p-1} \exp\left[\frac{\varepsilon}{\sigma_u} + \frac{\sigma_v^2}{2\sigma_u^2}\right] \int_w^\infty (t-w)^{p-1} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt,$$

$$-\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.6.5)$$

donde $w = (\varepsilon/\sigma_v) + (\sigma_v/\sigma_u)$ y ε se distribuye asimétricamente con media $E(\varepsilon) = -E(u) = -p\sigma_u$ y varianza $V(\varepsilon) = \sigma_v^2 + p\sigma_u^2$.

El término integral de la ecuación (4.6.5) presenta algunos problemas de estimación y Beckers y Hammond (1987) proponen la expresión:

$$f(\varepsilon) = \frac{(1/\sigma_u)^p}{\Gamma(p)\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_u^2}\right] \int_0^\infty u^{p-1} \exp\left[-\frac{u}{\sigma_u} - \frac{u\varepsilon}{\sigma_v^2} - \frac{u^2}{2\sigma_v^2}\right] du,$$

$$-\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.6.6)$$

donde la integral

$$\int_0^\infty u^{p-1} \exp\left[-\left(\frac{1}{\sigma_u} + \frac{\varepsilon}{\sigma_v^2}\right)u - \frac{u^2}{2\sigma_v^2}\right] du = J(p, \sigma_u, \sigma_v, \varepsilon) \quad (4.6.7)$$

presenta una expresión definida conocida.

La expresión de la función de densidad condicionada u dado ε puede obtenerse según se indica en la ecuación (4.2.5):

$$f(u|\varepsilon) = \frac{u^{p-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{1}{\sigma_u} + \frac{\varepsilon}{\sigma_v^2}\right)u - \frac{u^2}{2\sigma_v^2}\right]}{J(p, \sigma_u, \sigma_v, \varepsilon)}, \quad u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.6.8)$$

Una estimación puntual de la ineficiencia técnica puede realizarse mediante:

$$E(u|\varepsilon) = \frac{h(p, \varepsilon)}{h(p-1, \varepsilon)} \quad (4.6.9)$$

donde $h(p, \varepsilon_i) = E(z^{p-1} | z > 0, \varepsilon_i)$ y $z \sim N[-(\varepsilon_i + \sigma_v^2/\sigma_u), \sigma_v^2]$, por lo que puede aproximarse numéricamente.

6.2. Frontera de Costes

A partir de la función de densidad conjunta de u y v expresada en la ecuación (4.6.2), puede obtenerse la función de densidad conjunta de u y ε aplicando las expresiones (4.2.3) y (4.2.4):

$$\begin{aligned}
 f(u, \varepsilon) &= \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon - u}{\sigma_v}\right)^2\right] \cdot \frac{(1/\sigma_u)^p}{\Gamma(p)} u^{p-1} \cdot \exp\left[\frac{-u}{\sigma_u}\right] = \\
 &= \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_v}\right)^2\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sigma_v}\right)^2\right] \cdot \exp\left[\frac{\varepsilon u}{\sigma_v^2}\right] \cdot \frac{(1/\sigma_u)^p}{\Gamma(p)} u^{p-1} \cdot \exp\left[\frac{-u}{\sigma_u}\right] = \\
 &= k \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_v}\right)^2\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sigma_v}\right)^2 + u\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_v^2} - \frac{1}{\sigma_u}\right)\right] u^{p-1}, \\
 &\quad u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \tag{4.6.10}
 \end{aligned}$$

donde k es un producto de constantes. Entonces,

$$\begin{aligned}
 f(u, \varepsilon) &= k \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_v}\right)^2\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_v^2}\left(u^2 + 2u\sigma_v^2\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma_v^2} + \frac{1}{\sigma_u}\right)\right)\right] u^{p-1} = \\
 &= k \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_v}\right)^2\right] \cdot \\
 &\quad \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_v^2}\left[u^2 + 2u\left(-\varepsilon + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_u}\right) + \left(-\varepsilon + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_u}\right)^2 - \left(-\varepsilon + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_u}\right)^2\right]\right] u^{p-1} =
 \end{aligned}$$

$$= k \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{\sigma_v} \right)^2 + \frac{1}{2\sigma_v^2} \left(-\varepsilon + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_u} \right)^2 \right] \cdot \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_v^2} \left[u + \left(-\varepsilon + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_u} \right) \right]^2 \right] u^{p-1},$$

$$u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.6.11)$$

Para obtener la distribución marginal de ε , debe integrarse la ecuación (4.6.11) en función de u :

$$f(\varepsilon) = \frac{(1/\sigma_u)^p}{\sqrt{2\pi}\Gamma(p)} \sigma_v^{p-1} \exp \left[\frac{-\varepsilon}{\sigma_u} + \frac{\sigma_v^2}{2\sigma_u^2} \right] \int_w^\infty (t-w)^{p-1} \exp \left[-\frac{t^2}{2} \right] dt,$$

$$-\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.6.12)$$

El término integral de la ecuación (4.6.12) presenta algunos problemas de estimación y Beckers y Hammond (1987) obtuvieron la expresión alternativa que sigue:

$$f(\varepsilon) = \frac{(1/\sigma_u)^p}{\Gamma(p)\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp \left[-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_u^2} \right] \int_0^\infty u^{p-1} \exp \left[-\frac{u}{\sigma_u} + \frac{u\varepsilon}{\sigma_v^2} - \frac{u^2}{2\sigma_v^2} \right] du,$$

$$-\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.6.13)$$

donde la integral

$$\int_0^\infty u^{p-1} \exp \left[-\left(\frac{1}{\sigma_u} - \frac{\varepsilon}{\sigma_v^2} \right) u - \frac{u^2}{2\sigma_v^2} \right] du = J(p, \sigma_u, \sigma_v, \varepsilon) \quad (4.6.14)$$

presenta una expresión definida conocida.

La expresión de la función de densidad condicionada u dado ε puede obtenerse según se indica en la ecuación (4.2.5):

$$f(u|\varepsilon) = \frac{u^{p-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{1}{\sigma_u} - \frac{\varepsilon}{\sigma_v^2}\right)u - \frac{u^2}{2\sigma_v^2}\right]}{J(p, \sigma_u, \sigma_v, \varepsilon)}, \quad u \geq 0 \quad -\infty < \varepsilon < \infty \quad (4.6.15)$$

Una estimación puntual de la ineficiencia en costes puede obtenerse mediante:

$$E(u|\varepsilon) = \frac{h(p, \varepsilon)}{h(p-1, \varepsilon)} \quad (4.6.16)$$

que puede aproximarse numéricamente.

7. Bondad del ajuste

Esta sección propone la aplicación de un test de bondad de ajuste para contrastar la pertinencia de los supuestos establecidos a priori sobre la distribución del término de efectos de ineficiencia en los modelos de frontera estocástica.

Existen estudios previos que especifican tests sobre modelos de frontera estocástica: Schmidt y Lin (1984) y Coelli (1995) proporcionaron tests sobre la hipótesis nula de simetría del término de perturbación compuesto, Lee (1983) contrastó la hipótesis nula de que la distribución de ineficiencia es half normal (o normal truncada) frente a la alternativa de que la distribución pertenece a la familia de Pearson de cuatro parámetros, Koop y Mullahy (1990) y Chen y Wang (2009) utilizaron el método de los momentos para construir un test de especificación general, Newey (1985) y Tauchen (1985) propusieron tests de momentos condicionados y Bera y Mallick (2002) sugirieron el test de matriz de información de White (1982).

El principal problema que se plantea es que el término de ineficiencia sobre el que se establece el supuesto distribucional objeto del contraste no es observable. Este documento desarrolla un test de bondad de ajuste que, de forma general, plantea si un conjunto de datos observables se ajusta a la distribución que debería tener si en el modelo se ha establecido el supuesto adecuado. En primer lugar, no existe acuerdo sobre el conjunto de datos observables que se utiliza. Una posibilidad consiste en contrastar la bondad del ajuste existente entre la distribución observada de la estimación de ineficiencia y la distribución que debería presentar bajo el supuesto distribucional realizado, como indicaron Wang y Schmidt (2009). En este caso, se admite la validez del supuesto distribucional normal establecido para la componente de efectos aleatorios, v , y se realiza el contraste sobre la validez del supuesto distribucional de la componente de efectos de ineficiencia, u . De otro modo, Wang *et al.* (2011) basan el test de bondad de ajuste en la distribución de la perturbación estocástica compuesta, ε . La distribución de ε también surge de las distribuciones supuestas para u y v y, por lo tanto, si la distribución supuesta para v es válida, es posible contrastar la validez de la distribución supuesta para u mediante un test de bondad de ajuste basado en la distribución de ε . Una de sus principales conclusiones es que, puesto que \hat{u} es una función monótona de ε , los tests de bondad de ajuste basados en la distribución de \hat{u} son equivalentes a los basados en la distribución de ε . Se proponen los test de Kolmogorov-Smirnov y χ^2 de Pearson, aunque existe consenso en la literatura sobre la mayor potencia del primero frente al segundo.

Dados estos antecedentes, esta investigación utiliza el test de Kolmogorov-Smirnov basado en la distribución de \hat{u} para contrastar la validez de los supuestos distribucionales establecidos sobre el término de ineficiencia. Para ello, se contrastará el ajuste de las funciones de densidad teóricas de la ineficiencia estimada generadas en las secciones anteriores para cada supuesto

distribucional con los resultados de ineficiencia estimada obtenidos empíricamente mediante la estimación máximo verosímil, habiendo establecido los respectivos supuestos distribucionales sobre el término de ineficiencia.

Según Rohatgi (1984), el test de bondad de ajuste de Kolmogorov y Smirnov se construye a partir de las desviaciones verticales entre la función de distribución empírica y la función de distribución planteada como hipótesis. Una de sus principales ventajas es que la aplicación del test se realiza directamente sobre las observaciones, sin agrupar, permitiendo una comparación con cada valor observado. Además, se trata de un test exacto y flexible puesto que la distribución del test estadístico bajo H_0 es conocida y tabulada y permite contrastar H_0 frente a alternativas de una y dos colas.

La función de distribución empírica de la muestra X_1, X_2, \dots, X_I se define como:

$$\hat{F}_I(x) = \frac{\text{número de } X_i \text{'s } \leq x}{I} \quad (4.7.1)$$

La hipótesis nula del contraste, $H_0: F(x) = F_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, indica un acuerdo razonable entre $F_0(x)$ y su estimación $\hat{F}_I(x)$. La hipótesis alternativa establece $H_1: F(x) \neq F_0(x)$ para algún x . De este modo, si se cumple la hipótesis nula, las desviaciones absolutas $|\hat{F}_I(x) - F_0(x)|$ deberían ser pequeñas para todo x .

El test estadístico Kolmogorov-Smirnov de dos colas se define como:

$$D_I = \max_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_I(x) - F_0(x)| \quad (4.7.2)$$

donde el estadístico D_I es la mayor desviación absoluta entre $\hat{F}_I(x)$ y $F_0(x)$. Por lo tanto, cuando D_I es elevado, se rechaza H_0 en favor de H_1 .

Los tests estadísticos Kolmogorov-Smirnov de una cola se definen de forma análoga:

$$D_1^+ = \max_{x \in \mathbb{R}} \{ \hat{F}_1(x) - F_0(x) \} \quad (4.7.3)$$

$$D_1^- = \max_{x \in \mathbb{R}} \{ F_0(x) - \hat{F}_1(x) \} \quad (4.7.4)$$

Los estadísticos D_1^+ y D_1^- se utilizan para contrastar H_0 frente a las respectivas alternativas de una cola, $F(x) \geq F_0(x)$ y $F(x) \leq F_0(x)$. Un elevado valor de D_1^+ acepta la alternativa $H_1: F(x) \geq F_0(x)$, por lo tanto, si D_1^+ es elevado, se rechaza H_0 en favor de H_1 . La alternativa $F(x) \leq F_0(x)$ se contrasta siguiendo las mismas consideraciones.

Si F_0 es continua, las distribuciones exactas de D_1, D_1^+, D_1^- son conocidas y están tabuladas.

Los valores observados de D_1, D_1^+ y D_1^- se calculan a partir de la muestra mediante el procedimiento que se describe a continuación.

En primer lugar, las observaciones muestrales deben ordenarse según el criterio:

$$x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(l)} \quad (4.7.5)$$

A partir de lo expuesto anteriormente, el estadístico puede calcularse como:

$$D_1 = \max\{D_1^+, D_1^-\} \quad (4.7.6)$$

donde

$$D_1^+ = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq l} \left[\frac{i}{l} - F_0(x_{(i)}) \right], 0 \right\} \quad (4.7.7)$$

y

$$D_1^- = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq l} \left[F_0(x_{(i)}) - \frac{i-1}{l} \right], 0 \right\} \quad (4.7.8)$$

Dadas las tres expresiones anteriores,

$$D_1 = \max_{1 \leq i \leq l} \left\{ \max \left[\frac{i}{l} - F_0(x_{(i)}), F_0(x_{(i)}) - \frac{i-1}{l} \right] \right\} \quad (4.7.9)$$

Se ha notado por $\hat{F}_1(x_i) = i/l$. Así, D_1^+ es la distancia vertical máxima entre \hat{F}_1 y F_0 teniendo en cuenta todas las observaciones.

Capítulo 5

APLICACIÓN AL SISTEMA BANCARIO ESPAÑOL

1. Introducción

El presente capítulo tiene como objetivo aplicar en el sector bancario español los métodos de estimación de la eficiencia expuestos en esta tesis. En particular, seleccionar la distribución del término de ineficiencia que mejor representa la realidad de la muestra evaluada. Este análisis se realizará considerando funciones frontera de producción y costes bajo diferentes formas funcionales.

El método utilizado en la estimación de la frontera estocástica es el de Máxima Verosimilitud que, según Greene (1980a), proporciona estimadores consistentes, asintóticamente eficientes y normales. En este sentido, Coelli (1995) concluyó que el estimador MV es asintóticamente más eficiente que el MCOC cuando la contribución de los efectos de ineficiencia sobre la varianza total es elevada y, posteriormente, Coelli *et al.* (1998) afirmaron que el estimador MV debería usarse preferentemente al estimador MCOM siempre que fuese posible.

Las formas funcionales de las fronteras estocásticas estimadas son las conocidas como Cobb-Douglas y translogarítmica. La forma funcional Cobb-Douglas se ha utilizado en todos los supuestos del estudio, mientras que la forma funcional translogarítmica únicamente se aproxima a la función de costes en el caso de la muestra conjunta de cajas de ahorros y bancos. La razón por la que no se ha podido estimar una translog en todos los casos es que una mayor flexibilidad de la forma funcional requiere un mayor número de unidades muestrales que permita estimar el mayor número de parámetros que contiene.

En cada caso, bajo la hipótesis establecida, se obtienen los resultados siguientes:

La función frontera, es decir, los coeficientes estimados y su significatividad.

La existencia de efectos de ineficiencia significativos.

La estimación de los coeficientes de ineficiencia.

La función de densidad teórica de la ineficiencia estimada.

La bondad del ajuste entre las estimaciones de ineficiencia y la distribución teórica de ineficiencia estimada.

Se ha utilizado una muestra de entidades financieras del sistema bancario español compuesta por 44 cajas de ahorros y 30 bancos en el período 2009. En primer lugar, el modelo se aplica a las muestras de cajas de ahorros y de bancos por separado y, a continuación, se utiliza el total de la muestra de entidades para estimar una frontera común.

El capítulo se organiza de la siguiente forma: en la segunda sección se describe la muestra y se definen las variables utilizadas, en las secciones tercera y cuarta se presentan los resultados sobre selección del supuesto distribucional del término de ineficiencia en las funciones de producción y costes, respectivamente, y la sección quinta analiza las estimaciones de eficiencia e ineficiencia obtenidas en todos los casos estudiados.

2. Descripción de la muestra. Datos y variables

En el marco del sistema bancario español, las entidades que lo conforman han sufrido una serie de transformaciones en los últimos años, variando considerablemente en cuanto a tamaño, número de oficinas y empleados, y a inversión en activos financieros de distinta naturaleza. Teniendo en cuenta lo anterior y la homogeneidad que exige la muestra para la aplicación de la metodología expuesta en anteriores capítulos, se han seleccionado 44 cajas y 30 bancos para el año 2009.

La Aproximación de Frontera Estocástica requiere de unos inputs y outputs cuya selección pudiera ser arbitraria (Berger y Humphrey, 1997). En cuanto a la medición del output bancario, existen dos posibles enfoques debido a la doble actividad que pueden realizar las instituciones bancarias (Thanassoulis, 1999). Concretamente, las diferencias se originan por la diferente función que pueden desempeñar los depósitos (Clark, 1988). Según el “enfoque producción”, tanto los créditos como los depósitos se consideran productos bancarios. Por otro lado, según el “enfoque intermediación”, sugerido por Sealey y Lindley (1977), los depósitos se consideran un input o un input y un output simultáneamente. Es decir, las instituciones bancarias trabajan como intermediarios recaudando depósitos para ofrecerlos como préstamos. Esta última aproximación ha sido muy utilizada en los estudios realizados sobre el tema en la última década: Altunbas *et al.* (2001), Tortosa-Ausina (2002, 2003), Maudos y Pastor (2003), Weill (2003), Carbó *et al.* (2004), Weill (2004), Bonin *et al.* (2005), Zajc (2006), Bos y Schmiedel (2007), Staikouras *et al.* (2008), Pasiouras (2008), Weill (2009) y Lozano-Vivas y Pasiouras (2010).

Bajo el enfoque intermediación, teniendo en cuenta lo reportado en la literatura al respecto y la disponibilidad de la información, se han seleccionado las variables recogidas en la tabla 1.

Tabla 1. Variables seleccionadas

Outputs	Activos rentables (y_1)	Caja y depósitos en bancos, inversiones crediticias y renta fija.
	Cartera de valores (y_2)	Acciones, otros títulos de renta variable y participaciones
Inputs	Fondos prestables (x_1)	Partidas del pasivo que conllevan costes financieros
	Capital físico (x_2)	Valor elementos patrimoniales tangibles
	Empleados (x_3)	Número de personas empleadas
Precios de inputs	Precio fondos prestables (w_1)	Costes financieros/ x_1
	Precio capital físico (w_2)	Amortizaciones y otros gastos administrativos/ x_2
	Precio empleados (w_3)	Gastos de personal/ x_3

La especificación del “activo financiero” como output y del “pasivo financiero” como input es consistente con la modelización de la empresa bancaria mediante la aproximación de intermediación.

Respecto a las variables a explicar, el coste total incluye tanto costes financieros, intereses y cargas asimiladas, como costes operativos, gastos de personal y otros gastos generales de administración y amortización. En el caso de la frontera de producción, se selecciona activos rentables como output, dada su relación con la actividad comercial de las entidades.

Antes de presentar los resultados se describen, en términos de sus parámetros básicos, las distribuciones de las variables fundamentales utilizadas en el trabajo como inputs, precios de inputs, outputs y costes.

Así pues, las siguientes tablas muestran las principales características descriptivas de las distribuciones de las variables seleccionadas para el análisis de la eficiencia del sector bancario español en el año 2009.

Tabla 2. Estadísticos descriptivos. Cajas de ahorros, I=44

	Min	Max	Media	Desv. tip
Activos rentables	324800.0	224600795.0	25138307.2	41646959.1
Cartera de valores	1124.0	16480049.0	1429084.8	2946147.8
Fondos prestables	314260.0	232647838.0	25999957.1	43680420.3
Capital físico	16092.0	3934757.0	494672.9	729855.4
Empleados	87.0	25689.0	2877.2	4305.9
Precio fondos prestables	0.0170	0.0315	0.0232	0.0036
Precio capital físico	0.0789	0.3902	0.2113	0.0646
Precio empleados	49.9	81.8	60.2	8.4
Coste total	16143.0	7543551.0	875163.2	1367343.5

Tabla 3. Estadísticos descriptivos. Bancos, I=30

	Min	Max	Media	Desv. tip
Activos rentables	85835.0	295688078.0	36049173.1	73056923.8
Cartera de valores	314.0	36265129.0	2790903.9	8354706.2
Fondos prestables	74435.0	357980481.0	40487255.7	87868608.7
Capital físico	134.0	1709236.0	244158.2	464936.4
Empleados	8.0	26502.0	3343.8	6268.7
Precio fondos prestables	0.0074	0.0385	0.0211	0.0065
Precio capital físico	0.2884	5.3544	1.2933	1.2539
Precio empleados	34.9	100.7	68.6	14.1
Coste total	2170.0	10480470.0	1222509.0	2510478.8

Tabla 4. Estadísticos descriptivos. Cajas de ahorros y bancos, I=74

	Min	Max	Media	Desv. tip
Activos rentables	85835.0	295688078.0	29561631.2	56312219.9
Cartera de valores	314.0	36265129.0	1981173.6	5770193.1
Fondos prestables	74435.0	357980481.0	31873186.3	65133458.3
Capital físico	134.0	3934757.0	393112.9	644193.2
Empleados	8.0	26502.0	3066.4	5156.1
Precio fondos prestables	0.0074	0.0385	0.0224	0.0051
Precio capital físico	0.0789	5.3544	0.6499	0.9556
Precio empleados	34.9	100.7	63.6	11.7
Coste total	2170.0	10480470.0	1015979.1	1906437.3

Los bancos presentan un valor promedio muy superior a las cajas de ahorros en ambos outputs y en el coste total.

En cuanto a los inputs utilizados, los bancos vuelven a superar los niveles de las cajas salvo en el input capital físico, donde utilizan un nivel inferior a la mitad del utilizado por las cajas de ahorros.

En lo que se refiere a los precios, las cajas pagan más por los fondos prestables, mientras que los bancos presentan mayores precios en el capital físico y los empleados.

3. Estimación de la eficiencia técnica

En el modelo frontera estocástica de producción se ajusta una forma funcional Cobb-Douglas en las tres estimaciones, fronteras separadas y frontera común.

$$\ln y_i = \alpha_0 + \sum_{n=1}^3 \beta_n \ln x_{in} + v_i - u_i \quad (5.3.1)$$

Este modelo se estima bajo los supuestos distribucionales half normal y exponencial para el término de ineficiencia, utilizando muestras específicas de cajas de ahorros y bancos y una muestra conjunta de todas las entidades en cada caso.

3.1. Supuesto half normal

Caso 1: Muestra de cajas de ahorros

La estimación del modelo de frontera estocástica de producción de tipo Cobb-Douglas bajo el supuesto half normal del término de ineficiencia para la muestra de cajas de ahorros se presenta en la tabla 5 que se muestra a continuación.

Tabla 5. Modelo frontera estocástica de producción bajo el supuesto half normal.

Cajas de ahorros

$\ln y$	Coef.	Desv. típ.	z	P>z	Interv. Conf. 95%	
$\ln x_1$	1.015629	0.0209067	48.58	0	0.9746526	1.056605
$\ln x_2$	-0.0178918	0.0113405	-1.58	0.115	-0.0401188	0.0043351
$\ln x_3$	-0.0111339	0.0234286	-0.48	0.635	-0.0570531	0.0347852
α_0	0.0717151	0.1813337	0.4	0.692	-0.2836924	0.4271227
$\ln \sigma_v^2$	-9.572014	1.43897	-6.65	0	-12.39234	-6.751685
$\ln \sigma_u^2$	-6.087465	0.3422415	-17.79	0	-6.758246	-5.416684
σ_v	0.0083457	0.0060046			0.0020372	0.0341893
σ_u	0.0476567	0.008155			0.0340773	0.0666472
σ^2	0.0023408	0.0007146			0.0009403	0.0037413
λ	5.710314	0.0129496			5.684934	5.735695

La significatividad del parámetro λ , que representa la importancia relativa de la variabilidad de la componente de ineficiencia sobre la del error aleatorio, se utiliza como indicador de la existencia de una componente de efectos de ineficiencia en el modelo. El intervalo de confianza de la tabla 5 correspondiente al parámetro λ , 5.685;5.736, permite rechazar la hipótesis nula del contraste de significatividad individual y, por tanto, concluir la existencia de ineficiencia técnica.

La información que aporta el contraste de significatividad individual de la desviación típica de la ineficiencia, σ_u , es complementaria a la del anterior. La tabla 5 muestra un intervalo de confianza con límites 0.034 y 0.067 y, por tanto, se rechaza la hipótesis nula, es decir, se acepta que la desviación típica del término de ineficiencia es significativa.

En lo que se refiere a las variables explicativas utilizadas en la función frontera, puede observarse que únicamente el primero de los inputs presenta un coeficiente significativo. Este input se corresponde con los fondos prestables, de manera que un aumento de los mismos supone un incremento significativo de la producción de activos rentables (*ceteris paribus*).

En las figuras 4 y 5 se representan los histogramas de los valores de ineficiencias estimados a partir del modelo de frontera estocástica de producción de las cajas de ahorros cuando se ha supuesto una distribución half normal para el término de efectos de ineficiencia.

Figura 4. Histograma de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción.

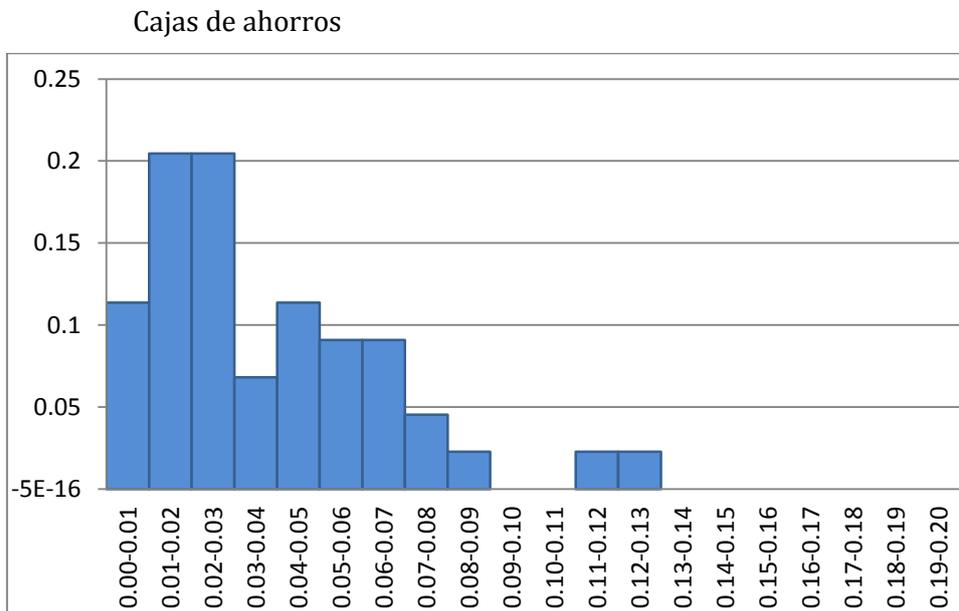
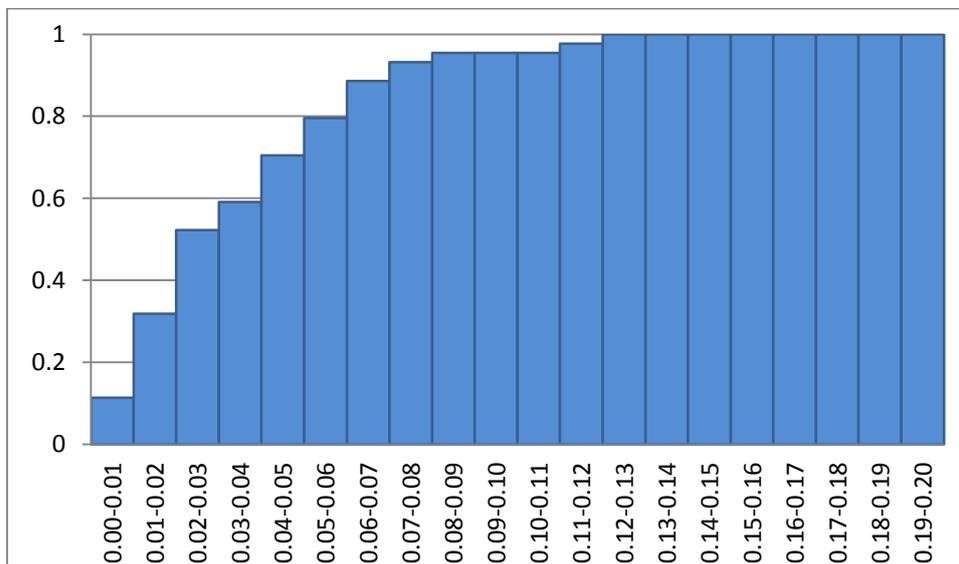


Figura 5. Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Cajas de ahorros



A continuación, se pretende contrastar la bondad del ajuste entre los resultados de ineficiencia estimados (figuras 4 y 5) y la distribución teórica que éstos deberían

presentar habiendo supuesto la distribución half normal para el término de ineficiencia.

La expresión de la función de densidad teórica de la ineficiencia técnica estimada de las cajas de ahorros cuando se supone una distribución half normal para la ineficiencia del modelo frontera estocástica se obtiene sustituyendo en la ecuación (4.3.14) los parámetros estimados en la tabla 5:

$$f(\hat{u}) = \frac{0.097 \cdot \phi\left(\frac{g(\hat{u})}{0.048}\right) \cdot \Phi(-g(\hat{u}) \cdot 118.026)}{0.002 \cdot |-1 + c'(g(\hat{u}) \cdot 118.02)|}, \quad \hat{u} \geq 0 \quad (5.3.2)$$

Las figuras 6 y 7 muestran las funciones de densidad y distribución teóricas de la ineficiencia estimada para la muestra de cajas de ahorros, respectivamente. Se trata de funciones denominadas “teóricas” porque representan la forma funcional que las funciones de densidad y distribución de la ineficiencia estimada deberían presentar habiendo supuesto una distribución half normal para la componente de ineficiencia técnica del modelo.

Figura 6. Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Cajas de ahorros

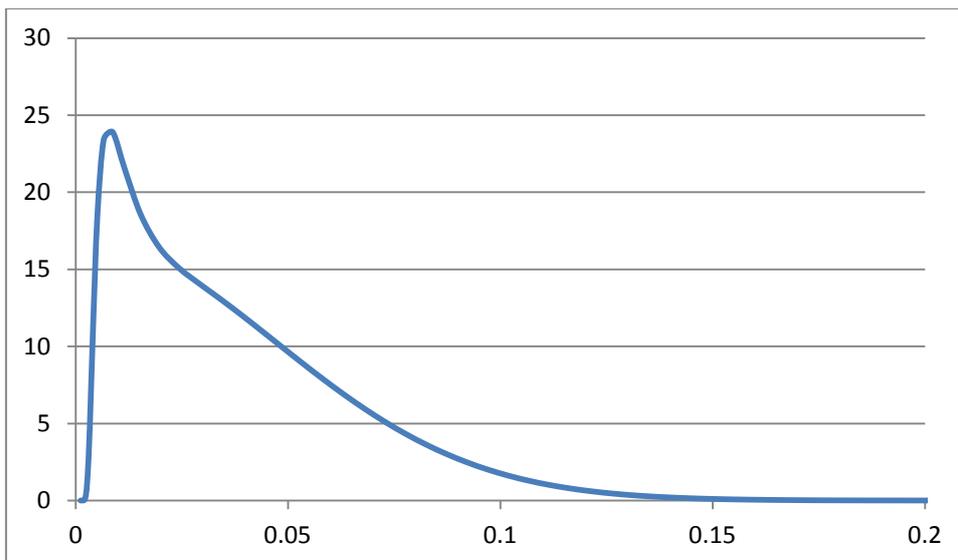
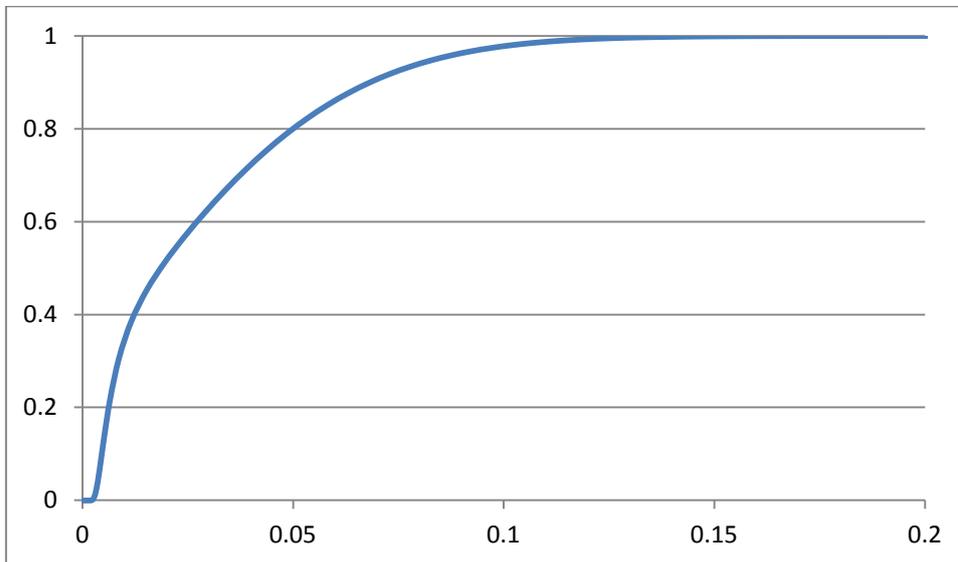


Figura 7. Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Cajas de ahorros



En el caso en el que el supuesto distribucional half normal establecido a priori sobre el término de efectos de ineficiencia fuese correcto, debería existir un buen ajuste entre el histograma de ineficiencias estimadas representado en las figuras 4 y 5 y la distribución teórica presentada en las figuras 6 y 7.

Para contrastar la bondad del ajuste, se aplica el test de Kolmogorov-Smirnov, donde se acepta la hipótesis nula de ajuste entre las distribuciones cuando el estadístico es inferior al valor crítico. El estadístico D_1 resulta de 0.173 y el p-valor mayor que 0.100 por lo que, en este caso, se acepta la hipótesis nula. En consecuencia, el supuesto half normal para el término de ineficiencia se acepta como válido para la muestra de cajas de ahorros y, por tanto, se acepta la hipótesis H-13.

Caso 2: Muestra de bancos

En la tabla 6, se presenta la estimación del modelo de frontera estocástica de producción de tipo Cobb-Douglas bajo el supuesto half normal del término de ineficiencia para la muestra de bancos.

Tabla 6. Modelo frontera estocástica de producción bajo el supuesto half normal.

Bancos						
lny	Coef.	Desv. típ.	z	P>z	Interv. Conf. 95%	
lnx ₁	0.9606759	0.0088954	108	0	0.9432411	0.9781106
lnx ₂	0.0085516	0.0139809	0.61	0.541	-0.0188506	0.0359537
lnx ₃	0.0081628	0.0138494	0.59	0.556	-0.0189815	0.0353071
α ₀	0.5439635	0.0996297	5.46	0	0.3486929	0.7392341
lnσ _v ²	-7.684199	1.058592	-7.26	0	-9.759001	-5.609397
lnσ _u ²	-4.759014	0.3839651	-12.39	0	-5.511572	-4.006456
σ _v	2.14E-02	1.14E-02			7.60E-03	6.05E-02
σ _u	0.0925962	0.0177769			0.063559	0.1348991
σ ²	0.0090341	0.0030614			0.0030339	0.0150343
λ	4.317137	0.0256767			4.266812	4.367462

La tabla 6 presenta unos parámetros λ y σ_u significativos, ya que sus respectivos intervalos de confianza no incluyen el cero y, por lo tanto, se concluye que existen efectos de ineficiencia.

El coeficiente significativo correspondiente al input fondos prestables presenta signo positivo, lo que indica que la producción de activos rentables se incrementa ante aumentos de este input (ceteris paribus).

Las figuras 8 y 9 representan los histogramas correspondientes a los valores de las ineficiencias estimadas mediante el modelo de frontera estocástica de producción de los bancos, habiendo supuesto una distribución half normal para la ineficiencia.

Figura 8. Histograma de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción.

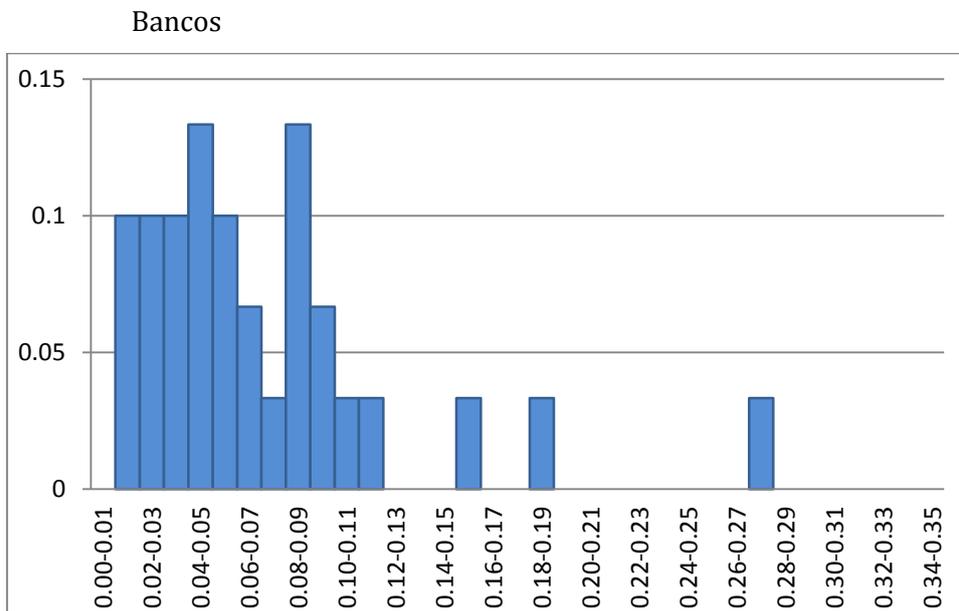
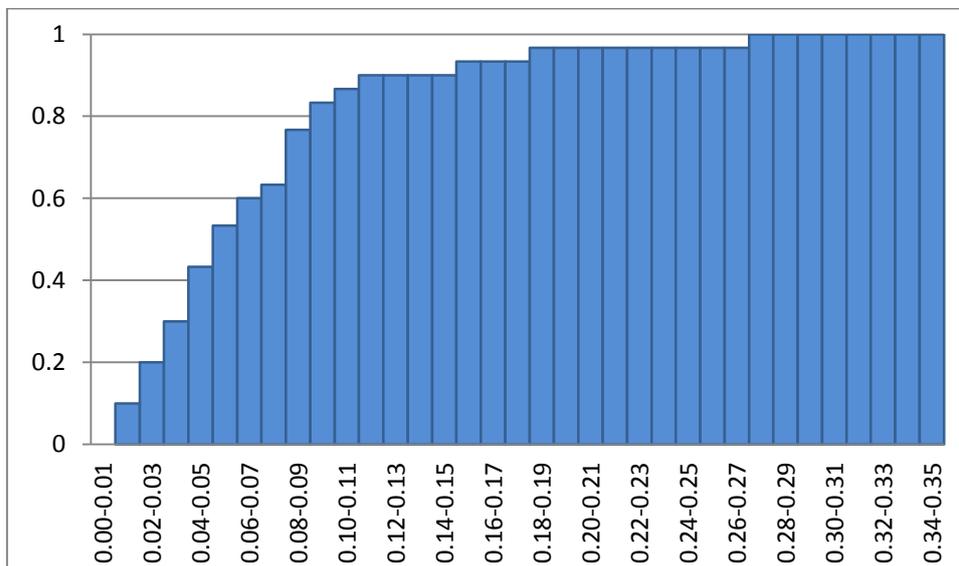


Figura 9. Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Bancos



Por otra parte, la función de densidad teórica que la ineficiencia técnica estimada de los bancos debería presentar si se supone que el término de efectos de

ineficiencia se distribuye según una half normal, se obtiene a partir de la sustitución de los parámetros estimados en la tabla 6 en la ecuación (4.3.14):

$$f(\hat{u}) = \frac{0.190 \cdot \phi\left(\frac{g(\hat{u})}{0.095}\right) \cdot \Phi(-g(\hat{u}) \cdot 45.421)}{0.009 \cdot |-1 + c'(g(\hat{u}) \cdot 45.421)|}, \quad \hat{u} \geq 0 \quad (5.3.3)$$

A partir de la expresión anterior, las figuras 10 y 11 representan gráficamente las funciones de densidad y distribución teóricas de la ineficiencia técnica estimada.

Figura 10. Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Bancos

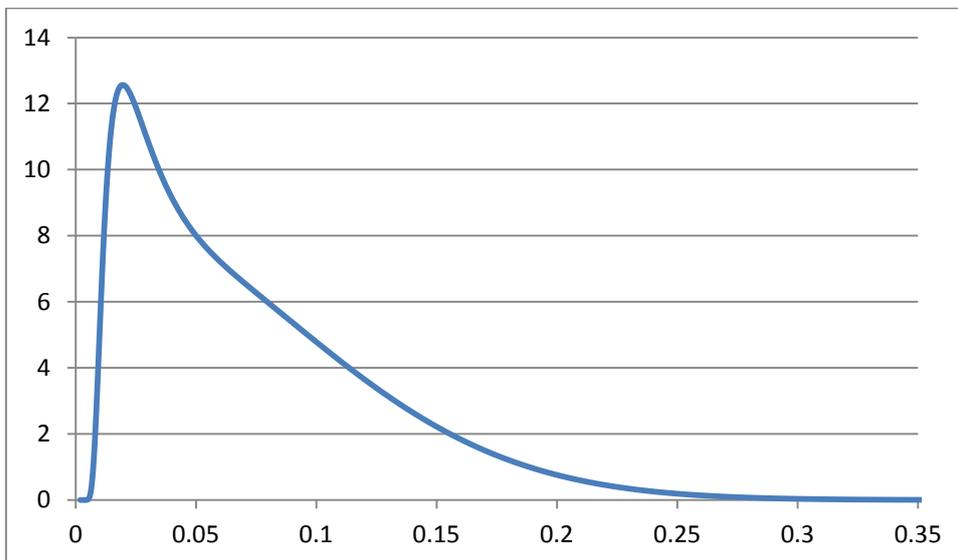
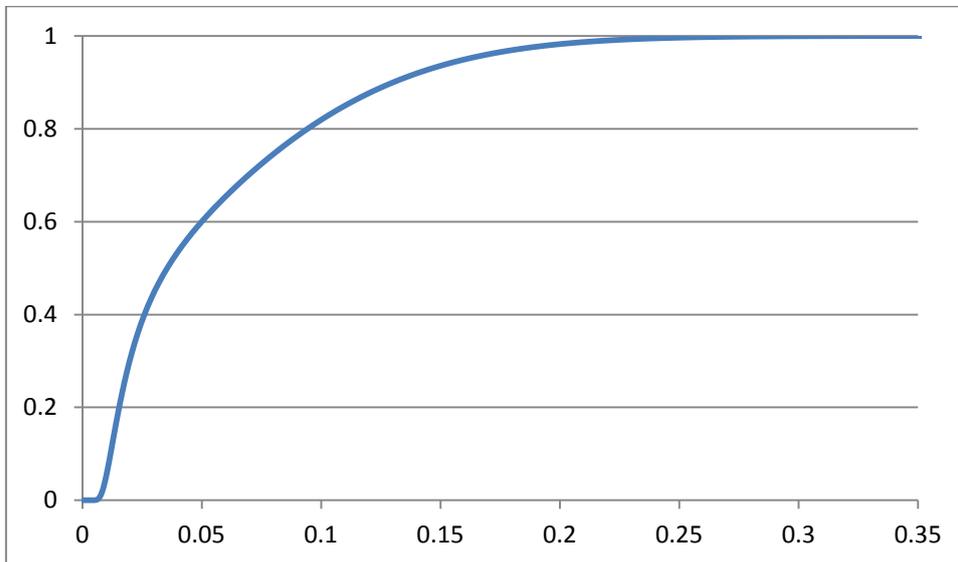


Figura 11. Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Bancos



Para contrastar la bondad del ajuste entre los valores de ineficiencia estimados (figuras 8 y 9) y la distribución teórica que éstos deberían presentar habiendo supuesto la distribución half normal para el término de ineficiencia (figuras 10 y 11), se aplica el test de Kolmogorov-Smirnov. El valor del estadístico calculado resulta de 0.326 y el p-valor menor que 0.010. En consecuencia, se rechaza la hipótesis nula. Así, el supuesto half normal para el término de ineficiencia no se acepta como válido y, en consecuencia, se rechaza la hipótesis H-14.

Caso 3: Muestra de cajas de ahorros y bancos

La tabla 7 detalla la estimación del modelo de frontera estocástica de producción de tipo Cobb-Douglas bajo el supuesto half normal del término de ineficiencia para la muestra de cajas de ahorros y bancos.

Tabla 7. Modelo frontera estocástica de producción bajo el supuesto half normal.

Cajas de ahorros y bancos

lny	Coef.	Desv. típ.	z	P>z	Interv. Conf. 95%	
lnx ₁	0.9684199	0.0052921	182.99	0	0.9580476	0.9787922
lnx ₂	-0.0124378	0.0062096	-2	0.045	-0.0246083	-0.0002672
lnx ₃	0.024525	0.0087939	2.79	0.005	0.0072893	0.0417607
α ₀	0.5230179	0.0673275	7.77	0	0.3910584	0.6549774
lnσ _v ²	-7.841712	0.4926888	-15.92	0	-8.807364	-6.87606
lnσ _u ²	-5.327159	0.2427352	-21.95	0	-5.802911	-4.851406
σ _v	0.0198241	0.0048836			0.0122322	0.0321279
σ _u	0.0696983	0.0084591			0.0549432	0.0884159
σ ²	0.0052508	0.001107			0.0030812	0.0074205
λ	3.515834	0.0114917			3.49331	3.538357

Tanto el parámetro λ como σ_u resultan significativos al rechazarse las hipótesis nulas de sus respectivos contrastes de significatividad mediante los intervalos de confianza presentados en la tabla 7, lo que confirma la existencia de una componente de ineficiencia técnica.

Todas las variables explicativas introducidas en el modelo presentan coeficientes significativos. Concretamente, un incremento de fondos prestables o de empleados incrementa los activos rentables, mientras que éstos disminuyen ante incrementos del capital físico (*ceteris paribus*).

Los valores de ineficiencia estimados a partir del modelo de frontera estocástica de producción de las cajas de ahorros y bancos cuando se ha supuesto una distribución half normal para el término de efectos de ineficiencia, se representan en las figuras 12 y 13.

Figura 12. Histograma de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción.

Cajas de ahorros y bancos

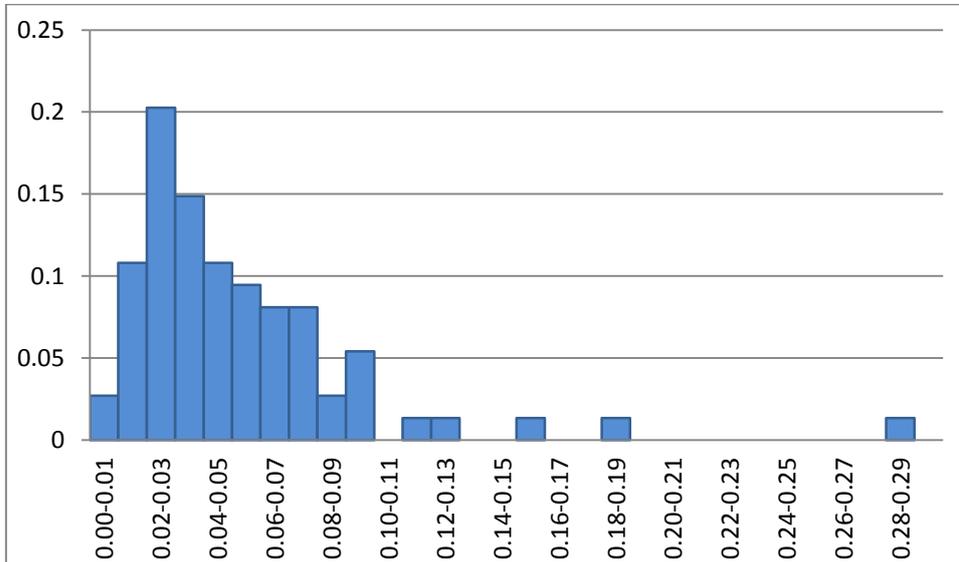
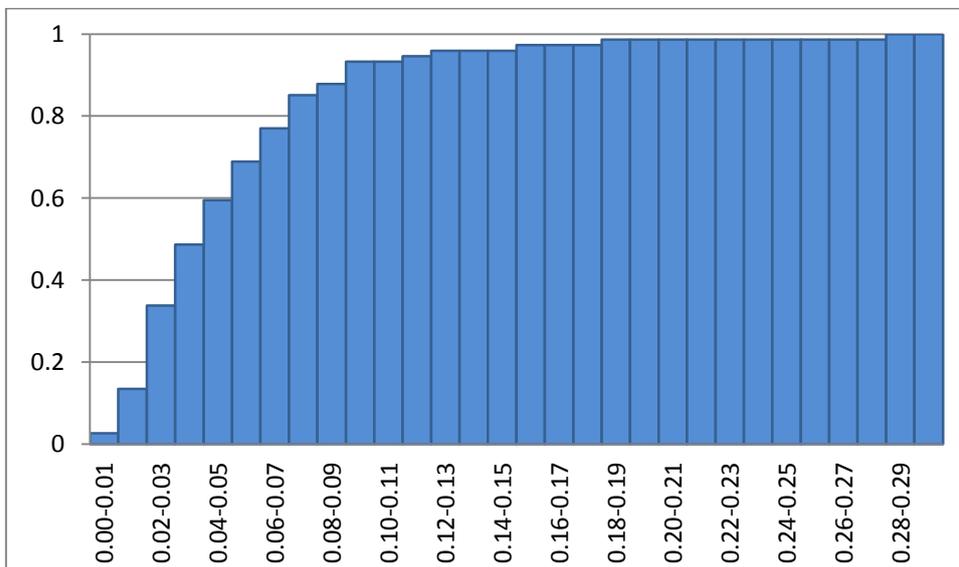


Figura 13. Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción.

Cajas de ahorros y bancos



La expresión de la función de densidad teórica que la ineficiencia estimada debería presentar dado el supuesto half normal de la ineficiencia, se obtiene a partir de la

expresión (4.3.14) y de los valores estimados de los parámetros λ, σ y σ_u^2 de la tabla 7:

$$f(\hat{u}) = \frac{0.145 \cdot \phi\left(\frac{g(\hat{u})}{0.072}\right) \cdot \Phi(-g(\hat{u}) \cdot 48.519)}{0.005 \cdot |-1 + c'(g(\hat{u}) \cdot 48.519)|}, \quad \hat{u} \geq 0 \quad (5.3.4)$$

Las figuras 14 y 15 representan la función de densidad anterior y su correspondiente función de distribución en el caso de la muestra conjunta de cajas de ahorros y bancos.

Figura 14. Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Cajas de ahorros y bancos

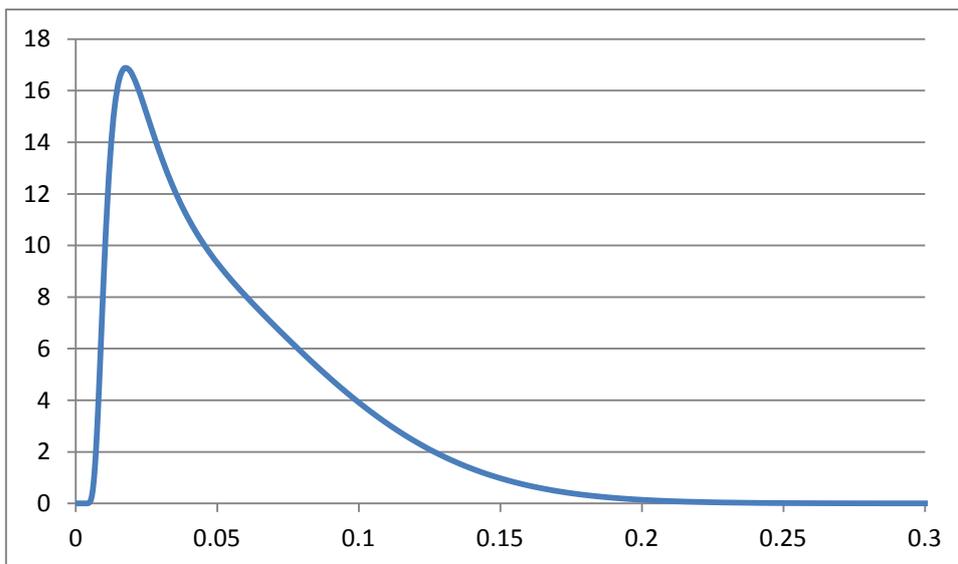
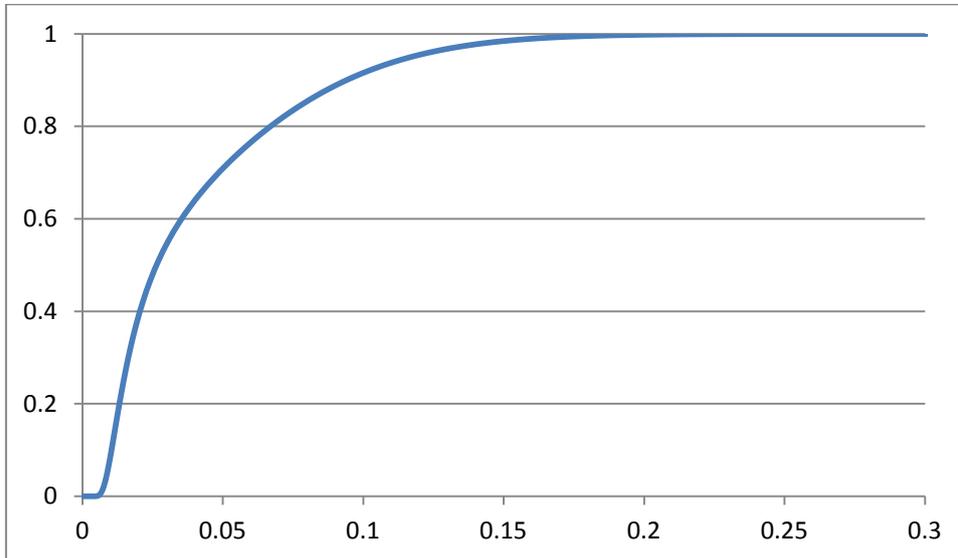


Figura 15. Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de producción. Cajas de ahorros y bancos



Si el supuesto distribucional half normal del término de ineficiencia fuese correcto, el histograma de ineficiencias estimadas representado en las figuras 12 y 13 y la distribución teórica de las figuras 14 y 15 deberían presentar un buen ajuste.

El test de Kolmogorov-Smirnov acepta la hipótesis nula de bondad de ajuste entre las distribuciones cuando el estadístico es inferior al valor crítico. Puesto que el valor del estadístico es de 0.252 y el p-valor menor que 0.010, se rechaza la hipótesis nula. En consecuencia, el supuesto half normal no se acepta como válido para término de efectos de ineficiencia y, por lo tanto, se rechaza la hipótesis H-15.

3.2. Supuesto exponencial

Caso 1: Muestra de cajas de ahorros

La estimación del modelo de frontera de producción estocástica de tipo Cobb-Douglas bajo el supuesto exponencial del término de ineficiencia para la muestra de cajas de ahorros se presenta en la tabla 8.

Tabla 8. Modelo frontera estocástica de producción bajo el supuesto exponencial.

Cajas de ahorros						
lny	Coef.	Desv. típ.	z	P>z	Interv. Conf. 95%	
lnx ₁	1.001475	0.0200762	49.88	0	0.962126	1.040823
lnx ₂	-0.0205393	0.0123757	-1.66	0.097	-0.0447953	0.0037167
lnx ₃	0.0069425	0.0260044	0.27	0.789	-0.0440251	0.0579101
α ₀	0.1900609	0.1647517	1.15	0.249	-0.1328465	0.5129683
lnσ _v ²	-8.255626	0.8325217	-9.92	0	-9.887339	-6.623914
lnσ _u ²	-7.333945	0.7200794	-10.18	0	-8.745275	-5.922616
σ _v	0.0161181	0.0067093			0.0071284	0.0364448
σ _u	0.0255537	0.0092004			0.0126179	0.0517512
σ ²	0.0009128	0.0003291			0.0002678	0.0015578
λ	1.585406	0.0150506			1.555907	1.614905

La intervalos de confianza correspondientes a los parámetros λ y σ_u muestran la significatividad de los mismos, lo que indica la existencia de una componente de ineficiencia.

Al igual que en el modelo correspondiente para el supuesto half normal, el único coeficiente que aparece como significativo es el de los fondos prestables. El signo también coincide con el presentado en la tabla 5, según el cual un aumento de los fondos prestables incrementa los activos rentables (ceteris paribus).

Los intervalos de confianza de cada parámetro de la frontera de la tabla 8 se intersecan con los intervalos de los respectivos parámetros en la tabla 5. En

consecuencia, se concluye que el supuesto distribucional no influye en la estimación de los parámetros de la frontera de producción y, por lo tanto, no se rechaza la hipótesis H-1.

Las figuras 16 y 17 representan los histogramas de los valores de ineficiencias estimados a partir del modelo de frontera estocástica de producción de las cajas de ahorros cuando se ha supuesto una distribución exponencial para el término de efectos de ineficiencia.

Figura 16. Histograma de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción.

Cajas de ahorros

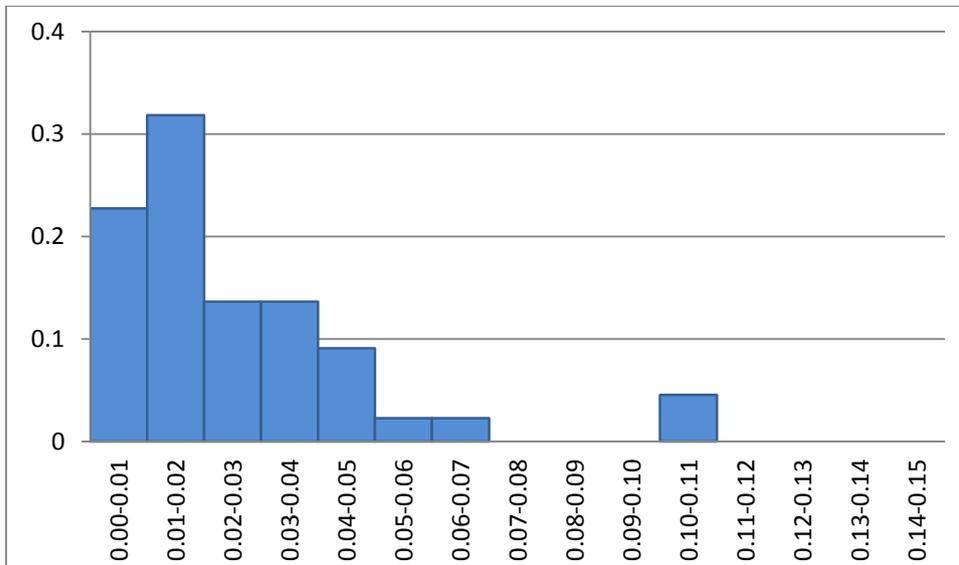
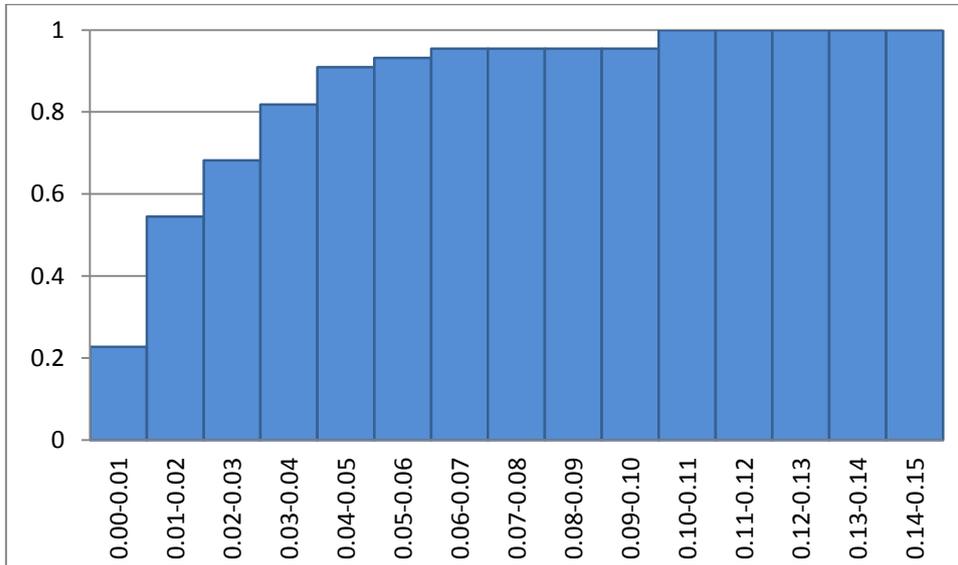


Figura 17. Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Cajas de ahorros



El objetivo consiste en contrastar la bondad del ajuste entre los resultados de ineficiencia estimados (figuras 16 y 17) y la distribución teórica que éstos deberían presentar habiendo supuesto una distribución exponencial para el término de ineficiencia.

A partir de la ecuación (4.5.10) y de los parámetros estimados en la tabla 8, se obtiene la expresión de la función de densidad teórica de la ineficiencia técnica estimada de las cajas de ahorros cuando se supone una distribución exponencial para el término de ineficiencia del modelo frontera estocástica.

$$f(\hat{u}) = \frac{\left[1 - \Phi\left(0.631 + \frac{g(\hat{u})}{0.016}\right)\right] \cdot \exp\left[0.00000008 + \frac{g(\hat{u})}{0.026}\right]}{0.026 \cdot \left|c'\left(0.631 + \frac{g(\hat{u})}{0.016}\right) - 1\right|}, \quad \hat{u} \geq 0 \quad (5.3.5)$$

Figura 18. Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Cajas de ahorros

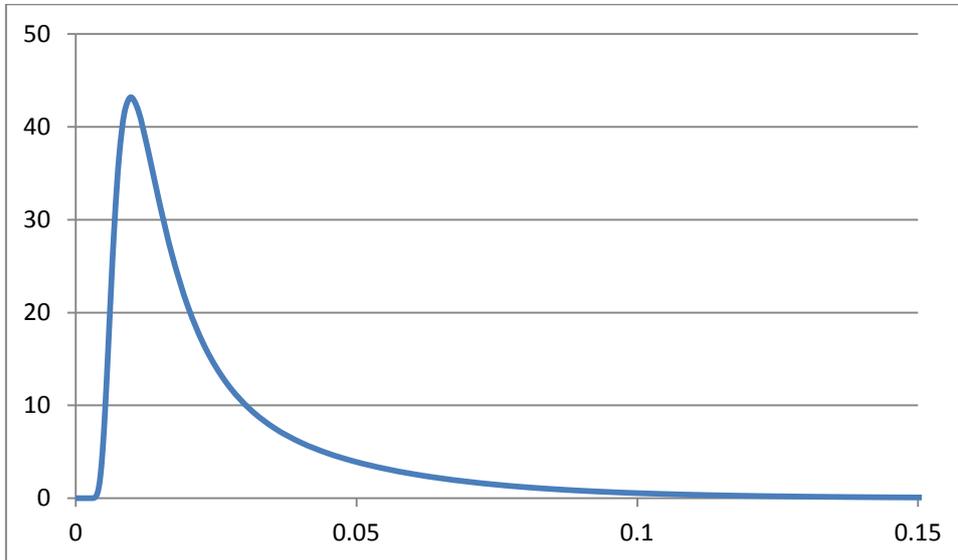
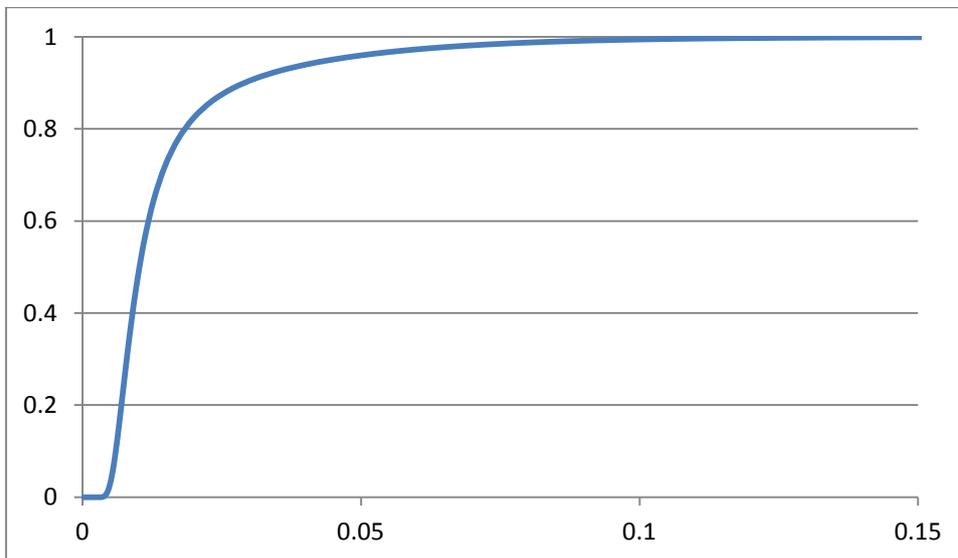


Figura 19. Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Cajas de ahorros



Para comprobar la bondad del ajuste entre la distribución teórica de la ineficiencia técnica estimada (figuras 18 y 19) y el histograma de ineficiencias estimadas para las cajas de ahorros bajo el supuesto exponencial (figuras 16 y 17), se aplica el test

de Kolmogorov-Smirnov. La hipótesis nula de ajuste entre las distribuciones se acepta cuando el estadístico es inferior al valor crítico. En este caso, se obtiene un estadístico $D_1 = 0.287$ y un p-valor menor que 0.010, por lo que se rechaza la hipótesis nula. En consecuencia, el supuesto exponencial para el término de ineficiencia no se acepta como válido y se rechaza la hipótesis H-19.

Caso 2: Muestra de bancos

La tabla 9 presenta la estimación del modelo de frontera estocástica de producción de tipo Cobb-Douglas bajo el supuesto exponencial del término de ineficiencia para la muestra de bancos.

Tabla 9. Modelo frontera estocástica de producción bajo el supuesto exponencial.

Bancos						
lny	Coef.	Desv. tít.	z	P>z	Interv. Conf. 95%	
lnx ₁	0.9683446	0.0085733	112.95	0	0.9515413	0.985148
lnx ₂	0.0028979	0.0111781	0.26	0.795	-0.0190108	0.0248066
lnx ₃	0.0084587	0.0123823	0.68	0.495	-0.0158102	0.0327276
α ₀	0.4631132	0.0856022	5.41	0	0.2953359	0.6308905
lnσ _v ²	-7.196844	0.5225908	-13.77	0	-8.221103	-6.172584
lnσ _u ²	-5.894758	0.512583	-11.5	0	-6.899402	-4.890114
σ _v	0.0273669	0.0071508			0.0163987	0.045671
σ _u	0.0524771	0.0134494			0.0317551	0.0867212
σ ²	0.0035028	0.0013412			0.0008742	0.0061314
λ	1.917539	0.0171006			1.884023	1.951056

Según los intervalos de confianza de los parámetros λ y σ_u que pueden observarse en la tabla 9, los parámetros son significativos, es decir, se confirma la existencia de efectos de ineficiencia técnica en el modelo.

Al igual que en la sección del supuesto half normal para bancos, el coeficiente de fondos prestables es significativo y presenta un signo positivo.

Los intervalos de confianza de los parámetros de la frontera de la tabla 6 se intersecan con los intervalos de los respectivos parámetros de la tabla 9. Esto indica que el supuesto distribucional no influye sobre la estimación de la frontera y, por lo tanto, no se rechaza la hipótesis H-2.

Las figuras 20 y 21 representan los histogramas de las ineficiencias estimadas mediante el modelo de frontera estocástica de producción habiendo supuesto una distribución exponencial para la ineficiencia en la muestra de bancos.

Figura 20. Histograma de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción.

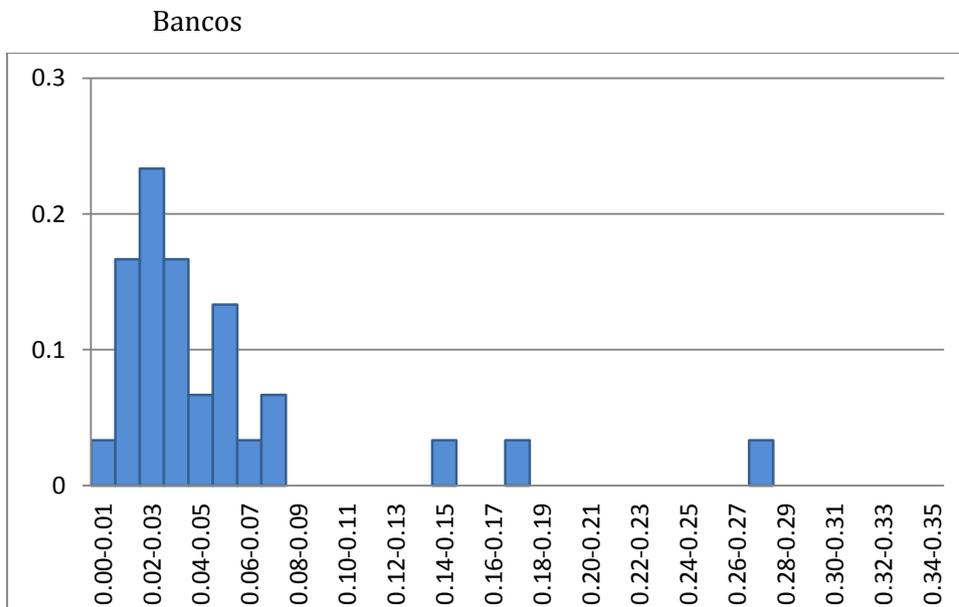
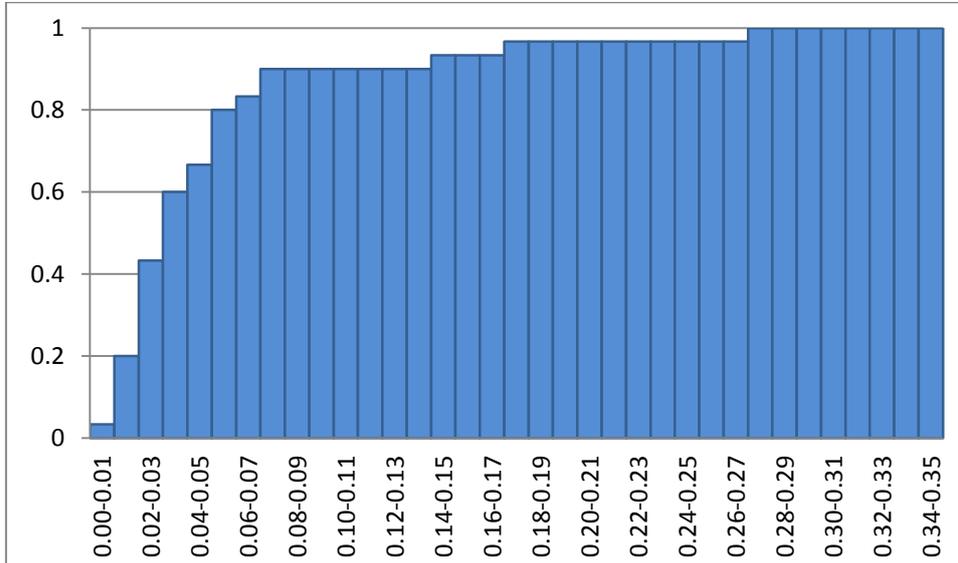


Figura 21. Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Bancos



La expresión de la función de densidad teórica que la ineficiencia estimada debería presentar, dado el supuesto exponencial de la ineficiencia, se obtiene a partir de la expresión (4.5.10) y de los valores estimados de los parámetros λ, σ y σ_u^2 de la tabla 9:

$$f(\hat{u}) = \frac{\left[1 - \Phi\left(0.522 + \frac{g(\hat{u})}{0.027}\right)\right] \cdot \exp\left[0.000001 + \frac{g(\hat{u})}{0.052}\right]}{0.052 \cdot \left|c'\left(0.522 + \frac{g(\hat{u})}{0.027}\right) - 1\right|}, \quad \hat{u} \geq 0 \quad (5.3.6)$$

Las figuras 22 y 23 representan la función de densidad (5.3.6) y su correspondiente función de distribución en el caso de la muestra de bancos.

Figura 22. Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Bancos

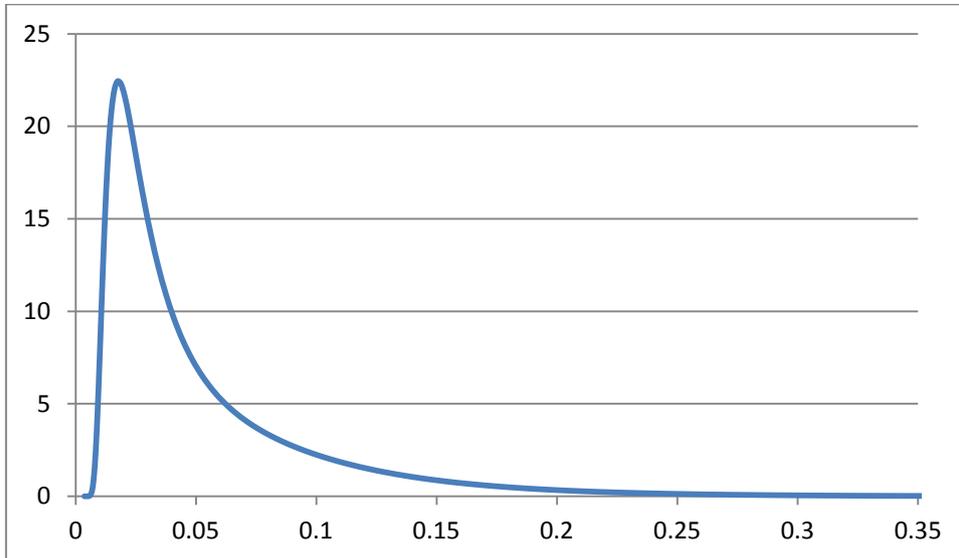
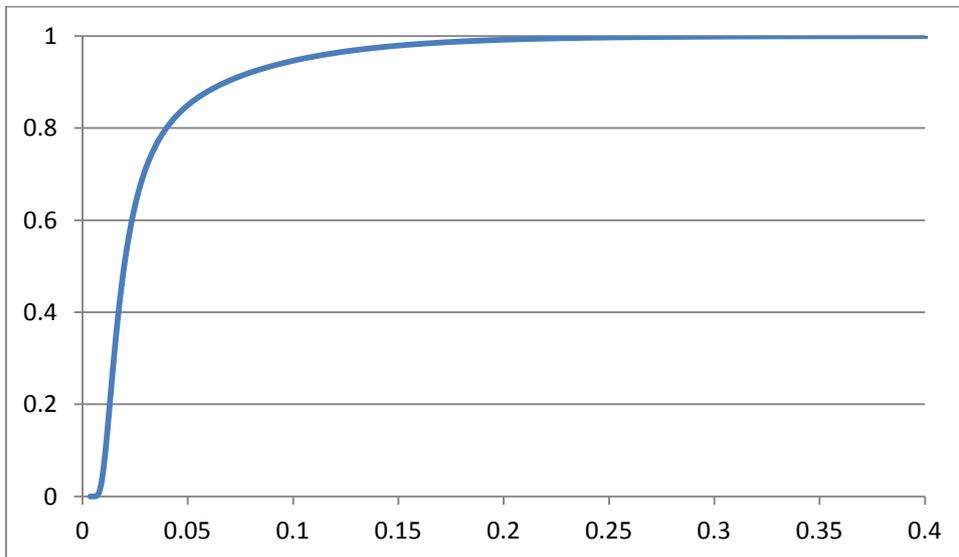


Figura 23. Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Bancos



Si el supuesto distribucional exponencial del término de ineficiencia fuese correcto, el histograma de ineficiencias estimadas representado en las figuras 20 y 21 y la distribución de las figuras 22 y 23 deberían presentar un buen ajuste.

El test de Kolmogorov-Smirnov acepta la hipótesis nula de bondad de ajuste entre las distribuciones cuando el estadístico es inferior al valor crítico. Puesto que el valor del estadístico es de 0.328 y el p-valor es menor que 0.010, se rechaza la hipótesis nula. Por lo tanto, el supuesto exponencial no se acepta como válido para el término de efectos de ineficiencia y, en consecuencia, se rechaza la hipótesis H-20.

Caso 3: Muestra de cajas de ahorros y bancos

La estimación del modelo de frontera estocástica de producción de tipo Cobb-Douglas bajo el supuesto exponencial del término de ineficiencia para la muestra de cajas de ahorros y bancos se presenta en la tabla 10 que se muestra a continuación.

Tabla 10. Modelo frontera estocástica de producción bajo el supuesto exponencial.

Cajas de ahorros y bancos

lny	Coef.	Desv. típ.	z	P>z	Interv. Conf. 95%	
lnx ₁	0.9728642	0.0047785	203.59	0	0.9634984	0.9822299
lnx ₂	-0.0145796	0.0056384	-2.59	0.01	-0.0256306	-0.0035286
lnx ₃	0.0246357	0.0082548	2.98	0.003	0.0084565	0.0408148
α ₀	0.4609755	0.0580409	7.94	0	0.3472175	0.5747336
lnσ _v ²	-7.510156	0.3207646	-23.41	0	-8.138842	-6.881469
lnσ _u ²	-6.554815	0.3513806	-18.65	0	-7.243508	-5.866122
σ _v	0.0233986	0.0037527			0.0170873	0.0320412
σ _u	0.0377259	0.0066281			0.0267357	0.0532338
σ ²	0.0019707	0.0004671			0.0010553	0.0028862
λ	1.612314	0.0087061			1.59525	1.629377

El modelo para bancos y cajas de ahorros presenta efectos de ineficiencia técnica, ya que los parámetros λ y σ_u resultan significativos a partir de los intervalos de confianza de la tabla 10.

Del mismo modo que sucedía para los modelos del supuesto half normal, la tabla 10 muestra todos inputs significativos. Concretamente, fondos prestables y empleados presentan coeficientes positivos, mientras que el correspondiente al capital físico es negativo.

Los intervalos de confianza de cada parámetro de la frontera presentada en la tabla 10 se intersecan con los intervalos de los respectivos parámetros en la tabla 7. En consecuencia, se concluye que el supuesto distribucional no influye en la estimación de los parámetros de la frontera de producción y, por lo tanto, no se rechaza la hipótesis H-3.

Los histogramas de los valores de ineficiencia estimados a partir del modelo de frontera estocástica de producción de las cajas de ahorros y bancos cuando se ha supuesto una distribución exponencial para el término de ineficiencia se representan en las figuras 24 y 25.

Figura 24. Histograma de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción.
Cajas de ahorros y bancos

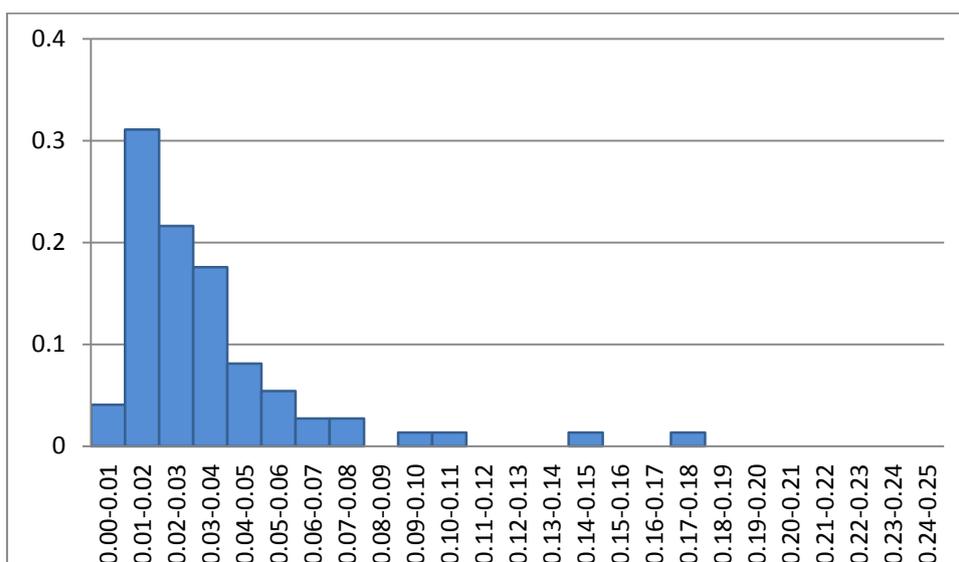
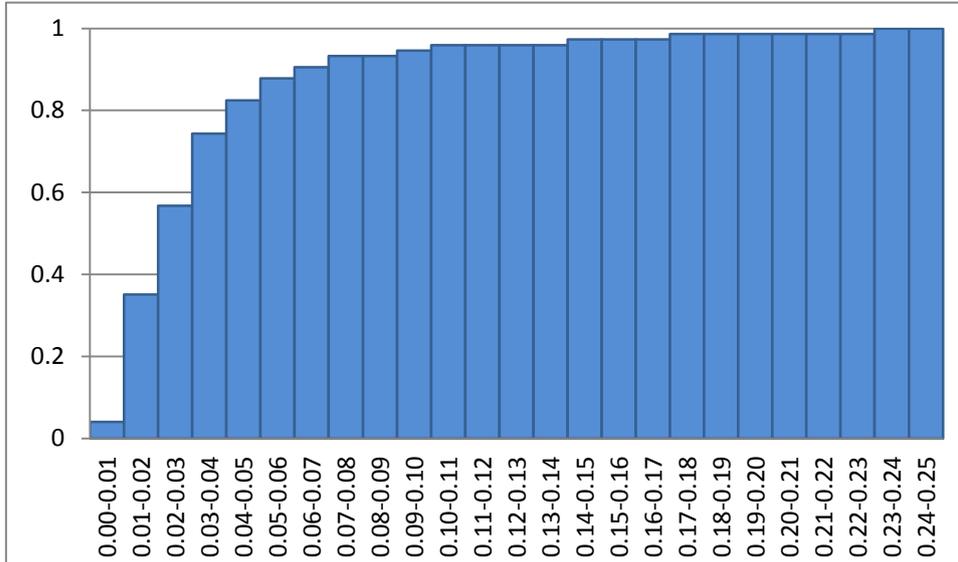


Figura 25. Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Cajas de ahorros y bancos



La expresión que la función de densidad teórica de la ineficiencia técnica estimada de la muestra de cajas de ahorros y bancos debería presentar, si se supone que el término de efectos de ineficiencia se distribuye según una exponencial, se obtiene a partir de la ecuación (4.5.10) y de los parámetros estimados de la tabla 10:

$$f(\hat{u}) = \frac{\left[1 - \Phi\left(0.620 + \frac{g(\hat{u})}{0.023}\right)\right] \cdot \exp\left[0.0000004 + \frac{g(\hat{u})}{0.038}\right]}{0.038 \cdot \left|c' \left(0.620 + \frac{g(\hat{u})}{0.023}\right) - 1\right|}, \quad \hat{u} \geq 0 \quad (5.3.7)$$

A partir de la expresión anterior, las figuras 26 y 27 representan gráficamente las funciones de densidad y distribución teóricas de la ineficiencia técnica estimada.

Figura 26. Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Cajas de ahorros y bancos

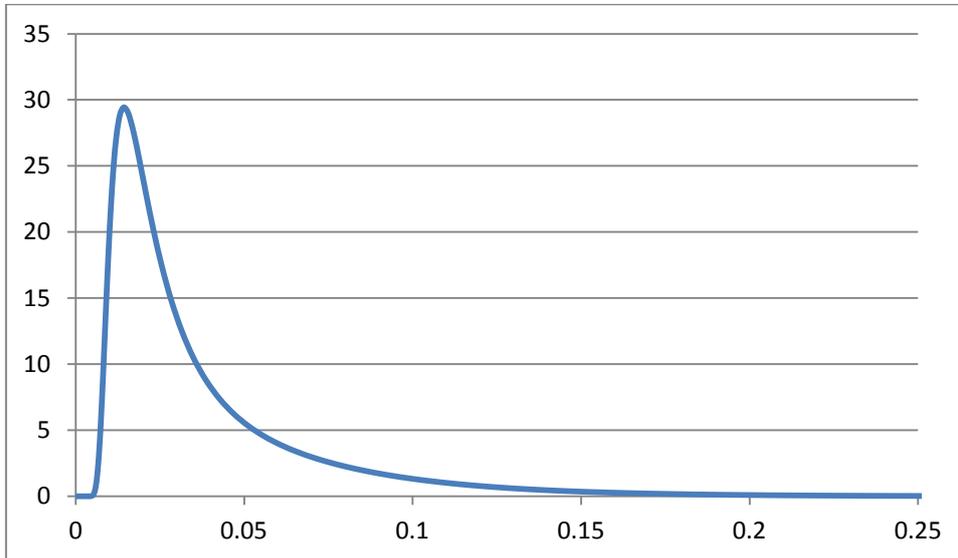
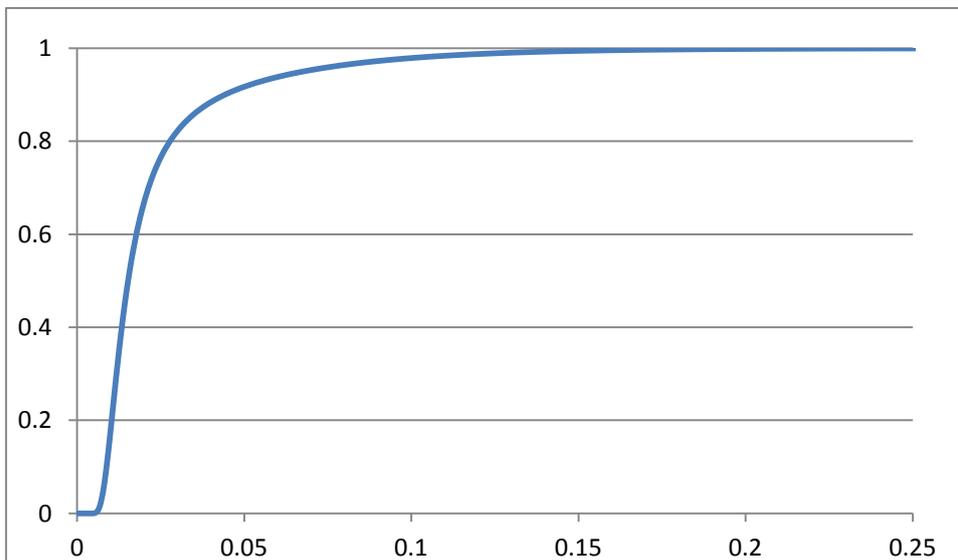


Figura 27. Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de producción. Cajas de ahorros y bancos



El contraste de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov entre la distribución teórica (figuras 26 y 27) y el histograma de ineficiencias estimadas (figuras 24 y 25) presenta un valor del estadístico $D_1 = 0.140$ y un p-valor mayor que 0.100, por

lo que no se rechaza la hipótesis nula. En consecuencia, el supuesto exponencial para el término de ineficiencia se acepta como válido y no se rechaza la hipótesis H-21.

4. Estimación de la eficiencia en costes

El modelo de frontera estocástica de costes que se presenta a continuación va a ser estimado bajo los supuestos distribucionales half normal y exponencial del término de ineficiencia para todas las muestras seleccionadas.

$$\ln \frac{CT_i}{w_{i3}} = \alpha_0 + \sum_{m=1}^2 \beta_m \ln y_m + \sum_{n=1}^2 \delta_n \ln \frac{w_{in}}{w_{i3}} + v_i + u_i \quad (5.4.1)$$

En el caso de la muestra conjunta de bancos y cajas de ahorros, también se ajusta una función translogarítmica que presenta la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \ln \frac{CT_i}{w_{i3}} = & \alpha_0 + \sum_{m=1}^2 \beta_m \ln y_m + \sum_{n=1}^2 \delta_n \ln \frac{w_{in}}{w_{i3}} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \sum_{p=1}^2 \beta_{mp} \ln y_{im} \ln y_{ip} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 \sum_{q=1}^2 \delta_{nq} \ln \frac{w_{in}}{w_{i3}} \ln \frac{w_{iq}}{w_{i3}} + \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \gamma_{mn} \ln y_{im} \ln \frac{w_{in}}{w_{i3}} + v_i + u_i \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Según Berger y Mester (1997), los costes observados y los precios de los inputs deben normalizarse por el precio de uno de los inputs antes de tomar logaritmos para garantizar la homogeneidad lineal de la función de costes. De este modo, un incremento proporcional de los precios de los inputs incrementa los costes en la misma proporción.

4.1. Supuesto half normal

Caso 1: Muestra de cajas de ahorros

La estimación del modelo de frontera estocástica de costes de tipo Cobb-Douglas bajo el supuesto half normal del término de ineficiencia para la muestra de cajas de ahorros se presenta en la tabla 11.

Tabla 11. Modelo frontera estocástica de costes bajo el supuesto half normal.

Cajas de ahorros						
$\ln CT/w_3$	Coef.	Desv. típ.	z	P>z	Interv. Conf. 95%	
$\ln y_1$	0.9436005	0.0267146	35.32	0	0.891241	0.9959601
$\ln y_2$	0.010444	0.019635	0.53	0.595	-0.02804	0.0489279
$\ln w_1/w_3$	0.7929986	0.0559498	14.17	0	0.683339	0.9026583
$\ln w_2/w_3$	0.029441	0.0384391	0.77	0.444	-0.0458982	0.1047802
α_0	-0.2712899	0.5278135	-0.51	0.607	-1.305785	0.7632055
$\ln \sigma_v^2$	-5.634192	0.5862491	-9.61	0	-6.783219	-4.485165
$\ln \sigma_u^2$	-5.363545	1.269636	-4.22	0	-7.851986	-2.875103
σ_v	0.0597793	0.0175228			0.0336545	0.106184
σ_u	0.0684417	0.0434481			0.0197225	0.2375086
σ^2	0.0082578	0.0042973			-0.0001647	0.0166804
λ	1.144907	0.0591258			1.029023	1.260792

En primer lugar, debe contrastarse la existencia de ineficiencia en costes en el modelo estimado. El intervalo de confianza correspondiente al parámetro λ , que representa la importancia relativa de la variabilidad de la componente de ineficiencia sobre la del error aleatorio, permite rechazar la hipótesis nula del contraste de significatividad individual, es decir, existe ineficiencia en costes.

El contraste de significatividad de la desviación típica de la ineficiencia, σ_u , se resuelve con un rechazo de la hipótesis nula. De este modo, se acepta que la desviación típica del término de ineficiencia es significativa, lo que refuerza la conclusión alcanzada mediante el contraste de λ .

La tabla 11 muestra dos coeficientes significativos que corresponden al output activos rentables y al cociente del precio de los fondos prestables sobre el precio del factor trabajo. Ambos coeficientes presentan signos positivos, indicando que sus incrementos dan lugar a incrementos de la variable explicada (coste total normalizado por el precio del trabajo).

Las estimaciones de ineficiencia obtenidas a partir del modelo de frontera estocástica de costes de las cajas de ahorros cuando se ha supuesto una distribución half normal para el término de efectos de ineficiencia, se representan en los histogramas de las figuras 28 y 29.

Figura 28. Histograma de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes.

Cajas de ahorros

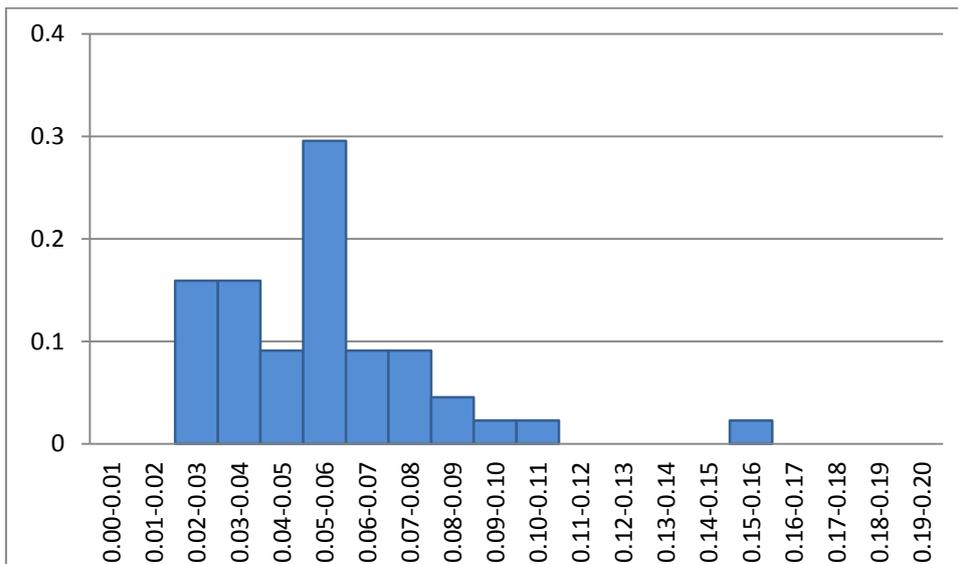
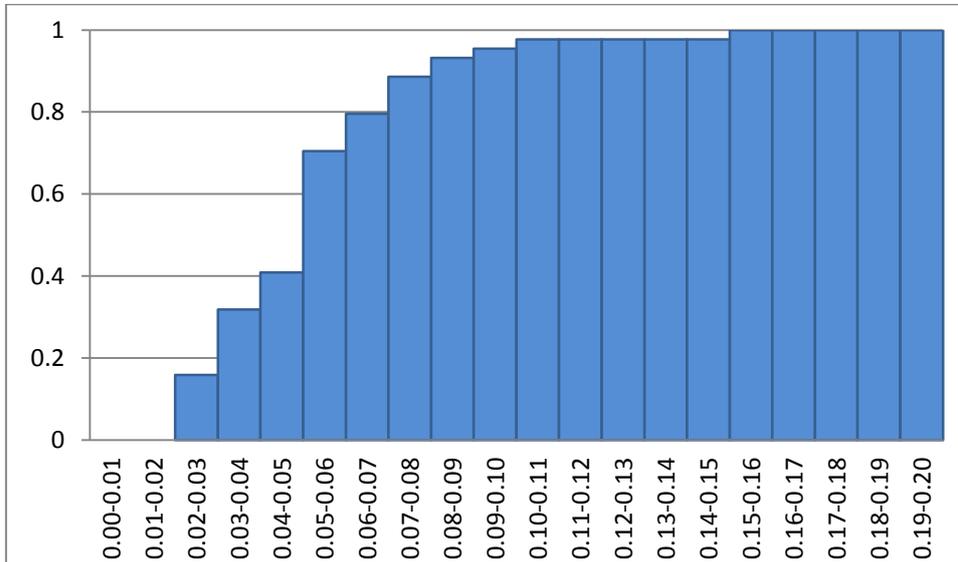


Figura 29. Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Cajas de ahorros



El objetivo es contrastar la bondad del ajuste entre los resultados de ineficiencias estimadas (figuras 28 y 29) y la distribución teórica que deberían presentar si se supone una distribución half normal para el término de ineficiencia. Para ello, a partir de la ecuación (4.3.26) y de los parámetros estimados de la tabla 11, se obtiene la expresión de la función de densidad teórica de la ineficiencia en costes estimada de las cajas de ahorros cuando se supone una distribución half normal para la ineficiencia del modelo frontera estocástica:

$$f(\hat{u}) = \frac{0.182 \cdot \phi\left(\frac{g(\hat{u})}{0.091}\right) \cdot \Phi(12.599 \cdot g(\hat{u}))}{0.005 \cdot |1 - c'(-12.599 \cdot g(\hat{u}))|}, \quad \hat{u} \geq 0 \quad (5.4.3)$$

Las figuras 30 y 31 que se muestran a continuación representan gráficamente las funciones de densidad y distribución teóricas de la ineficiencia en costes estimada.

Figura 30. Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Cajas de ahorros

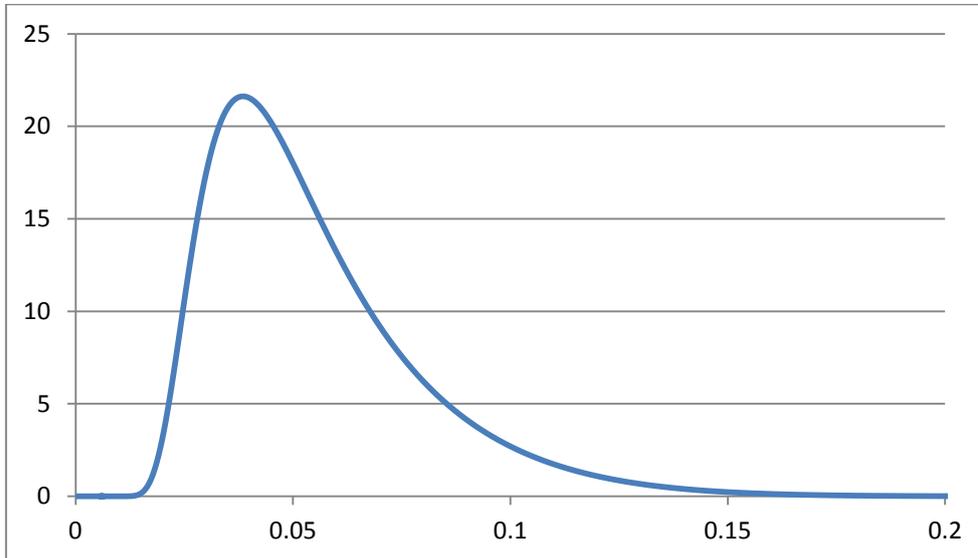
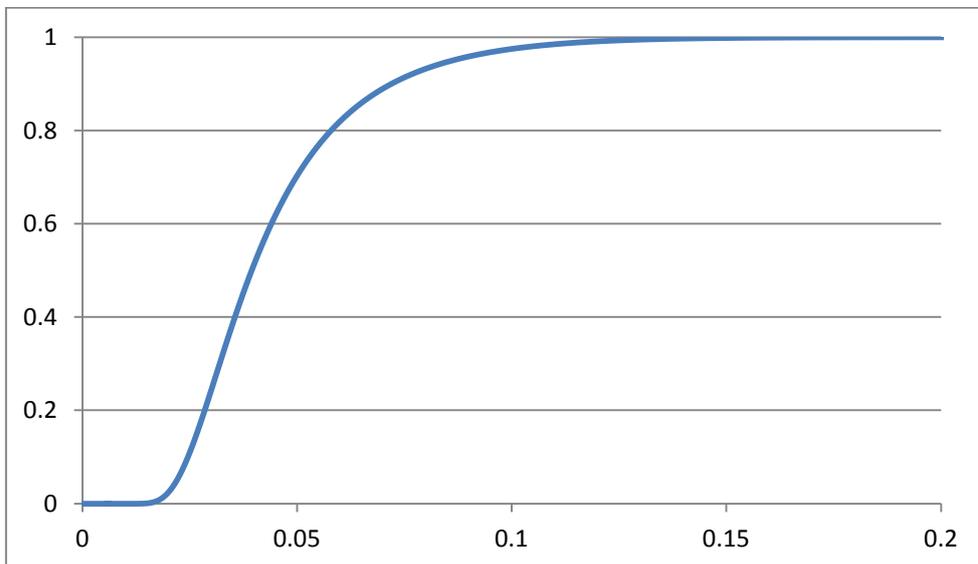


Figura 31. Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Cajas de ahorros



A partir de estos resultados, el test de Kolmogov-Smirnov permite contrastar la bondad del ajuste entre los valores de ineficiencia estimados (figuras 28 y 29) y la distribución teórica que éstos deberían presentar habiendo supuesto la

distribución half normal para el término de ineficiencia (figuras 30 y 31). El valor del estadístico resulta de 0.190 y el p-valor mayor que 0.050, por lo que se acepta la hipótesis nula. Por lo tanto, el supuesto half normal para el término de ineficiencia se acepta como válido y, en consecuencia, no se rechaza la hipótesis H-16.

Caso 2: Muestra de bancos

La tabla 12 presenta la estimación del modelo de frontera estocástica de costes de tipo Cobb-Douglas bajo el supuesto half normal del término de ineficiencia para la muestra de bancos.

Tabla 12. Modelo frontera estocástica de costes bajo el supuesto half normal.

Bancos						
ln CT/w ₃	Coef.	Desv. típ.	z	P>z	Interv. Conf. 95%	
lny ₁	0.8897628	0.0219498	40.54	0	0.8467418	0.9327837
lny ₂	0.024657	0.011125	2.22	0.027	0.0028524	0.0464615
ln w ₁ /w ₃	1.151717	0.0845189	13.63	0	0.9860626	1.317371
ln w ₂ /w ₃	-0.0986088	0.0303258	-3.25	0.001	-0.1580463	-0.0391714
α ₀	2.646731	0.7762605	3.41	0.001	1.125288	4.168174
lnσ _v ²	-4.610909	0.715208	-6.45	0	-6.012691	-3.209127
lnσ _u ²	-2.75124	0.4918039	-5.59	0	-3.715158	-1.787322
σ _v	0.0997135	0.0356579			0.0494721	0.2009772
σ _u	0.2526829	0.0621352			0.15605	0.4091551
σ ²	0.0737914	0.027859			0.0191887	0.1283941
λ	2.53409	0.0878446			2.361918	2.706262

Tanto el parámetro λ como σ_u presentan unos intervalos de confianza que rechazan las respectivas hipótesis de no significatividad y, por lo tanto, se confirma la existencia de una componente de ineficiencia en costes.

Las variables explicativas resultan significativas, todas con coeficientes de signo positivo salvo el precio del capital físico normalizado por el precio de los empleados.

Los histogramas de las figuras 32 y 33 representan los valores de ineficiencia estimados a partir del modelo de frontera estocástica de costes de los bancos cuando se ha supuesto una distribución half normal para el término de efectos de ineficiencia.

Figura 32. Histograma de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes.

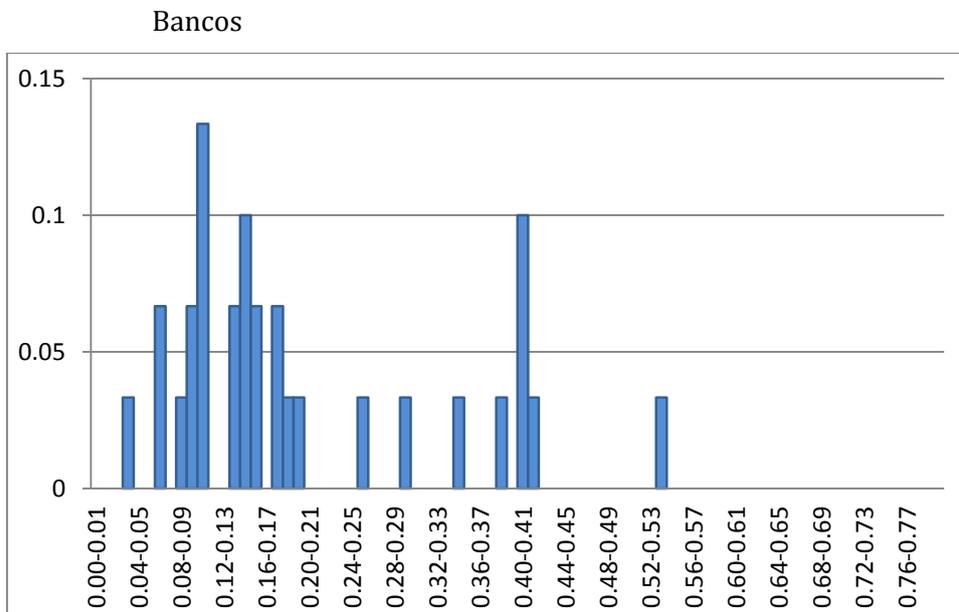
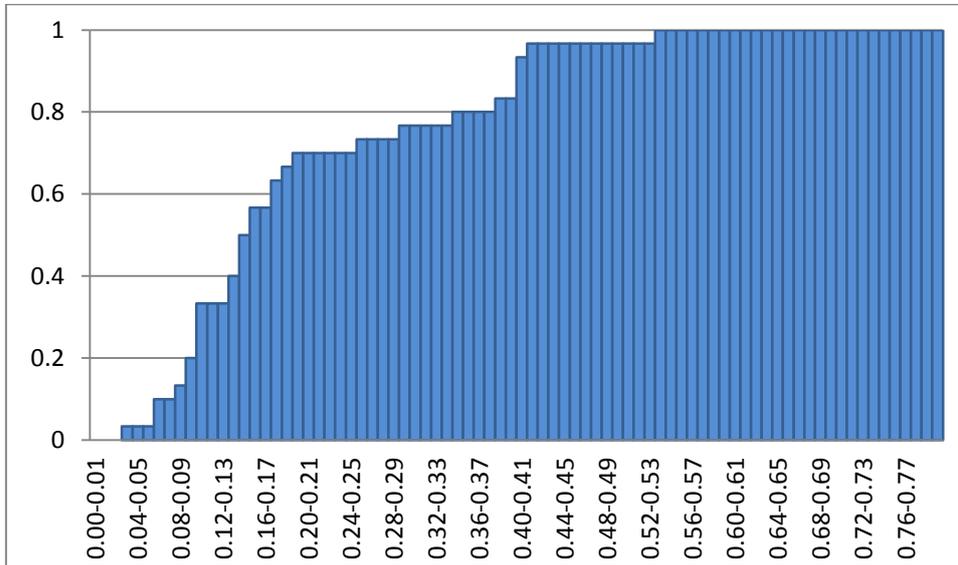


Figura 33. Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Bancos



La función de densidad teórica que la ineficiencia en costes estimada de los bancos debería presentar, habiendo supuesto una distribución half normal para el término de ineficiencia, se obtiene a partir de la expresión (4.3.26) y de los parámetros estimados de la tabla 12:

$$f(\hat{u}) = \frac{0.543 \cdot \phi\left(\frac{g(\hat{u})}{0.272}\right) \cdot \Phi(9.329 \cdot g(\hat{u}))}{0.064 \cdot |1 - c'(-9.329 \cdot g(\hat{u}))|}, \quad \hat{u} \geq 0 \quad (5.4.4)$$

A partir de la ecuación (5.4.4), las figuras 34 y 35 representan gráficamente las funciones de densidad y distribución teóricas de la ineficiencia en costes estimada.

Figura 34. Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Bancos

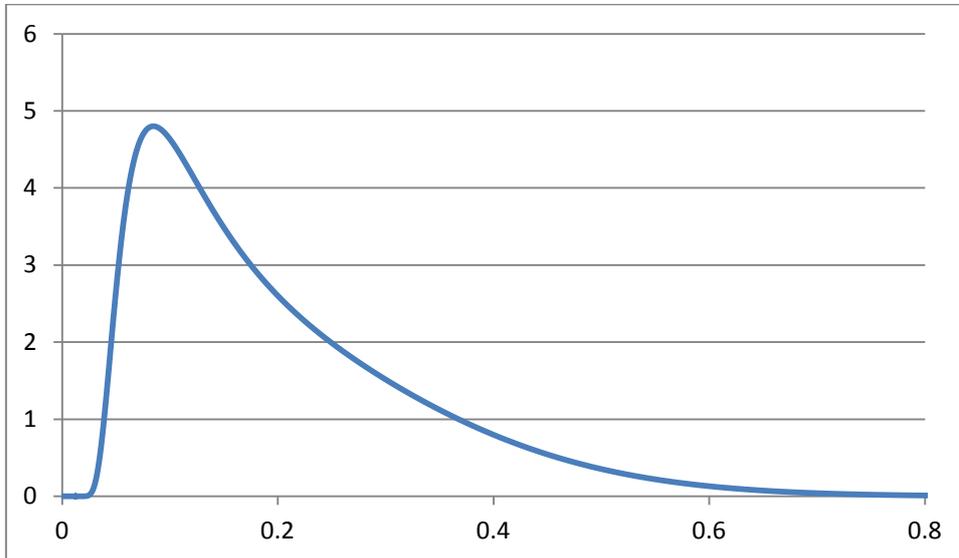
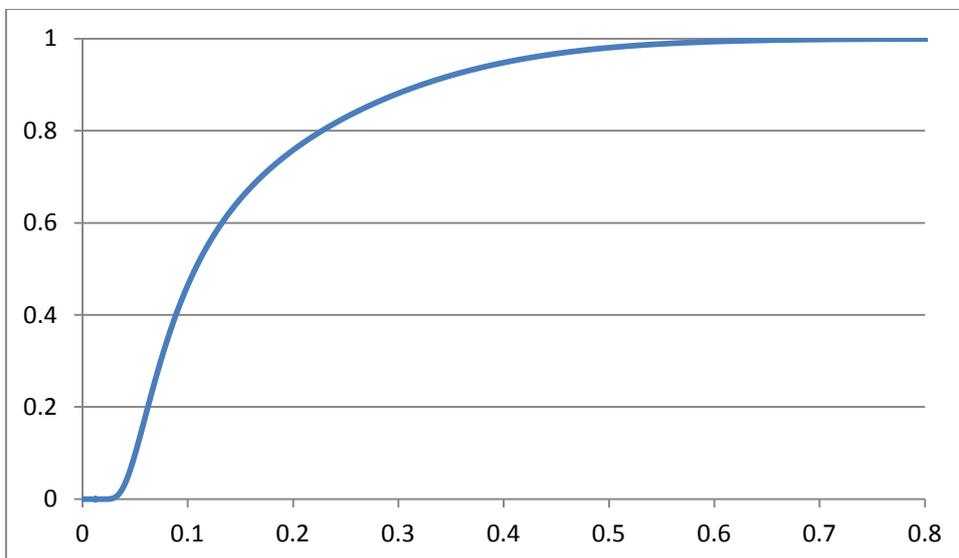


Figura 35. Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Bancos



Si el supuesto distribucional half normal establecido previamente sobre el término de ineficiencia fuese correcto, debería existir un buen ajuste entre el histograma de

ineficiencias estimadas representado en las figuras 32 y 33 y la distribución teórica presentada en las figuras 34 y 35.

El test de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov acepta la hipótesis nula de ajuste entre las distribuciones cuando el estadístico es inferior al valor crítico. En este caso, el valor del estadístico resulta de 0.326 y el p-valor menor que 0.010, de manera que se rechaza la hipótesis nula. En consecuencia, el supuesto half normal para el término de ineficiencia no se acepta como válido y se rechaza la hipótesis H-17.

Caso 3: Muestra de cajas de ahorros y bancos

La estimación del modelo de frontera estocástica de costes de tipo Cobb-Douglas bajo el supuesto half normal del término de ineficiencia para la muestra de cajas de ahorros y bancos se presenta en la tabla 13.

Tabla 13. Modelo frontera estocástica de costes bajo el supuesto half normal.

Cajas de ahorros y bancos

$\ln CT/w_3$	Coef.	Desv. típ.	z	P>z	Interv. Conf. 95%	
$\ln y_1$	0.9239057	0.0331196	27.9	0	0.8589925	0.988819
$\ln y_2$	0.0105365	0.0199657	0.53	0.598	-0.0285956	0.0496685
$\ln w_1/w_3$	1.136106	0.0572533	19.84	0	1.023892	1.24832
$\ln w_2/w_3$	-0.0222952	0.0253762	-0.88	0.38	-0.0720316	0.0274412
α_0	2.315483	0.7929381	2.92	0.003	0.7613527	3.869613
$\ln \sigma_v^2$	-6.630138	1.471737	-4.5	0	-9.51469	-3.745585
$\ln \sigma_u^2$	-1.782475	0.199479	-8.94	0	-2.173447	-1.391504
σ_v	0.0363315	0.0267352			0.0085884	0.1536938
σ_u	0.4101478	0.0409079			0.3373199	0.4986994
σ^2	0.1695412	0.0327206			0.10541	0.2336724
λ	11.28903	0.0581476			11.17506	11.40299
Log-verosimilitud=7.7831						

Los parámetros σ_u y λ resultan significativos al rechazarse las hipótesis nulas de sus respectivos contrastes de significatividad mediante los intervalos de confianza presentados en la tabla 13, lo que confirma la existencia de una componente de ineficiencia en costes.

El modelo frontera estocástica de costes para cajas de ahorros y bancos presenta las variables de activos rentables y precio de fondos prestables sobre el precio del factor trabajo como significativas. Ambos coeficientes son de signo positivo, por lo que aumentos de estas variables producen incrementos en la variable endógena de los costes normalizados por el precio del factor trabajo (*ceteris paribus*).

Los valores de ineficiencias estimados a partir del modelo de frontera estocástica de costes de bancos y cajas de ahorros habiendo supuesto una distribución half normal para el término de efectos de ineficiencia, se representan en las figuras 36 y 37.

Figura 36. Histograma de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes.

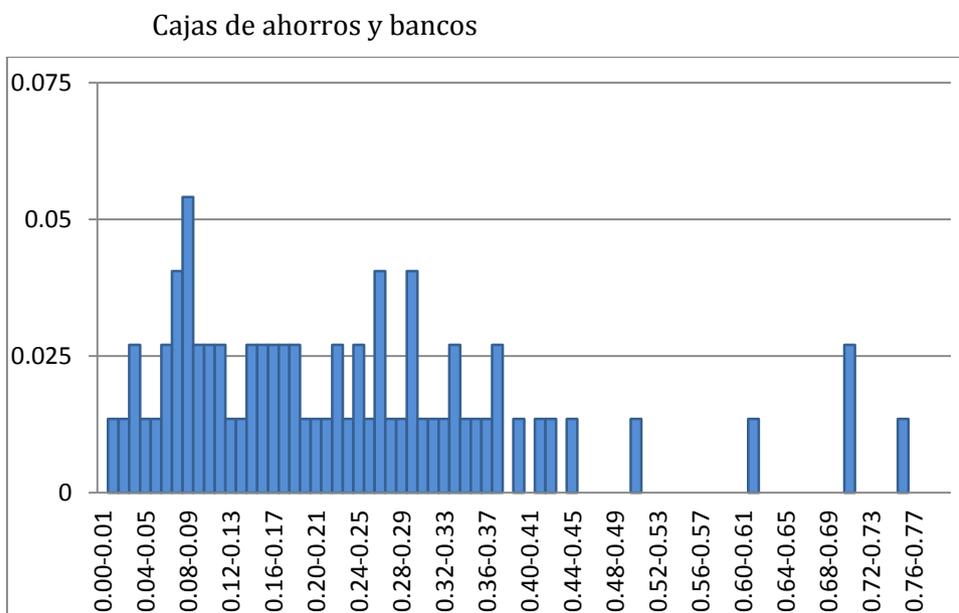
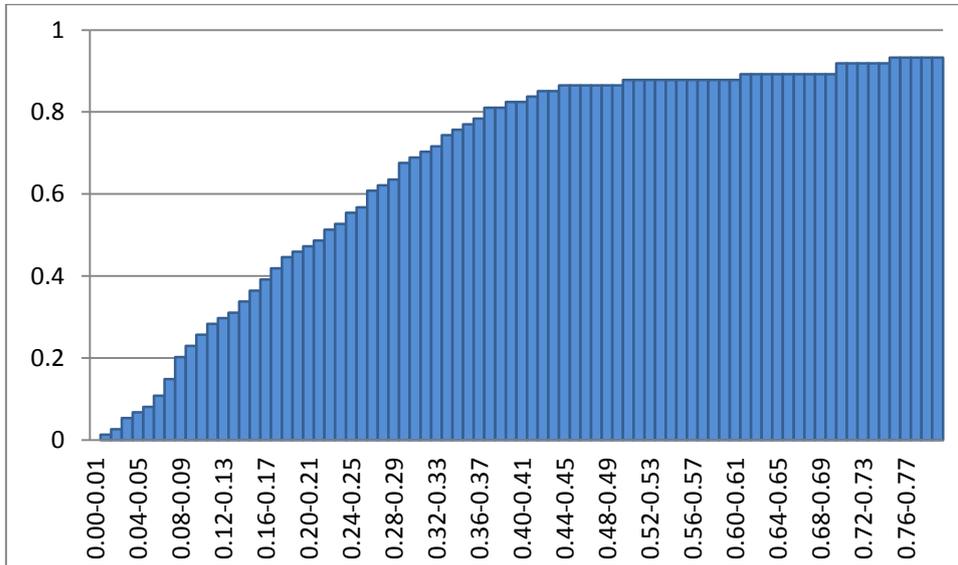


Figura 37. Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Cajas de ahorros y bancos



A partir de la ecuación (4.3.26) y de los parámetros estimados de la tabla 13, la función de densidad teórica que la ineficiencia en costes estimada de bancos y cajas de ahorros debería presentar si se supone que el término de efectos de ineficiencia se distribuye según una half normal, presenta la siguiente expresión:

$$f(\hat{u}) = \frac{0.824 \cdot \phi\left(\frac{g(\hat{u})}{0.412}\right) \cdot \Phi(27.417 \cdot g(\hat{u}))}{0.168 \cdot |1 - c'(-27.417 \cdot g(\hat{u}))|}, \quad \hat{u} \geq 0 \quad (5.4.5)$$

Las figuras 38 y 39 representan las funciones de densidad y distribución teóricas de la ineficiencia en costes estimada a partir de la expresión (5.4.5).

Figura 38. Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Cajas de ahorros y bancos

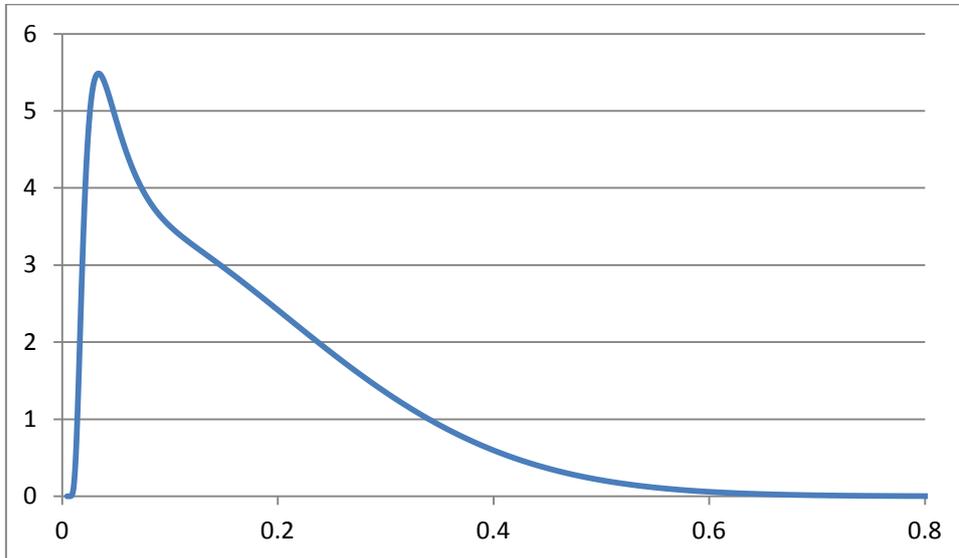
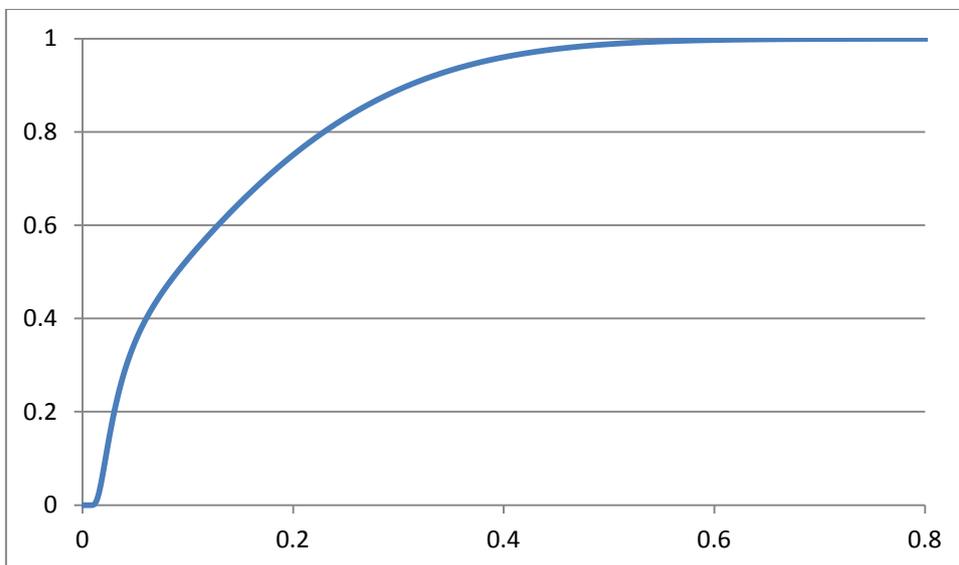


Figura 39. Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes. Cajas de ahorros y bancos



Con el fin de contrastar la bondad del ajuste entre los valores de ineficiencia estimados (figuras 36 y 37) y la distribución teórica que éstos deberían presentar

habiendo supuesto una distribución half normal para el término de ineficiencia (figuras 38 y 39), se aplica el test de Kolmogorov-Smirnov. El valor del estadístico calculado es de 0.331 y el p-valor menor que 0.010, por lo que se rechaza la hipótesis nula. En consecuencia, el supuesto half normal para el término de ineficiencia no se acepta como válido y, por lo tanto, se rechaza la hipótesis H-18.

Tabla 14. Modelo frontera estocástica de costes de tipo translog bajo el supuesto half normal. Cajas de ahorros y bancos

$\ln CT/w_3$	Coef.	Desv. típ.	z	P>z	Interv. Conf. 95%	
$\ln y_1$	1.015332	0.0500033	20.31	0	0.9173277	1.113337
$\ln y_2$	0.0100958	0.055373	0.18	0.855	-0.0984332	0.1186248
$\ln w_1/w_3$	1.005283	0.1630659	6.16	0	0.6856794	1.324886
$\ln w_2/w_3$	-0.0741711	0.0682662	-1.09	0.277	-0.2079703	0.0596281
$\ln^2 y_1$	0.8370923	0.3563192	2.35	0.019	0.1387195	1.535465
$\ln^2 y_2$	0.0168168	0.1018131	0.17	0.869	-0.1827332	0.2163668
$\ln^2 w_1/w_3$	0.2323562	0.1374263	1.69	0.091	-0.0369944	0.5017069
$\ln^2 w_2/w_3$	0.2212683	0.0304473	7.27	0	0.1615926	0.2809439
$\ln y_1 \ln y_2$	0.0292583	0.0266823	1.1	0.273	-0.023038	0.0815546
$\ln \frac{w_1}{w_3} \ln \frac{w_2}{w_3}$	-0.0782324	0.0217922	-3.59	0	-0.1209443	-0.0355205
$\ln y_1 \ln \frac{w_1}{w_3}$	0.2215353	0.1017571	2.18	0.029	0.0220951	0.4209756
$\ln y_1 \ln \frac{w_2}{w_3}$	-0.1032229	0.1057468	-0.98	0.329	-0.3104828	0.1040369
$\ln y_2 \ln \frac{w_1}{w_3}$	0.0004463	0.0480415	0.01	0.993	-0.0937133	0.0946059
$\ln y_2 \ln \frac{w_2}{w_3}$	0.0339336	0.0464245	0.73	0.465	-0.0570567	0.1249239
α_0	-0.2945377	0.0693454	-4.25	0	-0.4304522	-0.1586233
$\ln \sigma_v^2$	-4.513878	0.648531	-6.96	0	-5.784976	-3.242781
$\ln \sigma_u^2$	-2.658441	0.4043054	-6.58	0	-3.450865	-1.866017
σ_v	0.1046704	0.033941			0.0554381	0.1976237
σ_u	0.2646835	0.0535065			0.178096	0.3933685
σ^2	0.0810132	0.0232979			0.0353501	0.1266764
λ	2.528734	0.0825352			2.366968	2.6905

Log-verosimilitud=20.0716

La tabla 14 presenta la estimación del modelo de frontera estocástica de costes de tipo translog bajo el supuesto half normal del término de ineficiencia para la muestra de cajas de ahorros y bancos. Puesto que los intervalos de confianza estimados para los parámetros σ_u y λ en la tabla 14 indican que éstos son significativos, se confirma la existencia de una componente de efectos de ineficiencia en costes.

El ajuste de la forma funcional translog presenta como significativos la mitad de los coeficientes estimados. Los coeficientes de activos rentables, tanto lineal como cuadrático y su producto cruzado con el precio de los fondos prestables, presentan signo positivo. En cuanto a los precios de los inputs normalizados por el precio del factor trabajo, los coeficientes lineal y cuadrático del precio de los fondos prestables presentan signos positivos, así como el coeficiente del precio del capital físico al cuadrado. Por el contrario, el producto cruzado de ambos precios muestra un coeficiente negativo aunque, entre los significativos, es el de menor valor absoluto.

Para analizar cuál de las dos funciones estimadas, Cobb-Douglas y translog, es la más apropiada para modelizar la frontera estocástica de costes para cajas y bancos bajo el supuesto half normal, se plantea el contraste de significatividad conjunta de los parámetros de la función translog que no se incluyen en la Cobb-Douglas. Según Zajc (2006), el estadístico de contraste es el test ratio de probabilidad generalizada de una sola cola (LR), que se distribuye asintóticamente según una chi-cuadrado cuyo número de grados de libertad es igual al número de restricciones impuestas en el contraste y se calcula mediante la expresión:

$$LR = -2\{\ln[L(H_0)] - \ln[L(H_1)]\} \quad (5.4.6)$$

donde $L(H_0)$ y $L(H_1)$ se corresponden con el valor de la función de log-verosimilitud bajo la hipótesis nula y alternativa, respectivamente. La región crítica del test de tamaño α queda definida por $LR > \chi^2_{restricciones, \alpha}$.

Los valores respectivos de log-verosimilitud recogidos en las tablas 13 y 14 se utilizan para calcular el LR que tiene como resultado 59.399 de manera que, puesto que el estadístico se distribuye según una chi-cuadrado con 10 grados de libertad, se rechaza la hipótesis nula de no significatividad conjunta de las variables incluidas en la translog y que no aparecen en la Cobb-Douglas. Como conclusión, la forma translogarítmica es más apropiada que la Cobb-Douglas.

Las figuras 40 y 41 muestran los histogramas de las ineficiencias estimadas a partir del modelo de frontera estocástica de costes de bancos y cajas de ahorros habiendo supuesto una distribución half normal para el término de efectos de ineficiencia.

Figura 40. Histograma de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes translog.

Cajas de ahorros y bancos

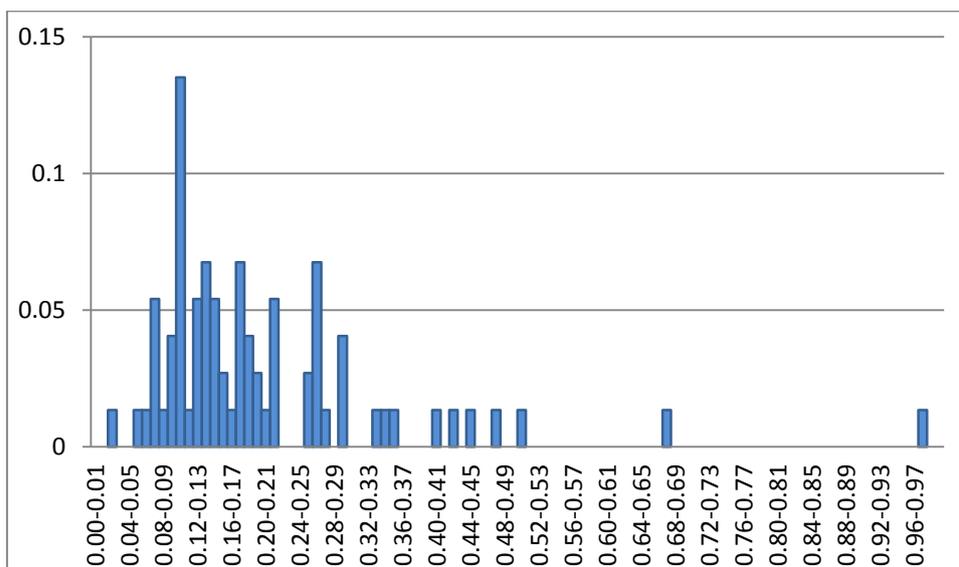
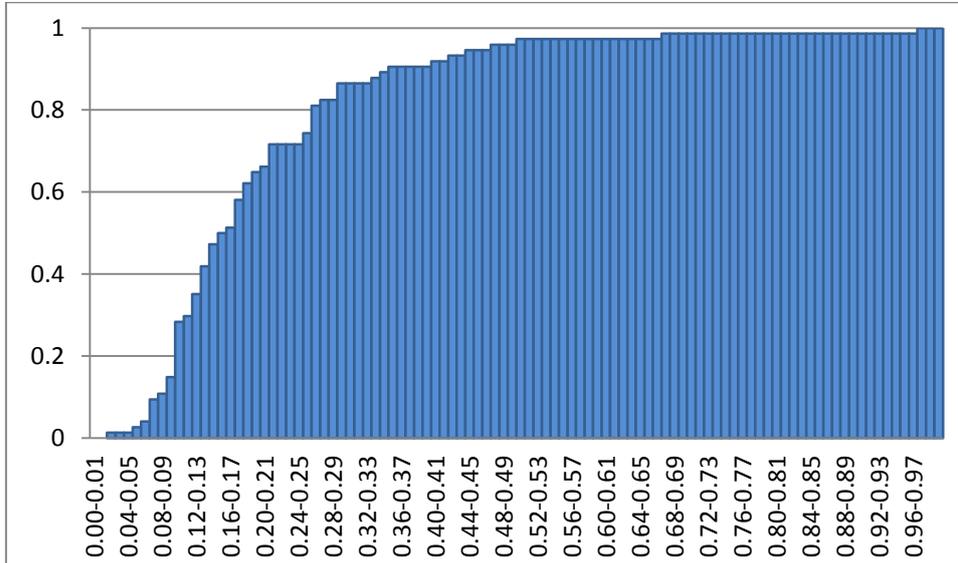


Figura 41. Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes translog. Cajas de ahorros y bancos



La función de densidad teórica que la ineficiencia en costes estimada de bancos y cajas de ahorros con una frontera translog debería presentar si se supone que el término de efectos de ineficiencia se distribuye según una half normal, se obtiene sustituyendo los parámetros estimados de la tabla 14 en la expresión (4.3.26):

$$f(\hat{u}) = \frac{0.569 \cdot \phi\left(\frac{g(\hat{u})}{0.285}\right) \cdot \Phi(8.884 \cdot g(\hat{u}))}{0.070 \cdot |1 - c'(-8.884 \cdot g(\hat{u}))|}, \quad \hat{u} \geq 0 \quad (5.4.7)$$

Las figuras 42 y 43 representan las funciones de densidad y distribución teóricas de la ineficiencia en costes estimada a partir de la expresión (5.4.7).

Figura 42. Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes translog. Cajas de ahorros y bancos

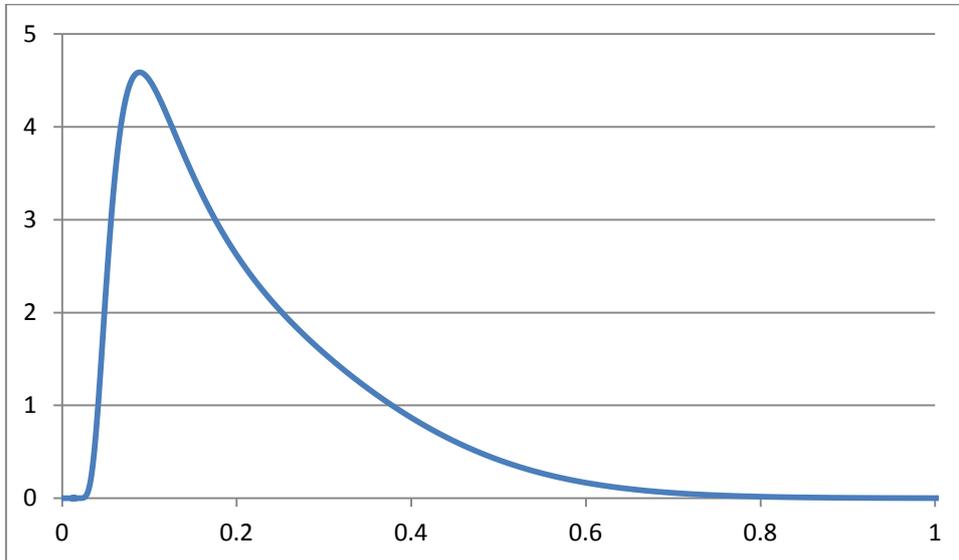
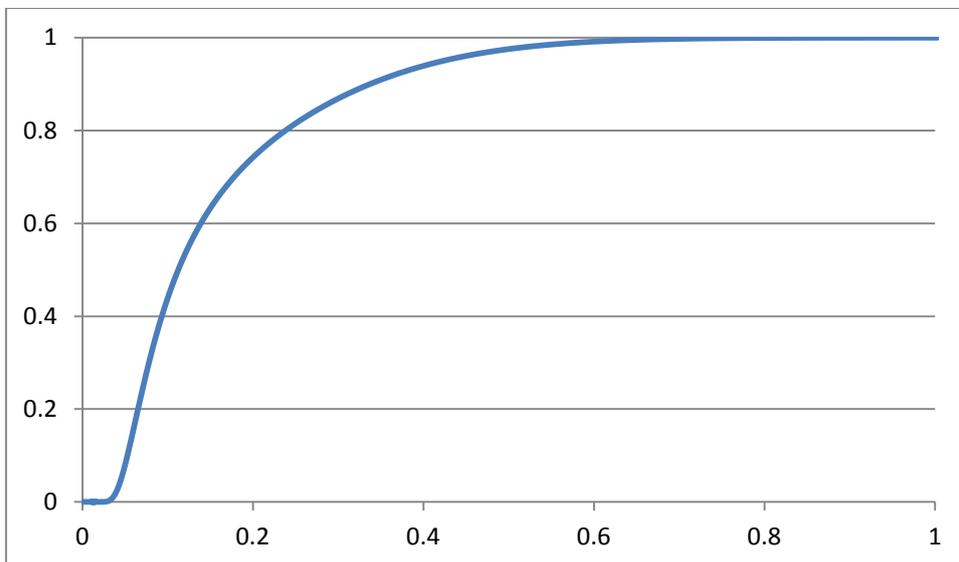


Figura 43. Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto HN de un modelo de costes translog. Cajas de ahorros y bancos



El test de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov acepta la hipótesis nula de ajuste entre el histograma de ineficiencias estimadas de las figuras 40 y 41 y la

distribución teórica representada en las figuras 42 y 43 cuando el estadístico es inferior al valor crítico. En este caso, el valor del estadístico resulta de 0.292 y el p-valor menor que 0.010, por lo que se rechaza la hipótesis nula. Por lo tanto, el supuesto half normal para el término de ineficiencia no se acepta como válido y, en consecuencia, se rechaza la hipótesis H-18.

4.2. Supuesto exponencial

Caso 1: Muestra de cajas de ahorros

La estimación del modelo de frontera estocástica de costes de tipo Cobb-Douglas bajo el supuesto exponencial del término de ineficiencia para la muestra de cajas de ahorros se presenta en la tabla 15.

Tabla 15. Modelo frontera estocástica de costes bajo el supuesto exponencial.

Cajas de ahorros

$\ln CT/w_3$	Coef.	Desv. típ.	z	P>z	Interv. Conf. 95%	
$\ln y_1$	0.9453025	0.0261143	36.2	0	0.8941194	0.9964857
$\ln y_2$	0.0097875	0.0192104	0.51	0.61	-0.0278641	0.0474391
$\ln w_1/w_3$	0.7961821	0.0532698	14.95	0	0.6917753	0.900589
$\ln w_2/w_3$	0.0308891	0.0368251	0.84	0.402	-0.0412868	0.1030649
α_0	-0.2409261	0.5217945	-0.46	0.644	-1.263624	0.7817722
$\ln \sigma_v^2$	-5.573309	0.3696416	-15.08	0	-6.297794	-4.848825
$\ln \sigma_u^2$	-6.530125	1.040774	-6.27	0	-8.570005	-4.490245
σ_v	0.061627	0.01139			0.0428994	0.0885301
σ_u	0.0381946	0.0198759			0.0137736	0.1059146
σ^2	0.0052567	0.0012352			0.0028358	0.0076776
λ	0.6197694	0.0285815			0.5637507	0.6757881

Los intervalos de confianza correspondientes a los parámetros λ y σ_u muestran la significatividad de los mismos, lo que indica la existencia de una componente de ineficiencia.

Los coeficientes significativos, coincidiendo con los del caso half normal, son activos rentables y precio fondos prestables sobre precio empleados, ambos con coeficientes positivos, es decir, la variable dependiente se incrementa ante aumentos de estas variables explicativas (*ceteris paribus*).

Los intervalos de confianza de cada parámetro de la frontera presentada en la tabla 15 se intersecan con los intervalos de los respectivos parámetros en la tabla 11. Por lo tanto, se concluye que el supuesto distribucional no influye en la estimación de los parámetros de la frontera de costes y, en consecuencia, no se rechaza la hipótesis H-4.

Las figuras 44 y 45 representan los histogramas de los valores de ineficiencias estimados a partir del modelo de frontera estocástica de costes de las cajas de ahorros cuando se ha supuesto una distribución exponencial para el término de efectos de ineficiencia.

Figura 44. Histograma de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes.

Cajas de ahorros

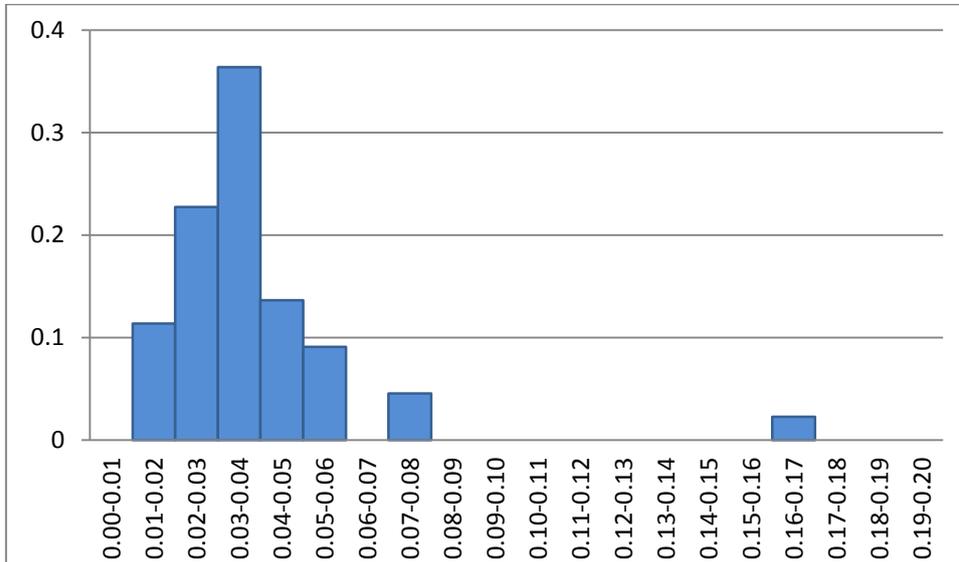
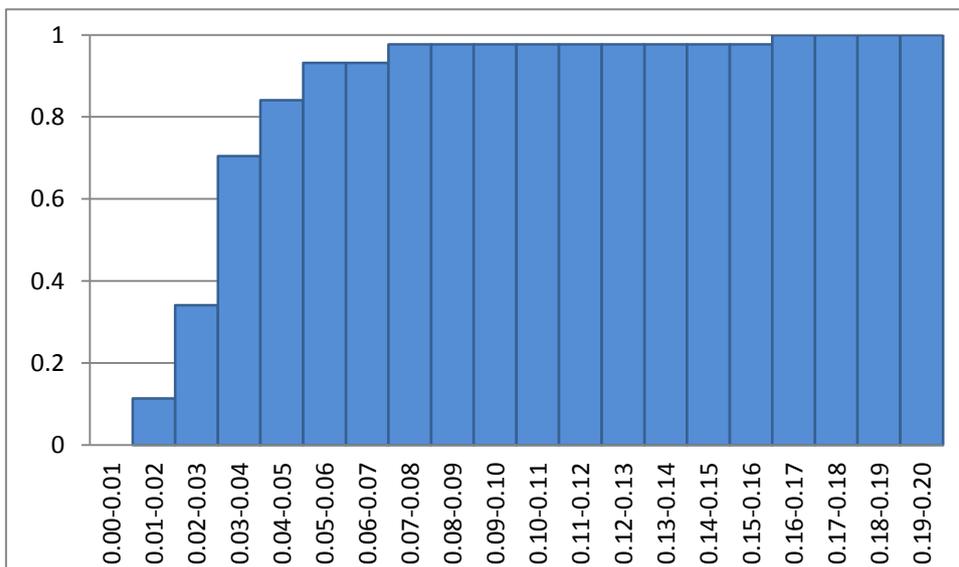


Figura 45. Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de

costes. Cajas de ahorros



Para obtener la expresión de la función de densidad teórica que la ineficiencia estimada debería presentar dado el supuesto exponencial de la ineficiencia, se sustituyen los parámetros estimados de la tabla 15 en la expresión (4.5.18):

$$f(\hat{u}) = \frac{\left[1 - \Phi\left(1.614 - \frac{g(\hat{u})}{0.062}\right)\right] \cdot \exp\left[0.000003 - \frac{g(\hat{u})}{0.038}\right]}{0.038 \cdot \left|1 - c'\left(1.614 - \frac{g(\hat{u})}{0.062}\right)\right|}, \quad \hat{u} \geq 0 \quad (5.4.8)$$

Las figuras 46 y 47 representan gráficamente las funciones de densidad y distribución teóricas de la ineficiencia en costes estimada.

Figura 46. Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Cajas de ahorros

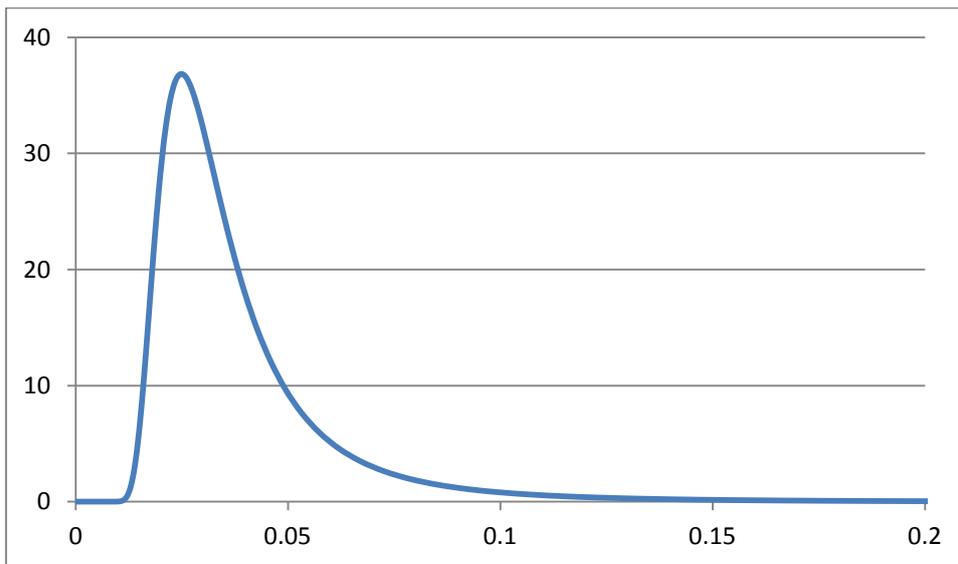
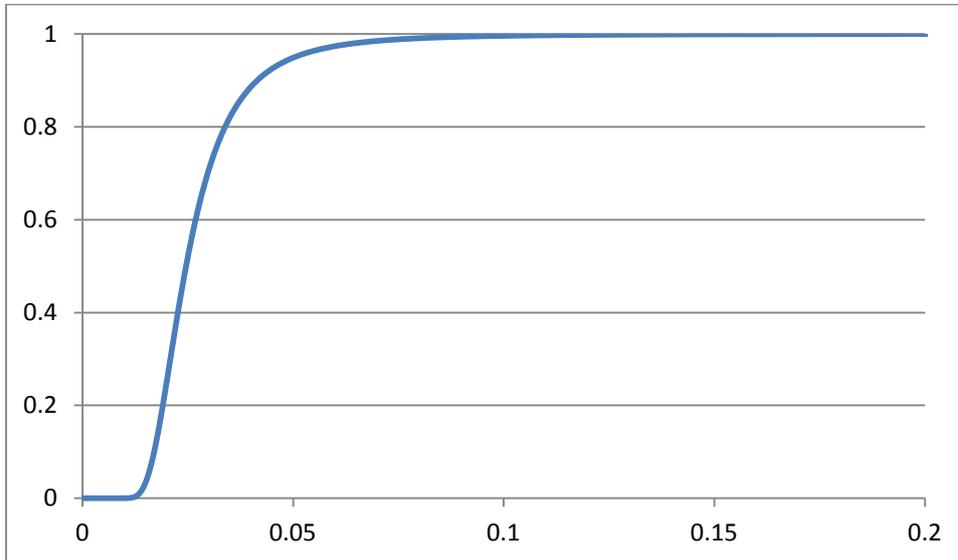


Figura 47. Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Cajas de ahorros



Para comprobar la bondad del ajuste entre la distribución teórica de la ineficiencia en costes estimada (figuras 46 y 47) y el histograma de ineficiencias estimadas para las cajas de ahorros bajo el supuesto exponencial (figuras 44 y 45), se aplica el test de Kolmogorov-Smirnov. La hipótesis nula de ajuste entre las distribuciones se acepta cuando el estadístico es inferior al valor crítico. En este caso, se obtiene un estadístico $D_1 = 0.324$ y un p-valor menor que 0.010, por lo que se rechaza la hipótesis nula. En consecuencia, el supuesto exponencial para el término de ineficiencia no se acepta como válido y, por lo tanto, se rechaza la hipótesis H-22.

Caso 2: Muestra de bancos

La tabla 16 presenta la estimación del modelo de frontera estocástica de costes de tipo Cobb-Douglas bajo el supuesto exponencial del término de ineficiencia para la muestra de bancos.

Tabla 16. Modelo frontera estocástica de costes bajo el supuesto exponencial.

Bancos

$\ln CT/w_3$	Coef.	Desv. típ.	z	P>z	Interv. Conf. 95%	
$\ln y_1$	0.896267	0.0215907	41.51	0	0.85395	0.938584
$\ln y_2$	0.0229106	0.0101866	2.25	0.025	0.0029452	0.0428759
$\ln w_1/w_3$	1.163746	0.0860768	13.52	0	0.9950387	1.332454
$\ln w_2/w_3$	-0.093293	0.0271164	-3.44	0.001	-0.1464402	-0.0401458
α_0	2.721373	0.7687078	3.54	0	1.214734	4.228013
$\ln \sigma_v^2$	-4.503591	0.6679926	-6.74	0	-5.812832	-3.194349
$\ln \sigma_u^2$	-3.618344	0.6378006	-5.67	0	-4.86841	-2.368278
σ_v	0.1052102	0.0351398			0.0546713	0.2024677
σ_u	0.1637897	0.0522326			0.0876674	0.3060096
σ^2	0.0378962	0.0143567			0.0097576	0.0660349
λ	1.556786	0.0775454			1.4048	1.708772

Los parámetros λ y σ_u resultan significativos en base a los intervalos de confianza estimados en la tabla 16, por lo que se confirma la existencia de efectos de ineficiencia en costes.

Al igual que en el caso correspondiente al supuesto half normal, todas las variables explicativas introducidas en el modelo resultan significativas. La única con una influencia negativa sobre la variable dependiente es el precio del capital físico sobre el precio de los empleados.

Los intervalos de confianza de cada parámetro de la frontera de la tabla 16 se intersecan con los intervalos de los respectivos parámetros en la tabla 12. En consecuencia, se concluye que el supuesto distribucional no influye en la estimación de los parámetros de la frontera de costes y, por lo tanto, no se rechaza la hipótesis H-5.

Las figuras 48 y 49 representan los histogramas de las ineficiencias estimadas mediante el modelo de frontera estocástica de costes habiendo supuesto una distribución exponencial para la ineficiencia en la muestra de bancos.

Figura 48. Histograma de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes.

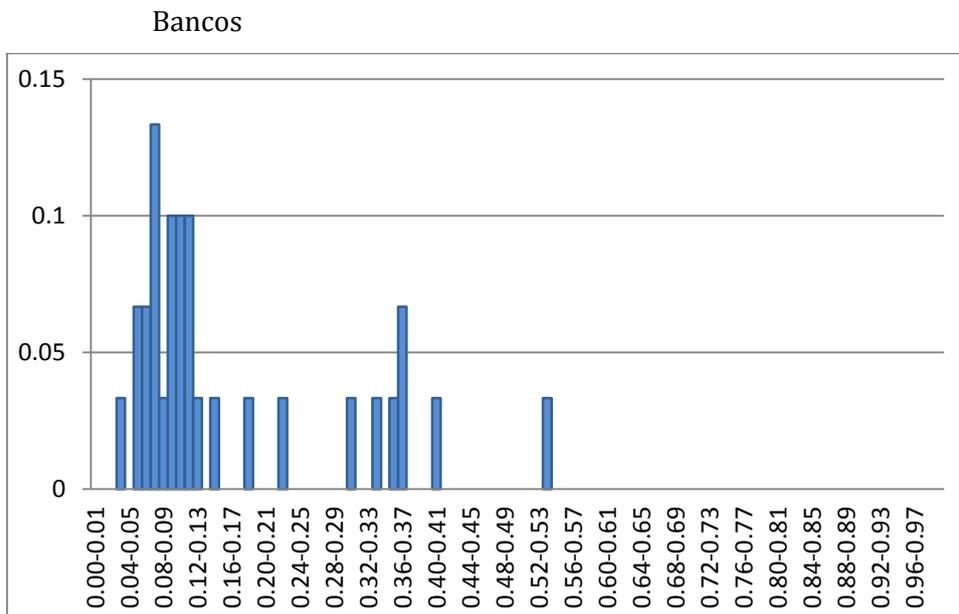
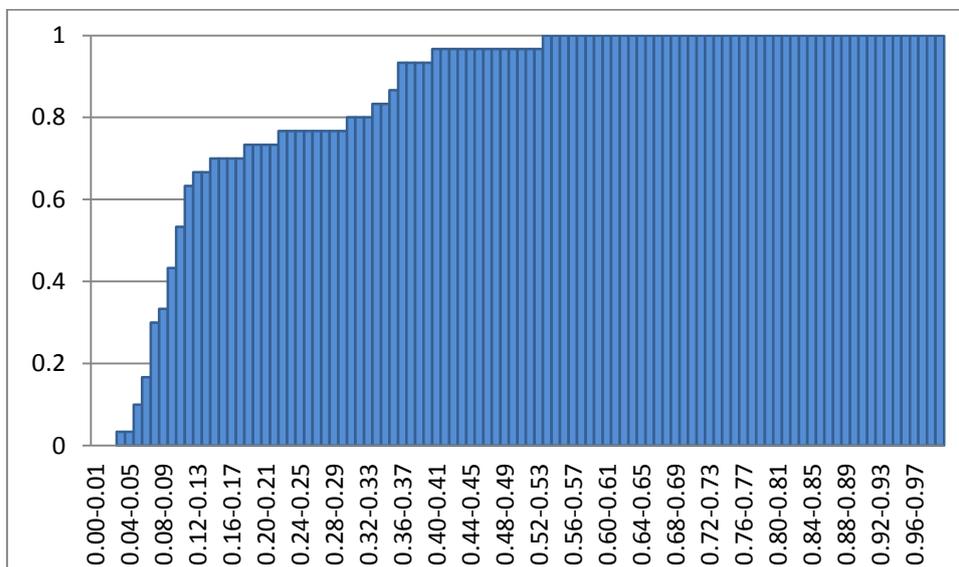


Figura 49. Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Bancos



La expresión de la función de densidad teórica que la ineficiencia estimada debería presentar, dado el supuesto exponencial de la ineficiencia, se obtiene a partir de la

expresión (4.5.18) y de los valores estimados de los parámetros λ, σ y σ_u^2 de la tabla 16:

$$f(\hat{u}) = \frac{\left[1 - \Phi\left(0.642 - \frac{g(\hat{u})}{0.105}\right)\right] \cdot \exp\left[0.0001 - \frac{g(\hat{u})}{0.164}\right]}{0.164 \cdot \left|1 - c'\left(0.642 - \frac{g(\hat{u})}{0.105}\right)\right|}, \quad \hat{u} \geq 0 \quad (5.4.9)$$

Las figuras 50 y 51 representan la función de densidad anterior y su correspondiente función de distribución en el caso de la muestra de bancos.

Figura 50. Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Bancos

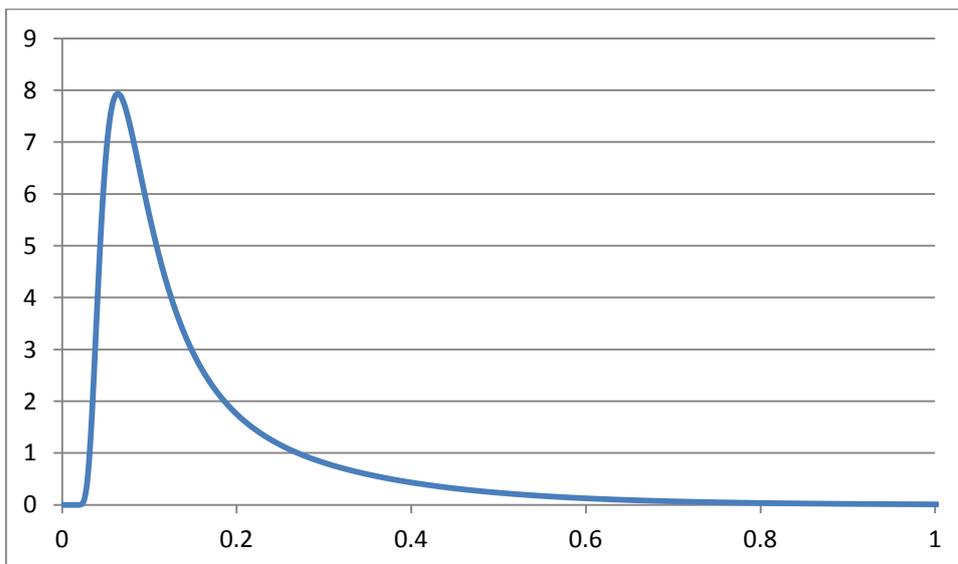
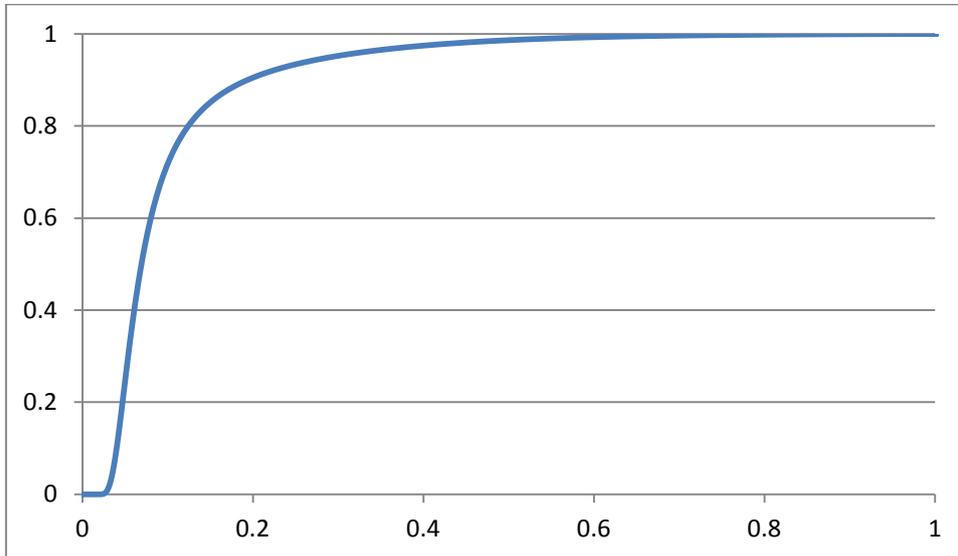


Figura 51. Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Bancos



Si el supuesto distribucional exponencial del término de ineficiencia fuese correcto, el histograma de ineficiencias estimadas representado en las figuras 48 y 49 y la distribución presentada en las figuras 50 y 51 deberían presentar un buen ajuste.

El test de Kolmogorov-Smirnov acepta la hipótesis nula de bondad de ajuste entre las distribuciones cuando el estadístico es inferior al valor crítico. Puesto que el valor del estadístico es de 0.326 y el p-valor es menor que 0.010, se rechaza la hipótesis nula. Por lo tanto, el supuesto exponencial no se acepta como válido para el término de efectos de ineficiencia y, en consecuencia, se rechaza la hipótesis H-23.

Caso 3: Muestra de cajas de ahorros y bancos

La estimación del modelo de frontera estocástica de costes de tipo Cobb-Douglas bajo el supuesto exponencial del término de ineficiencia para la muestra de cajas de ahorros y bancos se presenta en la tabla 17 que se muestra a continuación.

Tabla 17. Modelo frontera estocástica de costes bajo el supuesto exponencial.

Cajas de ahorros y bancos

$\ln CT/w_3$	Coef.	Desv. típ.	z	P>z	Interv. Conf. 95%	
$\ln y_1$	0.9509443	0.0245671	38.71	0	0.9027937	0.999095
$\ln y_2$	0.0062511	0.0128465	0.49	0.627	-0.0189276	0.0314298
$\ln w_1/w_3$	1.083463	0.055335	19.58	0	0.975008	1.191917
$\ln w_2/w_3$	-0.0339769	0.0180448	-1.88	0.06	-0.0693442	0.0013903
α_0	1.513641	0.6086482	2.49	0.013	0.3207121	2.706569
$\ln \sigma_v^2$	-5.568544	0.7401931	-7.52	0	-7.019296	-4.117792
$\ln \sigma_u^2$	-2.934251	0.3239271	-9.06	0	-3.569137	-2.299366
σ_v	0.061774	0.0228624			0.0299074	0.1275948
σ_u	0.2305873	0.0373468			0.1678695	0.3167372
σ^2	0.0569866	0.0158845			0.0258535	0.0881196
λ	3.732754	0.0532493			3.628388	3.837121
Log-verosimilitud=17.5597						

El modelo para bancos y cajas de ahorros presenta efectos de ineficiencia en costes, ya que los parámetros λ y σ_u resultan significativos a partir de los intervalos de confianza de la tabla 17.

A diferencia del resto de casos presentados en las secciones previas, las variables significativas del modelo de frontera estocástica de costes de tipo Cobb-Douglas para cajas de ahorros y bancos bajo el supuesto exponencial no coinciden con las del mismo caso para el supuesto half normal. En este caso, activos rentables y precio de fondos prestables sobre precio empleados presentan coeficientes significativos positivos, mientras que precio del capital físico sobre precio empleados, cuyo coeficiente no resultaba significativo en el caso half normal, se presenta ahora como tal con signo negativo.

No obstante, los intervalos de confianza de cada parámetro de la frontera de la tabla 17 se intersecan con los intervalos de los respectivos parámetros en la tabla 13. En consecuencia, se concluye que el supuesto distribucional no influye en la

estimación de los parámetros de la frontera de costes de tipo Cobb-Douglas y, por lo tanto, no se rechaza la hipótesis H-6.

Los histogramas de las ineficiencias en costes estimadas a partir del modelo de frontera estocástica de costes de las cajas de ahorros y bancos cuando se ha supuesto una distribución exponencial para el término de ineficiencia se representan en las figuras 52 y 53.

Figura 52. Histograma de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes.

Cajas de ahorros y bancos

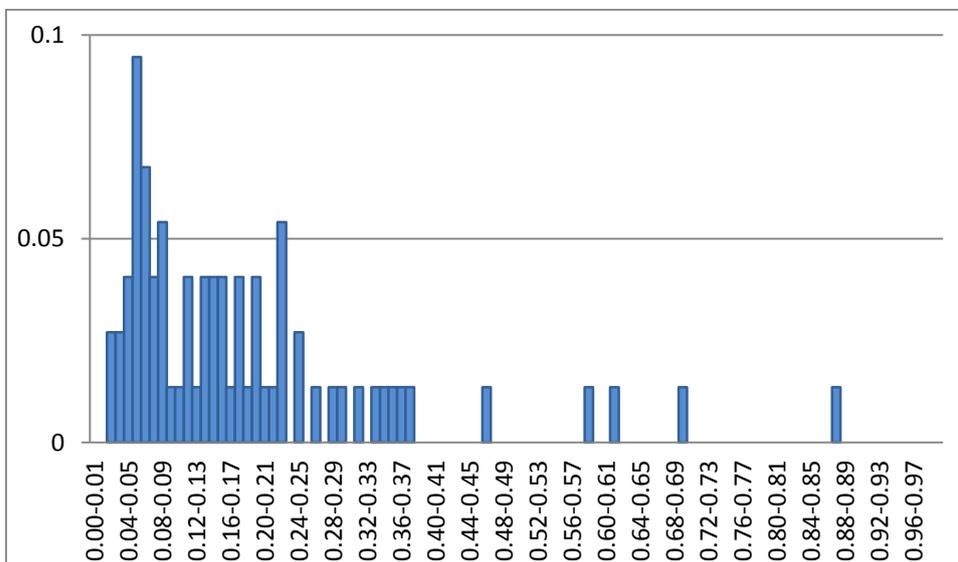
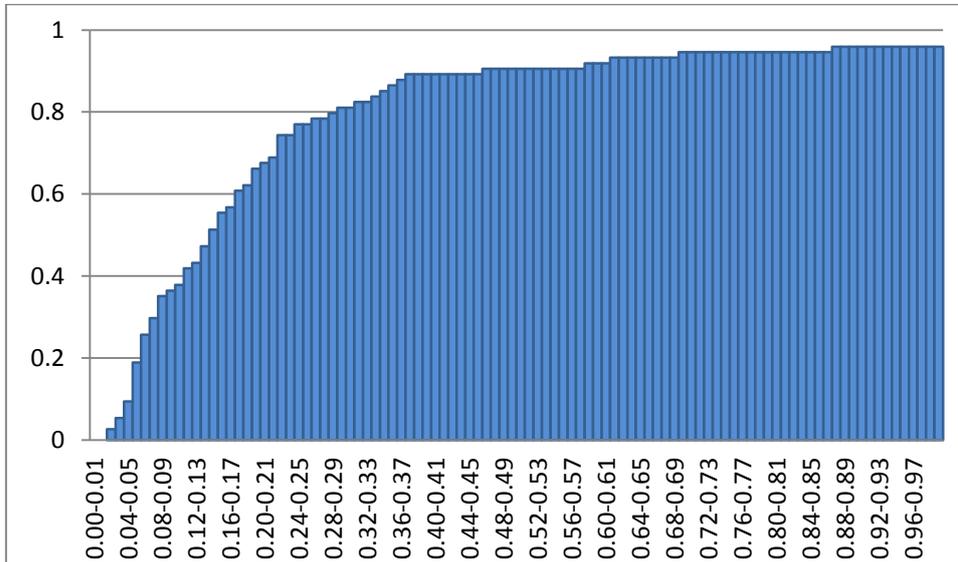


Figura 53. Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Cajas de ahorros y bancos



La expresión que la función de densidad teórica de la ineficiencia en costes estimada de la muestra de cajas de ahorros y bancos debería presentar si se supone que el término de efectos de ineficiencia se distribuye según una exponencial, se obtiene sustituyendo los parámetros estimados de la tabla 17 en la expresión (4.5.18):

$$f(\hat{u}) = \frac{\left[1 - \Phi\left(0.268 - \frac{g(\hat{u})}{0.062}\right)\right] \cdot \exp\left[0.0001 - \frac{g(\hat{u})}{0.231}\right]}{0.231 \cdot \left|1 - c'\left(0.268 - \frac{g(\hat{u})}{0.062}\right)\right|}, \quad \hat{u} \geq 0 \quad (5.4.10)$$

A partir de la expresión anterior, las figuras 54 y 55 representan gráficamente las funciones de densidad y distribución teóricas de la ineficiencia en costes estimada.

Figura 54. Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Cajas de ahorros y bancos

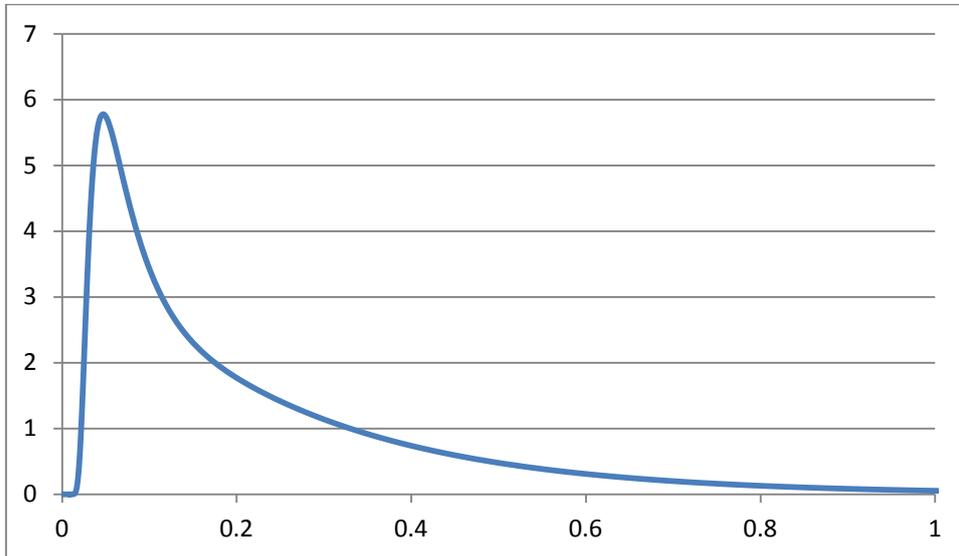
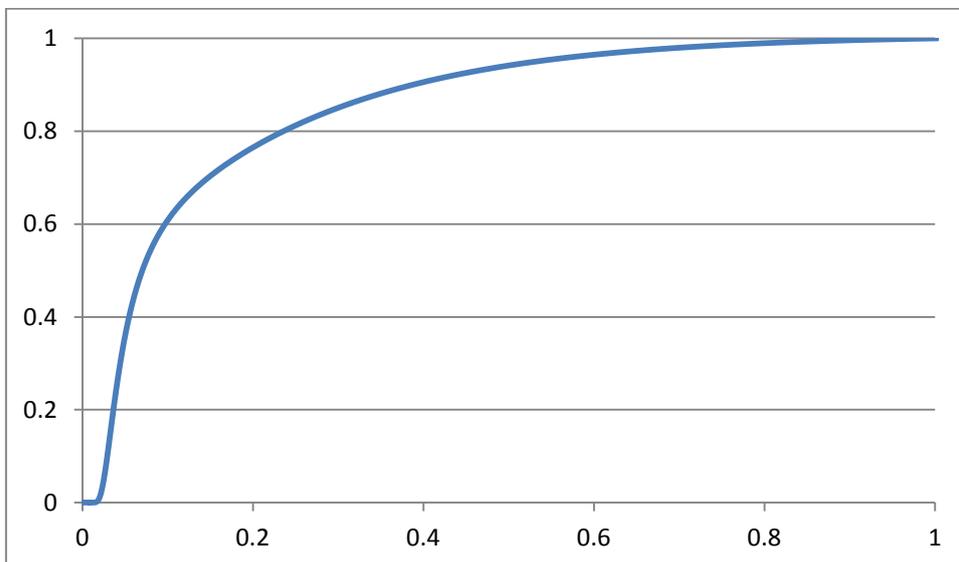


Figura 55. Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes. Cajas de ahorros y bancos



El contraste de bondad de ajuste entre la distribución teórica (figuras 54 y 55) y el histograma de ineficiencias estimadas (figuras 52 y 53) presenta un valor del estadístico $D_1 = 0.152$ y un p-valor mayor que 0.050, por lo que no se rechaza la

hipótesis nula. En consecuencia, el supuesto exponencial para el término de ineficiencia se acepta como válido y no se rechaza la hipótesis H-24.

La tabla 18 presenta la estimación del modelo de frontera estocástica de costes de tipo translog bajo el supuesto exponencial del término de ineficiencia para la muestra de cajas de ahorros y bancos.

Tabla 18. Modelo frontera estocástica de costes de tipo translog bajo el supuesto exponencial. Cajas de ahorros y bancos

$\ln CT/w_3$	Coef.	Desv. típ.	z	P>z	Interv. Conf. 95%	
$\ln y_1$	1.004496	0.042803	23.47	0	0.9206036	1.088388
$\ln y_2$	0.0273937	0.0492152	0.56	0.578	-0.0690663	0.1238538
$\ln w_1/w_3$	1.029578	0.1461241	7.05	0	0.7431799	1.315976
$\ln w_2/w_3$	-0.1064955	0.0629184	-1.69	0.091	-0.2298132	0.0168222
$\ln^2 y_1$	0.7772179	0.3040944	2.56	0.011	0.1812038	1.373232
$\ln^2 y_2$	-0.0322214	0.1071804	-0.3	0.764	-0.2422912	0.1778484
$\ln^2 w_1/w_3$	0.2544043	0.119746	2.12	0.034	0.0197065	0.489102
$\ln^2 w_2/w_3$	0.2334381	0.0237726	9.82	0	0.1868447	0.2800315
$\ln y_1 \ln y_2$	0.0396835	0.0221727	1.79	0.073	-0.0037742	0.0831412
$\ln \frac{w_1}{w_3} \ln \frac{w_2}{w_3}$	-0.0883061	0.0171966	-5.14	0	-0.1220108	-0.0546015
$\ln y_1 \ln \frac{w_1}{w_3}$	0.2653091	0.0863831	3.07	0.002	0.0960014	0.4346169
$\ln y_1 \ln \frac{w_2}{w_3}$	-0.144959	0.0889293	-1.63	0.103	-0.3192572	0.0293392
$\ln y_2 \ln \frac{w_1}{w_3}$	-0.0026689	0.0404523	-0.07	0.947	-0.0819541	0.0766162
$\ln y_2 \ln \frac{w_2}{w_3}$	0.043808	0.0381914	1.15	0.251	-0.0310458	0.1186617
α_0	-0.2557779	0.0534645	-4.78	0	-0.3605663	-0.1509894
$\ln \sigma_v^2$	-4.833164	0.4566537	-10.58	0	-5.728188	-3.938139
$\ln \sigma_u^2$	-3.503623	0.3678567	-9.52	0	-4.224609	-2.782637
σ_v	0.0892261	0.0203727			0.0570348	0.1395867
σ_u	0.1734594	0.0319041			0.1209589	0.2487471
σ^2	0.0380495	0.0096896			0.0190581	0.0570408
λ	1.944044	0.0459197			1.854043	2.034045

Log-verosimilitud=24.3424

A partir de los intervalos de confianza estimados para los parámetros σ_u y λ en la tabla 18, se constata la significatividad de los mismos, lo que confirma la existencia de una componente de efectos de ineficiencia en costes.

En lo que se refiere a la significatividad de las variables introducidas en la función translogarítmica, puede comprobarse su coincidencia con las presentadas en la tabla 14, correspondiente a la muestra conjunta bajo el supuesto half normal.

Los intervalos de confianza de cada parámetro de la frontera de la tabla 18 se intersecan con los intervalos de los respectivos parámetros en la tabla 14. Por lo tanto, se concluye que el supuesto distribucional no influye en la estimación de los parámetros de la frontera de costes de tipo translog y, en consecuencia, no se rechaza la hipótesis H-6.

El test LR puede aplicarse para contrastar si la forma funcional más apropiada para el modelo de estudio es la Cobb-Douglas o la translogarítmica. Para ello se realiza un contraste de significatividad conjunta de los parámetros de la translog que no aparecen en la Cobb-Douglas, de manera que la hipótesis nula se corresponde con la función Cobb-Douglas y la alternativa con la función translog. Dados los valores de log-verosimilitud de la hipótesis nula y alternativa (tablas 17 y 18, respectivamente), el estadístico LR resulta 44.320 y, frente al valor de la chi-cuadrado con 10 grados de libertad, se rechaza la hipótesis nula y, por tanto, se concluye que la forma funcional más apropiada para imponer a la frontera es la translogarítmica.

Las figuras 56 y 57 muestran los histogramas de las ineficiencias estimadas a partir del modelo de frontera estocástica de costes de bancos y cajas de ahorros habiendo supuesto una distribución exponencial para el término de efectos de ineficiencia.

Figura 56. Histograma de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes translog.
Cajas de ahorros y bancos

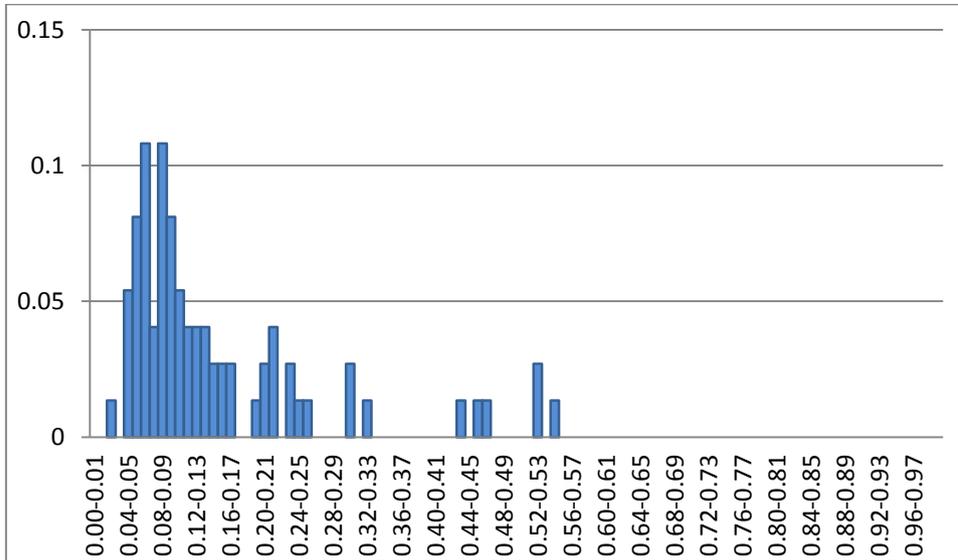
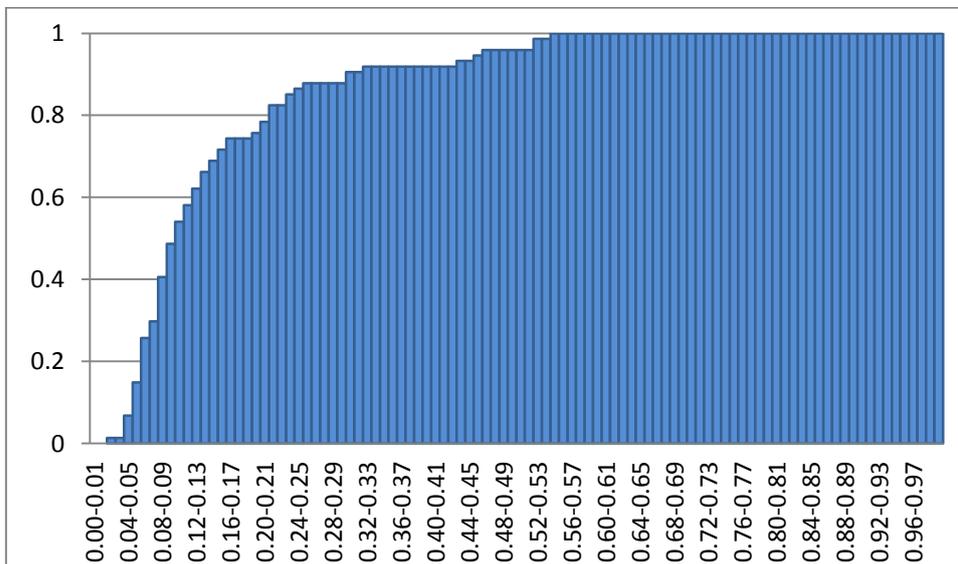


Figura 57. Histograma acumulado de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes translog. Cajas de ahorros y bancos



A partir de la expresión (4.5.18) y de los parámetros estimados de la tabla 18, la función de densidad teórica que la ineficiencia en costes estimada para la muestra de bancos y cajas de ahorros mediante una frontera translog debería presentar si

se supone que el término de efectos de ineficiencia se distribuye según una exponencial, presenta la siguiente expresión:

$$f(\hat{u}) = \frac{\left[1 - \Phi\left(0.514 - \frac{g(\hat{u})}{0.089}\right)\right] \cdot \exp\left[0.0001 - \frac{g(\hat{u})}{0.173}\right]}{0.173 \cdot \left|1 - c'\left(0.514 - \frac{g(\hat{u})}{0.089}\right)\right|}, \quad \hat{u} \geq 0 \quad (5.4.11)$$

Las figuras 58 y 59 representan las funciones de densidad y distribución teóricas de la ineficiencia en costes estimada a partir de la expresión (5.4.11).

Figura 58. Función de densidad teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes translog. Cajas de ahorros y bancos

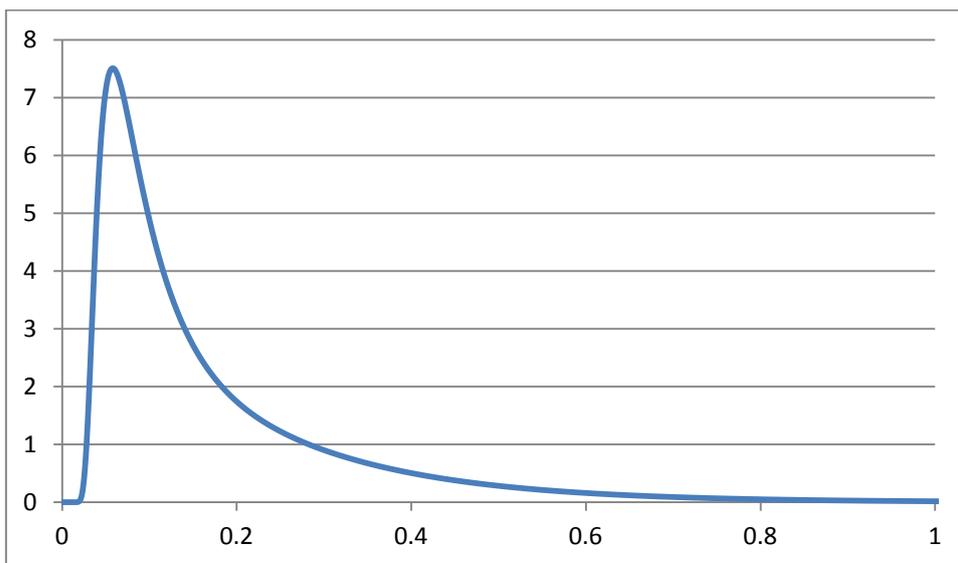
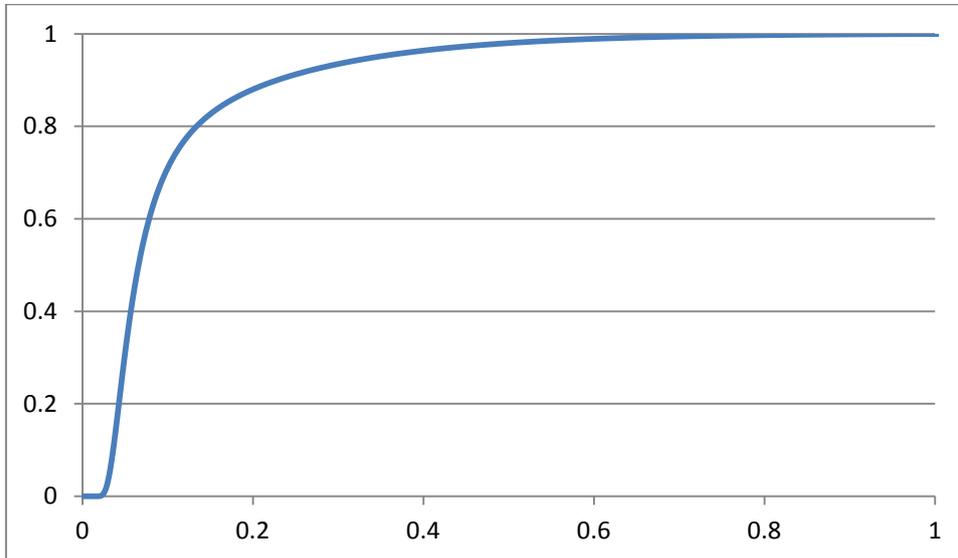


Figura 59. Función de distribución teórica de \hat{u} en el supuesto EX de un modelo de costes translog. Cajas de ahorros y bancos



El test de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov acepta la hipótesis nula de ajuste entre el histograma de ineficiencias estimadas de las figuras 56 y 57 y la distribución teórica representada en las figuras 58 y 59 cuando el estadístico es inferior al valor crítico. En este caso, el valor del estadístico resulta de 0.141 y el p-valor es mayor que 0.100, por lo que no se rechaza la hipótesis nula de ajuste significativo. En consecuencia, se acepta como válido el supuesto exponencial del término de ineficiencia y, por lo tanto, no se rechaza la hipótesis H-24.

5. Análisis de los resultados

Esta sección presenta los resultados de las estimaciones de ineficiencia y eficiencia obtenidas bajo cada uno de los supuestos estudiados. Para ello, la información se ha organizado en diferentes tablas según la muestra estudiada: cajas de ahorros (tabla 19), bancos (tabla 20) y cajas de ahorros y bancos (tablas 21 y 22), donde la última fila presenta la media de la respectiva columna. En cada tabla se presentan las estimaciones de ineficiencia y eficiencia técnica y en costes obtenidas bajo los dos supuestos distribucionales del término de ineficiencia considerados, half normal y exponencial, respectivamente.

Tabla 19. Estimaciones cajas de ahorros

Frontera de producción				Frontera de costes			
Ineficiencia		Eficiencia		Ineficiencia		Eficiencia	
Hn	Exp	Hn	Exp	Hn	Exp	Hn	Exp
0.0555	0.0347	0.9460	0.9659	0.0472	0.0303	0.9539	0.9701
0.0715	0.0458	0.9310	0.9553	0.0234	0.0167	0.9769	0.9834
0.0205	0.0155	0.9797	0.9846	0.1572	0.1640	0.8546	0.8488
0.0226	0.0137	0.9776	0.9864	0.1014	0.0776	0.9036	0.9253
0.0283	0.0151	0.9721	0.9850	0.0563	0.0365	0.9453	0.9642
0.0289	0.0140	0.9715	0.9861	0.0540	0.0358	0.9474	0.9648
0.0129	0.0095	0.9872	0.9905	0.0549	0.0364	0.9465	0.9643
0.0640	0.0350	0.9380	0.9656	0.0296	0.0203	0.9708	0.9799
0.0103	0.0099	0.9897	0.9901	0.0552	0.0362	0.9463	0.9644
0.0631	0.0488	0.9389	0.9523	0.0797	0.0546	0.9234	0.9468
0.0520	0.0300	0.9493	0.9704	0.0551	0.0359	0.9464	0.9647
0.1192	0.1011	0.8876	0.9038	0.0658	0.0434	0.9363	0.9575
0.0243	0.0151	0.9760	0.9850	0.0339	0.0226	0.9667	0.9777
0.0280	0.0185	0.9724	0.9817	0.0754	0.0515	0.9274	0.9498
0.0608	0.0437	0.9410	0.9573	0.0614	0.0410	0.9404	0.9598
0.0466	0.0335	0.9545	0.9670	0.0812	0.0576	0.9220	0.9440
0.0141	0.0108	0.9860	0.9892	0.0583	0.0379	0.9434	0.9629
0.0169	0.0111	0.9833	0.9890	0.0300	0.0205	0.9705	0.9797
0.0659	0.0406	0.9362	0.9603	0.0670	0.0448	0.9352	0.9562
0.0068	0.0081	0.9933	0.9920	0.0705	0.0474	0.9320	0.9537
0.0359	0.0230	0.9647	0.9772	0.0537	0.0350	0.9478	0.9656
0.0412	0.0227	0.9596	0.9776	0.0336	0.0225	0.9670	0.9777
0.0588	0.0358	0.9429	0.9649	0.0469	0.0306	0.9542	0.9699
0.0370	0.0188	0.9637	0.9814	0.0319	0.0214	0.9686	0.9788
0.0224	0.0166	0.9779	0.9835	0.0816	0.0578	0.9217	0.9438
0.0243	0.0139	0.9760	0.9862	0.0587	0.0389	0.9430	0.9618
0.0378	0.0201	0.9629	0.9801	0.0355	0.0236	0.9652	0.9767
0.0537	0.0324	0.9477	0.9682	0.0509	0.0334	0.9503	0.9671
0.0144	0.0092	0.9857	0.9909	0.0469	0.0307	0.9542	0.9698
0.0141	0.0120	0.9860	0.9880	0.0704	0.0479	0.9320	0.9532
0.0463	0.0280	0.9548	0.9724	0.0507	0.0329	0.9506	0.9676
0.0437	0.0257	0.9572	0.9746	0.0625	0.0415	0.9394	0.9593
0.0057	0.0070	0.9943	0.9931	0.0573	0.0378	0.9443	0.9629
0.0194	0.0111	0.9808	0.9890	0.0386	0.0256	0.9622	0.9747
0.0125	0.0087	0.9876	0.9913	0.0259	0.0181	0.9745	0.9821
0.0773	0.0505	0.9257	0.9508	0.0271	0.0189	0.9733	0.9813
0.0204	0.0129	0.9798	0.9872	0.0378	0.0247	0.9629	0.9756
0.1215	0.1005	0.8856	0.9044	0.0554	0.0364	0.9461	0.9643
0.0469	0.0236	0.9542	0.9767	0.0263	0.0181	0.9741	0.9821
0.0854	0.0668	0.9181	0.9354	0.0952	0.0716	0.9092	0.9309
0.0131	0.0099	0.9870	0.9902	0.0404	0.0263	0.9604	0.9740

0.0041	0.0054	0.9959	0.9946	0.0244	0.0173	0.9759	0.9829
0.0068	0.0077	0.9932	0.9923	0.0555	0.0359	0.9460	0.9647
0.0080	0.0078	0.9921	0.9923	0.0337	0.0226	0.9669	0.9776
0.0378	0.0256	0.9633	0.9748	0.0545	0.0382	0.9472	0.9628

Tabla 20. Estimaciones bancos

Frontera de producción				Frontera de costes			
Ineficiencia		Eficiencia		Ineficiencia		Eficiencia	
Hn	Exp	Hn	Exp	Hn	Exp	Hn	Exp
0.1580	0.1443	0.8539	0.8657	0.4047	0.3581	0.6672	0.6990
0.1879	0.1762	0.8287	0.8384	0.2907	0.2254	0.7478	0.7982
0.0448	0.0295	0.9562	0.9710	0.1372	0.0959	0.8718	0.9086
0.0278	0.0188	0.9726	0.9813	0.1442	0.0991	0.8657	0.9057
0.0123	0.0124	0.9878	0.9877	0.1591	0.1049	0.8529	0.9004
0.0476	0.0311	0.9535	0.9694	0.0867	0.0617	0.9170	0.9401
0.1002	0.0769	0.9046	0.9260	0.1473	0.1026	0.8630	0.9024
0.0220	0.0171	0.9782	0.9831	0.2521	0.1831	0.7772	0.8326
0.0307	0.0201	0.9698	0.9801	0.4078	0.3621	0.6651	0.6962
0.0261	0.0195	0.9743	0.9807	0.0384	0.0318	0.9623	0.9687
0.0471	0.0317	0.9540	0.9688	0.1810	0.1154	0.8345	0.8910
0.0703	0.0451	0.9321	0.9559	0.1312	0.0932	0.8770	0.9110
0.0651	0.0376	0.9369	0.9631	0.1033	0.0747	0.9019	0.9280
0.2778	0.2770	0.7575	0.7581	0.1035	0.0754	0.9016	0.9274
0.0910	0.0567	0.9130	0.9448	0.1720	0.1246	0.8420	0.8828
0.0405	0.0245	0.9603	0.9758	0.1993	0.1420	0.8193	0.8677
0.0157	0.0140	0.9845	0.9861	0.3878	0.3358	0.6785	0.7148
0.0545	0.0377	0.9470	0.9630	0.1710	0.1167	0.8428	0.8898
0.0824	0.0469	0.9209	0.9542	0.1422	0.1059	0.8674	0.8995
0.0563	0.0295	0.9452	0.9709	0.0651	0.0502	0.9370	0.9510
0.0123	0.0094	0.9878	0.9906	0.5344	0.5340	0.5860	0.5862
0.0694	0.0368	0.9330	0.9638	0.0662	0.0509	0.9359	0.9504
0.1165	0.0785	0.8900	0.9245	0.3430	0.3021	0.7096	0.7392
0.0316	0.0214	0.9689	0.9788	0.0901	0.0644	0.9139	0.9376
0.0869	0.0644	0.9167	0.9376	0.1033	0.0747	0.9019	0.9280
0.0995	0.0597	0.9053	0.9420	0.1035	0.0754	0.9016	0.9274
0.0891	0.0516	0.9148	0.9497	0.0949	0.0802	0.9094	0.9230
0.0386	0.0291	0.9621	0.9713	0.4078	0.3621	0.6651	0.6962
0.0847	0.0519	0.9188	0.9495	0.1568	0.1110	0.8549	0.8950
0.0574	0.0250	0.9442	0.9753	0.4136	0.4003	0.6613	0.6701
0.0715	0.0525	0.9324	0.9502	0.2013	0.1638	0.8244	0.8556

Tabla 21. Estimaciones cajas de ahorros y bancos

Frontera de producción				Frontera de costes			
Ineficiencia		Eficiencia		Ineficiencia		Eficiencia	
Hn	Exp	Hn	Exp	Hn	Exp	Hn	Exp
0.0455	0.0303	0.9555	0.9701	0.1456	0.0677	0.8645	0.9345
0.0702	0.0467	0.9322	0.9544	0.0768	0.0509	0.9261	0.9504
0.0622	0.0366	0.9397	0.9640	0.4222	0.3643	0.6556	0.6947
0.0191	0.0148	0.9811	0.9853	0.5057	0.3413	0.6031	0.7109
0.0290	0.0191	0.9714	0.9811	0.1863	0.0889	0.8301	0.9149
0.0284	0.0182	0.9720	0.9820	0.4149	0.2943	0.6604	0.7450
0.0384	0.0211	0.9623	0.9791	0.1529	0.1024	0.8582	0.9027
0.0573	0.0356	0.9443	0.9650	0.1180	0.0665	0.8887	0.9356
0.0319	0.0191	0.9686	0.9811	0.2664	0.1948	0.7661	0.8230
0.0760	0.0546	0.9268	0.9469	0.2465	0.1714	0.7816	0.8425
0.0463	0.0297	0.9548	0.9707	0.2554	0.1468	0.7746	0.8635
0.1154	0.0976	0.8910	0.9070	0.2307	0.1531	0.7940	0.8581
0.0406	0.0241	0.9602	0.9762	0.0688	0.0545	0.9335	0.9470
0.0495	0.0300	0.9517	0.9704	0.2269	0.1541	0.7970	0.8572
0.0954	0.0676	0.9090	0.9347	0.1445	0.1193	0.8655	0.8875
0.0937	0.0644	0.9105	0.9376	0.1595	0.1544	0.8526	0.8569
0.0245	0.0164	0.9758	0.9838	0.3001	0.2015	0.7407	0.8175
0.0372	0.0211	0.9635	0.9792	0.0814	0.0611	0.9219	0.9408
0.0418	0.0288	0.9591	0.9716	0.4432	0.2814	0.6420	0.7548
0.0202	0.0140	0.9800	0.9860	0.2929	0.1932	0.7461	0.8243
0.0687	0.0424	0.9336	0.9585	0.0890	0.0798	0.9149	0.9233
0.0555	0.0331	0.9461	0.9674	0.0394	0.0407	0.9614	0.9602
0.0737	0.0481	0.9290	0.9530	0.0222	0.0293	0.9780	0.9711
0.0366	0.0227	0.9641	0.9776	0.0818	0.0483	0.9214	0.9528
0.0724	0.0432	0.9302	0.9577	0.1785	0.1654	0.8365	0.8475
0.0342	0.0208	0.9664	0.9794	0.3554	0.2611	0.7009	0.7702
0.0431	0.0261	0.9578	0.9743	0.1342	0.0750	0.8744	0.9277
0.0648	0.0412	0.9372	0.9596	0.2130	0.1346	0.8081	0.8741
0.0228	0.0149	0.9775	0.9853	0.2483	0.1478	0.7801	0.8626
0.0734	0.0413	0.9292	0.9596	0.0663	0.0882	0.9359	0.9155
0.0597	0.0375	0.9420	0.9632	0.0971	0.0607	0.9075	0.9411
0.0538	0.0335	0.9477	0.9671	0.2224	0.1319	0.8006	0.8764
0.0189	0.0130	0.9812	0.9871	0.2692	0.1756	0.7640	0.8389
0.0296	0.0180	0.9708	0.9821	0.1898	0.0992	0.8272	0.9055
0.0211	0.0140	0.9791	0.9861	0.1665	0.0882	0.8466	0.9156
0.0791	0.0542	0.9240	0.9472	0.0861	0.0565	0.9175	0.9450
0.0330	0.0202	0.9675	0.9800	0.1095	0.0666	0.8963	0.9356
0.1271	0.1064	0.8807	0.8990	0.0744	0.0526	0.9283	0.9487
0.0244	0.0178	0.9759	0.9823	0.1151	0.0511	0.8913	0.9502
0.0918	0.0705	0.9123	0.9319	0.3195	0.2260	0.7265	0.7977
0.0252	0.0163	0.9751	0.9838	0.0448	0.0366	0.9562	0.9641

Aplicación al Sistema Bancario Español

0.0133	0.0100	0.9868	0.9901	0.1507	0.0807	0.8601	0.9225
0.0162	0.0122	0.9840	0.9879	0.2845	0.1777	0.7524	0.8372
0.0221	0.0143	0.9781	0.9858	0.1278	0.0710	0.8800	0.9314
0.1512	0.1448	0.8596	0.8652	0.7569	0.5852	0.4691	0.5570
0.1800	0.1760	0.8352	0.8386	0.6169	0.4684	0.5396	0.6260
0.0271	0.0194	0.9733	0.9808	0.3395	0.1922	0.7121	0.8252
0.0148	0.0117	0.9853	0.9883	0.3391	0.2162	0.7124	0.8056
0.0119	0.0107	0.9882	0.9894	0.2603	0.1437	0.7708	0.8661
0.0324	0.0220	0.9682	0.9783	0.2049	0.1128	0.8147	0.8933
0.0920	0.0745	0.9121	0.9282	0.3214	0.2407	0.7251	0.7861
0.0179	0.0136	0.9823	0.9865	0.3627	0.2456	0.6958	0.7822
0.0167	0.0124	0.9834	0.9877	0.0796	0.0452	0.9235	0.9558
0.0292	0.0196	0.9712	0.9806	0.7039	0.6117	0.4946	0.5425
0.0363	0.0297	0.9644	0.9707	0.0546	0.0517	0.9469	0.9496
0.0554	0.0357	0.9461	0.9649	0.2975	0.2268	0.7427	0.7971
0.0390	0.0232	0.9618	0.9771	0.2907	0.2201	0.7477	0.8025
0.2875	0.2893	0.7501	0.7488	0.1996	0.1385	0.8191	0.8707
0.0619	0.0378	0.9400	0.9630	0.3964	0.3530	0.6728	0.7026
0.0355	0.0212	0.9651	0.9791	0.9048	0.8709	0.4046	0.4186
0.0098	0.0083	0.9902	0.9917	0.3703	0.3331	0.6905	0.7167
0.0812	0.0600	0.9220	0.9418	0.3760	0.3718	0.6866	0.6895
0.0606	0.0339	0.9412	0.9666	0.7024	0.6969	0.4954	0.4981
0.0279	0.0159	0.9725	0.9842	0.1696	0.1255	0.8440	0.8821
0.0072	0.0061	0.9928	0.9940	0.8000	0.7800	0.4493	0.4584
0.0415	0.0219	0.9594	0.9783	0.1723	0.1859	0.8417	0.8303
0.0839	0.0544	0.9195	0.9470	0.1007	0.1138	0.9042	0.8924
0.0237	0.0152	0.9766	0.9849	0.0949	0.0578	0.9095	0.9438
0.0388	0.0288	0.9620	0.9716	0.0197	0.0203	0.9805	0.9799
0.0690	0.0396	0.9333	0.9612	0.8700	0.8500	0.4190	0.4274
0.0449	0.0223	0.9561	0.9780	0.3436	0.3173	0.7092	0.7281
0.0504	0.0343	0.9508	0.9663	0.0356	0.0393	0.9651	0.9615
0.0586	0.0337	0.9431	0.9668	0.2735	0.2223	0.7607	0.8007
0.0288	0.0140	0.9716	0.9861	0.9000	0.8800	0.4066	0.4148
0.0527	0.0377	0.9495	0.9638	0.2673	0.2084	0.7814	0.8119

Tabla 22. Estimaciones cajas de ahorros y bancos. Función translog

Frontera de costes			
Ineficiencia		Eficiencia	
Hn	Exp	Hn	Exp
0.1010	0.0595	0.9040	0.9422
0.0998	0.0602	0.9050	0.9416
0.2957	0.2464	0.7440	0.7816
0.1092	0.0691	0.8965	0.9333
0.1273	0.0807	0.8805	0.9225
0.1140	0.0650	0.8922	0.9371
0.1310	0.0832	0.8772	0.9202
0.1317	0.0819	0.8766	0.9214
0.2711	0.2311	0.7626	0.7937
0.2615	0.2047	0.7699	0.8149
0.1953	0.1403	0.8226	0.8691
0.2682	0.2184	0.7647	0.8038
0.1849	0.1290	0.8312	0.8790
0.2670	0.2130	0.7657	0.8082
0.1286	0.0758	0.8793	0.9270
0.1423	0.0865	0.8674	0.9172
0.2696	0.2337	0.7637	0.7916
0.1441	0.0914	0.8658	0.9126
0.1096	0.0662	0.8962	0.9359
0.2622	0.2103	0.7694	0.8104
0.1976	0.1326	0.8207	0.8758
0.1390	0.0869	0.8702	0.9168
0.1053	0.0656	0.9000	0.9365
0.1464	0.0946	0.8638	0.9097
0.1790	0.1099	0.8361	0.8960
0.2100	0.1517	0.8106	0.8593
0.1778	0.1226	0.8371	0.8846
0.1714	0.1186	0.8425	0.8882
0.1718	0.1226	0.8421	0.8846
0.1240	0.0739	0.8834	0.9287
0.1725	0.1161	0.8416	0.8904
0.2061	0.1553	0.8138	0.8562
0.2187	0.1611	0.8036	0.8512
0.1090	0.0696	0.8967	0.9328
0.1343	0.0921	0.8743	0.9120
0.0826	0.0485	0.9207	0.9527
0.1568	0.0902	0.8549	0.9137
0.1809	0.1381	0.8345	0.8710
0.0774	0.0449	0.9255	0.9561
0.2989	0.2501	0.7416	0.7788
0.0986	0.0566	0.9061	0.9450

0.1050	0.0664	0.9003	0.9357
0.2187	0.1689	0.8035	0.8446
0.1464	0.0958	0.8638	0.9087
0.2522	0.1975	0.7771	0.8208
0.2578	0.2070	0.7728	0.8130
0.1005	0.0648	0.9044	0.9373
0.1507	0.1012	0.8601	0.9038
0.0664	0.0476	0.9357	0.9535
0.1810	0.1340	0.8344	0.8746
0.3349	0.3088	0.7154	0.7343
0.1205	0.0878	0.8865	0.9159
0.1023	0.0595	0.9028	0.9423
0.6783	0.8152	0.5075	0.4425
0.0711	0.0525	0.9314	0.9488
0.4038	0.4337	0.6678	0.6481
0.3561	0.3353	0.7004	0.7151
0.0740	0.0447	0.9287	0.9563
0.5097	0.5232	0.6007	0.5926
0.9771	0.8000	0.3764	0.4493
0.0293	0.0206	0.9711	0.9796
0.1004	0.0773	0.9045	0.9256
0.4749	0.5433	0.6220	0.5808
0.1633	0.1186	0.8493	0.8881
0.4212	0.4625	0.6563	0.6297
0.2976	0.3077	0.7426	0.7351
0.1309	0.0854	0.8773	0.9181
0.0911	0.0948	0.9129	0.9095
0.0559	0.0525	0.9457	0.9488
0.0717	0.0542	0.9308	0.9472
0.4448	0.4545	0.6410	0.6348
0.3449	0.5236	0.7083	0.5924
0.1006	0.0858	0.9043	0.9178
0.2114	0.1419	0.8095	0.8677
0.2029	0.1691	0.8243	0.8543

Como se puede concluir a partir de la sección anterior de este capítulo, la forma distribucional más adecuada para el término de ineficiencia depende de la muestra analizada. En el estudio del sistema bancario en 2009, es posible concluir que la distribución más apropiada para la muestra de cajas de ahorros es la half normal, mientras que para la muestra conjunta de cajas de ahorros y bancos es la exponencial.

Si se comparan las estimaciones obtenidas para las diferentes muestras, se observa que las eficiencias medias de los bancos son siempre menores que las de las cajas de ahorros, especialmente en el caso de las eficiencias en costes, donde se presentan las mayores ineficiencias. Concretamente, según la tabla 19, una caja de ahorros representativa de las cajas de ahorros españolas en 2009 presentó un coste superior en un 5.45%, aproximadamente, al coste mínimo potencial de una caja de ahorros eficiente en las mismas condiciones. Sin embargo, un banco representativo de los bancos españoles en 2009 tuvo un coste aproximadamente entre un 16.38% (según el supuesto exponencial) y un 20.13% (según el supuesto half normal) superior al coste mínimo potencial alcanzable por un banco eficiente en las mismas condiciones (tabla 20). En el caso de una muestra conjunta de cajas y bancos, los resultados más adecuados son los obtenidos a partir de la estimación de la frontera de tipo translog (tabla 22) y, por tanto, una entidad representativa de las entidades bancarias españolas en 2009 presentó, aproximadamente, un coste un 16,91% superior al coste mínimo potencial alcanzable por una entidad eficiente en las mismas condiciones.

Los resultados sobre eficiencia técnica son consistentes con los obtenidos previamente para las cajas de ahorros españolas por Álvarez-Cuesta (1998) para el período 1985-1999, Escobar y Guzmán (2010) durante 2003-2007 y Gómez-Gallego (2012) para 2000-2009, que obtienen una ineficiencia promedio inferior a 0.04; y para el sector bancario español, donde Guzmán y Reverte (2008) presentan una eficiencia técnica promedio de 0.96.

En cuanto a la eficiencia en costes, los resultados obtenidos para las muestras de bancos y del sistema bancario son consistentes con los de estudios previos sobre eficiencia en el sistema bancario español. La eficiencia promedio estimada por Maudos y Pastor (2003) fue de un 0.91 para el período 1985-1996, Maudos y Fernández de Guevara (2007) presentaron un resultado medio de eficiencia de 0.88 en el período 1993-2000 y, más recientemente, la estimación de la eficiencia promedio de Casu y Girardone (2009) fue de 0.75 para el período 2000-2005.

Si se estiman las unidades en una única frontera, pueden observarse cambios en los resultados debidos a la imposición de una tecnología común para todas las unidades. Para comprobar este efecto, se estima una frontera conjunta de bancos y cajas de ahorros. En el caso que se estudia, la eficiencia media obtenida para la muestra de cajas de ahorros bajo el supuesto más apropiado, half normal, es de 0.963 para la eficiencia técnica y de 0.947 para la eficiencia en costes. Por otro lado, pueden observarse los resultados de eficiencia para las cajas de ahorros en las primeras 44 observaciones de la muestra conjunta de las tablas 21 y 22. La eficiencia técnica y en costes media de las cajas de ahorros según este análisis es de 0.967 y 0.888, respectivamente, lo que supone un descenso del 6.23% de la eficiencia en costes. En el caso de los bancos, bajo el supuesto exponencial, los resultados de eficiencia estimados a partir de la muestra conjunta no muestran cambios en el caso de la eficiencia técnica, 0.958 frente al 0.950 de la muestra de bancos, y la disminución en el caso de la eficiencia en costes es de un 5.84%, resultando un 0.806 frente al 0.856 de la muestra de bancos. Por tanto, se observa una disminución de la eficiencia en costes promedio en todas las muestras cuando se utiliza una frontera común.

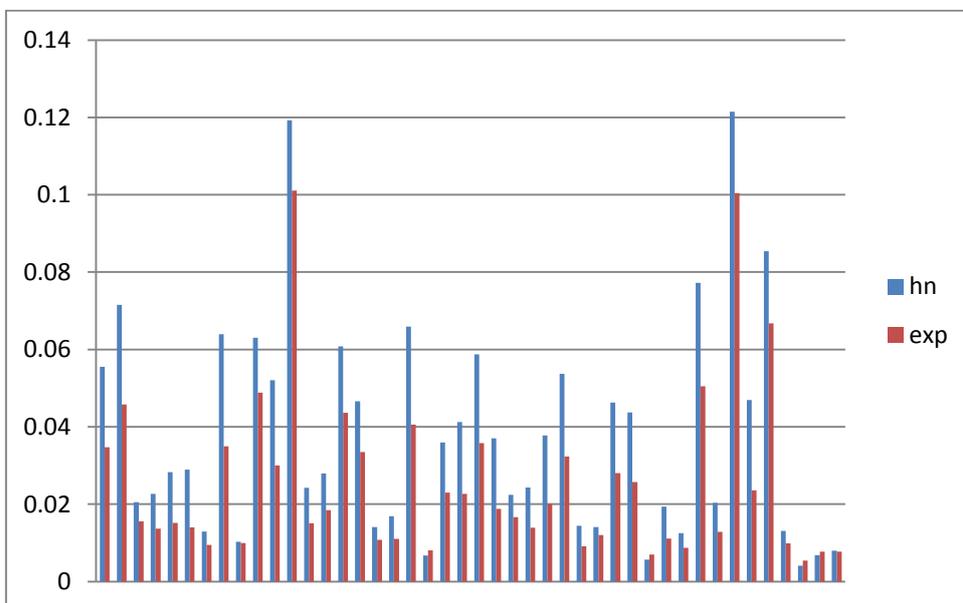
A partir de la información media de todas las muestras estudiadas, se observa que los modelos de frontera estocástica que suponen una distribución half normal para el término de ineficiencia proporcionan una ineficiencia (o eficiencia) media estimada superior (o inferior) que los que suponen una distribución exponencial.

Por lo tanto, el establecimiento de un supuesto half normal en el término de ineficiencia de la frontera estocástica produce sobreestimaciones (o infraestimaciones) de la ineficiencia (o eficiencia) media del sistema bancario español con respecto a las estimaciones realizadas bajo el supuesto exponencial. A continuación, se presentan resultados concretos acerca de la significatividad de la influencia del supuesto distribucional del término de ineficiencia sobre las estimaciones de ineficiencia técnica y en costes.

5.1. Estimación de la ineficiencia técnica

Los resultados de la ineficiencia técnica estimada para cada caja de ahorros bajo los supuestos distribucionales half normal y exponencial, se muestran en la figura 60.

Figura 60. Resultados ineficiencia técnica estimada. Cajas de ahorros

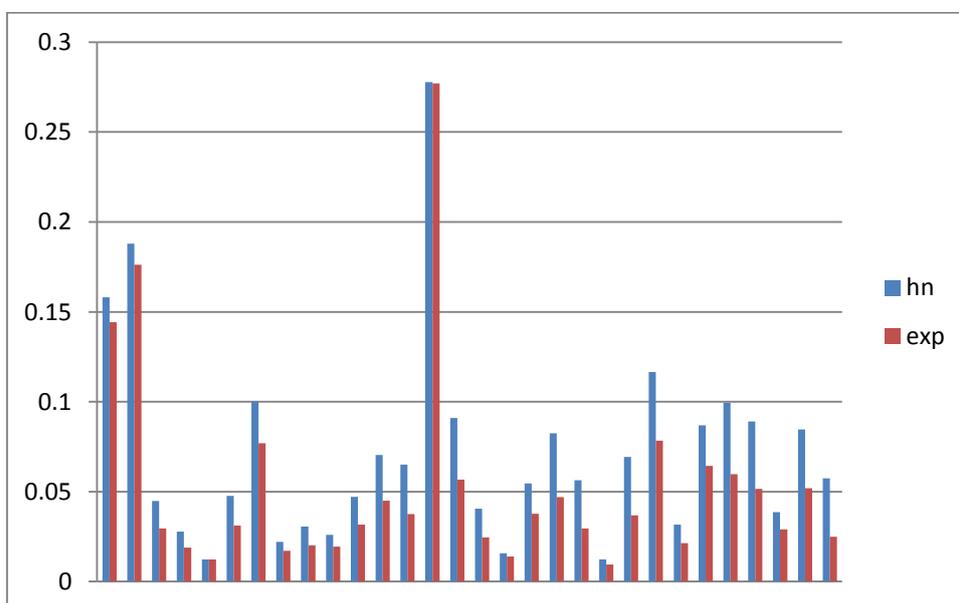


En la mayoría de los casos la ineficiencia estimada bajo el supuesto half normal (media 0.038, error estándar 0.004 e intervalo de confianza para la media al 95% [0.029;0.046]) supera a la estimada con el supuesto exponencial (media 0.026, error estándar 0.003 e intervalo de confianza para la media al 95% [0.019;0.032]).

Si se realiza un test de medias para datos relacionados, se rechaza la hipótesis nula de diferencia de medias nula con un p-valor de 0.000 y se obtiene una diferencia media del 1.22% con un intervalo de confianza para $\alpha = 0.05$ de [-0.015,-0.010]. En consecuencia, se rechaza la hipótesis nula H-7, es decir, en la muestra de cajas de ahorros, el supuesto establecido sobre la distribución del término de efectos de ineficiencia afecta a los resultados de ineficiencia técnica estimados.

La figura 61 representa los resultados de la ineficiencia técnica estimada para cada banco bajo los supuestos distribucionales half normal y exponencial.

Figura 61. Resultados ineficiencia técnica estimada. Bancos



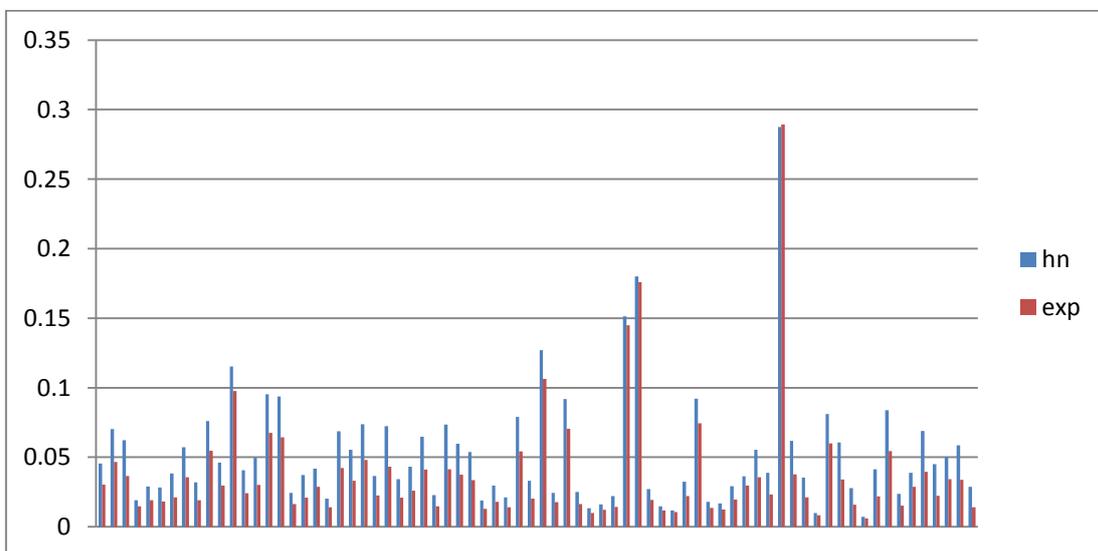
Todas las ineficiencias estimadas bajo el supuesto half normal (media 0.071, error estándar 0.010 e intervalo de confianza para la media al 95% [0.051;0.092])

superan a las estimadas bajo el supuesto exponencial (media 0.052, error estándar 0.010 e intervalo de confianza para la media al 95% [0.032;0.073]), salvo en un único caso en el que coinciden.

El test de medias para datos relacionados concluye el rechazo de la hipótesis nula de diferencia de medias nula con un p-valor de 0.000. El resultado muestra una diferencia media del 1.90% con un intervalo de confianza para $\alpha = 0.05$ de [0.015,0.024]. Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula H_0 , es decir, en los bancos el supuesto establecido sobre la distribución del término de efectos de ineficiencia afecta a los resultados de ineficiencia técnica estimados.

Los resultados de la ineficiencia técnica estimada para cada banco y caja de ahorros bajo los supuestos distribucionales half normal y exponencial se muestran en la figura 62.

Figura 62. Resultados ineficiencia técnica estimada. Cajas de ahorros y bancos



El supuesto half normal proporciona resultados de ineficiencia técnica estimada de bancos y cajas de ahorros (media 0.053, error estándar 0.005 e intervalo de confianza para la media al 95% [0.043;0.063]) que sobreestiman los resultados

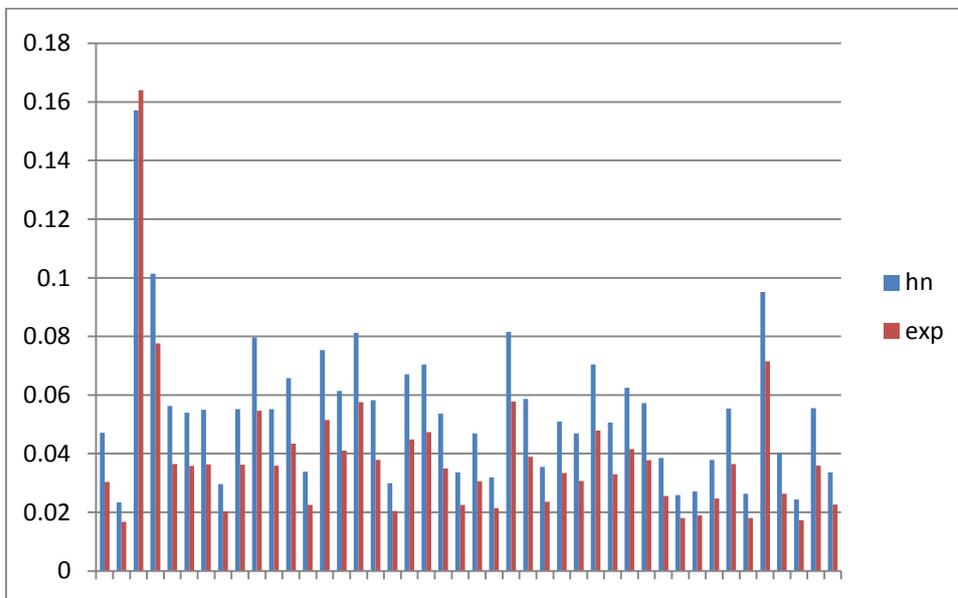
obtenidos bajo el supuesto exponencial (media 0.038, error estándar 0.005 e intervalo de confianza para la media al 95% [0.028;0.047]).

El test de medias para datos relacionados concluye el rechazo de la hipótesis nula de diferencia de medias nula con un p-valor de 0.000 y resulta una diferencia media del 1.49% con un intervalo de confianza para $\alpha = 0.05$ de [-0.017,-0.013]. En consecuencia, se rechaza la hipótesis nula H-9, es decir, en el sistema bancario español el supuesto establecido sobre la distribución del término de efectos de ineficiencia afecta a los resultados de ineficiencia técnica estimados.

5.2. Estimación de la ineficiencia en costes

La figura 63 representa los resultados de la ineficiencia en costes estimada para cada caja de ahorros bajo los supuestos distribucionales half normal y exponencial.

Figura 63. Resultados ineficiencia en costes estimada. Cajas de ahorros

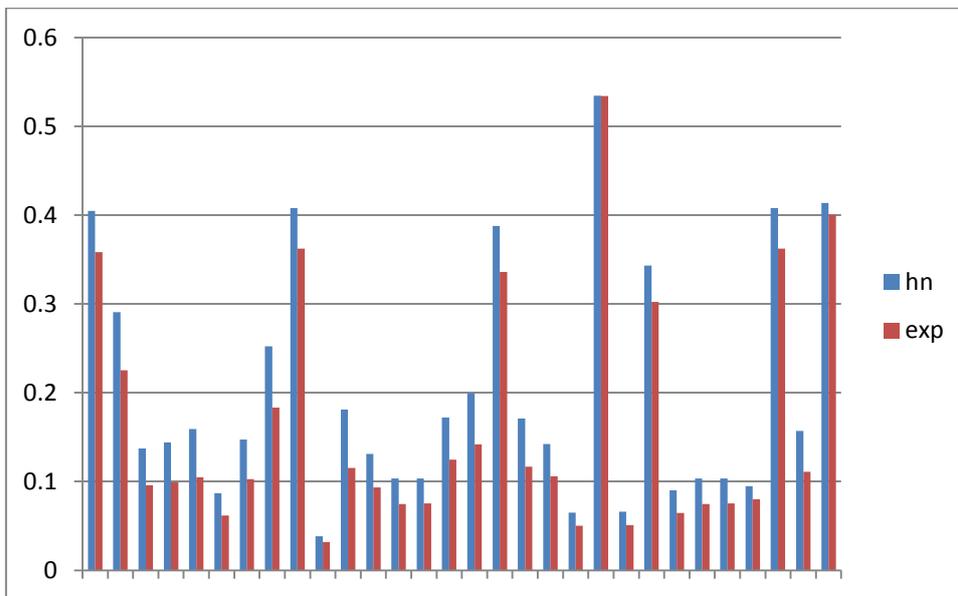


El supuesto half normal proporciona resultados de la ineficiencia en costes estimada de cajas de ahorros (media 0.054, error estándar 0.004 e intervalo de confianza para la media al 95% [0.047;0.062]) que en la gran mayoría de los casos superan los resultados obtenidos bajo el supuesto exponencial (media 0.038, error estándar 0.004 e intervalo de confianza para la media al 95% [0.031;0.045]).

La conclusión de la aplicación del test de medias para datos relacionados lleva a rechazar la hipótesis nula de diferencia de medias nula con un p-valor de 0.000. La diferencia media resulta del 1.63% con un intervalo de confianza para $\alpha = 0.05$ de [-0.018,-0.014]. Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula H-10, es decir, en las cajas de ahorros el supuesto establecido sobre la distribución del término de efectos de ineficiencia afecta a las ineficiencias en costes estimadas.

Los resultados de la ineficiencia en costes estimada para cada banco bajo los supuestos distribucionales half normal y exponencial se representan en la figura 64.

Figura 64. Resultados ineficiencia en costes estimada. Bancos

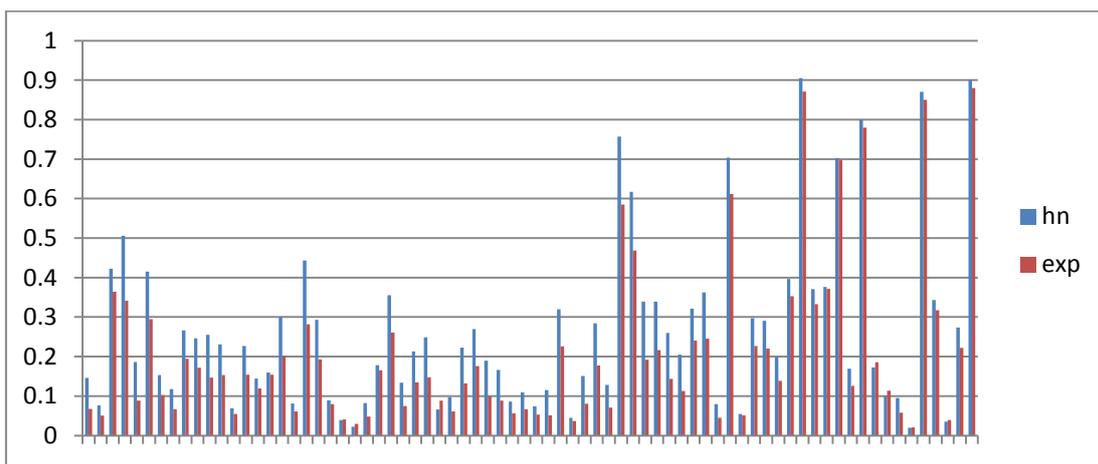


El supuesto half normal proporciona unos resultados de ineficiencia en costes estimada de bancos (media 0.201, error estándar 0.024 e intervalo de confianza para la media al 95% [0.153;0.250]) que sobreestiman los alcanzados bajo el supuesto exponencial (media 0.164, error estándar 0.024 e intervalo de confianza para la media al 95% [0.116;0.212]) en todos los casos, salvo en uno en el que coinciden.

El test de medias para datos relacionados lleva a la conclusión de rechazo de la hipótesis nula de diferencia de medias nula con un p-valor de 0.000. La diferencia media resulta del 3.75% con un intervalo de confianza para $\alpha = 0.05$ de [-0.044,-0.031]. En consecuencia, se rechaza la hipótesis nula H-11, es decir, en los bancos el supuesto establecido sobre la distribución del término de efectos de ineficiencia afecta a los resultados de ineficiencia en costes estimados.

La figura 65 muestra los resultados de la ineficiencia en costes estimada para cada banco y caja de ahorros a partir de una función de costes de tipo Cobb-Douglas bajo los supuestos distribucionales half normal y exponencial.

Figura 65. Resultados ineficiencia en costes estimada. Cajas de ahorros y bancos



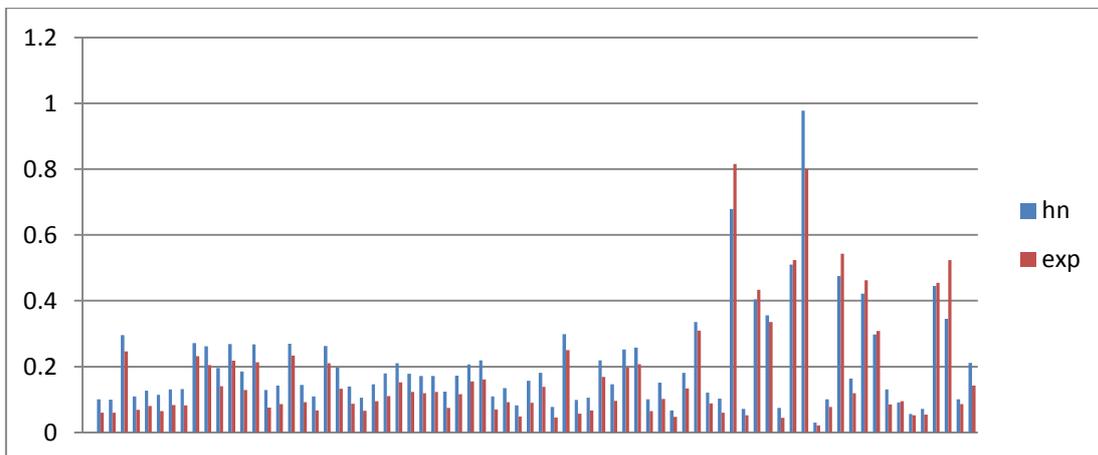
Los resultados de ineficiencia en costes estimada para la muestra de bancos y cajas de ahorros bajo el supuesto de ineficiencia half normal (media 0.267, error

estándar 0.025 e intervalo de confianza para la media al 95% [0.217;0.317]) son superiores a los alcanzados bajo el supuesto exponencial (media 0.208, error estándar 0.024 e intervalo de confianza para la media al 95% [0.161;0.256]) en la mayoría de los casos.

El test de medias para datos relacionados obtiene la conclusión de rechazo de la hipótesis nula de diferencia de medias nula con un p-valor de 0.000, resultando una diferencia media del 5.87% con un intervalo de confianza para $\alpha = 0.05$ de [-0.069,-0.048]. Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula H-12, es decir, en el sistema bancario español el supuesto establecido sobre la distribución del término de efectos de ineficiencia afecta a las ineficiencias en costes estimadas.

Los resultados de la ineficiencia estimada mediante una función de costes translog para cada banco y caja de ahorros bajo los supuestos distribucionales half normal y exponencial se representan en la figura 66.

Figura 66. Resultados ineficiencia en costes estimada. Cajas de ahorros y bancos (translog)



El supuesto half normal proporciona unos resultados de ineficiencia estimada en costes de bancos y cajas de ahorros (media 0.203, error estándar 0.017 e intervalo de confianza para la media al 95% [0.168;0.238]) que sobreestiman los alcanzados

bajo el supuesto exponencial (media 0.169, error estándar 0.019 e intervalo de confianza para la media al 95% [0.131;0.207]) en la mayoría de los casos.

La conclusión del test de medias para datos relacionados implica el rechazo de la hipótesis nula de diferencia de medias nula con un p-valor de 0.000. La diferencia media es del 2.95% con un intervalo de confianza para $\alpha = 0.05$ de [-0.040,-0.019]. En consecuencia, se rechaza la hipótesis nula H-12, es decir, en el sistema bancario español el supuesto establecido sobre la distribución del término de efectos de ineficiencia afecta a los resultados de ineficiencia en costes estimados.

CONCLUSIONES Y LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

La investigación se centra en el problema destacado por Berger y Humphrey (1997) acerca de la inexistencia de una justificación a priori sobre el supuesto distribucional impuesto al término de ineficiencia en la Aproximación de Frontera Estocástica. De hecho, existen aportaciones que proponen diferentes formas distribucionales, siempre sin justificar su elección: Aigner *et al.* (1977) establecieron el supuesto de una distribución half normal o exponencial para el término de ineficiencia, mientras que Stevenson (1980) y Greene (1990) propusieron la distribución normal truncada y gamma, respectivamente. La necesidad de desarrollar una metodología que permita seleccionar la distribución más apropiada para cada caso de estudio es clara, especialmente si las distintas distribuciones influyen significativamente sobre la estimación del modelo frontera.

En este contexto, esta investigación amplía la metodología existente sobre los supuestos distribucionales half normal y normal truncada y obtiene las distribuciones teóricas correspondientes al supuesto exponencial en modelos de frontera estocástica de producción y costes con el fin de contrastar la validez de los mismos. De este modo, se presenta el planteamiento teórico necesario para analizar qué distribución es la más apropiada para el término de efectos de ineficiencia de un modelo frontera estocástica de producción y/o costes dada una muestra concreta.

El problema de selección de la distribución del término de ineficiencia se analiza en el caso del sistema bancario español en 2009. Se trata de un sector en el que la obtención de una estimación precisa de la ineficiencia tiene especial relevancia en la actualidad, dado que es un importante indicador para la toma de decisiones estratégicas de índole empresarial, institucional e incluso político.

Los resultados muestran que el supuesto distribucional influye significativamente en los resultados de ineficiencia estimada obtenidos, ya que bajo el supuesto half normal se obtienen estimaciones de ineficiencia técnica y en costes superiores a las alcanzadas bajo el supuesto exponencial.

Por último, la aplicación de la metodología sobre selección del supuesto distribucional más adecuado para el término de ineficiencia propuesta en este estudio permite concluir que la distribución más apropiada para realizar el análisis de eficiencia de la muestra de cajas de ahorros es la half normal mientras que, en el caso del sistema bancario español, la distribución más apropiada resulta ser la exponencial.

A nivel más desagregado, las conclusiones son las siguientes:

En relación al Objetivo G-1:

C-1: Bajo el supuesto de distribución half normal para el término de ineficiencia, se ha obtenido un estimador de ineficiencia en costes y la expresión de su distribución.

C-2: Bajo el supuesto de distribución normal truncada para el término de ineficiencia, se ha obtenido un estimador de ineficiencia en costes y la expresión de su distribución.

C-3: Bajo el supuesto de distribución exponencial para el término de ineficiencia, se ha obtenido un estimador de ineficiencia en costes, la expresión de su distribución y la de la distribución del estimador de ineficiencia técnica.

C-4: Bajo el supuesto de distribución gamma para el término de ineficiencia, se ha obtenido un estimador de ineficiencia en costes.

En relación al Objetivo G-2:

C-5: En el sistema bancario español, bancos y cajas de ahorros en 2009, el supuesto distribucional establecido sobre el término de ineficiencia no tiene efecto significativo sobre la frontera de producción estimada.

C-6: En el sistema bancario español, bancos y cajas de ahorros en 2009, el supuesto distribucional establecido sobre el término de ineficiencia no tiene efecto significativo sobre la frontera de costes estimada.

C-7: En el sistema bancario español, bancos y cajas de ahorros en 2009, el supuesto distribucional establecido sobre el término de ineficiencia tiene efecto significativo sobre la ineficiencia técnica estimada.

C-8: En el sistema bancario español, bancos y cajas de ahorros en 2009, el supuesto distribucional establecido sobre el término de ineficiencia tiene efecto significativo sobre la ineficiencia en costes estimada.

En relación al Objetivo G-3:

C-9: En las cajas de ahorros en 2009, el supuesto de distribución half normal del término de ineficiencia es adecuado para estimar la eficiencia técnica.

C-10: En las cajas de ahorros en 2009, el supuesto de distribución half normal del término de ineficiencia es adecuado para estimar la eficiencia en costes.

C-11: En los bancos en 2009, los supuestos de distribucionales half normal y exponencial del término de ineficiencia no son adecuados para estimar la eficiencia técnica.

C-12: En los bancos en 2009, los supuestos de distribucionales half normal y exponencial del término de ineficiencia no son adecuados para estimar la eficiencia en costes.

C-13: En el sistema bancario español en 2009, el supuesto de distribución exponencial del término de ineficiencia es aceptable para estimar la eficiencia técnica.

C-14: En el sistema bancario español en 2009, el supuesto de distribución exponencial del término de ineficiencia es aceptable para estimar la eficiencia en costes.

LÍNEAS DE FUTURAS INVESTIGACIONES

La investigación que se plantea constituye una extensión de este trabajo en las siguientes direcciones:

- Investigar la adecuación de nuevas distribuciones al término de ineficiencia.
- Extensión del estudio considerando otras formas funcionales de la frontera de producción o de costes.
- Evaluación del efecto que los diferentes supuestos distribucionales del término de ineficiencia tienen sobre las estimaciones de eficiencia en ingresos y en beneficios.
- Estudiar la robustez de los rankings de eficiencia ante distintos supuestos distribucionales.
- Aplicación a otras áreas socio-económicas de interés: instituciones universitarias.

**REFERENCIAS
BIBLIOGRÁFICAS**

- [1] Afriat, S.N. (1972). Efficiency estimates of production functions. *International Economic Review*, 13, 568-598.
- [2] Aigner D.L., Chu S.F. (1968). On estimating the industry production function. *American Economic Review*, 58, 826-839.
- [3] Aigner D.L., Lovell C.A., Schmidt P. (1977). Formulation and estimation of stochastic frontier production models. *Journal of Econometrics*, 6, 21-37.
- [4] Al Shamsi F.S., Aly H., El-Bassiouni M. (2009). Measuring and explaining the efficiencies of the United Arab Emirates banking system. *Applied Economics*, 41(27), 3505-3519.
- [5] Altunbas Y., Chakravarty S.P. (2001). Frontier cost functions and bank efficiency. *Economics Letters*, 72, 233-240.
- [6] Altunbas Y., Gardener E.P.M., Molyneux P., Moore B. (2001). Efficiency in European banking. *European Economic Review*, 45, 1931-1955.
- [7] Álvarez, A. (2001). La Medición de la Eficiencia y la Productividad. Ediciones Pirámide. Madrid.
- [8] Álvarez A., Arias C., Orea L. (2003). Introducción al Análisis Empírico de la Producción. Mimeo. Universidad de Oviedo.
- [9] Álvarez-Cuesta, R. (1998). Eficiencia técnica de las cajas de ahorros. *Revista de Economía Aplicada*, 16(6), 179-191.
- [10] Ariff M., Can L. (2008). Cost and profit efficiency of Chinese banks: a non-parametric analysis. *China Economic Review*, 19, 260-273.
- [11] Arrow K., Chenery H., Minhas B., Solow R. (1961). Capital-labor substitution and economic efficiency. *Review of Economics and Statistics*, 43, 225-250.

- [12] Ataullah A., Cockerill T., Le H. (2004). Financial liberalization and bank efficiency: a comparative analysis of India and Pakistan. *Applied Economics*, 36(17), 1-10.
- [13] Battese G.E., Coelli T.J. (1988). Prediction of firm-level technical efficiencies with a generalized frontier production function and panel data. *Journal of Econometrics*, 38, 387-399.
- [14] Battese G.E., Coelli T.J. (1992). Frontier production functions, technical efficiency and panel data: with application to paddy farmers in India. *Journal of Productivity Analysis*, 3, 153-169.
- [15] Bauer P.W., Berger A.N., Ferrier G., Humphrey D.B. (1998). Consistency conditions for regulatory analysis of financial institutions: a comparison of frontier efficiency methods. *Journal of Economics and Business*, 50, 85-114.
- [16] Bauer P.W., Berger A.N., Humphrey D.B. (1993). Efficiency and productivity growth in U.S. banking. In: Fried H.O., Lovell C.A.K., Schmidt S.S. (Eds). *The Measurement of Productive Efficiency: Techniques and Applications*. Oxford University Press, 386-413.
- [17] Bauer P.W., Hancock D. (1993). The efficiency of the Federal Reserve in providing check processing services. *Journal of Banking and Finance*, 17(2-3), 287-311.
- [18] Beckers D., Hammond C. (1987). A tractable likelihood function for the normal-gamma stochastic frontier model. *Economics Letters*, 24, 33-38.
- [19] Behr A., Tente S. (2008). Stochastic frontier analysis by means of maximum likelihood and the method of moments. *Deutsche Bundesbank, W.P. Series 2: Banking and Financial Studies*, 19.

- [20] Bera A.K., Mallick N.C. (2002). Information matrix tests for the composed error frontier model. In: Balakrishnan, N. (Eds). *Advances on Methodological and Applied Aspects of Probability and Statistics*, chapter 32.
- [21] Berger, A.N. (1993). 'Distribution-Free' estimates of efficiency in the U.S. banking industry and tests of the standard distributional assumptions. *Journal of Productivity Analysis*, 4, 261-292.
- [22] Berger A.N., Humphrey D.B. (1991). The dominance of inefficiencies over scale and product mix economies in banking. *Journal of Monetary Economics*, 28, 117-148.
- [23] Berger A.N., Humphrey D.B. (1997). Efficiency of financial institutions: international survey and directions for future research. *European Journal of Operational Research*, 98, 175-212.
- [24] Berger A.N., Mester L.J. (1997). Inside the black box: what explains differences in the efficiencies of financial institutions? *Journal of Banking and Finance*, 21, 895-947.
- [25] Berndt E., Christensen L. (1973). The translog function and the substitution of equipment, structures and labor in U.S. manufacturing 1929-1968. *Journal of Econometrics*, 1, 81-114.
- [26] Bhandari, A.K. (2011). On the distribution of estimated technical efficiency in stochastic frontier models: revisited. *International Journal of Business and Economics*, 10, 69-80.
- [27] Bonin J., Hasan I., Wachtel P. (2005). Bank performance, efficiency and ownership in transition countries. *Journal of Banking and Finance*, 29, 31-53.

- [28] Bos J.W.B., Schmiedel H. (2007). Is there a single frontier in a single European banking market? *Journal of Banking and Finance*, 31(7), 2081-2102.
- [29] Burgess, D.F. (1974). A cost minimization approach to import demand equations. *The Review of Economics and Statistics*, 56, 225-234.
- [30] Carbó S., Gardener E.P.M., Williams J. (2002). Efficiency in banking empirical evidence from the savings banks sector. *The Manchester School*, 70(2), 204-228.
- [31] Carbó S., Humphrey D., López del Paso R. (2004). Eficiencias externa, técnica, interna y de gestión de las entidades financieras. *Papeles de Economía Española*, 101, 212-220.
- [32] Casu B., Girardone C. (2009). Testing the relationship between competition and efficiency in banking: a panel data analysis. *Economic Letters*, 105, 134-137.
- [33] Casu B., Girardone C., Molyneux P. (2004). Productivity change in European banking: a comparison of parametric and non-parametric approaches. *Journal of Banking and Finance*, 28, 2521-2540.
- [34] Casu B., Molyneux P. (2003). A comparative study of efficiency in European banking. *Applied Economics*, 35(17), 1865-1876.
- [35] Caves W., Christensen L.R., Tretheway M.W. (1980). Flexible cost functions for multiproduct firms. *The Review of Economics and Statistics*, 62, 477-481.
- [36] Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E. (1978). Measuring the efficiency on decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2, 429-444.

- [37] Chen X., Skully M., Brown K. (2005). Banking efficiency in China: application of DEA to pre- and post-deregulation eras: 1993-2000. *China Economic Review*, 16, 229-245.
- [38] Chen Y.T., Wang H.J. (2009). Centered-residuals-based moment estimator and test for stochastic frontier models. *W.P. Academia Sinica*.
- [39] Christensen L., Jorgenson D., Lau L. (1973). Transcendental logarithmic production frontiers. *The Review of Economics and Statistics*, 55(1), 28-43.
- [40] Clark, J.A. (1988). Economies of scale and scope at depositary financial institutions: a review of literature. *Economic Review (Federal Reserve Bank of Kansas City)*, 73, 16-33.
- [41] Cobb C., Douglas P. (1928). A theory of production. *The American Economic Review*, 18, 139-72.
- [42] Coelli, T.J. (1995). Estimators and hypothesis tests for a stochastic frontier function: a Monte Carlo analysis. *Journal of Productivity Analysis*, 6(4), 247-268.
- [43] Coelli T.J., Prasada Rao D.S., Battese G.E. (1998). An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis. Kluwer Academic Publishers. Boston.
- [44] Debreu, G. (1951). The coefficient of resource utilization. *Econometrica*, 19(3), 273-292.
- [45] Delis M., Koutsomanoli-Fillipaki A., Staikouras C., Katerina G. (2009). Evaluating cost and profit efficiency: a comparison of parametric and nonparametric methodologies. *Applied Financial Economics*, 19(3), 191-202.
- [46] Diewert, W.E. (1971). An application of the Shephard duality theorem: a generalized Leontief production function. *Journal of Political Economy*, 79, 481-507.

- [47] Diewert, W.E. (1974). Intertemporal consumer theory and the demand for durables. *Econometrica*, 42(3), 497-516.
- [48] Escobar B., Guzmán I. (2010). Eficiencia y cambio productivo en las cajas de ahorros españolas. *CIRIEC-España. Revista de Economía Pública, Social y Cooperativa*, 68, 183-202.
- [49] Färe, R. (1975). Efficiency and the production function. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 35(3-4), 317-324.
- [50] Färe R., Grosskopf S., Lovell C.A.K. (1994). *The Measurement of Efficiency of Production*. Cambridge University Press.
- [51] Färe R., Grosskopf S., Weber W.L. (2004). The effect of risk-based capital requirements on profit efficiency in banking. *Applied Economics*, 36(15), 1731-1743.
- [52] Farrel, M.J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society A*, 120, 253-281.
- [53] Figueira C., Nellis J., Parker D. (2009). The effects of ownership on bank efficiency in Latin America. *Applied Economics*, 41(18), 2353-2368(16).
- [54] Fitzpatrick T., McQuinn K. (2007). House prices and mortgage credit: empirical evidence for Ireland. *Manchester School*, 75(1), 82-103.
- [55] Gallant, A.R. (1981). On the bias in flexible functional forms and an essentially unbiased form: the Fourier flexible form. *Journal of Econometrics*, 15, 211-245.
- [56] Gallant, A.R. (1982). Unbiased determination of production technologies. *Journal of Econometrics*, 20, 285-323.

- [57] Girardone C., Molyneux P., Gardener E.P.M. (2004). Analysing the determinants of bank efficiency: the case of Italian banks. *Applied Economics*, 36(3), 215-227(13).
- [58] Gómez-Gallego, J.C. (2012). Eficiencia y diversificación: sector de cajas de ahorros españolas 2000-2009. *Tesis doctoral Universidad de Murcia*.
- [59] Gómez-Gallego J.C., Gómez-García J., Pérez-Cárceles M.C. (2012). Appropriate distribution of cost inefficiency estimates as predictor of financial instability. *Estudios de Economía Aplicada*, 30(3).
- [60] Gong B.H., Sickles R.C. (1989). Finite sample evidence on the performance of stochastic frontier models using panel data. *Journal of Productivity Analysis*, 1(3), 229-261.
- [61] González, J.L. (1997). Economías de escala, eficiencia frontera y cambio técnico a partir de funciones de producción: una aplicación a las empresas del Mercado Único Europeo. *Tesis doctoral Universidad Autónoma de Barcelona*.
- [62] Greene, W.H. (1980a). Maximum likelihood estimation of econometric frontier functions. *Journal of Econometrics*, 13, 27-56.
- [63] Greene, W.H. (1980b). On the estimation of a flexible frontier production model. *Journal of Econometrics*, 3, 101-115.
- [64] Greene, W.H. (1990). A gamma-distributed stochastic frontier model. *Journal of Econometrics*, 46, 141-164.
- [65] Greene, W.H. (1993). The econometric approach to efficiency analysis. In: Fried H.O., Lovell C.A.K., Schmidt S.S. (Eds). *The Measurement of Productive Efficiency: Techniques and Applications*. Oxford University Press.

- [66] Guzmán I., Reverte C. (2008). Productivity and efficiency change and shareholder value: evidence from the Spanish banking sector. *Applied Economics*, 40, 2037-2044.
- [67] Hall, R.E. (1973). The specification of technology with several kinds of output. *The Journal of Political Economy*, 81(4), 878-892.
- [68] Harris, C.M. (1992). Technical efficiency in Australia. In: R.E. Caves (Eds). *Industrial Efficiency in Six Nations*. Cambridge M.A. MIT Press.
- [69] Hicks, J. (1932). *The Theory of Wages*. Macmillan. London.
- [70] Horrace W.C., Schmidt P. (1996). Confidence statements for efficiency estimates from stochastic frontier models. *Journal of Productivity Analysis*, 7, 257-282.
- [71] Isik I., Hassan M.K. (2002). Technical, scale and allocative efficiencies of Turkish banking industry. *Journal of Banking and Finance*, 26, 719-766.
- [72] Jondrow J., Lovell C.A.K., Materov Y.S., Schmidt, P. (1982). On the estimation of technical inefficiency in the stochastic frontier production function model. *Journal of Econometrics*, 19, 233-238.
- [73] Kao C., Liu S. (2009). Stochastic data envelopment analysis in measuring the efficiency of Taiwan commercial banks. *European Journal of Operational Research*, 196, 312-322.
- [74] Koopmans, T.C. (1951). An analysis of production as an efficient combination of activities. In: Koopmans, T.C. (Eds.). *Activity Analysis of Production and Allocation*. Cowles Commission for Research in Economics. New York. Wiley, 13.
- [75] Kopp R.J., Mullahy J. (1990). Moment-based estimation and testing of stochastic frontier models. *Journal of Econometrics*, 46, 165-183.

- [76] Kraft E., Hofler R., Payne J. (2006). Privatization, foreign bank entry and bank efficiency in Croatia: a Fourier-flexible function stochastic cost frontier analysis. *Applied Economics*, 38 (17), 2075-2088(14).
- [77] Kumbhakar, S.C. (1990). Production frontiers, panel data and time-varying technical inefficiency. *Journal of Econometrics*, 46, 201-212.
- [78] Kumbhakar S.C., Lovell C.A.K. (2000). *Stochastic Frontier Analysis*. Cambridge University Press.
- [79] Kumbhakar S.C., Lozano-Vivas A., Knox C.A., Hasan I. (2001). The effects of deregulation on the performance of financial institutions: the case of Spanish savings banks. *Journal of Money, Credit and Banking*, 33(1), 101-120.
- [80] Lau, L.J. (1974). Comments on applications of duality theory. In: Intriligator M.D., Kendrick D.A. (Eds.). *Frontiers of Quantitative Economics*. Amsterdam. North-Holland, 2.
- [81] Lee, L.F. (1983). A test for distributional assumptions for the stochastic frontier functions. *Journal of Econometrics*, 22, 245-267.
- [82] Lin Y., Hsu G.J.Y., Hsiao C. (2007). Measuring efficiency of domestic banks in Taiwan: application of data envelopment analysis and Malmquist Index. *Applied Economics Letters*, 14(11), 821-827(7).
- [83] Lozano-Vivas A., Pasiouras F. (2010). The impact of non-traditional activities on the estimation of bank efficiency: international evidence. *Journal of Banking and Finance*, 34(7), 1436-1449.
- [84] Maudos J., Fernández de Guevara J. (2007). The cost of market power in banking: social welfare loss vs. cost efficiency. *Journal of Banking and Finance*, 31(7), 2103-2125.

- [85] Maudos J., Pastor J.M. (2000). La eficiencia del sistema bancario español en el contexto de la Unión Europea. *Papeles de Economía Española*, 84/85, 155-168.
- [86] Maudos J., Pastor J.M. (2003). Cost and profit efficiency in the Spanish banking sector (1985-96): a non-parametric approach. *Applied Financial Economics*, 13(1), 1-12.
- [87] Maudos J., Pastor J.M., Pérez F., Quesada J. (2002). Cost and profit efficiency in European banks. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 12, 33-58.
- [88] McAllister P.H., McManus D. (1993). Resolving the scale efficiency puzzle in banking. *Journal of Banking and Finance*, 17, 389-406.
- [89] Meeusen W., van den Broeck J. (1977). Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error. *International Economic Review*, 18(2), 435-444.
- [90] Mester, L.J. (1996). A study of bank efficiency taking into account risk-preferences. *Journal of Banking and Finance*, 20, 1025-1045.
- [91] Mitchell K., Onvural N.M. (1996). Economies of scale and scope at large commercial banks: evidence from the Fourier flexible functional form. *Journal of Money, Credit and Banking*, 28(2), 178-199.
- [92] Newey, W.K. (1985). Maximum likelihood specification testing and conditional moment tests. *Econometrica*, 53, 1047-1070.
- [93] Olson J.A., Schmidt P., Waldman D.M. (1980). A Monte Carlo study of estimators of stochastic frontier production functions. *Journal of Econometrics*, 13, 67-82.

- [94] Pasiouras, F. (2008). Estimating the technical and scale efficiency of Greek commercial banks: the impact of credit risk, off-balance sheet activities and international operations. *Research in International Business and Finance*, 22, 301-318.
- [95] Pasiouras F., Liadaki A., Zopounidis C. (2008). Bank efficiency and share performance: evidence from Greece. *Applied Financial Economics*, 18(14), 1121-1130(10).
- [96] Pérez-Cárceles M.C., Gómez-Gallego J.C., Gómez-García J. (2012). Total and financial cost efficiency in Spanish savings banks. In: Philip Molyneux (Eds). *Modern Bank Behaviour*. Palgrave Macmillan Studies in Banking and Financial Institutions.
- [97] Pitt M.M., Lee L.F. (1981). The measurement and sources of technical inefficiency in the Indonesian weaving industry. *Journal of Development Economics*, 9(1), 43-64.
- [98] Portela M.C.S., Thanassoulis E. (2007). Comparative efficiency analysis of Portuguese bank branches. *European Journal of Operational Research*, 177, 1275-1288.
- [99] Richmond, J. (1974). Estimating the efficiency of production. *International Economic Review*, 15, 515-521.
- [100] Rohatgi, V.K. (1984). *Statistical Inference*. Wiley, New York.
- [101] Schmidt, P. (1976). On the statistical estimation of parametric frontier production function. *The Review of Economics and Statistics*, 58, 238-239.
- [102] Schmidt P., Lin T.F. (1984). Simple tests for alternative specifications in stochastic frontier models. *Journal of Econometrics*, 24, 349-361.
- [103] Schmidt P., Sickles R.C. (1984). Production frontiers and panel data. *Journal of Business and Economic Statistics*, 2(4), 367-374.

- [104] Sealey C.W.Jr., Lindley J.T. (1977). Inputs, outputs and a theory of production and cost at depository financial institutions. *The Journal of Finance*, 32(4), 1251-1266.
- [105] Staikouras C., Mamatzakisa E., Koutsomanoli-Filippakib A. (2008). Cost efficiency of the banking industry in the South Eastern European region. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 18(5), 483-497.
- [106] Stevenson, R.E. (1980). Likelihood functions for generalized stochastic frontier estimation. *Journal of Econometrics*, 13, 57-66.
- [107] Tauchen, G. (1985). Diagnostic testing and evaluation of maximum likelihood models. *Journal of Econometrics*, 30, 415-444.
- [108] Thanassoulis, E. (1999). Data envelopment analysis and its use in banking. *Interfaces*, 29(3), 1-13.
- [109] Thompson, G.D. (1988). Choice of flexible functional forms: review and appraisal. *Western Journal of Agricultural Economics*, 13(2), 169-183.
- [110] Tortosa-Ausina, E. (2002). Bank cost efficiency and output specification. *Journal of Productivity Analysis*, 18, 199-222.
- [111] Tortosa-Ausina, E. (2003). Bank cost efficiency as distribution dynamics: controlling for specialization is important. *Investigaciones económicas*, 27(1), 71-96.
- [112] Wang W.S., Amsler C., Schmidt P. (2011). Goodness of fit test in stochastic frontier models. *Journal of Productivity Analysis*, 35(2), 95-118.
- [113] Wang W.S., Schmidt P. (2009). On the distribution of estimated technical efficiency in stochastic frontier models. *Journal of Econometrics*, 148, 36-45.

- [114] Weill, L. (2003). Banking efficiency in transition economies: the role of foreign ownership. *Economies of Transition*, 11, 569-592.
- [115] Weill, L. (2004). Measuring cost efficiency in European banking: a comparison of frontier techniques. *Journal of Productivity Analysis*, 21, 133-152.
- [116] Weill, L. (2009). Convergence in banking efficiency across European countries. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 19(5), 818-833.
- [117] White, H. (1982). Maximum likelihood estimation of misspecified models. *Econometrica*, 50, 1-16.
- [118] Winsten, C.B. (1957). Discussion on Mr. Farrell's paper. *Journal of the Royal Statistical Society A*, 120(3), 282-284.
- [119] Yuengert, A.M. (1993). The measurement of efficiency in life insurance: estimates of a mixed normal-gamma error model. *Journal of Banking and Finance*, 17, 483-496.
- [120] Zajc, P. (2006). A comparative study of bank efficiency in central and eastern Europe: the role of foreign ownership. *International Finance Review*, 6, 117-156.
- [121] Zellner A., Revankar N.S. (1969). Generalized production functions. *The Review of Economic Studies*, 36(2), 241-250.