



UNIVERSIDAD DE MURCIA

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA Y SISTEMAS

Tesis Doctoral

Sistemas de control reseteado discretos:
aplicaciones a control en red

Félix Pérez Rubio

Directores:

Alfonso Baños Torrico
Joaquín Cervera López

Murcia, Noviembre de 2012

Tesis doctoral

Sistemas de control reseteado discretos: aplicaciones a control en red

Félix Pérez Rubio (felixperez@um.es)

Dirigida por:

Alfonso Baños Torrico (abanos@um.es)

Joaquín Cervera López (jcervera@um.es)

Esta tesis ha sido escrita en L^AT_EX .

Departamento de Informática y Sistemas
Facultad de Informática
Universidad de Murcia
Campus de Espinardo
30100 Murcia

*Dedicado a
mis padres,
a mis hermanos,
y a Raquel.*

D

Agradecimientos

En primer lugar debo de agradecer a mis directores, Alfonso Baños y Joaquín Cervera, su trabajo, paciencia, disponibilidad y apoyo sin los cuales este trabajo no habría podido ser realizado. Quisiera también dar las gracias al resto de miembros del grupo de investigación de Informática Industrial con los que he tenido el placer de poder trabajar en estos años: Joaquín Carrasco, Ángel Vidal, Paco Montoya, Miguel Ángel Davó y Pedro Mercader; por su amistad, por toda la ayuda que me han prestado y por crear siempre un buen ambiente de trabajo.

Debo agradecer también a Aurelio y a Leandro que me dieran la primera oportunidad de iniciarme en el mundo de la automática al terminar la carrera. También debo dar las gracias a Sophie Tarbouriech y Luca Zaccarian por acogerme en su grupo de investigación en el LAAS y ofrecerme la ocasión de observar las cosas desde otra perspectiva. No puedo dejar de reconocer tampoco a los miembros de la Universidad de Vigo con los que he tenido la oportunidad de compartir congresos, reuniones e interesantes discusiones: Antonio Barreiro, Miguel Díaz-Cacho, Emma Delgado, Matías, ...

Agradezco a mis padres todo el apoyo que siempre me han brindado, todo lo bueno que pueda yo hacer será siempre culpa suya. A mis hermanos porque con ellos siempre se puede volver a ser niño por un rato. A mis padrinos Miguel y Mari Loli y mi primo Miguel por ser una segunda familia dentro de la primera. También a mis suegros, Antonia y Domingo, por acogerme en su casa cada fin de semana.

Dar las gracias a todos mis amigos por soportarme durante estos años. A la gente de la universidad: a Juanjo y Vanesa por empezar siendo mis compañeros y convertirse en amigos, a Sonia, Manolo, Santi, Manu, Pablo, Andrés, Rafa, Elisa, Rocio y todos los demás del CIOyN por adoptarme a la hora de tomar café. Agradecer también a todos los amigos de Toulouse: Sergio, Eva, Enma y Tere, en especial a esta última por hacer más fácil la vida fuera de casa.

También agradecer a todos los viejos amigos de Cartagena: Braulio, Roberto, Gema, Alberto, David, Laura, Toni,... por seguir manteniendo la amistad pese a vernos menos de lo que nos gustaría. Gracias especiales a Miryam, Alex y Alejandro por adoptarnos y abrirnos siempre la puerta de su casa sin aviso previo.

No podría terminar estos agradecimientos sin recordar a todos mis profesores, a todos que alguna vez participaron en mi formación a lo largo de toda mi vida. Gracias a todos ellos por intentarlo. Agradezco también al Ministerio de Ciencia e Innovación (y por extensión a todos los contribuyentes) la financiación de esta tesis.

Por último agradecer a Raquel que me regale su amor, su confianza y su risa, el sonido más hermoso. Sin ella nada sería posible, ni siquiera merecería la pena. Gracias.

Félix Pérez
Noviembre 2012

Índice general

Índice de figuras	V
Índice de tablas	IX
Notación matemática	XI
1. Introducción y motivación	1
1.1. Motivación y objetivos	1
1.2. Introducción a los sistemas reseteados	2
1.2.1. ¿Por qué usar controladores reseteados?	4
1.2.2. Orígenes del control reseteado	4
1.2.3. Estabilidad y problemas asociados al reseteo	6
1.2.4. Estado del arte en los sistemas de control reseteado	7
1.2.5. Aplicaciones del control reseteado	8
1.3. Introducción a los sistemas de control en red	10
1.3.1. Ventajas e inconvenientes del control en red	12
1.3.2. Líneas de investigación en los NCS.	14
1.4. Publicaciones	15
1.5. Estructura de la tesis	16
2. Sistemas de control reseteados en tiempo discreto	21
2.1. Sistemas híbridos	21
2.1.1. Sistemas impulsivos	23
2.1.2. Sistemas conmutados	25
2.2. Sistemas reseteados discretos en el tiempo	30
2.2.1. <i>Reset</i> dependiente del estado	32
2.2.2. <i>Reset</i> dependiente de condiciones temporales.	40
2.2.3. Elección de los parámetros w y n_R	49
3. Estabilidad de sistemas reseteados	61
3.1. Definiciones previas	61
3.2. Estabilidad para sistemas reseteados remuestreados	63

3.3. Estabilidad para sistemas reseteados discretos con parámetros variables afines.	68
3.4. Comparación	73
4. Sistemas reseteados aplicados a los NCS	81
4.1. Problemática del retardo y la pérdida de paquetes	81
4.2. Modelo del sistema de control en red	82
4.3. Retardo menor que el periodo de muestreo	84
4.3.1. Sistemas reseteados dependientes del estado aplicados a los NCS con retardos cortos	86
4.3.2. Sistemas reseteados dependientes de condiciones temporales aplicados a los NCS con retardos cortos	90
4.4. Retardo mayor que el periodo de muestreo	97
4.4.1. Sistemas reseteados dependientes del estado aplicados a los NCS con retardos largos	98
4.4.2. Sistemas reseteados dependientes de condiciones temporales aplicados a los NCS con retardos largos	103
5. Aplicaciones	109
5.1. Aplicación al control de procesos: Control del pH.	109
5.2. Control de distancia entre vehículos	118
6. Conclusiones y trabajos futuros	129
6.1. Conclusiones y contribuciones	129
6.2. Trabajos futuros	131
Apéndices	133
A. Matrices definidas positivas y LMI	135
A.1. Definiciones	135
A.2. Problemas relacionados con las LMI	139
B. Demostración del Teorema 4.1	141
C. Teorema 3.2 ampliado	145

Resumen

Esta tesis presenta un estudio de los sistemas de control reseteados en tiempo discreto y su aplicación a los sistemas de control en red. El estudio se centra en dar una formulación formal de este tipo de sistemas que sea coherente con las formulaciones de sistemas de control reseteados continuos en el tiempo. Para ello se emplean elementos de sistemas impulsivos y sistemas conmutados.

Los sistemas de control reseteados son un tipo de sistemas no lineales que se pueden clasificar como un subconjunto de los sistemas híbridos. Los sistemas reseteados mezclan una evolución continua con acciones puntuales. Se los conoce como sistemas reseteados porque, originalmente, la acción puntual consiste en poner a cero algún estado del sistema.

En este trabajo se aborda la estabilidad de los sistemas reseteados en tiempo discreto empleando técnicas de regularización temporal y también técnicas de análisis de sistemas con parámetros lineales variables en el tiempo. Este último método se puede aplicar porque los controladores reseteados discretos se adaptan a la formulación de los sistemas conmutados.

Los sistemas de control en red son un tipo de sistemas en los que parte de las comunicaciones se llevan a cabo a través de un medio compartido. El uso de este tipo de sistemas introduce una serie de retardos de comunicación que pueden afectar negativamente al comportamiento final del sistema. En este trabajo se emplean controladores reseteados en los sistemas de control en red para intentar compensar los efectos negativos que introduce la presencia de la red. Se comprueba que los controladores reseteados, cuando están bien sintonizados, pueden contribuir a mejorar las prestaciones de los sistemas de control en red.

El estudio de la estabilidad se aplica a los sistemas de control en red reseteados comprobándose que se pueden obtener regiones de estabilidad mayores al emplear controladores reseteados que controladores lineales. A lo largo de este trabajo se dan varios ejemplos de este fenómeno.

Por último se han aplicado los resultados obtenidos a dos casos prácticos en los que se observa cómo los controladores reseteados pueden superar las limitaciones de los controladores lineales. Se logra mejorar la velocidad de respuesta sin perjudicar la estabilidad del proceso.

Índice de figuras

1.1. Ejemplo 1.1	3
1.2. Respuesta de un integrador de Clegg frente a una entrada senoidal . . .	5
1.3. Sistema de control en red.	10
1.4. Sistema de control distribuido.	11
2.1. Autómata híbrido describiendo un termostato.	22
2.2. Clasificación sistemas híbridos.	26
2.3. Representación de un sistema conmutado como un autómata de estados finitos.	27
2.4. Fuerza motor frente a la velocidad.	28
2.5. Conmutación entre sistemas estables.	29
2.6. Controlador reseteado, C_R , conectado en lazo cerrado con una planta, P	33
2.7. Salida de los sistemas base y reseteado del Ejemplo 2.1	36
2.8. Señal de control de los sistemas base y reseteado del Ejemplo 2.1	37
2.9. Salida del sistema PI base y del reseteado del Ejemplo 2.2	39
2.10 Señal de control del sistema base 1 y del reseteado del Ejemplo 2.2	40
2.11 Salida del sistema PI IMC y del reseteado del Ejemplo 2.2	41
2.12 Señal de control del sistema PI IMC y del reseteado del Ejemplo 2.2	42
2.13 Salida del Ejemplo 2.2 con un controlador reseteado periódico mal sintonizado.	43
2.14 Controlador <i>reset</i> C y planta LTI P	44
2.15 Salidas de los sistemas base y reseteado	49
2.16 Señal de control de los sistemas base y reseteados	50
2.17 Distintas salidas al cambiar el desfase de la señal de reseteo.	51
2.18 Respuesta a un escalón de los sistemas base y complementario	52
2.19 Salida de diferentes sistemas complementarios	53
2.20 Salida promedio y señal de control para diferentes valores de w	54
2.21 Controlador <i>reset</i> C y planta LTI P	55
2.22 Salida para diferentes longitudes de w	58
3.1. Estabilidad uniforme.	62

3.2. Estabilidad asintótica.	63
3.3. Salida del sistema reseteado del Ejemplo 3.2.	68
3.4. Grafo de las secuencias de cambio para un sistema reseteado con tiempo de permanencia D	70
3.5. Salida del sistema reseteado del Ejemplo 3.3.	73
3.6. Valores de λ empleados en el Ejemplo 3.3.	74
3.7. Salida del ejemplo 3.4	77
3.8. Retardo de comunicación en el ejemplo 3.4	78
3.9. Región de estabilidad.	79
3.10 Puntos que cumplen la LMI (3.8) (marcados con círculos verdes) y región de estabilidad (cubo gris) del ejemplo 3.4.	80
4.1. Retardo en el envío de un paquete	82
4.2. Esquema del sistema de control en red.	83
4.3. Efecto del retardo sobre la señal. Salida de la planta (arriba) y entrada del controlador (abajo).	85
4.4. Esquema del sistema de control en red con exosistemas.	92
4.5. Salida del ejemplo 4.2 con retardo de comunicaciones constante.	93
4.6. Salida del ejemplo 4.3 sin retardo de comunicaciones.	94
4.7. Señal de control del ejemplo 4.3 sin retardo de comunicaciones.	95
4.8. Salida del ejemplo 4.3 con retardo de comunicaciones.	96
4.9. Salida del ejemplo 4.3 con retardo de comunicaciones.	97
4.10 Salida del ejemplo 4.4 con retardo de comunicaciones.	103
4.11 Retardo de comunicaciones empleado en el ejemplo 4.4.	104
4.12 Salida del ejemplo 4.5 con retardo de comunicaciones.	107
4.13 Retardo de comunicaciones empleado en el ejemplo 4.5.	107
5.1. Esquema del control de pH en reactor (izquierda) y en línea (derecha).	110
5.2. Planta piloto: lazo de calor y lazo pH	112
5.3. Plano del mezclador estático.	113
5.4. Salidas del sistema en simulación	114
5.5. Salidas del sistema reales	116
5.6. Señal de control	116
5.7. Señal de control en la zona de interés	117
5.8. Esquema control de distancias entre vehículos.	119
5.9. Esquema de las comunicaciones	121
5.10 Respuesta del sistema sin retardo	124
5.11 Respuesta del sistema con retardo fijo de 0.4 segundos	124
5.12 Respuesta del sistema con retardo fijo de 0.75 segundos	126
5.13 Respuesta del sistema con retardo variable entre 0.1 y 0.2 s. y una probabilidad de pérdida de paquetes del 35%	127

5.14 Respuesta del sistema con retardo fijo de 0.2 segundos y saturación en la señal de control	127
A.1. Conjunto de convexo de soluciones de una LMI	137
A.2. Conjunto de convexo de soluciones de dos LMI.	138
B.1. Modos de retardo con $N = 2$ y Q representados con bolas (señales) y cajas (instantes de muestreo).	142

Índice de tablas

1.1. Literatura en control reseteado	20
2.1. IAE e ITAE del Ejemplo 2.2	40
2.2. IAE e ITAE para diferentes w	53
2.3. IAE e ITAE con diferentes w	58
4.1. Diferentes modos de retardo con $N = 2$ y $Q = 2$	102
4.2. Diferentes modos de retardo con $N = 2$ y $Q = 3$	106
5.1. IAE e ITAE	117
5.2. Diferentes modos de retardo para $\tau < 0,75$ s	125

Notación

A lo largo de este trabajo se empleará la siguiente notación:

\mathbb{N} es el conjunto de los enteros positivos.

\mathbb{Z}^+ es el conjunto de los enteros no negativos.

\mathbb{R}^n es el espacio euclídeo n -dimensional.

$\mathbb{R}^{n \times m}$ conjunto de las matrices de números reales con n filas y m columnas.

$\|\cdot\|$ es la norma euclídea, es decir $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{1/2}$ para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Para un conjunto $\mathbb{K} \subset \mathbb{Z}^+$, $\min \mathbb{K}$ es el ínfimo de \mathbb{K} , y para el conjunto vacío \emptyset , $\min \emptyset = \infty$.

Para $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X > 0$ ($X < 0$) quiere decir que X es simétrico y definido positivo (definido negativo).

$\|X\|$ es la norma espectral, es decir la raíz cuadrada del mayor autovalor de $X^T X$.

I será la matriz identidad y O la matriz cero.

El conjunto de autovalores de una matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se nombrará como $\sigma(X)$.

Una matrix $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es Schur estable si $|\lambda| < 1$ para cualquier $\lambda \in \sigma(X)$, y Hurwitz estable si $\text{Real}(\lambda) < 1$ para cualquier $\lambda \in \sigma(X)$.

$|x|$ y $\text{Real}(x)$ denotan la norma y la parte real del número complejo x respectivamente

El radio espectral de X es $\rho(X) = \max_{\lambda_i \in \sigma(X)} (|\lambda_i|)$.

\forall es el símbolo lógico O , \wedge es el simbolo lógico Y .

ACRÓNIMOS

Acrónimo	En lengua inglesa	Traducción al español
LTI	Linear Time Invariant	Lineal e invariante en el tiempo.
FORE	First Order Reset Element	Elemento reseteado de primer orden.
NCS	Networked Control System	Sistema de control en red.
DCS	Distributed Control System	Sistema de control distribuido.
MAC	Medium Access Control	Control de acceso al medio.
CSDMA/CD	Carrier Sense Multiple Access with Collision Detection	Acceso múltiple con escucha de portadora. y Detección de Colisiones.
TDMA	Time Division Multiple Access	Acceso múltiple por división de tiempo.
CAN	Controller Area Network	Red de control del área.
LPV	Linear Parameter Varying	Parámetros variables linealmente.
LMI	Linear Matrix Inequalities	Desigualdades matriciales lineales.
IAE	Integral Absolute Error	Integral del valor absoluto del error.
ITAE	Integral Time Absolute Error	Integral del tiempo por el valor absoluto del error.
PI	Proportional-Integral	Proporcional-Integral.
PID	Proportional-Integral-Derivative	Proporcional-Integral-Derivativo.

CAPÍTULO 1

Introducción y motivación

1.1. Motivación y objetivos

La principal motivación de este trabajo es el desarrollo de controladores reseteados en tiempo discreto. En los entornos de trabajo actuales cada vez son más comunes las situaciones en las que ya sea por la naturaleza de los sistemas que se desea controlar o por el tipo de comunicaciones empleados aparecen retardos temporales y es bien sabido que algunas de las limitaciones fundamentales de los sistemas de control lineal se acentúan al tratar con sistemas con retardos.

Para intentar superar esas limitaciones en este trabajo se ha optado por desarrollar una variante de los sistemas de control reseteados continuos en el tiempo [14] [161], el controlador reseteado en tiempo discreto. Los sistemas de control reseteados fueron los primeros controladores no lineales en ser desarrollados y presentan una serie de características que los hace recomendables: sencillez, mejora de prestaciones y fácil implementación. La sencillez se deriva de la definición del controlador reseteado como un controlador lineal en el que el valor de alguno de sus estados es puesto a cero en ciertos instantes de tiempo, esta definición es sencilla en el sentido de que es fácil visualizar cuál es la condición de reseteo. La mejora de prestaciones obtenida al emplear controladores reseteados respecto a controladores lineales se ha constatado en numerosos trabajos [28; 53; 14]. La facilidad a la hora de implementar los controladores reseteados se da porque tanto en las herramientas de simulación, como en numerosos autómatas industriales existe la opción de resetear los integradores.

El motivo para desarrollar los controladores reseteados en tiempo discreto viene en primer lugar del hecho de que no habían sido estudiados, hasta donde llega el conocimiento del autor, hasta el inicio de los trabajos de esta tesis, y en segundo lugar de que la gran mayoría de los controladores empleados en el campo de los

sistemas de control en red son controladores discretos en el tiempo. El campo de los sistemas de control en red es un área en expansión tanto desde el punto de vista de la investigación como desde la aplicación práctica, de modo que el desarrollar un controlador reseteado en tiempo discreto ha permitido que pueda ser empleado en el marco de los sistemas de control en red.

Los objetivos que se ha marcado esta tesis han sido:

1. Desarrollar la definición de los sistemas de control reseteado en tiempo discreto en el marco de los sistemas de control conmutado y el control impulsivo¹.
2. Desarrollar criterios que permitan estudiar la estabilidad de los sistemas de control reseteado en tiempo discreto.
3. Integrar los sistemas de control reseteado en tiempo discreto con los sistemas de control en red.
4. Aplicar los controladores reseteados tanto a entornos industriales como a sistemas de control en red.

1.2. Introducción a los sistemas reseteados

Esta introducción a los sistemas reseteados se basa en gran medida en las excelentes revisiones del estado del arte realizadas en [14; 40], se recomienda al lector interesado la lectura de ambas.

En primer lugar se puede dar una definición informal de controlador reseteado como un controlador estándar al que se le añade un mecanismo de reseteo, o de puesta a cero, es decir se le añade una cierta estrategia que hace que el estado del controlador (o parte de él) pase a valer cero cuando se cumple alguna condición. La condición de reseteo (que es el evento que activa el mecanismo de reseteo) suele ser el cruce por cero de la entrada del controlador, pero son posibles otras elecciones tal y como se verá más adelante.

¹Ambos tipos de control se definirán en el capítulo 2.

Ejemplo 1.1 Para ilustrar es comportamiento de los sistemas de control reseteado analizaremos un ejemplo de [30] en el que la siguiente planta $P(s) = (s + 1)/(s(s + 0,2))$ es controlada con el siguiente controlador reseteado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + e(t) && \text{cuando } e(t) \neq 0. \\ x(t^+) &= 0 && \text{cuando } e(t) = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde x es el estado del controlador y e el error de seguimiento. Se ha hecho uso del concepto de *instante siguiente*, que se define como $t^+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} (t + h)$.

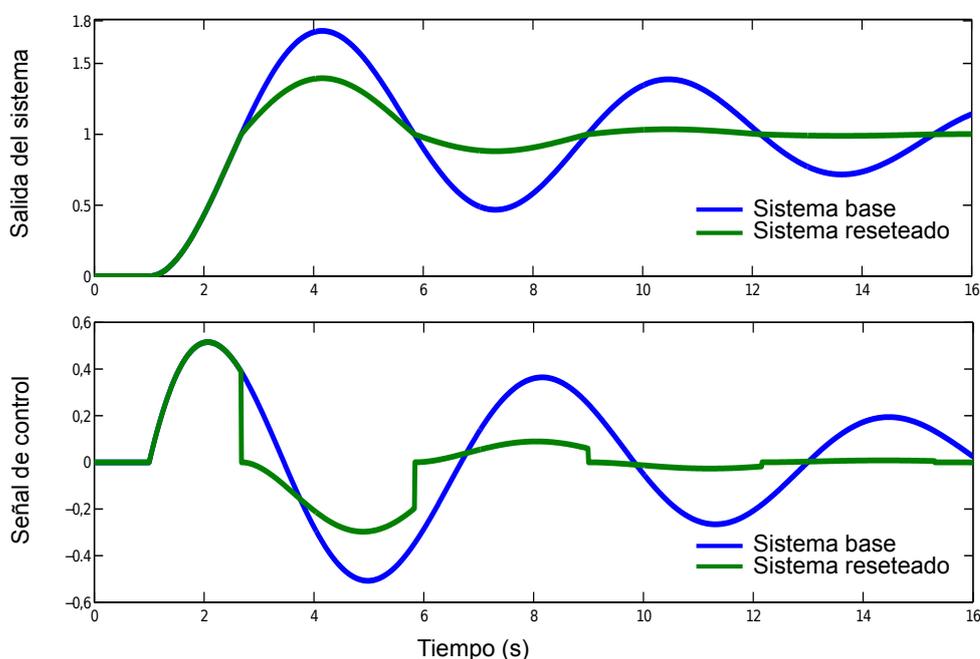


Figura 1.1: Ejemplo 1.1

En la figura 1.1 se muestra la salida del sistema reseteado y del sistema base, que es el mismo sistema pero sin acción de *reset*. Se puede observar cómo el sistema base está poco amortiguado, es decir alcanza el valor máximo rápidamente, pero presenta mucho sobreimpulso, más del 70 %. En el sistema reseteado el sobreimpulso se reduce al 40 % y también se reduce el tiempo de asentamiento. En general ese es el efecto de las acciones de *reset*, reducir el valor del estado del controlador y eliminar parte de la inercia del sistema. En la figura se muestra también la señal de control de ambos sistemas mostrando cómo el sistema reseteado converge mucho más rápido que el base, se pueden apreciar también las discontinuidades (saltos)

que producen las acciones de reseteo.

1.2.1. ¿Por qué usar controladores reseteados?

La motivación para emplear controladores reseteados es intentar superar limitaciones fundamentales que aparecen al usar controladores lineales. Bode en [33] estableció la relación entre la fase y la magnitud de la respuesta en frecuencia de un sistema LTI (*Linear Time Invariant*). Esta relación limita las especificaciones que se pueden conseguir empleando sistemas lineales como controladores dado que no se puede conseguir al mismo tiempo disminuir la ganancia para altas frecuencias y aumentar la ganancia a bajas frecuencias y el margen de fase. Estas limitaciones aumentan cuando el sistema que se desea controlar presenta retardos y polos o ceros situados en el semiplano derecho, algunos trabajos que estudian estas limitaciones son [61; 137; 62; 7].

Una manera de intentar superar esas limitaciones es emplear controladores no lineales. Con este propósito es con el que surgieron los controladores reseteados. A pesar de ser la motivación principal para el uso de los sistemas de control reseteados, la capacidad de estos sistemas para superar las limitaciones fundamentales de los sistemas lineales no ha sido ampliamente estudiada en la literatura de forma general, aunque sí es cierto que algunos trabajos tratan de forma específica alguna limitación lineal y cómo los controladores reseteados la superan, por ejemplo [28; 53]. En [14] sí se hace un desarrollo más general del tema.

Obviamente los sistemas reseteados no son la única opción para superar las limitaciones lineales, se pueden emplear otros controladores híbridos y no lineales [59]. Los controladores reseteados tienen a su favor las características que ya se destacaron en la motivación, sencillez y facilidad de implementación, frente a otras técnicas de control no lineal que son conceptualmente y prácticamente más complicadas.

1.2.2. Orígenes del control reseteado

Los trabajos que formalizaron el tratamiento de los controladores reseteados fueron realizados en la década de los 70 por Horowitz y colaboradores [89; 83] aunque el primer controlador reseteado propuesto fue el **integrador de Clegg** en 1958 [53]. En ese trabajo se propone un sistema con un integrador en el que el valor de la integral se pone a cero cuando la entrada del controlador pasa por cero lo que

puede ser descrito por la ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= e(t), & e(t) &\neq 0; \\ x(t^+) &= 0, & e(t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde $e(t)$ es la entrada del controlador y $x(t)$ es el estado del controlador. La intención de este controlador es reducir el sobreimpulso que presentan los integradores convencionales. Se puede observar este efecto analizando la función descriptiva de este controlador:

$$CI(j\omega) = \frac{1,62e^{-j38^\circ}}{\omega} = \frac{1,62}{j\omega} e^{j52^\circ}. \quad (1.3)$$

La magnitud es la misma que la de un integrador pero la fase es -38° , es decir 52° menos que un integrador. En la figura 1.2 se muestra la salida de un integrador de Clegg frente a una entrada senoidal.

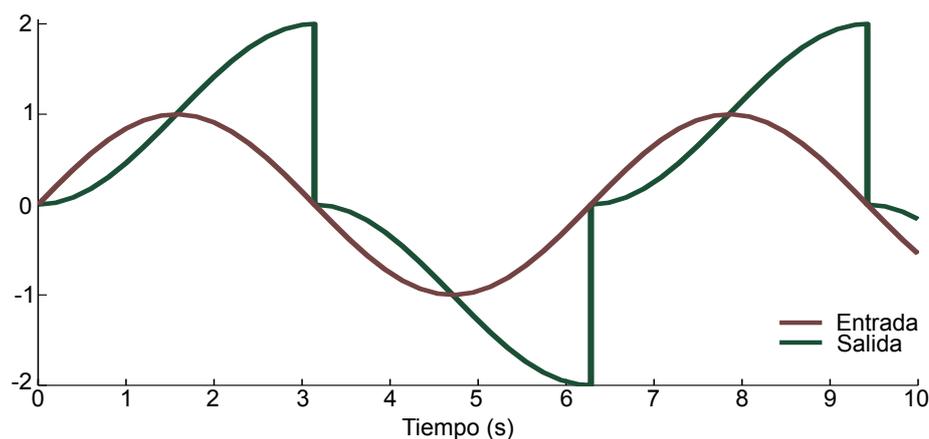


Figura 1.2: Respuesta de un integrador de Clegg frente a una entrada senoidal

En el primero de los trabajos de Horowitz relacionados con el control *reset* [89] se profundiza en el estudio del integrador de Clegg y se da un primer método de diseño basado en técnicas frecuenciales para el uso de los integradores de Clegg. Este trabajo es también el primero en identificar alguno de los problemas que conlleva el uso de controladores reseteados como son el control de plantas sin integradores y el problema del *undershoot*: Este problema surge porque el efecto que hace que el sistema reseteado pueda corregir el sobreimpulso perjudica el siguiente *undershoot*.

El siguiente trabajo de Horowitz, en compañía de Rosenbaum [83], introduce un nuevo controlador reseteado, el **FORE** (*First Order Reset Element*), que es la extensión del control reseteado a sistemas lineales de primer orden. El controlador FORE puede ser descrito por una función de transferencia de la forma

$$H(s) = \frac{k}{s + b} \quad (1.4)$$

con la salida sometida a una acción de reseteo cada vez que la entrada cruza por cero. De nuevo en este trabajo los autores dan reglas de diseño para los controladores FORE y plantas de segundo orden. Estas reglas de diseño se han puesto en práctica en el trabajo posterior [47].

1.2.3. Estabilidad y problemas asociados al reseteo

Es un hecho ampliamente conocido que las acciones de reset son capaces tanto de estabilizar un sistema que fuese previamente inestable como de desestabilizar a uno que fuese estable. No es posible establecer condiciones que se puedan aplicar de forma general a todos los sistemas reseteados para determinar cuando un sistema será estable o inestable. Aunque diversas condiciones de estabilidad, con alguna restricción, se dan en trabajos como [25] y [40]. En [25] se establece la condición H_β que tiene el inconveniente de necesitar la estabilidad del sistema base. Mientras que en [40] se dan condiciones de estabilidad forzando a que haya una distancia máxima entre acciones de reseteo. Estas limitaciones en las condiciones convierten al tratamiento de la estabilidad de los sistemas de reseteo en uno de los principales problemas para su implantación.

Otros problemas que deben ser considerados al emplear sistemas reseteados se derivan del carácter impulsivo de estos sistemas. Los sistemas impulsivos son una subclase de los sistemas híbridos, que se estudiarán en la sección 2.1, y hay una serie de problemas que surgen de la combinación de dinámicas continuas y de eventos discretos. Siguiendo [76] se plantean tres patologías temporales: las *soluciones Zeno*, el *deadlock* y el *beating*.

Las *soluciones Zeno* son un fenómeno que se da cuando un sistema híbrido experimenta infinitos cambios de estado en un tiempo finito. La solución a este problema es la regulación temporal [87] consistente en establecer un tiempo finito para realizar cada evento, esto hace que el tiempo necesario para realizar infinitos eventos sea infinito.

El *deadlock* o punto muerto es una situación típica de los autómatas de estados finitos que se da cuando existe una solución donde la única evolución que se produce

son cambios de estado del autómata, pero sin evolución en los sistemas dinámicos de cada estado.

El *beating* es el fenómeno contrario al *deadlock*, se dice que un sistema está en *beating* si el sistema entra en un modo auxiliar del que no puede escapar. En [3] se ha dada una formulación formal de ambos conceptos aplicada a los sistemas de control híbridos generales.

1.2.4. Estado del arte en los sistemas de control reseteado

En [40] se realiza una excelente revisión del estado del arte, hasta 2009, que aquí se tomará como base y se ampliará hasta la fecha actual. En la Tabla 1.1 se muestra una lista con las publicaciones relacionadas con el control reseteado ordenadas cronológicamente, en la columna Tipo aparecen designados con una J los trabajos publicados en revistas, con C los presentados en congresos, con B los libros y con TD las tesis doctorales.

Desde los tres trabajos mencionados en la sección 1.2.2 ([89], [53], [83]) hasta finales de la década de los 90 del pasado siglo los sistemas reseteados no fueron un objeto de estudio popular en el marco académico. Fueron los trabajos de Holot y Chait a partir de 1997 los que retoman este campo con una serie de trabajos acerca de la estabilidad interna de los sistemas reseteados generales, que culminan con un importante resultado de estabilidad conocido como la condición H_β [30].

Actualmente se podrían distinguir tres líneas claras de trabajo en el control reseteado. A continuación se describirá cada una de ellas y alguno de sus trabajos más relevantes.

Control reseteado sin limitación en el flujo

Esta línea sigue la definición de controlador reseteado dada en [30] y [31], donde la acción de reset se produce en una hipersuperficie, en analogía con los trabajos de sistemas impulsivos [76]. Esto hace que el sistema pueda fluir por cualquier punto del espacio de estados del sistema salvo un conjunto de medida cero.

Este modelo permite mantener la definición original para sistemas con reset parcial [22], [13], [44] y también da cierta libertad en la elección de la ley de reset, lo que puede ser ventajoso para controlar sistemas con retardo [150]. Esta línea ha sido criticada porque propone una acción de reseteo en un conjunto de medida nula por lo que es necesario tener en cuenta los posibles problemas de continuidad en

las soluciones.

Control reseteado con limitación en el flujo

A diferencia de la anterior línea de trabajo, esta línea surge con la aplicación de la teoría de sistemas híbridos [66] a los sistemas reseteados. Esta línea empieza con la aparición del trabajo [113] y está impulsada principalmente por el grupo de Nešić y Teel.

Este modelo permite que la estabilidad del sistema base no sea necesaria para la estabilidad del sistema reseteado, debido a que la zona donde el sistema no fluye tiene medida no nula. Con esta premisa se pueden tratar controladores como el CI y el FORE, pero no puede ser aplicada a sistemas reseteados parcialmente [101], lo que es un gran inconveniente dado que estos sistemas son recomendables para controlar plantas sin integradores.

Control reseteado a tiempos fijos

Una tercera línea, eminentemente práctica, puede ser la constituida por una serie de trabajos donde se considera que las acciones de reset se producen a tiempos fijos. Como trabajos de referencia pueden ser citados [74] [168] [123].

Con esta línea el estudio se enfoca en encontrar una ley de *reset*, es decir la combinación entre los valores a los que se resetea, el conjunto de tiempos en los que se produce la acción de reseteo y el conjunto de estados sobre el que se efectúa la acción de *reset*. Este tipo de sistema reseteado está claramente relacionado con el control impulsivo en el caso continuo en el tiempo y con el control conmutado cuando se emplean sistemas discretos en el tiempo.

1.2.5. Aplicaciones del control reseteado

En este apartado se enumerarán una serie de sistemas a los que ha sido aplicado el control reseteado de forma práctica:

Control de velocidad en una cinta [170]. La primera aplicación práctica de sistemas de control reseteado, se controla la velocidad de una cinta empleando un controlador reseteado que mejora las prestaciones de los controladores lineales aumentando los márgenes de fase y magnitud sin deteriorar las propiedades lineales.

Control de rotación de un eje flexible [80]. Los mismos autores del trabajo anterior aplican controladores reseteados a otra planta consistente en tres discos

unidos con un eje flexible. Los resultados son similares a los del trabajo anterior.

Servomecanismos en discos duros [74; 73; 82; 92]. Este es el tipo de sistema en el que se han realizado más aplicaciones de control reseteado, entre ellas destacan las aplicaciones de sistemas reseteados a tiempos fijos.

Control de motor de hélice marino [10] En este trabajo las acciones de *reset* se producen con el objetivo de hacer descender el valor de Lyapunov haciendo que la respuesta transitoria del sistema mejore, para ello se seleccionan a priori una serie de valores de reseteo, es decir los valores del estado del controlador después de la acción de *reset*, permitidos.

Control de posición de un elemento piezoeléctrico [168] En este caso la planta es un elemento piezoeléctrico que se usa para posicionar un objeto, el planteamiento es muy similar al empleado en [74].

Control de una planta solar [150] En este caso la planta es un conjunto de paneles solares que calientan un líquido térmico, la variable que se controla es el caudal y el objetivo es que la temperatura se mantenga constante. Es la primera aplicación práctica de los controladores PI+CI² [21].

Teleoperación [58] En este caso la planta es una grúa pórtico y se contempla el uso de sistemas reseteados para mejorar las prestaciones del sistema tanto en modo automático como con control humano. Se emplean resultados de pasividad.

Control de pH en línea [41; 125] En el primero de los trabajos se aplican controladores reseteados continuos en el tiempo para controlar el pH de una corriente de líquido. En el segundo, que se desarrollará en el Capítulo 5, se emplea en la misma planta un controlador reseteado discreto en el tiempo.

Intercambiadores de calor [149] En este trabajo la planta que se controla es un intercambiador de calor y se emplean controladores PI + CI y controladores reseteados con *banda variable*, un tipo de controladores en los que se adelanta la acción de reseteo para compensar el retardo de la planta.

²Un controlador PI +CI está formado por un controlador proporcional integral y un integrador de Clegg en paralelo.

1.3. Introducción a los sistemas de control en red

En esta sección se realizará una breve introducción a los sistemas de control en red y una revisión del estado del arte.

Definición: Un **sistema de control en red** (NCS del inglés *Networked Control System*) es un sistema espacialmente distribuido en el que la comunicación entre sensores, actuadores y controladores es llevada a cabo a través de un medio de comunicación compartido, que llamaremos red de comunicación [79]. En la figura 1.3 se puede apreciar el esquema de un sistema de control en red.

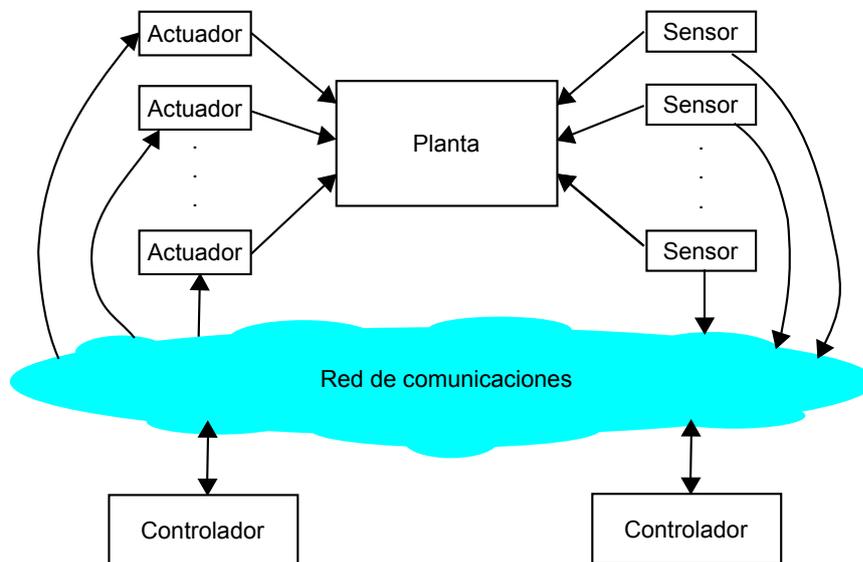


Figura 1.3: Sistema de control en red.

Los sistemas de control en red surgen como extensión natural de los sistemas de control distribuido (DCS del inglés *Distributed Control System*) que fueron introducidos alrededor de 1975 de forma independiente por las empresas Honeywell y Yokogawa. En este tipo de sistemas hay una serie de estaciones de proceso donde se realiza el control de la planta, estaciones operadoras donde se monitoriza el proceso y estaciones auxiliares para el registro de datos y optimización. En un principio las comunicaciones entre esos elementos estaban limitadas a monitorización, alarmas y señales de encendido y apagado. En la figura 1.4 se muestra un esquema de sistema de control distribuido. Posteriormente se ha ido implantando en esos elementos interfaces de red que permiten que se comuniquen más tipos de señales dando lugar al nacimiento del control en red.

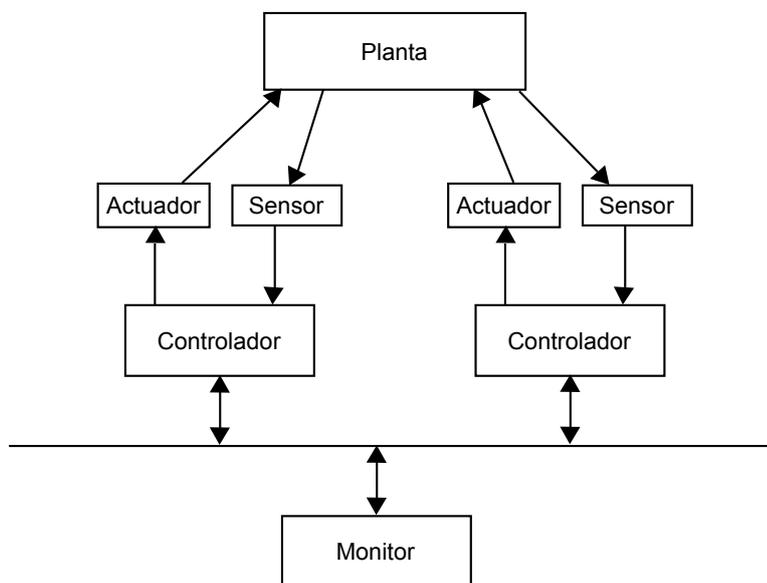


Figura 1.4: Sistema de control distribuido.

Las primeras referencias acerca de la problemática asociada a los NCS aparecen en unos artículos publicados a partir de 1988 por Ray y colaboradores [78; 131]. Estos artículos surgen del trabajo en sistemas de control de aeronaves en los que las limitaciones de espacio hacen recomendable el uso de sistemas de comunicación compartidos. En estos primeros trabajos ya se plantea un modelo discreto de las comunicaciones. Aproximadamente en las mismas fechas surgen las primeras redes de comunicación industrial Fieldbus (alrededor de 1988) y Profibus que popularizan el uso de los NCS en la industria.

Desde el punto de vista académico en la década de los 90 cabe destacar una segunda serie de trabajos del grupo de Ray [130] y otros de Wittenmark [115; 114] que plantean el tratamiento de las problemáticas de la red desde un punto de vista estocástico. A partir del cambio de siglo surgen líneas que plantean el uso de controladores híbridos para modelar las dinámicas de los NCS [36; 165]. Un grupo muy activo en los últimos años es el de Chow [144; 145]. Este grupo propone, entre otras técnicas, sistemas de control que adaptan su comportamiento a la calidad de transmisión de la red en cada momento.

El aumento de la cantidad de redes de comunicación, la facilidad y abaratamiento del uso de Internet también produjeron un impulso en el uso de los sistemas de control en red. En los últimos años se ha aumentado el uso y la investigación en los NCS debido al incremento del desarrollo de sistemas inalámbricos. A día de hoy, los

NCS se están convirtiendo en NCS distribuidos [102], en los que se intenta producir una estructura de red y componentes capaces de integrar sensores distribuidos, actuadores distribuidos y también algoritmos de control que se distribuyan a lo largo de una red de comunicación.

1.3.1. Ventajas e inconvenientes del control en red

Los sistemas de control en red tienen una serie de ventajas como son: La **disminución del cableado** que se produce al prescindir de las comunicaciones punto a punto, lo que conlleva también una disminución de costes de mantenimiento e instalación [158]; la **flexibilidad** de este tipo de sistemas, donde es sencillo añadir más nodos de comunicación una vez la red de comunicación está operativa; la **posibilidad de cubrir grandes distancias** y la **facilidad para operar alejados de entornos peligrosos**. Estas ventajas hacen que los sistemas de control en red se empleen en un amplio rango de aplicaciones, como son las grandes plantas químicas, los sistemas de gestión de transporte inteligentes [135; 136], los vehículos no tripulados aéreos [68] o la cirugía remota [105].

Por otro lado es obvio que la presencia de una red de comunicación introducirá una serie de complicaciones y problemas que deberán ser tenidos en cuenta a la hora de diseñar un sistema de control en red. Los problemas más importantes que se plantean en la literatura [158; 79; 75; 133] son los siguientes:

- **Limitación del ancho de banda.** Las redes de comunicación sólo pueden transmitir una cantidad limitada de información por unidad de tiempo. En ciertas aplicaciones esto se convierte en un factor limitante para los sistemas de control en red. La capacidad finita de la red hace que no se pueda transmitir con un periodo de muestreo indefinidamente pequeño y además sólo un elemento puede comunicar a través de la red en un momento dado.
- **Retardo en la comunicación.** Para transmitir una señal continua en el tiempo a través de una red de comunicación esa señal debe pasar por una serie de procesos, en primer lugar debe ser muestreada, luego debe ser pasada a formato digital y transmitida por la red y al llegar al receptor esa señal deberá descodificarse. El retardo introducido por la red es la suma de los retardos de acceso a la red (es decir el tiempo que tarda la red en aceptar un dato) y el retardo de transmisión (el tiempo que pasa la información dentro de la red). El retardo de comunicación puede ser altamente variable y depende de factores como la congestión de la red y la calidad del canal de comunicación.

- **Retardo inducido total.** Los dos factores anteriores combinados con el retardo de acceso al medio dan lugar a un retardo inducido que será variable en el tiempo. La mayor parte del retardo inducido suele estar causada por el retardo de acceso que depende del control de acceso al medio (MAC, *Medium Access Control*). Los protocolos de acceso al medio se suelen clasificar en dos categorías: acceso aleatorio y acceso programado. El protocolo de paso de testigo (*Token Passing*) y el acceso múltiple por división de tiempo (TDMA, *Time Division Multiple Access*) son ejemplos de acceso programado. El acceso múltiple con escucha de portadora y detección de colisiones (CSMA/CD, *Carrier Sense Multiple Access with Collision Detection*) es un tipo de protocolo de acceso aleatorio. Con estos protocolos los problemas suelen aparecer cuando distintos elementos intentan acceder a la red de comunicación al mismo tiempo (carga de red) y la forma de afrontarlos dependerá del funcionamiento de cada protocolo.

- **Pérdida de datos** (*packet dropout*). Una gran diferencia entre los sistemas en los que las comunicaciones se llevan a cabo a través de una red y los sistemas con comunicaciones punto a punto es la posibilidad de que se produzcan pérdidas de información en el proceso de comunicación. Las pérdidas de paquetes se producen por errores en la transmisión y también por acumulación de paquetes de información en el proceso de acceso y salida de la red. Es altamente dependiente del protocolo de la red. La posibilidad de que se produzca es mayor en las redes de comunicación inalámbricas.

- **Tipo de red.** Obviamente el tipo de red no es un *problema* pero sí debe ser tenido en cuenta en el proceso de diseño de los sistemas de control. Se puede optar por emplear dos tipos de redes: redes de propósito general (Ethernet, RS-232, Internet) o específicas para propósitos industriales (DeviceNet, CAN, Foundation Fielbus, Profibus, etc). Cada uno de estos tipos de red presenta características distintas en la capacidad de transmisión, requerimientos temporales, protocolos de acceso, etc.

Existen también una serie de factores de menor importancia que deben de ser tenidos en cuenta como son la cuantización de la señal o el sincronismo entre todos los elementos que se encuentran conectados a la red.

1.3.2. Líneas de investigación en los NCS.

El control en red es una combinación de los campos de la teoría de control y las teorías de comunicación, tradicionalmente ambos campos se han mantenido separados, dividiendo las líneas de investigación en dos partes diferenciadas

1. **Control de la red:** Estudia las redes de comunicaciones intentando mejorar sus características a través de nuevos protocolos de acceso, de sistemas de gestión de la conexión, de mejoras en los procesos de muestreo, etc. Es independiente del problema de control a considerar y está orientado a la mejora de la comunicación en red.
2. **Control a través de la red:** En esta línea se plantean estrategias de control y sistemas de control diseñados de forma que se tienen en cuenta los efectos adversos de la red de comunicación, como el retardo introducido por la red, para intentar minimizarlos.

En los últimos años también han surgido líneas intermedias, que combinan ambos aspectos, [144; 103]. En estas técnicas la estrategia de control no sólo se planifica teniendo en cuenta las características de la red de comunicaciones, a priori, sino que se van realizando mediciones del estado de la red, por ejemplo el ancho de banda disponible, y se va variando la ley de control en consecuencia, por ejemplo aumentando o disminuyendo el periodo de muestreo del sensor y controlador o variando la ganancia de los controladores.

Aunque el foco de este trabajo no es el control de la red, a continuación se presentarán algunas de las redes más usadas en el campo de los sistemas de control en red:

- PROFIBUS fue desarrollado por un grupo alemán de compañías y es ahora un estándar en Alemania. Un cable trenzado apantallado es usado como medio de transmisión. La velocidad de transferencia puede ser desde 9.6 Kbits/s hasta 500 Kbits/s. La longitud máxima del bus es de 1200 metros. Hasta 127 estaciones pueden conectarse a la red. Los mensajes a través de la red pueden tener hasta una longitud de 256 bytes. PROFIBUS es una red de paso de testigo que funcionan en tiempo real. Los nodos son divididos en activos y pasivos. El nodo que tiene el testigo tiene el permiso para enviar datos a la red. El testigo es pasado a través de la red entre los nodos activos. Los nodos pueden transmitir cuando tienen el testigo. Los nodos pasivos necesitan ser direccionados por un nodo activo para poder enviar datos a través de la red.

- CAN, (*Controller Area Network*), fue desarrollado por la compañía alemana Bosch para la industria del automóvil. El CAN fue uno de los primeros buses de campo y es empleado por varios fabricantes. CAN es definido en los estándares ISO 11898 y 11519-1. La velocidad de transmisión puede ser programada. La velocidad del bus puede ser de 1 Mbit/s si el bus no es más de 50 metros, y 500 Kbits/s si el bus es de más de 50 metros. Si la calidad del cable es baja, como puede ser en la fabricación de automóviles en serie, la máxima velocidad de transferencia puede ser menor. Un nodo puede empezar la transmisión en cualquier momento si el bus está libre. Si varios nodos intentan transmitir simultáneamente empieza un proceso de arbitraje. Aquel nodo que intente transmitir con prioridad más alta obtiene el derecho al uso del bus. Es una red en tiempo real.
- Ethernet es una de las tecnologías más empleadas de redes de área local (LAN). Transmite los datos a velocidades de 10 Mbits/s, 100Mbits/s y 1 Gbit/s. Ethernet no está diseñada para comunicaciones en tiempo real. No obstante, la gran cantidad de redes Ethernet instaladas hace interesante su empleo en sistemas de control en tiempo real. No existe un controlador central del bus, Ethernet utiliza el protocolo de acceso CSMA/CD. Esto significa que antes del envío la estación escucha el canal y si el canal parece estar libre, la transmisión comienza. Si varias estaciones comienzan la transmisión simultáneamente una colisión es detectada, las estaciones finalizan la transmisión y esperan un tiempo aleatorio antes de volver a intentar transmitir el mismo mensaje. Un casi ilimitado número de estaciones pueden conectarse. El número de colisiones se reduce al emplear cableado estructurado y conmutadores (*switch*) de ethernet que hacen que la mayoría de las conexiones sean punto a punto. Cada paquete que se envía al conmutador se almacena y se retransmite al puerto de destino correcto. Si ese puerto está ocupado, el conmutador espera, por lo que no se producen colisiones ni retransmisiones. El único problema es la espera en cola que se produce en el conmutador. Usualmente el número de estaciones está limitado por una dirección de seis bytes. Los tres primeros son utilizados como identificador del fabricante, y los tres últimos son definidos por el fabricante, de tal forma que cada interfaz Ethernet tiene un número único. Una trama Ethernet, o paquete, tiene entre 64 y 1500 bytes de longitud.

1.4. Publicaciones

La mayor parte de los resultados que se muestran en esta memoria han dado lugar a trabajos que o bien ya han sido publicados, o están pendientes de publicación.

El listado cronológico de esos trabajos es el siguiente:

- *Discrete-time reset control applied to networked control systems*, A. Baños, F. Pérez, and J. Cervera. *The 35th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society* [19].
- *Networked reset control systems with discrete time-varying delays*, A. Baños, F. Pérez, and J. Cervera. *The 36th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society* [20].
- *Design of networked periodic reset control systems*, F. Pérez, A. Baños, and J. Cervera. *2011 IEEE International Symposium on Industrial Electronics* [123].
- *Periodic reset control of an in-line ph process*, F. Pérez, A. Baños, and J. Cervera. *The 16th Conference on Emerging Technologies and Factory Automation* [125].
- *Design of networked reset control systems for reference tracking*, F. Pérez, A. Baños, and J. Cervera. *The 37th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society* [124].
- *Networked based reset control systems*, A. Baños, F. Pérez and J. Cervera. *IEEE Transactions on Industrial Informatics* (Enviado).

1.5. Estructura de la tesis

La tesis se organiza de la siguiente manera. En el capítulo 2 se realizará una introducción a los sistemas de control reseteados en el marco de los sistemas híbridos. Se realiza también la presentación de los sistemas reseteados en tiempo discreto distinguiendo entre diferentes condiciones de reseteo y estudiando el comportamiento alguno de ellos. Se profundiza en las condiciones de reseteo de paso por cero y la condición periódica.

En el capítulo 3 se estudia el problema fundamental de la estabilidad de los sistemas de control reseteados en tiempo discreto presentados en el capítulo 2. Se han propuesto dos aproximaciones distintas para analizar la estabilidad de los sistemas reseteados cuando estos son variables en el tiempo. Una de ellas basada en técnicas de LPV (*Linear Varying Parameters*) y la otra basada en una búsqueda exhaustiva, también conocida como de fuerza bruta. Por último, se ha realizado la comparación entre la eficacia / eficiencia de ambos sistemas.

El capítulo 4 introduce los sistemas de control en red (NCS). Se realizará una breve introducción a los sistemas de control en red y a sus características fundamentales. En este capítulo se presenta también una descripción de este tipo de sistemas empleando un modelo de muestreo múltiple (*multirate*) que permite la integración de controladores presentados en el capítulo 2. El sistema resultante, sistema NCS reseteado, es un sistema reseteado que se adapta a la formulación empleada en el capítulo 2 de modo que se pueden aplicar los teoremas desarrollados en el capítulo 3 que permiten analizar la estabilidad de los NCS.

En el capítulo 5 se presentan una serie de aplicaciones de los sistemas de control reseteados en tiempo discreto al control de procesos y a los sistemas de control en red. La aplicación en control de procesos es una aplicación real en un entorno industrial y muestra un ejemplo de cómo el control reseteado en tiempo discreto puede introducir mejoras sobre el uso de controladores lineales. La aplicación a un sistema de control en red es una simulación del empleo de un controlador reseteado en el problema de control de distancia entre vehículos. En este caso se supone que la comunicación entre los vehículos se realiza de forma inalámbrica.

Finalmente se cierra el trabajo con el capítulo 6, destinado a recapitular las conclusiones y contribuciones del trabajo y a exponer posibles trabajos futuros. También se han añadido una serie de apéndices que, aunque no son necesarios para seguir el desarrollo de la tesis, pueden resultar de interés para los lectores no familiarizados con las LMI (*Linear Matrix Inequalities*). En esos apéndices también se dan una serie de demostraciones y teoremas auxiliares.

Fecha	Autor	Tipo	Referencia
Marzo 1958	Clegg	J	[53]
Abril 1974	Krishnan y Horowitz	J	[89]
Junio 1975	Horowitz y Rosenbaum	J	[83]
Mayo 1977	Karybakas	J	[88]
Octubre 1995	Bobrow, Jabbari y Thai	J	[32]
Junio 1997	Hu, Zheng, Chait y Hollot	C	[84]
Diciembre 1997	Hollot, Zheng y Chait	C	[81]
Febrero 1998	Zheng	TD	[169]
1999	Hu et al.	B	[85]
Junio 1999	Beker, Hollot, Chen y Chait.	C	[31]
Diciembre 1999	Beker, Hollot y Chait.	C	[26]
Enero 2000	Bupp et al.	J	[39]
Febrero 2000	Zheng et al.	J	[170]
Marzo 2000	Chen, Hollot y Chait	C	[51]
Junio 2000	Chen, Hollot, Chait y Beker	C	[52]
Junio 2000	Haddad, Chellabsina y Kablar	C	[77]
Septiembre 2000	Chen	TD	[48]
Diciembre 2000	Chen, Hollot y Chait	C	[50]
Diciembre 2000	Beker, Hollot y Chait	C	[27]
2001	Hollot, Beker, Chait y Cheng	B	[80]
Junio 2001	Beker, Hollot y Chait	C	[29]
Junio 2001	Chen, Chait y Hollot	J	[49]
Septiembre 2001	Beker	TD	[25]
Noviembre 2001	Beker, Hollot y Chait	J	[28]
Febrero 2002	Chait y Hollot	J	[47]
Junio 2004	Beker, Hollot, Chait y Han	J	[30]
Junio 2005	Zaccarian, Nesic y Teel	C	[161]
Enero 2006	Guo, Yu y Ma	J	[70]
Noviembre 2006	Hong y Wong	C	[82]
Diciembre 2006	Zaccarian, Nesic y Teel	C	[162]
Diciembre 2006	Li, Guo y Wang	C	[94]
Enero 2007	Wu, Guo y Wang	J	[155]
Junio 2007	Baños y Vidal	C	[22]
Junio 2007	Baños, Carrasco y Barreiro	C	[15]
Julio 2007	Baños, Carrasco y Barreiro	C	[16]
Julio 2007	Baños y Vidal	C	[21]
Julio 2007	Baños y Barreiro	C	[12]
Julio 2007	Zaccarian, Nesic y Teel	C	[163]
Julio 2007	Guo, Wang y Lihua	C	[160]

continúa en la siguiente página

Fecha	Autor	Tipo	Referencia
Octubre 2007	Zheng et al	C	[167]
Diciembre 2007	Loquen, Tarbouriech y Prieur	C	[100]
Diciembre 2007	Witvoet et al	C	[153]
Junio 2008	Aangenent et al	C	[1]
Junio 2008	Nesic, Teel y Zaccarian	C	[111]
Junio 2008	Vidal y Baños	C	[147]
Junio 2008	Carrasco, Baños y Barreiro	C	[43]
Agosto 2008	Nesic, Zacarian y Teel	J	[113]
Septiembre 2008	Bakkeheim et al	J	[10]
Octubre 2008	Zheng et al	J	[168]
Noviembre 2008	Carrasco, Baños y van der Schaft	C	[44]
Noviembre 2008	Vidal et al	C	[150]
Noviembre 2008	Fernández et al	C	[58]
Diciembre 2008	Nesic y Teel	C	[110]
Diciembre 2008	Loquen, Tarbouriech y Prieur	C	[101]
Febrero 2009	Guo et al	J	[74]
Febrero 2009	Baños y Barreiro	J	[13]
2009	Carrasco	TD	[40]
Junio 2009	Li, Du and Wang	C	[91]
Junio 2009	Li et al	C	[93]
Agosto 2009	Vidal y Baños	C	[148]
Septiembre 2009	Baños, Dormido and Barreiro	C	[19]
Noviembre 2009	Baños, Pérez y Cervera	C	[17]
Noviembre 2009	Guo, Wang y Xie	C	[73]
Noviembre 2009	Li et al	C	[92]
Enero 2010	Carrasco, Baños y van der Schaft	J	[45]
Enero 2010	Barreiro y Baños	J	[23]
Enero 2010	Zheng y Fu	J	[166]
Mayo 2010	Loquen	TD	[99]
Junio 2010	Paesa et al	C	[119]
Julio 2010	Vidal y Baños	J	[149]
Julio 2010	Polenkova et al	C	[127]
Septiembre 2010	Prieur, Tarbouriech y Zaccarian	C	[128]
Octubre 2010	Zaccarian, Nesic y Teel	J	[164]
Noviembre 2010	Baños, Pérez y Cervera	C	[20]
2011	Baños y Barreiro	B	[14]
Abril 2011	Paesa et al	J	[120]
Mayo 2011	Baños, Dormido y Barreiro	J	[18]
Mayo 2011	Tarbouriech, Loquen y Prieur	J	[143]
continúa en la siguiente página			

Fecha	Autor	Tipo	Referencia
Junio 2011	Yuqian y Wei	C	[159]
Junio 2011	Barreiro, Baños y Dormido	C	[24]
Junio 2011	Perez, Baños y Cervera	C	[123]
Julio 2011	Villaverde et al	J	[151]
Septiembre 2011	Guo et al	C	[72]
Septiembre 2011	Perez, Baños y Cervera	C	[125]
Septiembre 2011	Guo, Gui y Yang	C	[71]
Septiembre 2011	Forni, Nesic y Zaccarian	J	[60]
Octubre 2011	Paesa, Baños y Sagues	J	[117]
Noviembre 2011	Perez, Baños y Cervera	C	[124]
Noviembre 2011	Nesic, Teel y Zaccarian	J	[112]
Noviembre 2011	Paesa, et al	C	[118]
2011	Paesa	TD	[116]
Febrero 2012	Paesa et al	J	[121]
Marzo 2012	Raimúndez et al	J	[129]
Julio 2012	Carrasco y Baños	J	[41]

Tabla 1.1: Literatura en control reseteado

CAPÍTULO 2

Sistemas de control reseteados en tiempo discreto

En este capítulo se dará la definición de los sistemas reseteados en tiempo discreto y se discutirán distintas formulaciones para estos sistemas. Los sistemas reseteados son un tipo particular de sistemas híbridos. Se empezará por tanto con una breve introducción a los sistemas híbridos y a continuación se desarrollarán las definiciones en ese marco.

En el último tramo de este capítulo se formularán dos tipos de sistemas reseteados en tiempo discreto según diferentes condiciones de reseteo y se darán ejemplos de cada tipo de sistema y algunas reglas heurísticas de sintonía para uno de ellos.

2.1. Sistemas híbridos

En esta sección se hará una breve introducción a los sistemas híbridos, se recomienda al lector interesado en el tema la lectura de los trabajos [66; 6]. En primer lugar se procederá a definir de manera informal un **sistema híbrido** como un sistema dinámico en el que existe interacción entre dinámicas continuas y dinámicas discretas [8].

Uno de los formalismos con los que se pueden describir los sistemas híbridos son los **autómatas híbridos**. Un autómata híbrido es una máquina de estados finitos con variables reales y ecuaciones diferenciales que se definen de forma independiente para cada estado (discreto) del autómata. Los autómatas híbridos empezaron a usarse en el estudio de los sistemas híbridos en el inicio de la década de los 90 [4]. El autómata de la figura 2.1 describe un termostato y será usado a modo de ejemplo

para ilustrar el modelado de sistemas híbridos con autómatas.

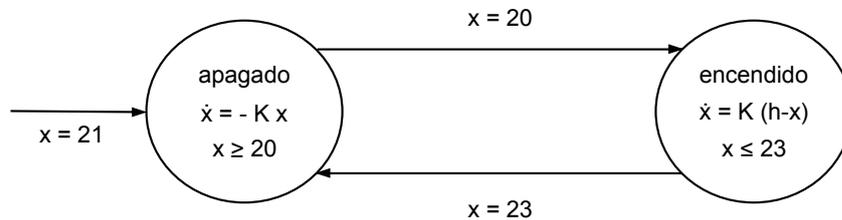


Figura 2.1: Autómata híbrido describiendo un termostato.

El termostato controla la temperatura de una habitación encendiendo y apagando un calefactor. La variable real x es el valor de la temperatura, el sistema tiene únicamente dos modos de funcionamiento, encendido y apagado. La evolución de la temperatura se puede modelar de la siguiente forma, cuando el calefactor está encendido la temperatura aumenta de acuerdo a la ecuación diferencial $\dot{x} = K(h - x)$, donde h es una constante, cuando el calefactor está apagado la temperatura disminuirá de acuerdo a $\dot{x} = -Kx$. Inicialmente la temperatura de la habitación es de 21 °C y el estado del calefactor es apagado. El calefactor se encenderá cuando la temperatura baje a 20 °C, con el calefactor encendido la temperatura aumentará hasta alcanzar los 23 °C. Entonces el calefactor pasará a estar apagado y la temperatura comenzará a descender de nuevo. Con este sistema de control la temperatura de la habitación se mantendrá entre 20 y 23 °C.

La definición formal de un autómata híbrido consiste en un conjunto finito $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ de variables reales, que son los estados de la dinámica continua, y un grafo dirigido con una serie de vértices y transiciones (V, E) . V es un conjunto finito de vértices y E es el conjunto de transiciones que conectan los vértices. El grafo modela la dinámica discreta del sistema, se emplean círculos para representar cada vértice del grafo y flechas para representar las transiciones. Dentro de cada vértice hay una serie de ecuaciones con las variables de X que describen la dinámica continua. En el ejemplo de la figura 2.1 el grafo tiene dos vértices y dos transiciones. La flecha con el subíndice $x = 21$ no une dos vértices, por lo que no es una transición, sino que sirve para inicializar el sistema.

Otra forma de modelar sistemas híbridos es emplear combinaciones de ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias. Un modelo ampliamente empleado para la dinámica de un sistema continuo es la ecuación diferencial de primer orden $\dot{x} = f(x)$, con x perteneciendo a un espacio euclídeo n -dimensional \mathbb{R}^n . Se pueden establecer restricciones a la dinámica del sistema como son restricciones al estado del tipo $x \in C$ (donde C es un subconjunto de \mathbb{R}^n). Por ejemplo, el conjunto C puede

indicar que la fuerza de la gravedad no puede empujar a un cuerpo a través del suelo. Por otro lado las restricciones también pueden aparecer como variaciones en la parte derecha de la ecuación diferencial, de forma que el valor de $f(\mathbf{x})$ sea sustituido por un conjunto de funciones $F(\mathbf{x})$ que se aplicarán según el valor del estado \mathbf{x} . Combinando ambas restricciones se puede llegar al siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in C \quad (2.1)$$

Para los sistemas discretos en el tiempo se puede emplear el modelo dado por la ecuación en diferencias $\mathbf{x}(t^+) - \mathbf{x}(t) = g(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Al igual que en el caso de los sistemas continuos en el tiempo se pueden añadir restricciones a la dinámica del sistema obteniendo

$$\mathbf{x}(t^+) - \mathbf{x}(t) = G(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D \quad (2.2)$$

donde G es un conjunto de funciones que se aplican según el estado de \mathbf{x} y D es un subconjunto de \mathbb{R}^n .

Se puede por tanto combinar las expresiones (2.1) y (2.2) para obtener una expresión general de los sistemas híbridos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= F(\mathbf{x}), & \mathbf{x} &\in C \\ \mathbf{x}(t^+) - \mathbf{x}(t) &= G(\mathbf{x}), & \mathbf{x} &\in D \end{aligned} \quad (2.3)$$

Esta forma de definir a los sistemas híbridos es la que emplean principalmente los investigadores de los grupos de Goebel y Teel [66]. El problema que conlleva el uso de esta descripción empleada en [66] es que al no imponerse la condición de que los conjuntos C y D sean disjuntos el sistema puede no estar bien definido. Es decir es posible encontrar situaciones en las que el sistema pueda evolucionar de acuerdo a la ecuación diferencial y a la ecuación en diferencias simultáneamente. Aunque en ciertos casos particulares [67] la definición (2.3) tiene propiedades de robustez que otras definiciones que se verán a continuación no tienen.

2.1.1. Sistemas impulsivos

Una forma de eliminar el problema anterior es obligar a que esos conjuntos sean disjuntos, tal y como se hace en los sistemas impulsivos [9; 76]. En este tipo de sistemas híbridos el sistema tiene una evolución continua y una dinámica discreta con saltos instantáneos (impulsos). Esta descripción es especialmente adecuada para modelar sistemas en los que la dinámica de alguna de sus acciones se produce en un tiempo despreciable en comparación con el tiempo de respuesta natural como pueden ser los sistemas mecánicos con impactos o los sistemas biológicos. Para la descripción de los sistemas impulsivos se emplean tres elementos:

- Ecuación diferencial: Se describe la dinámica continua en el tiempo con una ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (2.4)$$

donde $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es la entrada del sistema. Cuando la evolución del sistema está gobernada por esta ecuación se dice que el sistema **fluye**.

- Ecuación en diferencias: Los impulsos se describen mediante ecuaciones en diferencias de la siguiente forma:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}(t_k^+) - \mathbf{x}(t_k) = I_k(t_k, \mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k)) \quad (2.5)$$

donde el subíndice k expresa el k -ésimo salto. Cuando el sistema está gobernado por esta ecuación se dice que el sistema **salta**.

- Ley de impulsos: Este elemento sirve para encajar los dos anteriores, es una ley que dependiendo del estado actual y del tiempo determina cuándo se sigue una u otra dinámica. Se suele designar empleando un subconjunto $\mathcal{S} \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ de forma que si $(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \in \mathcal{S}$ se dice que se cumple la ley de impulsos y el sistema salta.

Combinando los tres elementos anteriores, el sistema dinámico impulsivo se describe de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), & (t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \notin \mathcal{S} \\ \Delta \mathbf{x} = I_k(t_k, \mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k)), & (t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \in \mathcal{S} \\ y = h(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \end{cases} \quad (2.6)$$

donde se ha especificado también la salida del sistema $y(t)$ aunque no ejerce ningún papel en la dinámica del mismo.

En cuanto a la forma de clasificar a los sistemas impulsivos se suele adoptar la empleada en [9] donde se distinguen tres grupos: sistemas impulsivos a instantes fijos, sistemas impulsivos a instantes móviles y sistemas autónomos con impulsos. Aunque existen también otras clasificaciones paralelas como la propuesta en [157] que se basa en la forma en la que la acción de control entra en el sistema y diferencia en tres tipos de sistemas impulsivos. Ambas clasificaciones se pueden combinar dando lugar a 9 subclases de sistemas impulsivos. Se puede observar de que forma quedaría esta clasificación para el caso de sistemas impulsivos a instantes móviles,

es decir los sistemas en los que se produce el salto cuando $t = \tau_k(\mathbf{x})$.

Un sistema de control impulsivo de tipo I es el dado por

$$(I) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}) & t \neq \tau_k(\mathbf{x}) \\ \Delta \mathbf{x} = U(k, y) & t = \tau_k(\mathbf{x}) \\ y = g(t, \mathbf{x}). \end{cases} \quad (2.7)$$

donde la entrada de control está formada por los saltos en el estado a través del término $U(k, y)$. El sistema de control impulsivo de tipo II se describe con la expresión

$$(II) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) & t \neq \tau_k(\mathbf{x}) \\ \Delta \mathbf{x} = U(k, y) & t = \tau_k(\mathbf{x}) \\ y = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) & \mathbf{u} = \gamma(t, \mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.8)$$

en este caso se combinan dos acciones de control, el control impulsivo dado por $U(k, y)$ y el control continuo dado por $\mathbf{u} = \gamma(t, \mathbf{x})$. Por último el sistema de control impulsivo de tipo III está dado por

$$(III) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) & t \neq \tau_k(\mathbf{x}) \\ \Delta \mathbf{x} = j_k(\mathbf{x}) & t = \tau_k(\mathbf{x}) \\ y = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) & \mathbf{u} = \gamma(t, \mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.9)$$

para este tipo el control es totalmente continuo y el efecto impulsivo se produce únicamente en el estado de la planta.

2.1.2. Sistemas conmutados

En la figura 2.2 aparece un esquema de clasificación de los sistemas híbridos que muestra cómo los sistemas reseteados pueden incluirse como un tipo de sistemas conmutados o impulsivos según sean sistemas en tiempo discreto o continuo respectivamente.

Como el objetivo de esta tesis es el estudio de los sistemas reseteados en tiempo discreto, se realizará una introducción a los sistemas conmutados en el siguiente apartado.

Los sistemas conmutados son un tipo de sistemas dinámicos híbridos formados por una familia de subsistemas temporalmente continuos y una regla que dirige el cambio entre ellos [95]. Los sistemas conmutados se desarrollaron principalmente

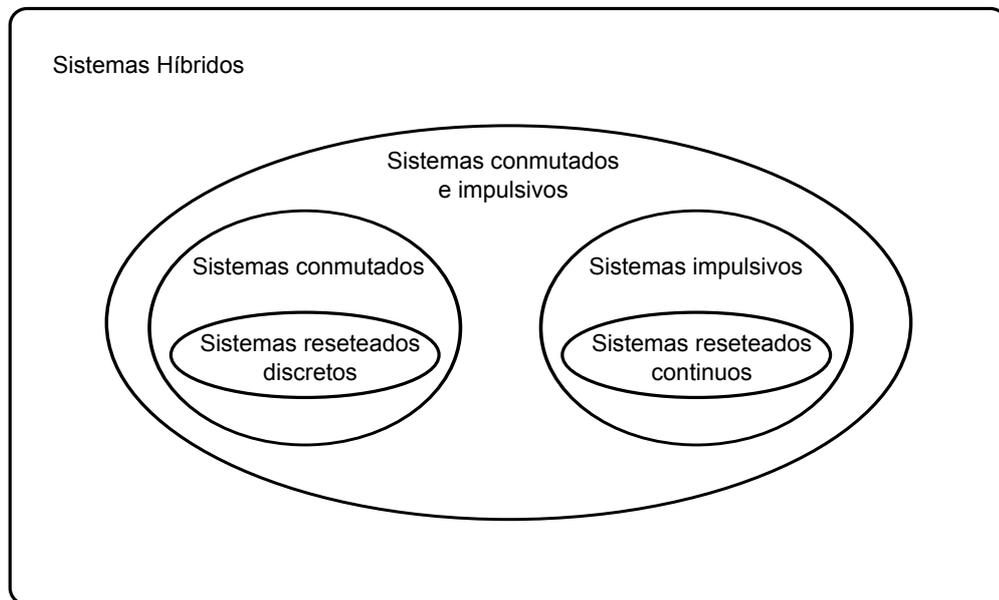


Figura 2.2: Clasificación sistemas híbridos.

en el campo del control adaptativo [63], por lo que es común encontrarlos representados como un autómata de estados finitos (que no sigue el esquema de los autómatas híbridos) tal y como se muestra en la figura 2.3. Existen ejemplos de aplicaciones de sistemas conmutados en diversos campos como el control de sistemas de fabricación [122; 140], el control de procesos [56] o la industria del automóvil [108].

Podemos considerar el sistema de transmisión de un automóvil como un buen ejemplo de sistema conmutado [38; 11]. Para el problema de la transmisión el objetivo es que el vehículo tenga un comportamiento adecuado en un amplio rango de velocidades con un consumo razonable de combustible. Para ello sería deseable que la potencia producida por el motor fuera constante con respecto a la velocidad, eso hace que la fuerza óptima tenga un perfil hiperbólico. Desgraciadamente la curva par-velocidad de un motor no tiene esa forma, por medio de una relación de marcha fija se puede modificar la curva par-velocidad y la adecuada combinación de varias de estas marchas puede hacer que el comportamiento del motor se acerque al deseado tal y como se muestra en la figura 2.4. Obviamente se podrá mejorar el ajuste a la fuerza óptima F_{opt} con una caja de cambios con más marchas.

Matemáticamente, un sistema conmutado (continuo) puede ser descrito por la

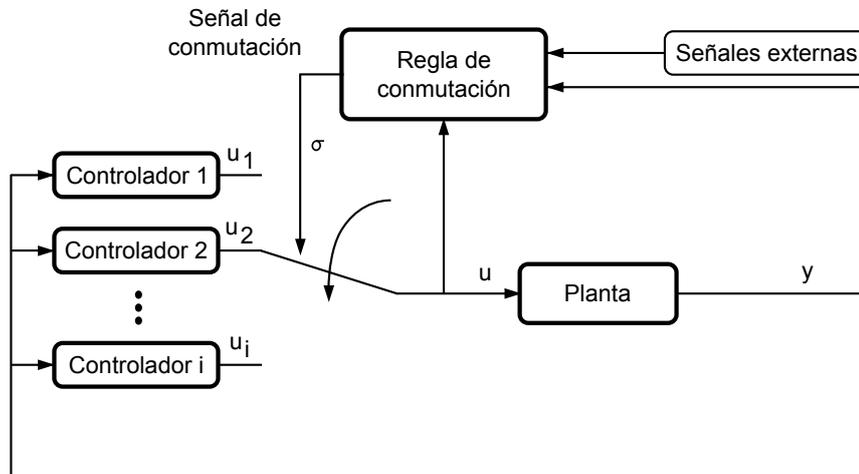


Figura 2.3: Representación de un sistema conmutado como un autómata de estados finitos.

siguiente familia de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\mathbf{x}} = f_{\sigma(t)}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (2.10)$$

donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $\mathbf{u}(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es la entrada del sistema, el conjunto $\{f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \forall i \in \mathcal{I}\}$ es una familia de funciones suficientemente regulares¹, parametrizadas por algún conjunto de índices \mathcal{I} y $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{I}$ es una función temporal constante a trozos, denominada señal de conmutación. Este tipo de funciones poseen varias denominaciones en forma de acrónimos como RCLL (*Right Continuous with Left Limits*). Al índice $p = \sigma(t)$, se le denomina modo activo en el instante t .

Una propiedad básica de los sistemas conmutados es la señal de conmutación, $\sigma(t)$, es decir, cómo seleccionar el modo activo en cada instante de tiempo. Según esta selección del modo activo, se clasifican los sistemas conmutados en tres subclases:

1. Control dependiente del tiempo, si la elección del modo activo sólo depende del tiempo.
2. Dependiente del estado, si el estado interviene en la elección del modo activo.
3. Con memoria, si además de alguno de los criterios anteriores el modo activo depende de los modos anteriores.

¹Se suele requerir que la función sea continua en t y localmente Lipschitz continua en x y u .

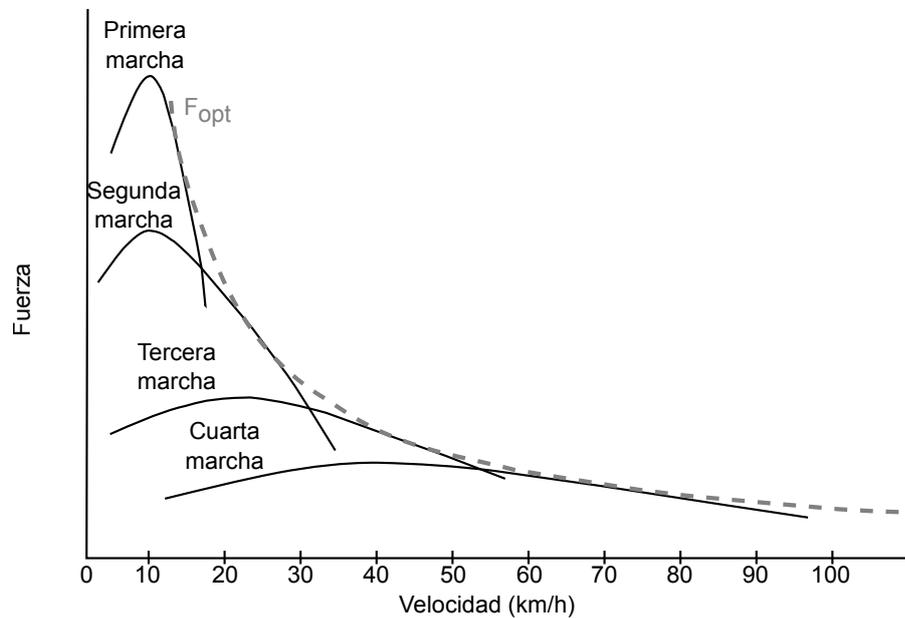


Figura 2.4: Fuerza motor frente a la velocidad.

Volviendo al ejemplo de la transmisión es evidente que pertenece al grupo de sistemas conmutados con memoria dado que para decidir el cambio de marcha se tiene en cuenta la marcha actualmente en uso.

Un aspecto interesante para la estabilidad de los sistemas conmutados, y que se empleará ampliamente posteriormente, es el concepto de **tiempo de permanencia** (*dwell time*) [109]. Se puede definir el tiempo de permanencia, τ_D , como un tiempo mínimo que el sistema debe de permanecer en cada modo antes de poder cambiar a un modo distinto $t_{i+1} - t_i \geq \tau_D$. Por lo general en los trabajos de control conmutado se asume que existe un cierto τ_D aunque este sea arbitrariamente pequeño.

Otro concepto de interés es el periodo de persistencia, T_P , que podemos definir como el tiempo máximo que el sistema puede permanecer en un modo antes de cambiar a otro.

Un resultado básico de la estabilidad de los sistemas conmutados que ilustra la importancia de la señal de conmutación es que el hecho de que un sistema conmutado autónomo; es decir un sistema sin entradas, pueda ser descrito por la siguiente familia de ecuaciones diferenciales lineales

$$\dot{\mathbf{x}} = A_i \mathbf{x} \quad (2.11)$$

donde A_i es asintóticamente estable para todo $i \in \mathcal{I}$, no implica que el sistema conmutado resultante sea estable, pudiéndose encontrar señales de conmutación que produzcan un sistema conmutado inestable. En la figura 2.5 se puede apreciar cómo distintas señales de conmutación pueden hacer que el sistema conmutado resultante de la combinación de dos sistemas estables (sistemas 1 y 2) sea estable o inestable. Para ello se muestra la representación de los sistemas en el espacio de estados.

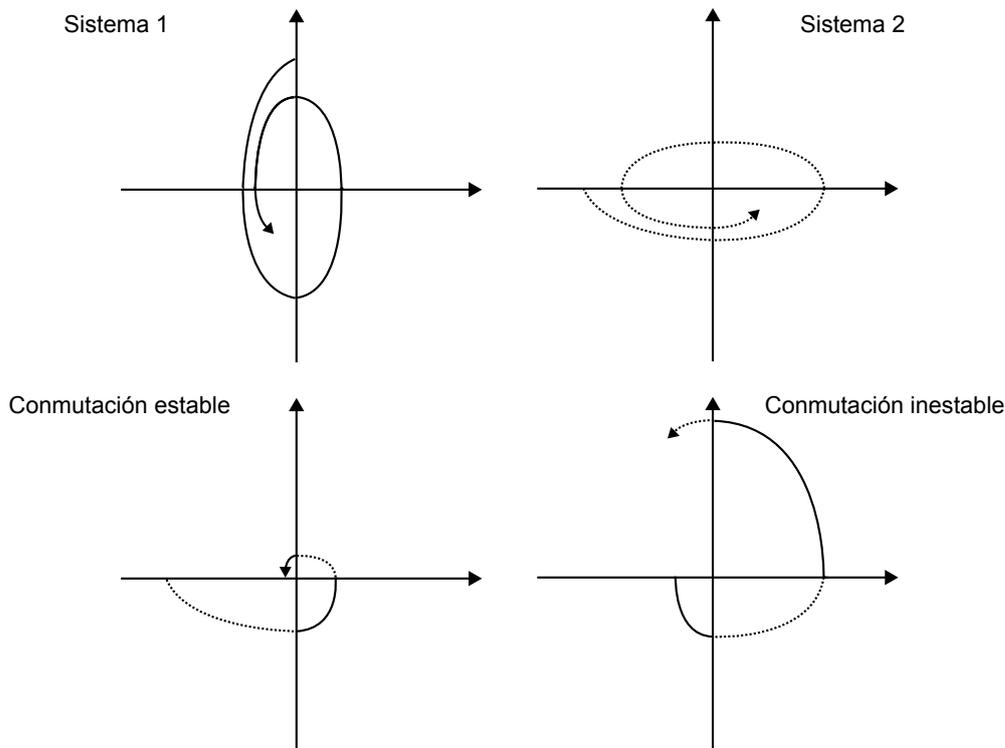


Figura 2.5: Conmutación entre sistemas estables.

Para consultar en profundidad resultados de estabilidad para sistemas conmutados se recomienda [96].

Las definiciones anteriores se referían al caso continuo, ahora se definirán los sistemas conmutados en tiempo discreto [134] como los sistemas que pueden ser descritos por la siguiente familia de ecuaciones en diferencias

$$\mathbf{x}(k+1) = g_{\sigma(k)}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \quad (2.12)$$

donde $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $\mathbf{u}(k) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es la entrada del

sistema, el conjunto $\{g_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \forall i \in \mathcal{I}\}$ y la señal de conmutación $\sigma(k)$ funcionan de forma análoga al caso continuo, sólo que ahora se evalúan de forma discreta $\sigma(k) : \mathbb{N} \rightarrow I$, con $I = \{1, \dots, N\}$ (N es el número de modos). También el tiempo de permanencia y el de persistencia se pueden definir de forma similar al caso continuo, ahora serán el número mínimo y máximo respectivamente de instantes de muestreo que el sistema puede permanecer en cada modo.

En el caso en el que los sistemas que forman un sistema conmutado discreto sean todos lineales se podrá escribir la ecuación (2.12) como

$$\mathbf{x}(k+1) = A_{\sigma(k)}\mathbf{x}(k) + B_{\sigma(k)}\mathbf{u}(k) \quad (2.13)$$

donde $A_{\sigma(k)}$ y $B_{\sigma(k)}$ son familias de matrices con las dimensiones adecuadas.

En la siguiente sección se verá cómo los sistemas reseteados discretos en el tiempo se adaptan a la estructura de los sistemas conmutados en tiempo discreto dada por la ecuación (2.13).

2.2. Sistemas reseteados discretos en el tiempo

Esta sección se dedicará a introducir los sistemas de control reseteados en tiempo discreto. Estos sistemas surgen a partir de los sistemas reseteados continuos en el tiempo que fueron los primeros en ser propuestos, en los años 50 del pasado siglo. Sin embargo a pesar de que hay bastantes aplicaciones en las que se emplean sistemas en tiempo discreto, los sistemas reseteados en tiempo discreto, hasta donde llega el conocimiento del autor no fueron introducidos hasta el trabajo [19]. Esta es por tanto la primera contribución de este trabajo.

Se puede considerar que con carácter general un **sistema reseteado** es un sistema en el que se alternan una dinámica que está vigente la mayor parte del tiempo y una serie de acciones puntuales que consisten en llevar a ciertos valores concretos a algunos estados del sistema, esas acciones puntuales son lo que se conoce como acción de *reset*. En este trabajo se estudiarán dos tipos de sistemas reseteados:

Controladores reseteados discretos en el tiempo C_R . Serán sistemas discretos en el tiempo con una dinámica continua, que se deriva de un controlador LTI, a la que se añade una acción de *reset*.

Sistema de control reseteado discretos en el tiempo Σ_R . Son los sistemas que resultan de la conexión en lazo cerrado de un controlador reseteado discreto en el tiempo con una planta P . Esta planta puede ser tanto continua como discreta en

el tiempo.

Definición: Se define un sistema de control reseteado discreto en el tiempo como un sistema conmutado discreto que puede ser descrito por la siguiente expresión en el espacio de estados:

$$\Sigma_R : \begin{cases} d(k+1) = d(k) + 1, \mathbf{z}(k+1) = A(k)\mathbf{z}(k) & d(k) < D \vee (k, \mathbf{z}(k)) \notin \mathcal{K} \times \mathcal{M} \\ d(k+1) = 0, \mathbf{z}(k+1) = A_R(k)\mathbf{z}(k) & d(k) \geq D \wedge (k, \mathbf{z}(k)) \in \mathcal{K} \times \mathcal{M} \\ d(0) = 0, \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

donde $k \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $A(k)$ y $A_R(k)$ son matrices reales de dimensión $n \times n$, $\mathcal{K} \times \mathcal{M} \subset \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^n$ es la condición de reseteo, y $d \in \mathbb{Z}^+$ representa el número de periodos de muestreo pasados desde la anterior acción de *reset*, siendo $D \in \mathbb{N}$ una constante que se definirá más tarde para cada caso. Este sistema reseteado se puede ver cómo una versión discreta en el tiempo de los sistemas impulsivos definidos en [76]. Aunque también se adaptan a la estructura de los sistemas conmutados discretos en tiempo discreto presentados en la sección anterior.

Una característica distintiva de los sistemas reseteados es que el estado $\mathbf{z}(k)$ cambia de valor de acuerdo a una serie de acciones puntuales en los instantes en los que se cumple la condición de reseteo. El valor de esas acciones puntuales vendrá dado por la matriz $A_R(k)$. La primera ecuación en diferencias en (2.14) representa la acción de lo que se llama el *sistema base* y se corresponde con el flujo en los sistemas impulsivos, mientras que la segunda ecuación en diferencias representa la acción de *reset* y se corresponde con el salto en sistema impulsivos. En esta formulación se ha introducido un tiempo de permanencia D que aparece explícitamente en la ecuación. También aparece un estado auxiliar d que representa el tiempo transcurrido desde la anterior acción de *reset* de modo que sólo se permite realizar una acción de *reset* en el instante k si $d(k) \geq D$, es decir si han pasado D instantes de muestreo desde la anterior acción de *reset*. Se dice que es un estado auxiliar porque su evolución no afecta al resto de la dinámica del sistema.

Es importante destacar que, al contrario de lo que ocurre con los sistemas reseteados continuos en el tiempo [14], los sistemas reseteados discretos en el tiempo están siempre bien definidos en el sentido de que siempre hay una solución para cualquier condición inicial. En general el conjunto de *reset* \mathcal{M} es un subconjunto de \mathbb{R}^n y por tanto para cualquier condición inicial $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^n$ existe una secuencia, finita o infinita, de instantes de reseteo (k_n) , $n = 1, 2, \dots$. Una función $\mathbf{z} : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una solución del sistema reseteado discreto en el tiempo (2.14) en \mathbb{Z}^+ con condición inicial $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$ si $\mathbf{z}(k)$ cumple la expresión (2.14) para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Si en algún instante $k > 0$ el estado del sistema $\mathbf{z}(k)$ se encuentra en el conjunto de *reset* \mathcal{M} y

además el instante k es un instante de reseteo permitido en el sentido de que $k \in \mathcal{K}$ y al menos D instantes de muestreo han pasado desde el anterior instante de reseteo, es decir $d(k) \geq D$, entonces la evolución del sistema está dada por la acción de *reset* (la segunda ecuación en (2.14)), si no se cumple lo anterior la evolución del sistema está gobernada por la ecuación del sistema base (primera ecuación en (2.14)).

Cualquier solución de (2.14) tiene la forma

$$\mathbf{z}(k) = A(k)A(k-1) \cdots A(k_{n-1}+1)A_R(k_{n-1})\mathbf{z}(k_{n-1}) \quad (2.15)$$

para $k_{n-1} < k \leq k_n$, con $k_0 = 0$.

El comportamiento de un sistema reseteado será diferente en función de las distintas elecciones que se pueden hacer de la condición de reseteo. En este trabajo se desarrollarán dos formulaciones distintas para la condición de reseteo, un *reset* dependiente del tiempo y un *reset* dependiente del estado. A continuación se tratará cada uno de estos casos por separado comenzando con el *reset* dependiente del estado.

2.2.1. Reset dependiente del estado

En este apartado se abordará el problema de trasladar al caso de sistemas discretos en el tiempo la condición de reseteo tradicional del paso por cero (o cualquier otro valor) de la señal de entrada de un controlador reseteado.

Para este caso la condición de reseteo dependerá sólo del estado del sistema, con lo que las ecuaciones del sistema de control reseteado discreto en el tiempo (2.14) se pueden simplificar

$$\begin{cases} d(k+1) = d(k) + 1, \mathbf{z}(k+1) = A(k)\mathbf{z}(k) & d(k) < D \vee \mathbf{z}(k) \notin \mathcal{M} \\ d(k+1) = 0, \mathbf{z}(k+1) = A_R(k)\mathbf{z}(k) & d(k) \geq D \wedge \mathbf{z}(k) \in \mathcal{M} \\ d(0) = 0, \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

y, en general, los instantes de reseteo dependerán únicamente de la condición inicial \mathbf{z}_0 y del tiempo de permanencia D . Por tanto, los instantes de reseteo pueden ser definidos de forma recursiva a través de las funciones $\tau_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$:

$$\begin{aligned} k_n = \tau_n(\mathbf{z}_0) = \\ = \min\{k \in \mathbb{Z}^+ : k - k_{n-1} \geq D, A(k)A(k-1) \cdots A(k_{n-1}+1)A_R(k_{n-1})\mathbf{z}(k_{n-1}) \in \mathcal{M}\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde por definición $\min \emptyset = \infty$. Además, los intervalos de reseteo Δ_n se pueden definir como $\Delta_n = k_{n+1} - k_n$, para $n = 0, 1, 2, \dots$

Un caso particularmente simple se obtiene cuando en el sistema de control reseteado (2.16) las matrices A y A_R son constantes en el tiempo, es decir, que no dependen de k . En este caso los instantes de reseteo vendrán dados por

$$k_n = \tau_n(\mathbf{z}_0) = \min\{k \in \mathbb{Z}^+ : k - k_{n-1} \geq D, A^{k-k_{n-1}} A_R \mathbf{z}(k_{n-1}) \in \mathcal{M}\}. \quad (2.18)$$

A continuación se comprobará como la conexión en lazo cerrado de un planta lineal con un controlador reseteado discreto en el tiempo da lugar a un sistema de control reseteado discreto en el tiempo (2.16), para ello se seguirá el esquema con reglamentación negativa que se muestra en la figura 2.6.

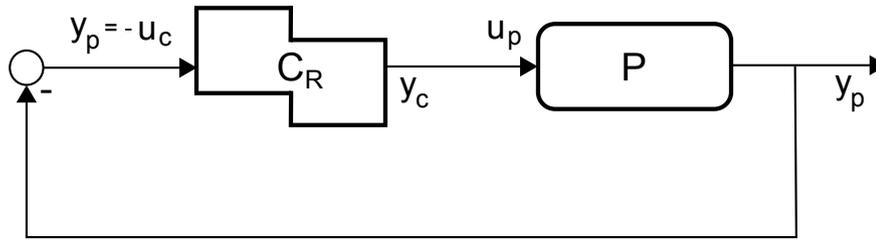


Figura 2.6: Controlador reseteado, C_R , conectado en lazo cerrado con una planta, P .

La planta P será un sistema SISO (*Single-Input Single-Output*) lineal y variable en el tiempo

$$P : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_p(t) = A_p(k)\mathbf{x}_p(t) + B_p(k)u_p(t) \\ y_p(k) = C_p(k)\mathbf{x}_p(t) \end{cases} \quad (2.19)$$

y C_R es un controlador reseteado discreto en el tiempo con tiempo de permanencia D , dado por

$$\begin{aligned} n(k+1) &= n(k) + 1, \mathbf{x}_c(k+1) = A_c(k)\mathbf{x}_c(k) + B_c(k)u_c(k) & n(k) < D, 0 < u_c(k-1) \cdot u_c(k) \\ n(k+1) &= 0, \mathbf{x}_c(k+1) = A_\rho \mathbf{x}_c(k) & n(k) \geq D, 0 \geq u_c(k-1) \cdot u_c(k) \\ y_c(k) &= C_c(k)\mathbf{x}_c(k) + D_c(k)u_c(k) \end{aligned} \quad (2.20)$$

A la matriz A_ρ se la conoce como **matriz de reset** y es una matriz diagonal de unos y ceros. Los estados del controlador a los que les corresponde un cero son reseteados mientras que aquellos a los que corresponde un uno permanecen inalterados cuando el sistema experimenta una acción de *reset*. En función de los valores que toma la matriz A_ρ se puede distinguir entre sistemas reseteados completamente, cuando $A_\rho = 0$ y sistemas reseteados parcialmente que son aquellos en los que

$A_\rho \neq 0$.

En el controlador (2.20) se ha incluido como condición para que se produzca la acción de reset que $0 \geq u_c(k-1) \cdot u_c(k)$, es decir, se fija como condición que se produzca un cambio de signo en la entrada del controlador. Esta condición fue propuesta por vez primera por los autores en [19] y es la forma natural de considerar en sistemas discretos en el tiempo la condición de paso por cero.

Las conexiones en el lazo cerrado entre la planta (2.29) y el controlador (2.20) están dadas por:

$$u_c(k) = -y_p(k) \quad u_p(k) = y_c(k) \quad (2.21)$$

De modo que si se define el estado del sistema en lazo cerrado como:

$$\mathbf{z}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_p(k) \\ \mathbf{x}_c(k) \\ \mathbf{x}_p(k-1) \\ \mathbf{x}_c(k-1) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

donde se ha definido el estado empleando los estados del controlador y el sistema en dos instantes de muestreo consecutivos. Con esta definición será posible conocer la evolución del sistema entre dos instantes de muestreo. Lo que permitirá definir el conjunto de *reset*, \mathcal{M} , que se emplea en (2.16), de la siguiente forma:

$$\mathcal{M} \equiv \{\mathbf{z}(k) \mid 0 \geq (C_p \ 0 \ 0 \ 0) \mathbf{z}(k) (0 \ 0 \ C_p \ 0) \mathbf{z}(k)\} \quad (2.23)$$

Se puede realizar una formulación más compacta del conjunto de *reset* definiendo la matriz \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_p^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ C_p \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_p^T C_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Con lo que la definición del conjunto de estados en los que se puede producir una acción de reseteo queda en la siguiente forma:

$$\mathcal{M} \equiv \{\mathbf{z}(k) \mid 0 \leq \mathbf{z}^T(k) \mathbf{C} \mathbf{z}(k)\} \quad (2.25)$$

Se puede definir por tanto la condición de reseteo como una restricción sobre el estado aumentado del sistema, tal y como se avanzó anteriormente.

La representación del estado del sistema en lazo cerrado en la representación de espacio de estados vendrá dada entonces por la ecuación (2.16) con el conjunto de *reset* dado por (2.25) con las siguientes matrices de evolución $A(k)$ y $A_R(k)$

$$A(k) = \begin{pmatrix} A_p(k) - B_p(k)D_c(k)C_p(k) & B_p(k)C_c(k) & 0 & 0 \\ -B_c(k)C_p(k) & A_c(k) & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

$$A_R(k) = \begin{pmatrix} A_p(k) - B_p(k)D_c(k)C_p(k) & B_p(k)C_c(k) & 0 & 0 \\ 0 & A_p & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

La ecuación de estado en lazo cerrado (2.16) servirá de base para la realización del análisis de estabilidad de este tipo de sistemas reseteados dependientes del estado, dado que la estructura de la ecuación no cambiará sólo lo harán las matrices en función del problema concreto que se esté tratando.

Con carácter general se puede decir que un sistema en el que la condición de reseteo depende del estado tiene una formulación sencilla del valor de la acción de *reset*, porque se emplea simplemente la matriz A_p . Pero con estos sistemas la condición de reseteo es complicada en el sentido de que, aunque se pueden definir el conjunto de los instantes de reseteo tal y como se hace en (2.17) no se puede conocer a priori cuando se van a producir los instantes de reseteo. Ese ha sido tradicionalmente el principal problema a la hora de estudiar la estabilidad de los sistemas reseteados. Será en los siguientes capítulos cuando se darán condiciones de estabilidad para este tipo de sistemas.

Para finalizar este apartado se mostrarán un par de ejemplos de la dinámica de los sistemas reseteados dependientes del estado invariantes en el tiempo, es decir las matrices A y A_R serán constantes en el tiempo. El caso más general en el que sean variables en el tiempo se estudiará en el capítulo 4.

Ejemplo 2.1 Sea una planta LTI discreta descrita por la ecuación (2.29) con periodo de muestro $h = 0,5$ s. con las siguientes matrices;

$$A_p = \begin{pmatrix} 0,1353 & 0 \\ 0,4323 & 1 \end{pmatrix}, B_p = \begin{pmatrix} 0,8647 \\ 0,5677 \end{pmatrix}, C_p = (0,5, 0,5), D_p = 0 \quad (2.28)$$

La planta está conectada en lazo cerrado, según el esquema de la figura 2.6 al que se le añade la entrada de una referencia, con un controlador proporcional integral en tiempo discreto con el mismo periodo de muestreo. La ecuación de ese controlador será (2.20) con las matrices: $A_c = 1$, $B_c = 0,5$, $C_c = 0,1$ y $D_c = 0,5$. La acción de reseteo será completa, es decir, el único estado del controlador pasa a valer cero en los instantes de reset $A_\rho = 0$. Y se considerará el caso en el que el tiempo de permanencia es $D = 1$. Para este ejemplo se ha seguido el procedimiento usual para los sistemas reseteados consistente en seleccionar un controlador base que sea rápido sin reparar en el sobreimpulso que tenga dado que las acciones de reseteo lo compensarán.

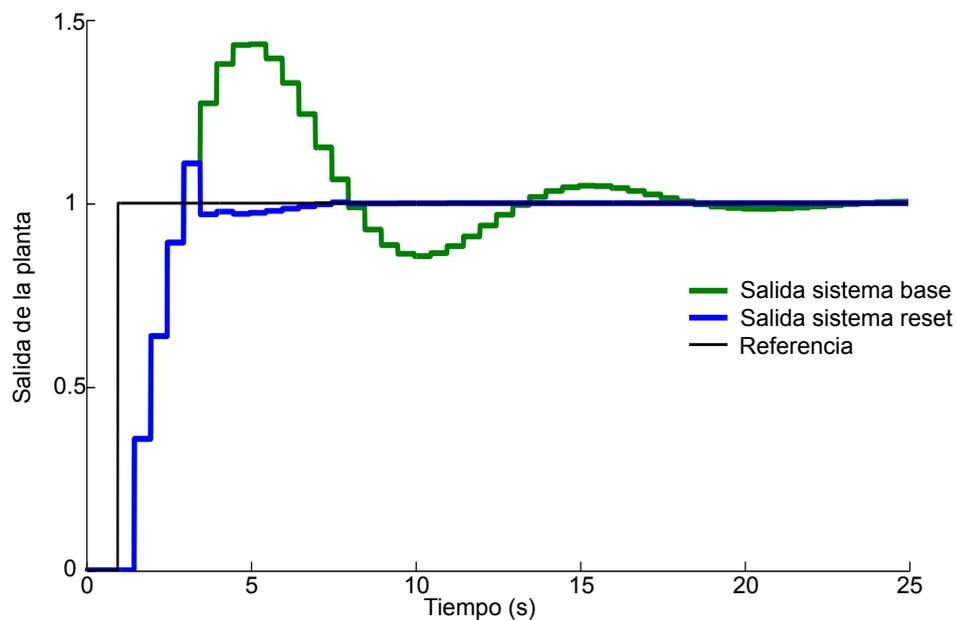


Figura 2.7: Salida de los sistemas base y reseteados del Ejemplo 2.1

En la figura 2.7 se puede apreciar la salida del sistema de lazo cerrado cuando la entrada es una referencia escalón. Se muestran tanto la salida del controlador reseteados como la del controlador lineal base. Cuando la señal de error cambia de signo, es decir cuando la entrada del controlador pasa por cero, el estado del controlador se resetea eliminando en gran parte el sobreimpulso. El comportamiento de este tipo de sistema es análogo a los sistemas reseteados continuos en el tiempo y se puede ver como el efecto es similar en el Ejemplo 1.1.

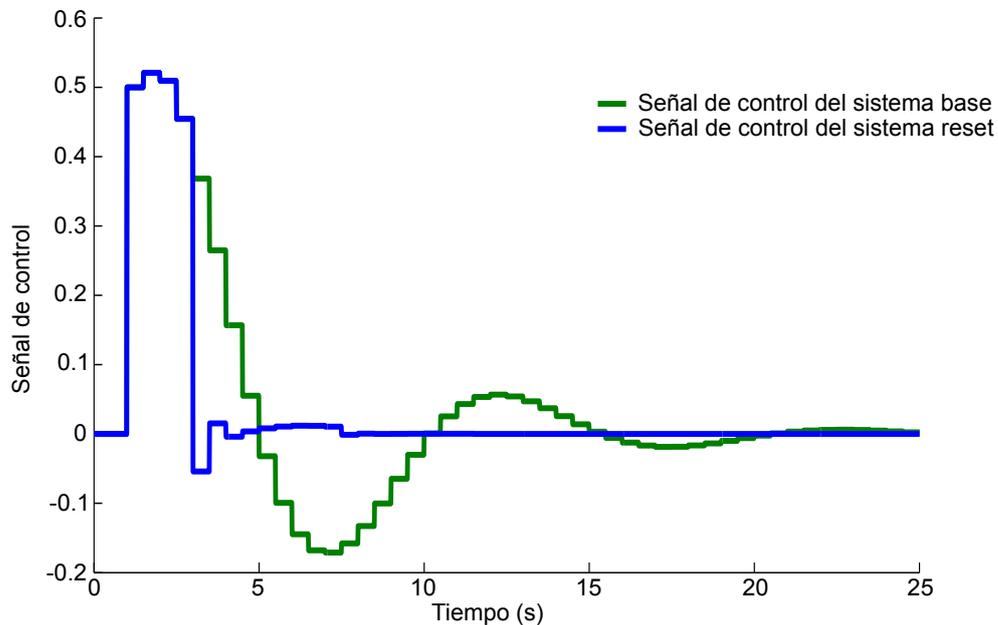


Figura 2.8: Señal de control de los sistemas base y reseteado del Ejemplo 2.1

La señal de control se muestra en la figura 2.8 donde se puede apreciar el salto que se produce en la señal de control del controlador reseteado cuando se produce el paso por cero del error. Uno de los inconvenientes que pueden tener los controladores reseteados respecto a los controladores lineales es que aparecen esos saltos bruscos en la señal de control y si son demasiado grandes pueden producir problemas en los actuadores.

Ejemplo 2.2 En este ejemplo se controlará una planta LTI continua en el tiempo con un controlador reseteado discreto en el tiempo y se comparará ese controlador con un controlador lineal sintonizado siguiendo técnicas de IMC (*Internal Mode Control*). La planta que se desea controlar viene dada por la siguiente función de transferencia $P(s) = \frac{s+1}{s^2+2s}$ y el objetivo es controlarla de forma adecuada empleando un controlador discreto en el tiempo con un periodo de muestreo de 0.5 s. En principio podría parecer que este periodo de muestreo es demasiado grande para controlar esa planta dado que tiene un polo en $s = -2$, pero ese polo prácticamente se cancela con el cero en $s = -1$ con lo que la dinámica que queda es la del integrador que es suficientemente lenta para ser controlada con un periodo de muestreo de 0.5 s.

La planta se puede representar con la siguiente ecuación diferencial en el espacio de estados

$$P : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_p(t) = A_p \mathbf{x}_p(t) + B_p u_p(t) \\ y_p(k) = C_p \mathbf{x}_p(t) \end{cases} \quad (2.29)$$

con las siguientes matrices

$$A_p = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C_p = (1, 1) \quad (2.30)$$

Se empleará el controlador reseteado dado por (2.20) con dos controladores base distintos, en primer lugar un controlador proporcional integral discreto en el tiempo, PI base, que se elige de forma que el sistema resultante tenga mucho sobreimpulso y que tiene las siguientes matrices de evolución

$$A_{c1} = 1, B_{c1} = 0,5, C_{c1} = 0,4, D_{c1} = 0,5 \quad (2.31)$$

el segundo controlador es otro controlador proporcional integral discreto en el tiempo, PI IMC, sintonizado siguiendo los criterios de sintonía de para sistemas IMC dados en [138] suponiendo que la planta se comporta como un integrador con un retardo de 0.25 s. y fijando $\tau_c = 3\theta$. Con lo que se obtienen las siguientes matrices de evolución para el segundo controlador

$$A_{c2} = 1, B_{c2} = 0,5, C_{c2} = 0,25, D_{c2} = 1 \quad (2.32)$$

en ambos controladores reseteados se ha considerado un tiempo de permanencia $D = 1$.

En la figura 2.9 se muestra la salida de los sistema PI base y su correspondiente sistema reseteado, que se ha llamado PI + CI, en analogía con el controlador PI + CI continuo en el tiempo [21]. Al igual que en el ejemplo anterior el efecto de las acciones de *reset* elimina gran parte del sobreimpulso. También se muestran las señales de control en la figura 2.10 donde se pueden apreciar los saltos que producen las acciones de *reset*, especialmente el que se produce tras el primer paso por cero en el segundo 4, este salto en la señal de control es el responsable de la eliminación del sobreimpulso.

En la figura 2.11 se muestran las salidas de los sistemas PI IMC y su sistema reseteado correspondiente, que se ha llamado PI + CI IMC. En este caso el sistema con el controlador PI IMC tiene un tiempo de pico ligeramente mayor que con el controlador PI base, pero su sobreimpulso es mucho menor y también tiene un menor tiempo de asentamiento. En la figura se puede apreciar como de nuevo el

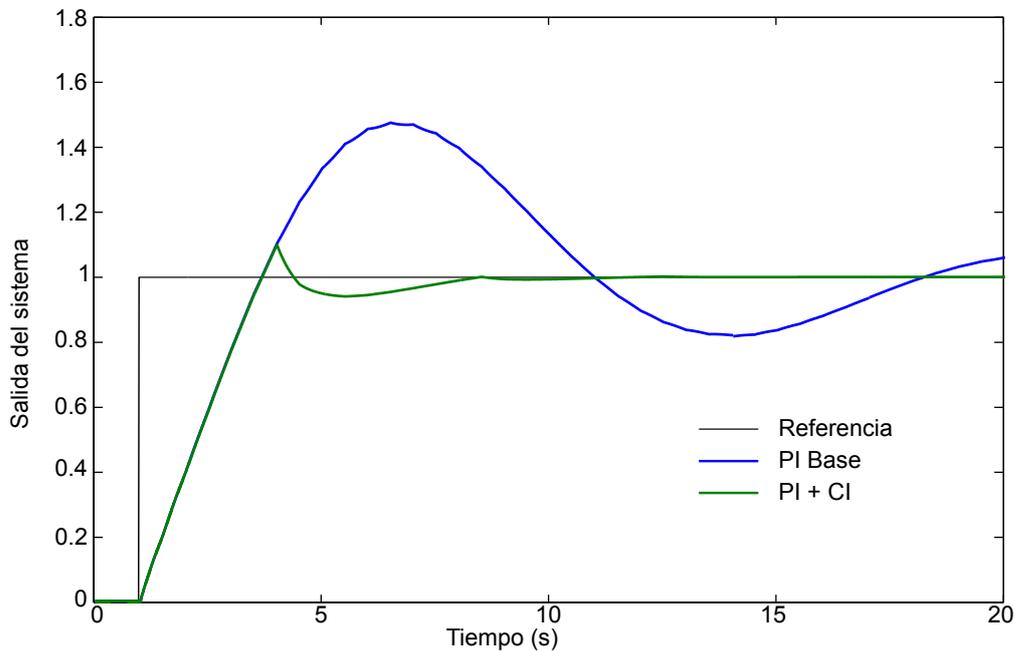


Figura 2.9: Salida del sistema PI base y del reseteado del Ejemplo 2.2

controlador reseteado mejora al controlador lineal reduciendo el sobreimpulso y el tiempo de asentamiento. Las señales de control de estos sistemas aparecen en la figura 2.12, en este caso los saltos introducidos por las acciones de *reset* son menores que en el caso anterior porque el controlador base es más suave y en el momento de producirse el paso por cero el estado del integrador es menor.

En la tabla 2.1 se muestran los valores del IAE (*Integral Absolute Error*) e ITAE (*Integral Time Absolute Error*) para el sistema con el controlador PI IMC y los dos controladores reseteados. El valor de ambos índices sirve de indicador de la eficacia del controlador, cuanto menor sea el valor mejor es el controlador. El IAE es la integral del valor absoluto del error durante cierto tiempo (en este caso el tiempo de simulación 20 s.) mientras que el ITAE es la integral del valor absoluto del error multiplicado por el tiempo. Para este ejemplo los dos controladores tienen valores menores que el controlador PI IMC, y el mejor controlador reseteado es el PI + CI IMC. Se puede argumentar que el PI + CI IMC es mejor que el PI + CI porque el cruce por cero del primero se produce cerca del siguiente instante de muestreo por lo que hay poco desfase entre el cruce por cero y el momento en el que se produce la acción de *reset* mientras que el caso del PI + CI hay más distancia entre el cruce por cero y el instante de reseteo, lo que hace que aumente el error del sistema.

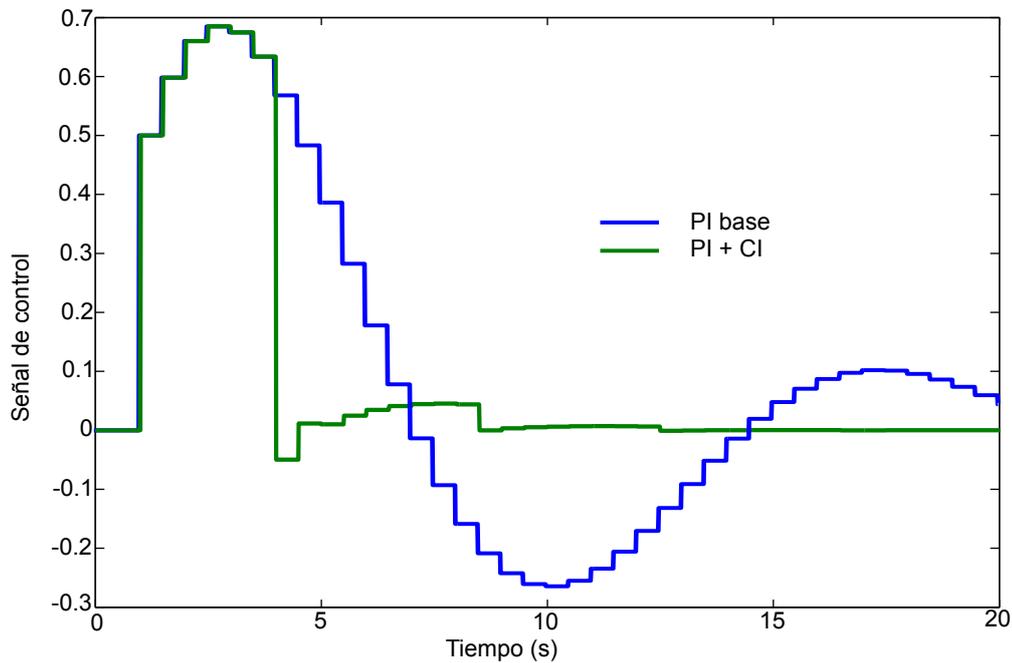


Figura 2.10: Señal de control del sistema base 1 y del reseteo del Ejemplo 2.2

	IAE	ITAE
PI IMC	2.339	14.567
PI+CI	1.477	3.601
PI+CI IMC	1.1106	2.55

Tabla 2.1: IAE e ITAE del Ejemplo 2.2

2.2.2. Reset dependiente de condiciones temporales.

En este apartado se desarrollará una variante de los sistemas de control reseteados discretos en el tiempo (2.14) en la que los momentos en los que ocurren las acciones de *reset* no son dependientes del estado del sistema sino de condiciones temporales. Se estudiará en profundidad el caso particular en el que las acciones de *reset* ocurran de forma periódica.

Cuando el *reset* depende de condiciones temporales las acciones de *reset* se producen independientemente de la condición inicial, z_0 , en una serie de instantes k que pertenecen al conjunto de instantes de reseteo $\mathcal{K} \subset \mathbb{Z}^+$. De forma que la constante que fija el tiempo de permanencia puede ser incluida en el conjunto de instantes de reseteo \mathcal{K} y se puede obtener una versión simplificada de (2.14) para

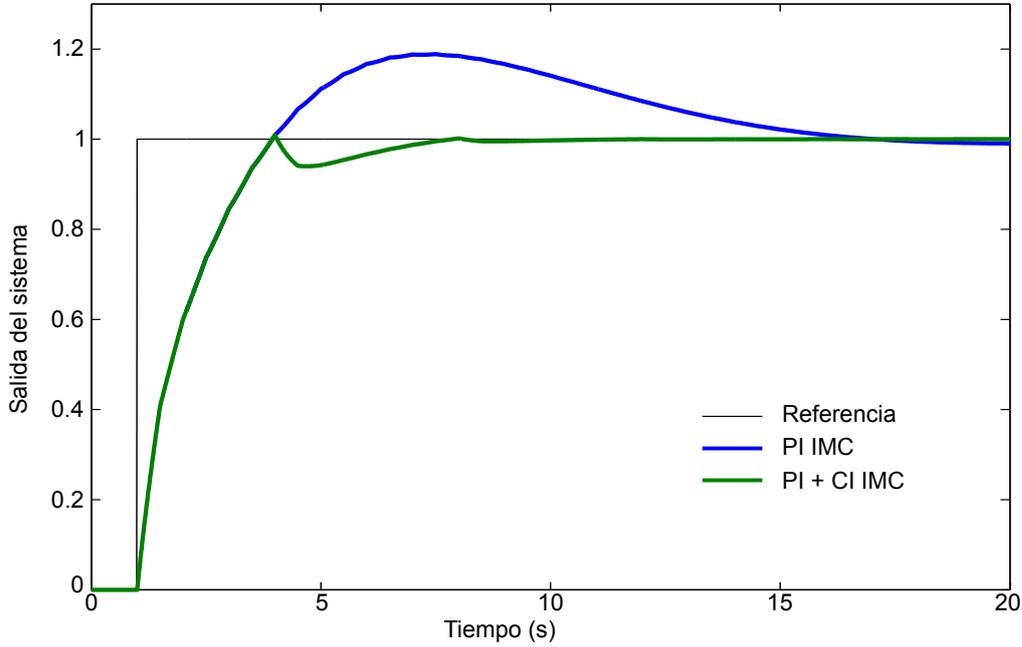


Figura 2.11: Salida del sistema PI IMC y del reseteado del Ejemplo 2.2

este caso

$$\Sigma_R = \begin{cases} \mathbf{z}(k+1) = A(k)\mathbf{z}(k) & k \notin \mathcal{K} \\ \mathbf{z}(k+1) = A_R(k)\mathbf{z}(k) & k \in \mathcal{K} \\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \end{cases} \quad (2.33)$$

En este caso, para un conjunto de instantes de reseteo $\mathcal{K} = \{k_1, k_2, \dots\}$, la solución de (2.33) es de nuevo

$$\mathbf{z}(k) = A(k)A(k-1) \cdots A(k_{n-1}+1)A_R(k_{n-1})\mathbf{z}(k_{n-1}) \quad (2.34)$$

para $k_{n-1} < k \leq k_n$ (con $k_0 = 0$).

Si el sistema tiene una entrada $r(k)$ entonces (2.33) se puede reescribir como:

$$\Sigma_R = \begin{cases} \mathbf{z}(k+1) = A(k)\mathbf{z}(k) + B(k)r(k) & k \notin \mathcal{K} \\ \mathbf{z}(k+1) = A_R(k)\mathbf{z}(k) + B_2(k)r(k) & k \in \mathcal{K} \\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \end{cases} \quad (2.35)$$

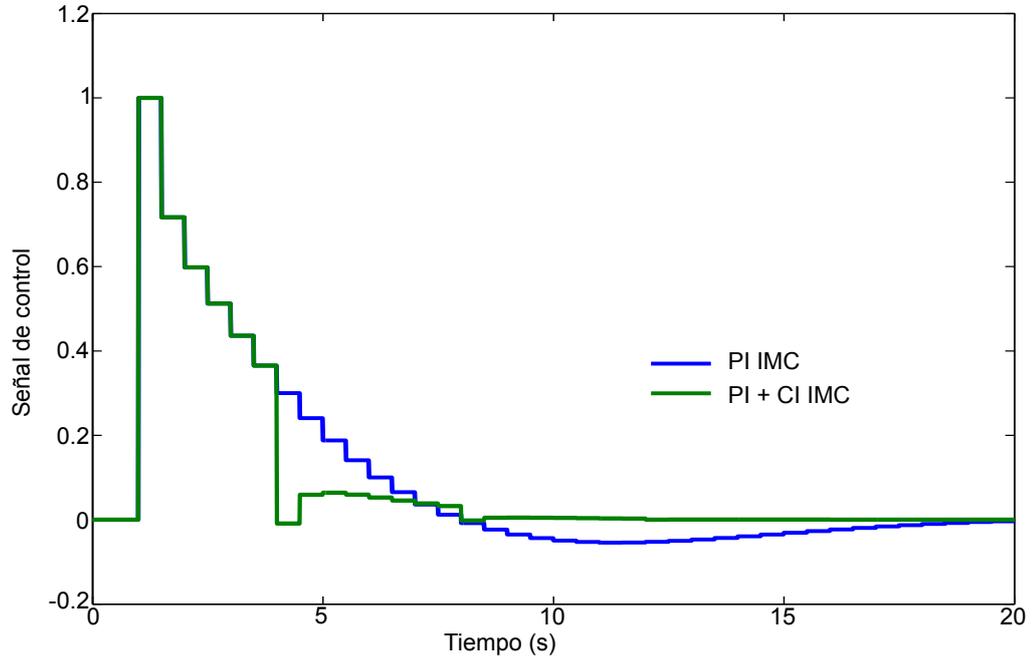


Figura 2.12: Señal de control del sistema PI IMC y del reseteado del Ejemplo 2.2

En este tipo de sistemas se puede ver como un sistema conmutado discreto en el tiempo que va cambiando entre el sistema base, dado por la primera ecuación de (2.35) y un sistema *de salto* que está dado por la segunda ecuación de (2.35).

A continuación se estudiará el caso en el que las acciones de *reset* ocurran de forma periódica.

Definición: Se define el **periodo de reseteo**, $n_R \in \mathbb{N}$, como el número fijo de instantes de muestro que tienen lugar entre dos acciones de *reset* consecutivas.

De forma que si las acciones de *reset* ocurren de forma periódica, el conjunto \mathcal{K} queda de la siguiente forma $\mathcal{K} = \{k \mid k = n_R l; l = 1, 2, 3, \dots\}$.

El controlador reseteado vendrá dado por la siguiente expresión:

$$C_R = \begin{cases} \mathbf{x}_c(k+1) = A_c(k)\mathbf{x}_c(k) + B_c(k)u_c(k) & k \notin \mathcal{K} \\ \mathbf{x}_c(k+1) = f(\mathbf{x}_p(k), \mathbf{x}_c(k)) & k \in \mathcal{K} \\ y_c(k) = C_c(k)\mathbf{x}_c(k) + D_c(k)u_c(k) \end{cases} \quad (2.36)$$

donde $F : \mathbb{R}^{n_p} \times \mathbb{R}^{n_c} \rightarrow \mathbb{R}^{n_c}$ es una función de los valores del estado de la planta y del controlador. Al valor $f(\mathbf{x}_p(k), \mathbf{x}_c(k))$ se la llamará de ahora en adelante **valor**

de reseteo. En el caso del *reset* dependiente del estado era suficiente que valor de la acción de *reset* fuera función del estado del controlador porque las acciones de *reset* tienen lugar cuando se produce el cruce por cero del error (o en siguiente instante de muestreo en el caso discreto en el tiempo) y en ese momento tiene sentido disminuir el valor del estado del controlador para que pierda parte de la inercia que hace que se produzca el sobreimpulso. En el caso en el que las acciones de *reset* tienen lugar de forma periódica puede ocurrir que en el momento en el que se produzca una de estas acciones el sistema tenga un cierto error y si la acción de *reset* pone a cero el estado del controlador el efecto sobre la sistema no sea el deseado.

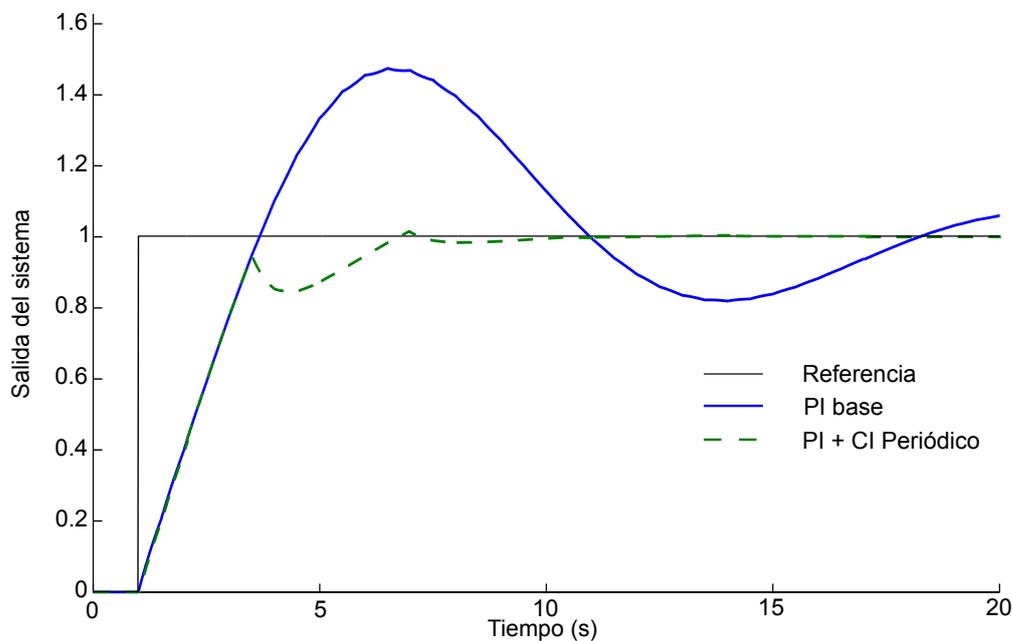


Figura 2.13: Salida del Ejemplo 2.2 con un controlador reseteado periódico mal sintonizado.

En la figura 2.13 se muestra la salida del sistema empleado en el Ejemplo 2.2 con un controlador periódico mal sintonizado, se ha empleado el controlador PI + CI y se ha fijado un periodo de reseteo $n_R = 7$ y un *reset* completo $A_p = 0$, como el periodo de muestreo del controlador es de 0.5 s. las acciones de *reset* se producirán cada 3.5 s. Cuando se produce el primer instante de reseteo el sistema aún no ha alcanzado el valor de la referencia de modo que al que se ponga a cero el valor del estado del controlador hace que el sistema experimente un *rebote* antes de alcanzar el valor de la referencia deseada.

Será por tanto necesario calcular el valor de reseteo en función de los valores del estado de la planta y del controlador. Si el sistema en lazo cerrado tiene alguna referencia, tal y como se muestra en la figura 2.14 entonces el valor de reseteo también podrá depender de esa referencia $f(\mathbf{x}_p(k), \mathbf{x}_c(k), r)$.

Hay que remarcar que en este caso no se necesita definir el estado del sistema en lazo cerrado como la combinación de los estados de la planta y el controlador en el instante actual y el anterior. Se puede redefinir el estado en lazo cerrado como $\mathbf{z}(k) = [\mathbf{x}_p(k), \mathbf{x}_c(k)]^T$, dado que el valor pasado de los estados no influye en la dinámica ni es necesario para definir la condición de reseteo.

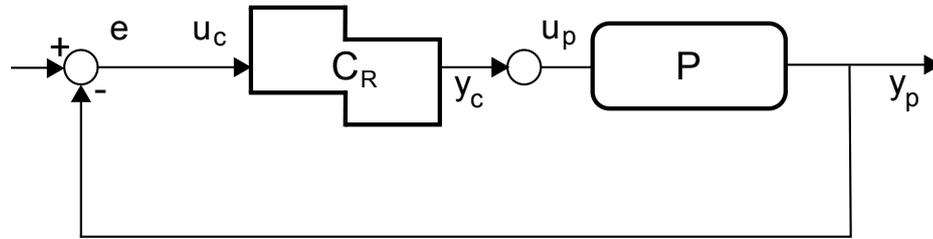


Figura 2.14: Controlador *reset* C y planta LTI P .

Sea el sistema en lazo cerrado de la figura 2.14 con una planta lineal discreta en el tiempo dada por la ecuación (2.29) y el controlador (2.36), donde $r(k)$ es la referencia de entrada del sistema y $e = r - y_p$ es el error de seguimiento. Se puede describir la dinámica del sistema en lazo cerrado con la siguiente expresión

$$\text{Ec. estado : } \begin{cases} \mathbf{z}(k+1) = A(k)\mathbf{z}(k) + B(k)r(k) & k \notin \mathcal{K} \\ \mathbf{z}(k+1) = A_2(k)\mathbf{z}(k) + B_2(k)r(k) + F & k \in \mathcal{K} \\ y(k) = C(k)\mathbf{z}(k) \end{cases} \quad (2.37)$$

con las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} A_p(k) - B_p(k)D_c(k)C_p(k) & B_p(k)C_c(k) \\ -B_c(k)C_p(k) & A_c(k) \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} B_p(k)D_c(k) \\ B_c(k) \end{pmatrix}$$

$$C = (C_p(k) \ 0), \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} A_p(k) - B_p(k)D_c(k)C_p(k) & B_p(k)C_c(k) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} B_p(k)D_c(k) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

En resumen se podría decir que con un sistema en el que la condición de reseteo depende de condiciones temporales la definición del conjunto de instantes de reseteo \mathcal{K} es sencilla pero el valor de reseteo deberá de ser calculado en cada caso y dependerá de forma general del estado del sistema y de los valores de la entrada del sistema.

Definición: Se dice que el sistema base lineal, dado por la primer ecuación de (2.37) está **adecuadamente diseñado** si para cualquier valor constante de la referencia $r(k) = r$ existe un estado del sistema $\mathbf{z}_r = (\mathbf{x}_{rp}, \mathbf{x}_{rp})^T$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_r &= A_1 \mathbf{z}_r + B_1 r \\ r &= y = C \mathbf{z}_r \end{aligned} \quad (2.40)$$

lo que quiere decir que para todo valor de referencia constante el sistema puede alcanzar una solución en estado estacionario para esa referencia constante.

Siguiendo la linea empleada en [168] [92] [20] se estudiará a continuación el caso en el que valor de reseteo se calcula mediante la minimización de una función de coste.

Proposición 2.1 El sistema dado por la ecuación (2.37) se puede reescribir como un sistema reseteado dependiente de condiciones temporales con entrada (2.35) si el sistema base está adecuadamente diseñado y el valor de reseteo $f(\mathbf{x}_p(k), \mathbf{x}_c(k), r)$ es

$$f(\mathbf{x}_p(k), \mathbf{x}_c(k), r) = \arg \min_f J_k \quad (2.41)$$

donde J_k es una función de coste cuadrática del error de seguimiento

$$J_k = \sum_{i=n_1}^{n_2} e^T(k+i) P e(k+i) \quad \text{donde } k \in \mathcal{K} \quad (2.42)$$

y P es una matriz definida positiva de las dimensiones adecuadas.

□

Demostración: La función de coste se calcula en cada instante de reset $k \in \mathcal{K}$, sumando entre los instantes $k + n_1$ y $k + n_2$. Se puede definir por tanto la **ventana**

de computación como el intervalo que se usa para calcular la función J_k . Se define también la **longitud de la ventana** de computación como el número de instantes de muestreo que hay en la ventana de computación $w = n_2 - n_1$.

En primer lugar se realiza el siguiente cambio de variable: $\xi(k) = \mathbf{z}_r - \mathbf{z}(k)$. La ecuaciones de evolución en función de la nueva variable son

$$\begin{cases} \xi(k+1) = A\xi(k) & k \notin \mathcal{K} \\ \xi(k+1) = A_2\xi(k) + F_\xi(k) & k \in \mathcal{K} \end{cases} \quad (2.43)$$

con $F_\xi(k) = (I - A_2)\mathbf{z}_r - B_2r(k) - F(k)$, donde I es la matriz identidad de dimensiones adecuadas. Como

$$\begin{aligned} e(k) &= r - y = C\mathbf{z}_r - y = C\mathbf{z}_r - C\mathbf{z}(k) \\ &= C(\mathbf{z}_r - \mathbf{z}(k)) = C\xi(k) \end{aligned} \quad (2.44)$$

se puede reescribir

$$J_k = \sum_{i=n_1}^{n_2} e^T(k+i)Pe(k+i) = \sum_{i=n_1}^{n_2} \xi^T(k+i)C^T PC\xi(k+i) \quad (2.45)$$

y se define $P_o = C^T PC$ de forma que el sumatorio anterior puede desarrollarse como sigue:

$$J_k = \sum_{i=n_1}^{n_2} \xi^T(k+n_1)(A^{i-n_1})^T P_o A^{i-n_1} \xi(k+n_1) \quad (2.46)$$

donde se ha tenido en cuenta la evolución del sistema dada por la ecuación (2.43), como además $\xi(k+n_1) = A_1^{n_1-1} \xi(k+1)$ se puede definir un nuevo término:

$$P_w = \sum_{i=n_1}^{n_2} (A_1^{i-1})^T P_o A_1^{i-1} \quad (2.47)$$

entonces la ecuación (2.46) se puede reescribir como

$$J_k = \xi^T(k+1)P_w \xi(k+1) \quad (2.48)$$

tal y como se mencionó anteriormente J_k se calcula en los instantes $k \in \mathcal{K}$, por tanto usando la relación de la segunda fila de la ecuación (2.43) se puede escribir la ecuación anterior en función del estado $\xi(k)$

$$J_k = (A_2\xi(k) + F_\xi)^T P_w (A_2\xi(k) + F_\xi) \quad (2.49)$$

Si se supone que la estructura de P_w , A_2 y B_2 es la siguiente

$$P_w = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} B_p D_c \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Al minimizar la función de coste J_k respecto del valor de reset $f(x_p, x_c, r)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_k}{df} &= \frac{\partial J_k}{\partial F_\xi} \frac{\partial F_\xi}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial f} \\ &= 2 \left[(0 \ I) P_w \left((I - A_2) \mathbf{z}_r - B_2 r(k) \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \right) \right] + (0 \ I) P_w A_2 \xi \end{aligned} \quad (2.51)$$

Igualando a cero la derivada y despejando el valor de F se obtiene, suponiendo que P_3 sea invertible:

$$\begin{aligned} f &= P_3^{-1} (P_2 A_{21}, P_2 A_{22}) \begin{pmatrix} \xi_p \\ \xi_c \end{pmatrix} \\ &\quad + P_3^{-1} (P_2 (I - A_{21}), -P_2 A_{22} + P_3 I) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{rp} \\ \mathbf{x}_{rc} \end{pmatrix} \\ &\quad - P_3^{-1} P_2 B_p D_c r(k) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Se puede agrupar y simplificar la expresión del valor de reseteo y se comprueba que la expresión resultante es lineal y proporcional a los estados de la planta, el controlador reseteado y la referencia

$$f = I_1 \mathbf{x}_p(k) + I_2 \mathbf{x}_c(k) + I_3 r(k) \quad (2.53)$$

con

$$I_1 = -P_3^{-1} P_2 A_{21}, \quad I_2 = -P_3^{-1} P_2 A_{22} \quad (2.54)$$

$$I_3 = (P_3^{-1} P_2 I) \mathbf{x}_{rp} + I \mathbf{x}_{rc} - P_3^{-1} P_2 B_p D_c \quad (2.55)$$

Usando esa expresión para el valor de reseteo la ecuación en el espacio de estados (2.37) se puede reescribir como (2.35) con las siguientes matrices

$$A_R = \begin{pmatrix} A_p(k) - B_p(k) D_c(k) C_p(k) & B_p(k) C_c(k) \\ I_1 & I_2 \end{pmatrix}, B_R = \begin{pmatrix} B_p(k) D_c(k) \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Con esto concluye la demostración.

□

Hay que destacar que a pesar de que el cálculo del valor de reseteo puede ser complicado sólo necesita realizarse en la fase de diseño del sistema de control. Además se ha asumido implícitamente que se tiene acceso al estado de la planta o al menos que la planta es observable, ya que se necesita conocer el estado de la planta para poder calcular A_R .

Se mostrará a continuación un ejemplo para ilustrar la dinámica de los sistemas reseteados dependientes de condiciones temporales, de nuevo los ejemplos serán de sistemas invariantes en el tiempo.

Ejemplo 2.3 Empleando la misma planta y controlador base del ejemplo 2.1 se mostrará ahora el comportamiento de un controlador reseteado periódico con un periodo de reseteo $n_R = 5$, es decir 2.5 s. Se ha calculado la acción de reseteo usando un ancho de ventana de computación de 5 muestras. Con esta elección se obtiene el siguiente valor de reseteo: $I_1 = [-0,0321, -0,0938]$, $I_2 = -0,007$ y $I_3 = 0,1875$.

En la figura 2.15 se puede observar la salida de los sistema base y reseteado, en este caso la salida del sistema reseteado también mejora la del sistema base al igual que en el caso del sistema reseteado del ejemplo 2.1. En este caso la primera acción de reseteo ocurre antes de que la salida del sistema alcance el valor de la referencia, pero a diferencia de lo que ocurría en el ejemplo 2.2 no se produce un *rebote* sino que la salida del sistema se frena evitando el sobreimpulso.

Por otro lado en la figura 2.16 se puede observar como la señal de control del controlador reseteado experimenta saltos debidos a las acciones de *reset* que se dan cada 5 periodos de muestreo.

Una característica de los sistemas reseteados periódicamente, y también de los sistemas reseteados dependientes de condiciones temporales en general, es que no son invariantes en tiempo, su respuesta a un cambio de referencia como el que se ha usado en este ejemplo dependerá de cuando se produzca el cambio de la referencia en relación al inicio del periodo de reseteo. Como la señal de reseteo tiene un periodo de 5 muestras hay cinco posibles respuestas. Para mostrar este efecto en la figura 2.17 aparecen las otras cuatro salidas (dos en cada gráfica) que el produce el mismo sistema reseteado cuando se cambia el desfase de la señal de reseteo. Aunque estas señales son bastantes diferentes todas ellas mejoran la respuesta del sistema con el controlador base.

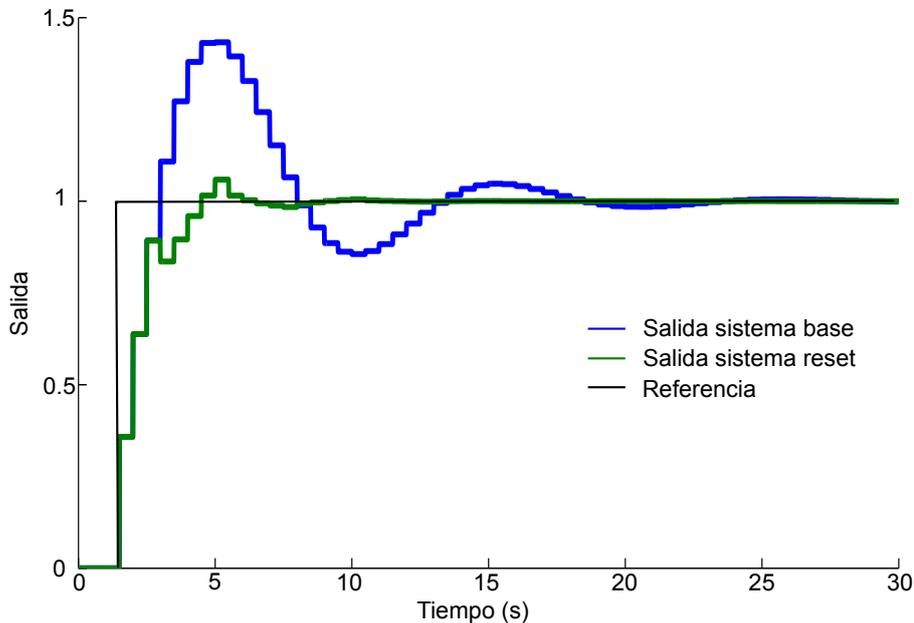


Figura 2.15: Salidas de los sistemas base y reseteado

2.2.3. Elección de los parámetros w y n_R

En el cálculo del valor de reseteo del Ejemplo 2.3 se fijaron unos valores de periodo de reseteo n_R y una ventana de computación w de forma arbitraria. Pero la elección de n_R y w es importante porque variando esos valores se pueden obtener comportamientos muy diferentes del sistema. En esta sección se darán unas reglas para encontrar valores adecuados de esos parámetros en varios casos. Se emplearán dos ejemplos simples para ilustrar qué efecto tiene la variación de esos parámetros en la configuración del sistema complementario y por tanto en el comportamiento del sistema conmutado resultante.

Ejemplo 2.4. En primer lugar se estudiará cómo elegir esos parámetros cuando la referencia que se quiere seguir es una referencia **tipo escalón**.

La planta que consideraremos será un integrador discreto con retardo $d = 0,5$ s. Si se elige un periodo de muestro de $h = 0,1$ s., entonces $d_s = 5$ se puede definir como el número de muestras de retraso. La planta muestreada P será descrita por

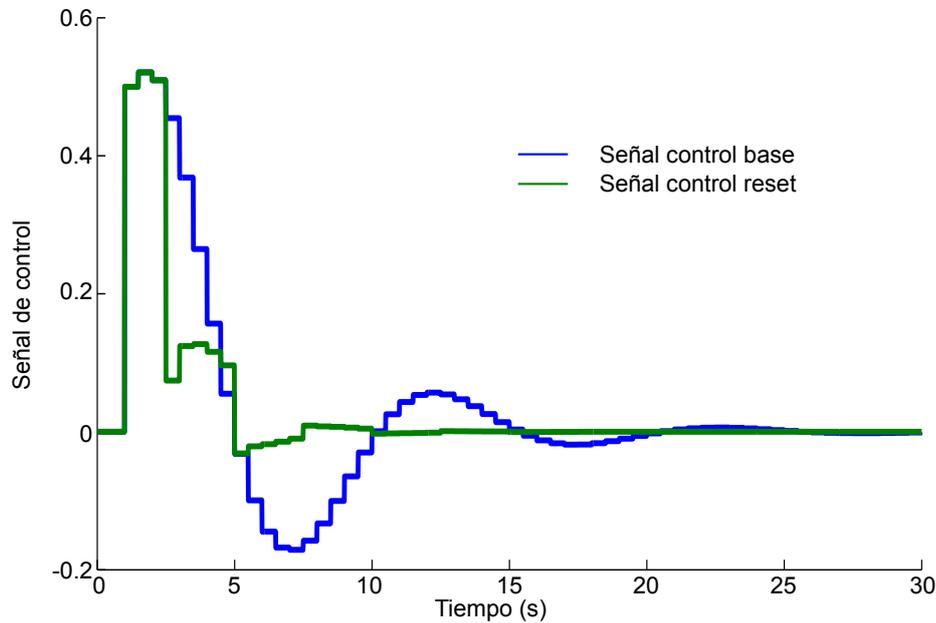


Figura 2.16: Señal de control de los sistemas base y reseteados

la ecuación (2.29) con las siguientes matrices:

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_p = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1), \quad D_p = 0 \quad (2.57)$$

En estas matrices se puede observar como el retardo se puede introducir en las ecuaciones del sistema a través de un mayor número de estados.

El primer paso es elegir un controlador lineal, que será también un sistema discreto en el tiempo con el mismo periodo de muestro h que el de la planta. Este controlador puede ser descrito por la primera fila de la ecuación (2.36) con las siguientes matrices de la representación en el espacio de estados: $A_c = 1$, $B_c = 0,1$, $C_c = 0,8$ and $D_c = 1,5$. Este controlador será el controlador base a partir del cual se

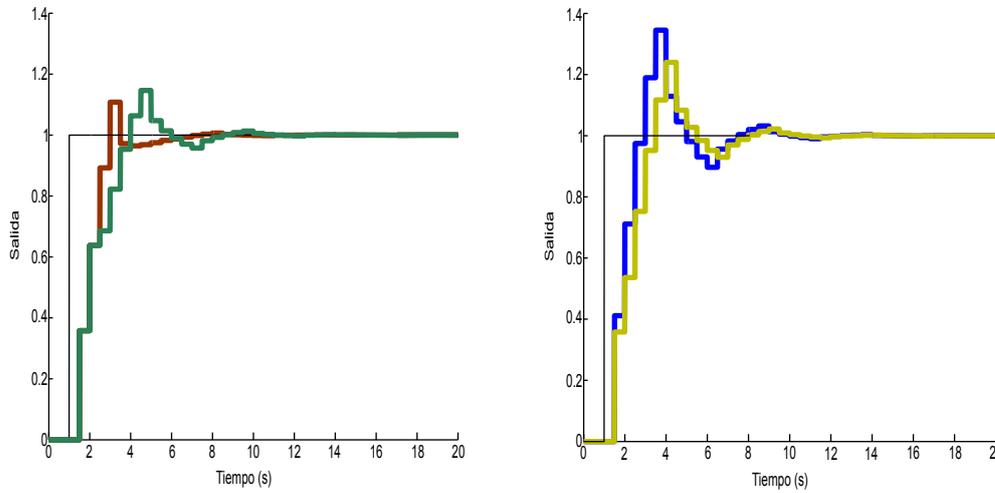


Figura 2.17: Distintas salidas al cambiar el desfase de la señal de reseteo.

calculará la acción de reseteo.

Como el sistema tiene un retardo de d_s muestras, debido a la causalidad, entre el instante de reseteo $k \in \mathcal{K}$ y el comienzo de la ventana de computación $k + n_1$ deberán de transcurrir al menos $d(s)$ muestras. En este ejemplo se ha usado $n_1 = d_s$.

En la figura 2.18 se puede apreciar la salida de los sistemas base y complementarios usando un ancho de la ventana de computación, $w = n_2 - n_1$, de 15 muestras. La salida del sistema base tiene un gran sobreimpulso, este es el procedimiento clásico para diseñar un controlador reseteado, elegir un sistema base que cumpla las especificaciones que se requieran sin tener en cuenta el posible sobreimpulso. En la misma figura se puede observar como el sistema complementario es más lento y tiene un menor sobreimpulso que el sistema base.

El objetivo es encontrar un periodo de reseteo n_R que permita al sistema híbrido resultante reducir el sobreimpulso. Si el tiempo de pico, es decir el tiempo que tarda el sistema en alcanzar su valor máximo, del sistema base es T_p , entonces un valor adecuado para n_R estará en el entorno $n_R \in [T_p/3h, T_p/2h]$. Con este criterio se puede asegurar que el sistema reseteado en lazo cerrado cambia al menos una vez entre el sistema base lineal y el sistema complementario antes de alcanzar el valor máximo.

Para este ejemplo el tiempo de pico, T_p , es de 1,2 s. y siguiendo el criterio ante-

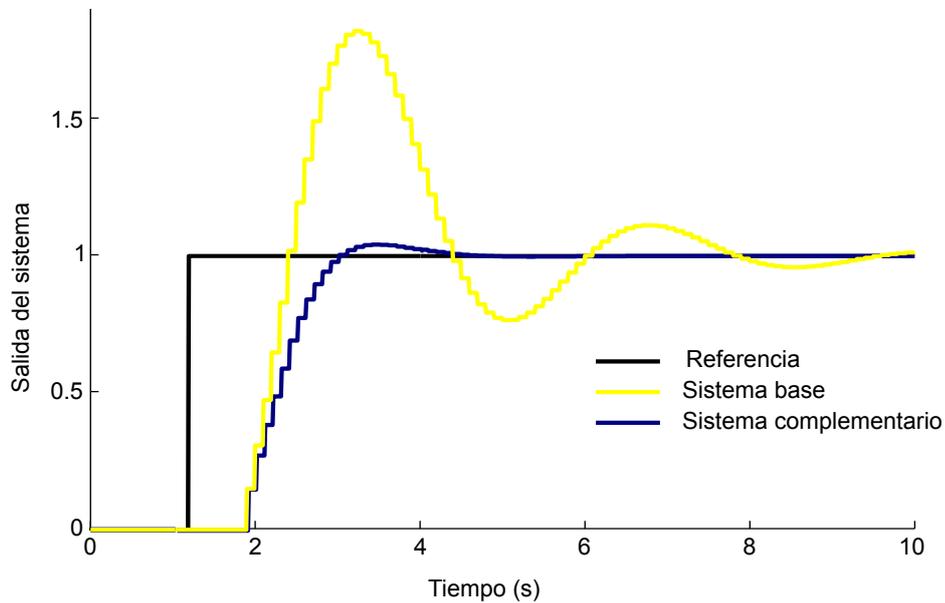


Figura 2.18: Respuesta a un escalón de los sistemas base y complementario

rior se ha elegido un periodo de *reset*, n_R , de 5 muestras.

Una vez se ha fijado el periodo de reseteo n_R es el momento de estudiar los cambios que se producen en el sistema complementario cuando se varía la longitud de la ventana de computación w . En la figura 2.19 se puede observar la respuesta a un escalón de distintos sistemas complementarios y se aprecia como son más rápidos con valores de w más pequeños y más lentos conforme se aumenta el valor de w . Esto ocurre también en el *reset* de otros sistema que se han estudiado a lo largo de la realización de esta tesis, con valores pequeños de w se obtienen acciones de reseteo más enérgicas y con valores más grandes acciones más suaves. Cuando el valor de la ventana es $w = 1$ el sistema complementario es el mismo escalón de la referencia con el desfase introducido por el retardo, no se muestra ese caso porque emplear valores de ventana muy pequeños hace que los saltos en la señal de control cuando se producen las acciones de reseteo sean muy grandes.

Si se compara el comportamiento del sistema reseteado en lazo cerrado para distintos valores de la ventana de computación se encuentra que los mejores valores para el IAE y el ITAE se dan cuando w se encuentra entre n_R y $3n_R$ pero la desviación estándar es mayor entre n_R y $2n_R$, se emplea la desviación estándar es porque estamos considerando el promedio del error de todas las posibles (5 en este

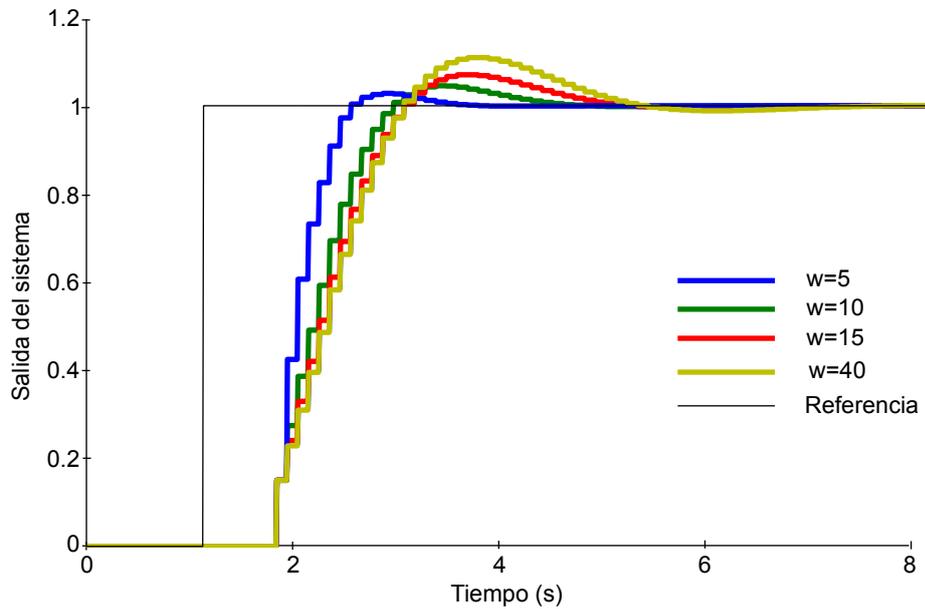


Figura 2.19: Salida de diferentes sistemas complementarios

Longitud de la ventana (w)	IAE	ITAE
6	$1,05 \pm 0,05$	$1,97 \pm 0,14$
7	$1,00 \pm 0,05$	$1,74 \pm 0,12$
10	$1,05 \pm 0,02$	$1,87 \pm 0,04$
15	$1,14 \pm 0,06$	$2,17 \pm 0,13$
20	$1,20 \pm 0,06$	$2,41 \pm 0,14$
40	$1,22 \pm 0,06$	$2,50 \pm 0,15$

Tabla 2.2: IAE e ITAE para diferentes w

caso) respuestas para cada valor de la ventana de computación debido al posible desfase de la señal de reseteo. Estos resultados se muestran en la Tabla 2.2.

En la figura 2.20 se puede observar como la señal de control del sistema en lazo cerrado experimenta variaciones más grandes cuando $w = 7$ que con $w = 10$, obviamente estamos interesados en que la acción de control no experimente variaciones bruscas para mitigar el desgaste de los actuadores. Esto sumado al que entre $w \in [2n_R, 3n_R]$ hay menor diferencia entre el comportamiento de las posibles respuestas y a que en general es mejor que las acciones de reset ocurran de más suave hace recomendable emplear una ventana con longitudes $w \in [2n_R, 3n_R]$.

Se puede resumir el proceso anterior en la siguiente guía para la elección de los parámetros del sistema de reseteo en lazo cerrado cuando la señal que se desea

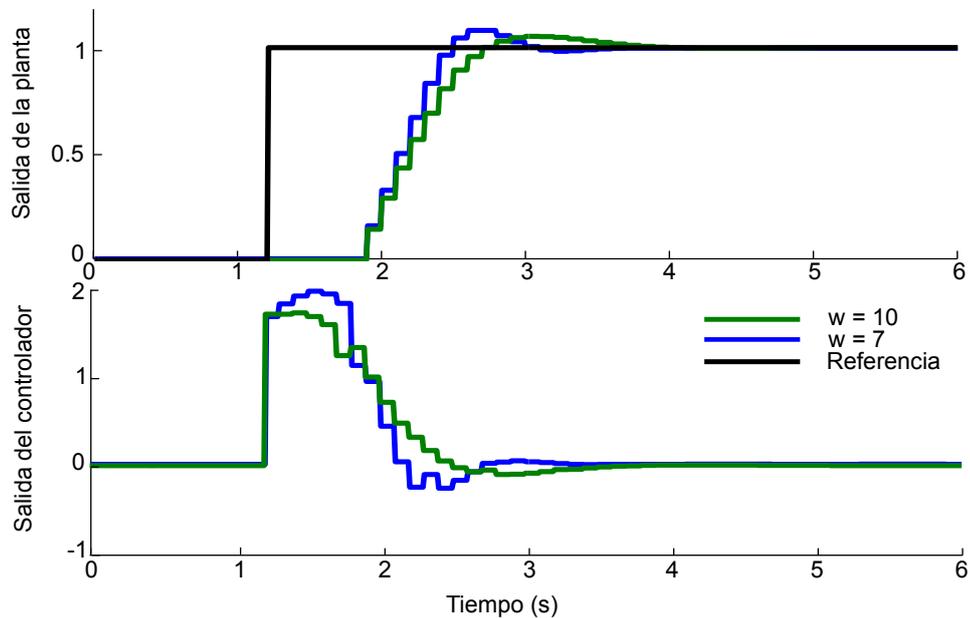


Figura 2.20: Salida promedio y señal de control para diferentes valores de w

seguir es de tipo escalón :

1. Diseñar un controlador base lineal de forma que la salida cumpla las especificaciones que se desean para el sistema pero sin tener en cuenta limitaciones para el sobreimpulso de la salida.
2. Fijar un periodo de reset n_R entre $\frac{T_p}{3}$ y $\frac{T_p}{2}$. Usando estos valores para n_R se puede asegurar que ocurrirá al menos un cambio entre el sistema base y el complementario antes de que la salida alcance el valor máximo lo que disminuirá el sobreimpulso.
3. Si el sistema tiene un retardo de d_s muestras entonces se comienza el cálculo de la ventana $d(s)$ instantes más tarde, es decir $n_1 = d_s$. Si no hay retardo se empieza el cálculo en el mismo instante, es decir fijamos $n_1 = 1$.
4. Calcular los valores de I_1 , I_2 y I_3 en las ecuaciones (2.54) y (2.55) empleando una ventana de cálculo w entre $2n_R$ y $3n_R$.

Ejemplo 2.5 A continuación se tratará el caso en el que el valor de la referencia que se quiere seguir experimenta cambios periódicos. Para hacerlo se modificará la estructura del sistema en lazo cerrado introduciendo un exosistema E tal y como se muestra en la figura 2.21.

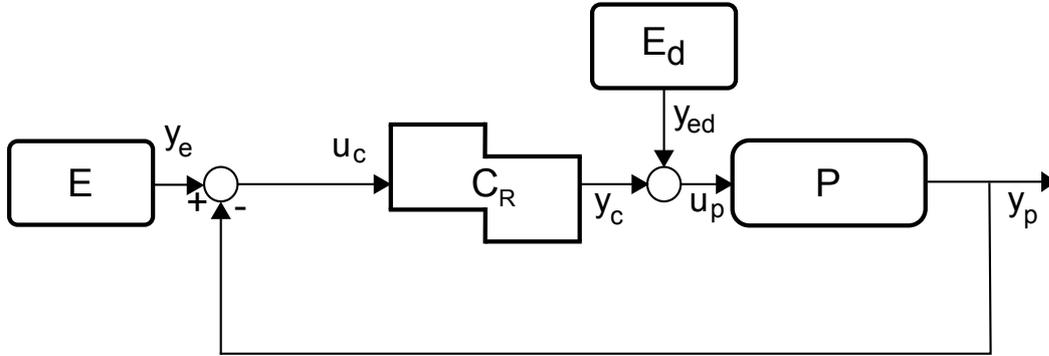


Figura 2.21: Controlador reset C y planta LTI P .

El exosistema E se define por tanto como un sistema discreto en el tiempo con las siguientes ecuaciones en el espacio de estado:

$$E : \begin{cases} \mathbf{x}_e(k+1) = A_e \mathbf{x}_e(k) & , \mathbf{x}_e(0) = \mathbf{x}_{e0} \\ y_e(k) = C_e \mathbf{x}_e(k) \end{cases} \quad (2.58)$$

donde \mathbf{x}_{e0} es el estado inicial del exosistema. Este sistema se usará para generar la señal de referencia variable.

También se puede incluir en la configuración del sistema la posibilidad de que la planta se vea afectada por alguna perturbación no deseada. Si se asume que esa perturbación sea una función del tiempo se la podrá describir como otro sistema dinámico que se denominará exosistema de perturbación y se define como:

$$E_d : \begin{cases} \mathbf{x}_{ed}(k+1) = A_{ed} \mathbf{x}_{ed}(k) & , \mathbf{x}_{ed}(0) = \mathbf{x}_{eod} \\ y_{ed}(k) = C_{ed} \mathbf{x}_{ed}(k) \end{cases} \quad (2.59)$$

La planta P será la misma que en la ecuación (2.29) y el controlador reseteado C vendrá dado por:

$$C_R = \begin{cases} \mathbf{x}_c(k+1) = A_c(k) \mathbf{x}_c(k) + B_c(k) u_c(k) & k \notin \mathcal{K} \\ \mathbf{x}_c(k+1) = f(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_c, \mathbf{x}_e, \mathbf{x}_{ep}) & k \in \mathcal{K} \\ y_c(k) = C_c(k) \mathbf{x}_c(k) + D_c(k) u_c(k) \end{cases} \quad (2.60)$$

con $\mathcal{K} = \{k_l \mid k_l = n_R l; l = 1, 2, 3, \dots\}$.

De nuevo se considerará el caso en el que se dispone de información sobre los estados de todos los subsistemas que forman el sistema en lazo cerrado o que al menos todos ellos son observables, dado que es necesario conocer esos estados para calcular el valor de reseteo.

Las conexiones en lazo cerrado de la figura 2.21 son las siguientes

$$e(k) = y_e(k) - y_p(k), u_p(k) = y_c(k) + y_{ed}(k) \quad (2.61)$$

Y se puede definir por tanto el estado aumentado en lazo cerrado como:

$$\mathbf{z}(k) = [\mathbf{x}_p(k) \ \mathbf{x}_c(k) \ \mathbf{x}_e(k) \ \mathbf{x}_{ed}(k)]^T \quad (2.62)$$

La dinámica del sistema en lazo cerrado será entonces:

$$\begin{cases} \mathbf{z}(k+1) = A_1 \mathbf{z}(k) & k \notin \mathcal{M} \\ \mathbf{z}(k+1) = A_2 \mathbf{z}(k) + F(k) & k \in \mathcal{M} \\ y(k) = C(k) \mathbf{z}(k) \end{cases} \quad (2.63)$$

con las siguientes matrices

$$A_1(k) = \begin{pmatrix} A_p(k) - B_p(k)D_c(k)C_p(k) & B_p(k)C_c(k) & B_p(k)D_c(k)C_e & B_p(k)C_{ed} \\ -B_c(k)C_p(k) & A_c(k) & B_c(k)C_e & 0 \\ 0 & 0 & A_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{ed} \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

$$A_2(k) = \begin{pmatrix} A_p(k) - B_p(k)D_c(k)C_p(k) & B_p(k)C_c(k) & B_p(k)D_c(k)C_e & B_p(k)C_{ed} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{ed} \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

$$C(k) = (C_p(k) \ 0 \ 0 \ 0), F(k) = (0 \ f(k) \ 0 \ 0)^T \quad (2.66)$$

A continuación se considerará el caso en el que los exosistemas que generan la referencia y la perturbación producen señales sinusoidales. De nuevo se empleará un ejemplo sencillo para ilustrar el efecto que tienen el periodo de reseteo y la ventana de cómputo en el comportamiento final del sistema reseteado.

En este ejemplo la planta vendrá dada por las siguientes matrices:

$$A_p = \begin{pmatrix} 0,97 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_p = \begin{pmatrix} 0,49 \\ 0 \end{pmatrix}, C_p = (0 \ 0 \ 0,05) \quad (2.67)$$

con un periodo de muestreo de $h = 0,5$ s. y el controlador base es también un sistema discreto en el tiempo con el mismo periodo de muestreo y las siguientes matrices de evolución en el espacio de estados: $A_c = 1$, $B_c = 0,5$, $C_c = 0,5$ y $D_c = 8,5$. Se empleará un exosistema, también discreto en el tiempo, que genera una salida sinusoidal usando las siguientes matrices en la ecuación (2.58):

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos(w_e h) \end{pmatrix}, C_e = (0 \ \text{sen}(w_e h)) \quad (2.68)$$

donde h es el periodo de muestreo y w_e es la frecuencia que se desea que tenga la salida sinusoidal. También se contempla que exista una perturbación sinusoidal con una frecuencia diferente w_{ed} dada por las siguientes matrices de evolución

$$A_{ed} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos(w_{ed} h) \end{pmatrix}, C_{ed} = (0 \ \text{sen}(w_{ed} h)) \quad (2.69)$$

Si T_h es el número de muestras que hay en un periodo de la señal de referencia entonces el periodo de reseteo n_R debe ser menor que T_h para permitir que la acción de reseteo ayude a alcanzar la referencia cambiante. Según las pruebas realizadas los valores más adecuados para n_R se encuentran en el entorno $n_R \in [T_h/10, T_h/5]$ dado que en ese intervalo se producen suficientes acciones de reseteo en cada periodo como para asegurar un buen seguimiento de la referencia cambiante y al mismo tiempo esas acciones de reseteo deben de estar lo suficientemente espaciadas para que el sistema pueda fluir y que no se produzca una acumulación de saltos en la acción de control en poco tiempo. Hay que tener también en consideración que n_R deberá de ser siempre mayor que los posibles retardos que haya en el sistema.

Una vez establecido un entorno para el periodo de reseteo hay que elegir el valor para la ventana de computación. Se considerará el caso en el que el periodo es $T_h = 30$ y la perturbación tiene una frecuencia $w_{ed} = 1,5w_e$. En la figura 2.22 se puede apreciar las diferentes salidas para el sistema reseteado cuando se varía la longitud de la ventana de computación empleando un periodo de reseteo de $n_R = T_h/6 = 5$.

En la tabla 2.3 se pueden observar los valores del IAE y del ITAE para distintos valores de w . El mejor valor se da cuando $w = 6$, conforme la longitud de la ventana

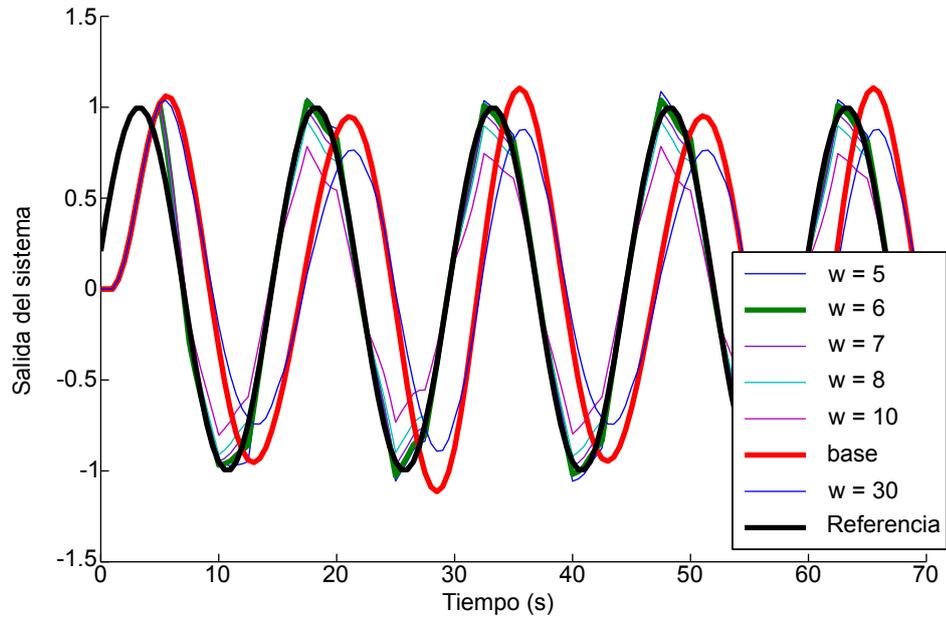


Figura 2.22: Salida para diferentes longitudes de w

Longitud de la ventana (w)	IAE	ITAE
5	5.19	$0,10 \cdot 10^3$
6	4.88	$0,09 \cdot 10^3$
7	5.73	$0,13 \cdot 10^3$
8	7.92	$0,21 \cdot 10^3$
10	14.13	$0,45 \cdot 10^3$
30	44.08	$1,59 \cdot 10^3$

Tabla 2.3: IAE e ITAE con diferentes w

de computación aumenta el sistema de reset se va acercando al sistema base. Por tanto, en este caso, lo más adecuado es usar un w próximo a n_R .

Como conclusión podemos resumir que en este capítulo se han formulado los sistemas reseteados en tiempo discreto como un tipo particular de sistemas conmutados y que se han formulado distintos casos particulares atendiendo a diferentes condiciones de reseteo para estos sistemas. Además en el caso en el que la acción de reseteo ocurre de forma periódica se han formulado también una serie de reglas heurísticas para la sintonía de estos controladores.

CAPÍTULO 3

Estabilidad de sistemas reseteados discretos en el tiempo

En este capítulo se estudiará la estabilidad del sistema reseteado discreto en el tiempo dado por la ecuación (2.14), donde en principio las matrices A y A_R serán matrices arbitrarias. En primer lugar se darán una serie de definiciones previas y se enunciarán una serie de teoremas de amplio uso en el campo de la estabilidad de los sistemas discretos en el tiempo que se emplearán posteriormente para establecer condiciones de estabilidad para los sistemas reseteados.

En la última parte se desarrollarán dos técnicas para el análisis de la estabilidad de los sistemas reseteados en tiempo discreto, una basada en el remuestreo del sistema después de las acciones de reseteo y otra basada en elementos de la teoría de parámetros variables linealmente aplicada a sistemas conmutados. Los dos métodos se aplicarán a los distintos tipos de sistemas reseteados que se han presentado en el capítulo anterior. Se realizará también una comparación de ambas técnicas.

3.1. Definiciones previas

Las siguientes definiciones de estabilidad son de uso general con la notación adoptada de [25] y [132]. Son definiciones válidas para el sistema (2.14) y sus casos particulares (2.16) y (2.35).

Definición 3.1: Se dice que un punto del espacio de estados es un **punto de equilibrio** de un sistema reseteado si para ese punto las dinámicas base y de reseteo están en equilibrio, es decir si \mathbf{z}_e es un punto de equilibrio del sistema se cumple simultáneamente que $\mathbf{z}_e = A(k)\mathbf{z}_e$ y $\mathbf{z}_e = A_R(k)\mathbf{z}_e$ para $k \geq K$, con K un cierto nú-

mero natural suficientemente grande. El origen $z_e = 0$ es un punto de equilibrio de los sistemas reseteados (2.14).

Definición 3.2: Un punto de equilibrio $z_e = 0$ de un sistema reseteado, o simplemente por extensión el propio sistema reseteado, es **estable** si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon, k_0)$ tal que si $\|z_0\| < \delta$, con $z_0 = z(k_0)$ y $z_0 = z_e$, entonces $\|z(k, k_0, x_0)\| < \epsilon$ para todo $k > k_0$. Además se dice que un punto de equilibrio de un sistema reseteado es **asintóticamente estable** si es estable y además existe algún número η tal que si $\|z_0\| < \eta$ entonces $z(k, k_0, x_0) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Definición 3.3 Un sistema reseteado (2.14) es **uniformemente estable** si existe una constante finita positiva γ tal que para cualquier k_0 y z_0 la solución correspondiente satisface que

$$\|z(k, k_0, x_0)\| \leq \gamma \|z_0\|, \quad k \geq k_0 \quad (3.1)$$

En la figura 3.1 se muestra la evolución temporal del estado de un sistema uniformemente estable.

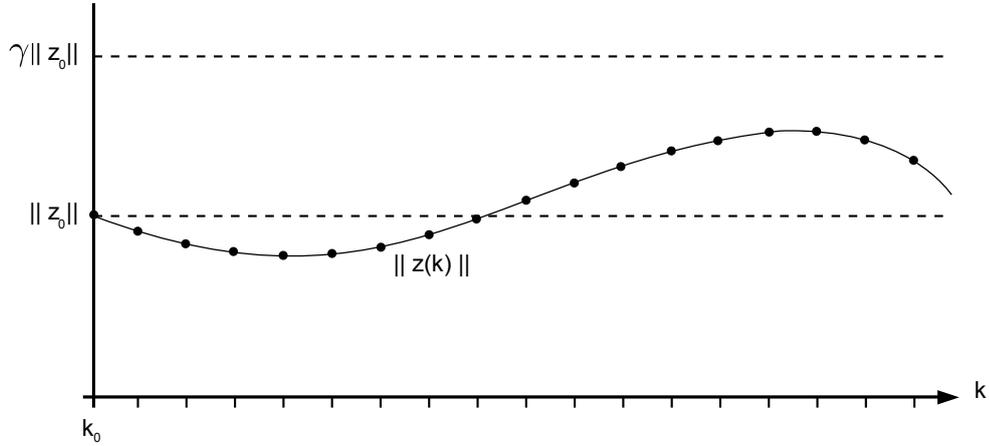


Figura 3.1: Estabilidad uniforme.

Definición 3.4 Se dice que un sistema reseteado (2.14) es **uniforme y exponencialmente estable** si además de ser uniformemente estable existe una constante finita positiva $0 \leq \gamma < 1$ de modo que para cualquier k_0 y z_0 la solución cumple que

$$\|z(k, k_0, z_0)\| \leq \gamma \lambda^{k-k_0} \|z_0\|, \quad k \geq k_0 \quad (3.2)$$

En la figura 3.2 se muestra la evolución temporal del estado de un sistema uniformemente y asintóticamente estable.

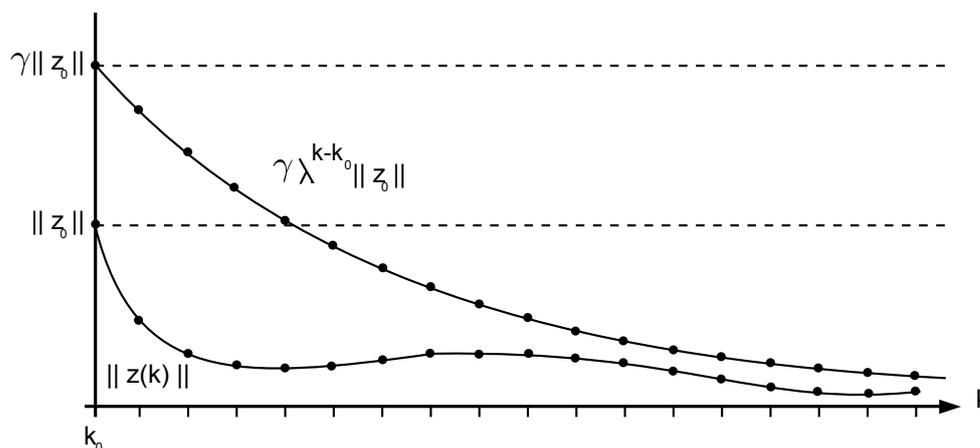


Figura 3.2: Estabilidad asintótica.

3.2. Estabilidad para sistemas reseteados remuestreados

En esta sección se desarrollan criterios de estabilidad que son la adaptación a sistemas discretos en el tiempo de los resultados para sistemas continuos en el tiempo de [14] y [15]. La idea que se desarrollará es que se puede estudiar la estabilidad de un sistema reseteado analizando el comportamiento del sistema en los instantes posteriores a las acciones de *reset*. Para esto es necesario que la dinámica del sistema cumpla ciertas condiciones.

Definición 3.5 Se dice que un sistema reseteado discreto en el tiempo (2.14) es **regular** si se cumple alguna de las siguientes condiciones siguientes:

1. $A(k)$ es Schur estable y $\rho(A(k)) \leq r$ con alguna constante $r < 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$.
2. $\|A(k)\| \leq \alpha$ para una constante $\alpha > 0$ y $k \in \mathbb{Z}^+$, y $\Delta_n \leq \Delta_M$ para cualquier $n = 0, 1, 2, \dots$ y alguna constante $\Delta_M > 0$.

Las condiciones necesarias para ser regular no son demasiado restrictivas. Nótese que la primera condición es equivalente a requerir que el sistema base sea estable y entonces no se exige que los intervalos de reseteo estén acotados. Mientras que la segunda condición lo que hace es imponer una restricción sobre la longitud

máxima de los intervalos de reseteo si el sistema base es inestable, de forma que las acciones de *reset* sean capaces de estabilizar el sistema base.

Teorema 3.1: Un sistema reseteado discreto en el tiempo regular (2.14) es uniforme y exponencialmente estable si para cualquier condición inicial $\mathbf{z}(n_0) = \mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^n$ el sistema discreto en el tiempo $\mathbf{x}(n+1) = H(n)\mathbf{x}(n)$, con $\mathbf{x}(n_0) = \mathbf{z}_0$ y $H(n)$ dado por

$$H(n) = A_R(k_{n+1})A(k_{n+1})A(k_{n+1} - 1) \cdots A(k_n), \quad (3.3)$$

y $k_n = \tau_n(\mathbf{z}_0)$, $n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$, es uniforme y exponencialmente estable.

Demostración: En primer lugar al remuestrear el sistema reseteado (2.14) tras el instante de reseteo $k_n = \tau_n(\mathbf{z}_0)$, $n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$, para una cierta condición inicial $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^n$, es decir al definir $\mathbf{x}(n) = \mathbf{z}(k_n)$, se obtiene el sistema auxiliar (variable en el tiempo) discreto en el tiempo $\mathbf{x}(n+1) = H(n)\mathbf{x}(n)$, donde $\mathbf{x}(n_0) = \mathbf{z}(k_{n_0}) = \mathbf{z}(n_0) = \mathbf{z}_0$. Entonces si el sistema auxiliar es uniforme y exponencialmente estable entonces por la definición 3.4 existen unas constantes $\gamma > 0$ y $\lambda \in [0, 1)$, dependientes de \mathbf{z}_0 , tales que $\|\mathbf{x}(n, n_0, \mathbf{z}_0)\| \leq \gamma \lambda^{n-n_0} \|\mathbf{z}_0\|$, para cualquier $n \geq n_0$, cualquier n_0 y cualquier \mathbf{z}_0 , o equivalentemente $\|\mathbf{z}(k_n, n_0, \mathbf{z}_0)\| \leq \gamma \lambda^{k_n-n_0} \|\mathbf{z}_0\|$.

Si se considera un sistema que cumpla la primera condición para ser un sistema reseteado regular: para $k_n \leq k < k_{n+1}$, la solución del sistema reseteado (2.14) es (2.15), y $\|A(k)A(k-1) \cdots A(k_n)\| \leq Mr^{k-k_n}$ para alguna constante $M > 0$. Por lo que se cumple

$$\|\mathbf{z}(k, n_0, \mathbf{z}_0)\| \leq Mr^{k-k_n} \|\mathbf{z}(k_n, n_0, \mathbf{z}_0)\| \leq Mr^{k-k_n} \gamma \lambda^{k_n-n_0} \|\mathbf{z}_0\| \quad (3.4)$$

donde $0 \leq \lambda < 1$. Entonces, haciendo $\bar{\lambda} = \max\{r, \lambda\} < 1$ y $\bar{\gamma} = M\gamma$, es resultado que se obtiene es

$$\|\mathbf{z}(k, n_0, \mathbf{z}_0)\| \leq \bar{\gamma} \bar{\lambda}^{k-n_0} \|\mathbf{z}_0\| \quad (3.5)$$

y por tanto el sistema reseteado es uniforme y exponencialmente estable.

Por último si se cumple la segunda condición para ser un sistema reseteado regular se puede emplear la cota $\alpha > 0$ y un argumento similar

$$\|\mathbf{z}(k, n_0, \mathbf{z}_0)\| \leq \alpha^{k-k_n} \|\mathbf{z}(k_n, n_0, \mathbf{z}_0)\| \leq \alpha^{k-k_n} \gamma \lambda^{k_n-n_0} \|\mathbf{z}_0\| \quad (3.6)$$

Tomando $\alpha = M\lambda$ para algún valor positivo real M la expresión anterior se puede transformar en

$$\|\mathbf{z}(k, n_0, \mathbf{z}_0)\| \leq (M\lambda)^{k-k_n} \gamma \lambda^{k_n-n_0} \|\mathbf{z}_0\| = \gamma M^{k-k_n} \lambda^{k-n_0} \|\mathbf{z}_0\| < \bar{\gamma} \bar{\lambda}^{k-n_0} \|\mathbf{z}_0\| \quad (3.7)$$

donde $\lambda < 1$ y $\bar{\gamma} = \gamma M^{\Delta_M}$, y por tanto se obtiene también la estabilidad uniforme y exponencial para este caso con lo que concluye la demostración.

□

En el caso en el que las matrices A y A_R sean variables en el tiempo el sistema remuestreado también será variable en el tiempo y se podrán emplear resultados estándares para comprobar la estabilidad de los sistemas discretos y variables en el tiempo [132]. Un resultado que se empleará en numerosos ejemplos es la siguiente proposición:

Proposición 3.1 El sistema $\mathbf{x}(n+1) = H(n)\mathbf{x}(n)$ es uniforme y exponencialmente estable si existe una matriz $P > 0$ tal que se cumple

$$\begin{aligned} \eta I &\leq P \leq \rho I \\ H^T(n)PH(n) - P &\leq -\nu I \end{aligned} \quad (3.8)$$

para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$, donde η , ρ y ν son constantes positivas.

El teorema 3.1 puede ser aplicado a sistemas con *reset* dependiente del estado y con *reset* dependiente de condiciones temporales, ambos casos se analizarán a continuación:

1. *Sistemas reseteados discretos en el tiempo dependientes del estado:*

En general el Teorema 3.1 permite tratar el problema de la estabilidad del sistema reseteado (2.16) empleando resultados como (3.8). En el caso en el que el sistema reseteado es invariante en el tiempo, es decir, las matrices A y A_R son constantes, el sistema auxiliar $\mathbf{x}(n+1) = H(n)\mathbf{x}(n)$ sigue siendo variable en el tiempo pero las matrices $H(n)$ tienen una expresión más sencilla

$$H(n) = A_R A^{\Delta_n}. \quad (3.9)$$

El problema, incluso en el caso más sencillo, es que no se conoce a priori cuál es el valor de los intervalos de reset, por lo que es difícil encontrar situaciones en las que se pueda aplicar este tipo de resultados.

2. *Sistemas reseteados discretos en el tiempo dependientes de condiciones temporales:*

Para sistemas dependientes de condiciones temporales se pueden encontrar resultados más sencillos. Aplicando directamente el Teorema 3.1 el sistema (2.35) es uniforme y exponencialmente estable si lo es también el sistema auxiliar $\mathbf{x}(n+1) = H(n)\mathbf{x}(n)$, donde $H(n)$ está dado por (3.3), pero ahora el conjunto de instantes de reseteo $\mathcal{K} = \{k_1, k_2, \dots\}$ no dependen de la condición inicial. Si además las matrices A y A_R son constantes es sencillo comprobar

la estabilidad en algunos casos dado que la secuencia de instantes de reseteo está fijada previamente. En el caso en el que el reset sea periódico con periodo n_R entonces $H(n) = A_R A^{n_R}$ es independiente del tiempo y la estabilidad se comprueba si $A_R A^{n_R}$ es Schur estable.

A continuación se dan un par de ejemplos de la aplicación del Teorema 3.1 para sistemas de reset periódico:

Ejemplo 3.1 Para este ejemplo se empleará el mismo sistema que se ha empleado en el Ejemplo 2.1 del capítulo anterior, en esta ocasión se pretende analizar la estabilidad del sistema reseteado cuando se producen acciones de reseteo cada 2.5 s, es decir, con periodo de reseteo $n_R = 5$. Al ser el sistema invariante en el tiempo bastará comprobar tal y como se ha dicho que $H(n) = A_R A^{n_R}$ es Schur estable para comprobar la estabilidad del sistema reseteado, los valores numéricos son:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0,0809 & -0,2162 & 0,3459 \\ 0,2904 & 0,8581 & 0,2271 \\ -0,250 & -0,250 & 1,0000 \end{pmatrix}, \quad A_R = \begin{pmatrix} -0,0809 & -0,2162 & 0,3459 \\ 0,2904 & 0,8581 & 0,2271 \\ -0,0321 & -0,0938 & -0,0070 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

La matriz de la evolución remuestreada H será por tanto

$$H = A_R A_1^5 = \begin{pmatrix} -0,0420 & -0,1402 & -0,0981 \\ -0,2146 & -0,2390 & 0,7417 \\ 0,0192 & 0,0173 & -0,0772 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Comprobamos que los valores propios de H son: $[-0,38244, -0,04302, -1,6595 \cdot 10^{-10}]$. Como todos están dentro del círculo unidad en el plano complejo, el sistema es estable.

Ejemplo 3.2 En este ejemplo se estudiará la estabilidad de un sistema reseteado periódico variable en el tiempo. Se considerará la situación en la que la matriz $A(k)$ en (2.35) puede variar de forma aleatoria en el tiempo entre los siguientes valores:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0,0809 & -0,2162 & 0,3459 \\ 0,2904 & 0,8581 & 0,2271 \\ -0,250 & -0,250 & 1,0000 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -0,0809 & -0,2162 & 1,3836 \\ 0,2904 & 0,8581 & 0,9084 \\ -0,250 & -0,250 & 1,0000 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

La matriz A_1 se corresponde con un sistema estable mientras que la matriz A_2 se corresponde con un sistema inestable. El sistema cuya evolución varía aleatoriamente, sin acciones de *reset*, entre ambos será no estable. Si se introduce una acción de *reset* cada 5 instantes de muestreo, donde la matriz A_R puede variar también de forma aleatoria entre:

$$A_{R1} = \begin{pmatrix} -0,0809 & -0,2162 & 0,3459 \\ 0,2904 & 0,8581 & 0,2271 \\ -0,0321 & -0,0938 & -0,0070 \end{pmatrix} \text{ y } A_{R2} = \begin{pmatrix} -0,0809 & -0,2162 & 1,3836 \\ 0,2904 & 0,8581 & 0,9084 \\ -0,0321 & -0,0938 & -0,0070 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

este sistema es regular porque $\|A(k)\| \leq 1,9389$ y el periodo de reseteo también está acotado.

El sistema con la acción de *reset* sí es estable, para comprobarlo se remuestrea el sistema después de las acciones de *reset* y se obtiene un conjunto de matrices de evolución $H(n)$ formado por $2^5 = 32$ matrices. Aplicando la Proposición 3.1 se encuentra una matriz $P > 0$ de valores:

$$P = \begin{pmatrix} 0,3818 & 0,0765 & 0,0605 \\ 0,0765 & 0,5522 & 0,3407 \\ 0,0605 & 0,3407 & 1,6808 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

que satisface la LMI (3.8) para todas las posibles $H(n)$. Por lo que el sistema remuestreado es estable y como el sistema reseteado es regular, aplicando el Teorema 3.1, también es estable, tal y como se puede apreciar en la figura 3.3, donde se muestra la salida del sistema reseteado cuando la dinámica base varía aleatoriamente entre A_1 y A_2 y la dinámica de *reset* A_{R1} y A_{R2} en los instantes de reseteo.

En el ejemplo anterior el número de matrices que forman el conjunto de matrices remuestreadas $H(n)$ es pequeño pero en ejemplos posteriores se verá como al tratar situaciones en las que haya más posibles valores de $A(k)$ y $A_R(k)$ el número de valores posibles de $H(n)$ crece exponencialmente por lo que el procedimiento de comprobar la LMI (3.8) para todos los posibles valores de $H(n)$ se hace computacionalmente más complicado. A este método para comprobar la estabilidad se le llamará método exhaustivo, debido a que hay que comprobar la viabilidad de todos los posibles valores de $H(n)$.

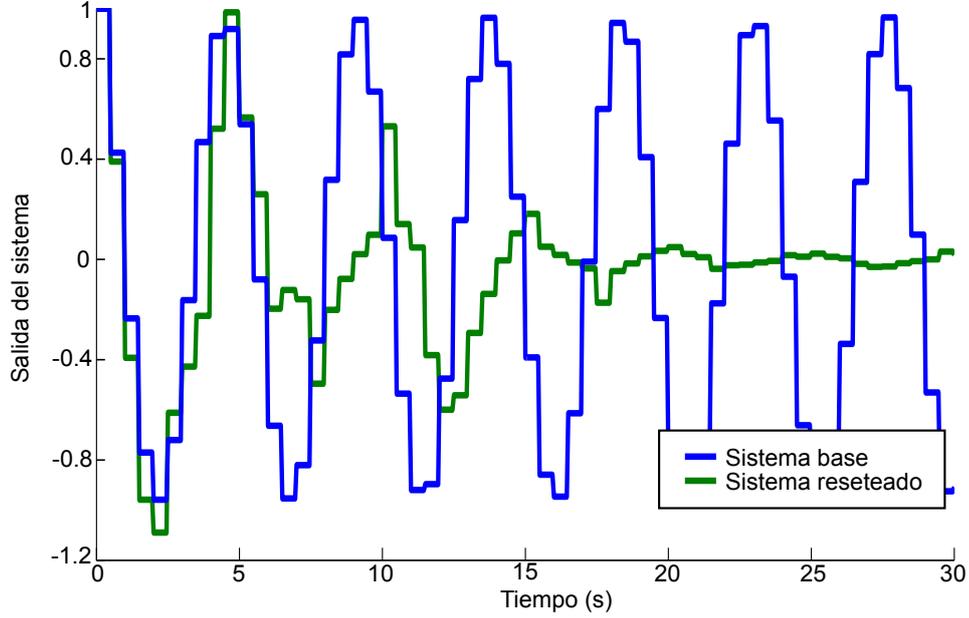


Figura 3.3: Salida del sistema reseteado del Ejemplo 3.2.

3.3. Estabilidad para sistemas reseteados discretos con parámetros variables afines.

Un subconjunto bastante común de sistemas reseteados discretos en el tiempo (2.14) está formado por sistemas en los que las matrices A y A_R dependen de forma afín de un parámetro variable en el tiempo λ , es decir

$$A(k) = A_{11} + A_{12}\lambda(k), \quad A_R(k) = A_{21} + A_{22}\lambda(k) \quad (3.15)$$

donde $\lambda(k) \in [0, 1]$ para cualquier instante $k = 0, 1, 2, \dots$. De modo que la ecuación (3.15) se puede reescribir de forma sencilla como:

$$A(k) = \lambda_1(k)\bar{A}_{11} + \lambda_2(k)\bar{A}_{12}, \quad A_R(k) = \lambda_1(k)\bar{A}_{21} + \lambda_2(k)\bar{A}_{22} \quad (3.16)$$

para $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ con la condición de que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y las matrices \bar{A}_{11} , \bar{A}_{12} , \bar{A}_{21} y \bar{A}_{22} adecuadas.

El sistema reseteado (2.14) con las matrices A y A_R dadas en (3.15) o (3.16) puede estudiarse como un sistema conmutado que cambia entre un modo de flujo, dado por la dinámica de la matriz $A(k)$, y un modo de reset, dado por la matriz $A_R(k)$.

Además ambos modos dependen del tiempo linealmente a través de los parámetros $\lambda_1(\cdot)$ y $\lambda_2(\cdot)$. Por simplicidad de aquí en adelante se numerará a los modos de flujo y de reset como 1 y 2 respectivamente.

Definición 3.6 Se define Θ un conjunto infinito no vacío de secuencias $\{1, 2\}$, es decir $\Theta \subset \{1, 2\}^\infty$, formado por todas las secuencias admisibles de cambios en los modos que se pueden dar en el sistema reseteado.

En general Θ dependerá de la condición de reseteo $\mathcal{K} \times \mathcal{M}$ y el tiempo mínimo de permanencia D . Hay que resaltar que el conjunto de las secuencias admisibles se encuentra dentro de un conjunto mayor Θ_D formado por las secuencias con tiempo de permanencia D :

$$\Theta_D = \{(i_0, i_1, \dots) : i_{l+1} = i_{l+2} = \dots = i_{l+D} = 1 \text{ if } i_l = 2, l \in \mathbb{N}\} \quad (3.17)$$

Dado un conjunto infinito de secuencias Θ_D , se define $\mathcal{L}_M(\Theta_D)$ como el conjunto de todas las secuencias de cambio de longitud $M \in \mathbb{N}_0$ que aparecen al menos una vez en alguna de las secuencias del conjunto Θ_D , es decir:

$$\mathcal{L}_M(\Theta_D) = \{(\theta(l), \dots, \theta(l+M)) : \theta \in \Theta_D, l \in \mathbb{N}_0\} \quad (3.18)$$

Finalmente se define a continuación $\mathcal{N}_M(\Theta_D)$ como el mayor subconjunto de $\mathcal{L}_M(\Theta_D)$ con la siguiente propiedad: cada secuencia de cambio en $\mathcal{N}_M(\Theta_D)$ ocurre infinitas veces dentro de la secuencia Θ_D . Por tanto $\mathcal{N}_M(\Theta_D)$ es el conjunto de secuencias de cambio admisible de longitud M , y las secuencias de cambio fuera del conjunto $\mathcal{N}_M(\Theta_D)$ no pueden aparecer más de una vez en Θ_D . Con esta definición el número de secuencias de cambio para cada longitud M es finito, tal y como se ilustra en el siguiente ejemplo. Sea un sistema reseteado (2.14) con un tiempo de permanencia $D = 2$. En este caso, una posible secuencia de cambios entre los modos de flujo y reset podría ser $(1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, \dots) \in \Theta$, pero por ejemplo $(1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, \dots) \notin \Theta$. Las diferentes secuencias de cambio admisibles para una longitud M , $\mathcal{N}_M(\Theta_D)$, con $M = 0, 1, 2, \dots$, son

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0(\Theta_D) &= \{(1), (2)\}, \\ \mathcal{N}_1(\Theta_D) &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}, \\ \mathcal{N}_2(\Theta_D) &= \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.19)$$

Se pueden visualizar los conjuntos de secuencias como los caminos que se siguen en un grafo en el que los nodos son los modos del sistema. El caso de un sistema reseteado con tiempo de permanencia D puede describirse con el grafo de la figura 3.4. En el grafo aparecen marcadas con flechas sólo las secuencias de cambios

permitidas, en este caso sólo se ha tenido en cuenta la restricción que impone el tiempo de permanencia. Si sólo se impone la condición del tiempo de permanencia los grafos que representan las secuencias de cambio de los sistemas reseteados son cerrados. En este caso $\mathcal{N}_M(\Theta_D) = \mathcal{L}_M(\Theta_D)$, es decir, no hay ninguna secuencia de cambio de longitud M que aparezca sólo una vez. Es posible iniciar una secuencia en cualquier nodo del grafo.

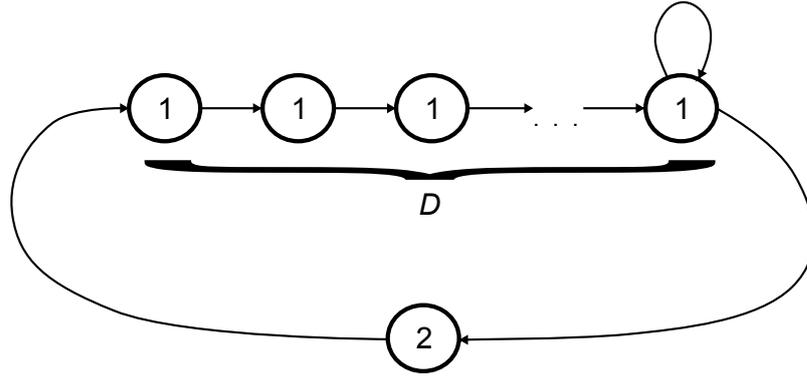


Figura 3.4: Grafo de las secuencias de cambio para un sistema reseteado con tiempo de permanencia D .

Teorema 3.2: El sistema de reseteado (2.14)-(3.16) es uniforme y exponencialmente estable si existe una secuencia de cambio de longitud $M \in \mathbb{Z}^+$ y un conjunto ordenado de matrices definidas positivas $P_{i_1 j_1 \dots i_M j_M}$ tales que

$$P_{i_0 j_0 \dots i_{M-1} j_{M-1}} > 0 \quad (3.20)$$

$$\bar{A}_{i_M j_M} P_{i_0 j_0 \dots i_{M-1} j_{M-1}} \bar{A}_{i_M j_M}^T - P_{i_1 j_1 \dots i_M j_M} < 0 \quad (3.21)$$

para cualquier secuencia $(i_0, i_1, \dots, i_M) \in \mathcal{N}_M(\Theta)$ y $(j_0, j_1, \dots, j_M) \in \{1, 2\}^{M+1}$.

Demostración: La estructura de parámetros variables afines que se da en la ecuación (3.15) es un caso particular de los sistemas con parámetros lineales variables (LPV) que se estudian en [107]. Como el parámetro $\lambda(\cdot)$ toma valores arbitrarios en el intervalo $[0, 1]$, la estabilidad del sistema de reset (2.14) - (3.15) está directamente relacionada con la estabilidad del siguiente sistema conmutado lineal:

$$\mathbf{x}(k+1) = \hat{A}\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.22)$$

con

$$\hat{A} \in \{\bar{A}_{11}, \bar{A}_{12}, \bar{A}_{21}, \bar{A}_{22}\} \quad (3.23)$$

Siguiendo el desarrollo de ([107], Teorema 7.1), el sistema de reseteado (2.14) - (3.16) será uniforme y exponencialmente estable si y sólo si el sistema conmutado lineal (3.22 - 3.23) es uniforme y asintóticamente estable. Las condiciones (C.2) y (C.3) se obtienen directamente de aplicar el Teorema 7.1 al conjunto de secuencias de cambio admisible $\hat{\Theta}$ que se define como

$$\hat{\Theta}_D = \{((i_0, j_0), (i_1, j_1), \dots) : (i_0, i_1, \dots) \in \Theta_D, (j_0, j_1, \dots) \in \{1, 2\}^\infty\} = \Theta_D \times \{1, 2\}^\infty \quad (3.24)$$

de modo que $\hat{\Theta}$ es el conjunto de secuencias de cambio que se dan en un sistema conmutado cuyos modos son \bar{A}_{11} , \bar{A}_{12} , \bar{A}_{21} y \bar{A}_{22} , y que tiene un conjunto de secuencias de cambio admisibles de longitud M , dado por

$$\mathcal{N}_M(\hat{\Theta}_D) = \mathcal{N}_M(\Theta_D) \times \{1, 2\}^{M+1} \quad (3.25)$$

□

La idea que subyace en el Teorema 3.2 es que la estabilidad del sistema conmutado se puede asociar con la estabilidad de las secuencias de cambio que se producen infinitas veces. Las transiciones que se producen sólo una vez no son relevantes para la estabilidad. Al igual que el Teorema 3.1, el Teorema 3.2 también puede ser aplicado a sistemas con *reset* dependiente del estado y con *reset* dependiente de condiciones temporales.

En el caso de los sistemas reseteados discretos en el tiempo dependientes del estado el proceso para comprobar la estabilidad será el buscar el conjunto de secuencias $\mathcal{N}_M(\Theta_D)$ de menor tamaño posible para la que se cumplan las condiciones el Teorema 3.2. Se irá incrementando el tamaño de la secuencia si no se cumplen las condiciones del teorema.

El problema que surge es que el número de LMI que hay que resolver crece exponencialmente¹ al aumentar el tamaño de la secuencia, M , de modo que es posible encontrar sistemas para los que no es factible calcular las LMI para valores de M altos. No pudiendo entonces asegurarse que el sistema sea estable, pero tampoco que sea inestable. Esta situación se suele dar en sistemas en los que la dinámica del sistema base es inestable.

Para sistemas reseteados discretos en el tiempo periódicos es más sencillo aplicar el teorema 3.2 porque el tamaño de la secuencia de cambio admisible será igual al periodo de reseteo, $M = n_R$, y no habrá que ir buscando secuencias de distintos

¹El número de LMI crece cómo $2^{2M} + 2^{(2M-1)}$

tamaños.

A continuación se mostrará un ejemplo de la aplicación del Teorema 3.1 a sistemas reseteados dependientes del estado.

Ejemplo 3.3 Para este ejemplo se considerará un sistema con la estructura de la ecuación (2.16) y las siguientes matrices:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0,797 & 0,005 & 0 & 0 \\ -2,9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 0,203 & -0,005 & -0,20 & 0,005 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0,797 & 0,005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 0,203 & -0,005 & -0,203 & 0,005 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Es posible encontrar una secuencia de cambio admisible entre los modos de longitud $M = 2$ con un tiempo de permanencia $D = 1$ y también un conjunto ordenado de matrices definidas positivas $P_{i_1 j_1 \dots i_M j_M}$ tales que se cumplen las condiciones del teorema 3.2 por lo que se puede asegurar la estabilidad del sistema para cualquier valor de λ .

En la figura 3.5 se muestra la salida del sistema con un valor variable de λ que aparece en la figura 3.6. Como se puede apreciar en la figura el sistema es estable.

En el caso en el que el sistema reseteado tenga matrices de evolución constantes en el tiempo, es decir

$$A = A_1, A_R = A_2 \quad (3.28)$$

se puede emplear un modificación del teorema 3.2:

Teorema 3.2.b: El sistema de *reset* (2.14)-(3.28) es uniforme y asintóticamente estable si existe una secuencia de cambio de longitud $M \in \mathbb{N}_0$ un conjunto ordenado de matrices definidas positivas $P_{i_1 \dots i_M}$ tales que

$$P_{i_0 \dots i_{M-1}} > 0 \quad (3.29)$$

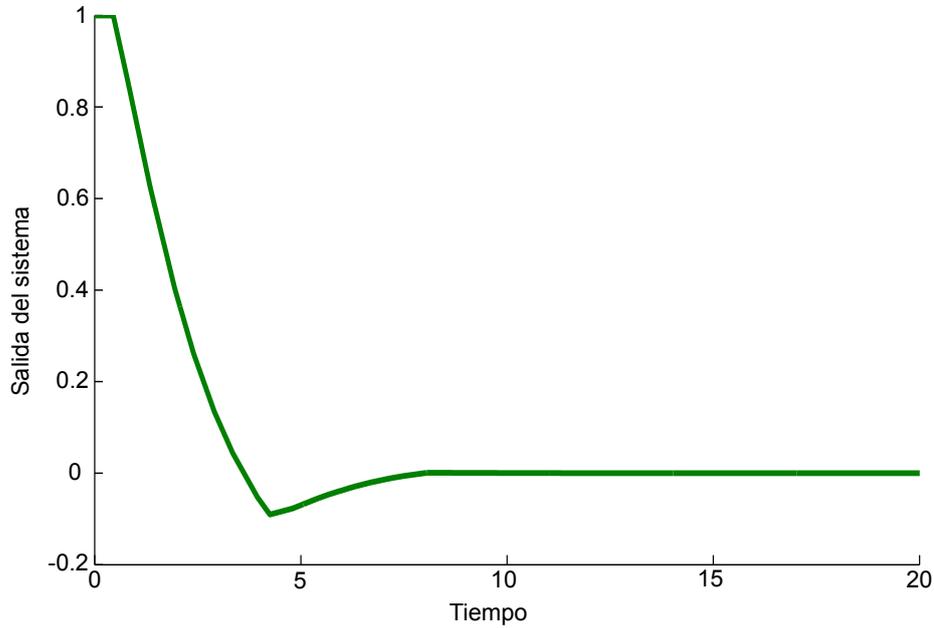


Figura 3.5: Salida del sistema reseteado del Ejemplo 3.3.

$$\bar{A}_{i_M} P_{i_0 \dots i_{M-1}} \bar{A}_{i_M}^T - P_{i_1 \dots i_M} < 0 \quad (3.30)$$

para cualquier secuencia $(i_0, i_1, \dots, i_M) \in \mathcal{N}_M(\Theta)$.

3.4. Comparación

En este apartado se comparará el análisis de la estabilidad de los sistemas reseteados periódicos empleando los teoremas 3.1 y 3.2. El interés reside en conocer cuáles son los márgenes de estabilidad ² que se pueden garantizar con el empleo de ambos teoremas cuando los sistemas son variables en el tiempo debido a los retardos que puede introducir una red de comunicación tal y como se verá en el capítulo siguiente. Al empleo del teorema 3.2 se le llamará método LPV mientras que al empleo del teorema 3.1 se le denominará método exhaustivo. También es importante conocer cuál de es el coste computacional de cada uno de ellos. Para esta comparación se empleará el siguiente ejemplo

²En este caso se considera que el margen de estabilidad viene dado por el máximo retardo para el que se puede garantizar la estabilidad del sistema.

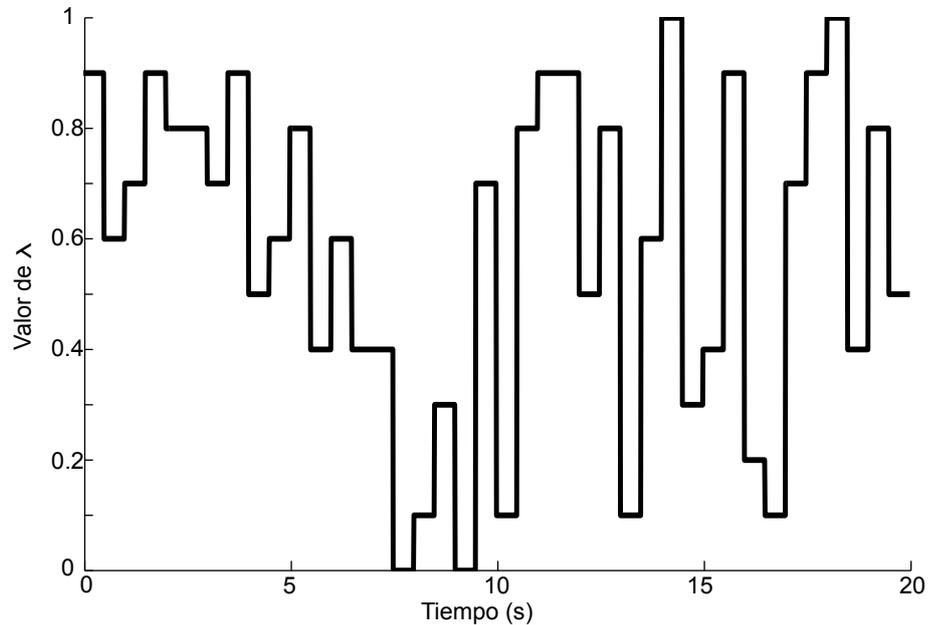


Figura 3.6: Valores de λ empleados en el Ejemplo 3.3.

Ejemplo 3.4 En este ejemplo se considerará un sistema en el que se intenta controlar la misma planta LTI continua empleada en el ejemplo 2.2, $P = \frac{s+1}{s(s+0,2)}$, con un controlador reseteado discreto en el tiempo (2.36), en el que la dinámica del sistema base está dada por las siguientes matrices de evolución: $A_c = 1$, $B_c = 0,15$, $C_c = 12$, $D_c = 6$ y con un periodo de muestreo h de 0.15 segundos, en el que se realiza una acción de reseteo periódica cada 3 periodos de muestreo.

Se tendrá cuenta un retardo variable en el tiempo en las comunicaciones entre la planta y el controlador. Esto hace que las matrices de evolución en lazo cerrado del sistema sean variables, con valores posibles dentro de un conjunto finito de matrices si el número de valores posibles para el retardo es finito. En el siguiente capítulo se darán más detalles sobre la relación entre el retardo y el conjunto de posibles matrices de evolución. Es este momento es suficiente saber que el sistema en lazo cerrado es un sistema reseteado periódico (2.35) con las siguientes matrices

de evolución

$$\begin{aligned}
 A(k) = & \\
 & \begin{pmatrix} 0,97 - (15 - n)0,06 & -(15 - n)0,06 & (15 - n)0,12 & -0,06n & -0,06n & 0,12n \\ 0,15 - (15 - n)0,01 & -(15 - n)0,01 & (15 - n)0,17 & -0,01n & -0,01n & 0,17n \\ -0,15 & -0,15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \\
 A_R(k) = & \\
 & \begin{pmatrix} 0,97 - (15 - n)0,06 & -(15 - n)0,06 & (15 - n)0,12 & -0,06n & -0,06n & 0,12n \\ 0,15 - (15 - n)0,01 & -(15 - n)0,01 & (15 - n)0,17 & -0,01n & -0,01n & 0,17n \\ 0,0163 & 0,0471 & 0,2078 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.31}
 \end{aligned}$$

donde n es el retardo variable que se produce en cada instante y que para este ejemplo sólo podrá tomar valores entre 0 y h y que sean múltiplos de la centésima de segundo, es decir habrán 15 posibles matrices de cada tipo. Estas matrices se adaptan tanto a la formulación del problema con el método exhaustivo como con el método de las LPV, aunque para este último haya reescribirlas para que dependan de forma afín de $n(k)$.

A) Se aplicará en primer lugar el método de las LPV. Tal y como se dijo anteriormente, al ser un sistema reseteado periódico, el tamaño de la secuencia será igual al periodo de muestreo, es decir 3, y el conjunto estará compuesto por los elementos compatibles con la secuencia de reseteo. Si se designa como 1 la evolución del sistema base y como 2 la evolución de *reset* eso quiere decir que el conjunto de secuencias que se deberá comprobar es

$$\{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\} \tag{3.32}$$

Cada uno de los modos puede tener retardo mínimo o un retardo máximo que se nombrarán de nuevo como 1 y 2 respectivamente, con lo que cada una de las secuencias anteriores da lugar a 8 secuencias posibles. En total hay que comprobar 24 secuencias:

$$\{(11, 11, 21), (11, 11, 22), \dots, (22, 12, 12)\} \tag{3.33}$$

Por tanto para comprobar si se cumple o no el Teorema 3.2 es necesario construir un sistema de 48 LMI con 24 variables $P_{i_1 j_1 \dots i_M j_M}$. En este caso el objetivo es

establecer cuál es el margen de estabilidad del sistema, es decir cuál es el retardo máximo para el que se puede asegurar la estabilidad del sistema. Para ello se ha considerado que los posibles valores del retardo varían de forma discreta en múltiplos de centésima de segundo. Se ha realizado un proceso iterativo que va variando el valor máximo del retardo y comprobando si se cumplen las condiciones del Teorema 3.2, el valor máximo para el que se cumpla ese teorema nos dará el máximo retardo admisible. El proceso iterativo se ha llevado a cabo en Matlab y las LMI han sido resueltas empleando Yalmip [98]. El valor máximo que se ha encontrado empleando este método de $n_{\max} = 0,09$ segundos. El tiempo necesario para realizar ese cálculo es de 12.38 segundos. Estos cálculos han sido realizados con un MacBook Air con procesador 1.7 Ghz Intel Core i5 y memoria RAM de 4 GB 1333 Mhz.

B) En el caso en el que se aplique el método exhaustivo para buscar el máximo retardo admisible en primer lugar hay que tener en cuenta que en circunstancias normales no se conoce a priori el orden en el que se produce la secuencia de matrices de evolución, porque aunque los instantes de reset ocurran periódicamente no es posible conocer el retardo que habrá en cada instante de muestreo. Esto hace que para poder asegurar la estabilidad del sistema haya que comprobar si se puede cumplir la proposición 3.1 para cualquier $H(n)$ posible. De modo que el primer paso será generar el conjunto de $H(n)$ posibles. En principio podría pensarse que se puede buscar el máximo retardo admisible empleando las LMI dadas por la ecuación (3.8) aplicadas sobre las matrices de evolución del sistema base y del sistema reseteado directamente en vez de sobre el sistema remuestreado, pero en este caso se estaría fijando una condición más restrictiva, dado que se estaría exigiendo que tanto el sistema base como el sistema en el que sólo se realizasen acciones de *reset* fueran estables de forma independiente.

En este caso se empleará de nuevo el mismo proceso iterativo para buscar el valor máximo del retardo admisible que se ha empleado con el método LPV. Tal y se ha dicho al plantear el ejemplo el conjunto de posibles retardos es un número finito, de forma que si el número de retardos posibles menores que un cierto retardo máximo, que llamaremos n_{\max} , es N entonces el número de elementos del conjunto $H(n)$ será $(N + 1)^{n_R}$, donde n_R es el periodo de reseteo. Si tanto el periodo reseteo como el número de posibles retardos es grande el número de elementos del conjunto de matrices será muy grande y se necesitará un tiempo considerable en generar ese conjunto.

Empleando el método exhaustivo en la misma máquina que el método LPV se ha encontrado que el mayor retardo admisible para garantizar la estabilidad es también $n_{\max} = 0,09$ segundos y el tiempo necesario para realizar el proceso de cálculo iterativo es de 72.18 segundos. Además ha sido necesario generar 4096 matrices

de 6 por 6 elementos. Hay que recordar que el proceso iterativo es el mismo para ambos métodos (una búsqueda por bisección), de modo que el método LPV da un margen de estabilidad igual de grande que el que se obtiene con el método exhaustivo pero el esfuerzo de cálculo y la capacidad de memoria necesaria empleando el método LPV es mucho menor que en el caso de exhaustivo.

En la figura 3.9 se muestra la respuesta a un escalón del sistema empleado en el ejemplo 3.4, con un retardo de comunicación variable entre 0 y 0.09 segundos, usando el controlador reseteado y controlador base correspondiente. En la figura 3.8 aparecen los retardos de comunicación variables que se han empleado en la simulación anterior.

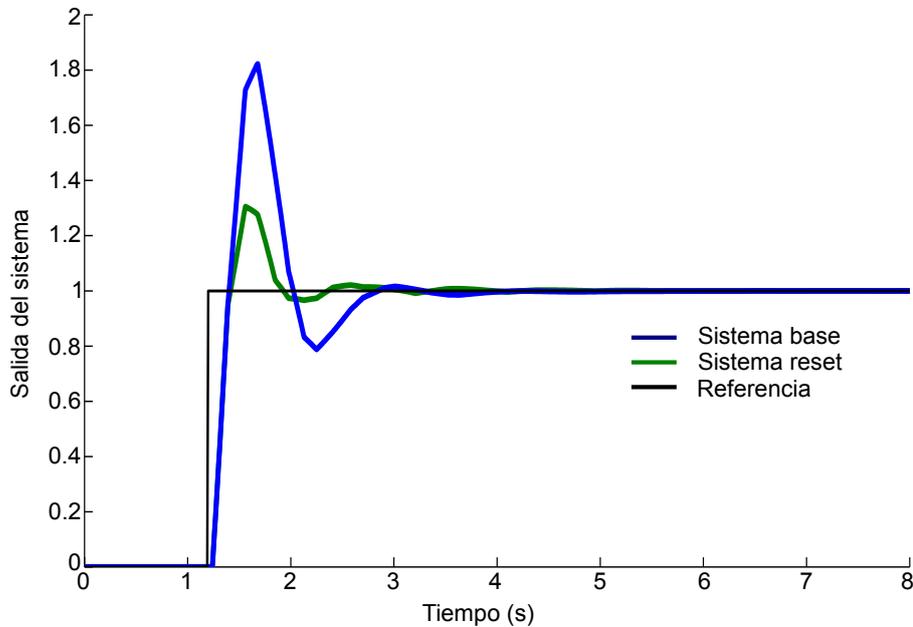


Figura 3.7: Salida del ejemplo 3.4

Se podría decir por tanto que el método LPV es más rápido y tiene menos coste computacional que el método exhaustivo, pero este método también presenta una serie de ventajas la principal es que se puede emplear en la práctica indistintamente de si el sistema base es estable o no. Otra ventaja es la posibilidad de extraer más información de las regiones de estabilidad en el caso de sistemas variables en el tiempo. A continuación se discutirá ese aspecto.

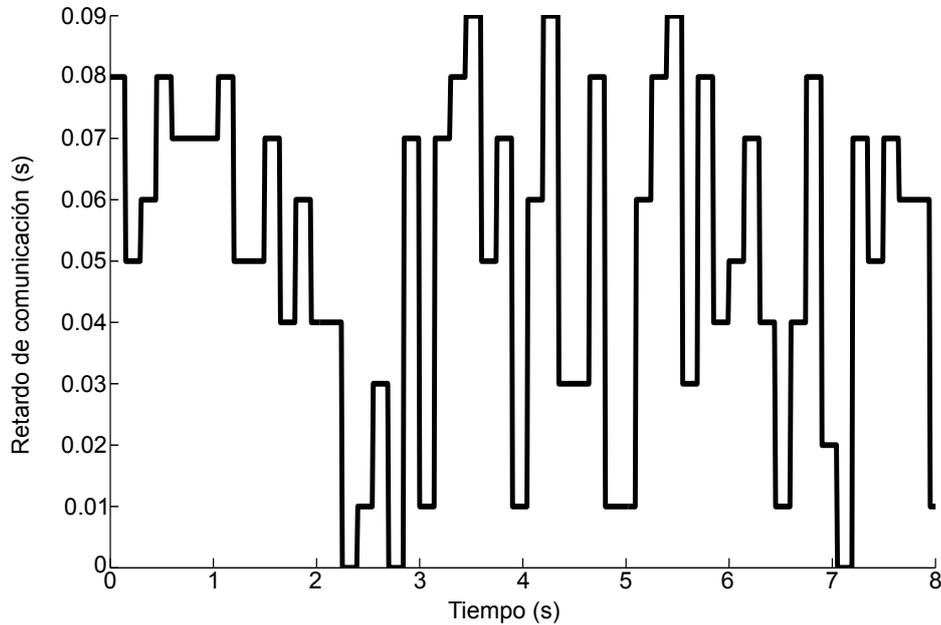


Figura 3.8: Retardo de comunicación en el ejemplo 3.4

Para un sistema (2.35) con matrices de evolución (3.31) dependientes de un parámetro $n(k)$ se puede definir la región de estabilidad como el conjunto de valores de $n(k)$ para los que el sistema es estable.

En el caso del ejemplo, al emplearse un sistema reseteado tiene un periodo de reseteo $n_R = 3$ se puede visualizar la región de estabilidad del sistema remuestreado como el conjunto de valores de $n_1(k)$, $n_2(k)$ y $n_3(k)$, donde n_1 es el valor del retardo en el instante posterior a la acción de reset y n_2 y n_3 son los instantes siguiente, para los que el sistema es estable. A cada combinación de estos valores le corresponde una $H(n)$. Se pueden asociar los valores de $n_1(k)$, $n_2(k)$ y $n_3(k)$ a los ejes del espacio de forma que la región de estabilidad se corresponde con una región del espacio tridimensional y cada posible $H(n)$ se corresponde con un punto de ese espacio. Al buscar el retardo máximo n_{\max} lo que se hace es buscar el cubo más grande en el que todos los puntos interiores garanticen la estabilidad tal y como se muestra en la figura 3.9. En el caso en el que el periodo de reseteo sea mayor la búsqueda de la región de estabilidad se correspondería con la búsqueda de un hipercubo de dimensiones n_R y la identificación ya no sería posible con el espacio tridimensional sino con un espacio n_R -dimensional.

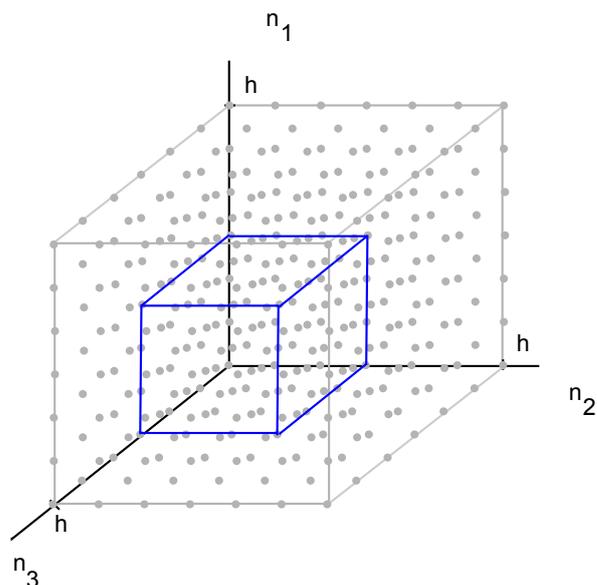


Figura 3.9: Región de estabilidad.

Cuando se emplea el método LPV se podría decir que lo que se hace es comprobar una serie de condiciones sobre las aristas del hipercubo mientras que en el caso exhaustivo se comprueban todos los puntos del cubo, por eso el método exhaustivo tiene mayor coste computacional. Pero este método también permite analizar puntos que están fuera del hipercubo, si ya se ha encontrado el mayor cubo en el que se cumplen las condiciones de la Proposición 3.1 no quiere decir que todos los puntos exteriores no cumplan dichas condiciones. Para el ejemplo se ha comprobado que existen puntos fuera del cubo que también cumplen (3.8). En la figura 3.10 se muestran marcados con círculos verdes todos los puntos que cumplen la LMI (3.8) y la región de estabilidad señalada con un cubo gris. Se puede apreciar como los puntos verdes se extienden fuera del cubo principalmente en la dirección de n_1 esto se puede interpretar como una mayor tolerancia al retardo en los instantes inmediatamente posteriores a las acciones de *reset*.

Esta información ilustra el efecto estabilizador de las acciones de *reset* pero no tiene utilidad práctica dado que normalmente el valor de retardo máximo n_{\max} se utiliza para establecer una cota superior del retardo de transmisión. En el diseño del sistema control y de las comunicaciones se debe tener en cuenta el valor de retardo máximo de forma que no se supere durante el proceso dado que no se puede garantizar la estabilidad por encima de él.

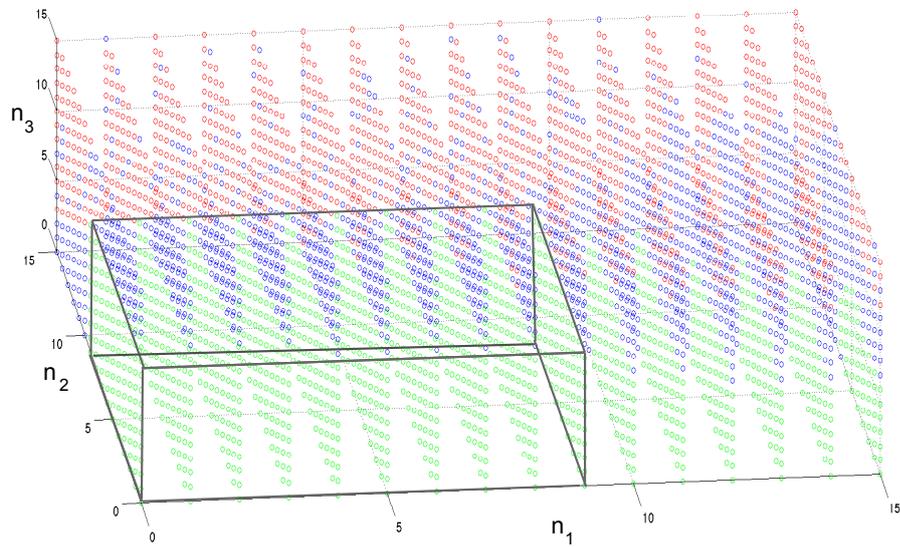


Figura 3.10: Puntos que cumplen la LMI (3.8) (marcados con círculos verdes) y región de estabilidad (cubo gris) del ejemplo 3.4.

CAPÍTULO 4

Controladores reseteados aplicados los sistemas de control en red

En este capítulo se continuará con la descripción de los sistemas de control en red dada en el capítulo 1 y se ampliará el análisis de los problemas inherentes al uso de redes de comunicación en el lazo de control. Se propondrá un modelo para los sistemas de control en red y se estudiará cómo los distintos tipos de controladores reseteados se pueden integrar en esos sistemas. Se demostrará que los sistemas NCS reseteados resultantes se adaptan a la formulación que se ha desarrollado en el capítulo 2 y que por tanto se les puede aplicar las técnicas para el análisis de la estabilidad presentadas en el capítulo 3.

4.1. Problemática del retardo y la pérdida de paquetes

En esta sección se estudiará cómo se produce el retardo de comunicaciones y la pérdida de paquetes. Todas las redes que se presentaron en el capítulo 1 emplean un único medio de comunicación que debe ser compartido por todos los nodos que deseen enviar datos. Como no pueden enviar datos dos nodos al mismo tiempo es necesario que se organicen para acceder a la red. En general si dos nodos quieren acceder a la red al mismo tiempo uno de ellos transmitirá sus datos mientras el otro espera. Puede ocurrir que el tiempo de espera sea excesivo y se pierda algún paquete de información; la pérdida de paquetes de información también puede darse por un error en la transmisión. Los dos principales problemas que introduce el uso de una red de comunicaciones en un sistema de control en lazo cerrado son los retardos y las pérdidas de información.

En la figura 4.1 se muestra la distribución del tiempo empleado desde que se

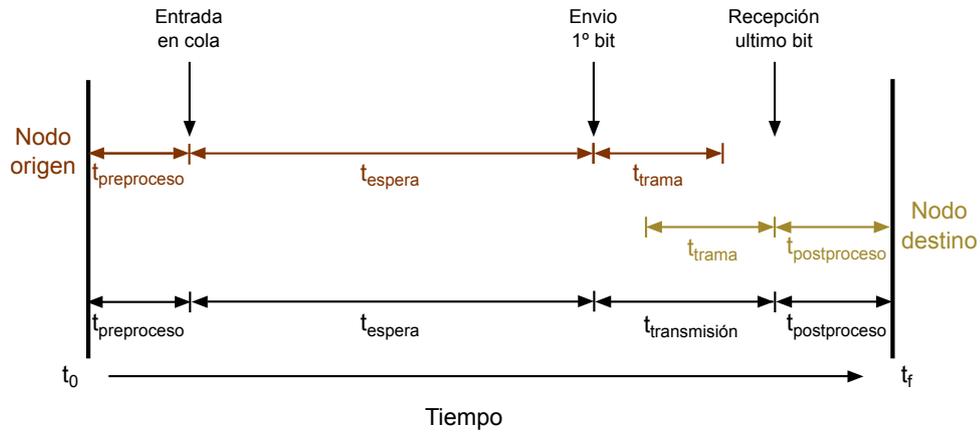


Figura 4.1: Retardo en el envío de un paquete

envía un paquete de información del nodo origen hasta que llega al nodo destino. Se puede definir el tiempo de retardo o simplemente el retardo como la diferencia entre el tiempo de salida, t_0 , y el tiempo de llegada, t_f . El retardo incluye el tiempo de preproceso, el tiempo de espera, el tiempo de transmisión y el tiempo de postproceso.

El tiempo de preproceso es el tiempo que se emplea en preparar la información para ser enviada. El preprocesado incluye la cuantización de la señal y también la codificación. El tiempo de espera es el tiempo que el nodo origen debe esperar para poder empezar a transmitir y, dependiendo del protocolo de red, puede incluir un tiempo de cola y/o un tiempo de bloqueo. El tiempo de bloqueo, y por tanto el tiempo de espera, suele ser el mayor componente del retardo e incluye el tiempo de espera mientras otros nodos envían mensajes y el tiempo necesario para reenviar el mensaje si se produce una colisión. El tiempo de transmisión es el tiempo que pasa desde que se emite el primer bit hasta que llega el último bit y dependerá de la longitud del paquete de información, la velocidad de la red de transmisión y la longitud del cable de red. Por último el tiempo de postproceso es análogo al de preproceso.

4.2. Modelo del sistema de control en red

En esta sección se desarrollará un modelo para sistemas de control en red que funcionan con modo *multirate* [97] [69]. En este tipo de sistemas la frecuencia del controlador es grande comparada con la del sensor, con esto se consiguen buenas respuestas sin sobrecargar la red evitando en la medida de lo posible la pérdida de información. Se empleará el esquema que se muestra en la figura 4.2.

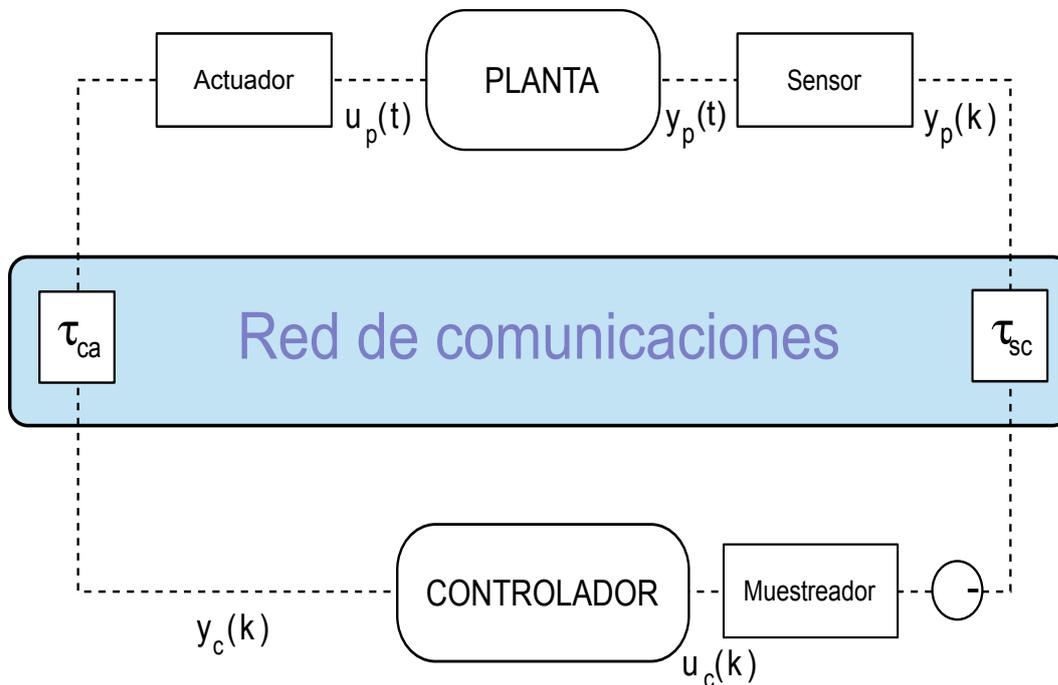


Figura 4.2: Esquema del sistema de control en red.

Se considerará el caso en el que el sensor funciona de forma síncrona, muestreando periódicamente la salida de la planta con periodo T_s , mientras que el controlador y el actuador funcionan de forma asíncrona, es decir calculan y llevan a cabo respectivamente la acción de control cuando ocurre un determinado evento que normalmente será la recepción de un paquete de información.

Cuando la salida de la planta ha sido muestreada la información se envía a través de la red hacia el controlador. Si la red está ocupada el nodo del sensor esperará durante un corto periodo de tiempo y volverá a intentar transmitir la información. En el nodo del controlador un *buffer*¹ almacena la última señal recibida del sensor y el controlador lee el valor almacenado en el *buffer* periódicamente con mayor frecuencia que la del sensor de la planta, $T_c = \frac{T_s}{N}$ (donde N es un entero). El controlador calcula la señal de control en el momento en el que le llegan nuevos datos y el actuador efectúa la acción correspondiente sobre la planta en el momento en el que recibe la señal del controlador.

Se supondrá que la planta P es continua en el tiempo y se asume también que sea invariante en el tiempo. Entonces vendrá dada por la siguiente ecuación en el

¹Por *buffer* designamos un dispositivo de almacenamiento temporal de información digital

espacio de estados:

$$Planta : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_p(t) = A_p \mathbf{x}_p(t) + B_p u_p(t) \\ y_p(k) = C_p \mathbf{x}_p(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

mientras que el controlador será un sistema reseteado como el de la ecuación (2.14) pero invariante en el tiempo

$$\begin{cases} n(k+1) = n(k) + 1, \mathbf{x}_c(k+1) = A_c \mathbf{x}_c(k) + B_c u_c(k) & n(k) < D \vee (k, \mathbf{z}(k)) \notin \mathcal{K} \times \mathcal{M} \\ n(k+1) = 0, \mathbf{x}_c(k+1) = A_c \mathbf{x}_c(k) & n(k) \geq D \wedge (k, \mathbf{z}(k)) \in \mathcal{K} \times \mathcal{M} \\ y_c(k) = C_c \mathbf{x}_c(k) + D_c u_c(k) \end{cases} \quad (4.2)$$

donde $\mathbf{x}_p(t) \in R^{n_p}$ y $\mathbf{x}_c(k) \in R^{n_c}$ son los estados de la planta y el controlador, respectivamente. En esta disposición se puede considerar que la presencia de la red introducirá diferentes retardos, por un lado aparecerán retardo entre el sensor y el controlador, τ_{sc} , y también entre el controlador y el actuador, τ_{ca} además de una serie de retardos de acceso τ_a cada vez que se accede a la red. Esta forma de considerar la distribución del retardo es análoga a la de la sección 4.1 pero simplificando la notación. Como el controlador *reset* es invariante en el tiempo todos los retrasos pueden agruparse en un único retardo $\tau = 2\tau_a + \tau_{sc} + \tau_{ca}$. Este retardo total de ahora en adelante se considerará que se produce únicamente en la comunicación entre el controlador y el actuador. Es necesario remarcar que esta suposición no resta generalidad a los desarrollos posteriores dado que al poder agruparse los retardos también pueden emplazarse en cualquier punto del lazo de control.

En la figura 4.3 se puede observar un esquema de cómo las señales van siendo afectadas por el retardo que introduce el uso de la red.

Se considerarán a continuación dos posibles escenarios de forma separada: en primer lugar que el caso en que el retardo total τ sea menor que el periodo de muestreo T_s y que no haya pérdida de paquetes y en segundo lugar que τ pueda ser mayor que T_s y que además pueda ocurrir la pérdida de paquetes de información. En ambos casos estos retardos podrán ser variables en el tiempo, es decir en cada instante de muestreo el retardo introducido por la red podrá tomar distintos valores, $\tau(k)$.

4.3. Retardo menor que el periodo de muestreo

En esta sección se comenzará por estudiar este caso porque es el más sencillo, en esta situación el retardo total $\tau(k)$ está acotado superiormente por el periodo de

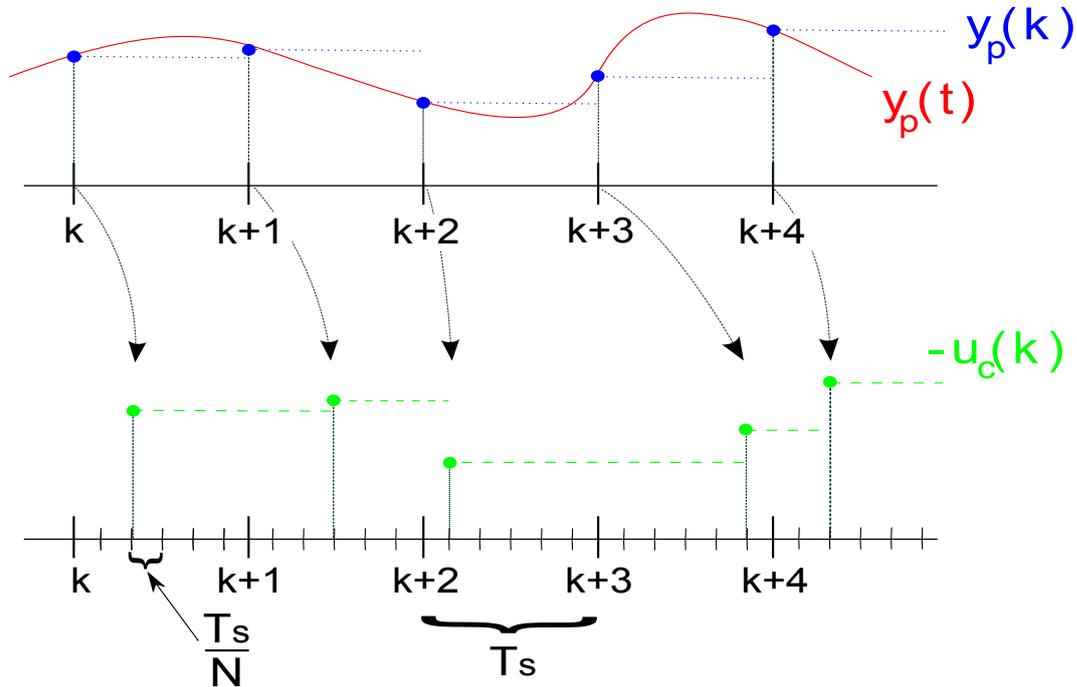


Figura 4.3: Efecto del retardo sobre la señal. Salida de la planta (arriba) y entrada del controlador (abajo).

muestreo del sensor de la planta T_s , $0 \leq \tau(k) \leq T_s$. En la literatura a esta situación se la conoce usualmente como retardos cortos (*short delays*).

Se considerará por simplicidad el caso en el que no hay señales externas y el sistema tiene realimentación negativa en lazo cerrado. Si la red introduce un retardo total $\tau(k)$ entonces la entrada del controlador será la siguiente:

$$u_c(k) = -y_p(k + \frac{n}{N}), \text{ donde } \frac{n}{N} \geq \tau(k) > \frac{n-1}{N} \quad (4.3)$$

donde $\frac{T_s}{N}$ es el periodo con el que el controlador muestrea el *buffer* y n es el número de periodos que transcurren entre el envío y el uso de la información del *buffer* y toma valores dentro del conjunto $\{0, 1, 2, \dots, N\}$. El valor de n puede cambiar en cada instante de muestreo k pero sólo dentro de un número finito, $(N+1)$, de valores.

Por otro lado la entrada de la planta está dada por:

$$u_p(t) = S(y_c, n \frac{T_s}{N}, t) \quad (4.4)$$

donde $S(y_c, n \frac{T_s}{N}, t)$ es una función continua en el tiempo que mantiene el valor de $y_c(k)$ entre los instantes $k + \tau(k)$ y $(k+1) + \tau(k+1)$ (que es el momento en los datos

del controlador llegan al actuador), cambiando su valor en ese instante a $y_c(k+1)$ hasta $(k+2) + \tau(k+2)$ y así sucesivamente. Se puede definir esa función como:

$$S(y_c, n\frac{T_s}{N}, t) = \begin{cases} y_c(k-1) & t \in [k, k + \frac{n}{N}) T_s \\ y_c(k) & t \in [k + \frac{n}{N}, k+1] T_s \end{cases} \quad (4.5)$$

4.3.1. Sistemas reseteados dependientes del estado aplicados a los NCS con retardos cortos

A continuación se estudiará cuál es la estructura en lazo cerrado de estos sistemas si el controlador empleado es un controlador reseteado dependiente del estado como el de la ecuación (2.20) invariante en el tiempo.

Proposición 4.1: El sistema de control en red de la figura 4.2, con la planta P y el controlador C dados por las ecuaciones (4.1) y (2.20) respectivamente, es un sistema reseteado discreto en el tiempo que puede ser descrito por la ecuación (2.16) cuando la planta P es mostrada periódicamente con periodo T_s . Las matrices A y A_R son

$$A(k) = \begin{pmatrix} e^{A_p T_s} - NGD_c C_p & NGC_c & O & O \\ -B_c C_p & A_c & O & O \\ I & O & O & O \\ O & I & O & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} NGD_c C_p & -NGC_c & -NGD_c C_p & NGC_c \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \lambda(k) \quad (4.6)$$

y

$$A_R(k) = \begin{pmatrix} e^{A_p T_s} - NGD_c C_p & NGC_c & O & O \\ O & A_p & O & O \\ I & O & O & O \\ O & I & O & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} NGD_c C_p & -NGC_c & -NGD_c C_p & NGC_c \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \lambda(k) \quad (4.7)$$

donde $\lambda(k) = n(k)/N \in [0, 1]$ y $G = \int_0^{T_s} e^{A_p(T_s-\lambda)} B_p d\lambda$. Además la condición de reseteo \mathcal{M} está dada por

$$\mathcal{M} = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2(n_p+n_c)} : \mathbf{z}^T \begin{pmatrix} O & O & O & O \\ O & O & O & O \\ C_p^T C_p & O & O & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \mathbf{z} \leq 0 \} \quad (4.8)$$

Demostración: Sustituyendo directamente (4.4)-(4.5) en (4.1), el resultado es:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = A_p \mathbf{x}_p(t) + B_p S(y_c, n \frac{T_s}{N}, t) \quad (4.9)$$

Como se está usando una combinación de sistemas continuos y discretos se mostrará la planta en los instantes kT_s , $k = 0, 1, 2, \dots$, obteniendo

$$\mathbf{x}_{pd}(k+1) = e^{A_p T_s} \mathbf{x}_{pd}(k) + \int_0^{T_s} e^{A_p(T_s-\lambda)} B_p S d\lambda \quad (4.10)$$

al ser S una función constante a trozos el intervalo de integración entre 0 y T_s se puede dividir en dos partes de la siguiente forma

$$\mathbf{x}_{pd}(k+1) = L \mathbf{x}_p(k) + \Gamma_0 y_c(k-1) + \Gamma_1 y_c(k) \quad (4.11)$$

donde se han introducido las siguientes funciones para simplificar la notación

$$L = e^{A_p T_s}$$

$$\Gamma_0 = n(k) \int_0^{T_s} e^{A_p(T_s-\lambda)} B_p d\lambda = n(k)G$$

$$\Gamma_1 = \int_{n \frac{T_s}{N}}^{T_s} e^{A_p(T_s-\lambda)} B_p d\lambda = (N - n(k))G \quad (4.12)$$

Empleando el controlador (2.20) y definiendo el estado ampliado formado por los estados de todos los elementos del sistema en lazo cerrado, $\mathbf{z}(k)$, en el instante k como

$$\mathbf{z}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{pd}(k) \\ \mathbf{x}_c(k) \\ \mathbf{x}_{pd}(k-1) \\ \mathbf{x}_c(k-1) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

se obtiene como resultado un sistema reseteado discreto en el tiempo como (2.16) dado por las siguientes ecuaciones de estado

$$\begin{cases} n(k+1) = n(k), \mathbf{z}(k+1) = A(k)\mathbf{z}(k), & n(k) < D \vee \mathbf{z}(k) \notin \mathcal{M} \\ n(k+1) = 0, \mathbf{z}(k+1) = A_R(k)\mathbf{z}(k), & n(k) \geq D \wedge \mathbf{z}(k) \in \mathcal{M} \end{cases} \quad (4.14)$$

con matrices

$$A(k) = \begin{pmatrix} L - (N - n(k))GD_cC_p & (N - n(k))GC_c & -nGD_cC_p & n(k)GC_c \\ -B_cC_p & A_c & O & O \\ I & O & O & O \\ O & I & O & O \end{pmatrix}$$

$$A_R(k) = \begin{pmatrix} L - (N - n(k))GD_cC_p & (N - n(k))GC_c & -nGD_cC_p & n(k)GC_c \\ O & A_\rho & O & O \\ I & O & O & O \\ O & I & O & O \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

Hay que destacar que la dependencia temporal en $A(k)$ y $A_R(k)$ se produce a través de la presencia del retardo variable $n(k)$, y que además $A(k)$ y $A_R(k)$ se pueden expresar como (4.6) y (4.7) si se hace el cambio $\lambda(k) = n(k)/N$.

Para finalizar la demostración a partir de la ecuación (2.20) la condición de *reseteo* se obtiene usando $u_c(k) = y_p(k) = C_p\mathbf{x}_p(k) = (C_p \ O \ O \ O) \mathbf{z}(k)$ y $u_c(k-1) = y_p(k-1) = C_p\mathbf{x}_p(k-1) = (O \ O \ C_p \ O) \mathbf{z}(k)$. El resultado final es $\mathcal{M} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2(n_p+n_c)} : \mathbf{z}^T M \mathbf{z} \leq 0\}$, donde

$$M = \begin{pmatrix} O \\ O \\ C_p^T \\ O \end{pmatrix} (C_p \ O \ O \ O) = \begin{pmatrix} O & O & O & O \\ O & O & O & O \\ C_p^T C_p & O & O & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

□

Con la proposición anterior se ha comprobado como el sistema resultante de introducir un controlador reseteado dependiente del estado en un sistema NCS, de ahora en adelante sistema NCS reseteado, se puede describir con ecuaciones con la misma estructura que cuando las conexiones entre los elementos son punto a

punto. La única diferencia es que en el caso de que hay una red de comunicaciones las matrices de evolución serán dependientes del tiempo y esa dependencia está linealmente relacionada con el retardo introducido por la red. El hecho de que los sistemas NCS reseteados puedan adaptarse al formalismo empleado en los capítulos 2 y 3 permite que se puedan emplear las técnicas de análisis de la estabilidad desarrolladas en esos capítulos.

Ejemplo 4.1 Sea una planta LTI dada por la siguiente función de transferencia $P(s) = \frac{5,8}{s}$, que puede ser descrita por la ecuación (4.1) con las siguientes matrices

$$A_p = (0), B_p = (1), C_p = 5,8, D_p = 0 \quad (4.17)$$

conectada en lazo cerrado según el esquema de la figura 4.2 con un controlador PI-CI dado por la ecuación (2.20) con las matrices

$$A_c = 1, B_c = h, C_c = 0,01, D_c = 0,07, A_\rho = 0 \quad (4.18)$$

Si el periodo de muestreo del sensor de la planta es de $T_s = 0,5$ s. y el del muestreador del controlador es 100 veces más rápido, $T_c = 0,005$ s., entonces empleando la Proposición 4.1 se obtienen las siguientes matrices:

$$A(k) = \begin{pmatrix} 0,797 & 0,005 & 0 & 0 \\ -2,9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,203 & -0,005 & -0,20 & 0,005 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} n(k) \quad (4.19)$$

$$A_R(k) = \begin{pmatrix} 0,797 & 0,005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,203 & -0,005 & -0,203 & 0,005 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} n(k) \quad (4.20)$$

que son las mismas que se emplean en el ejemplo 3.3, ecuaciones (3.26) y (3.27) respectivamente con $n(k) = \lambda(k)$. Por tanto, gracias a los resultados del ejemplo 3.3, la estabilidad de este sistema NCS reseteado está asegurada para cualquier valor del retardo, $n(k)$, entre 0 y T_s .

4.3.2. Sistemas reseteados dependientes de condiciones temporales aplicados a los NCS con retardos cortos

En este momento se procederá a estudiar cuál es la estructura en lazo cerrado de estos sistemas si el controlador empleado es un controlador reseteado dependiente de condiciones temporales como el de la ecuación (2.60), invariante en el tiempo.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_c(k+1) = A_c \mathbf{x}_c(k) + B_c u_c(k) & k \notin \mathcal{K} \\ \mathbf{x}_c(k+1) = f(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_c, \mathbf{x}_e, \mathbf{x}_{ep}) & k \in \mathcal{K} \\ y_c(k) = C_c \mathbf{x}_c(k) + D_c u_c(k) \end{cases} \quad (4.21)$$

Tal y como se ha desarrollado en el capítulo 2 el valor de reseteo puede depender de los estados de los exosistemas E y E_d (ecuaciones (2.58) y (2.59) respectivamente) de modo que es este apartado esos elementos deberán ser incluidos en el esquema del sistema de control en red de acuerdo a la figura 4.4.

Proposición 4.2: El sistema de control en red de la figura 4.4, con la planta P y el controlador C dados por las ecuaciones (4.1) y (4.21) respectivamente, es un sistema reseteado discreto en el tiempo que puede ser descrito por la ecuación (2.63) cuando la planta P es mostrada periódicamente con periodo T_s . Las matrices A_1 y A_2 son

$$A_1(k) = \begin{pmatrix} L - NGD_c C_p & NGC_c & NGD_c C_e & NGC_{ed} & 0 & 0 & 0 \\ -B_c C_p & A_c & B_c C_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{ed} & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} NGD_c C_p & -NGC_c & -NGD_c C_e & 0 & -NGD_c C_p & NGC_c & NGD_c C_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda(k)$$

$$\begin{aligned}
A_2(k) = & \begin{pmatrix} L - NGD_c C_p & NGC_c & NGD_c C_e & NGC_{ed} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{ed} & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\
& \begin{pmatrix} NGD_c C_p & -NGC_c & -NGD_c C_e & 0 & -NGD_c C_p & NGC_c & NGD_c C_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda(k)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

y también

$$C = (C_p \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) , F = (0 \ f \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

donde $\lambda(k) = n(k)/N \in [0, 1]$, $G = \int_0^{\frac{T_s}{N}} e^{A_p(T_s-\lambda)} B_p d\lambda$ y el estado del sistema en lazo cerrado es

$$z(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{pd}(k) \\ \mathbf{x}_c(k) \\ \mathbf{x}_e(k) \\ \mathbf{x}_{ed}(k) \\ \mathbf{x}_{pd}(k-1) \\ \mathbf{x}_c(k-1) \\ \mathbf{x}_e(k-1) \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

□

La demostración de esta proposición es análoga a la de la Proposición 4.1.

Ejemplo 4.2 Para este ejemplo se usará como planta el modelo de un carro móvil [46] dado por la función de transferencia $P(s) = \frac{0,15}{s(0,07s+1)}$, que puede ser descrita

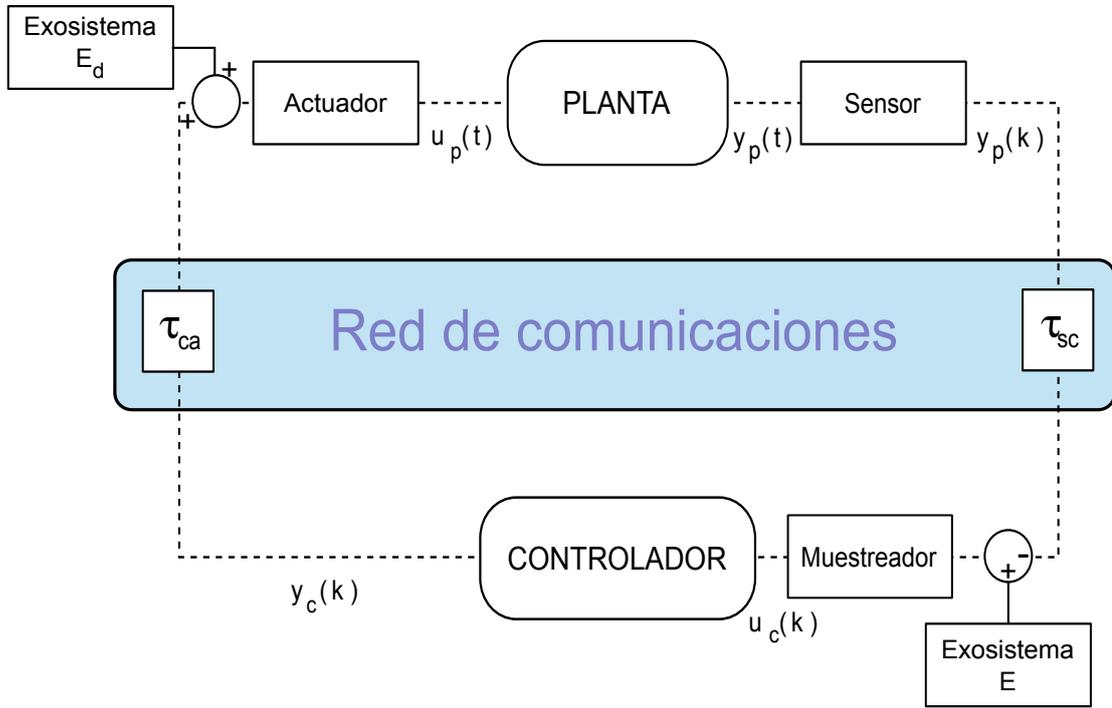


Figura 4.4: Esquema del sistema de control en red con exosistemas.

por la ecuación (4.1) con las siguientes matrices

$$A_p = \begin{pmatrix} -14,2857 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C_p = (0 \ 2,1429) \quad (4.24)$$

La referencia que se desea seguir en este ejemplo será una función sinusoidal con frecuencia w_e generada por un exosistema discreto en el tiempo, cuya salida es una función seno, dado por las matrices (2.68). La perturbación será también una función sinusoidal con frecuencia w_{ed} generada por un exosistema discreto en el tiempo, cuya salida es una función seno, dado por las matrices (2.69).

La planta será muestreada con un periodo $T_s = 0,05$ s y controlador será un PI discreto dado por la ecuación (4.21) con las matrices

$$A_c = 1, B_c = T_s, C_c = 40, D_c = 30 \quad (4.25)$$

El periodo de muestreo del controlador es 5 veces más rápido que el de la planta, es decir $T_c = T_s/N = T_s/5 = 0,01$ s. y los periodos de la señal de referencia y de la perturbación son respectivamente $T_h = 40 T_s$ y $T_{ed} = 27 T_s$. De modo que empleando los criterios para la elección de w y n_R desarrollados en la sección 2.2.3 se calcula el valor de la acción de reset con una longitud de ventana de computación

de $w = T_h/10 = 4$ muestras y con un periodo de reseteo de $n_R = w + 1 = 5$ muestras, el valor obtenido es el siguiente:

$$f = -(0,16, 1,52, 0,32, 0,78, -0,83, -0,11, 0,18, 0, 0, 0, 0, 0) \mathbf{z}(k) \quad (4.26)$$

En la figura 4.5 se muestra la salida del sistema cuando el retardo introducido por la red es fijo y con valor $n(k) = 5$. Para poder realizar una comparación se muestran las salidas empleando el controlador base y el controlador reseteado, se observa cómo el seguimiento de la referencia es mejor cuando se usa el controlador reseteado después de un cierto transitorio. Aunque, debido a la presencia de la perturbación y del retardo, ninguno de los dos controladores logra acercarse mucho a la señal de referencia.

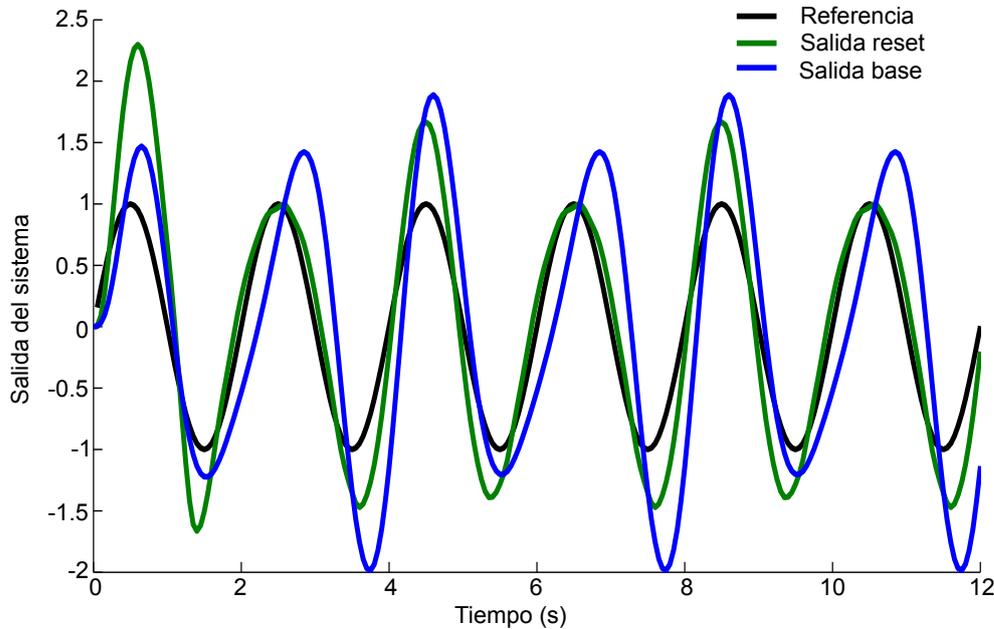


Figura 4.5: Salida del ejemplo 4.2 con retardo de comunicaciones constante.

Al haberse empleado en este ejemplo un retardo fijo se puede aplicar el teorema 3.1 para comprobar la estabilidad del sistema. En este caso la matriz $H = A_R(5)A^4(5)$ es Schur estable por lo que el sistema reseteado es estable.

Ejemplo 4.3 En este ejemplo se estudiará un sistema en el que el retardo es variable y la referencia que se quiere seguir es de tipo escalón. La planta está dada por la siguiente función de transferencia $P(s) = \frac{s+1}{s^2+4,5s+4,5}$. El controlador base es un sistema dado por la ecuación (2.37) con las matrices $A_c = 1$, $B_c = T_s$, $C_c = 25$

and $D_c = 3$, donde $T_s = 0,1$ s. Empleando de nuevo los criterios desarrollados en la sección 2.2.3 se obtienen los siguientes valores para la longitud de la ventana de computación y el periodo de reseteo: $n_R = 3$ muestras y $w = 9$ muestras. Con esos valores se calcula la siguiente acción de reset

$$f(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_c, r) = (0,0299, 0,0586, 0,1089, 0,1018) \quad (4.27)$$

En la figura 4.6 aparecen las salidas de los sistemas con controladores base y reseteados cuando la red de comunicación no introduce ningún retardo. La salida del sistema reseteado es casi igual de rápida que la del sistema base pero con mucho menos sobreimpulso. Mientras que en la figura 4.7 se muestran las señales de control correspondientes a ambos sistemas. Se puede observar como las acciones de reseteo no introducen saltos en la señal de control mucho mayores que los que se producen en la señal del controlador lineal.

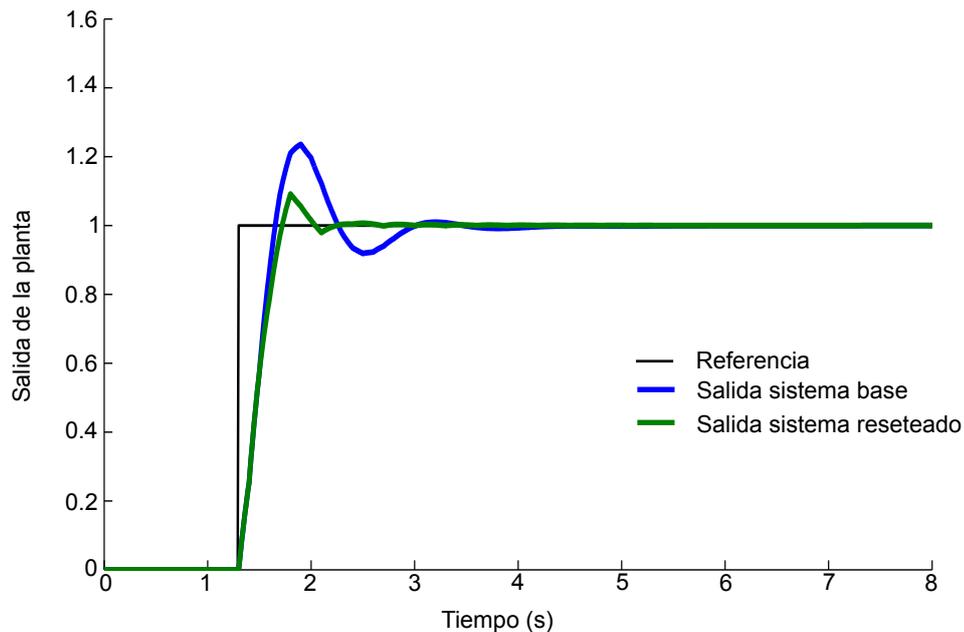


Figura 4.6: Salida del ejemplo 4.3 sin retardo de comunicaciones.

Si el periodo de muestreo del controlador es 10 veces más rápido que el de la planta, $T_c = 0,01$ s. y el retardo máximo para este ejemplo es igual al periodo de muestreo entonces el retardo podrá variar entre $n = 0, \dots, 10$, es decir podrá tomar 11 valores diferentes. Se puede remuestrear al sistema para aplicar el Teorema 3.1 y la proposición 3.1 y analizar de esta forma su estabilidad. Se define el conjunto de

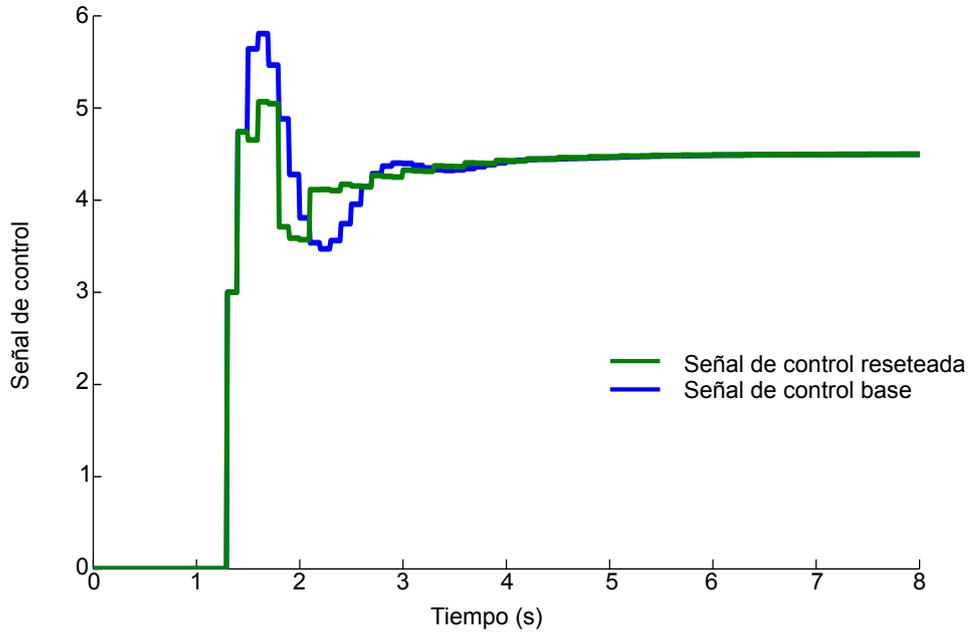


Figura 4.7: Señal de control del ejemplo 4.3 sin retardo de comunicaciones.

las matrices $H(n)$ con valores de retardo admisibles como Λ . Para este ejemplo el conjunto

$$\Lambda = \{H(n) = A_1(k + n_R - 1)A_1(k + n_R - 2)\dots A_1(k + 1)A_2(k)\} \quad (4.28)$$

tendrá en este caso 11^3 elementos. Se comprueba que la siguiente LMI

$$\begin{aligned} \nu I &\leq P \leq \rho I \\ H(1)^T P H(1) - P &< 0 \\ H(2)^T P H(2) - P &< 0 \\ &\vdots \\ H(1331)^T P H(1331) - P &< 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

se cumple para la siguiente P

$$P = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 & 0,3 & -0,5 & 0,1 & 0,2 \\ 0,5 & 6,6 & 1,5 & -0,2 & -0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 1,5 & 5,1 & 0,2 & -0,0 & 0,1 \\ -0,5 & -0,2 & 0,2 & 0,7 & -0,0 & -0,0 \\ 0,1 & -0,4 & -0,0 & -0,0 & 1,4 & -0,0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,1 & -0,0 & -0,0 & 2,4 \end{pmatrix} * 10^{-4} \quad (4.30)$$

por lo que aplicando la Proposición 3.1 el sistema es estable con retardos variables entre 0 y T_s .

En la figura 4.8 se muestran las salidas de la planta con los controladores base y reseteados cuando el retardo es variable entre los valores $n(k) = \{8, 9, 10\}$, los valores que se han usado para realizar la simulación aparecen en la figura 4.9. La salida de ambos sistemas empeora notablemente respecto del caso sin retardo de comunicaciones pero este deterioro es menor en el caso del sistema reseteado.

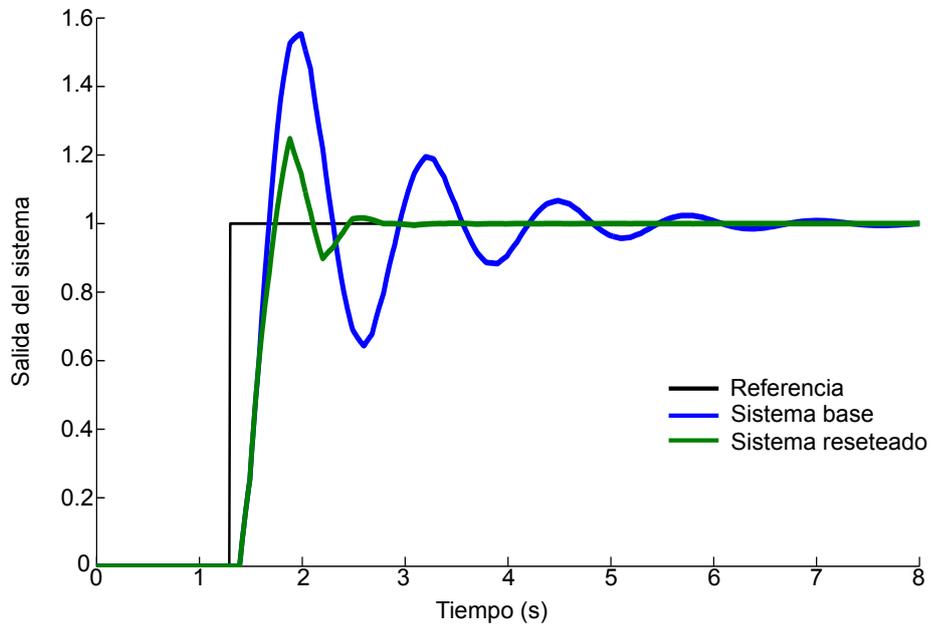


Figura 4.8: Salida del ejemplo 4.3 con retardo de comunicaciones.

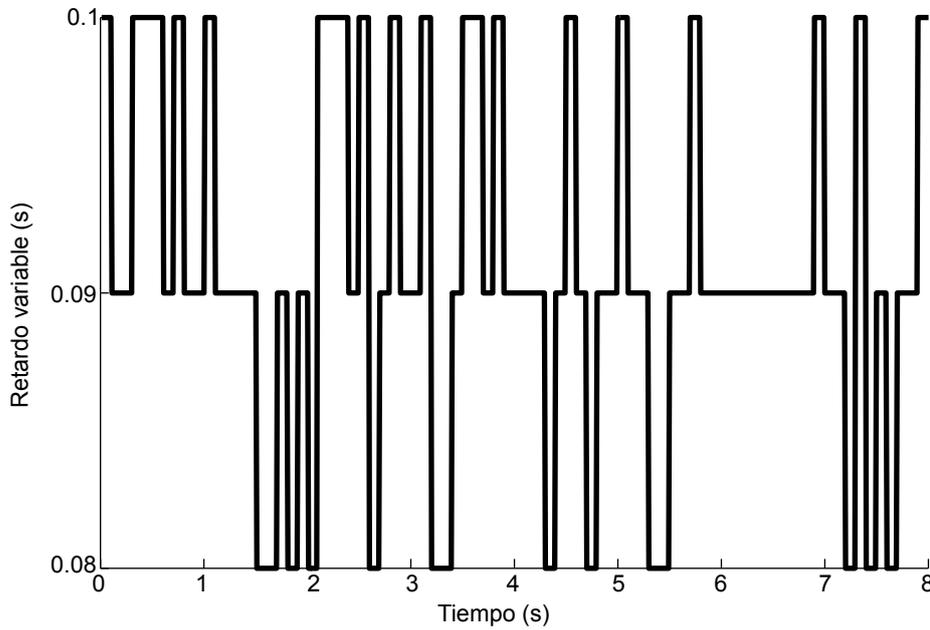


Figura 4.9: Salida del ejemplo 4.3 con retardo de comunicaciones.

4.4. Retardo mayor que el periodo de muestreo

Se estudiará ahora el caso en el que el retardo inducido por la presencia de la red sea más grande que un periodo de muestreo pero esté acotado cierto retardo máximo, τ_m menor que un número entero de periodos de muestreo del sensor de la planta. Es decir $\tau(k) \leq \tau_m \leq QT_s < \infty$ con $Q \in \mathbb{Z}^+$. Este caso se conoce como retardos *largos* (*long delays*).

El proceso para la obtención de las ecuaciones de estado en lazo cerrado del sistema es análogo al que se ha empleado en la sección anterior con la diferencia de que tener retardos largos es necesario que el estado aumentado incluya más términos porque se necesita información de los estados del sistema en los instantes anteriores. En el caso anterior las señales podían venir del instante anterior y del actual, ahora las señales podrán venir de Q instantes anteriores y del actual.

De nuevo se analizarán por separado a los sistemas reseteados dependientes del estado y los dependientes de condiciones temporales.

4.4.1. Sistemas reseteados dependientes del estado aplicados a los NCS con retardos largos

En este caso el nuevo estado aumentado se define como:

$$\tilde{\mathbf{z}}(k) = [\mathbf{z}'(k), \mathbf{z}'(k-1), \dots, \mathbf{z}'(k-Q)] \quad (4.31)$$

con

$$\mathbf{z}'(k) = [\mathbf{x}_{pd}^T(k), \mathbf{x}_c^T(k)] \quad (4.32)$$

Con este nuevo estado se puede enunciar la siguiente proposición.

Proposición 4.3: El sistema de control en red de la figura 4.2, con la planta P y el controlador C dados por las ecuaciones (4.1) y (2.20) respectivamente, es un sistema reseteado discreto en el tiempo que puede ser descrito por la ecuación (2.16) cuando la planta P es muestrada periódicamente con periodo T_s y el retardo máximo introducido por la red de comunicación, τ_m , está acotado superiormente por un número entero de periodos de muestreo $\tau_m \leq QT_s \leq \infty$. Las matrices A y A_R son

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{A} + A_0 & A_1 & \dots & A_Q \\ I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

$$A_R = \begin{pmatrix} A' + A_0 & A_1 & \dots & A_Q \\ I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

con

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ -B_c C_p & A_c \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & A_p \end{pmatrix}, A_i = \begin{pmatrix} -n_i G D_c C_p & n_i G C_c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

donde $n_i \in [0, 1, \dots, N] \forall i \in [0, \dots, Q]$ y $\sum_{i=0}^Q n_i = N$. N es, al igual que en la sección anterior, la razón entre el periodo muestreo de la planta y el del controlador $T_c = T_s/N$ y además la condición de reseteo \mathcal{M} está dada por

$$\mathcal{M} = \{\tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{(Q+1)(n_p+n_c)} : \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{C} \tilde{\mathbf{z}} \leq 0\} \quad (4.36)$$

con

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} O & O & O & O & \dots & O & O \\ O & O & O & O & \dots & O & O \\ C_p^T C_p & O & O & O & \dots & O & O \\ O & O & O & O & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & O & O \\ O & O & O & O & \dots & O & O \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Demostración: Se seguirá un proceso análogo al de la demostración de la proposición 4.1. En primer lugar en este caso la entrada a la planta estará dada por:

$$u_p(t) = \bar{S}(y_c, n_i, i, t) \quad (4.38)$$

donde $\bar{S}(y_c, n_i, i, t)$ es de nuevo una función continua a trozos que puede tomar hasta Q distintos en los N intervalos en los que se divide el periodo de muestreo T_s . Se puede definir por tanto esa función de la siguiente forma:

$$\bar{S}(y_c, n_i, i, t) = y_c(k+i) \quad \forall i \in [0, \dots, Q], t \in \left[k + \frac{\sum_{j=0}^i n_{Q-j}}{N}, k + \frac{n_i}{N} \right) T_s \quad (4.39)$$

Se remuestrea el estado de la planta en los instantes kT_s , $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{x}_{pd}(k+1) = e^{A_p T_s} \mathbf{x}_{pd}(k) + \int_0^{T_s} e^{A_p(T_s-\lambda)} B_p \bar{S} d\lambda \quad (4.40)$$

Al ser \bar{S} una función constante a trozos el intervalo de integración entre 0 y T_s se puede dividir en $Q+1$ partes de la siguiente forma

$$\mathbf{x}_{pd}(k+1) = L \mathbf{x}_p(k) + n_0 y_c G(k-0) + n_1 G y_c(k-1) + \dots + n_Q G y_c(k-Q) \quad (4.41)$$

con $G = \int_0^{T_s} e^{A_p(T_s-\lambda)} B_p d\lambda$. Entonces, empleando el estado definido por la ecuación (4.50) se obtiene como resultado un sistema reseteado discreto dado por

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{z}}(k+1) = A(k) \tilde{\mathbf{z}}(k), & \tilde{\mathbf{z}}(k) \notin \mathcal{M} \\ \tilde{\mathbf{z}}(k+1) = A_R(k) \tilde{\mathbf{z}}(k), & \tilde{\mathbf{z}}(k) \in \mathcal{M} \end{cases} \quad (4.42)$$

con las siguientes matrices:

$$A(k) = \begin{pmatrix} L - n_0GD_cC_p & n_0GC_c & -n_1GD_cC_p & n_1GC_c & \dots & -n_QGD_cC_p & n_QGC_c \\ -B_cC_p & A_c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

y

$$A_R(k) = \begin{pmatrix} L - n_0GD_cC_p & n_0GC_c & -n_1GD_cC_p & n_1GC_c & \dots & -n_QGD_cC_p & n_QGC_c \\ 0 & A_p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

la dependencia temporal en $A(k)$ y $A_R(k)$ se produce a través de la presencia de los retardos variables n_i . Estas matrices se pueden expresar de forma más compacta cómo se hace en las ecuaciones (4.33) y (4.34).

Para finalizar la demostración a partir de la ecuación (2.20) la condición de *reseteo* se obtiene usando $u_c(k) = y_p(k) = C_p \mathbf{x}_p(k) = (C_p \ O \ \dots \ O \ O) \tilde{\mathbf{z}}(k)$ y $u_c(k-1) = y_p(k-1) = C_p \mathbf{x}_p(k-1) = (O \ O \ O \ C_p \ \dots \ O \ O) \tilde{\mathbf{z}}(k)$. El resultado final es $\mathcal{M} = \{\tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^n : \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{C} \tilde{\mathbf{z}} \leq 0\}$, donde

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} O \\ O \\ C_p^T \\ \vdots \\ O \end{pmatrix} (O \ O \ O \ C_p \ \dots \ O \ O) = \begin{pmatrix} O & O & O & O & \dots & O & O \\ O & O & O & O & \dots & O & O \\ C_p^T C_p & O & O & O & \dots & O & O \\ O & O & O & O & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & O & O \\ O & O & O & O & \dots & O & O \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

□

Es posible cambiar la estructura de las matrices de las ecuaciones (4.33) (4.34) para que se adapten a la forma de los sistemas LPV, con una estructura similar a la de la ecuación (3.16) de la siguiente forma:

$$A(k) = \lambda_0 \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{A} + A_a & 0 & \dots & 0 \\ I & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{A_{10}} + \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{A} & A_a & \dots & 0 \\ I & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{A_{11}} + \dots + \lambda_Q \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 & \dots & A_a \\ I & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{A_{1Q}} \quad (4.46)$$

$$A_R(k) = \lambda_0 \underbrace{\begin{pmatrix} A' + A_a & 0 & \dots & 0 \\ I & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{A_{20}} + \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} A' & A_a & \dots & 0 \\ I & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{A_{21}} + \dots + \lambda_Q \underbrace{\begin{pmatrix} A' & 0 & \dots & A_a \\ I & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{A_{2Q}} \quad (4.47)$$

con

$$A_a = \begin{pmatrix} -GD_c C_p & GC_c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

y $\lambda_i = \frac{n_i}{N}$. La diferencia es que ahora se contemplan no sólo dos parámetros variables, λ_1 y λ_2 para describir la dependencia temporal sino que hay $Q + 1$ parámetros. En el Apéndice C se ha enunciado el Teorema 3.2 ampliado que permite el análisis de la estabilidad de este tipo de sistemas reseteados.

Definición: Se define a cada una de las combinaciones posibles de los valores n_i anteriores como un modo de retardo.

Merece la pena analizar cuál es el significado de los modos de retardo y para ello se estudiará el caso en el que $N = 2$ y $Q = 2$, los posibles modos aparecen en la Tabla 4.1.

En el modo 1 el valor de $n_0 = 2$ y los otros son cero, esta situación se corresponde con un retardo nulo, el modo 2 se corresponde con un retardo de medio periodo

	n_0	n_1	n_2
Modo 1	2	0	0
Modo 2	1	1	0
Modo 3	1	0	1
Modo 4	0	2	0
Modo 4	0	1	1
Modo 6	0	0	2

Tabla 4.1: Diferentes modos de retardo con $N = 2$ y $Q = 2$

de muestreo. Es interesante observar que el modo 3 equivale a una pérdida de la señal de $y_c(k - 1)$ porque después de recibir la señal de $y_c(k - 2)$ se recibe la señal $y_c(k)$. Por tanto con este modelo de los sistemas reseteados es posible no sólo describir los retardos largos sino también la **pérdida de paquetes**, concretamente el número de posibles paquetes consecutivos perdidos es de $Q - 1$.

Teorema 4.1 Si el sistema (4.42) tiene un retardo máximo acotado $\tau_m \leq QT_s$ y la relación entre el periodo de muestreo del sensor y el del controlador es $T_c = T_s/N$ entonces el número de modos de retardo posibles (incluyendo posibles pérdidas de paquetes) es

$$\binom{N + Q}{N} = \frac{(N + Q)!}{N!Q!} \quad (4.49)$$

□

La demostración de este teorema se encuentra en el Apéndice B. La mayoría de los modos, cuando los valores de N y Q son grandes, contemplan situaciones de pérdida de paquetes. Si se quiere estudiar sólo la situación en la que no se permite la pérdida de paquetes o que el número de posibles paquetes perdidos esté acotado hay que construir el conjunto de los modos de retardo tal y como se muestra también en el Apéndice B.

Ejemplo 4.4 En este ejemplo se analizará de nuevo el sistema del ejemplo 4.1 cuando el periodo de muestreo del controlador es $T_c = 0,25$ s., es decir, $N = 2$ y se desea comprobar si el sistema es estable cuando el retardo máximo introducido por la red de comunicación es menor que tres periodos de muestreo, $\tau(k) \leq \tau_m \leq 1,5$ s. De forma que la combinación de los modos de reset con los posibles retardos da lugar al siguiente conjunto de matrices $\{A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{20}, A_{21}, A_{22}, A_{23}\}$. Es posible hallar una secuencia de cambio entre esas matrices de longitud $M = 2$ y $D = 1$ tales que se cumpla la condición del teorema 3.4 ampliado de forma que se demuestra que el sistema es estable para cualquier combinación de retardos menores que 1,5 s. Para demostrarlo en este caso es necesario resolver una LMI de 368 términos y 48 variables.

En la figura 4.10 se muestra la salida del sistema cuando los retardos varían entre 1 y 1,5 s. y se observa que el sistema es estable pero que la respuesta se ha deteriorado respecto de la obtenida sin retardo que se muestra en la figura 3.5. Los retardos empleados en esa simulación están dibujados en la figura 4.11.

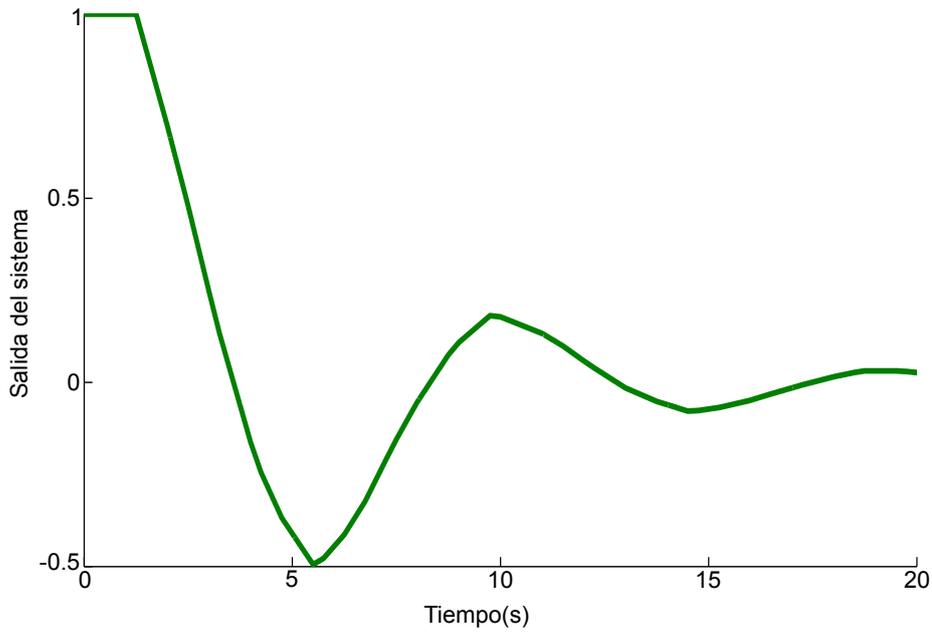


Figura 4.10: Salida del ejemplo 4.4 con retardo de comunicaciones.

4.4.2. Sistemas reseteados dependientes de condiciones temporales aplicados a los NCS con retardos largos

Los controladores reseteados con condiciones temporales pueden incluir exosistemas, por lo que será necesario introducir la información de esos sistemas en el estado en lazo cerrado

$$\tilde{\mathbf{z}}'(k) = [\mathbf{z}'(k), \mathbf{z}'(k-1), \dots, \mathbf{z}'(k-Q)] \quad (4.50)$$

con

$$\mathbf{z}'(k) = [\mathbf{x}_{pd}^T(k), \mathbf{x}_c^T(k), \mathbf{x}_e^T(k), \mathbf{x}_{ed}^T(k)] \quad (4.51)$$

Usando este estado aumentado en lazo cerrado se puede introducir la siguiente proposición que especifica la estructura resultante de introducir los controladores reseteados dependientes de condiciones temporales en un sistema reseteado con

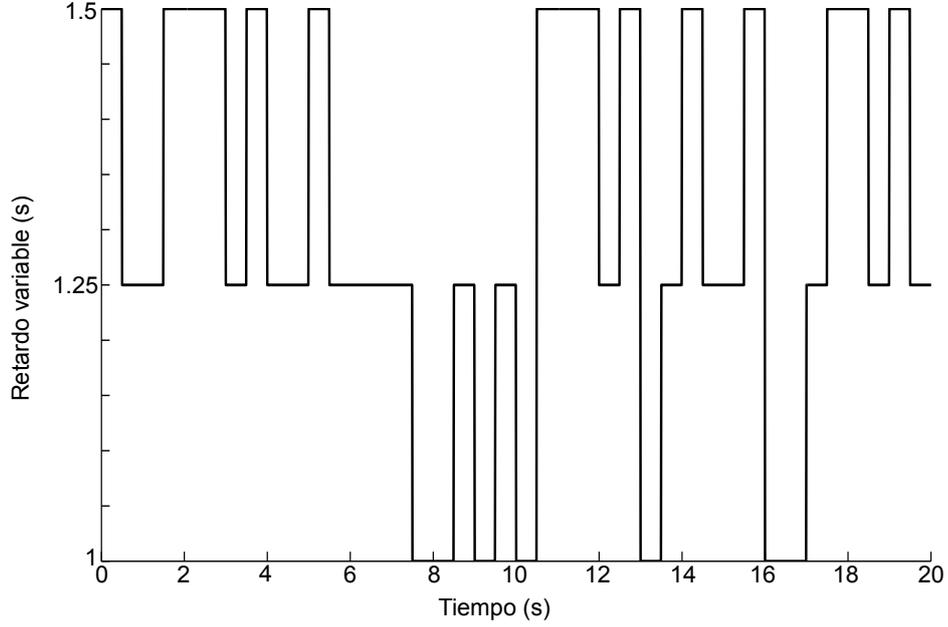


Figura 4.11: Retardo de comunicaciones empleado en el ejemplo 4.4.

retardos largos.

Proposición 4.4: El sistema de control en red de la figura 4.4, con la planta P y el controlador C dados por las ecuaciones (4.1) y (4.21) respectivamente, es un sistema reseteado discreto en el tiempo que puede ser descrito por la ecuación (2.63) cuando la planta P es mostrada periódicamente con periodo T_s y el retardo máximo introducido por la red de comunicación, τ_m , está acotado superiormente por un número entero de periodos de muestreo $\tau_m \leq QT_s \leq \infty$. Las matrices A_1 y A_2 serán

$$A_1 = \begin{pmatrix} \tilde{A} + A_0 & A_1 & \dots & A_Q \\ I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} A' + A_0 & A_1 & \dots & A_{\mathcal{Q}} \\ I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

con

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & NGC_{ed} \\ -B_c C_p & A_c & B_c C_e & 0 \\ 0 & 0 & A_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{ed} \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

$$A' = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & NGC_{ed} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{ed} \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} -n_i GD_c C_p & n_i GC_c & n_i GD_c C_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

donde $n_i \in [0, 1, \dots, N] \forall i \in [0, \dots, \mathcal{Q}]$ y $\sum_{i=0}^{\mathcal{Q}} n_i = N$.

□

La demostración es análoga a la de la proposición 4.3.

Ejemplo 4.5 En este ejemplo se estudiará de nuevo el sistema empleado en el ejemplo 4.3 con $N = 2$ y $\mathcal{Q} = 3$, es decir el periodo de muestreo del controlador es $T_c = T_s/2 = 0,05$ s. y el retardo máximo es menor que tres periodos de muestreo, $\tau(k) \leq \tau_m \leq 0,3$ s.

Aplicando el teorema 4.1 se obtiene que el número de modos de retardo posible con esta configuración es igual a 10, esos modos se muestran en la tabla 4.4.2. Para este ejemplo no se considerará la posibilidad de pérdida de paquetes por lo que no se tendrán en cuenta los modos 3, 7 y 8 de la tabla. Eso hace que las matrices de evolución (4.52) y (4.53) puedan tomar 7 valores distintos cada una. Se puede

	n_0	n_1	n_2	n_3
Modo 1	2	0	0	0
Modo 2	1	1	0	0
Modo 3	1	0	1	0
Modo 4	0	2	0	0
Modo 5	0	1	1	0
Modo 6	0	0	2	0
Modo 7	1	0	0	1
Modo 8	0	1	0	1
Modo 9	0	0	1	1
Modo 10	0	0	0	2

Tabla 4.2: Diferentes modos de retardo con $N = 2$ y $Q = 3$

remuestrear el sistema aplicando de nuevo la Proposición 3.2 para analizar la estabilidad del sistema. En este caso, el conjunto Λ tendrá $7^3 = 343$ elementos.

Se comprueba que la siguiente LMI es viable

$$\begin{aligned}
\nu I &\leq Q \leq \rho I \\
H(1)^T Q H(1) - Q &< 0 \\
H(2)^T Q H(2) - Q &< 0 \\
&\vdots \\
H(343)^T Q H(343) - Q &< 0
\end{aligned} \tag{4.57}$$

con

$$\Lambda = \{H(n) = A_1(k+2)A_1(k+2)A_2(k)\} \tag{4.58}$$

porque el sistema reseteado es estable para cualquier combinación de retardos menores de 3 periodos de muestreo del controlador.

En la figura 4.12 se muestra la salida de los sistemas base y reseteado cuando la red introduce un retardo variable entre 0,1 y 0,3 s. Tal y como se ha demostrado el sistema reseteado permanece estable mientras que el sistema base se desestabiliza. En la figura 4.13 aparecen los retardos empleados en la simulación anterior.

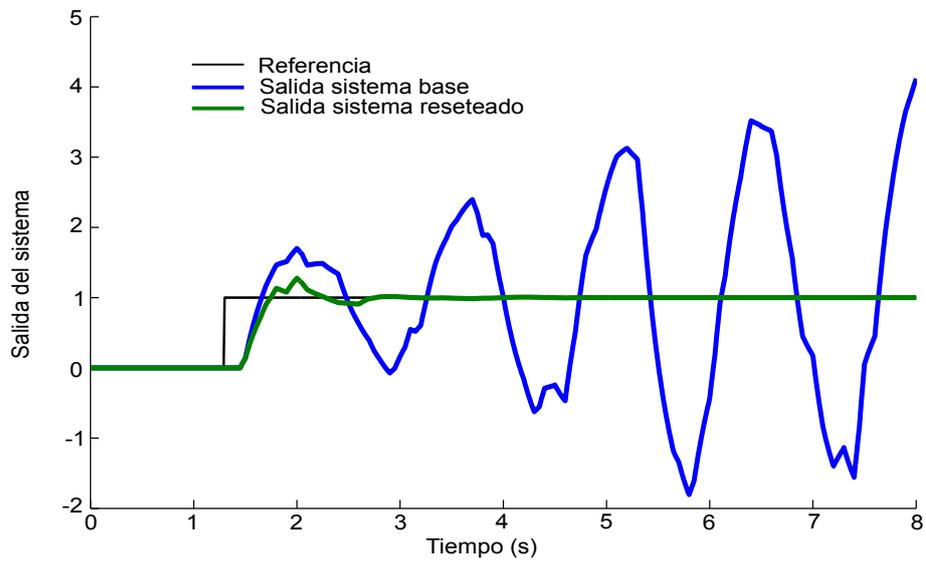


Figura 4.12: Salida del ejemplo 4.5 con retardo de comunicaciones.

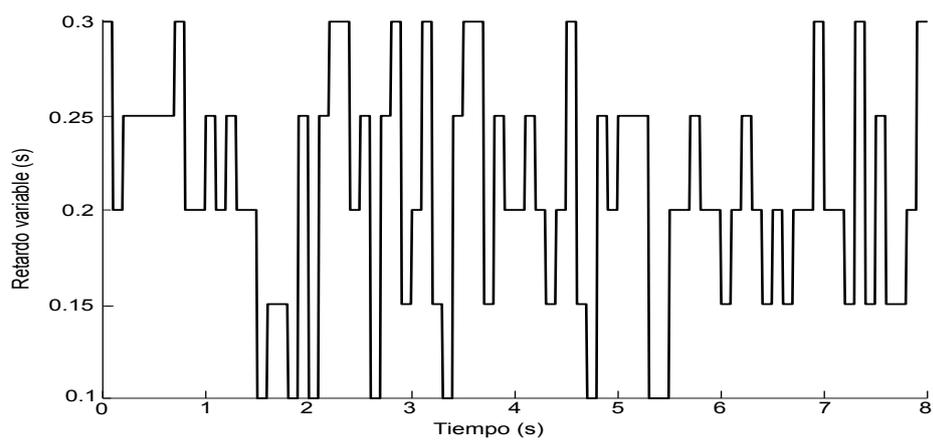


Figura 4.13: Retardo de comunicaciones empleado en el ejemplo 4.5.

CAPÍTULO 5

Aplicaciones

En este capítulo se muestra como se han aplicado los sistemas reseteados en tiempo discreto a una serie de casos prácticos. En primer lugar una aplicación industrial como es el control de pH y a continuación una aplicación a un sistema de control en red como es el control de distancias entre vehículos en una vía de comunicación inteligente. En ambas aplicaciones el interés reside en comprobar cómo los sistemas reseteados pueden mejorar las especificaciones de diseño que se pueden alcanzar con controladores lineales.

5.1. Aplicación al control de procesos: Control del pH.

El pH, o "potencial de hidrógeno", es una medida de la acidez o de la alcalinidad de una disolución. El concepto de pH fue usado por vez primera por el químico Soren Sørensen en 1909 en el laboratorio Carlsberg [141], actualmente se define como el logaritmo negativo de la concentración de iones hidrógeno expresado en moles por litro:

$$pH = -\log_{10}[H^+]. \quad (5.1)$$

El uso de un logaritmo en la definición viene motivado por el amplio rango de los valores de concentración que abarca varios ordenes de magnitud, al emplear el logaritmo los valores de pH resultantes son sencillos de manejar. La escala de pH va de 0 a 14 en disoluciones acuosas, las disoluciones ácidas tienen valores de pH menores que 7 y las alcalinas mayores que 7. El pH 7 indica una disolución neutra (en agua).

Es la presencia del logaritmo lo que hace que el proceso de neutralización sea no lineal, la curva de neutralización de una disolución suele tener forma de S. Esto hace que la respuesta en pH al añadir más soluto a una disolución sea extremada-

mente variable pasando de zonas muy sensibles a zonas insensibles. Esta especial característica sumada a la variabilidad temporal que también aparece en el control de pH convierte a este proceso de control en uno de los más desafiantes procesos industriales para su control. Una amplia gama de técnicas de control han sido aplicadas a este tipo de planta como redes neuronales [55], control conmutado [34], control de modelo interno [57], identificación en tiempo real [154], control robusto H_∞ [65], etc. Sin embargo el proceso de control de pH sobre el que se desea trabajar forma parte de una planta industrial mayor que tiene otros objetivos y una configuración que hace inaplicables, al menos de forma directa, la mayoría de las planteamientos de los trabajos anteriores (fundamentalmente porque casi todos los trabajos contemplan la presencia de reactores de mezcla y alguno de ellos la presencia de disoluciones básicas además de ácidas).

El control de pH puede darse sobre procesos en los que la mezcla se produce en un reactor, denominado CSTR (*Continuous Stirred Tank Reactor*) donde una fuerte agitación consigue una mezcla casi instantánea de los reactivos, o en procesos donde la mezcla se produce en la misma línea de flujo del proceso, llamado control en línea del proceso. Es este último caso es común asumir que el proceso es el mismo que en el caso del reactor pero con volumen tendiendo a cero [55]. La mezcla en reactor es más común y relativamente más sencilla de controlar dado que no introduce retardos de transporte como si ocurre en el caso de la mezcla en línea. En la figura 5.1 se pueden observar los esquemas del control de pH en un reactor y el control de pH en línea.

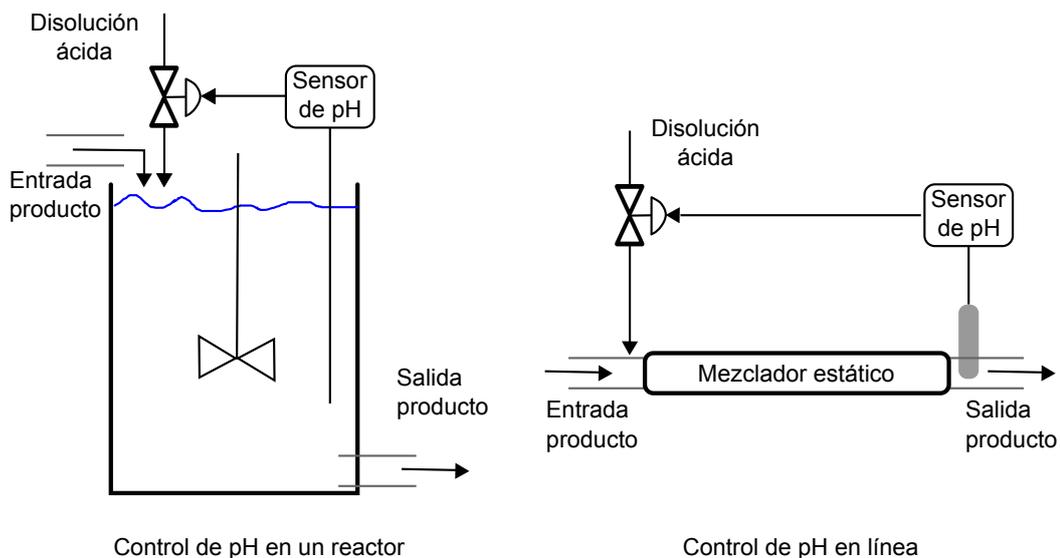


Figura 5.1: Esquema del control de pH en reactor (izquierda) y en línea (derecha).

El proceso en el que se desea trabajar en esta aplicación es un proceso industrial de control de pH en línea. El producto que se desea controlar es agua de la red potable, que debido a su tratamiento potabilizador es ligeramente básica, que es tratada con una corriente discontinua de ácido nítrico (HNO_3). Esta discontinuidad en la inyección del ácido, que posibilita robustez en la inyección frente a cambios de presión en la línea de producto, hace que la mezcla no sea homogénea hasta que el líquido ha recorrido cierta distancia en la tubería más allá del elemento de mezcla estática, en trabajos anteriores realizados en la misma planta [42] se optó por realizar la medida del valor de pH en un punto alejado de la inyección de ácido, esto introduce un cierto retardo pero limita el ruido de mezcla. Para este experimento sin embargo se ha optado por colocar el sensor de pH en una posición más cercana, lo que produce que este experimento tenga menos retardo de transporte pero mucho más ruido de mezcla.

Configuración de la planta industrial de pH

El lazo de control de pH usado en este ejemplo forma parte de una planta industrial de mayor tamaño diseñada para el tratamiento de productos propios de la industria conservera. En esta planta, denominada planta piloto hay dos lazos de control diferenciados, un intercambiador de calor y el lazo de pH, en este primer ejemplo tendremos en cuenta únicamente el lazo de control de pH. En la figura 5.2 se puede observar una imagen de la planta en la que aparecen destacados los elementos relevantes para el control de pH.

El lazo de control de pH consta de los siguiente elementos: En primer lugar (y marcado con 1 en la figura) un tanque de almacenamiento del producto con una capacidad de unos 50 litros, el siguiente elemento es una bomba de tornillo sin fin que produce un flujo continuo del producto, a continuación tenemos una bomba dosificadora, modelo LMI serie A9 de la marca Milton Roy (2 en la figura), que introduce pequeñas cantidades de una disolución ácida fuerte (el depósito de la disolución está marcado con 4 en la imagen) en la corriente (el punto de inyección está marcado con 3 en la imagen). Esta bomba funciona de forma discontinua pudiendo producir únicamente un número natural de inyecciones por minuto, *strokes per minute* (spm), entre 1 y 100. A 100 spm la bomba produce un flujo de 1.6 litros por hora (lph). El siguiente elemento es un mezclador estático de 350 milímetros de longitud. Un mezclador estático es un tramo de tubería en cuyo interior hay una serie de obstáculos que facilitan el mezclado, se muestra un esquema del mezclador en la figura 5.3. El último elemento relevante para este lazo de control es un sensor de pH modelo Orbisint CPS11 (marcado con 5 en la imagen). Esta disposición se corresponde con proceso de control de pH en línea, que como ya hemos dicho anteriormente es cuando el proceso de mezclado se produce mientras el producto circula.



Figura 5.2: Planta piloto: lazo de calor y lazo pH

El producto que se va a emplear es agua potable que se toma directamente de la red y se almacena en el tanque, el ácido que se utilizará para controlar el pH es una disolución de ácido nítrico con una concentración del 10 % en volumen. El agua empleada tenía originalmente valor de pH alrededor de 8,3, lo que quiere decir que es ligeramente básica como ya se ha dicho anteriormente. Si se llama X^- al componente básico desconocido del agua potable la relación de neutralización que se produce al añadir el ácido es



El punto de operación que se desea mantener para el producto final es de $\text{pH}=6$, con un flujo continuo de producto de 295 lph aproximadamente.

Para la realización de la identificación de la planta se analizaron datos de una serie de respuestas a entradas escalón alrededor del punto de operación deseado. Los datos se ajustaron a un modelo de primer orden con retardo:

$$P(s) = \frac{-k}{\tau s + 1} e^{-Ls} \quad (5.3)$$

donde $k = 0,02 \pm 0,01 \text{ spm}^{-1}$, $\tau = 167 \pm 20 \text{ s}$ y $L = 45 \pm 15 \text{ s}$. Se eligió un modelo de

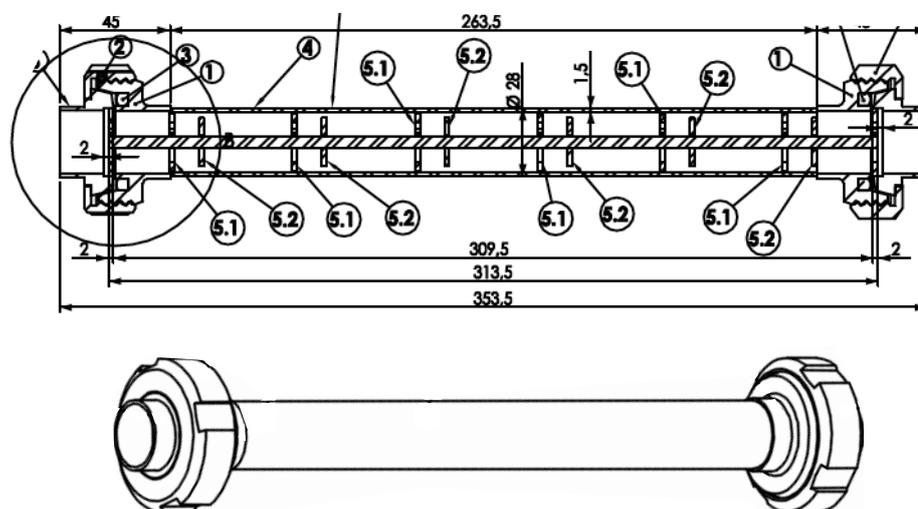


Figura 5.3: Plano del mezclador estático.

primer orden por su sencillez y porque es observable, lo que es condición necesaria para poder aplicar un controlador reseteado periódico tal y como se mencionó en la sección 2.2.2. En el punto de operación la señal es ruidosa debido a que la proximidad entre el actuador y el sensor impiden una mezcla homogénea del producto y el ácido.

Aplicación del controlador reseteado

Se tomará como controlador base un controlador proporcional integral (PI) discreto en el tiempo con un periodo de muestreo $h = 1$ s. sintonizado empleando técnicas de IMC (Internal Mode Control). Cuando el proceso es un primer orden con retardo como en la ecuación (5.3) el controlador PI se sintoniza empleado la siguiente fórmula [139]:

$$k_p = \frac{\tau}{k(\lambda + L)} \quad , \quad \tau_i = \tau \quad (5.4)$$

El valor de la constante λ se puede escoger libremente en el intervalo $-h < \lambda < \infty$. Como regla general valores pequeños de λ producen que la respuesta sea rápida mientras que con valores más grandes se puede conseguir mayor estabilidad y robustez. Para esta aplicación se seguirá el criterio desarrollado por Skogestad [138], que establece que el valor de λ debe ser igual al retardo temporal $\lambda = L$.

Entonces, empleando los valores obtenidos de la identificación (5.3), con ese criterio se calculan los siguientes parámetros para el controlador PI: $k_p = -81,774$ y

$k_i = -0,4896$. Con estos valores la respuesta del sistema es relativamente lenta sin prácticamente oscilaciones en torno al equilibrio, se podrían usar como controlador base este sistema pero suele ser interesante emplear sistemas más rápidos como sistema base para sacar el mayor provecho posible de la cancelación del sobreimpulso que introducen las acciones de reseteo. Para obtener un controlador más rápido se puede emplear un valor de λ más pequeño, si $\lambda = 2/3L$ entonces los parámetros serán $k_p = -98,1256$ y $k_i = -0,5876$. A los controladores PI con estos parámetros los denominaremos PI-IMC y PI-IMCdet.

Simulando la respuesta escalón del sistema base en lazo cerrado se puede observar como el tiempo de pico (T_p) es de unos 170 s, siguiendo el proceso de sintonía del controlador reseteado periódico presentado en el capítulo 2 el periodo de reseteo debe de ser de $n_R = 60$ s y la longitud de la ventana de cálculo del valor de reseteo $w = 120$ s. Empleando esos valores se pueden calcular el valor óptimo de la acción de reseteo para los controladores PI-IMC y PI-IMCdet.

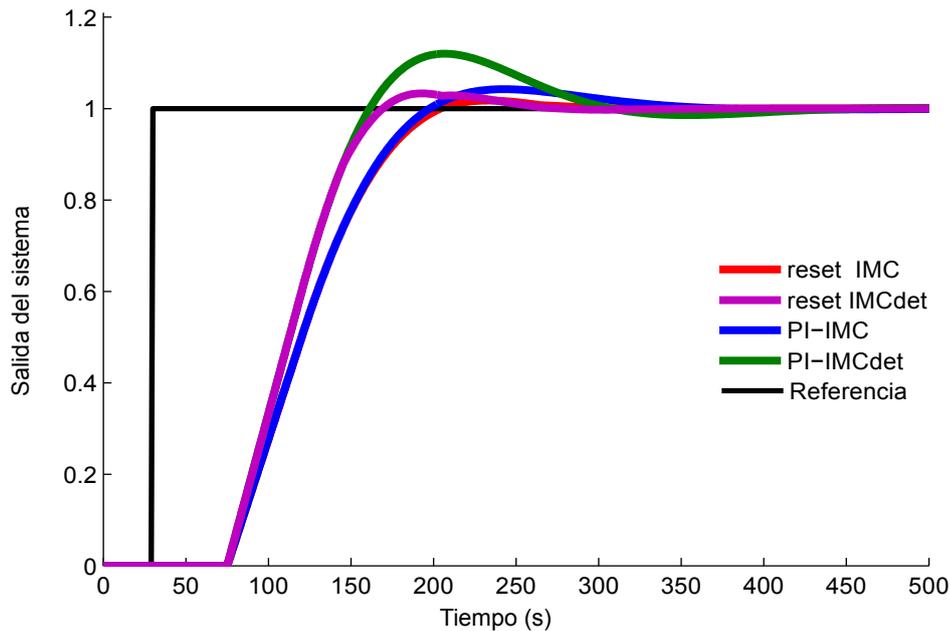


Figura 5.4: Salidas del sistema en simulación

En la figura 5.4 se pueden apreciar las simulaciones de salida del sistema empleando los dos controladores base y los reseteados correspondientes, en ambos casos los sistemas reseteados mejoran el comportamiento de su sistema base reduciendo notablemente el sobreimpulso.

Resultados experimentales

A continuación se verá cuál es la respuesta de los controladores diseñados anteriormente al ser implementados en el dispositivo real. Desgraciadamente el experimento no pudo ser realizado el mismo día en el que se había realizado la identificación debido al tiempo que se requiere para la puesta en marcha de la planta y la propia identificación.

En la figura 5.5 se muestra la salida del sistema con ambos pares de controladores reseteados. El controlador PI-IMC hace que la salida del sistema tenga muy poco sobreimpulso pero sí un considerable *undershoot*, esto puede ser causado por la ganancia variable del proceso y también la presencia de un retardo variable, típicos ambos del control de pH. El controlador PI-IMCdet también produce una salida con menos sobreimpulso y más *undershoot* del esperado dados los resultados de las simulaciones. Si se observan las respuestas de los controladores reseteados se puede ver cómo las acciones de *reset* compensan el mal comportamiento de los controladores base, la salida del sistema con el controlador reset IMC tiene un ligero sobreimpulso pero prácticamente no tiene *undershoot* mientras que el sistema con el controlador reset IMCdet tiene un poco más de sobreimpulso que su controlador base pero es más rápido y tiene menos *undershoot*.

En la figura 5.6 aparecen las señales de control de los controladores PI-IMC y reset IMC. Las acciones de reseteo están programadas para ocurrir periódicamente cada 60 s. a partir del segundo 500. Las acciones de reseteo que se producen en los instantes 500 y 560 s son las responsables de que la respuesta sea más rápida que en el controlador base, produciendo la aparición del sobreimpulso y la reducción del *undershoot* respectivamente. Es importante remarcar que estas acciones no introducen grandes saltos en la señal de control si se comparan con las que aparecen cuando se produce el cambio en el referencia. En la figura 5.7 aparece aumentada una imagen de la señal de control en la zona en la que se producen las acciones de reseteo más relevantes. Al observar la señal de control se puede apreciar como un pequeño cambio en la referencia, un salto de pH 6 a pH 6.5, requiere una acción de control enérgica, con una variación casi el 50 % del rango del actuador.

Para comparar el comportamiento de los cuatro controladores empleados se ha calculado el IAE e ITAE para los datos experimentales. Los resultados aparecen en la Tabla 5.1. El mejor resultado se consigue con el el controlador reset IMC, lo que contradice los resultados obtenidos en la simulación en los que el mejor controlador era el reset IMCdet. Esto puede deberse a que como ya hemos dicho anteriormente el experimento y la identificación no se llevaron a cabo en el mismo momento lo que

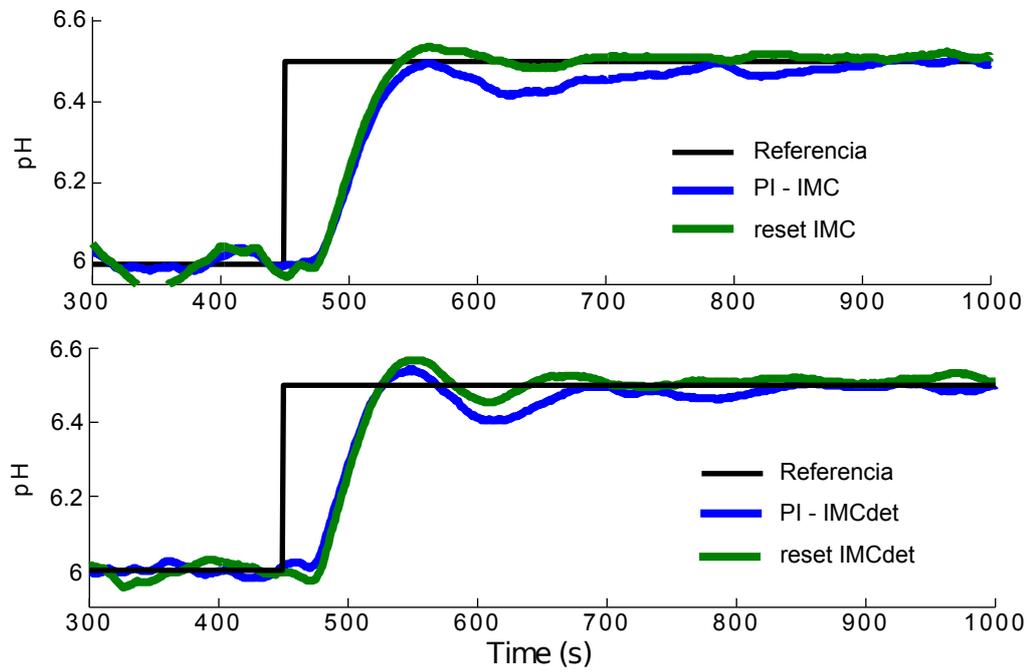


Figura 5.5: Salidas del sistema reales

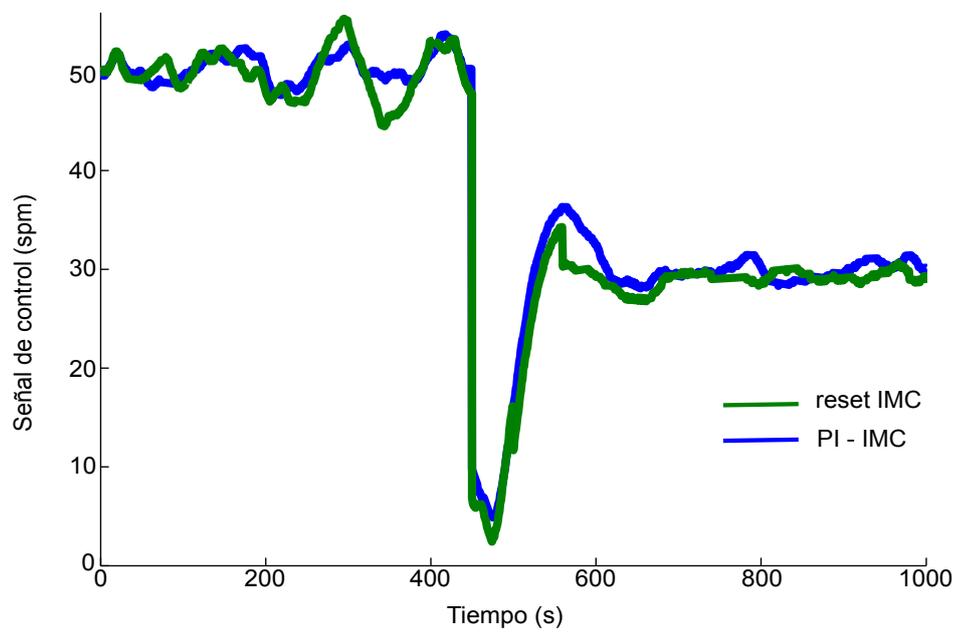


Figura 5.6: Señal de control

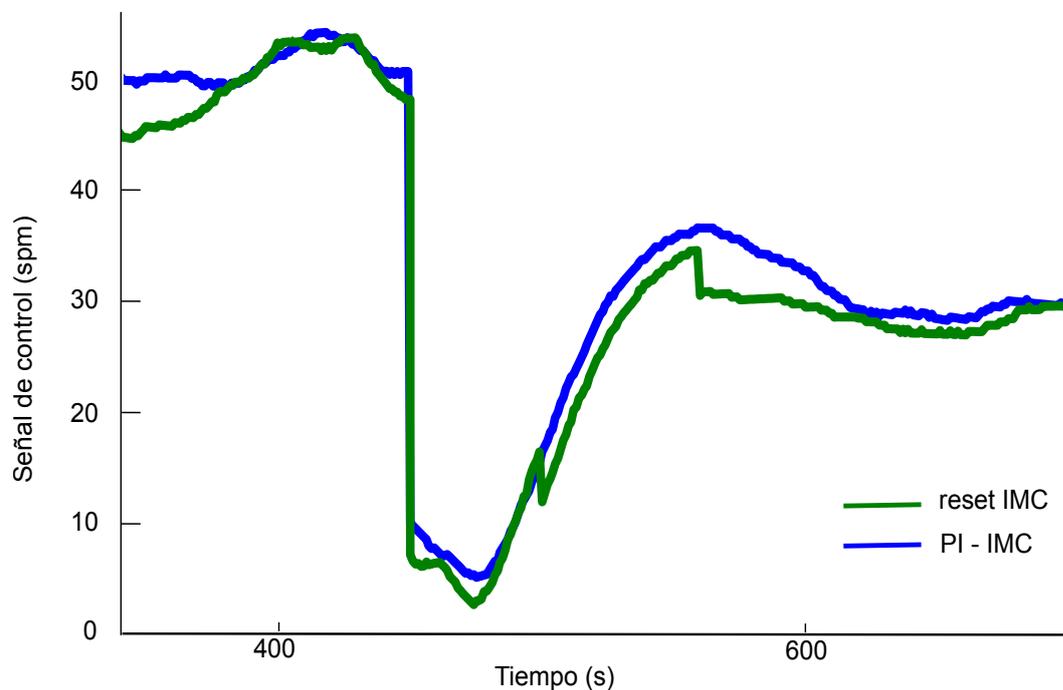


Figura 5.7: Señal de control en la zona de interés

	IAE	ITAE
PI-IMC	41,6942	$4,33 \cdot 10^3$
PI-IMCdet	35,3391	$3,34 \cdot 10^3$
reset IMC	33,0635	$2,53 \cdot 10^3$
reset IMCdet	34,4389	$3,03 \cdot 10^3$

Tabla 5.1: IAE e ITAE

hace que puedan darse errores de modelado. El experimento tiene lugar en el punto en el que la pendiente de la curva de neutralización es más grande, esto también contribuye al error del experimento.

Como conclusión de esta aplicación se puede destacar que la aplicación de los sistemas de *reset* periódicos a una proceso de control de pH industrial produce resultados satisfactorios. A pesar de que el proceso de identificación de la planta no es todo lo preciso que sería deseable, lo que explica las diferencias entre los resultados experimentales y las simulaciones, los controladores reseteados han mostrado un comportamiento superior a los controladores PI sintonizados empleando reglas de IMC.

5.2. Control de distancia entre vehículos

En el campo de la industria del transporte se han desarrollado investigaciones encaminadas a conseguir vehículos autónomos, es decir vehículos capaces de circular en las carreteras convencionales sin necesidad de conductor. Podemos destacar las iniciativas de la *Defense Advanced Research Projects Agency* como las tres ediciones de las *grand challenge* [142], [156].

Por otro lado también existe el concepto más amplio de sistemas inteligentes de transporte [104] consistentes en integrar sistemas de información y tecnologías de la información al campo del transporte en carretera, incluyendo a las infraestructuras, vehículos y gestión del tráfico. En [86] se revisa la implantación de estos sistemas en varios países.

Tanto en el campo de los vehículos autónomos como en los sistemas inteligentes de transporte uno de los elementos a tener en cuenta es el control de la distancia entre vehículos [126]. De hecho en los vehículos convencionales también se ha comenzado a integrar sistemas de control de distancia mínima y sistemas de frenada de emergencia.

En este apartado el objetivo es aplicar al control de distancia entre vehículos los controladores reseteados en tiempo discreto. Consideraremos una aproximación similar a la empleada en [136] y [90], en la se pretende mantener la distancia entre vehículos que circulan formando un grupo o pelotón. El objetivo por tanto es que los vehículos integrantes del pelotón mantengan la distancia relativa con el coche inmediatamente anterior, a excepción del líder de pelotón que es el vehículo que encabeza la marcha. Para ello los vehículos se comunicarán unos a otros la señal de su posición y su velocidad a través de una red de comunicación inalámbrica.

De este modo cada vehículo se convierte en un nodo de comunicación y calcula su acción de control de forma autónoma, aunque a los sistemas de control de distancia con esta configuración se los conoce como sistemas cooperativos [54] dado que es necesario que ambos coches se comuniquen. Se seguirá un planteamiento similar al de [106], en el que se analiza el problema aplicado a dos únicos vehículos. Un vehículo, coche 1, circula a una cierta velocidad desconocida mientras que un segundo vehículo, coche 2, circula detrás del primero intentando mantener una cierta distancia constante con el coche 1, tal y como se muestra en la figura 5.8.

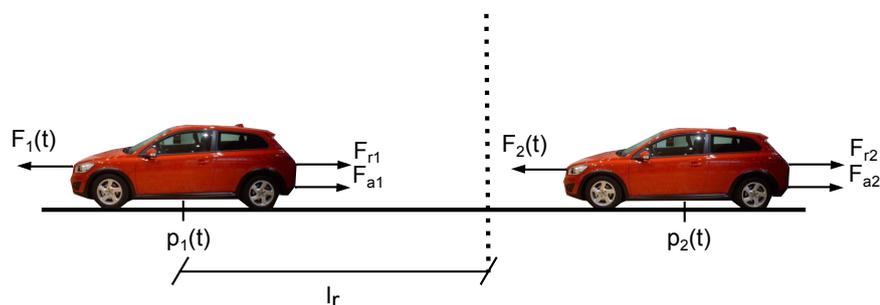


Figura 5.8: Esquema control de distancias entre vehículos.

Las ecuaciones de la dinámica del sistema se pueden escribir como:

$$\begin{cases} e(t) = p_1(t) - p_2(t) - l_r \\ \dot{e}(t) = v_1(t) - v_2(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = a_1(t) - a_2(t) \end{cases} \quad (5.5)$$

donde $p(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ son la posición, velocidad y aceleración respectivamente, los subíndices 1 y 2 denotan a cada vehículo y $e(t)$ e $y(t)$ son los errores en la posición y la velocidad. La dinámica de cada uno de los vehículos se puede describir con la siguiente ecuación de equilibrio de fuerzas:

$$F_i(t) - F_{ai}(t) - F_{ri}(t) = m_i a_i(t), \quad i = 1, 2 \quad (5.6)$$

F_i es la fuerza de propulsión del motor, F_{ai} es la fuerza de rozamiento aerodinámico y F_{ri} es la fuerza de rozamiento de rodadura. Estas fuerzas se pueden modelar con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} F_a(t) &= \frac{1}{2} c_a A_T \rho_{\text{aire}} v^2(t) \\ F_r(t) &= c_r m g \cos(\beta(t)) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Las constantes que aparecen en las ecuaciones anteriores son c_a y c_r coeficiente aerodinámico y de rodadura, A_T área transversal del vehículo, ρ_{aire} densidad del aire, m masa del vehículo, g constante de la gravedad y $\beta(t)$ ángulo de inclinación de la carretera.

Se supondrá para simplificar el problema que ambos coches son iguales y que la inclinación de la carretera es constante. Además se realizará una aproximación lineal de la fuerza de rozamiento aerodinámico en torno a la velocidad nominal del experimento v_o . De modo que si se considera que los estados del sistema son el error en la posición y el error en la velocidad las ecuaciones de la dinámica del sistema

serán

$$\dot{\delta} = \begin{pmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c_m c_o \end{pmatrix} \delta + \begin{pmatrix} 0 \\ -c_m \end{pmatrix} F_1(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -c_m \end{pmatrix} F_2(t) \quad (5.8)$$

con $c_o = v_o c_a A_T \rho_{\text{aire}}$ y $c_m = 1/m$. Tal y como se ha dicho anteriormente los vehículos se irán comunicando entre ellos para transmitirse sus posiciones y velocidades. Se supone que el sistema de control funciona con un periodo de muestreo h , en cada periodo el vehículo 1 envía su posición y velocidad al vehículo 2 para que este calcule el valor adecuado de F_2 para que el valor de la distancia entre vehículos se mantenga en el valor requerido l_r . Se asumirá que el error en las medidas de la posición y la velocidad es despreciable. Las señales de comunicación se transmitirán a través de una red inalámbrica, no es necesario entrar a distinguir aquí que tipo de red concreta se usaría ya que eso dependerá de si el vehículo circula por una carretera convencional o por una carretera "marcada", es decir una carretera con postes de comunicación que sirven como nodos y también como marcadores para calcular la posición. A efectos de este ejemplo el elemento de interés es que los datos puedan experimentar retardos y pérdidas debido al mecanismo de comunicación o al acceso al mismo de cada vehículo, obviamente si se aumenta el número de vehículos el proceso de acceso a la red se ve deteriorado ya sea por congestión o aumento del periodo de muestreo. En la figura 5.9 se puede apreciar un esquema de las comunicaciones. Consideramos que el controlador se encuentra en el segundo vehículo, las señales de posición y velocidad del primer vehículo deben atravesar una red de comunicación, mientras que la posición y velocidad del segundo no, pero como la señal de entrada al controlador es el error de seguimiento en la distancia y la velocidad relativa se puede considerar que toda la señal se ve afectada por los efectos que introduzca la presencia de la red de comunicaciones.

Se considerará que la planta que se debe controlar es un sistema continuo en el tiempo dado por la siguiente ecuación en el espacio de estados como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_p(t) &= A_p \mathbf{x}_p(t) + B_p u_p(t) \\ y_p(t) &= C \mathbf{x}_p(t) \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde el estado de la planta es $\mathbf{x}_p = [x_{p1}, x_{p2}]^T = [e, y]^T$ y las matrices de evolución son:

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c_m c_o \end{pmatrix}, B_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -c_m \end{pmatrix}, C_p = (1, 0) \quad (5.10)$$

se asume por tanto que la salida de la planta es el error de posición y esa será la señal que llegará al controlador a través de la red de comunicación.

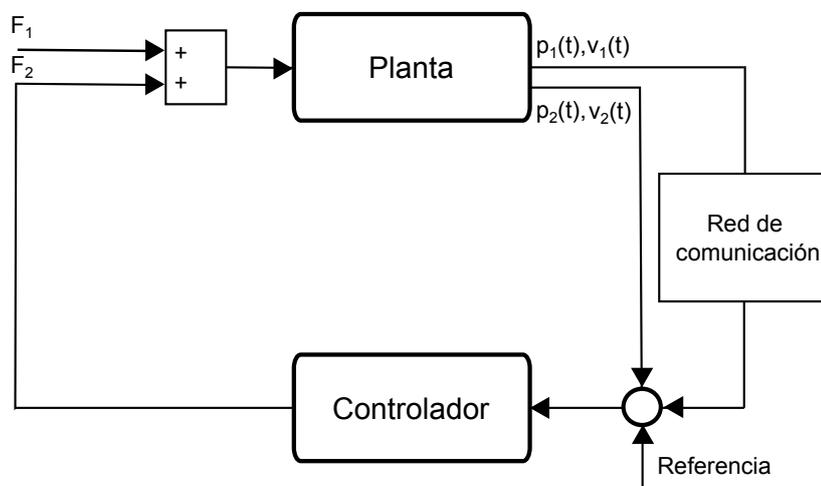


Figura 5.9: Esquema de las comunicaciones

El objetivo es diseñar un controlador reseteado discreto en el tiempo que pueda controlar la planta anterior y que sea capaz de soportar retardos y pérdidas de paquetes de información. Para ello se tomará como controlador base un PID discreto basado en el controlador empleado en [106]. Se usará la siguiente estructura de PID discreto en paralelo, donde el término derivativo ha sido sustituido por un filtro trapezoidal

$$C(z) = P + Ih \frac{1}{z-1} + D \frac{N}{1 + N \frac{h}{2} \frac{z+1}{z-1}} \quad (5.11)$$

donde P es la constante proporcional, I es la constante integral, D es la constante derivativa y N es el orden del filtrado.

Esta descripción del controlador es equivalente a emplear un sistema con dos ceros y dos polos. Por lo que hay dos estados que se pueden resetear. La ecuación (5.11) se puede reescribir en el espacio de estados como

$$C : \begin{cases} \mathbf{x}_c(k+1) = A_c \mathbf{x}_c(k) + B_c u_c(k) \\ y_c(k) = C_c \mathbf{x}_c(k) + D_c u_c(k) \end{cases} \quad (5.12)$$

La salida del controlador es la fuerza ejercida por el motor del segundo vehículo, F_2 . Las fuerzas de ambos motores son la entrada de la planta.

La estructura en lazo cerrado es similar a las que se han visto en el capítulo 4, por lo que aplicando las proposiciones 4.2 y 4.4 el sistema en lazo cerrado será un

sistema reseteado. Se puede definir un estado ampliado

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_p(k) \\ \mathbf{x}_c(k) \\ \mathbf{x}_p(k-1) \\ \mathbf{x}_c(k-1) \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

con el que se puede llegar a unas ecuaciones en lazo cerrado para el sistema similares a las dadas por las ecuaciones (2.35)

$$\begin{cases} \mathbf{z}(k+1) = A_1(k)\mathbf{z}(k) + B_1F_1(k) & k \notin \mathcal{K} \\ \mathbf{z}(k+1) = A_2(k)\mathbf{z}(k) + B_1F_1(k) + F(k) & k \in \mathcal{K} \\ y(k) = C\mathbf{z}(k) \end{cases} \quad (5.14)$$

con las siguientes matrices

$$\begin{aligned} A_1(k) &= \begin{pmatrix} L + (N-n)GD_cC_p & (N-n)GC_c & nGD_cC_p & nGC_c \\ -B_cC_p & A_c & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A_2(k) &= \begin{pmatrix} L + (N-n)GD_cC_p & (N-n)GC_c & nGD_cC_p & nGC_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B_1 &= \begin{pmatrix} NG \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (C_p, 0, 0, 0), \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ f(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_c, r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.15)$$

A continuación se mostrarán los resultados de simulación obtenidos para este sistema en el que se comparará el comportamiento del sistema con un controlador reseteado frente a un controlador lineal cuando el sistema se somete a la posibilidad de pérdida de paquetes, retardos en la red de comunicación, incluso la saturación de la señal de control. Siguiendo de nuevo el trabajo [106] supondremos los siguientes datos para ambos vehículos: $m = 1200 \text{ Kg}$, $A_T = 1,5 \text{ m}^2$, $c_a = 0,15$, $c_r = 0,015$, densidad del aire $\rho_{\text{aire}} = 1,21 \text{ Kg/m}^3$ y una velocidad nominal $v_o = 120 \text{ Km/h}$.

El controlador base será un PID discreto con un periodo de muestreo de 500 ms y los siguientes parámetros $P = 600$, $I = 60$, $D = 800$ y $N = 10$ (estos valores son muy

similares a los del controlador empleado en [106]), que en el espacio de estados se corresponde con las siguientes matrices

$$A_c = \begin{pmatrix} 0,5714 & 0,4286 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C_c = (-3235,3, 3278,2), D_d = 2885,7 \quad (5.16)$$

Para el diseño del controlador reseteado se ha decidido resetear ambos estados del controlador de forma periódica y calcular el valor de reseteo minimizando una función del estado de la planta y dar el mismo peso a la minimización de ambos estados (error de posición y error de velocidad), se ha optado por este criterio de minimización porque aporta equilibrio al minimizar la salida del sistema y su derivada evitando cambios bruscos en la salida del sistema. El periodo de reseteo elegido es de 2.5 segundos, es decir el sistema evolucionará de acuerdo a la dinámica de flujo 4 veces entre cada dos acciones de reseteo consecutivas. El ancho de la ventana de computación se ha fijado en 10 evoluciones (5 segundos) y se ha empleado el sistema en lazo cerrado con un retardo de 0.5 segundos o lo que es lo mismo un periodo de muestreo. Los valores de $f(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_c, F_1)$ obtenidos son:

$$f = \begin{pmatrix} -0,0196 \\ -0,0203 \end{pmatrix} F_1 + \begin{pmatrix} -2,4323 & -6,2787 \\ -4,0370 & -5,5682 \end{pmatrix} \mathbf{x}_p(k) + \begin{pmatrix} -4,106 & 4,1602 \\ -2,8288 & 2,8662 \end{pmatrix} \mathbf{x}_c(k) \\ + \begin{pmatrix} 7,3675 & 0 \\ 6,4991 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_p(k-1) + \begin{pmatrix} -8,2606 & 8,3696 \\ -7,2869 & 7,3830 \end{pmatrix} \mathbf{x}_c(k-1) \quad (5.17)$$

En la figura 5.10 se puede apreciar la respuesta del sistema empleando el controlador base y el controlador reseteado sin retardo en las comunicaciones. El sistema intenta mantener una distancia nominal de 20 metros entre los vehículos, la condición inicial es que el primer vehículo se encuentra a 23 metros del segundo. A los 48 segundos de la simulación el primer vehículo frena durante 2 segundos hasta situarse a una velocidad de 90 km/h y después acelera lentamente para recuperar la velocidad nominal.

A pesar de que el controlador reseteado se ha sintonizado a partir de un sistema base en lazo cerrado que tenía en cuenta un cierto retardo en las comunicaciones muestra un comportamiento mejor que el sistema base aunque en este caso no haya retardos. En la figura 5.11 se puede apreciar de nuevo la respuesta del sistema en las mismas condiciones pero esta vez con un retardo fijo de 0.4 segundos. La respuesta con ambos controladores empeora respecto a la situación en la que no hay retardos de comunicaciones pero en el caso del controlador reseteado necesita menos tiempo para regresar al valor de distancia deseado.

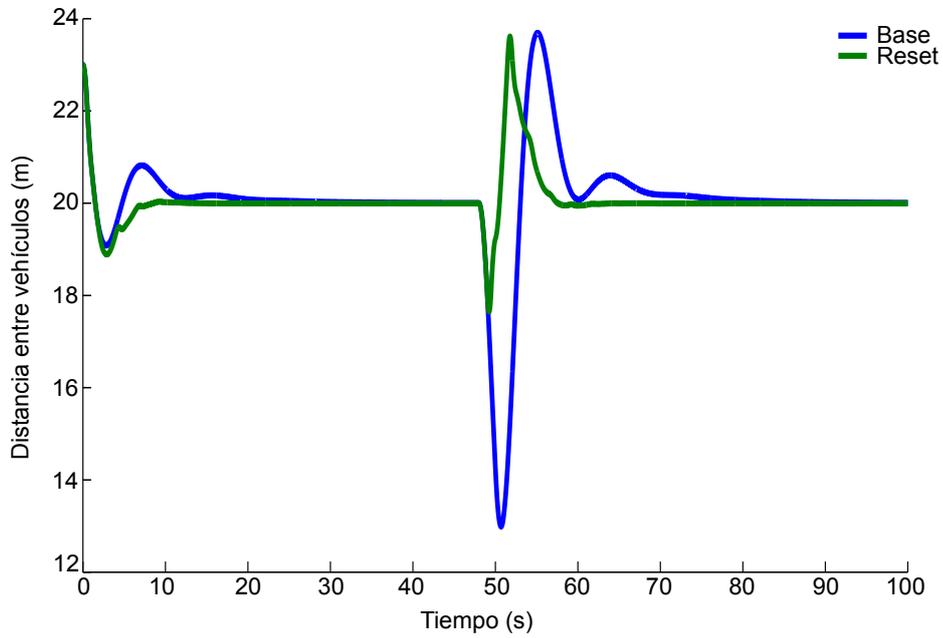


Figura 5.10: Respuesta del sistema sin retardo

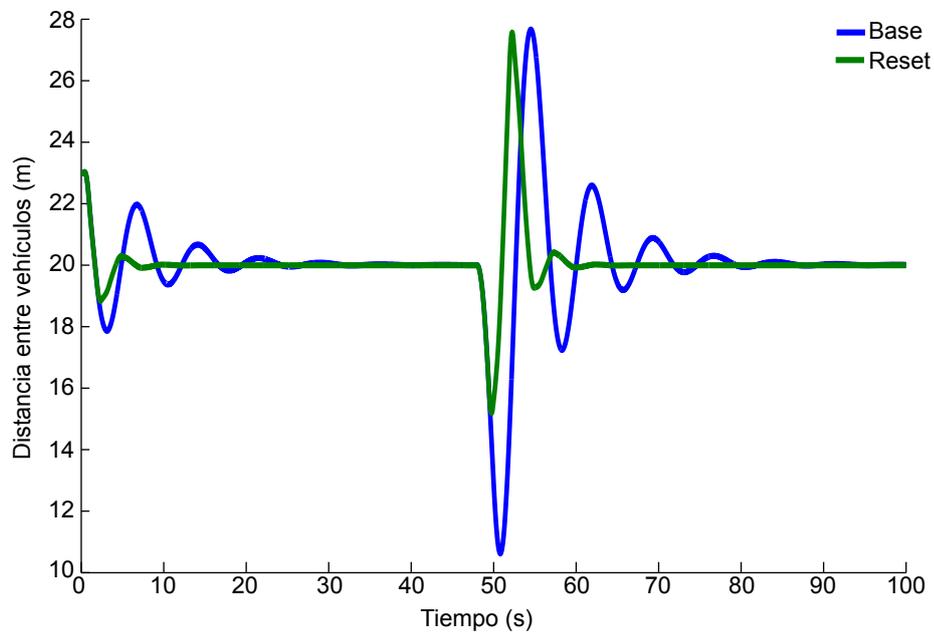


Figura 5.11: Respuesta del sistema con retardo fijo de 0.4 segundos

	n_0	n_1	n_2
Modo 1	2	0	0
Modo 2	1	1	0
Modo 3	0	2	0
Modo 4	0	1	1

Tabla 5.2: Diferentes modos de retardo para $\tau < 0,75$ s

Se puede comprobar la estabilidad del sistema autónomo para retardos menores que el periodo de muestreo empleando el método exhaustivo de forma similar al apartado **B** del Ejemplo 3.4. El sistema es regular porque $A(k)$ es Schur estable y $\rho(A(k)) = 0,9425$. Se puede aplicar el Teorema 3.1 y asociar la estabilidad del sistema reseteado a la del sistema remuestreado (3.3). En este caso como el periodo de reseteo es de 5 instantes de muestreo existe un conjunto $\Lambda(n)$ formado por todas las matrices $H(n)$ posibles

$$H(n) = A_R(k_n + 5)A(k_n + 4)A(k_n + 3)A(k_n + 2)A(k_n + 1) \cdots A(k_n), \quad (5.18)$$

el conjunto $\Lambda(n)$ tiene $6^5 = 7776$ elementos. Aplicando la Proposición 3.1 es posible encontrar una matriz P que cumple (3.8) para todas las $H(n)$ del conjunto anterior de forma que el sistema es estable para retardos entre 0 y 500 ms.

Se puede estudiar también el caso en el que el retardo sea mayor que el periodo de muestreo de la misma forma que en el apartado 4.4.2. En este caso no es necesario introducir exosistemas en la definición del estado en lazo cerrado.

Si se continua aumentando el retardo introducido por la red de comunicación el sistema con el controlador base se desestabiliza mucho antes que con el controlador reseteado tal y como se puede observar en la figura 5.12 donde el retardo, de nuevo fijo, se ha aumentado hasta los 0.75 segundos.

Se puede comprobar la estabilidad del sistema reseteado para retardos entre 0 y 0.75 s si se considera el caso en el que $Q = 2$ y $N = 2$ con los modos de retardo que aparecen en la Tabla 5.2.

En este caso el conjunto $\lambda(n)$ de las matrices $H(n)$ que no violan la causalidad está formado por 324 matrices de dimensión 12×12 . De nuevo se cumplen las condiciones que permiten aplicar el Teorema 3.1 y la Proposición 3.1 y se comprueba que el sistema reseteado es estable para retardos menores que 750 ms.

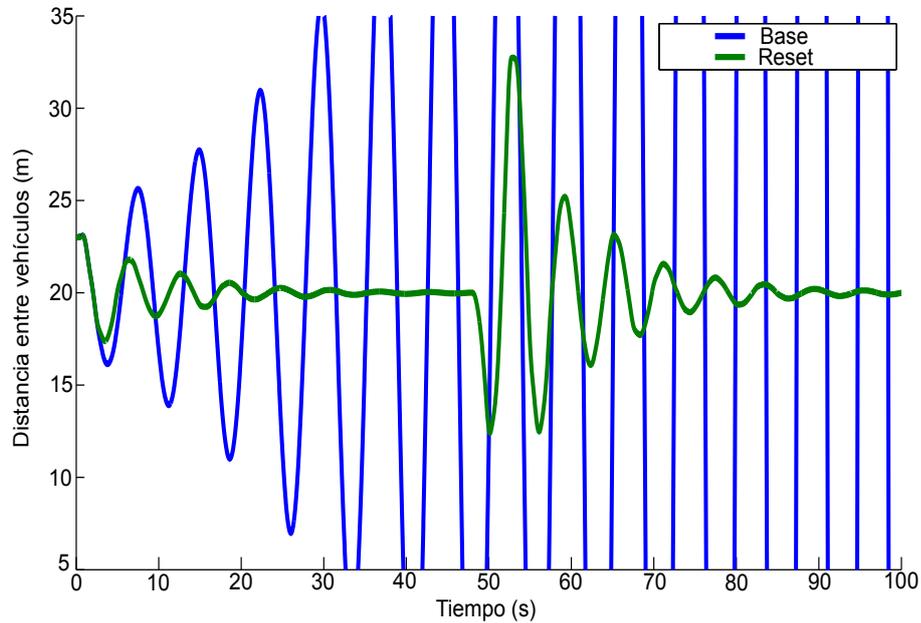


Figura 5.12: Respuesta del sistema con retardo fijo de 0.75 segundos

Para este ejemplo es, sin embargo, más razonable suponer que el retardo inducido por la red será relativamente pequeño y variable entre 100 y 200 milisegundos. Lo que ocurre es que también habrá una cierta posibilidad de perder paquetes de información, a continuación se verá cómo el sistema con el controlador reseteado también responde mejor ante la pérdida de paquetes que el sistema con el controlador base pese a no haber sido diseñado teniendo en cuenta esta posibilidad. En la figura 5.13 se puede apreciar como la pérdida de paquetes de información afecta más al sistema base haciéndolo oscilar más que al sistema con el controlador reseteado.

Un factor que no se ha tenido en cuenta en las simulaciones anteriores es la posible saturación de la señal de control, en trabajos como [14] se ha mostrado como los controladores reseteados tienen un cierto efecto de *antiwindup*. En la figura se muestra la salida del sistema y la señal de control para ambos controladores cuando se introduce una saturación en la señal de control de ± 2000 N y la red induce un retardo fijo de 200 ms. Se puede apreciar como el sistema base se desestabiliza después de la perturbación producida por la deceleración del primer vehículo.

Como conclusión de este ejemplo podemos decir que el controlador reseteado mejora las prestaciones del controlador lineal base empleado en [106], obteniendo

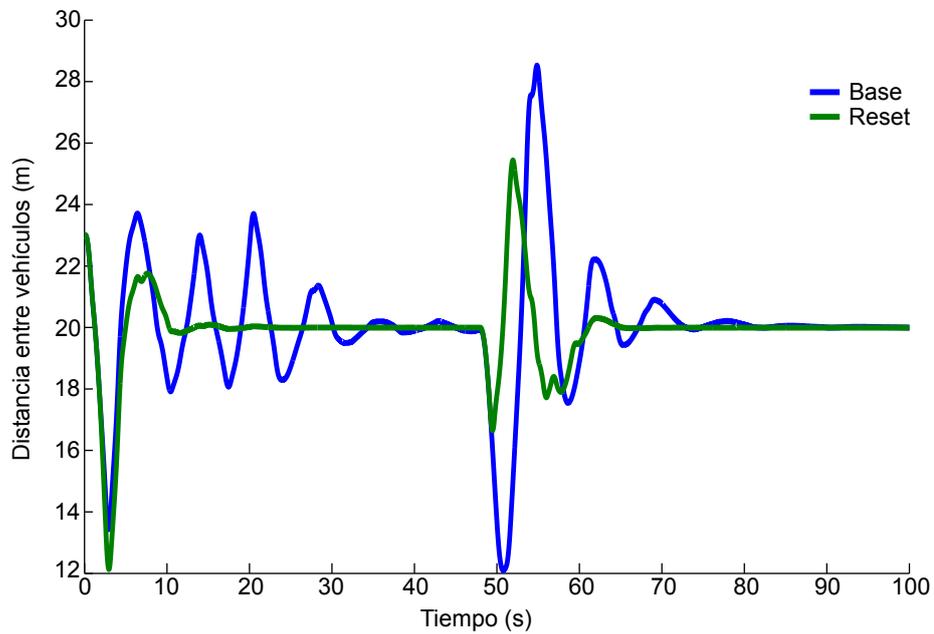


Figura 5.13: Respuesta del sistema con retardo variable entre 0.1 y 0.2 s. y una probabilidad de pérdida de paquetes del 35 %

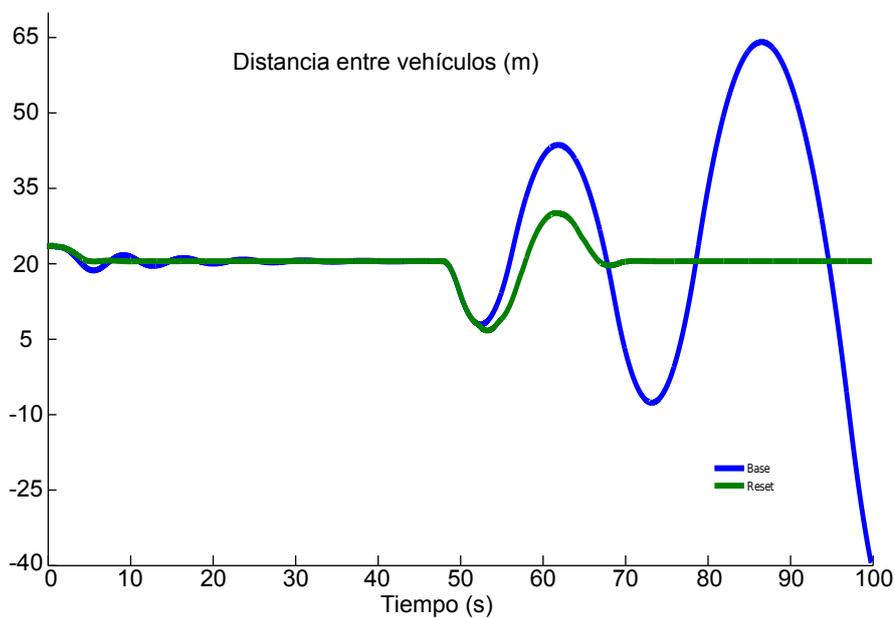


Figura 5.14: Respuesta del sistema con retardo fijo de 0.2 segundos y saturación en la señal de control

una mejora frente a distintos factores como pueden ser el retardo de comunicaciones, la pérdida de paquetes de información y también la presencia de saturaciones en la señal de control. Aunque respecto a las saturaciones podría argumentarse que la comparación no es justa dado que al sistema lineal se le podría añadir alguna estrategia *antiwindup*, lo que lo se quiere remarcar es que el sistema reseteado ya tiene en cierta forma ese efecto incorporado.

CAPÍTULO 6

Conclusiones y trabajos futuros

En este capítulo se expondrán en primer lugar las conclusiones más importantes de la memoria, así como las contribuciones más significativas que hace este trabajo en el campo de los sistemas reseteados. A continuación se señalarán las líneas que podrían seguirse para ampliar la investigación y aplicación llevada a cabo en este trabajo.

6.1. Conclusiones y contribuciones

La primera contribución es el desarrollo formal de los sistemas reseteados en tiempo discreto realizada en el capítulo 2. En ese capítulo se dan definiciones generales de los sistemas reseteados en tiempo discreto que posteriormente se desarrollan para dos tipos de condiciones de reseteo diferentes. Estas condiciones son el *reset* dependiente del estado y el *reset* dependiente de condiciones temporales. Ambas condiciones son enunciadas por vez primera en el marco de los sistemas en tiempo discreto. En este capítulo se proponen también, como un subconjunto de los sistemas con condiciones de reseteo dependientes del tiempo, los controladores reseteados periódicos discretos en el tiempo. Se presentan también una serie de reglas heurísticas para la sintonía de estos últimos controladores cuando el sistema hace seguimiento de referencias de tipo escalón y periódicas.

A modo de conclusión se puede decir que los dos tipos de controladores reseteados que se desarrollan con más profundidad en el capítulo 2 son el *reset* discreto con paso por cero y el *reset* discreto periódico en el tiempo. En ambos casos se demuestra que el sistema en lazo cerrado formado por un controlador reseteado y una planta LTI se ajusta a la formulación de un sistema reseteado. En el caso del sistema de *reset* con paso por cero la condición de reseteo es complicada, en el sentido de que depende del estado inicial del sistema, pero el cálculo del valor de *reset*

es sencillo ya que suele ser cero. Para el sistema de *reset* periódico la condición de reseteo es sencilla, porque es periódica, mientras que el cálculo del valor de *reset* es más complicado dado que dependerá de los valores del estado del sistema.

En el capítulo 3 se dan condiciones de estabilidad para los sistemas que se han definido en el capítulo 2 y se desarrollan dos métodos diferenciados para el análisis de la estabilidad de un sistema reseteado en tiempo discreto que se pueden aplicar a los casos particulares de paso por cero y periódico. El primer método que se presenta es el llamado método exhaustivo y esta basado en el remuestreo del sistema reseteado después de los instantes de reseteo. La técnica de remuestrear el sistema ya había sido empleada en sistemas continuos en el tiempo, en este trabajo se ha adaptado esto a sistemas en tiempo discreto. En el Teorema 3.1 se establecen las condiciones que se deben cumplir para que la estabilidad del sistema remuestreado garantice la del sistema reseteado. Posteriormente se puede aplicar cualquiera de los resultados generales de sistemas discretos en el tiempo, como la Proposición 3.1, para comprobar la estabilidad del sistema remuestreado.

El segundo método que se desarrolla está basado en técnicas de análisis de sistemas con parámetros variables linealmente. Hasta donde llega el conocimiento del autor en este trabajo se aplica por primera vez este tipo de análisis a los sistemas reseteados. Se pueden aplicar estas técnicas de LPV porque el sistema reseteado discreto en el tiempo se adapta a la formulación de los sistemas conmutados discretos. Con este método, llamado método LPV, se puede estudiar la estabilidad del sistema cuando depende de algún parámetro que varía linealmente. Finalmente en el capítulo 3 se realiza una comparación de los dos métodos propuestos.

En lo relativo a los sistema de control en red en este trabajo se ha optado por emplear un modelo *multirate* de las comunicaciones en red. En el capítulo 4 (Proposiciones 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4) se ha demostrado que, empleando este modelo, se pueden integrar los controladores reseteados discretos en el tiempo en un sistema de control en red, formando un sistema reseteado en red. De forma que el sistema resultante se adapta a la estructura de los sistemas reseteados presentados en el capítulo 2. Esto hace que se puedan emplear en los sistema reseteados en red los resultados relativos a la estabilidad desarrollados en el capítulo 3.

En el capítulo 4 se han estudiado dos casos: retardos *cortos* y retardos *largos*. Se conoce como retardos *cortos* al caso en el que el retardo introducido por la red es menor que el periodo de muestreo del controlador y retardos *largos* cuando el retardo es mayor que el periodo de muestreo. Se demuestra para ambos casos que con el modelo de red propuesto el retardo se convierte en un parámetro lineal de la dinámica del sistema. Esto permite emplear el método LPV.

Por último cabe destacar las dos aplicaciones que se muestran en el capítulo 5. En la primera se emplea un controlador reseteado discreto en el tiempo para controlar el nivel de pH de un líquido que fluye por una tubería en un entorno industrial. Con esta aplicación práctica se muestra un ejemplo de cómo los controladores reseteados discretos en el tiempo pueden mejorar las prestaciones que se obtienen con controladores lineales. En la segunda de las aplicaciones se realiza el análisis teórico de la aplicación de un controlador reseteado periódico en un problema de control de distancia entre vehículos. Este es un sistema en el que las comunicaciones se realizan a través de la red y se comprueba cómo el sistema reseteado en red es menos sensible al retardo y las pérdidas de paquetes que introduce la presencia de la red de comunicación en el lazo de control.

6.2. Trabajos futuros

Uno de los temas en los que no se ha profundizado en el desarrollo de este trabajo es el hecho de que para emplear los controladores reseteados con *reset* dependiente de condiciones temporales sea necesario que la planta sea observable. Obviamente esto supone una limitación que hay que considerar. Aún en el caso en el que los estados de la planta sean observables será necesario emplear un sistema observador para conocer estos estados cuando esa información no esté disponible directamente. La presencia de observadores introduce un transitorio en el que el valor del estado observado difiere del valor del estado real. Sería necesario estudiar por tanto el efecto de la presencia de estos observadores en el sistema reseteado. La necesidad de conocer los estados del sistema para aplicar el *reset* periódico parece indicar que este controlador sería especialmente sensible a las incertidumbres en el modelado del sistema. Este es otro factor que debe de ser estudiado en profundidad.

Otra cuestión en la que se podría realizar un análisis más profundo es el desarrollo del modelado de los retardos y la pérdida de paquetes. Con la definición de los modos de retardo en el capítulo 4 se introduce una posible forma de representar la pérdida de paquetes. Al realizar el remuestreo del sistema para poder aplicar el método exhaustivo de análisis de estabilidad es necesario realizar suposiciones adicionales que se indican en el Apéndice B. Sería conveniente desarrollar más este punto y comprobar si existe una diferencia significativa en el conjunto de las matrices de evolución remuestreadas al ser generadas teniendo en cuenta estas suposiciones o no.

En relación con el punto anterior, un aspecto relacionado con la pérdida de paquetes que es susceptible de ser desarrollado es algún criterio de estabilidad que

dependa de la probabilidad de pérdida de paquetes. Este tipo de criterios estocásticos serían muy interesantes dado que en algunos tipos de NCS es más importante la pérdida de paquetes que el retardo inducido.

En el desarrollo de ejemplos del método LPV de análisis de estabilidad se ha observado que este sistema no se puede aplicar en la práctica cuando el sistema base no es estable. Esto ocurre a pesar de que la estabilidad del sistema base no es condición necesaria para la aplicación del Teorema 3.2. También ocurre que al emplear controladores FORE las matrices en lazo cerrado no están bien condicionadas para poder aplicar este método. Ambas circunstancias hacen necesario un estudio más profundo de las condiciones que se establecen en el método de LPV y también de las herramientas empleadas en el cálculo de las LMI.

Por último un trabajo que sería interesante es realizar una comparación sistemática de las prestaciones que ofrecen los sistemas con *reset* de paso por cero y el *reset* periódico. Esta comparación ha sido realizada para algunos casos con sistemas continuos en el tiempo pero no con sistemas discretos en el tiempo.

Apéndices

APÉNDICE A

Matrices definidas positivas y LMI

Las desigualdades de matrices lineales (LMI) se han convertido en los últimos años en una herramienta clave en la teoría de control. De una forma muy abreviada se introducirán en este apéndice los conceptos fundamentales, pudiéndose consultar más detalles [35]. El concepto de desigualdad es muy similar al usual para los números reales.

A.1. Definiciones

Definición A.1. Se dice que una matriz simétrica $P \in \mathbb{S}^n$ es definida positiva si para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ se cumple que $\mathbf{x}^T P \mathbf{x} > 0$. Abreviadamente,

$$P > 0 \tag{A.1}$$

Para comprobar esta propiedad, normalmente se ha hecho uso del siguiente resultado.

Proposición A.2. $P \in \mathbb{S}^n$ es definida positiva si y sólo si todos sus autovalores son estrictamente positivos.

Definición A.3. Se dice que una matriz simétrica $P \in \mathbb{S}^n$ es definida negativa si y sólo si $-P$ es definida positiva. Es decir,

$$P < 0 \iff -P > 0 \tag{A.2}$$

Definición A.4. Se dice que una matriz simétrica $P \in \mathbb{S}^n$ es semidefinida positiva si para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $\mathbf{x}^T P \mathbf{x} \geq 0$. Entonces se escribe:

$$P \geq 0 \tag{A.3}$$

Definición A.5. Se dice que una matriz simétrica $P \in \mathbb{S}^n$ es semidefinida negativa si y sólo si $-P$ es semidefinida positiva. Es decir,

$$P \leq 0 \iff -P \geq 0 \quad (\text{A.4})$$

Definición A.6 (LMI). Una LMI estricta tiene la siguiente forma:

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (\text{A.5})$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ es la variable desconocida y las matrices F_0, \dots, F_m son un conjunto de matrices reales simétricas conocida previamente, es decir, $F_i = F_i' \in \mathbb{S}^n$. Cuando la desigualdad en (A.5) no es estricta se dice que la LMI no es estricta.

Se dice que la LMI (A.5) es viable si existe algún x que satisfaga la condición. Por el contrario, se dice inviable si no existe tal x .

La siguiente desigualdad es un ejemplo de LMI con 3 variables

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 & 2 - x_3 \\ x_2 + x_1 & 4 + 3x_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.6})$$

podemos desarrollar la expresión anterior de acuerdo a la forma de (A.5) si la reescribimos como

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.7})$$

Una LMI define una restricción convexa en \mathbf{x} , es decir, el conjunto $\{\mathbf{x} \mid F(\mathbf{x}) > 0\}$ es convexo. Por definición si \mathbf{x} e \mathbf{y} pertenecen al conjunto de soluciones de la LMI cualquier punto en la recta que los une también pertenecerá al conjunto, es decir

$$F(\mathbf{x}) > 0, F(\mathbf{y}) > 0 \implies F(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) > 0 \text{ para } \lambda \in [0, 1] \quad (\text{A.8})$$

El conjunto de soluciones de una LMI puede obtenerse resolviendo n desigualdades polinómicas. $F \in \mathbb{S}^n$ será definida positiva si los determinantes de los n menores principales de $F(\mathbf{x})$ son todos positivos. El desarrollo de cada uno de estos determinantes es una desigualdad polinómica. Veamos un ejemplo, dada la siguiente LMI

$$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y - x^2 & 3x + y \\ 2x - y & x^2 - 1 \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.9})$$

podemos obtener las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} y - x^2 &> 0 \quad (A) \\ (y - x^2)(x^2 - 1) - (3x + y)(2x - y) &> 0 \quad (B) \end{aligned} \tag{A.10}$$

En la figura A.1 pueden verse las regiones de solución de ambas desigualdades y el conjunto de soluciones final.

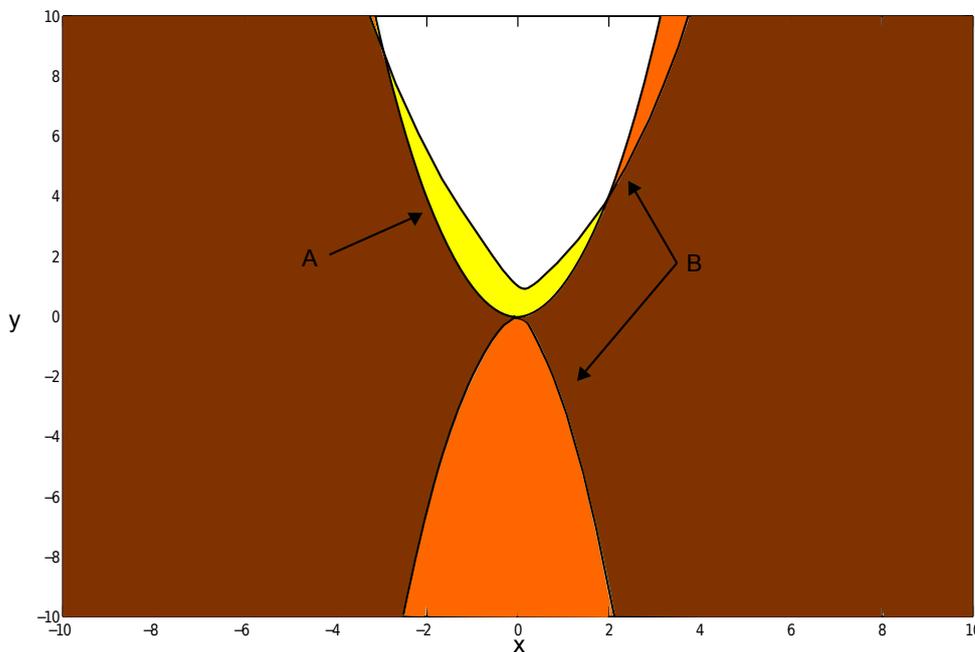


Figura A.1: Conjunto de convexo de soluciones de una LMI

Definición A.6 Un sistema de LMIs es un conjunto finito de LMIs

$$F_1(\mathbf{x}) > 0, \dots, F_j(\mathbf{x}) > 0 \tag{A.11}$$

Una propiedad importante de los sistemas de LMI es que se pueden transformar en una única LMI de mayor tamaño de la siguiente forma

$$G(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_j(x) \end{bmatrix} > 0 \tag{A.12}$$

Donde $G(x)$ es simétrica y sus autovalores son la unión de los autovalores de $F_1(\mathbf{x}) > 0, \dots, F_j(\mathbf{x}) > 0$, de modo que cualquier x que cumpla la LMI (A.12) cumplirá también el sistema de LMI (A.11). A modo de ejemplo el conjunto de LMIs formado por (A.9) y

$$\begin{bmatrix} y - x - 6 & 0 \\ 0 & x + 2 \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.13})$$

equivale a una única LMI

$$\begin{bmatrix} y - x^2 & 3x + y & 0 & 0 \\ 2x - y & x^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y - x - 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x + 2 \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.14})$$

el conjunto de soluciones de la LMI anterior aparece en la figura A.2.

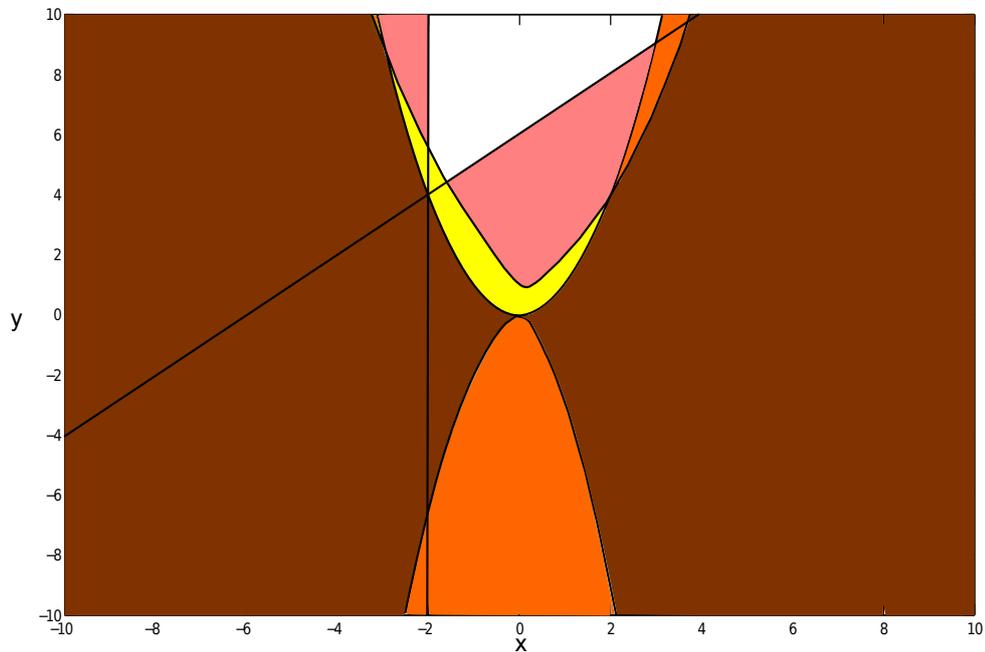


Figura A.2: Conjunto de convexo de soluciones de dos LMI.

A.2. Problemas relacionados con las LMI

Existen tres problemas genéricos relacionados con el estudio de las LMI:

- **Viabilidad** (o factibilidad). Dada una LMI $F(\mathbf{x}) > 0$, el problema de viabilidad correspondiente es encontrar \mathbf{x}^{feas} tal que $F(\mathbf{x}^{\text{feas}}) > 0$ o determinar que la LMI no es viable. En este texto se ha empleado “resolver la LMI $F(\mathbf{x}) > 0$ ” para denotar la comprobación de la viabilidad de esa LMI y dar una solución en el caso de que sea viable.
- **Autovalores generalizados**. El problema de autovalores generalizados (GEVP) consiste en minimizar el máximo autovalor generalizado de un par de matrices que dependen de forma afín de una variable, sujeto además a una restricción en forma de LMI (o determinar que esa restricción no es viable), es decir, minimizar λ con las restricciones:

$$\begin{aligned}\lambda B(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x}) &> 0 \\ B(\mathbf{x}) &> 0 \\ C(\mathbf{x}) &> 0\end{aligned}\tag{A.15}$$

donde A , B y C son matrices simétricas que dependen de forma afín de la variable de optimización \mathbf{x} .

- **Optimización**. Sea $g(\mathbf{x}) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \mid F(\mathbf{x}) > 0\}$, entonces se dice que el problema de hallar

$$V_{\text{opt}} = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} g(\mathbf{x})\tag{A.16}$$

es el problema de optimización con una restricción en forma de LMI.

Cualquiera de los problemas anteriores es *tratable* desde el punto de vista teórico y práctico, eso quiere decir que:

- Se pueden resolver en tiempo polinómico ¹.
- En la práctica hay muchos métodos de resolución eficientes.

¹Decimos que un método de resolución es polinomial o es de tiempo polinomial si el número de pasos necesario para resolver el problema está acotado por una función polinomial del tamaño del problema y si ese polinomio refleja de alguna forma la complejidad del método.

En esta tesis se ha empleado para los problemas de LMI el toolbox de MATLAB Yalmip, [98], este toolbox permite escribir las restricciones de las LMI de forma amigable y recursiva. También permite elegir a que paquete se llama para resolver las LMI dentro de Yalmip. En la mayoría de los casos, en este trabajo, se ha empleado el SDPT3 [146] y en algún otro LMILAB [64].

En algún momento puede ser interesante, para encontrar soluciones más fácilmente, implementar LMI del tipo:

$$A_i^T P A_i - P \leq 0 \quad (\text{A.17})$$

usando LMI no estrictas con una pequeña tolerancia ϵ en la forma $A_i^T P A_i - P < \epsilon I$. Obviamente la buena aproximación dependerá del tamaño de ϵ tal y como aparece en [161].

APÉNDICE B

Demostración del Teorema 4.1

En este apéndice se demostrará el Teorema 4.1, para ello en primer lugar recordemos el enunciado del teorema

Teorema 4.1 Si el sistema (4.42) tiene un retardo máximo acotado $\tau_m \leq QT_s$ y la relación entre el periodo muestreo del sensor y el del controlador es $T_c = T_s/N$ entonces el número de modos de retardo posibles (incluyendo posibles pérdidas de paquetes) es

$$\binom{N+Q}{N} = \frac{(N+Q)!}{N!Q!}$$

□

Para demostrar el teorema anterior se hará uso de que el conjunto de modos de retardos posibles son aquellos en los que $n_i \in [0, 1, \dots, N] \forall i \in [0, \dots, Q]$ y $\sum_{i=0}^Q n_i = N$. En cada modo de retardo lo que ocurre es que tienen que llegar N paquetes de señales que se pueden venir de $Q+1$ instantes de muestreo distintos. Si se identifica cada paquete de señal con una bola y cada instante de muestreo con una caja cada modo se corresponde con una forma de colocar las N bolas en las $Q+1$ cajas. En la figura B.1 se muestra como los modos de la Tabla 4.2, que son todos los modos posibles con $N=2$ y $Q=3$, se pueden representar en forma de bolas y cajas.

De modo que el problema de encontrar los modos de retardo posibles dados N y Q es equivalente a encontrar todas las formas posibles de repartir N elementos (bolas) en $Q+1$ espacios (cajas). O lo que también es lo mismo las formas posibles de colocar las N bolas y los Q separadores de las cajas, dado que los dos separadores exteriores permanecen fijos. Es decir el problema es el mismo que si tenemos $N+Q$ elementos de los que queremos escoger en que posición colocar N de ellos. Si se usa la siguiente definición del coeficiente binomial

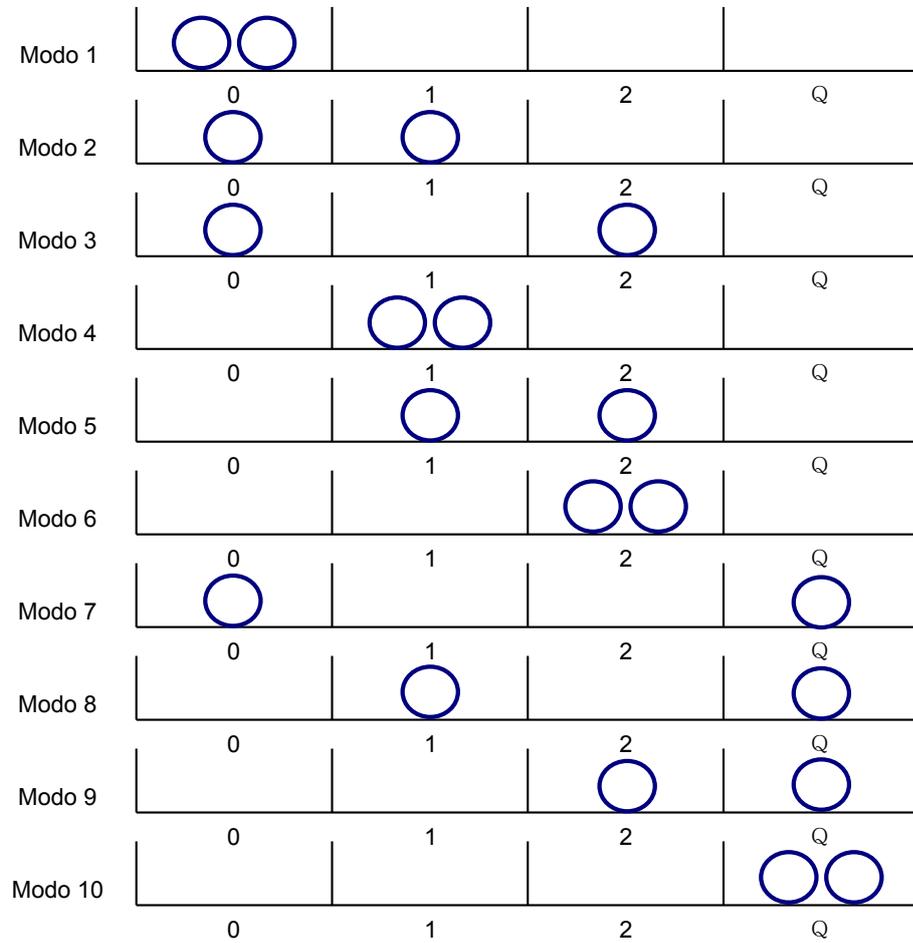


Figura B.1: Modos de retardo con $N = 2$ y Q representados con bolas (señales) y cajas (instantes de muestreo).

Definición Se define el coeficiente binomial $\binom{h}{k} = \frac{h!}{k!(h-k)!}$ como el número de subconjuntos de k elementos escogidos de un conjunto de h elementos.

donde el número de elementos es $h = N + Q$ y los elementos a colocar son N queda demostrado el Teorema 4.1.

Otra forma de obtener el mismo resultado es comprobar que el número de modos es equivalente a las combinaciones con repetición de N elementos escogidos de un conjunto de $Q + 1$ tipos.

□

Tal y como se menciona en el Ejemplo 4.5 dentro de los modos de retardo hay modos que incluyen la pérdida paquetes de información; los modos 3, 7 y 8. Pero aún eliminando esos modos del conjunto de modos admisibles al realizar un remuestreo del sistema después de los instantes de reset se pueden dar combinaciones de los modos restantes que reflejen la pérdida de paquetes e incluso violaciones de la causalidad. Por ejemplo si al modo 10 le sucede el modo 1 significa que se ha recibido en primer lugar información de hace 3 instantes de muestreo y a continuación del instante actual por lo que se habría perdido información de dos instantes de muestreo consecutivos. Se pueden dar situaciones indeseables como la combinación de los mismos modos en orden inverso lo que quiere decir que se en primer lugar información del instante actual y a continuación información de los instantes anteriores.

Se debe por tanto eliminar las combinaciones no deseadas a la hora de construir el conjunto de las posibles $H(n)$. Aunque si se consigue demostrar la estabilidad para un conjunto de $H(n)$ con combinaciones *imposibles* también estará demostrada para el conjunto de las posibles porque es un subconjunto del primero.

APÉNDICE C

Teorema 3.2 ampliado

En este apéndice se analizará la estabilidad de un sistema reseteado discreto en el tiempo (2.14) en el que las matrices de evolución dependen linealmente de una serie de parámetros variables en el tiempo de la siguiente forma

$$\begin{aligned} A(k) &= \lambda_0(k)\tilde{A}_{10} + \lambda_1(k)\tilde{A}_{11} + \dots + \lambda_{\mathcal{Q}}(k)\tilde{A}_{1\mathcal{Q}} \\ A_R(k) &= \lambda_0(k)\tilde{A}_{20} + \lambda_1(k)\tilde{A}_{21} + \dots + \lambda_{\mathcal{Q}}(k)\tilde{A}_{2\mathcal{Q}} \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Con $\mathcal{Q} \in \mathbb{N}$ y $\sum_{i=0}^{\mathcal{Q}} \lambda_i = 1$. Para este sistema puede hacerse un análisis análogo al que se realiza en la sección 3.2. Se puede emplear el conjunto de secuencias admisibles, Θ , y el conjunto de las secuencias con tiempo de permanencia, Θ_D , dados por la Definición 3.6 y la ecuación (3.17). También son válidas en este caso las definiciones de $\mathcal{L}_M(\Theta_D)$ y $\mathcal{N}_M(\Theta_D)$ que aparecen en la sección 3.2.

Teorema 3.2 Ampliado: El sistema de reseteado (2.14)-(C.1) es uniforme y exponencialmente estable si existe una secuencia de cambio de longitud $M \in \mathbb{Z}^+$ y un conjunto ordenado de matrices definidas positivas $P_{i_1 j_1 \dots i_M j_M}$ tales que

$$P_{i_0 j_0 \dots i_{M-1} j_{M-1}} > 0 \quad (\text{C.2})$$

$$\bar{A}_{i_M j_M} P_{i_0 j_0 \dots i_{M-1} j_{M-1}} \bar{A}_{i_M j_M}^T - P_{i_1 j_1 \dots i_M j_M} < 0 \quad (\text{C.3})$$

para cualquier secuencia $(i_0, i_1, \dots, i_M) \in \mathcal{N}_M(\Theta)$ y $(j_0, j_1, \dots, j_M) \in \{0, 1, \dots, \mathcal{Q}\}^{M+1}$.

□

Demostración: La demostración es análoga a la del Teorema 3.2 empleando el conjunto de secuencias de cambio admisible, $\hat{\Theta}$, dado por

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_D &= \{((i_0, j_0), (i_1, j_1), \dots) : (i_0, i_1, \dots) \in \Theta_D, (j_0, j_1, \dots) \in \{0, 1, \dots, \mathcal{Q}\}^{M+1}\} \\ &= \Theta_D \times \{0, 1, \dots, \mathcal{Q}\}^{M+1} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

de modo que $\widehat{\Theta}$ es el conjunto de secuencias de cambio que se dan en un sistema conmutado cuyos modos son $\bar{A}_{10}, \tilde{A}_{11}, \dots, \tilde{A}_{1Q}$ y $\bar{A}_{20}, \tilde{A}_{21}, \dots, \tilde{A}_{2Q}$, y que tiene un conjunto de secuencias de cambio admisibles de longitud M , dado por

$$\mathcal{N}_M(\widehat{\Theta}_D) = \mathcal{N}_M(\Theta_D) \times \{0, 1, \dots, Q\}^{M+1} \quad (\text{C.5})$$

□

De hecho este Teorema 3.2 ampliado es prácticamente la aplicación directa del Teorema 7.1 de [107].

Bibliografía

- [1] W. Aangenent, G. Witvoet, W. Heemels, MJG van de Molengraft, and M. Steinbuch. An lmi-based \mathcal{L}_2 gain performance analysis for reset control systems. In *American Control Conference, 2008*, pages 2248–2253. IEEE, 2008.
- [2] W. Aangenent, G. Witvoet, W. Heemels, MJG van de Molengraft, and M. Steinbuch. Performance analysis of reset control systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 20(11):1213–1233, 2010.
- [3] A. Abate, A. D’Innocenzo, M.D. Di Benedetto, and S. Sastry. Understanding deadlock and livelock behaviors in hybrid control systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 3(2):150–162, 2009.
- [4] R. Alur, C. Courcoubetis, N. Halbwachs, T.A. Henzinger, P.H. Ho, X. Nicollin, A. Olivero, J. Sifakis, and S. Yovine. The algorithmic analysis of hybrid systems. *Theoretical computer science*, 138(1):3–34, 1995.
- [5] P. Antsaklis and J. Baillieul. Special issue on technology of networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1):5–8, jan. 2007.
- [6] P.J. Antsaklis and X.D. Koutsoukos. Hybrid systems: Review and recent progress. *Software Enabled Control: Information Technology for Dynamical Systems*. NY: Wiley-IEEE, 2003.
- [7] K.J. Åström. Limitations on control system performance. *European Journal of Control*, 6(1):2–20, 2000.
- [8] J.P. Aubin, J. Lygeros, M. Quincampoix, S. Sastry, and N. Seube. Impulse differential inclusions: A viability approach to hybrid systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 47(1):2–20, 2002.
- [9] D. Baæinov and PS Simeonov. *Systems with impulse effect: stability, theory, and applications*. Ellis Horwood (Chichester England and New York), 1989.
- [10] J. Bakkeheim, T.A. Johansen, O.N. Smogeli, and AJ Sorensen. Lyapunov-based integrator resetting with application to marine thruster control. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 16(5):908–917, 2008.

- [11] A. Balluchi, L. Benvenuti, C. Lemma, P. Murrieri, and A.L. Sangiovanni-Vincentelli. Hybrid models of an automotive driveline. *Tech. rep., PARADES*, 2004.
- [12] A. Baños and A. Barreiro. Delay-dependent stability of reset control systems. In *American Control Conference, 2007. ACC '07*, pages 5509–5514, july 2007.
- [13] A. Baños and A. Barreiro. Delay-independent stability of reset systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 54(2):341–346, feb. 2009.
- [14] A. Baños and A. Barreiro. *Reset Control Systems*. Springer, 2011.
- [15] A. Baños, J. Carrasco, and A. Barreiro. Reset times-dependent stability of reset control with unstable base systems. In *Industrial Electronics, 2007. ISIE 2007. IEEE International Symposium on*, pages 163–168, june 2007.
- [16] A. Baños, J. Carrasco, and A. Barreiro. Reset times dependent stability of reset systems. In *European Control Conference, 2007.*, pages 4792–4798, july 2007.
- [17] A. Baños, S. Dormido, and A. Barreiro. Stability analysis of reset control systems with reset band. In *Analysis and Design of Hybrid Systems*, volume 3, pages 180–185, 2009.
- [18] A. Baños, S. Dormido, and A. Barreiro. Limit cycles analysis of reset control systems with reset band. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 5(2):163–173, 2011.
- [19] A. Baños, F. Pérez, and J. Cervera. Discrete-time reset control applied to networked control systems. In *Industrial Electronics, 2009. IECON'09. 35th Annual Conference of IEEE*, pages 2993–2998. IEEE, 2009.
- [20] A. Baños, F. Pérez, and J. Cervera. Networked reset control systems with discrete time-varying delays. In *IECON 2010-36th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, pages 3146–3151. IEEE, 2010.
- [21] A. Baños and A. Vidal. Definition and tuning of a PI + CI reset controller. In *Proc. of the European Control Conference*, pages 4792–4798, 2007.
- [22] A. Baños and A. Vidal. Design of PI + CI reset compensators for second order plants. In *Industrial Electronics, 2007. ISIE 2007. IEEE International Symposium on*, pages 118–123. IEEE, 2007.
- [23] A. Barreiro and A. Baños. Delay-dependent stability of reset systems. *Automatica*, 46(1):216–221, 2010.

- [24] A. Barreiro, A. Baños, and S. Dormido. Reset control systems with reset band: Well-posedness and limit cycles analysis. In *Control & Automation (MED), 2011 19th Mediterranean Conference on*, pages 1343–1348. IEEE, 2011.
- [25] O. Beker. *Analysis of Reset Control Systems*. PhD thesis, University of Massachusetts.
- [26] O. Beker, CV Hollot, and Y. Chait. Stability of a mimo reset control system under constant inputs. In *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*, volume 3, pages 2780–2781. IEEE, 1999.
- [27] O. Beker, CV Hollot, and Y. Chait. Forced oscillations in reset control systems. In *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on*, volume 1, pages 4825–4826. IEEE, 2000.
- [28] O. Beker, CV Hollot, and Y. Chait. Plant with integrator: an example of reset control overcoming limitations of linear feedback. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 46(11):1797–1799, 2001.
- [29] O. Beker, CV Hollot, and Y. Chait. Stability of limit-cycles in reset control systems. In *American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001*, volume 6, pages 4681–4682. IEEE, 2001.
- [30] O. Beker, CV Hollot, Y. Chait, and H. Han. Fundamental properties of reset control systems. *Automatica*, 40(6):905–915, 2004.
- [31] O. Beker, CV Hollot, Q. Chen, and Y. Chait. Stability of a reset control system under constant inputs. In *American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999*, volume 5, pages 3044–3045. IEEE, 1999.
- [32] J.E. Bobrow, F. Jabbari, and K. Thai. An active truss element and control law for vibration suppression. *Smart Materials and Structures*, 4(4):264, 1999.
- [33] H.W. Bode. Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design. *Bell System Technical Journal*, 19(3):421–454, 1940.
- [34] J.M. Böling, D.E. Seborg, and J.P. Hespanha. Multi-model adaptive control of a simulated ph neutralization process. *Control engineering practice*, 15(6):663–672, 2007.
- [35] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. Society for Industrial Mathematics, 1994.
- [36] M.S. Branicky. Stability of hybrid systems: State of the art. In *Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on*, volume 1, pages 120–125. IEEE, 1997.

- [37] M.S. Branicky, V.S. Borkar, and S.K. Mitter. A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 43(1):31–45, jan 1998.
- [38] R.W. Brockett. Hybrid models for motion control systems. *PROGRESS IN SYSTEMS AND CONTROL THEORY*, 14:29–29, 1993.
- [39] R.T. Bupp, D.S. Bernstein, V.S. Chellaboina, and W.M. Haddad. Resetting virtual absorbers for vibration control. *Journal of Vibration and Control*, 6(1):61–83, 2000.
- [40] J. Carrasco. *Estabilidad de Sistemas de Control Reseteado*. PhD thesis, Universidad de Murcia.
- [41] J. Carrasco and A. Baños. Reset control of an industrial in-line pH process. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 20(4):1100–1106, 2012.
- [42] J. Carrasco, A. Baños, and A. Arenas. Reset control of an industrial in-line pH process. In *Emerging Technologies & Factory Automation, 2009. ETFA 2009. IEEE Conference on*, pages 1–8. IEEE, 2009.
- [43] J. Carrasco, A. Baños, and A. Barreiro. Stability of reset control systems with inputs. In *Control and Automation, 2008 16th Mediterranean Conference on*, pages 1496–1501. IEEE, 2008.
- [44] J. Carrasco, A. Baños, and A. van der Schaft. A passivity approach to reset control of nonlinear systems. In *Industrial Electronics, 2008. IECON 2008. 34th Annual Conference of IEEE*, pages 61–66. IEEE, 2008.
- [45] J. Carrasco, A. Baños, and A. van der Schaft. A passivity-based approach to reset control systems stability. *Systems & Control Letters*, 59(1):18–24, 2010.
- [46] J. Cervera, A. Baños, and A. Arenas. Analysis of simulink/rtw environment for control systems design with dspace 1102 card. In *3th MATLAB Users Congress, 1999*, pages 4204–4209, july 1999.
- [47] Y. Chait and CV Hollot. On horowitz’s contributions to reset control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12(4):335–355, 2002.
- [48] Q. Chen. *Reset control systems: Stability, Performance and Application*. PhD thesis, University of Massachusetts.
- [49] Q. Chen, Y. Chait, and CV Hollot. Analysis of reset control systems consisting of a fore and second-order loop. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, pages 279–283, 2001.

- [50] Q. Chen, CV Hollot, and Y. Chait. Stability and asymptotic performance analysis of a class of reset control systems. In *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on*, volume 1, pages 251–256. IEEE, 2000.
- [51] Q. Chen, CV Hollot, and Y. Chait. BIBO stability of a class of reset control system. In *Proceedings of the 2000 Conference on Information Sciences and Systems*, 2000.
- [52] Q. Chen, CV Hollot, Y. Chait, and O. Beker. On reset control systems with second-order plants. In *American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000*, volume 1, pages 205–209. IEEE, 2000.
- [53] JC Clegg. A nonlinear integrator for servomechanisms. *Trans. AIEE*, 77(Part II):41–42, 1958.
- [54] C. Desjardins and B. Chaib-draa. Cooperative adaptive cruise control: A reinforcement learning approach. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 12(4):1248–1260, 2011.
- [55] S.K. Doherty. *Control of pH in chemical processes using artificial neural networks*. PhD thesis, Liverpool John Moores University, 1999.
- [56] S. Engell, S. Kowalewski, C. Schulz, and O. Stursberg. Continuous-discrete interactions in chemical processing plants. *Proceedings of the IEEE*, 88(7):1050–1068, 2000.
- [57] A. Faanes and S. Skogestad. pH-neutralization: Integrated process and control design. *Computers & chemical engineering*, 28(8):1475–1487, 2004.
- [58] A. Fernández, A. Barreiro, A. Baños, and J. Carrasco. Reset control for passive teleoperation. In *Industrial Electronics, 2008. IECON 2008. 34th Annual Conference of IEEE*, pages 2935–2940. IEEE, 2008.
- [59] A. Feuer, GC Goodwin, and M. Salgado. Potential benefits of hybrid control for linear time invariant plants. In *American Control Conference, 1997. Proceedings of the 1997*, volume 5, pages 2790–2794. IEEE, 1997.
- [60] F. Forni, D. Nešić, and L. Zaccarian. Reset passivation of nonlinear controllers via a suitable time-regular reset map. *Automatica*, 47(9):2099–2106, 2011.
- [61] J. Freudenberg and D. Looze. Right half plane poles and zeros and design tradeoffs in feedback systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 30(6):555–565, 1985.

- [62] J.S. Freudenberg, CV Hollot, R.H. Middleton, and V. Toochinda. Fundamental design limitations of the general control configuration. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 48(8):1355–1370, 2003.
- [63] M. Fu and B. Barmish. Adaptive stabilization of linear systems via switching control. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 31(12):1097–1103, 1986.
- [64] P. Gahinet, A. Nemirovski, AJ Laub, and M. Chilali. LMI control toolbox-for use with matlab. 1995. *The MATH Works Inc., Natic, MA*, 1995.
- [65] O. Galán, J.A. Romagnoli, and A. Palazoglu. Robust \mathcal{H}_∞ control of nonlinear plants based on multi-linear models: an application to a bench-scale ph neutralization reactor. *Chemical Engineering Science*, 55(20):4435–4450, 2000.
- [66] R. Goebel, R. Sanfelice, and A. Teel. Hybrid dynamical systems. *Control Systems Magazine, IEEE*, 29(2):28–93, 2009.
- [67] R. Goebel and AR Teel. Solutions to hybrid inclusions via set and graphical convergence with stability theory applications. *Automatica*, 42(4):573–587, 2006.
- [68] D.L. Gu, G. Pei, H. Ly, M. Gerla, B. Zhang, and X. Hong. UAV aided intelligent routing for ad-hoc wireless network in single-area theater. In *Wireless Communications and Networking Conference, 2000. WCNC. 2000 IEEE*, volume 3, pages 1220–1225. IEEE, 2000.
- [69] Z.H. Guan, C.X. Yang, and J. Huang. Stabilization of networked control systems with random delays: A new multirate method. In *Proceedings of the 17th World Congress of IFAC, Seoul, Korea*, pages 4204–4209, 2008.
- [70] G. Guo, S. Yu, and Z. Ma. Some properties of networked reset control systems. In *Control Theory and Applications, IEE Proceedings-*, volume 153, pages 14–20. IET, 2006.
- [71] Y. Guo, W. Gui, and C. Yang. Quadratic stability of uncertain reset control systems. In *The 18th IFAC world congress, Milan, Italy*, 2011.
- [72] Y. Guo, W. Gui, C. Yang, and L. Xie. On reset control systems with discrete-time triggering conditions. In *The 18th IFAC world congress. Milan, Italy*, 2011.
- [73] Y. Guo, Y. Wang, and L. Xie. Frequency-domain properties of reset systems with application in hard-disk-drive systems. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 17(6):1446–1453, 2009.
- [74] Y. Guo, Y. Wang, L. Xie, and J. Zheng. Stability analysis and design of reset systems: Theory and an application. *Automatica*, 45(2):492–497, 2009.

- [75] R.A. Gupta and M.Y. Chow. Networked control system: Overview and research trends. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 57(7):2527–2535, 2010.
- [76] W.M. Haddad, V.S. Chellaboina, and S.G. Nersesov. *Impulsive and hybrid dynamical systems: stability, dissipativity, and control*. Princeton Univ Pr, 2006.
- [77] W.M. Haddad, V. Chellabsina, and NA Kablar. Active control of combustion instabilities via hybrid resetting controllers. In *American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000*, volume 4, pages 2378–2382. IEEE, 2000.
- [78] Y. Halevi, A. Ray, et al. Integrated communication and control systems: Part I-analysis. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 110(4):367–373, 1988.
- [79] J.P. Hespanha, P. Naghshtabrizi, and Y. Xu. A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1):138–162, 2007.
- [80] C. Hollot, O. Beker, Y. Chait, and Q. Chen. On establishing classic performance measures for reset control systems. *Perspectives in robust control*, pages 123–147, 2001.
- [81] CV Hollot, Y. Zheng, and Y. Chait. Stability analysis for control systems with reset integrators. In *Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on*, volume 2, pages 1717–1719. IEEE, 1997.
- [82] F. Hong and WE Wong. A reset PI-lead filter design with application in hard disk drives. In *Asia-Pacific Magnetic Recording Conference, 2006*, pages 1–1. IEEE, 2006.
- [83] I. Horowitz and P. Rosenbaum. Non-linear design for cost of feedback reduction in systems with large parameter uncertainty. *International Journal of Control*, 21(6):977–1001, 1975.
- [84] H. Hu, Y. Zheng, Y. Chait, and CV Hollot. On the zero-input stability of control systems with clegg integrators. In *American Control Conference, 1997. Proceedings of the 1997*, volume 1, pages 408–410. IEEE, 1997.
- [85] H. Hu, Y. Zheng, Y. Chait, and CV Hollot. On the stability of control systems having clegg integrators. *Topics in control and its applications-a tribute to Edward J. Davison*, pages 107–115, 1999.
- [86] R. James, J. Date, and C. McBride. Framework for a national intelligent transport systems architecture march 2010. 2010.
- [87] K.H. Johansson, M. Egerstedt, J. Lygeros, and S. Sastry. On the regularization of zeno hybrid automata. *Systems & Control Letters*, 38(3):141–150, 1999.

- [88] CA Karybakas. Nonlinear integrator with zero phase shift. *Industrial Electronics and Control Instrumentation, IEEE Transactions on*, (2):150–152, 1977.
- [89] KR Krishnan and IM Horowitz. Synthesis of a non-linear feedback system with significant plant-ignorance for prescribed system tolerances. *International Journal of Control*, 19(4):689–706, 1974.
- [90] D. Lee, R. Attias, A. Puri, R. Sengupta, S. Tripakis, and P. Varaiya. A wireless token ring protocol for intelligent transportation systems. In *Intelligent Transportation Systems, 2001. Proceedings. 2001 IEEE*, pages 1152–1157. IEEE, 2001.
- [91] H. Li, C. Du, and Y. Wang. Discrete-time \mathcal{H}_2 optimal reset control with application to HDD track-following. In *Control and Decision Conference, 2009. CCDC'09. Chinese*, pages 3613–3617. IEEE, 2009.
- [92] H. Li, C. Du, Y. Wang, and Y. Guo. Discrete-time optimal reset control for hard disk drive servo systems. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 45(11):5104–5107, 2009.
- [93] H. Li, C. Du, Y. Wang, and Y. Guo. Discrete-time optimal reset control for the improvement of HDD servo control transient performance. In *American Control Conference, 2009. ACC'09.*, pages 4153–4158. IEEE, 2009.
- [94] Y. Li, G. Guo, and Y. Wang. Phase lead reset control design with an application to HDD servo systems. In *Control, Automation, Robotics and Vision, 2006. ICARCV'06. 9th International Conference on*, pages 1–6. IEEE, 2006.
- [95] D. Liberzon and A.S. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *Control Systems Magazine, IEEE*, 19(5):59–70, 1999.
- [96] H. Lin and P.J. Antsaklis. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results. *Automatic control, IEEE Transactions on*, 54(2):308–322, 2009.
- [97] H. Lin, G. Zhai, and P.J. Antsaklis. Robust stability and disturbance attenuation analysis of a class of networked control systems. In *Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on*, volume 2, pages 1182–1187. IEEE, 2003.
- [98] J. Lofberg. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*, pages 284–289. IEEE, 2004.
- [99] T. Loquen. *Some Results on Reset Control Systems*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse.

- [100] T. Loquen, S. Tarbouriech, and C. Prieur. Stability analysis for reset systems with input saturation. In *Decision and Control, 2007 46th IEEE Conference on*, pages 3272–3277. IEEE, 2007.
- [101] T. Loquen, S. Tarbouriech, and C. Prieur. Stability of reset control systems with nonzero reference. In *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pages 3386–3391. IEEE, 2008.
- [102] N.P. Mahalik and K. Kim. A prototype for hardware-in-the-loop simulation of a distributed control architecture. *Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, IEEE Transactions on*, 38(2):189–200, 2008.
- [103] P. Martí, J. Yépez, M. Velasco, R. Villà, and J.M. Fuertes. Managing quality-of-control in network-based control systems by controller and message scheduling co-design. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 51(6):1159–1167, 2004.
- [104] B. McQueen and J. McQueen. *Intelligent transportation systems architectures*. 1999.
- [105] C. Meng, T. Wang, W. Chou, S. Luan, Y. Zhang, and Z. Tian. Remote surgery case: robot-assisted teleneurosurgery. In *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004 IEEE International Conference on*, volume 1, pages 819–823. IEEE, 2004.
- [106] P. Millán, L. Orihuela, C. Vivas, and F.R. Rubio. Control óptimo basado en red mediante funcionales de lyapunov-krasovskii. *Revista Iberoamer. Autom. Inform. Ind*, 2012.
- [107] J. Mohammadpour and C.W. Scherer. *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*. Springer-Verlag New York Inc., 2012.
- [108] A.S. Morse. Control using logic-based switching. Technical report, DTIC Document, 1995.
- [109] A.S. Morse. Supervisory control of families of linear set-point controllers part i. exact matching. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 41(10):1413–1431, 1996.
- [110] D. Nešić and AR Teel. A lyapunov-based small-gain theorem for hybrid iss systems. In *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pages 3380–3385. IEEE, 2008.
- [111] D. Nešić, A.R. Teel, and L. Zaccarian. On necessary and sufficient conditions for exponential and \mathcal{L}_2 stability of planar reset systems. In *American Control Conference, 2008*, pages 4140–4145. IEEE, 2008.

- [112] D. Nešić, A.R. Teel, and L. Zaccarian. Stability and performance of SISO control systems with first-order reset elements. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 56(11):2567–2582, 2011.
- [113] D. Nešić, L. Zaccarian, and A.R. Teel. Stability properties of reset systems. *Automatica*, 44(8):2019–2026, 2008.
- [114] J. Nilsson, B. Bernhardsson, and B. Wittenmark. Stochastic analysis and control of real-time systems with random time delays. *Automatica*, 34(1):57–64, 1998.
- [115] J. Nilsson, B. Wittenmark, M. Törngren, and M. Sanfridson. Timing problems in real-time control systems. *Intern. Rep. ISRN KTH/MMK-98/20-SE*, 3:2000–2004, 1998.
- [116] D. Paesa. *Reset observers and temperature control for induction hobs*. PhD thesis, Universidad de Zaragoza.
- [117] D. Paesa, A. Baños, and C. Sagues. Optimal reset adaptive observer design. *Systems & Control Letters*, 60(10):877–883, 2011.
- [118] D. Paesa, J. Carrasco, O. Lucia, and C. Sagues. On the design of reset systems with unstable base: A fixed reset-time approach. In *IECON 2011-37th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, pages 646–651. IEEE, 2011.
- [119] D. Paesa, C. Franco, S. Llorente, G. Lopez-Nicolas, and C. Sagues. Reset adaptive observers and stability properties. In *Control & Automation (MED), 2010 18th Mediterranean Conference on*, pages 1435–1440. IEEE, 2010.
- [120] D. Paesa, C. Franco, S. Llorente, G. Lopez-Nicolas, and C. Sagues. Reset observers applied to MIMO systems. *Journal of Process Control*, 21(4):613–619, 2011.
- [121] D. Paesa, C. Franco, S. Llorente, G. Lopez-Nicolas, and C. Saguez. Reset adaptive observer for a class of nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 57(2):506–511, 2012.
- [122] D.L. Pepyne and C.G. Cassandras. Optimal control of hybrid systems in manufacturing. *Proceedings of the IEEE*, 88(7):1108–1123, 2000.
- [123] F. Pérez, A. Baños, and J. Cervera. Design of networked periodic reset control systems. In *Industrial Electronics (ISIE), 2011 IEEE International Symposium on*, pages 2003–2008. IEEE, 2011.

- [124] F. Pérez, A. Baños, and J. Cervera. Design of networked reset control systems for reference tracking. In *IECON 2011-37th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, pages 2566–2571. IEEE, 2011.
- [125] F. Pérez, A. Baños, and J. Cervera. Periodic reset control of an in-line pH process. In *Emerging Technologies & Factory Automation (ETFA), 2011 IEEE 16th Conference on*, pages 1–4. IEEE, 2011.
- [126] J. Ploeg, A.F.A. Serrarens, and G.J. Heijenk. Connect & drive: design and evaluation of cooperative adaptive cruise control for congestion reduction. 2011.
- [127] SV Polenkova, J.W. Polderman, and R. Langerak. Stability criteria for planar linear systems with state reset. In *Mathematical Theory of Networks and Systems, 2010. Proceedings of the International Symposium*, pages 809–815, 2010.
- [128] C. Prieur, S. Tarbouriech, and L. Zaccarian. Guaranteed stability for nonlinear systems by means of a hybrid loop. In *Nonlinear Control Systems*, pages 72–77, 2010.
- [129] C. Raimúndez, A. Barreiro, A.F. Villaverde, et al. Damping injection by reset control. 2012.
- [130] A. Ray. Output feedback control under randomly varying distributed delays. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 17(4):701–711, 1994.
- [131] A. Ray and Y. Halevi. Integrated communication and control systems: Part II—design considerations. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 110(4):374–381, 1988.
- [132] W.J. Rugh. *Linear system theory*. Prentice-Hall, Inc., 1996.
- [133] J. Salt, V. Casanova, A. Cuenca, and R. Pizá. Sistemas de control basados en red modelado y diseño de estructuras de control. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 5(3):5–20, 2008.
- [134] A.V. Savkin and R.J. Evans. *Hybrid dynamical systems: controller and sensor switching problems*. Birkhauser, 2002.
- [135] P. Seiler and R. Sengupta. Analysis of communication losses in vehicle control problems. In *American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001*, volume 2, pages 1491–1496. IEEE, 2001.
- [136] P. Seiler and R. Sengupta. An H_∞ approach to networked control. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 50(3):356–364, 2005.

- [137] M.M. Seron, J.H. Braslavsky, G.C. Goodwin, et al. Fundamental limitations in filtering and control| nova. the university of newcastle's digital repository. 1997.
- [138] S. Skogestad. Simple analytic rules for model reduction and pid controller tuning. *Journal of process control*, 13(4):291–309, 2003.
- [139] CL Smith, J.) AB; Martin Corripio (Jr., and United States. Louisiana State University. Dept. of Computer Science. *Controller tuning from simple process models*. Louisiana State University, Department of Computer Science, 1975.
- [140] M. Song, T.J. Tarn, and N. Xi. Integration of task scheduling, action planning, and control in robotic manufacturing systems. *Proceedings of the IEEE*, 88(7):1097–1107, 2000.
- [141] S.P.L. Sørensen. Über die messung und die bedeutung der wasserstoffionen-konzentration bei enzymatischen prozessen.
- [142] D. Stavens and S. Thrun. A self-supervised terrain roughness estimator for off-road autonomous driving. *arXiv preprint arXiv:1206.6872*, 2012.
- [143] S. Tarbouriech, T. Loquen, and C. Prieur. Anti-windup strategy for reset control systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21(10):1159–1177, 2011.
- [144] Y. Tipsuwan and M.Y. Chow. Gain scheduler middleware: a methodology to enable existing controllers for networked control and teleoperation-part I: networked control. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 51(6):1218–1227, 2004.
- [145] Y. Tipsuwan and M.Y. Chow. On the gain scheduling for networked PI controller over IP network. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 9(3):491–498, 2004.
- [146] R.H. Tütüncü, K.C. Toh, and M.J. Todd. Solving semidefinite-quadratic-linear programs using sdpt3. *Mathematical programming*, 95(2):189–217, 2003.
- [147] A. Vidal and A. Baños. QFT-based design of PI + CI reset compensators: application in process control. In *Control and Automation, 2008 16th Mediterranean Conference on*, pages 806–811. IEEE, 2008.
- [148] A. Vidal and A. Baños. Stability of reset control systems with variable reset: application to PI + CI compensation. In *European Control Conference, Budapest, Hungary*, 2009.

- [149] A. Vidal and A. Baños. Reset compensation for temperature control: Experimental application on heat exchangers. *Chemical Engineering Journal*, 159(1):170–181, 2010.
- [150] A. Vidal, A. Baños, J.C. Moreno, and M. Berenguel. PI + CI compensation with variable reset: application on solar collector fields. In *Industrial Electronics, 2008. IECON 2008. 34th Annual Conference of IEEE*, pages 321–326. IEEE, 2008.
- [151] A.F. Villaverde, A.B. Blas, J. Carrasco, and A.B. Torrico. Reset control for passive bilateral teleoperation. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 58(7):3037–3045, 2011.
- [152] J. Wang, J. Steiber, and B. Surampudi. Autonomous ground vehicle control system for high-speed and safe operation. *International Journal of Vehicle Autonomous Systems*, 7(1):18–35, 2009.
- [153] G. Witvoet, W. Aangenent, W. Heemels, MJG van de Molengraft, and M. Steinbuch. \mathcal{H}_2 performance analysis of reset control systems. In *Decision and Control, 2007 46th IEEE Conference on*, pages 3278–3284. IEEE, 2007.
- [154] R.A. Wright and C. Kravaris. On-line identification and nonlinear control of an industrial pH process. *Journal of Process Control*, 11(4):361–374, 2001.
- [155] D. Wu, G. Guo, and Y. Wang. Reset integral-derivative control for HDD servo systems. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 15(1):161–167, 2007.
- [156] J. Yang, Z. Qu, J. Wang, K.L. Conrad, and R.A. Hull. Real-time obstacles avoidance for vehicles in the urban grand challenge. *Experience from the Darpa Urban Challenge*, page 133, 2011.
- [157] T. Yang. *Impulsive control theory*, volume 272. Springer, 2001.
- [158] T.C. Yang. Networked control system: a brief survey. In *Control Theory and Applications, IEE Proceedings-*, volume 153, pages 403–412. IET, 2006.
- [159] G. Yuqian and H. Wei. Stability analysis of nonlinear reset control systems with smooth baseline modes. In *Control Conference (CCC), 2011 30th Chinese*, pages 1190–1194. IEEE, 2011.
- [160] G. Yuqian, W. Youyi, and X. Lihua. Mid-frequency disturbance rejection of HDD systems. In *Control Conference, 2007. CCC 2007. Chinese*, pages 56–60. IEEE, 2007.

- [161] L. Zaccarian, D. Nešić, and A.R. Teel. First order reset elements and the clegg integrator revisited. In *American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005*, pages 563–568. IEEE, 2005.
- [162] L. Zaccarian, D. Nešić, and A.R. Teel. Explicit lyapunov functions for stability and performance characterizations of fores connected to an integrator. In *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*, pages 771–776. IEEE, 2006.
- [163] L. Zaccarian, D. Nešić, and A.R. Teel. Set-point stabilization of SISO linear systems using first order reset elements. In *American Control Conference, 2007. ACC'07*, pages 5808–5809. IEEE, 2007.
- [164] L. Zaccarian, D. Nešić, and A.R. Teel. Analytical and numerical lyapunov functions for SISO linear control systems with first-order reset elements. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21(10):1134–1158, 2010.
- [165] W. Zhang, M.S. Branicky, and S.M. Phillips. Stability of networked control systems. *Control Systems, IEEE*, 21(1):84–99, 2001.
- [166] J. Zheng and M. Fu. A reset state estimator using an accelerometer for enhanced motion control with sensor quantization. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 18(1):79–90, 2010.
- [167] J. Zheng, Y. Guo, M. Fu, Y. Wang, and L. Xie. Improved reset control design for a pzt positioning stage. In *Control Applications, 2007. CCA 2007. IEEE International Conference on*, pages 1272–1277. IEEE, 2007.
- [168] J. Zheng, Y. Guo, M. Fu, Y. Wang, and L. Xie. Development of an extended reset controller and its experimental demonstration. *Control Theory & Applications, IET*, 2(10):866–874, 2008.
- [169] Y. Zheng. *Theory and practical considerations in reset control design*. PhD thesis, University of Massachusetts.
- [170] Y. Zheng, Y. Chait, CV Hollot, M. Steinbuch, and M. Norg. Experimental demonstration of reset control design. *Control Engineering Practice*, 8(2):113–120, 2000.