



UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

**Aplicaciones del principio del máximo generalizado
de Omori-Yau al estudio de la geometría global de
hipersuperficies en espacios de curvatura constante**

Dña. Sandra Carolina García Martínez

2012

A mi esposo Fabián y a toda mi familia.

Índice general

Summary and Conclusions	1
Introducción	7
1. Preliminares	13
1.1. Notación y conceptos básicos	13
1.2. Fórmulas básicas para hipersuperficies	18
1.3. Hipersuperficies totalmente umbilicales	20
1.4. Hipersuperficies isoparamétricas con dos curvaturas principales	27
2. Principio del máximo generalizado de Omori-Yau	35
2.1. Principio del máximo generalizado de Omori-Yau	35
2.2. Parabolicidad	45
2.3. Completitud estocástica y el principio débil del máximo de Omori-Yau	48
2.4. Fórmula tipo Simons y aplicación a subvariedades	51
3. Una estimación óptima para el ínfimo de la curvatura escalar	59
3.1. Superficies con curvatura media constante	59
3.2. Hipersuperficies con curvatura media constante	71
4. Una estimación óptima para el supremo de la curvatura escalar	79
4.1. Superficies con curvatura media constante	79
4.2. Hipersuperficies con curvatura media constante	82
4.3. Un enfoque alternativo para el caso euclídeo	97
5. Un principio del máximo para hipersuperficies con curvatura escalar constante	101
5.1. Motivación y preliminares	101

5.2. Un principio débil del máximo para el operador L	109
5.3. Una aplicación a hipersuperficies con curvatura escalar constante . . .	112
5.3.1. Superficies con curvatura de Gauss constante	112
5.3.2. Hipersuperficies con curvatura escalar constante	115
5.4. L -parabolicidad	122

Bibliografía**125**

Summary and conclusions

As is well known the maximum principle is a powerful tool in the study of global properties of Riemannian manifolds, reason by which it is interesting to make a detailed study of geometric applications of maximum principle in the setting of hypersurfaces immersed into Riemannian spaces of constant curvature. It is worth pointing out that we will work only under hypothesis of non-compactness. In fact, in every compact Riemannian manifold Σ (without boundary), any smooth function $u \in C^2(\Sigma)$ attains its maximum, that is, there exists a point $x_0 \in \Sigma$ such that

$$(a) \ u(x_0) = u^* = \sup_{\Sigma} u, \quad (b) \ |\nabla u(x_0)| = 0, \quad \text{and} \quad (c) \ \Delta u(x_0) \leq 0$$

or more generally, (c)' Hess $u(x_0) \leq 0$, in sense that

$$\text{Hess } u(x_0)(v, v) \leq 0 \text{ for every } v \in T_{x_0}\Sigma.$$

Obviously, when Σ is non-compact it is not always possible to guarantee the existence of a point of maximum. However, if $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is a smooth function such that $u^* < +\infty$ then it is not difficult to show that there exists a sequence of points $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ such that

$$(a) \ u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad (b) \ |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k}, \quad \text{and} \quad (c) \ \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}$$

or (c)' Hess $u(x_k) < 1/k \langle \cdot, \cdot \rangle$, in sense that

$$\text{Hess } u(x_k)(v, v) < \frac{1}{k} |v|^2 \quad \text{for every } v \in T_{x_k}\Sigma.$$

To see this, simply set the sequence $\{\varepsilon_k\} \rightarrow 0^+$ and consider the points $x_k \in \mathbb{R}^n$ where the functions $u_k(x) = u(x) - \varepsilon_k |x|^2$ attain its absolute maximum on \mathbb{R}^n .

In 1967, Omori [39] observed that this fact cannot be extended in general to complete Riemannian manifolds, but imposing some geometrical conditions on the manifold to get their validity. Specifically, Omori proved that if Σ is a complete Riemannian manifold with sectional curvature bounded from below, then for

any smooth function $u \in C^2(\Sigma)$ with $u^* < +\infty$ there exists a sequence of points $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ such that

$$(i) \quad u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad (ii) \quad |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k}, \quad \text{and} \quad (iii)' \quad \text{Hess } u(x_k) < \frac{1}{k} \langle, \rangle.$$

Later in 1975, Yau [58] extended this result to complete Riemannian manifolds with Ricci curvature bounded from below and changed the condition $(iii)'$ by $\Delta u(x_k) < 1/k$. This led to the famous *Omori-Yau maximum principle*, which following the terminology introduced by Pigola, Rigoli and Setti [44], we will say that this principle holds on Σ if, for any smooth function $u \in C^2(\Sigma)$ with $u^* < +\infty$ there exists a sequence of points $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ such that

$$(i) \quad u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad (ii) \quad |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k}, \quad \text{and} \quad (iii) \quad \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}.$$

Equivalently, for any smooth function $u \in C^2(\Sigma)$ with $u_* = \inf_{\Sigma} u > -\infty$ there exists a sequence of points $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in Σ with the properties

$$(i) \quad u(x_k) < u_* + \frac{1}{k}, \quad (ii) \quad |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k}, \quad \text{and} \quad (iii) \quad \Delta u(x_k) > -\frac{1}{k}.$$

More generally, Pigola, Rigoli and Setti in [44] proved that a sufficiently controlled decay of the radial Ricci curvature suffices to imply the validity of the Omori-Yau maximum principle. Indeed, this decay must satisfy the following conditions

$$\text{Ric}_{\Sigma}(\nabla \varrho, \nabla \varrho) \geq -C^2 G(\varrho),$$

where ϱ is the distance function on Σ to a fixed point, C is a positive constant and $G : [0 + \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is a smooth function satisfying

$$(i) \quad G(0) < 0, \quad (ii) \quad G'(t) \geq 0, \quad (iii) \quad \int_0^{+\infty} 1/\sqrt{G(t)} = +\infty, \quad \text{and} \\ (iv) \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} tG(\sqrt{t})/G(t) < +\infty. \quad (1)$$

In particular, Bessa and Costa [11] stated that the Omori-Yau maximum principle holds on a complete Riemannian manifold whose Ricci curvature has strong quadratic decay of the following way

$$\text{Ric}_{\Sigma} \geq -C^2(1 + \varrho^2 \log^2(\varrho + 2)).$$

On the other hand, Pigola, Rigoli and Setti observed that the validity of the Omori-Yau maximum principle does not depend on curvature bounds as much as one would expect. Specifically, and as a generalization of the Omori-Yau result, they proved that the Omori-Yau maximum principle holds on every Riemannian manifold Σ admitting a non-negative C^2 function γ satisfying the following requirements:

$$(i) \quad \gamma(x) \rightarrow +\infty \text{ as } x \rightarrow \infty, \quad (ii) \quad \exists A > 0 : |\nabla \gamma| \leq A\sqrt{\gamma} \text{ off a compact set, and} \\ (iii) \quad \exists B > 0 : \Delta \gamma \leq B\sqrt{\gamma G(\sqrt{\gamma})} \text{ off a compact set.}$$

Here G is a smooth function that satisfies (1).

It is worth pointing out that in several geometric problems the property (ii) does not play an essential role. For this reason, Pigola, Rigoli and Setti [44] in 2001, showed a weaker version of this principle for every Riemannian manifold, where they stated that the *weak Omori-Yau maximum principle* holds on Σ if, for any smooth function $u \in C^2(\Sigma)$ with $u^* < +\infty$ there exists a sequence of points $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ such that

$$(i) \quad u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad \text{and} \quad (iii) \quad \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}.$$

Analogously, for any smooth function $u \in C^2(\Sigma)$ with $u_* > -\infty$ there exists a sequence of points $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in Σ with the properties

$$(i) \quad u(x_k) < u_* + \frac{1}{k} \quad \text{and} \quad (iii) \quad \Delta u(x_k) > -\frac{1}{k}.$$

The same authors proved the equivalence between the weak Omori-Yau maximum principle and the *stochastic completeness* of the manifold. Recall that a Riemannian manifold is *stochastically complete* if for some (and therefore, for any) $(x, t) \in \Sigma \times (0, +\infty)$ we have

$$\int_{\Sigma} p(x, y, t) dy = 1,$$

where $p(x, y, t)$ is the heat-kernel of Laplacian operator.

The goal of this work is to show the evolution of the maximum principle and several applications of this to geometric problems. In this circle of ideas, we propose to study the behavior of the scalar curvature of constant mean curvature hypersurfaces immersed into a Riemannian space of constant curvature. The first results in this direction were given by Klotz and Osserman [29] in 1967, where they characterized totally umbilical spheres and circular cylinders as the only complete surfaces immersed into Euclidean 3-space with nonzero constant mean curvature and whose Gaussian curvature does not change sign. Later on, Hoffman [26] and Tribuzy [52], independently, gave an extension to the case of surfaces with constant mean curvature in the Euclidean 3-sphere and in the hyperbolic 3-space, respectively. The proofs of the last results strongly depend on the conformal structure of the 2-dimensional surface, so that they cannot be extended to higher dimensions. With an alternative approach, Alencar and Do Carmo [1] in 1994 were able to generalize this result to the case of compact hypersurfaces with constant mean curvature immersed into Euclidean sphere.

We propose as a **first specific objective** to improve Alencar and Do Carmo's result under different assumptions of non-compactness of the manifold as the completeness and the stochastic completeness, and to extend it to every Riemannian space form.

Following with the philosophy of looking for more situations where we can apply the different versions of maximum principle, we found with the work by Otsuki [40],

which states that if a hypersurface has two principal curvatures both of multiplicity greater than 1, then the distributions of the space of principal vectors corresponding to each principal curvature are completely integrable and each principal curvature is constant on each of the integral leaves of the corresponding distribution. In particular, if the mean curvature of hypersurface is constant, then the two principal curvatures are also constant and the hypersurface is an isoparametric hypersurface with exactly two constant principal curvatures, with multiplicities k and $n - k$, and $1 < k < n - 1$. Then, by the classical results on isoparametric hypersurfaces in Riemannian space forms (see [32, 47, 15]), this hypersurface must be an open piece of one of the three following standard product embeddings: $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k}(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ with $r > 0$, if $c = 0$; $\mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-k}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$ with $0 < r < 1$, if $c = 1$; and $\mathbb{H}^k(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-k}(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$ with $r > 0$, if $c = -1$. So that, the interesting case for studying constant mean curvature hypersurfaces is when one of the principal curvatures has multiplicity one, in other words, is simple. In this new setting, Hasanis, Savas-Halilaj and Vlachos [24] in 2004 studied such hypersurfaces in the Euclidean sphere under the hypotheses of completeness and minimality, obtaining a characterization of the minimal Clifford tori. Recently, Wei [56] extended this result to the case of constant mean curvature, whose proof does not use the Omori-Yau maximum principle but essentially resolve the ordinary differential equation of order 2 originally proposed by Otsuki.

Our **second specific objective** is to extend Wei's result to hypersurfaces immersed into a Riemannian space form under the following hypotheses: constant mean curvature, two distinct principal curvatures, one of them being simple, and verifying the Omori-Yau maximum principle.

In contrast to what we have studied until now, we will analyze the behavior of the mean curvature of constant scalar curvature hypersurfaces. The first results known are due to Cheng and Yau [19], where they introduced an appropriate differential operator, different to the Laplacian denoted here by L , for studying such hypersurfaces. More specifically, the authors obtained two classification results: First, the only compact hypersurfaces in the unit sphere \mathbb{S}^{n+1} with constant normalized scalar curvature $R \geq 1$ and non-negative sectional curvature are either totally umbilical or isometric to a Riemannian product $\mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-k}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, $1 \leq k \leq n - 1$. Second, the only complete non-compact hypersurfaces in the Euclidean space \mathbb{R}^{n+1} with constant normalized scalar curvature $R \geq 0$ and non-negative sectional curvature are generalized cylinders of the form $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{S}^k(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $1 \leq k \leq n - 1$. On the other hand, Alencar, Do Carmo and Santos [3] considered closed (compact without boundary) hypersurfaces of the unit sphere with normalized scalar curvature one $R = 1$ and proved a *gap* theorem for a modified second fundamental form and determined the hypersurfaces that are at the end points of the *gap*. Since then, a number of papers appeared on the subject establishing rigidity results for such hypersurfaces under various assumptions. For instance, [33, 55, 57] and finally we would like to emphasize in the recent work of Brasil, Colares and Palmas [12] where they show a *gap* theorem for complete hypersurfaces with constant normalized

scalar curvature $R \geq 1$ immersed in the Euclidean sphere, using the operator L (introduced by Cheng and Yau) but they conclude their proof with the Omori-Yau maximum principle for the Laplacian operator.

Finally, our **third specific objective** is to give a weak maximum principle for L -operator and an application of this. In this sense, we are able to show an interesting application on complete hypersurfaces with constant scalar curvature immersed into space forms.

This research work is organized in the following way:

The first chapter is a chapter of preliminaries that contains four sections. In the first section, we introduce some definitions and basic results of Riemannian geometry in order to fix notation. In the second section, we recall the basic formulae of hypersurfaces such as Gauss and Weingarten's formulae. Moreover, we show Gauss and Codazzi equations that will be use along of this work. In the third section, we study and classifying the totally umbilical hypersurfaces immersed into Riemannian spaces form according to the value of constant mean curvature. In the last section, we make a detailed analysis of isoparametric hypersurfaces with two distinct principal curvatures, and we estimate the norm of the traceless second fundamental form $|\Phi|$.

In the second chapter we include the analytic part of our work. In the first section we introduce the Omori-Yau maximum principle and its variations. In the second section, we study the concept of parabolicity and give some examples. In the third section, we study the stochastic completeness and its relation with the weak Omori-Yau maximum principle. In the fourth section, we show a Simons type formula for the Laplacian of the norm of the traceless second fundamental form on submanifolds with parallel mean curvature vector. As an application, we extend Theorem 1.1 given by Vlachos in [53] to the case of stochastic completeness. The Vlachos's result originally stated that a complete submanifold with parallel mean curvature vector in the Euclidean sphere is either pseudoumbilical or the supremum of the norm of the traceless second fundamental form is bounded from above by positive constant that depends on the constant mean curvature function.

The third chapter is about constant mean curvature hypersurfaces immersed into space forms and the main results are collected in the paper [5]. This chapter has two sections. In the first section, motivated by the works of Klotz and Osserman, Hoffman and Tribuzy that last mentioned, we estimate the infimum of the Gaussian curvature of complete surfaces with constant mean curvature. There, we use complex variable techniques thanks to conformal structure of 2-dimensional manifold and we checked that the estimation found is sharp because a family of unduloids immersed in the Euclidean space satisfies it. In the second section, with a different approach we may generalize this result to stochastically complete hypersurfaces (which are not necessarily completes) by the application of the weak Omori-Yau maximum principle to squared norm of the traceless second fundamental form $|\Phi|^2$.

The fourth chapter of this memory contains three sections. Analogously to the previous chapter, in the first section we derive an estimate of the supremum of Gauss

curvature for complete, constant mean curvature surfaces and again, we show that this estimate found is sharp because a family of unduloids satisfies it. In the second section, we study this result in the case of hypersurfaces that verify the Omori-Yau maximum principle and have two distinct principal curvatures, one of them being simple. Here, we will use the classic Omori-Yau maximum principle on the function $|\Phi|$. In the third section, using the Principal Curvature Theorem due to Smyth and Xavier in [49] we show a different proof of one of the main results of the last section (see Theorem 4.2.2) which characterizes the complete hypersurfaces in the Euclidean space with constant mean curvature and two principal curvatures, one of them being simple. The main results of this chapter are collected in the paper [6].

Finally, in the fifth chapter we present a weak maximum principle for L -operator. We begin this chapter with some preliminaries that are necessary to define this operator as the first Newton transformation. In the second section, we apply this maximum principle to estimate the supremum of the mean curvature of constant scalar curvature hypersurfaces immersed into a space form. Following with the same format that we began in the third chapter, we include also the 2-dimensional case where we use the complex variable theory. In the last section, we introduce the concept of L -parabolicity and we show some criteria that allow us to conclude when a manifold is L -parabolic. With this concept we are able to improve the characterization of equality of the main results of the last section. The results of this chapter are collected in the paper [7].

Introducción

Como es bien conocido, el principio del máximo es una herramienta fundamental en el estudio del comportamiento global de las variedades riemannianas, motivo por el cual es interesante realizar un estudio detallado de las aplicaciones geométricas del principio del máximo en el escenario de hipersuperficies inmersas en espacios riemannianos de curvatura constante. Es importante aclarar, que trabajaremos solo bajo hipótesis de no-compacidad ya que, en toda variedad riemanniana compacta Σ (sin frontera), cualquier función diferenciable $u \in C^2(\Sigma)$ alcanza su máximo, esto es, existe un punto $x_0 \in \Sigma$ tal que

$$(a) \ u(x_0) = u^* = \sup_{\Sigma} u, \quad (b) \ |\nabla u(x_0)| = 0, \quad \text{y} \quad (c) \ \Delta u(x_0) \leq 0$$

o de forma más general, $(c)'$ $\text{Hess } u(x_0) \leq 0$, en el sentido que

$$\text{Hess } u(x_0)(v, v) \leq 0 \quad \text{para todo } v \in T_{x_0}\Sigma.$$

Obviamente, cuando Σ no es compacta esto no siempre es posible. Sin embargo, si $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable con $u^* < +\infty$ no es difícil ver que existe una sucesión de puntos $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$(a) \ u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad (b) \ |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k}, \quad \text{y} \quad (c) \ \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}$$

o $(c)'$ $\text{Hess } u(x_k) < 1/k \langle \cdot, \cdot \rangle$, en el sentido

$$\text{Hess}u(x_k)(v, v) < \frac{1}{k} |v|^2 \quad \text{para todo } v \in T_{x_0}\Sigma.$$

Para ver esto, basta considerar una sucesión $\{\varepsilon_k\} \rightarrow 0^+$ y los puntos $x_k \in \mathbb{R}^n$ donde las funciones $u_k(x) = u(x) - \varepsilon_k |x|^2$ alcanzan su máximo absoluto sobre \mathbb{R}^n .

En 1967, Omori [39] observó que este hecho no puede ser extendido en general a variedades riemannianas completas, pero bajo ciertas condiciones geométricas sobre la variedad es posible obtener su validez. Específicamente, Omori probó que si Σ es una variedad riemanniana completa con curvatura seccional acotada inferiormente,

entonces para cualquier función diferenciable $u \in C^2(\Sigma)$ con $u^* < +\infty$ existe una sucesión de puntos $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ tal que

$$(i) \quad u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad (ii) \quad |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k}, \quad y \quad (iii)' \quad \text{Hess } u(x_k) < \frac{1}{k} \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

Más tarde en 1975, Yau [58] extendió este resultado a variedades riemannianas completas con curvatura de Ricci acotada inferiormente cambiando la condición (iii)' por $\Delta u(x_k) < 1/k$. Esto dio origen al famoso *principio del máximo de Omori-Yau*, el cual siguiendo la terminología introducida por Pigola, Rigoli y Setti en [44] decimos que este principio se verifica sobre Σ si para cualquier función diferenciable $u \in C^2(\Sigma)$ con $u^* < +\infty$ existe una sucesión de puntos $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ tal que

$$(i) \quad u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad (ii) \quad |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k}, \quad y \quad (iii) \quad \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}.$$

Equivalentemente, para cualquier función diferenciable $u \in C^2(\Sigma)$ con $u_* = \inf_{\Sigma} u > -\infty$ existe una sucesión de puntos $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en Σ con las propiedades

$$(i) \quad u(x_k) < u_* + \frac{1}{k}, \quad (ii) \quad |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k}, \quad y \quad (iii) \quad \Delta u(x_k) > -\frac{1}{k}.$$

Más generalmente, Pigola, Rigoli y Setti en [44] mostraron que un decaimiento controlado de la curvatura de Ricci radial implica la validez del principio del máximo de Omori-Yau. Concretamente, dicho decaimiento debe satisfacer las siguientes condiciones técnicas:

$$\text{Ric}_{\Sigma}(\nabla \varrho, \nabla \varrho) \geq -C^2 G(\varrho),$$

donde ϱ es la función distancia sobre Σ a un punto fijo, C es una constante positiva y $G : [0 + \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable sobre que satisface

$$\begin{aligned} (i) \quad G(0) < 0, \quad (ii) \quad G'(t) \geq 0, \quad (iii) \quad \int_0^{+\infty} 1/\sqrt{G(t)} = +\infty, \quad y \\ (iv) \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} tG(\sqrt{t})/G(t) < +\infty. \end{aligned} \tag{2}$$

En particular, Bessa y Costa [11] afirmaron que el principio del máximo de Omori-Yau se verifica sobre una variedad riemanniana completa cuya curvatura de Ricci tiene un decaimiento cuadrático fuerte de la forma

$$\text{Ric}_{\Sigma} \geq -C^2(1 + \varrho^2 \log^2(\varrho + 2)).$$

Por otra parte, Pigola, Rigoli y Setti observaron que la validez del principio del máximo de Omori-Yau no depende de cotas de la curvatura como se esperaba. Específicamente, y como una generalización del resultado original de Omori-Yau, ellos prueban que el principio del máximo de Omori-Yau se verifica sobre toda variedad

riemanniana Σ que admite una función de clase C^2 no negativa γ que satisface los siguientes requisitos:

- (i) $\gamma(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \infty$,
- (ii) $\exists A > 0 : |\nabla\gamma| \leq A\sqrt{\gamma}$ fuera de un conjunto compacto, y
- (iii) $\exists B > 0 : \Delta\gamma \leq B\sqrt{\gamma G(\sqrt{\gamma})}$ fuera de un conjunto compacto.

Aquí G es una función diferenciable que satisface (2).

Es importante señalar que en algunos problemas geométricos la propiedad (ii) no juega un papel esencial. Por esta razón, Pigola, Rigoli y Setti [44] en 2001, mostraron una versión débil de este principio para toda variedad riemanniana, donde afirman que el *principio débil del máximo de Omori-Yau* se verifica sobre Σ , si para cualquier función diferenciable $u \in C^2(\Sigma)$ con $u^* < +\infty$ existe una sucesión de puntos $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ tal que

$$(i) \quad u(x_k) > u^* - \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad (iii)' \quad \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}.$$

Análogamente, para cualquier función diferenciable $u \in C^2(\Sigma)$ con $u_* > -\infty$ existe una sucesión de puntos $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en Σ con las propiedades

$$(i) \quad u(x_k) < u_* + \frac{1}{k}, \quad \text{y} \quad (iii) \quad \Delta u(x_k) > -\frac{1}{k}.$$

Los mismos autores probaron la equivalencia entre el principio débil del máximo de Omori-Yau y la completitud estocástica de la variedad. Recordemos que una variedad es *estocásticamente completa* si para algún (y por lo tanto, para cualquier) $(x, t) \in \Sigma \times (0, +\infty)$ se tiene que

$$\int_{\Sigma} p(x, y, t) dy = 1,$$

donde $p(x, y, t)$ es el núcleo de calor del operador laplaciano.

Nuestro objetivo principal es presentar la evolución del principio del máximo y algunas aplicaciones de él a problemas geométricos. En este sentido, nos planteamos estudiar el comportamiento de la curvatura escalar de hipersuperficies de curvatura media constante inmersas en espacios forma riemannianos. Los primeros resultados en esta dirección fueron dados por Klotz y Osserman [29] en 1967, donde caracterizaron las esferas totalmente umbilicales y los cilindros circulares como las únicas superficies completas inmersas en el espacio euclídeo 3-dimensional con curvatura media constante diferente de cero y, cuya curvatura de Gauss no cambia de signo. Tiempo después, Hoffman [26] y Tribuzy [52] de forma independiente extienden este resultado al caso de superficies con curvatura media constante inmersas en la esfera euclídea 3-dimensional y el espacio hiperbólico 3-dimensional, respectivamente.

Las pruebas de los resultados anteriores hacen uso de la estructura conforme de la superficie 2-dimensional, así que no se pueden extender automáticamente a dimensiones superiores. Con un enfoque completamente diferente, Alencar y Do Carmo [1] en 1994 consiguen generalizar dicho resultado a hipersuperficies compactas de curvatura media constante inmersas en la esfera euclídea.

Nosotros proponemos como un **primer objetivo específico** mejorar el resultado de Alencar y Do Carmo bajo hipótesis de no-compacidad de la variedad como lo son: la completitud y la completitud estocástica, y extenderlo a todo espacio forma riemanniano.

Continuando con la filosofía de buscar situaciones donde podamos aplicar las diferentes versiones del principio del máximo, nos encontramos con el trabajo de Otsuki [40], el cual establece lo siguiente: si una hipersuperficie tiene dos curvaturas principales distintas de multiplicidades mayores que 1, entonces las distribuciones de los subespacios propios correspondientes a cada curvatura principal son completamente integrables y cada curvatura principal es constante sobre cada hoja integrable de la correspondiente distribución. En particular, si la curvatura media de la hipersuperficie es constante, entonces las dos curvaturas principales son también constantes y por ende, la hipersuperficie es isoparamétrica con exactamente dos curvaturas principales constantes, de multiplicidades k y $n - k$, con $1 < k < n - 1$. Entonces, a partir de los resultados clásicos de hipersuperficies isoparamétricas en espacios forma \mathbb{M}_c^{n+1} (véase [32, 47, 15]), esta hipersuperficie debe ser un abierto de uno de los siguientes productos estándar embebidos: $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k}(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con $r > 0$, si $c = 0$; $\mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-k}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$ con $0 < r < 1$, si $c = 1$; y $\mathbb{H}^k(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-k}(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$ con $r > 0$, si $c = -1$. De manera que, el caso a analizar es cuando justamente una de las dos curvaturas principales tiene multiplicidad uno, en otras palabras, es simple. En este nuevo escenario, Hasanis, Savas-Halilaj y Vlachos [24] en 2004 estudiaron dichas hipersuperficies en la esfera euclídea bajo las hipótesis de completitud y minimalidad obteniendo una caracterización del toro de Clifford minimal. Recientemente, Wei [56] dio una extensión de este mismo resultado al caso de curvatura media constante. En su prueba no hace uso del principio del máximo de Omori-Yau sino que esencialmente resuelve una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden planteada originalmente por Otsuki.

Nuestro **segundo objetivo específico** es extender el resultado dado por Wei a hipersuperficies inmersas en los espacios forma bajo las hipótesis de: curvatura media constante, dos curvaturas principales, una de ellas simple, y que verifiquen el principio del máximo de Omori-Yau.

En contraste a lo que hemos venido estudiando, analizaremos ahora el comportamiento de la curvatura media de la hipersuperficie con la hipótesis de que su curvatura escalar sea constante. Los primeros resultados conocidos son gracias a Cheng y Yau [19], donde introducen un operador diferencial auto-adjunto diferente al laplaciano el cual juega un papel fundamental en el estudio de tales hipersuperficies. En un futuro este operador lo denotaremos por L . De manera más concreta, los autores obtuvieron dos resultados de clasificación: primero, las únicas hipersuperficies

compactas en la esfera euclídea \mathbb{S}^{n+1} con curvatura escalar constante normalizada $R \geq 1$ y curvatura seccional no negativa son o bien, totalmente umbilicales o bien, isométricas a un producto riemanniano de la forma $\mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-k}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$. Segundo, las únicas hipersuperficies completas no compactas en \mathbb{R}^{n+1} con curvatura escalar constante normalizada $R \geq 0$ y curvatura seccional no-negativa son los cilindros generalizados de la forma $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{S}^k(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $1 \leq k \leq n-1$. Por otra parte, Alencar, Do Carmo y Santos en [3] consideraron las hipersuperficies cerradas (es decir, compactas y sin frontera) de la esfera unitaria \mathbb{S}^{n+1} con curvatura escalar normalizada uno $R = 1$ y presentaron un teorema de tipo *gap*. Allí, estimaron la norma de la segunda forma fundamental modificada y determinaron las hipersuperficies que se encuentran en los puntos finales del *gap*. Desde entonces, un número considerable de artículos han ido apareciendo sobre este tema en particular, en muchos de ellos podemos encontrar resultados de rigidez para tales hipersuperficies, bajo diversas hipótesis. Por ejemplo, [33, 55, 57] y por último, queremos hacer un especial énfasis en el reciente trabajo dado por Brasil, Colares y Palmas [12] donde presentan un teorema tipo *gap* para hipersuperficies completas con curvatura escalar normalizada $R \geq 1$ inmersas en la esfera unitaria, donde hacen uso del operador L pero, concluyen la prueba con el principio del máximo de Omori-Yau para el operador laplaciano.

Finalmente, nuestro **tercer objetivo específico** es pretender dar un principio débil del máximo para el operador L , como también una aplicación. Con respecto a esta última pretensión logramos presentar una interesante aplicación sobre las hipersuperficies completas de curvatura escalar constante inmersas en cualquier espacio forma.

La presente memoria está organizada de la siguiente forma:

El Capítulo 1 es un capítulo de preliminares que consta de cuatro secciones. En la primera sección, introducimos algunas definiciones y resultados básicos de geometría riemanniana con el fin de fijar algunas notaciones. En la segunda sección, recordaremos las fórmulas básicas para hipersuperficies como lo son las fórmulas de Gauss y de Weingarten. Además, presentamos las ecuaciones fundamentales de Gauss y de Codazzi, las cuales utilizamos a lo largo de la tesis. En la tercera sección, estudiamos y clasificamos las hipersuperficies totalmente umbilicales inmersas en los espacios forma a partir del valor de su curvatura media constante. En la última sección, realizamos un estudio detallado de las hipersuperficies isoparamétricas con dos curvaturas principales y estimamos la norma de la segunda forma fundamental sin traza $|\Phi|$.

En el Capítulo 2 condensamos la parte más analítica de nuestro trabajo. En la primera sección, introducimos el principio del máximo de Omori-Yau y algunas de sus variaciones. En la segunda sección, estudiamos el concepto de parabolicidad y damos algunos ejemplos. En la tercera sección, estudiamos el concepto de completitud estocástica y su relación con el principio débil del máximo de Omori-Yau. En la cuarta sección, incluimos la fórmula de tipo Simons para el laplaciano de la segunda forma fundamental sin traza sobre subvariedades con vector curvatura media

paralelo. Además, presentamos una aplicación de este, que nos permite generalizar el Teorema 1.1 dado por Vlachos [53], el cual afirma que una subvariedad completa con vector curvatura media paralelo no nulo en la esfera euclídea es o bien, pseudoumbilical o bien, el supremo de la norma de la segunda forma fundamental está acotado superiormente por una constante positiva que depende de la función curvatura media constante.

El Capítulo 3 versa sobre hipersuperficies de curvatura media constante inmersas en un espacio forma y cuyos resultados principales se encuentran recogidos en el artículo [5]. Este capítulo consta de dos secciones. En la primera sección, motivados por los trabajos de Klotz y Osserman, Hoffman y Tribuzy mencionados anteriormente, realizamos una estimación del ínfimo de la curvatura de Gauss de superficies completas con curvatura media constante. Allí, usamos las técnicas de variable compleja gracias a la estructura conforme de la variedad 2-dimensional, y mostramos que dicha estimación es óptima, pues comprobamos que se satisface en una familia de onduloideas inmersa en el espacio euclídeo. En la segunda sección, usando un enfoque distinto al empleado en la primera sección, logramos extender dicho resultado a hipersuperficies estocásticamente completas (recordemos que éstas no son necesariamente completas) mediante la aplicación del principio del máximo débil de Omori-Yau a la norma al cuadrado de la segunda forma fundamental sin traza $|\Phi|^2$.

El Capítulo 4 está distribuido en tres secciones. De forma análoga al capítulo anterior, en la primera sección, encontramos una cota para la curvatura de Gauss, pero en este caso estimamos el supremo de la curvatura de Gauss sobre superficies completas de curvatura media constante, y de nuevo, logramos mostrar que dicha estimación es óptima en la familia de onduloideas. En la segunda sección, extendemos este resultado a hipersuperficies de curvatura media constante que verifican el principio del máximo de Omori-Yau y que tienen dos curvaturas principales distintas. Aquí, usaremos el principio clásico del máximo de Omori-Yau sobre la función $|\Phi|$. En la tercera sección, usando el teorema de la curvatura principal dado por Smyth y Xavier [49] presentamos una prueba alternativa de uno de los teoremas principales de la segunda sección (véase Teorema 4.2.2). Los resultados de este capítulo están recopilados en el trabajo [6].

Finalmente, en el Capítulo 5 presentamos un principio débil del máximo para el operador L . Comenzamos este capítulo presentando algunos preliminares necesarios para definir este operador, como la primera transformación de Newton. En la segunda sección, aplicamos dicho principio para estimar el supremo de la curvatura media de hipersuperficies de curvatura escalar constante inmersas en espacios forma. Para darle continuidad al formato que iniciamos en el Capítulo 3, incluimos una sección donde estudiamos el caso 2-dimensional usando la teoría de variable compleja. En la última sección, introducimos el concepto de L -parabolicidad y presentamos algunos criterios que nos permiten determinar cuando una variedad es L -parabólica, y bajo este concepto logramos mejorar la caracterización de la igualdad de los teoremas principales de la sección anterior. Los resultados de este último capítulo están contenidos en el artículo [7].

Capítulo 1

Preliminares

Sumario. El objetivo de este capítulo es introducir todos los conceptos básicos que aparecerán de un modo significativo a lo largo de esta memoria. En concreto, introducimos los espacios forma riemannianos y las hipersuperficies que se encuentran inmersas en dichos espacios, haciendo especial énfasis en las hipersuperficies totalmente umbilicales y las hipersuperficies isoparamétricas con dos curvaturas principales.

Abstract. *The aim of this chapter is to introduce the basic concepts that will appear lately along this work. In concrete we introduce the concept of Riemannian space forms and the hypersurfaces immersed in this spaces emphasizing in the totally umbilical hypersurfaces and the isoparametric hypersurfaces with two principal curvatures.*

1.1. Notación y conceptos básicos

El espacio ambiente en el que va a estar enmarcado nuestro trabajo son los espacios forma riemannianos. Para definirlos, primero permitan nos recordarles algunos conceptos básicos como el de tensor de curvatura de Riemann.

Definición 1.1.1. Sea (M, g) una variedad riemanniana. Definimos el tensor curvatura de Riemann de M como el *tensor curvatura* de su conexión de Levi-Civita ∇ , es decir, el tensor $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ de tipo $(1, 3)$ dado por

$$R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - [\nabla X, \nabla Y]Z,$$

donde $\mathcal{X}(M)$ denota el conjunto de los campos tangentes en M y $[,]$ el bracket de Lie.

En ocasiones el tensor curvatura de Riemann es bastante complicado de manejar, así que resulta útil introducir una nueva función evaluada en \mathbb{R} , más sencilla de tratar y que lo determina completamente.

Definición 1.1.2. Sea (M, g) una variedad riemanniana. Dado un punto $x \in M$ y un plano vectorial no degenerado $\Pi \subseteq T_x M$, definimos la *curvatura seccional* de Π como

$$K_{\text{sec}} = K(\Pi) = \frac{g(R_x(v, w)v, w)}{g_x(v, v)g_x(w, w) - g_x(v, w)^2}, \quad (1.1)$$

donde $\{v, w\}$ es una base de Π .

No es difícil ver que el valor de K_{sec} no depende de la base elegida, de manera que la curvatura seccional está bien definida para cada plano no degenerado. Se define así la función curvatura seccional K_{sec} de M , cuyo dominio es el conjunto formado por todos los planos vectoriales no degenerados de M .

Decimos que una variedad riemanniana tiene *curvatura constante* si su función curvatura seccional es constante, y aquellas variedades cuyo tensor curvatura de Riemann (o función curvatura seccional) es cero en todo punto se dice que es *llana*. En tal caso, el tensor curvatura R de la variedad (M, g) se puede expresar en términos de la curvatura constante C como

$$R(X, Y)Z = C(g(X, Z)Y - g(Y, Z)X)$$

donde X, Y y Z son campos en M .

Ahora, ya estamos listos para presentar la definición de un espacio forma riemanniano.

Definición 1.1.3. Un *espacio forma* riemanniano es una variedad riemanniana completa, simplemente conexa y de curvatura constante.

Por un resultado de Cartan, Killing y Hopf, tenemos que un espacio forma m -dimensional con curvatura constante c ($c = 0, 1, -1$), el cual denotamos por \mathbb{M}_c^m es isométrico al espacio euclídeo \mathbb{R}^m cuando $c = 0$, a la esfera euclídea

$$\mathbb{S}^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : |x|^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{m+1},$$

cuando $c = 1$, y al espacio hiperbólico \mathbb{H}^m cuando $c = -1$. En este último caso, será más apropiado para nosotros usar el modelo minkowskiano del espacio hiperbólico. Escribimos \mathbb{R}_1^{m+1} para denotar \mathbb{R}^{m+1} , con las coordenadas canónicas (x_0, x_1, \dots, x_m) , dotadas de la métrica lorentziana

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_1 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_m^2. \quad (1.2)$$

El espacio hiperbólico m -dimensional \mathbb{H}^m lo podemos visualizar como el hiperboloide

$$\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}_1^{m+1} : \langle x, x \rangle_1 = -1, x_0 > 0\} \subset \mathbb{R}_1^{m+1}$$

dotado con la métrica riemanniana inducida de \mathbb{R}_1^{m+1} . Con el fin de simplificar nuestra notación, cuando $c = \pm 1$ acordamos denotar por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, sin distinción, ambas métricas la euclidiana sobre \mathbb{R}^{m+1} y la lorentziana (1.2) sobre \mathbb{R}_1^{m+1} . También

acordamos denotar por \langle, \rangle a la correspondiente métrica riemanniana inducida sobre $\mathbb{M}_c^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$.

Note que si denotamos por \bar{R} el tensor curvatura de Riemann del espacio forma \mathbb{M}_c^m tenemos que

$$\bar{R}(X, Y)Z = c(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X) \quad (1.3)$$

donde X, Y y Z son campos en \mathbb{M}_c^m .

Decimos que una variedad diferenciable Σ de dimensión n es una *subvariedad* inmersa en el espacio forma \mathbb{M}_c^m cuando existe una inmersión de la variedad riemanniana Σ en \mathbb{M}_c^m .

A largo de esta memoria denotaremos por $\nabla^o, \bar{\nabla}$ y ∇ las conexiones de Levi-Civita sobre $\mathbb{R}^m, \mathbb{M}_c^m$ y Σ , respectivamente, y por $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{M}_c^m$ la inmersión.

Un hecho básico relativo a la conexión inducida sobre Σ es que si X, Y son campos tangentes en Σ la derivada covariante $\bar{\nabla}_X Y$ no es necesariamente tangente a Σ . Por lo tanto, es natural descomponerla en una componente tangente $(\bar{\nabla}_X Y)^\top = \nabla_X Y$ y una componente normal que determina una aplicación $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ -bilineal y simétrica llamada *la segunda forma fundamental* de la inmersión

$$\sigma : \mathcal{X}(\Sigma) \times \mathcal{X}(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{X}^\perp(\Sigma),$$

dada por $\sigma(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp$, donde $\mathcal{X}(\Sigma)$ denota el conjunto de los campos tangentes en Σ y $\mathcal{X}^\perp(\Sigma)$ denota el conjunto de los campos normales en Σ . Se obtiene así la llamada *fórmula de Gauss*, que se escribe como

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y), \quad (1.4)$$

para campos $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$. Por otra parte, si $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ y $\xi \in \mathcal{X}^\perp(\Sigma)$ denotamos por $A_\xi(X)$ la componente tangente de la derivada covariante $-\bar{\nabla}_X \xi$, esto es,

$$A_\xi(X) = -(\bar{\nabla}_X \xi)^\top.$$

Entonces para $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$ se verifica

$$\langle A_\xi(X), Y \rangle = \langle \sigma(X, Y), \xi \rangle.$$

La aplicación $A_\xi : \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}(\Sigma)$ recibe el nombre de *endomorfismo de Weingarten asociado a ξ* . En cuanto a la componente normal de $\bar{\nabla}_X \xi$, la aplicación $\nabla^\perp : \mathcal{X}(\Sigma) \times \mathcal{X}^\perp(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}^\perp(\Sigma)$ dada por

$$\nabla_X^\perp \xi = (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp$$

es conocida como la conexión normal de la inmersión. Así que obtenemos la llamada *fórmula de Weingarten* que viene dada por

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi.$$

Un campo normal ξ es *paralelo* si $\nabla_X^\perp \xi = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$.

Asociado a la segunda forma fundamental se encuentra el concepto de campo de vectores *curvatura media* \mathbf{H} de la subvariedad, que está dado por

$$\mathbf{H} = \frac{1}{n} \text{tr}(\sigma) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma(E_i, E_i)$$

donde $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una base local ortonormal sobre Σ . Decimos que una subvariedad es *minimal* si su campo de vectores curvatura media \mathbf{H} es nulo en todo punto de Σ .

Por otra parte, un punto x de una subvariedad Σ es *umbílico* si existe un vector normal $v \in (T_x \Sigma)^\perp$ tal que

$$\sigma_x(y, z) = \langle y, z \rangle v,$$

para todo $y, z \in T_x \Sigma$. Esto es equivalente a que para todo $w \in (T_x \Sigma)^\perp$ el endomorfismo A_w sea proporcional al operador identidad, $A_w = \lambda_w I$ con $\lambda_w \in \mathbb{R}$. También diremos que una subvariedad es *totalmente umbilical* si todos sus puntos son umbílicos.

Definimos la aplicación bilineal $\tilde{\Phi} : \mathcal{X}(\Sigma) \times \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}^\perp(\Sigma)$ dada por

$$\tilde{\Phi}(X, Y) = \sigma(X, Y) - \langle X, Y \rangle \mathbf{H}.$$

Si $\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ es una base local ortonormal normal a Σ podemos expresar $\tilde{\Phi}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(X, Y) &= \sum_{\alpha=1}^p \langle \tilde{\Phi}(X, Y), \xi_\alpha \rangle \xi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^p (\langle \sigma(X, Y), \xi_\alpha \rangle - \langle X, Y \rangle \langle \mathbf{H}, \xi_\alpha \rangle) \xi_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^p (\langle A_\alpha X, Y \rangle - \langle X, Y \rangle \langle \mathbf{H}, \xi_\alpha \rangle) \xi_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^p \langle (A_\alpha - \langle \mathbf{H}, \xi_\alpha \rangle I) X, Y \rangle \xi_\alpha, \end{aligned}$$

donde $A_\alpha = A_{\xi_\alpha}$.

Para cada α existe una aplicación lineal $\phi_\alpha : \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}(\Sigma)$ dada por $\phi_\alpha = A_\alpha - \langle \mathbf{H}, \xi_\alpha \rangle I$, donde I denota el operador identidad sobre $\mathcal{X}(\Sigma)$. Observe que $\text{tr}(\phi_\alpha) = 0$ y $|\phi_\alpha|^2 = \text{tr}(\phi_\alpha^2) = |A_\alpha|^2 - n \langle \mathbf{H}, \xi_\alpha \rangle^2$ donde $|A_\alpha| = \text{tr}(A_\alpha)$.

Dado que

$$\tilde{\Phi}(X, Y) = \sum_{\alpha=1}^p \langle \phi_\alpha X, Y \rangle \xi_\alpha \tag{1.5}$$

es fácil comprobar que $\text{tr}(\tilde{\Phi}) = 0$, y si denotamos $|A|^2 = \text{tr}(A^2)$, obtenemos que

$$|\tilde{\Phi}|^2 = \sum_{\alpha=1}^p |\phi_\alpha|^2 = |A|^2 - n|\mathbf{H}|^2 \geq 0 \quad (1.6)$$

con igualdad si y sólo si Σ es totalmente umbilical.

Si denotamos el tensor de curvatura de Riemann de Σ por R , las fórmulas de Gauss y de Weingarten implican la siguiente relación fundamental entre la curvaturas de la subvariedad Σ y del espacio ambiente \mathbb{M}_c^{n+p} , llamada la ecuación de Gauss

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle \sigma(X, Z), \sigma(Y, W) \rangle - \langle \sigma(X, W), \sigma(Y, Z) \rangle.$$

Por la ecuación (1.3) tenemos que la *ecuación de Gauss* de una subvariedad inmersa en un espacio forma está dada por

$$R(X, Y)Z = c(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X) + A_{\sigma(X, Z)}Y - A_{\sigma(Y, Z)}X. \quad (1.7)$$

Por otra parte, de la ecuación (1.3) sabemos que la componente normal de $\bar{R}(X, Y)Z$ es cero así que la *ecuación de Codazzi para una subvariedad inmersa en un espacio forma* está dada por

$$0 = \nabla \sigma(X, Z, Y) - \nabla \sigma(Y, Z, X) \quad (1.8)$$

donde $\nabla \sigma$ es la derivada covariante normal de σ (o, en general, derivada covariante de van der Waerden-Bortolotti) y viene dada por

$$\nabla \sigma(X, Y, Z) = (\nabla_Z \sigma)(X, Y) = \nabla_Z^\perp \sigma(X, Y) - \sigma(\nabla_Z X, Y) - \sigma(X, \nabla_Z Y).$$

Ahora, definimos el tensor curvatura normal R^\perp de Σ como el tensor curvatura asociado a la conexión normal ∇^\perp , es decir, la aplicación $C^1(\Sigma)$ -multilineal $R^\perp : \mathcal{X}(\Sigma) \times \mathcal{X}(\Sigma) \times \mathcal{X}^\perp(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}^\perp(\Sigma)$ dada por

$$R^\perp(X, Y)\eta = \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta - [\nabla_X^\perp, \nabla_Y^\perp] \eta. \quad (1.9)$$

Entonces, la componente normal de $\bar{R}(X, Y)\eta$ se escribe como

$$(\bar{R}(X, Y)\eta)^\perp = R^\perp(X, Y)\eta - \sigma(A_\eta X, Y) + \sigma(X, A_\eta Y)$$

y por la ecuación (1.3) tenemos que

$$R^\perp(X, Y)\eta = \sigma(A_\eta X, Y) - \sigma(X, A_\eta Y). \quad (1.10)$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\Sigma)$ y $\eta \in \mathcal{X}^\perp(\Sigma)$. Entonces la *ecuación de Ricci* de una subvariedad inmersa en un espacio forma está dada por

$$\langle R^\perp(X, Y)\eta, \xi \rangle = \langle [A_\eta, A_\xi]X, Y \rangle \quad (1.11)$$

donde $[A_\eta, A_\xi] = A_\eta \circ A_\xi - A_\xi \circ A_\eta$.

1.2. Fórmulas básicas para hipersuperficies

Un caso muy interesante de subvariedades es el de *hipersuperficies*, es decir, subvariedades de codimensión uno. En este caso siempre podemos considerar, al menos localmente, un campo vectorial diferenciable N normal y unitario. A denota el endomorfismo de Weingarten asociado al normal N (incluso aunque Σ no admita un normal unitario global, A está globalmente definido salvo signo).

Si dicha hipersuperficie está inmersa en un espacio forma \mathbb{M}_c^m , observe que cuando $c \neq 0$ dadas las inclusiones $\mathbb{S}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ y $\mathbb{H}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}_1^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ tenemos que ψ también es normal a Σ con norma $\langle \psi, \psi \rangle = c$. Así que, la componente normal de la derivada covariante de los campos X e Y tangentes a Σ , se puede escribir como combinación lineal de dichos normales de la siguiente forma:

$$(\overline{\nabla}_X Y)^\perp = \alpha N + \beta \psi.$$

Dado que N y ψ son ortogonales entre sí, obtenemos

$$(\overline{\nabla}_X Y)^\perp = \langle \sigma(X, Y), N \rangle N + c \langle \overline{\nabla}_X Y, \psi \rangle \psi$$

y como $\langle \overline{\nabla}_X Y, \psi \rangle = -\langle Y, \overline{\nabla}_X \psi \rangle = -\langle Y, X \rangle$ tenemos que

$$(\overline{\nabla}_X Y)^\perp = \langle AX, Y \rangle N - c \langle X, Y \rangle \psi.$$

De este modo, la fórmula de Gauss para hipersuperficies inmersas en un espacio forma queda de la siguiente forma

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle AX, Y \rangle N - c \langle X, Y \rangle \psi \quad (1.12)$$

para campos $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$.

Por otro lado, dado que N es unitario obtenemos $\nabla_X^\perp N = 0$ y la fórmula de Weingarten para hipersuperficies viene dada por

$$AX = -\overline{\nabla}_X N = -\nabla_X N. \quad (1.13)$$

En hipersuperficies $\mathbf{H} = HN$ donde H es la función curvatura media. En este caso, la función curvatura media contiene la misma información que el vector curvatura media con la ventaja de que es más fácil de manejar. Así, una hipersuperficie minimal es aquella que tiene $H = 0$ en todo punto.

Además, observemos que $\phi_1 = A - HI$, el cual en el caso de hipersuperficies denotaremos por Φ y que satisface

$$|\Phi|^2 = |A|^2 - n \langle \mathbf{H}, N \rangle^2 = |A|^2 - nH^2. \quad (1.14)$$

La relación entre el tensor de curvatura de Riemann R de la hipersuperficie Σ y la curvatura de \mathbb{M}_c^{n+1} que está dada por la *ecuación de Gauss*, tiene la siguiente expresión

$$R(X, Y)Z = c(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X) + \langle AX, Z \rangle AY - \langle AY, Z \rangle AX \quad (1.15)$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\Sigma)$. En particular, la curvatura de Ricci de una hipersuperficie, que es la traza del tensor de curvatura de Riemann viene dada por

$$\text{Ric}(X, X) = (n-1)c|X|^2 + nH\langle AX, X \rangle - |AX|^2 \quad (1.16)$$

y a su vez, la curvatura escalar de Σ que es la traza del tensor de Ricci, está dada por

$$S = n(n-1)c + n^2H^2 - |A|^2. \quad (1.17)$$

Por otra parte, la ecuación de Codazzi para hipersuperficies inmersas en un espacio forma viene dada por

$$\nabla A(X, Y) = \nabla A(Y, X). \quad (1.18)$$

donde $\nabla A : \mathcal{X}(\Sigma) \times \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}(\Sigma)$ denota la diferencial covariante de A que está dada por

$$\nabla A(X, Y) = (\nabla_Y A)X = \nabla_Y AX - A(\nabla_Y X).$$

También, podemos reescribir el tensor curvatura de Riemann R en términos de Φ como sigue

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z = & (c + H^2)(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X) + \langle \Phi X, Z \rangle \Phi Y - \langle \Phi Y, Z \rangle \Phi X \\ & + H(\langle \Phi X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle \Phi X + \langle X, Z \rangle \Phi Y - \langle \Phi Y, Z \rangle X) \end{aligned} \quad (1.19)$$

para $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\Sigma)$. En particular, la curvatura de Ricci está dada por

$$\text{Ric}(X, Y) = (n-1)(c + H^2)\langle X, Y \rangle + (n-2)H\langle \Phi X, Y \rangle - \langle \Phi X, \Phi Y \rangle, \quad (1.20)$$

para $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$.

De (1.14) y (1.17) concluimos que la curvatura escalar se puede escribir en términos de Φ de la siguiente forma

$$S = n(n-1)(c + H^2) - |\Phi|^2. \quad (1.21)$$

Aquí, con R , indicamos la curvatura escalar *normalizada*, esto es $R = 1/n(n-1)S$. De (1.17) obtenemos las siguientes identidades

$$nH^2 = \frac{1}{n}|A|^2 + (n-1)(R - c) \quad (1.22)$$

y

$$|\Phi|^2 = \frac{n-1}{n}|A|^2 - (n-1)(R - c) = n(n-1)[H^2 - (R - c)]. \quad (1.23)$$

1.3. Hipersuperficies totalmente umbilicales

En esta sección realizamos un estudio detallado de las hipersuperficies totalmente umbilicales inmersas en los espacios forma. En particular, damos algunos ejemplos y una clasificación de estas superficies según el valor de su curvatura media constante.

Una característica principal de las hipersuperficies totalmente umbilicales es la que enunciamos a continuación.

Proposición 1.3.1. *Sea $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{M}_c^{n+1}$ una hipersuperficie totalmente umbilical inmersa en el espacio forma \mathbb{M}_c^{n+1} con $n \geq 2$. Entonces Σ tiene curvatura media H constante.*

Demostración. Si Σ es una hipersuperficie totalmente umbilical existe una función diferenciable $\lambda : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ tal que el operador de forma en Σ se puede escribir como $A = \lambda I$. En consecuencia, la traza del operador A es igual a $n\lambda$. Por otra parte, de la definición de curvatura media H , tenemos que la traza de A es nH . Si comparamos ambos resultados llegamos a la igualdad entre la función λ y la curvatura media H , por tanto el operador de forma se puede escribir como $A = HI$.

Teniendo en cuenta la conclusión anterior y la ecuación de Codazzi (1.18), esto es, $(\nabla_Y A)X = (\nabla_X A)Y$ tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla_Y (AX) - A(\nabla_Y X) &= \nabla_X (AY) - A(\nabla_X Y) \\ \nabla_Y (HX) - H(\nabla_Y X) &= \nabla_X (HY) - H(\nabla_X Y) \\ Y(H)X + H(\nabla_Y X) - H(\nabla_Y X) &= X(H)Y + H(\nabla_X Y) - H(\nabla_X Y) \\ \langle \nabla H, Y \rangle X &= \langle \nabla H, X \rangle Y. \end{aligned}$$

Así pues, en un punto x de Σ se tiene que

$$\langle \nabla H(x), v \rangle w - \langle \nabla H(x), w \rangle v = 0,$$

para cualquier par de vectores v y w en el espacio tangente $T_x \Sigma$. Si estos vectores son linealmente independientes los coeficientes de la combinación lineal son cero, es decir, $\langle \nabla H(x), v \rangle = 0$ para un vector cualquiera $v \in T_x \Sigma$. Esto implica $\nabla H = 0$ en todo punto, y como Σ es conexa, concluimos que la función H es constante. \square

A continuación veremos algunos ejemplos de hipersuperficies totalmente umbilicales inmersas en el espacio forma riemanniano \mathbb{M}_c^{n+1} . Más adelante probaremos que estos son los únicos.

Ejemplo 1.3.2. Hipersuperficies totalmente umbilicales en el espacio euclídeo.

■ *Hiperplanos.*

Dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ y un vector constante $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$, el hiperplano que pasa por x_0 y es normal al vector \mathbf{a} está dado por

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x - x_0, \mathbf{a} \rangle = 0\}.$$

Consideremos la función diferenciable $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \langle x - x_0, \mathbf{a} \rangle.$$

Note que $\Pi = f^{-1}(0)$ y $\overline{\nabla}f(x) = \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Por lo tanto, el hiperplano Π es una hipersuperficie de nivel en \mathbb{R}^{n+1} con campo normal $N = \mathbf{a}$.

Si queremos conocer la expresión del operador de forma sólo tenemos que derivar el campo normal de la siguiente forma

$$AX = -\overline{\nabla}_X N = -\overline{\nabla}_X \mathbf{a} = 0.$$

Esto implica que los hiperplanos son hipersuperficies totalmente geodésicas y por ende totalmente umbilicales.

■ *Esferas.*

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La esfera de centro x_0 y radio r es el conjunto dado por

$$\mathbb{S}^n(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x - x_0, x - x_0 \rangle = r^2\}.$$

Note que la esfera en \mathbb{R}^{n+1} es una hipersuperficie de nivel ya que se puede ver como $\mathbb{S}^n(x_0, r) = f^{-1}(r^2)$ donde $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable dada por

$$f(x) = \langle x - x_0, x - x_0 \rangle$$

que satisface

$$\langle \overline{\nabla}f, X \rangle = X(f) = X(\langle x - x_0, x - x_0 \rangle) = 2 \langle \overline{\nabla}_X x, x - x_0 \rangle = \langle X, 2(x - x_0) \rangle$$

para cualquier $X \in \mathbb{R}^{n+1}$ y por ende $\overline{\nabla}f = 2(x - x_0)$ y $|\overline{\nabla}f|^2 = 4r^2 \neq 0$.

Así pues, el normal a esta hipersuperficie de nivel está dado por

$$N(x) = \frac{\overline{\nabla}f(x)}{|\overline{\nabla}f(x)|} = \frac{x - x_0}{r}$$

y su operador de forma es

$$AX = -\overline{\nabla}_X N = -\frac{1}{r} \overline{\nabla}_X x = -\frac{1}{r} X.$$

Por lo tanto, $\mathbb{S}^n(x_0, r)$ es una hipersuperficie totalmente umbilical.

Ejemplo 1.3.3. Hipersuperficies totalmente umbilicales en los espacios esférico e hiperbólico.

Para los siguientes ejemplos denotaremos por \mathbb{R}_q^{n+2} el espacio pseudo-euclidiano con índice q donde vive \mathbb{M}_c^{n+1} cuando $c = \pm 1$, de tal forma que $q = 0$ si $c = 1$ y $q = 1$ si $c = -1$. Entonces su métrica está dada por

$$\langle , \rangle = cdx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2.$$

Las hipersuperficies totalmente umbilicales tanto en el espacio esférico como en el espacio hiperbólico se obtienen como la intersección de \mathbb{M}_c^{n+1} con hiperplanos afines de \mathbb{R}_q^{n+2} . Así que, para un vector constante no nulo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_q^{n+2}$ consideremos la función diferenciable $f_{\mathbf{a}} : \mathbb{M}_c^{n+1} \subset \mathbb{R}_q^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_{\mathbf{a}}(x) = \langle x, \mathbf{a} \rangle$$

y calculemos su gradiente que nos será de gran utilidad a la hora de estudiar las hipersuperficies totalmente umbilicales en \mathbb{M}_c^{n+1} . Para ello, sea X un campo arbitrario de \mathbb{M}_c^{n+1} y veamos que

$$\langle \bar{\nabla} f_{\mathbf{a}}, X \rangle = X(f_{\mathbf{a}}) = X(\langle x, \mathbf{a} \rangle) = \langle \nabla_X^{\circ} x, \mathbf{a} \rangle + \langle x, \nabla_X^{\circ} \mathbf{a} \rangle = \langle X, \mathbf{a} \rangle = \langle X, \mathbf{a}^* \rangle,$$

donde \mathbf{a}^* denota la componente tangente de \mathbf{a} a lo largo de \mathbb{M}_c^{n+1} . Entonces $\bar{\nabla} f_{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^*$. Dado que $\mathbf{a} = \mathbf{a}^* + cf_{\mathbf{a}}(x)x$ tenemos que el gradiente de $f_{\mathbf{a}}$ está dado por

$$\bar{\nabla} f_{\mathbf{a}}(x) = \mathbf{a} - cf_{\mathbf{a}}(x)x. \quad (1.24)$$

Ahora ya estamos listos para estudiar en cada uno de los casos algunas hipersuperficies totalmente umbilicales.

i) Caso esférico ($c = 1$).

Las *esferas redondas* son hipersuperficies totalmente umbilicales en \mathbb{S}^{n+1} . Para visualizar esto, tomamos el vector constante $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+2}$ unitario. Dado un $b \in \mathbb{R}$ fijo, consideramos

$$\Sigma_b = f_{\mathbf{a}}^{-1}(b) = \{x \in \mathbb{S}^{n+1} : \langle x, \mathbf{a} \rangle = b\}.$$

De (1.24) sabemos que el gradiente (en la esfera \mathbb{S}^{n+1}) de $f_{\mathbf{a}}$ es $\bar{\nabla} f_{\mathbf{a}}(x) = \mathbf{a} - f_{\mathbf{a}}(x)x$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n+1}$, así que

$$\langle \bar{\nabla} f_{\mathbf{a}}(x), \bar{\nabla} f_{\mathbf{a}}(x) \rangle = 1 - b^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < b < 1$$

para todo $x \in \Sigma_b$. Por lo tanto, Σ_b es una hipersuperficie de nivel en \mathbb{S}^{n+1} siempre que $b \in (-1, 1)$. Por consiguiente, su aplicación de Gauss está dada por

$$N(x) = \frac{\bar{\nabla} f_{\mathbf{a}}(x)}{|\bar{\nabla} f_{\mathbf{a}}(x)|} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}(\mathbf{a} - bx)$$

y su operador de forma está dado por

$$AX = -\nabla_X^{\circ} N = \frac{b}{\sqrt{1-b^2}}X.$$

Luego, Σ_b es una hipersuperficie totalmente umbilical de \mathbb{S}^{n+1} . Además, aplicando la ecuación (1.1) vemos que Σ_b tiene curvatura constante positiva dada por

$$K_{\text{sec}} = \frac{1}{1-b^2} > 0.$$

Así pues, Σ_b es isométrica a un espacio esférico n -dimensional de radio $\sqrt{1-b^2}$. Por ejemplo si tomamos $\mathbf{a} = (0, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+2}$ los puntos de Σ_b deben satisfacer el siguiente sistema

$$\begin{cases} x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1, \\ x_1 = b \end{cases}$$

y obtenemos que

$$x_0^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 - b^2 > 0$$

que es la ecuación de $\mathbb{S}^n(\sqrt{1-b^2}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

ii) Caso hipérbolico ($c = -1$).

En este caso hay tres tipos diferentes de hipersuperficies, dependiendo del carácter causal del hiperplano. Así que, consideremos $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ un vector constante no nulo tal que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \in \{1, 0, -1\}$. Para un $b \in \mathbb{R}$ dado, consideremos

$$\Sigma_b = f_{\mathbf{a}}^{-1}(b) = \{x \in \mathbb{H}^{n+1} : \langle x, \mathbf{a} \rangle = b\}$$

y determinemos para qué valores de b es Σ_b una hipersuperficie de nivel en \mathbb{H}^{n+1} . De (1.24) sabemos que $\bar{\nabla} f_{\mathbf{a}}(x) = \mathbf{a} + f_{\mathbf{a}}(x)x$ y por ende

$$\langle \bar{\nabla} f_{\mathbf{a}}(x), \bar{\nabla} f_{\mathbf{a}}(x) \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + 2f_{\mathbf{a}}^2(x) - f_{\mathbf{a}}^2(x) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + b^2.$$

Por lo tanto, Σ_b es una hipersuperficie de nivel en \mathbb{H}^{n+1} si $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + b^2 \neq 0$.

Ahora veamos que Σ_b es totalmente umbilical. La aplicación de Gauss del embebimiento $\Sigma_b \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ es

$$N(x) = \frac{\bar{\nabla} f_{\mathbf{a}}(x)}{|\bar{\nabla} f_{\mathbf{a}}(x)|} = \frac{1}{\sqrt{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + b^2|}}(\mathbf{a} + bx)$$

y el operador de forma asociado es

$$AX = -\nabla_X^o N = -\frac{1}{\sqrt{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + b^2|}} \nabla_X^o(\mathbf{a} + bx) = -\frac{b}{\sqrt{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + b^2|}} X$$

de donde se deduce que Σ_b es una hipersuperficie totalmente umbilical de \mathbb{H}^{n+1} . Más aún, de (1.1) tenemos que

$$K_{\text{sec}} = \frac{-\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + b^2}.$$

Hagamos un pequeño estudio de los rangos de b .

- Si $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 1$ entonces $b \in \mathbb{R}$, $H^2 < 1$ y por la ecuación (1.1) tenemos que Σ_b tiene curvatura constante

$$K_{\text{sec}} = \frac{-1}{1 + b^2},$$

por lo que la hipersuperficie Σ_b es isométrica a un espacio hiperbólico n -dimensional de radio $\sqrt{1+b^2}$. Para visualizar esto un poco mejor, tomemos $\mathbf{a} = (0, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ de manera que los puntos de Σ_b deben satisfacer el siguiente sistema

$$\begin{cases} x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 & = -1, \\ x_1 & = b \end{cases}$$

y obtenemos que

$$-x_0^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = -(1+b^2) < 0 \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

y ésta es precisamente la ecuación de $\mathbb{H}^n(\sqrt{1+b^2}) \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$.

- Si $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$ entonces b puede tomar cualquier valor real no nulo, $H^2 = 1$ y Σ_b tiene curvatura constante cero, esto es $K = 0$. Así que concluimos que Σ_b es isométrica al espacio euclídeo n -dimensional. Ahora, como en el caso anterior, tomemos por ejemplo $\mathbf{a} = (1, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ de manera que todo punto $x = (x_0, \dots, x_{n+1}) \in \Sigma_b$ debe satisfacer

$$\begin{cases} -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 & = -1, \\ -x_0 + x_1 & = b. \end{cases}$$

Dado que $0 \leq x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = -(1+x_1^2-x_0^2)$ tenemos $1+x_1^2-x_0^2 \leq 0$, esto es, $b(x_1+x_0) = (x_1-x_0)(x_1+x_0) = x_1^2-x_0^2 \leq -1$. Entonces

$$x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = -(1+b(x_1+x_0)) \geq 0.$$

Es decir, $x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = d^2$ donde $d^2 = -1 - bx_1 - bx_0$. Por otro lado, como $b = x_1 - x_0$ multiplicando por b tenemos $b^2 = bx_1 - bx_0$. De aquí, que

$$d^2 - b^2 = -2bx_1 - 1 \Rightarrow x_1 = -\frac{1+d^2-b^2}{2b}.$$

Por tanto,

$$x_0 = x_1 - b = -\frac{1+d^2+b^2}{2b}.$$

En consecuencia, si definimos la función $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma_b$ dada por

$$g(x_1, \dots, x_n) = \left(-\frac{1+d^2+b^2}{2b}, -\frac{1+d^2-b^2}{2b}, x_1, \dots, x_n \right)$$

donde $x_1^2 + \dots + x_n^2 = d^2$, dado que g es una biyección podemos identificar $\Sigma_b \cong \mathbb{R}^n$.

- Si $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = -1$ entonces $b \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $H^2 > 1$ y Σ_b tiene curvatura constante

$$K_{\text{sec}} = \frac{1}{b^2 - 1},$$

lo cual nos permite concluir que Σ_b es isométrica a un espacio esférico n -dimensional de radio $\sqrt{b^2 - 1}$. En particular, si tomamos $\mathbf{a} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ los puntos de Σ_b verifican el sistema

$$\begin{cases} -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 &= -1, \\ x_0 &= -b, \end{cases}$$

y por tanto $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = b^2 - 1 > 0$, que es la ecuación de la esfera $\mathbb{S}^n(\sqrt{b^2 - 1}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema 1.3.4. *Sea $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{M}_c^{n+1}$ una hipersuperficie totalmente umbilical inmersa en el espacio forma \mathbb{M}_c^{n+1} con $n \geq 2$. Entonces:*

i) Si $c = 0$ y

a) $H = 0$ entonces $\psi(\Sigma)$ es un abierto de \mathbb{R}^n .

b) $H \neq 0$ entonces $\psi(\Sigma)$ es un abierto de $\mathbb{S}^n(\mathbf{a}/H, 1/|H|)$.

ii) Si $c = 1$ existen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+2}$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 1$, y $b \in (-1, 1)$ tales que $\psi(\Sigma)$ es un abierto de $\mathbb{S}^n(\sqrt{1 - b^2})$.

iii) Si $c = -1$ y

a) $H^2 > 1$ existen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_1^{n+2}$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 1$, y $b \in \mathbb{R}$ tales que $\psi(\Sigma)$ es un abierto de $\mathbb{H}^n(\sqrt{1 + b^2})$.

b) $H^2 = 1$ existen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_1^{n+2}$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$, y $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tales que $\psi(\Sigma)$ es un abierto de \mathbb{R}^n .

c) $0 < H^2 < 1$ existen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_1^{n+2}$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = -1$, y $b \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ tales que $\psi(\Sigma)$ es un abierto de $\mathbb{S}^n(\sqrt{1 - b^2})$.

Demostración. Probemos el apartado (i). Dado que Σ es una hipersuperficie totalmente umbilical, por la Proposición 1.3.1 sabemos que $A = HI$ con H constante. Por tanto, si $H = 0$ entonces $A = 0$. En ese caso la diferencial de la aplicación de Gauss N también es cero y en consecuencia N es constante. Supongamos que dicho vector constante es $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$, es decir, $N(x) = \mathbf{a}$ para todo punto x de Σ . A continuación consideramos la función $f : \Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \langle \psi(x), \mathbf{a} \rangle$ y observemos que para todo $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f) = X(\langle \psi, \mathbf{a} \rangle) = \langle \overline{\nabla}_X \psi, \mathbf{a} \rangle + \langle \psi, \overline{\nabla}_X \mathbf{a} \rangle = \langle X, \mathbf{a} \rangle = \langle X, \mathbf{a}^\top \rangle.$$

De aquí obtenemos que $\nabla f = \mathbf{a}^\top$, donde \mathbf{a}^\top es la componente tangente sobre Σ , pero como \mathbf{a} es el campo normal a Σ tenemos que $\nabla f = 0$, y por la conexión de Σ concluimos que $f = \text{constante} = b$, así que, para todo punto de Σ se cumple que $\langle \psi(x), \mathbf{a} \rangle = b$. Esto es, $\psi(\Sigma)$ está contenida en el conjunto $\Pi_b = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, \mathbf{a} \rangle = b\}$ que es precisamente un hiperplano en \mathbb{R}^{n+1} con normal \mathbf{a} .

Por otro lado, si $H \neq 0$ de la fórmula de Weingarten obtenemos que $-\bar{\nabla}_X N = HX$ y como $X = \bar{\nabla}_X \psi$ tenemos que

$$\bar{\nabla}_X(N + H\psi) = 0. \quad (1.25)$$

Llamemos $g : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ a la función dada por $g(x) = N(x) + H\psi(x)$. De la ecuación (1.25) sabemos que la diferencial de g sobre Σ es cero; por tanto existe un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $N(x) + H\psi(x) = \mathbf{a}$. Dado que $H \neq 0$ tenemos $\psi(x) - \mathbf{a}/H = -(1/H)N(x)$. Luego,

$$\left\langle \psi(x) - \frac{\mathbf{a}}{H}, \psi(x) - \frac{\mathbf{a}}{H} \right\rangle = \frac{1}{H^2} \langle N(x), N(x) \rangle = \frac{1}{H^2}.$$

Así pues, $\psi(\Sigma)$ está contenida en $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x - \mathbf{a}/H, x - \mathbf{a}/H \rangle = 1/H^2\}$ que es precisamente $\mathbb{S}^{n+1}(\mathbf{a}/H, 1/|H|)$, la esfera en \mathbb{R}^{n+1} de centro \mathbf{a}/H y radio $1/|H|$.

Ahora probemos los apartados (ii) y (iii). Dado que Σ es totalmente umbilical sabemos que $A = HI$ con H constante. Entonces para todo campo diferenciable X sobre Σ tenemos que

$$\nabla_X^o N = -AX = -HX = -H\nabla_X^o \psi = -\nabla_X^o(H\psi).$$

Esto implica que $\nabla_X^o(N + H\psi) = 0$ para todo campo $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ y de aquí concluimos que $N + H\psi$ es constante e igual a un cierto vector $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}_q^{n+2}$ con $\langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}} \rangle = 1 + cH^2$. Nótese que si $c = 1$ entonces $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 1 + H^2$ y si $c = -1$ se tiene que $\langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}} \rangle = 1 - H^2$ y el vector \mathbf{a} será espacial ($\langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}} \rangle > 0$) si $0 \leq H^2 < 1$, será luminoso (esto es, $\langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}} \rangle = 0$) si $H^2 = 1$ y por último será temporal (es decir, $\langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}} \rangle < 0$) si $H^2 > 1$.

Consideremos la función diferenciable $f(x) = \langle \psi(x), \mathbf{a} \rangle$ para todo x de Σ donde $\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}$ si $\langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}} \rangle = 0$ y $\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}/|\tilde{\mathbf{a}}|$ si $\langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}} \rangle \neq 0$, de modo que el carácter causal de \mathbf{a} es el mismo de $\tilde{\mathbf{a}}$ y está normalizado siempre que no sea luminoso. Entonces para todo campo X sobre Σ se tiene que

$$X(f) = X(\langle \psi, \mathbf{a} \rangle) = \langle \nabla_X^o \psi, \mathbf{a} \rangle + \langle \psi, \nabla_X^o \mathbf{a} \rangle = \langle X, \mathbf{a} \rangle = 0$$

de donde se deduce $\nabla f = 0$ y por tanto la función $f = \text{constante} = b$. Luego, $\psi(\Sigma)$ está contenida en el conjunto $\{x \in \mathbb{R}_q^{n+2} : \langle x, \mathbf{a} \rangle = b\}$. Por ende,

- Si $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 1$, es decir, $0 \leq H^2 < 1$. Entonces

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{1 - H^2}}(N + H\psi)$$

de manera que

$$b = \langle \psi, \mathbf{a} \rangle = \frac{-H}{\sqrt{1 - H^2}}.$$

En consecuencia, y puesto que $H \in (-1, 1)$, se sigue que el rango de b es \mathbb{R} .

- Si $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$, es decir $H^2 = 1$. Entonces

$$b = \langle \psi, \mathbf{a} \rangle = \langle \psi, N + H\psi \rangle = -H,$$

de modo que $b = -1$ o $b = 1$. A diferencia de lo que ocurría en el caso anterior y debido a la imposibilidad de normalizar el vector \mathbf{a} , para cualquier vector \mathbf{a}' colineal con \mathbf{a} tenemos que $\langle \psi, \mathbf{a}' \rangle$ es constante y distinto de cero. Por esta razón podemos decir que b puede ser cualquier número real no cero.

- Si $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = -1$, es decir, $H^2 > 1$. En este caso

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{H^2 - 1}}(N + H\psi),$$

y

$$b = \langle \psi, \mathbf{a} \rangle = \frac{1}{\sqrt{H^2 - 1}} \langle \psi, N + H\psi \rangle = \frac{-H}{\sqrt{H^2 - 1}}.$$

Como $H \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ obtenemos que $b^2 = H^2/(H^2 - 1) > 1$ y en consecuencia el rango de b es $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

□

1.4. Hipersuperficies isoparamétricas con dos curvaturas principales

Se dice que una hipersuperficie es *isoparamétrica* si sus curvaturas principales son constantes, es decir, no dependen del punto en la hipersuperficie donde se determinan.

Ahora, veamos algunos ejemplos estándar de hipersuperficies isoparamétricas inmersas en los espacios forma \mathbb{M}_c^{n+1} con dos curvaturas principales distintas.

En el espacio euclídeo ($c = 0$), consideremos el producto estándar embebido $\Sigma = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{S}^k(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, para un radio dado $r > 0$ y un entero $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Nótese que este producto se puede ver como una hipersuperficie de nivel $\Sigma = f^{-1}(r^2)$, donde $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función dada por

$$f(x) = \sum_{i=n-k+1}^{n+1} x_i^2.$$

No es difícil ver que el campo normal N dado por

$$N = \frac{\overline{\nabla} f(x)}{|\overline{\nabla} f(x)|} = \frac{1}{r}(0, \dots, 0, x_{n-k+1}, \dots, x_{n+1}),$$

define la aplicación de Gauss de Σ y que el operador A (con respecto a N) está dado por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(1/r)I_k \end{bmatrix}.$$

Esto es, Σ tiene dos curvaturas principales constantes $\kappa_1 = 0$ y $\kappa_2 = -1/r$ con multiplicidades $n - k$ y k respectivamente. Por tanto su curvatura media constante H está dada por $nH = -k/r$. Para estos ejemplos $|A|^2 = k/r^2$. De manera que

$$|\Phi|^2 = |A|^2 - nH^2 = \frac{k(n-k)}{nr^2}$$

y dado que H y $|\Phi|$ son funciones de r , podemos expresar $|\Phi|^2$ en términos de H , como sigue

$$|\Phi|^2 = \frac{n(n-k)}{k} H^2. \quad (1.26)$$

Por otra parte, de (1.17) sabemos que $n(n-1)R = n^2H^2 - |A|^2$, por ende

$$R = \frac{k(k-1)}{n(n-1)r^2} \geq 0.$$

Si $R > 0$ (o lo que es lo mismo $k \neq 1$) podemos encontrar una expresión de $|\Phi|^2$ en términos de R

$$|\Phi|^2 = \frac{(n-k)(n-1)R}{k-1}. \quad (1.27)$$

En el caso esférico ($c = 1$) consideramos las inmersiones estándar $\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n-k+1}$ y $\mathbb{S}^k(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, para un radio dado $0 < r < 1$, tomamos la inmersión producto $\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^k(r) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ y la visualizamos como la hipersuperficie de nivel $\Sigma = f^{-1}(r^2)$, donde $f : \mathbb{S}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función dada por

$$f(x) = \sum_{i=n-k+1}^{n+2} x_i^2.$$

De la fórmula de Gauss sabemos que

$$\nabla^o f(x) = \bar{\nabla} f(x) + \langle \nabla^o f(x), x \rangle x.$$

Note que $|\bar{\nabla} f(x)|^2 = |\nabla^o f(x)|^2 - \langle \nabla^o f(x), x \rangle^2 = 4r^2(1-r^2)$. Por ende, el normal asociado a este producto riemanniano está dado por

$$N = \frac{1}{r\sqrt{1-r^2}} \left[(1-r^2)(0, \dots, 0, x_{n-k+1}, \dots, x_{n+2}) - r^2(x_1, \dots, x_{n-k}, 0, \dots, 0) \right],$$

de manera que el operador de forma A está dado por

$$A = \begin{bmatrix} (r/\sqrt{1-r^2})I_{n-k} & 0 \\ 0 & -(\sqrt{1-r^2}/r)I_k \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, Σ tiene dos curvaturas principales constantes $\kappa_1 = r/\sqrt{1-r^2}$ y $\kappa_2 = -\sqrt{1-r^2}/r$ con multiplicidades $n-k$ y k respectivamente. Por consiguiente, su curvatura media constante está dada por

$$H = H(r) = \frac{nr^2 - k}{nr\sqrt{1-r^2}}. \quad (1.28)$$

Para despejar r en términos de H debemos resolver el siguiente polinomio

$$n^2r^4(1+H^2) - nr^2(2k+nH^2) + k^2 = 0$$

cuyo discriminante está dado por $H^2(n^2H^2 + 4k(n-k)) > 0$. Así que

$$r^2 = \frac{2k + nH^2 \pm |H|\sqrt{n^2H^2 + 4k(n-k)}}{2n(1+H^2)}.$$

Por otra parte, la traza de A^2 viene dada por

$$|A|^2 = (n-k)\frac{r^2}{1-r^2} + k\frac{1-r^2}{r^2}$$

y al utilizar la ecuación anterior junto con (1.28), obtenemos

$$|\Phi|^2 = \frac{k(n-k)}{nr^2(1-r^2)}.$$

Dado que $n(n-1)(R-1) = n^2H^2 - |A|^2$ tenemos que

$$R = \frac{(n-1)r^2(nr^2 - 2k) + k(k-1)}{r^2(1-r^2)}. \quad (1.29)$$

Finalmente, en el espacio hiperbólico ($c = -1$) consideramos las inmersiones estándar $\mathbb{H}^{n-k}(-\sqrt{1+r^2}) \hookrightarrow \mathbb{R}_1^{n-k+1}$ y $\mathbb{S}^k(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, para un radio dado $r > 0$ y un entero $k \in \{1, \dots, n-1\}$, tomamos la inmersión producto $\mathbb{H}^{n-k}(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^k(r) \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$ y la visualizamos como una hipersuperficie de nivel dada por $\Sigma = f^{-1}(r^2)$, donde

$$f(x) = \sum_{i=n-k+1}^{n+2} x_i^2.$$

De la fórmula de Gauss tenemos que

$$\nabla^\circ f(x) = \bar{\nabla} f(x) - \langle \nabla^\circ f(x), x \rangle x.$$

Note que $|\bar{\nabla}f(x)|^2 = |\nabla^o f(x)|^2 + \langle \nabla^o f(x), x \rangle^2 = 4r^2(1+r^2)$. Por lo tanto, el normal está dado por

$$N = \frac{\sqrt{1+r^2}}{r}(0, \dots, 0, x_{n-k+2}, \dots, x_{n+2}) + \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}(x_1, \dots, x_{n-k+1}, 0, \dots, 0).$$

De modo que el operador A con respecto al normal N está dado por

$$A = \begin{bmatrix} (r/\sqrt{1+r^2})I_{n-k} & 0 \\ 0 & (\sqrt{1+r^2}/r)I_k \end{bmatrix}.$$

Así, Σ posee dos curvaturas principales constantes $\kappa_1 = r/\sqrt{1+r^2}$ y $\kappa_2 = \sqrt{1+r^2}/r$ con multiplicidades $n-k$ y k respectivamente. Luego, su curvatura media constante H está dada por

$$H = \frac{nr^2 + k}{nr\sqrt{1+r^2}}. \quad (1.30)$$

Despejando r^2 en términos de H se tiene el siguiente polinomio de r^2

$$n^2(H^2 - 1)r^4 + n(nH^2 - 2k)r^2 - k^2 = 0,$$

cuyo discriminante está dado por

$$n^2H^2(n^2H^2 - 4k(n-k)).$$

De manera que

$$r^2 = \frac{-(nH^2 - 2k) \pm |H|\sqrt{n^2H^2 - 4k(n-k)}}{2n(H^2 - 1)}. \quad (1.31)$$

La traza de A^2 viene dada por

$$|A|^2 = k\frac{1+r^2}{r^2} + (n-k)\frac{r^2}{1+r^2}.$$

Luego,

$$|\Phi|^2 = \frac{k(n-k)}{nr^2(1+r^2)}.$$

Dado que $n(n-1)(R+1) = n^2H^2 - |A|^2$ tenemos que

$$R = \frac{(n-1)r^2(2k-n) + k(k-1)}{n(n-1)r^2(1+r^2)}. \quad (1.32)$$

En particular, un caso muy interesante para estudiar es cuando una de las curvaturas principales de los anteriores productos es simple, esto es, cuando $k = 1$ o $k = n-1$. En el caso euclídeo ($c = 0$) con $k = 1$ el producto es de la forma $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ y su curvatura media constante H está dada por $nH = -1/r$ y tiene

curvatura escalar (normalizada) cero. Además la norma al cuadrado de la segunda forma fundamental sin traza viene dada por

$$|\Phi|^2 = \frac{(n-1)}{nr^2} = n(n-1)H^2. \quad (1.33)$$

Si consideramos $k = n - 1$ tenemos que el producto es de la forma $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ y su curvatura media constante H está dada por $nH = -(n-1)/r$ y tiene curvatura escalar (normalizada) $R = (n-2)/(nr^2)$. Más aún, la norma al cuadrado de la segunda forma fundamental sin traza está dada por

$$|\Phi|^2 = \frac{(n-1)}{nr^2}.$$

Ésta la podemos reescribir en términos de H de la siguiente forma

$$|\Phi|^2 = \frac{n}{n-1}H^2, \quad (1.34)$$

pero también podemos re-escribirla en términos de R así

$$|\Phi|^2 = \frac{(n-1)R}{n-2}. \quad (1.35)$$

En el caso esférico ($c = 1$) sólo consideraremos $k = n - 1$ pues cuando $k = 1$ el producto que se obtiene es simétrico al del caso $k = n - 1$. Así que el producto a analizar es $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$, el cual tiene curvatura media H constante igual

$$H(r) = \frac{nr^2 - (n-1)}{nr\sqrt{1-r^2}}. \quad (1.36)$$

Además,

$$|\Phi|^2 = \frac{n-1}{nr^2(1-r^2)}$$

y

$$r^2 = \frac{2(n-1) + nH^2 \pm |H|\sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)}}{2n(1+H^2)}$$

donde escogemos el signo $-$ o $+$ de acuerdo a $r^2 \leq (n-1)/n$ o $r^2 \geq (n-1)/n$. Por lo tanto,

$$|\Phi|^2 = \frac{n}{4n-1} \left(\sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)} \mp (n-2)|H| \right)^2 \quad (1.37)$$

donde usamos el mismo criterio para el signo.

Por otra parte, su curvatura escalar (normalizada) está dada por

$$R = \frac{(n-2)}{nr^2}.$$

Escribiendo la norma de Φ en términos de R se tiene

$$|\Phi|^2 = \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(nR - (n-2))}. \quad (1.38)$$

Finalmente, en el espacio hiperbólico ($c = -1$) con $k = 1$ tenemos el producto estándar embebido $\mathbb{H}^{n-1}(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^1(r) \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$. La curvatura media de este producto está dada por

$$H = \frac{nr^2 + 1}{nr\sqrt{1+r^2}}. \quad (1.39)$$

Podemos ver a $H^2 = (nr^2 + 1)^2/[n^2r^2(1+r^2)] = f(r^2)$ donde

$$f(x) = \frac{(nx + 1)^2}{n^2x(1+x)}$$

y encontrar su mínimo. Observemos que

$$f'(x) = \frac{(nx + 1)[x(n-2) - 1]}{n^2x^2(1+x)^2}$$

de modo que un punto crítico de f es $x = 1/(n-2)$. Calculando la segunda derivada de f obtenemos que

$$f''(x) = \frac{2[-n(n-2)x^3 + 3x^2 + 3x + 1]}{n^2x^3(1+x)^3}.$$

Luego, $f''(1/(n-2)) = 2(n-2)^4/n^2(n-1) > 0$ pues $n \geq 3$. Aplicando el criterio de la segunda derivada tenemos que en $x = 1/(n-2)$ se alcanza un mínimo y este es $f(1/(n-2)) = 4(n-1)/n^2$. Es decir,

$$H^2 \geq \frac{4(n-1)}{n^2}. \quad (1.40)$$

Notemos que $H^2 > 1$ si y sólo si $r < 1/\sqrt{n(n-2)}$. En ese caso

$$|\Phi|^2 = \frac{n-1}{nr^2(1+r^2)}, \quad (1.41)$$

y por (1.31),

$$r^2 = \frac{2 - nH^2 + |H|\sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}}{2n(H^2 - 1)}. \quad (1.42)$$

Luego,

$$|\Phi|^2 = \frac{n}{4(n-1)} \left((n-2)|H| + \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)} \right)^2. \quad (1.43)$$

Por otra parte, $H^2 < 1$ si y sólo si $r > 1/\sqrt{n(n-2)}$. Dado que $H^2 = 4(n-1)/n^2$ cuando $r = 1/\sqrt{n-2}$, por (1.40) tenemos que $4(n-1)/n^2 < H^2 < 1$. Más aún, para cada valor de $H^2 \in (4(n-1)/n^2, 1)$ existen dos valores de $r > 1/\sqrt{n(n-2)}$ los cuales están dados por

$$\frac{1}{n(n-2)} < r^2 = \frac{nH^2 - 2 - |H|\sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}}{2n(1-H^2)} < \frac{1}{n-2}, \quad (1.44)$$

y

$$r^2 = \frac{nH^2 - 2 + |H|\sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}}{2n(1-H^2)} > \frac{1}{n-2}. \quad (1.45)$$

Cuando r^2 es de la forma de (1.44) tenemos que

$$|\Phi|^2 = \frac{n}{4(n-1)} \left((n-2)|H| + \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)} \right)^2 \quad (1.46)$$

si por el contrario r^2 es de la forma (1.45) obtenemos

$$|\Phi|^2 = \frac{n}{4(n-1)} \left((n-2)|H| - \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)} \right)^2. \quad (1.47)$$

De la ecuación (1.32) concluimos que en este caso la curvatura escalar está dada por

$$R = -\frac{(n-2)}{n(1+r^2)} < 0, \quad (1.48)$$

lo cual junto con (1.41) nos permite escribir $|\Phi|^2$ en términos de R de la siguiente forma

$$|\Phi|^2 = \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(-nR + (n-2))}. \quad (1.49)$$

Por otra parte, cuando $k = n-1$ tenemos el producto estándar $\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$ que satisface

$$H^2 = \frac{nr^2 + (n-1)}{nr\sqrt{1+r^2}} > 1$$

para todo $r > 0$ y $|\Phi|^2$ está también dado por (1.41), donde ahora, por (1.31)

$$r^2 = \frac{2(n-1) - nH^2 + |H|\sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}}{2n(H^2 - 1)}. \quad (1.50)$$

Por lo tanto, en este caso tenemos para todo $r > 0$

$$|\Phi|^2 = \frac{n}{4(n-1)} \left((n-2)|H| - \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)} \right)^2. \quad (1.51)$$

Además, de la ecuación (1.32) tenemos que

$$R = \frac{n-2}{nr^2}, \quad (1.52)$$

así que podemos escribir $|\Phi|^2$ en términos de R de la siguiente forma:

$$|\Phi|^2 = \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(nR+(n-2))}. \quad (1.53)$$

Capítulo 2

Principio del máximo generalizado de Omori-Yau

Sumario. El objetivo de este capítulo es presentar el principio del máximo de Omori-Yau y algunas de sus variaciones. En particular, estudiamos los conceptos de parabolicidad, completitud estocástica y su respectiva relación con el principio del máximo de Omori-Yau. Desarrollamos además la fórmula de tipo Simons para el Laplaciano de la norma al cuadrado de la segunda forma sin traza sobre subvariedades con vector curvatura media paralelo y por último presentamos una aplicación de esta fórmula.

Abstract. *The aim of this chapter is to present the Omori-Yau maximum principle and some generalizations. In particular, we study concepts as the parabolicity, the stochastic completeness and its respective relation with the weak Omori-Yau maximum principle. Moreover, we develop a Simon type formula for Laplacian of squared norm of the traceless second fundamental form on submanifolds with parallel mean curvature vector and finally, we show an application of this formula.*

2.1. Principio del máximo generalizado de Omori-Yau

Sea $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces u alcanza su máximo u^* en algún punto $x_0 \in [a, b]$. Si $x_0 \in (a, b)$ y u tiene la segunda derivada continua en un entorno de x_0 , entonces

$$(i) \ u'(x_0) = 0 \text{ y } (ii) \ u''(x_0) \leq 0. \quad (2.1)$$

Se sigue fácilmente de aquí que, si u satisface una desigualdad diferencial del tipo

$$u''(x) + g(x)u'(x) > 0 \quad (2.2)$$

sobre el intervalo abierto (a, b) , donde g es cualquier función acotada, entonces o bien $x_0 = a$ o bien $x_0 = b$. De otra forma obtendríamos la contradicción

$$0 < u''(x_0) + g(x_0)u'(x_0) \leq 0.$$

Notemos, sin embargo, que si cambiamos (2.2) por la desigualdad no estricta

$$u''(x) + g(x)u'(x) \geq 0 \tag{2.3}$$

sobre (a, b) , entonces se admiten las soluciones constantes $u \equiv c$, y para tales soluciones el máximo se alcanza en cualquier punto de $[a, b]$. El contenido del principio usual del máximo es, de hecho, que esta excepción es la única posible, y se enuncia de la siguiente forma.

Teorema 2.1.1. *Sea $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 que satisface*

$$u''(x) + g(x)u'(x) \geq 0 \tag{2.4}$$

sobre (a, b) , donde g es cualquier función acotada. Entonces, u no puede tener un máximo interior en (a, b) , a menos que u sea constante.

El argumento para probar el Teorema 2.1.1 consiste en un pequeño truco para pasar de la desigualdad no estricta (2.4) a la desigualdad estricta (2.2) con una nueva función v muy relacionada con u . En definitiva, la esencia del principio del máximo radica en $u(x_0) = u^*$ y las condiciones (i) y (ii) en (2.1).

Al sustituir $[a, b] \subset \mathbb{R}$ por una variedad riemanniana compacta Σ sin frontera, tenemos que, dada cualquier función diferenciable $u \in C^2(\Sigma)$, existe un punto $x_0 \in \Sigma$ tal que

$$(i) \ u(x_0) = u^*, \quad (ii) \ |\nabla u(x_0)| = 0, \quad \text{y} \quad (iii) \ \Delta u(x_0) \leq 0, \tag{2.5}$$

donde $u^* = \sup_{\Sigma} u < +\infty$.

Siguiendo la terminología introducida por Yau, la validez de (2.5) sobre Σ lo llamamos *el principio usual del máximo* (o equivalentemente, *el principio del máximo finito*). Veamos aquí un ejemplo típico de su aplicación.

Proposición 2.1.2. *Sea $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie inmersa, orientable y minimal. Si $W = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \cup_{x \in \Sigma} T_x \Sigma$ es un abierto no vacío entonces ψ es totalmente geodésica, esto es, $\psi(\Sigma)$ es parte de un hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} .*

Demostración. Fijemos un punto $0 \in W$ como el origen de \mathbb{R}^{n+1} . Para cada $x \in \Sigma$, sea $\nu(x)$ el normal unitario a $\psi(\Sigma)$ en $\psi(x)$, de tal forma que $\langle \psi(x), \nu(x) \rangle > 0$. Esto da una orientación a Σ ; ciertamente, la componente del vector posición ψ que es perpendicular a Σ y define un campo vectorial normal no nulo sobre Σ , tal que la función $u = \langle \psi, \nu \rangle$ es positiva sobre Σ . Calculemos Δu . Para este fin, escojamos un

referencial de Darboux orientado a lo largo de ψ , $\{e_1, \dots, e_n, \nu\}$ tal que los e_i 's sean tangentes a Σ para todo $i = 1, \dots, n$ dada su orientación. Notemos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla u, X \rangle &= X(u) = X(\langle \psi, \nu \rangle) = \langle \bar{\nabla}_X \psi, \nu \rangle + \langle \psi, \bar{\nabla}_X \nu \rangle = \langle X, \nu \rangle + \langle \psi, -AX \rangle \\ &= \langle \psi^\top, -AX \rangle = \langle -A\psi^\top, X \rangle, \end{aligned}$$

donde ψ^\top denota la componente tangente de ψ ; es decir, $\psi = \psi^\top + u\nu$.

Luego, $\nabla u = -A\psi^\top$. Ahora, calculemos el hessiano de u

$$\nabla^2 u(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla u, Y \rangle = -\langle \nabla_X (A\psi^\top), Y \rangle = -\langle \nabla A(\psi^\top, X) + A(\nabla_X \psi^\top), Y \rangle.$$

Como $X = \bar{\nabla}_X \psi$ y $\psi = \psi^\top + u\nu$ tenemos que

$$X = \bar{\nabla}_X (\psi^\top + u\nu) = \nabla_X \psi^\top + \sigma(X, \psi^\top) - uAX + X(u)\nu,$$

donde en la última igualdad hemos usado la fórmula de Gauss (1.12) para $c = 0$ y la fórmula de Weingarten (1.13).

Se sigue que $\nabla_X \psi^\top = X + uAX$. Retomando el cálculo del hessiano de u , tenemos que

$$\nabla^2 u(X, Y) = -(\langle \nabla_{\psi^\top} AX, Y \rangle + \langle AX, Y \rangle + u \langle A^2 X, Y \rangle).$$

Por lo tanto, el laplaciano de u está dado por

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{i=1}^n \nabla^2 u(e_i, e_i) = -\sum_{i=1}^n (\langle \nabla_{\psi^\top} A e_i, e_i \rangle + \langle A e_i, e_i \rangle + u \langle A^2 e_i, e_i \rangle) \\ &= -(\text{tr}(\nabla_{\psi^\top} A) + \text{tr}(A) + u \text{tr}(A^2)) \\ &= -(\nabla_{\psi^\top} \text{tr}(A) + nH + u|A|^2) = -u|A|^2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde la última línea se sigue del hecho de que $\text{tr}(A) = 0$ pues Σ es minimal. Esto implica que u es una función positiva y superarmónica ($\Delta u \leq 0$) sobre Σ . Sea $u_* = \inf_\Sigma u$. Si u_* se alcanza en algún punto $x_0 \in \Sigma$ entonces por el principio usual del máximo concluimos que u es constante, $u = u_* = u(x_0) > 0$. De (2.6) tenemos $A \equiv 0$ y ψ es totalmente geodésica. Por lo tanto, la prueba estaría completa si logramos probar la existencia de x_0 tal que $u_* = u(x_0)$. Para este propósito, consideremos una sucesión $\{x_k\} \subset \Sigma$ tal que $u(x_k) \rightarrow u_*$ cuando $k \rightarrow \infty$. A cada x_k le asociamos y_k dado por la intersección de $T_{x_k} \Sigma$ con la línea perpendicular a tal espacio que pasa a través de 0. Como $\|y_k - 0\|_{\mathbb{R}^{n+1}} = u(x_k)$ es acotado, existe una subsucesión que denotaremos de nuevo por $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $y_k \rightarrow y_0$ para algún $y_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Por otra parte, sabemos que el conjunto $\bigcup_{x \in \Sigma} T_x \Sigma$ es cerrado y $\{y_k\} \subset \bigcup_{x \in \Sigma} T_x \Sigma$ así que deducimos $y_0 \in T_{x_0} \Sigma$ para algún $x_0 \in \Sigma$. Luego,

$$u_* = \lim_{k \rightarrow \infty} u(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k - 0\|_{\mathbb{R}^{n+1}} = \|y_0 - 0\|_{\mathbb{R}^{n+1}} = u(x_0).$$

□

Observación 2.1.3. En dimensión 2, la proposición anterior sólo necesita de las hipótesis de completitud y $W \neq \emptyset$, para ser válido. Esto se debe a que $|A|^2 = -2K$ por la minimalidad de ψ . Por lo tanto, u es una solución positiva de

$$\Delta u - 2Ku = 0 \text{ en } \Sigma,$$

y usando un resultado más fuerte y no trivial de Fisher-Colbrie y Schoen en [22, Corolario 4] se puede concluir que $A = 0$.

Obviamente, cuando Σ no es compacta, para una función continua $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada con $u^* = \sup_{\Sigma} u < +\infty$, no siempre es posible encontrar un punto $x_0 \in \Sigma$ tal que $u(x_0) = u^*$. Sin embargo, si $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase \mathcal{C}^2 con $u^* < +\infty$, entonces no es difícil garantizar la existencia de una sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ con las siguientes propiedades:

$$(i) \ u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad (ii) \ |u'(x_k)| < \frac{1}{k}, \quad \text{y} \quad (iii) \ u''(x_k) < \frac{1}{k}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Más generalmente, dada una función $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^2 con $u^* < +\infty$, existe una sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$(i) \ u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad (ii) \ |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k}, \quad \text{y} \quad (iii) \ \Delta u(x_k) < \frac{1}{k} \quad (2.7)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. La idea principal de la prueba es la misma de Ahlfors [8] que consiste en considerar una familia de funciones, donde cada una alcanza un máximo en algún punto de \mathbb{R}^n y luego aplicar el principio del máximo usual. Por ejemplo, para probar (2.7) fijamos una sucesión $\{\varepsilon_i\} \searrow 0^+$ y definimos

$$u_i(x) = u(x) - \varepsilon_i |x|^2.$$

Claramente, u_i toma su máximo absoluto en algún punto $x_i \in \mathbb{R}^n$, donde

$$\nabla u_i(x_i) = 0 \text{ y } \Delta u_i(x_i) \leq 0.$$

Dado que en \mathbb{R}^n , $\nabla |x|^2 = 2x$ y $\Delta |x|^2 = 2n$, obtenemos

$$\nabla u(x_i) = 2\varepsilon_i x_i \quad (2.8)$$

y

$$\Delta u(x_i) \leq 2n\varepsilon_i. \quad (2.9)$$

Por otra parte,

$$u(x_i) - \varepsilon_i |x_i|^2 = u_i(x_i) \geq u_i(0) = u(0),$$

y por lo tanto

$$\varepsilon_i |x_i|^2 \leq u(x_i) - u(0) \leq u^* - u(0) \leq C$$

para alguna constante positiva C . Entonces se sigue que

$$|x_i| \leq \sqrt{\frac{C}{\varepsilon_i}},$$

lo cual, junto con (2.8), implica

$$|\nabla u(x_i)| \leq 2\sqrt{C\varepsilon_i}. \quad (2.10)$$

Para concluir, fijamos $k \in \mathbb{N}$. Entonces, existe un punto $y_k \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$u(y_k) > u^* - \frac{1}{2k}.$$

Tenemos para todo $i \in \mathbb{N}$

$$u_i(x_i) = u(x_i) - \varepsilon_i|x_i|^2 \geq u_i(y_k) = u(y_k) - \varepsilon_i|y_k|^2 > u^* - \frac{1}{2k} - \varepsilon_i|y_k|^2.$$

Esto es,

$$u(x_i) > u^* - \frac{1}{2k} - \varepsilon_i|y_k|^2 + \varepsilon_i|x_i|^2 \geq u^* - \frac{1}{2k} - \varepsilon_i|y_k|^2 \quad (2.11)$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Ahora escogamos $i = i_k$ suficientemente grande tal que

$$\varepsilon_{i_k}|y_k|^2 < \frac{1}{2k}, \quad 2\sqrt{C\varepsilon_{i_k}} < \frac{1}{k}, \quad \text{y} \quad 2n\varepsilon_{i_k} < \frac{1}{k}.$$

Se sigue de (2.9), (2.10) y (2.11), respectivamente, que

$$u(x_{i_k}) > u^* - \frac{1}{k}, \quad |\nabla u(x_{i_k})| < \frac{1}{k}, \quad \text{y} \quad \Delta u(x_{i_k}) < \frac{1}{k}.$$

Por lo tanto, denotando $x_k = x_{i_k}$ finaliza la prueba.

En la prueba anterior hay dos hechos importantes que necesitamos resaltar. El primero es la igualdad

$$\Delta|x|^2 = 2n,$$

la cual está rigurosamente relacionada con la geometría de \mathbb{R}^n . La segunda es la linealidad del operador laplaciano, por la que se tiene

$$\Delta u_k = \Delta u - \varepsilon_k \Delta|x|^2.$$

Por supuesto, es posible reformular (2.7) sobre una variedad riemanniana n -dimensional Σ . En este contexto general, no es difícil ver que si la variedad es, por ejemplo, completa entonces para cualquier función diferenciable $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ con $u^* < +\infty$ podemos siempre encontrar una sucesión de puntos $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ que satisfagan (i) y (ii) en (2.7). Lo que no se puede asegurar siempre es que además se cumpla también la condición (iii) de (2.7).

Para la prueba de nuestros resultados en dimensión superior, haremos uso de una versión generalizada del principio del máximo de Omori-Yau. Siguiendo la terminología introducida por Pigola, Rigoli y Setti en [44], tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1.4. Sea Σ una variedad riemanniana (no necesariamente completa). Se dice que *el principio del máximo de Omori-Yau* se verifica sobre Σ si, para cualquier función diferenciable $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ con $u^* = \sup_{\Sigma} u < +\infty$ existe una sucesión de puntos $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en Σ con las siguientes propiedades

$$(i) \quad u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad (ii) \quad |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k}, \quad \text{y} \quad (iii) \quad \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}. \quad (2.12)$$

Equivalentemente, para cualquier función diferenciable $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ con $u_* = \inf_{\Sigma} u > -\infty$ existe una sucesión de puntos $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en Σ que satisface

$$(i) \quad u(x_k) < u_* + \frac{1}{k}, \quad (ii) \quad |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k}, \quad \text{y} \quad (iii) \quad \Delta u(x_k) > -\frac{1}{k}. \quad (2.13)$$

En este sentido, el resultado clásico dado por Omori y Yau en [39, 58] afirma lo siguiente.

Teorema 2.1.5. *El principio del máximo de Omori-Yau se verifica sobre toda variedad riemanniana completa con curvatura de Ricci acotada inferiormente.*

Por otra parte, como observaron Pigola, Rigoli y Setti en [44], la validez del principio del máximo de Omori-Yau sobre Σ no depende de cotas de la curvatura tanto como esperabamos. En verdad, una condición para garantizar la validez de (2.12) o de (2.13) puede expresarse en términos de la existencia de una función que cumple una serie de propiedades técnicas y viene dada por la siguiente generalización dada por Pigola, Rigoli y Setti [44, Teorema 1.9].

Teorema 2.1.6. *El principio del máximo de Omori-Yau se verifica sobre toda variedad riemanniana Σ que admite una función $\gamma \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ no negativa que satisface los siguientes requisitos:*

(a.1) $\gamma(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \infty$;

(a.2) existe una constante positiva $A > 0$ tal que $|\nabla \gamma| \leq A\sqrt{\gamma}$ fuera de un subconjunto compacto de Σ ;

(a.3) existe una constante positiva $B > 0$ tal que $\Delta \gamma \leq B\sqrt{\gamma G(\sqrt{\gamma})}$ fuera de un subconjunto compacto de Σ ,

donde $G : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ es una función diferenciable tal que $G(0) > 0$, $G'(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{G(t)}} = +\infty \quad \text{y} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{tG(\sqrt{t})}{G(t)} < +\infty.$$

Observación 2.1.7. Algunos ejemplos significativos de funciones G que satisfacen las condiciones del teorema anterior están dadas por

$$G(t) = t^2 \prod_{j=1}^N \left(\log^{(j)}(t) \right)^2, \quad t \gg 1,$$

donde $\log^{(j)}$ denota el j -ésimo logaritmo iterado.

En relación al Teorema 2.1.5, más generalmente, como mostraron Pigola, Rigoli y Setti [44, Ejemplo 1.13], un decaimiento suficientemente controlado de la curvatura radial de Ricci de la forma

$$\text{Ric}_\Sigma(\nabla \varrho, \nabla \varrho) \geq -C^2 G(\varrho) \quad (2.14)$$

donde ϱ es la función distancia sobre Σ a un punto fijo, C es una constante positiva, y $G : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable que satisface las condiciones del Teorema 2.1.6, es suficiente para implicar la validez del principio del máximo de Omori-Yau. En particular, y siguiendo la terminología introducida por Bessa y Costa en [11], el principio del máximo de Omori-Yau se verifica sobre una variedad riemanniana completa cuya curvatura de Ricci tiene un *decaimiento cuadrático fuerte* [17], esto es, con

$$\text{Ric}_\Sigma \geq -C^2(1 + \varrho^2 \log^2(\varrho + 2)).$$

Ahora, veamos que el principio del máximo de Omori-Yau se verifica sobre toda subvariedad riemanniana propiamente inmersa en un espacio forma riemanniano con curvatura media acotada. Pero antes, observemos que en el caso de la esfera esto se tiene fácilmente, pues toda subvariedad propiamente inmersa en la esfera es compacta, y ya habíamos probado anteriormente que para este tipo de variedades se verifica el principio del máximo de Omori-Yau, así que sólo nos resta probar que este principio del máximo se verifica sobre toda subvariedad propiamente ¹ inmersa en los espacios euclídeo e hiperbólico.

Teorema 2.1.8. *Sea $\psi : \Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{M}_c^m$ una subvariedad n -dimensional propiamente inmersa en un espacio forma m -dimensional \mathbb{M}_c^m con $c = -1, 0$. Supongamos que existe una constante positiva C tal que*

$$|\mathbf{H}| \leq C \sqrt{G(\varrho_c \circ \psi)}, \quad (2.15)$$

en el complemento de un subconjunto compacto en Σ , donde \mathbf{H} denota el vector curvatura media de la inmersión, ϱ_c denota la función distancia riemanniana sobre \mathbb{M}_c^m desde el punto \mathbf{a} , y G es una función diferenciable sobre $[0, +\infty)$ que satisface las condiciones enunciadas anteriormente. Entonces el principio del máximo de Omori-Yau se verifica sobre Σ .

¹Recordemos que una función $\psi : B \rightarrow D$ es propia si la preimagen de todo subconjunto compacto de D es compacto en B .

Demostración. Sea $\mathbf{a} \in \mathbb{M}_c^m$ un punto fijo, consideremos ϱ_c la función dada por

$$\begin{aligned} \varrho_c : \mathbb{M}_c^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \varrho_c(x) &= \text{dist}_{\mathbb{M}_c^m}(x, \mathbf{a}) = \begin{cases} |x - \mathbf{a}| & \text{si } c = 0 \text{ y } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m, \\ \text{arccosh}(-\langle x, \mathbf{a} \rangle) & \text{si } c = -1 \text{ y } \mathbf{a} \in \mathbb{H}^m, \end{cases} \end{aligned}$$

y denotemos por $g = \varrho_c^2$. Sea $\gamma = g \circ \psi$ la restricción de la función extrínseca g a la subvariedad Σ . Entonces γ es una función \mathcal{C}^2 no negativa y, dado que la inmersión es propia, $\gamma(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \infty$ sobre Σ . En cada $x \in \Sigma$, tenemos que

$$\overline{\nabla}g(\psi(x)) = (\overline{\nabla}g(\psi(x)))^\top + (\overline{\nabla}g(\psi(x)))^\perp$$

donde \top y \perp denotan respectivamente la componente tangencial y normal a lo largo de la inmersión ψ . Esto es,

$$|\overline{\nabla}g(\psi)|^2 = |(\overline{\nabla}g(\psi))^\top|^2 + |(\overline{\nabla}g(\psi))^\perp|^2 = |\nabla\gamma|^2 + |(\overline{\nabla}g(\psi))^\perp|^2.$$

Entonces

$$|\nabla\gamma|^2 = |\overline{\nabla}g(\psi)|^2 - |(\overline{\nabla}g(\psi))^\perp|^2 \leq |\overline{\nabla}g(\psi)|^2 = 4g(\psi) |\overline{\nabla}\varrho_c(\psi)|^2,$$

pues $\overline{\nabla}g = 2\varrho_c \overline{\nabla}\varrho_c$.

Afirmamos que $|\overline{\nabla}\varrho_c(\psi)| = 1$ para $c = 0, -1$. En efecto, para el caso $c = 0$ esto es cierto, pues para todo $X \in \mathbb{R}^m$

$$\langle \overline{\nabla}g, X \rangle = X(g) = X(\langle x - \mathbf{a}, x - \mathbf{a} \rangle) = 2\langle \overline{\nabla}_X x, x - \mathbf{a} \rangle = 2\langle X, x - \mathbf{a} \rangle.$$

Así que, $\overline{\nabla}g = 2(x - \mathbf{a})$ y como $\overline{\nabla}\varrho_c = 1/(2\varrho_c)\overline{\nabla}g$ se tiene que $\overline{\nabla}\varrho_c = (x - \mathbf{a})/|x - \mathbf{a}|$ y claramente $|\overline{\nabla}\varrho_c(\psi)| = 1$.

Para el caso $c = -1$, denotamos por $f = \cosh \varrho_c(\psi) = -\langle \psi, \mathbf{a} \rangle$ así que $\overline{\nabla}f = -\mathbf{a}^*$ donde $*$ denota la componente tangencial a lo largo de \mathbb{H}^m . Dado que $\mathbf{a} \in \mathbb{H}^m \subset \mathbb{R}_1^{m+1}$ tenemos que $\mathbf{a} = \mathbf{a}^* + \mathbf{a}^\perp = \mathbf{a}^* - \langle \psi, \mathbf{a} \rangle \psi$. De este modo,

$$\overline{\nabla}f = -\mathbf{a} - \langle \psi, \mathbf{a} \rangle \psi. \quad (2.16)$$

Por otra parte, sabemos que $\overline{\nabla}f = \sinh \varrho_c(\psi) \overline{\nabla}\varrho_c(\psi)$, por lo que

$$\overline{\nabla}\varrho_c(\psi) = \frac{1}{\sinh \varrho_c(\psi)} (-\mathbf{a} - \langle \psi, \mathbf{a} \rangle \psi).$$

Por lo tanto,

$$|\overline{\nabla}\varrho_c(\psi)|^2 = \frac{|\mathbf{a}|^2 + 2\langle \psi, \mathbf{a} \rangle^2 + \langle \psi, \mathbf{a} \rangle^2 |\psi|^2}{\sinh^2 \varrho_c(\psi)} = \frac{-1 + \langle \psi, \mathbf{a} \rangle^2}{\sinh^2 \varrho_c(\psi)} = \frac{-1 + \cosh^2 \varrho_c(\psi)}{\sinh^2 \varrho_c(\psi)} = 1. \quad (2.17)$$

En conclusión

$$|\nabla\gamma| \leq 2\sqrt{\gamma}.$$

Hasta el momento hemos probado que se satisfacen las condiciones (a.1) y (a.2) del Teorema 2.1.6 . Resta comprobar la condición (a.3). Observemos que para $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^2 g(\psi)(X, Y) &= \langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla} g(\psi), Y \rangle = \langle \nabla_X \nabla \gamma, Y \rangle - \left\langle A_{(\bar{\nabla} g(\psi))^\perp} X, Y \right\rangle \\ &= \nabla^2 \gamma(X, Y) - \langle \sigma(X, Y), \bar{\nabla} g(\psi) \rangle \end{aligned}$$

donde $\bar{\nabla}^2$ denota el operador hessiano sobre la variedad ambiente \mathbb{M}_c^m . Un cálculo directo produce

$$\begin{aligned} \nabla^2 \gamma(X, Y) &= \bar{\nabla}^2 g(\psi)(X, Y) + \langle \sigma(X, Y), \bar{\nabla} g(\psi) \rangle \\ &= 2 \left[\varrho_c(\psi) \bar{\nabla}^2 \varrho_c(\psi)(X, Y) + \langle X, \bar{\nabla} \varrho_c(\psi) \rangle \langle Y, \bar{\nabla} \varrho_c(\psi) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \varrho_c(\psi) \langle \sigma(X, Y), \bar{\nabla} \varrho_c(\psi) \rangle \right] \\ &= 2 \left[\sqrt{\gamma} \bar{\nabla}^2 \varrho_c(\psi)(X, Y) + \langle X, \bar{\nabla} \varrho_c(\psi) \rangle \langle Y, \bar{\nabla} \varrho_c(\psi) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\gamma} \langle \sigma(X, Y), \bar{\nabla} \varrho_c(\psi) \rangle \right]. \end{aligned}$$

Tomando trazas obtenemos

$$\frac{1}{2} \Delta \gamma = \sqrt{\gamma} \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}^2 \varrho_c(\psi)(E_i, E_i) + |\bar{\nabla} \varrho_c(\psi)^\top|^2 + n\sqrt{\gamma} \langle \mathbf{H}, \bar{\nabla} \varrho_c(\psi) \rangle,$$

donde $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una base ortonormal de $T\Sigma$ y $n\mathbf{H} = \text{tr}(\sigma)$.

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (2.15) tenemos que

$$\langle \mathbf{H}, \bar{\nabla} \varrho_c(\psi) \rangle \leq |\mathbf{H}| |\bar{\nabla} \varrho_c(\psi)| = |\mathbf{H}| \leq C \sqrt{G(\sqrt{\gamma})}.$$

Por consiguiente

$$\frac{1}{2} \Delta \gamma \leq \sqrt{\gamma} \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}^2 \varrho_c(\psi)(E_i, E_i) + |\bar{\nabla} \varrho_c(\psi)^\top|^2 + n\sqrt{\gamma G(\sqrt{\gamma})}. \quad (2.18)$$

Calculemos el término $\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}^2 \varrho_c(\psi)(E_i, E_i)$. Para $c = 0$, recordemos que $\bar{\nabla} \varrho_c(\psi) = (\psi - \mathbf{a})/|\psi - \mathbf{a}|$. Así pues, para todo $X, Y \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^2 \varrho_c(\psi)(X, Y) &= \langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla} \varrho_c(\psi), Y \rangle = X \left(\frac{1}{|\psi - \mathbf{a}|} \right) \langle \psi - \mathbf{a}, Y \rangle + \frac{1}{|\psi - \mathbf{a}|} \langle \bar{\nabla}_X (\psi - \mathbf{a}), Y \rangle \\ &= \frac{1}{|\psi - \mathbf{a}|} \langle X, Y \rangle = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Esto nos permite concluir

$$\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}^2 \varrho_c(\psi)(E_i, E_i) = \frac{n}{\sqrt{\gamma}} \quad (2.19)$$

En el caso $c = -1$, de (2.16) sabemos que $\mathbf{a} = -\bar{\nabla}f + f\psi$. Derivando esta ecuación obtenemos

$$0 = -\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}f - \bar{\sigma}(X, \bar{\nabla}f) + X(f)\psi + fX = 0.$$

Así que tanto la componente tangencial y normal de esta expresión son cero. La parte tangencial nos permite concluir que $\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}f = fX$.

Por otro lado, como $\bar{\nabla}f = \sinh \varrho_c(\psi) \bar{\nabla} \varrho_c(\psi)$, calculamos su derivada covariante

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}f &= X(\sinh \varrho_c(\psi)) \bar{\nabla} \varrho_c(\psi) + \sinh \varrho_c(\psi) \bar{\nabla}_X \bar{\nabla} \varrho_c(\psi) \\ &= \cosh \varrho_c(\psi) \langle \bar{\nabla} \varrho_c(\psi), X \rangle \bar{\nabla} \varrho_c(\psi) + \sinh \varrho_c(\psi) \bar{\nabla}_X \bar{\nabla} \varrho_c(\psi). \end{aligned}$$

Luego,

$$\sinh \varrho_c(\psi) \bar{\nabla}_X \bar{\nabla} \varrho_c(\psi) = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}f - \cosh \varrho_c(\psi) \langle \bar{\nabla} \varrho_c(\psi), X \rangle \bar{\nabla} \varrho_c(\psi).$$

Por lo tanto,

$$\bar{\nabla}_X \bar{\nabla} \varrho_c(\psi) = \frac{\cosh \varrho_c(\psi) X - \cosh \varrho_c(\psi) \langle \bar{\nabla} \varrho_c(\psi), X \rangle \bar{\nabla} \varrho_c(\psi)}{\sinh \varrho_c(\psi)}.$$

Esto implica que el hessiano de $\varrho_c(\psi)$ está dado por

$$\bar{\nabla}^2 \varrho_c(\psi)(X, Y) = \coth \varrho_c(\psi) (\langle X, Y \rangle - \langle \bar{\nabla} \varrho_c(\psi), X \rangle \langle \bar{\nabla} \varrho_c(\psi), Y \rangle) \quad (2.20)$$

y como $\coth(x) \leq 1$ para $x \gg 1$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}^2 \varrho_c(\psi)(E_i, E_i) \leq c_2 \sqrt{G(\sqrt{\gamma})} \quad (2.21)$$

fuera de un conjunto compacto, para alguna constante apropiada $c_2 > 0$.

Finalmente, reemplazando (2.19) y (2.21) en (2.18) obtenemos

$$\Delta\gamma \leq c_3 \sqrt{\gamma G(\sqrt{\gamma})},$$

para alguna constante apropiada $c_3 > 0$. \square

En particular, el principio del máximo de Omori-Yau se verifica sobre toda hipersuperficie de curvatura media constante propiamente inmersa en un espacio forma riemanniano.

2.2. Parabolicidad

Definición 2.2.1. Se dice que una variedad riemanniana Σ es *parabólica* si las únicas funciones subarmónicas sobre Σ , acotadas superiormente son constantes; esto es, para una función $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$

$$\Delta u \geq 0 \quad \text{y} \quad \sup_{\Sigma} u < +\infty \quad \text{implican} \quad u = \text{constante.}$$

Análogamente, una variedad riemanniana Σ es parabólica si las únicas funciones superarmónicas sobre Σ , acotadas inferiormente son constantes; esto es,

$$\Delta u \leq 0 \quad \text{y} \quad \inf_{\Sigma} u > -\infty \quad \text{implican} \quad u = \text{constante.}$$

Un primer ejemplo de variedades parabólicas son las variedades compactas. En efecto, sea u una función subarmónica sobre una variedad compacta Σ con $\sup_{\Sigma} u < +\infty$. Entonces por la compacidad de Σ obtenemos

$$\int_{\Sigma} \Delta u = 0.$$

De aquí que $\Delta u = 0$ sobre Σ . Por otro lado, dado que $\Delta u^2 = 2(u\Delta u + |\nabla u|^2)$ tenemos $\Delta u^2 = 2|\nabla u|^2 \geq 0$. De nuevo, utilizando la compacidad de la variedad se sigue que

$$\int_{\Sigma} \Delta u^2 = 0.$$

Luego, $\Delta u^2 = 0$ esto implica que $\nabla u = 0$. Por consiguiente, u es constante y esto prueba que Σ es parabólica.

Otro ejemplo de variedad parabólica es \mathbb{R}^2 . Para probar esto seguiremos la idea dada por Kazdan en [28, página 155]. Consideremos u una función no negativa sobre \mathbb{R}^2 tal que $\Delta u \leq 0$ y denotemos por $\bar{u}(r)$ el promedio de u sobre la circunferencia con centro en el origen y radio r . Esto es,

$$\bar{u}(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{x^2+y^2=r^2} u(x, y) ds.$$

Dado que el laplaciano en coordenadas polares está dado por

$$\Delta u = \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

vemos que $(r\bar{u})' \leq 0$ y $\bar{u} \geq 0$. Analizando esta ecuación diferencial ordinaria concluimos que \bar{u} es constante. Entonces $\overline{\Delta u} = \Delta \bar{u} = 0$. Como $\Delta u \leq 0$ esto implica $\Delta u = 0$. Para mostrar que u es a su vez una constante, sea $v = 1 - e^{-u}$. Entonces $v \geq 0$ y

$$\Delta v = (\Delta u - |\nabla u|^2)e^{-u} \leq 0. \tag{2.22}$$

Aplicando el razonamiento anterior a la función v encontramos que $\Delta v = 0$. Pero de (2.22) vemos que $\nabla u = 0$ y entonces u es constante.

A continuación, enunciaremos un criterio clásico dado por Ahlfors [8] y Blanc-Fiala-Huber [27] que nos permite determinar si una superficie es parabólica.

Teorema 2.2.2. *Si Σ es una superficie completa con curvatura de Gauss no negativa $K \geq 0$ entonces Σ es parabólica.*

Evidentemente, el teorema anterior nos permite argumentar de una forma diferente que \mathbb{R}^2 es parabólica.

Por otra parte, \mathbb{R}^n con $n \geq 3$ no es una variedad parabólica. Para ver esto es suficiente con dar un ejemplo explícito de una función superarmónica positiva que no sea constante. Por ejemplo, es fácil ver que la función

$$u(x) = (1 + |x|^2)^{-(n-2)/2},$$

cumple los requisitos. Nos falta mencionar que \mathbb{R}^1 es parabólico, y para argumentar esta afirmación podemos utilizar la parabolicidad de \mathbb{R}^2 . En efecto, sea $u : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ una función que satisface $u'' \leq 0$ y $u \geq 0$. Ahora, consideremos la función $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ dada por

$$v(x, y) = u(x),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Observe que v es una función no negativa pues u también es no negativa. Además

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = u''(x) \leq 0.$$

Así que, v es una función superarmónica no negativa, pero como \mathbb{R}^2 es parabólico tenemos que v es constante. Luego u también es constante.

En la siguiente proposición probaremos que la parabolicidad es un invariante conforme en dimensión $n = 2$.

Proposición 2.2.3. *Sea (Σ, g) una superficie riemanniana y $\tilde{g} = e^{2u}g$ una métrica conforme a g , donde $u \in C^\infty(\Sigma)$. Entonces (Σ, g) es parabólica si y sólo si (Σ, \tilde{g}) es parabólica.*

Demostración. Si \tilde{g} es una métrica conforme a g , es claro que g es una métrica conforme a \tilde{g} (pues $g = e^{-2u}\tilde{g}$). Por lo tanto, para demostrar esta proposición sólo es necesario probar una implicación.

Veamos entonces que la condición es suficiente. Consideremos una función f sobre Σ tal que

$$f \leq 0 \quad \text{y} \quad \tilde{\Delta} f \geq 0,$$

donde $\tilde{\Delta}$ es el laplaciano con respecto a la métrica \tilde{g} . Como $\tilde{g} = e^{2u}g$ tenemos $\tilde{\Delta} = e^{-2u}\Delta$ y por lo tanto $f \leq 0$ y $\Delta f \geq 0$. Sabemos que (Σ, g) es parabólica, luego f es constante, y en consecuencia (Σ, \tilde{g}) es parabólica. □

Del hecho que \mathbb{R}^1 es parabólico y \mathbb{H}^1 isométrico a \mathbb{R}^1 tenemos que otro ejemplo de variedad parabólica es \mathbb{H}^1 . Pero a diferencia del plano euclídeo \mathbb{R}^2 , el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 con su métrica estándar no es parabólico. En efecto, consideremos el plano hiperbólico en el modelo del disco unidad con su métrica estándar

$$\tilde{g} = \frac{4}{(1-r^2)^2}(dx^2 + dy^2),$$

donde $r^2 = x^2 + y^2$. Este es conforme a la métrica llana $g = dx^2 + dy^2$ sobre el disco unidad, así que sus laplacianos son proporcionales. Entonces las dos métricas tienen las mismas funciones subarmónicas (o superarmónicas). Concluimos que hay muchas funciones subarmónicas acotadas sobre el plano hiperbólico dado que cualquier función subarmónica respecto a la métrica g en el disco de radio 2 es ciertamente acotada en el disco unitario y por lo tanto en el plano hiperbólico. Consecuentemente, \mathbb{H}^2 no puede ser parabólico.

Al ver algunos de los ejemplos estamos tentados a pensar que la parabolicidad depende de la dimensión de la variedad. Esto es engañoso, pues en la siguiente proposición podemos ver cuando un producto es parabólico sin preocuparnos que tan grande sea su dimensión.

Proposición 2.2.4. *Si (Σ, g_1) es una variedad compacta y (N, g_2) es una variedad parabólica, entonces $\Sigma \times N$ con la métrica producto es también parabólica.*

Demostración. Sea $u : \Sigma \times N \rightarrow \mathbb{R}$ una función superarmónica no negativa, esto es,

$$\Delta u \leq 0 \quad \text{y} \quad u \geq 0.$$

Consideremos la función $v : N \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$v(y) = \int_{\Sigma} u(x, y) dx,$$

para todo $x \in \Sigma$. Note que $v \geq 0$ (pues $u \geq 0$) y dado que Σ es compacta por el teorema de la divergencia tenemos que

$$\int_{\Sigma} \Delta u = \int_{\Sigma} \Delta_{\Sigma} u + \int_{\Sigma} \Delta_N u = \int_{\Sigma} \Delta_N u.$$

Luego,

$$\Delta_N v = \int_{\Sigma} \Delta_N u(x, y) dx = \int_{\Sigma} \Delta u(x, y) dx \leq 0. \quad (2.23)$$

Entonces v es una función no negativa y superarmónica, y como N es parabólica entonces v debe ser constante. Por lo tanto, $\Delta_N v = 0$. Luego, por (2.23) y el hecho que $\Delta u \leq 0$ tenemos que

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Sigma \times N \Rightarrow \Delta_N u = 0.$$

Consideremos

$$w = 1 - e^{-u}$$

y observemos que w es una función no negativa pues $u \geq 0$. Como w es una función de u , esto es, $w = f(u)$ donde $f(t) = 1 - e^{-t}$. Entonces

$$\Delta_N w = f'(u)\Delta_N u + f''(u)|\nabla u|^2,$$

notemos que $f'(t) = e^{-t}$ y $f''(t) = -e^{-t}$. Luego,

$$\Delta_N w = e^{-u}(\Delta_N u - |\nabla u|^2) = -e^{-u}|\nabla u|^2 \leq 0.$$

De manera que w es una función superarmónica y no negativa. Dado que N es parabólica, entonces w es constante, esto implica que $\Delta_N w = 0$, es decir, $-e^{-u}|\nabla u|^2 = 0$, pero como $e^{-u} > 0$ tenemos que $\nabla u = 0$, por lo tanto u es constante. \square

En particular, $\Sigma \times \mathbb{R}^2$ con Σ compacta es parabólica.

2.3. Completitud estocástica y el principio débil del máximo de Omori-Yau

Recordemos que la completitud estocástica es la propiedad de que un proceso estocástico tenga tiempo de vida (intrínseco) infinito. Una condición analítica clásica para expresar la completitud estocástica es la siguiente.

Definición 2.3.1. Una variedad riemanniana Σ se dice que es *estocásticamente completa* si para algún (y por lo tanto, cualquier) $(x, t) \in \Sigma \times (0, +\infty)$

$$\int_{\Sigma} p(x, y, t) dy = 1, \quad (2.24)$$

donde $p(x, y, t)$ es el núcleo de calor (minimal) del operador laplaciano Δ .

Notemos que en la definición anterior la variedad riemanniana Σ no se supone que sea geodésicamente completa. En verdad, siguiendo a Dodziuk [21], podemos construir un núcleo de calor minimal sobre una variedad riemanniana arbitraria como el supremo de los núcleos de calor de Dirichlet sobre una sucesión exhaustiva de dominios relativamente compactos con frontera diferenciable. La condición analítica expresada en (2.24) es equivalente a otro número de propiedades. Por ejemplo, tenemos que las siguientes caracterizaciones son equivalentes a la completitud estocástica (para una prueba, véase [23, Teorema 6.2]).

Teorema 2.3.2. *Sea Σ una variedad riemanniana. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) Σ es estocásticamente completa.
- (ii) Para todo $\lambda > 0$, la única solución diferenciable acotada no negativa de $\Delta u \geq \lambda u$ sobre Σ es $u \equiv 0$.
- (iii) Para todo $\lambda > 0$, la única solución diferenciable acotada no negativa de $\Delta u = \lambda u$ sobre Σ es $u \equiv 0$.
- (iv) Para todo $T > 0$, la única solución acotada sobre $\Sigma \times (0, +T)$ del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u \\ u|_{t=0^+} = 0 \end{cases} \quad \text{en el sentido } L^1_{loc}(\Sigma)$$

es $u \equiv 0$.

Observemos que toda variedad riemanniana parabólica claramente satisface la condición (ii) en el Teorema 2.3.2 y por lo tanto es estocásticamente completa. En [43], Pigola, Rigoli y Setti encontraron la siguiente caracterización de la completitud estocástica.

Teorema 2.3.3. *Sea Σ una variedad riemanniana. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a) Σ es estocásticamente completa.
- (b) Para toda función diferenciable $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ con $u^* = \sup_{\Sigma} u < +\infty$, y para todo $\varepsilon > 0$,

$$\inf_{\Omega_{\varepsilon}} \Delta u \leq 0$$

donde $\Omega_{\varepsilon} = \{x \in \Sigma : u(x) > u^* - \varepsilon\}$.

- (c) Para toda función diferenciable $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ con $u^* = \sup_{\Sigma} u < +\infty$ existe una sucesión de puntos $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ que satisface, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$(i) \ u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad \text{y} \quad (ii) \ \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}.$$

- (d) Para toda función diferenciable $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ con $u^* = \sup_{\Sigma} u < +\infty$ y toda $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, si $\Delta u \geq f(u)$ sobre el subconjunto $\Omega_{\varepsilon} = \{x \in \Sigma : u(x) > u^* - \varepsilon\}$, para algún $\varepsilon > 0$, entonces $f(u^*) \leq 0$.

Definición 2.3.4. Sea Σ una variedad riemanniana (no necesariamente completa). Se dice que el principio débil del máximo de Omori-Yau se verifica sobre Σ si, para cualquier función diferenciable $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ con $u^* = \sup_{\Sigma} u < +\infty$ existe una sucesión de puntos $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en Σ que satisface

$$(i) \ u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad \text{y} \quad (iii) \ \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}. \quad (2.25)$$

Similarmente, para cualquier función diferenciable $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ con $u_* = \inf_{\Sigma} u > -\infty$ existe una sucesión de puntos $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en Σ con las propiedades

$$(i) \quad u(x_k) < u_* + \frac{1}{k}, \quad \text{y} \quad (iii) \quad \Delta u(x_k) > -\frac{1}{k}. \quad (2.26)$$

En particular, el principio débil del máximo de Omori-Yau se verifica sobre toda variedad riemanniana parabólica.

Proposición 2.3.5. *No existen subvariedades minimales y acotadas en \mathbb{R}^m que sean estocásticamente completas.*

Demostración. Por contradicción supongamos que $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una subvariedad estocásticamente completa, minimal y acotada, esto es, existe $r > 0$ tal que $\psi(\Sigma) \subset B(0, r)$. Consideremos la función $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u = \frac{1}{2}|\psi|^2$$

y observemos que $u \leq (1/2)r^2 < +\infty$ entonces $u^* < +\infty$. Además, para todo $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ tenemos que

$$X(u) = \frac{1}{2}X(\langle \psi, \psi \rangle) = \langle \nabla_X \psi, \psi \rangle = \langle X, \psi^\top \rangle$$

Luego, $\nabla u = \psi^\top$.

Por otra parte, $X = \bar{\nabla}_X \psi = \bar{\nabla}_X \psi^\top + \bar{\nabla}_X \psi^\perp$. Aplicando las fórmulas de Gauss y Weingarten obtenemos $X = \nabla_X \psi^\top + \sigma(X, \psi^\top) - A_{\psi^\top} X + \nabla_X^\perp \psi^\perp$. De aquí que $\nabla_X \nabla u = X + A_{\psi^\perp} X$ y $\nabla^\perp \psi^\perp = -\sigma(X, \psi^\top)$. Por tanto el laplaciano de u está dado por

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla u, E_i \rangle = n + \sum_{i=1}^n \langle A_{\psi^\perp} E_i, E_i \rangle = n + \text{tr}(A_{\psi^\perp}) = n + n \langle \mathbf{H}, \psi \rangle.$$

Por otro lado, como Σ verifica el principio débil del máximo de Omori-Yau entonces existe $\{x_k\} \subset \Sigma$ tal que

$$u(x_k) < u^* - \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}.$$

De manera que

$$\frac{1}{k} > \Delta u(x_k) = n(1 + \langle \mathbf{H}(x_k), \psi(x_k) \rangle)$$

y dado que para cualquier x se tiene

$$\langle \mathbf{H}(x), \psi(x) \rangle \geq -|\langle \mathbf{H}(x), \psi(x) \rangle| \geq -|\mathbf{H}||\psi(x)| \geq -\sup_{\Sigma} |\mathbf{H}| r$$

concluimos que $1/k > n(1 - \sup_{\Sigma} |\mathbf{H}| r)$. Tomando el límite cuando $k \rightarrow \infty$ obtenemos

$$0 \geq 1 - \sup_{\Sigma} |\mathbf{H}| r$$

o lo que es lo mismo $\sup_{\Sigma} |\mathbf{H}| \geq 1/r$, pero esto es una contradicción pues Σ es minimal. \square

2.4. Fórmula tipo Simons y aplicación a subvariedades

En esta sección presentamos una fórmula de tipo Simons para el laplaciano de las funciones $|\tilde{\Phi}|^2$ y $|\phi_1|^2$ sobre subvariedades con vector curvatura media paralelo, la cual ha sido utilizada por muchos autores. Pero antes de presentarla analicemos la siguiente observación.

Observación 2.4.1. Si $\mathbf{H} \neq \mathbf{0}$ podemos escoger $\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ una base local ortonormal y normal a Σ tal que

$$\mathbf{H} = H\xi_1.$$

Obviamente, $\phi_1 = A_1 - HI$ y $\phi_\alpha = A_\alpha$ para todo $\alpha \geq 2$. En consecuencia, $|\phi_1|^2 = |A_1|^2 - nH^2$ y $|\phi_\alpha|^2 = |A_\alpha|^2$ para todo $\alpha \geq 2$. Diremos que Σ^n es *pseudoumbilical* si y solo si $|\phi_1| = 0$.

Además, si el vector curvatura media es paralelo, es decir, $\nabla_X^\perp \mathbf{H} = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$, entonces se tiene

$$X(H^2) = X(\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle) = 2 \langle \nabla_X^\perp \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = 0.$$

Esto implica que H es constante. Más aún, afirmamos que si \mathbf{H} es un vector paralelo no nulo entonces

$$\phi_1 \phi_\alpha = \phi_\alpha \phi_1 \quad \forall \alpha \geq 1. \quad (2.27)$$

En efecto, de (1.9) sabemos que $R^\perp(X, Y)\mathbf{H} = -\nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \mathbf{H} + \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \mathbf{H} + \nabla_{[X, Y]}^\perp \mathbf{H} = 0$ para todo $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$. Dado que Σ está inmersa en un espacio con curvatura seccional constante, de la ecuación de Ricci (1.11) y el hecho que H es constante, tenemos que

$$\langle R^\perp(X, Y)\mathbf{H}, \xi_\alpha \rangle = \langle [A_\alpha, A_{\mathbf{H}}]X, Y \rangle = H \langle [\phi_\alpha, \phi_1]X, Y \rangle.$$

Por lo tanto, $0 = \langle R^\perp(X, Y)\mathbf{H}, \xi_\alpha \rangle = H \langle [\phi_\alpha, \phi_1]X, Y \rangle$ y de aquí deducimos que $[\phi_\alpha, \phi_1] = 0$ pues $H \neq 0$.

Ya estamos listos para probar la fórmula tipo Simons para subvariedades inmersas en espacios forma riemannianos.

Lema 2.4.2. *Sea Σ^n una subvariedad inmersa en un espacio forma riemanniano $(n+p)$ -dimensional \mathbb{M}_c^{n+p} con vector curvatura media paralelo \mathbf{H} no nulo. Entonces*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta |\tilde{\Phi}|^2 &= \sum_{\alpha, \beta=2}^p \left\{ \text{tr}([\phi_\alpha, \phi_\beta]^2) - [\text{tr}(\phi_\alpha \phi_\beta)]^2 \right\} - \sum_{\alpha=1}^p [\text{tr}(\phi_\alpha \phi_1)]^2 + nH \sum_{\alpha=1}^p \text{tr}(\phi_\alpha^2 \phi_1) \\ &+ n(c + H^2) |\tilde{\Phi}|^2 + |\nabla \tilde{\Phi}|^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Demostración. Un cálculo tensorial estándar implica que

$$\frac{1}{2}\Delta|\tilde{\Phi}|^2 = \frac{1}{2}\Delta\langle\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}\rangle = |\nabla\tilde{\Phi}|^2 + \langle\tilde{\Phi}, \Delta\tilde{\Phi}\rangle. \quad (2.29)$$

Aquí $\nabla\tilde{\Phi} : \mathcal{X}(\Sigma) \times \mathcal{X}(\Sigma) \times \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}^\perp(\Sigma)$ denota la derivada covariante de $\tilde{\Phi}$, la cual está dada por

$$\nabla\tilde{\Phi}(X, Y, Z) = (\nabla_Z\tilde{\Phi})(X, Y) = \nabla_Z^\perp\tilde{\Phi}(X, Y) - \tilde{\Phi}(\nabla_Z X, Y) - \tilde{\Phi}(X, \nabla_Z Y),$$

para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\Sigma)$ y el laplaciano $\Delta\tilde{\Phi} : \mathcal{X}(\Sigma) \times \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}^\perp(\Sigma)$ está dado por

$$\Delta\tilde{\Phi}(X, Y) = \text{tr}(\nabla^2\tilde{\Phi}(X, Y, \cdot, \cdot)) = \sum_{k=1}^n \nabla^2\tilde{\Phi}(X, Y, E_k, E_k),$$

donde $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una base local ortonormal sobre Σ . Observemos que, en nuestra notación,

$$\nabla^2\tilde{\Phi}(X, Y, Z, V) = (\nabla_V\nabla\tilde{\Phi})(X, Y, Z).$$

Dado que \mathbf{H} es un vector paralelo tenemos que $\nabla\tilde{\Phi} = \nabla\sigma$, el cual es simétrico por la ecuación de Codazzi (1.8) y la simetría de σ . Entonces $\nabla^2\tilde{\Phi}$ es también simétrico en sus tres primeras variables.

Con respecto a las simetrías de $\nabla^2\tilde{\Phi}$ en las otras variables, no es difícil ver que

$$\begin{aligned} \nabla^2\tilde{\Phi}(X, Y, Z, V) &= \nabla^2\tilde{\Phi}(X, Y, V, Z) - R^\perp(V, Z)\tilde{\Phi}(X, Y) + \tilde{\Phi}(R(V, Z)X, Y) \\ &\quad + \tilde{\Phi}(X, R(V, Z)Y). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Por las simetrías tenemos que

$$\nabla^2\tilde{\Phi}(X, Y, E_k, E_k) = \nabla^2\tilde{\Phi}(E_k, X, Y, E_k).$$

De (2.30) se sigue

$$\begin{aligned} \nabla^2\tilde{\Phi}(E_k, X, Y, E_k) &= \nabla^2\tilde{\Phi}(E_k, X, E_k, Y) - R^\perp(E_k, Y)\tilde{\Phi}(E_k, X) + \tilde{\Phi}(R(E_k, Y)E_k, X) \\ &\quad + \tilde{\Phi}(E_k, R(E_k, Y)X) \end{aligned}$$

y usando las ecuaciones de Gauss (1.7) y Ricci (1.10) obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\Phi}(X, Y) &= \sum_{k=1}^n \left\{ \nabla^2\tilde{\Phi}(E_k, E_k, X, Y) - \sigma\left(A_{\tilde{\Phi}(E_k, X)}E_k, Y\right) + \sigma\left(E_k, A_{\tilde{\Phi}(E_k, X)}Y\right) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\Phi}(A_{\sigma(Y, E_k)}E_k, X) + \tilde{\Phi}(A_{\sigma(X, E_k)}Y, E_k) - \tilde{\Phi}(A_{\sigma(X, Y)}E_k, E_k) \right\} \\ &\quad + cn\tilde{\Phi}(X, Y) + \tilde{\Phi}(A_{\text{tr}(\sigma)}Y, X) - c\langle X, Y\rangle\text{tr}(\tilde{\Phi}). \end{aligned}$$

Como $\text{tr}(\tilde{\Phi}) = 0$ y $\sum_{k=1}^n \nabla^2 \tilde{\Phi}(E_k, E_k, X, Y) = \text{tr}(\nabla_Y \nabla_X \tilde{\Phi}) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\Phi}(X, Y) = & \sum_{k=1}^n \left[-\sigma \left(A_{\tilde{\Phi}(E_k, X)} E_k, Y \right) + \sigma \left(E_k, A_{\tilde{\Phi}(E_k, X)} Y \right) - \tilde{\Phi}(A_{\sigma(Y, E_k)} E_k, X) \right. \\ & \left. + \tilde{\Phi}(A_{\sigma(X, E_k)} Y, E_k) - \tilde{\Phi}(A_{\sigma(X, Y)} E_k, E_k) \right] + cn \tilde{\Phi}(X, Y) + nH \tilde{\Phi}(A_1 Y, X). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}, \Delta \tilde{\Phi} \rangle = & \sum_{i,j=1}^n \langle \tilde{\Phi}(E_i, E_j), \Delta \tilde{\Phi}(E_i, E_j) \rangle = \sum_{i,j,k=1}^n \left\{ -\langle \tilde{\Phi}(E_i, E_j), \sigma(A_{\tilde{\Phi}(E_k, E_i)} E_k, E_j) \rangle \right. \\ & + \langle \tilde{\Phi}(E_i, E_j), \sigma(E_k, A_{\tilde{\Phi}(E_k, E_i)} E_j) \rangle - \langle \tilde{\Phi}(E_i, E_j), \tilde{\Phi}(A_{\sigma(E_j, E_k)} E_k, E_i) \rangle \\ & \left. + \langle \tilde{\Phi}(E_i, E_j), \tilde{\Phi}(A_{\sigma(E_i, E_k)} E_j, E_k) \rangle - \langle \tilde{\Phi}(E_i, E_j), \tilde{\Phi}(A_{\sigma(E_i, E_j)} E_k, E_k) \rangle \right\} \\ & + cn \sum_{i,j=1}^n |\tilde{\Phi}(E_i, E_j)|^2 + nH \sum_{i,j=1}^n \langle \tilde{\Phi}(E_i, E_j), \tilde{\Phi}(A_1 E_j, E_i) \rangle. \end{aligned}$$

Sabemos que $\langle \tilde{\Phi}(E_i, E_j), \sigma(A_{\tilde{\Phi}(E_k, E_i)} E_k, E_j) \rangle = \langle A_{\tilde{\Phi}(E_i, E_j)} \circ A_{\tilde{\Phi}(E_k, E_i)} E_k, E_j \rangle$ y $\langle \tilde{\Phi}(E_i, E_j), \sigma(E_k, A_{\tilde{\Phi}(E_k, E_i)} E_j) \rangle = \langle A_{\tilde{\Phi}(E_k, E_i)} \circ A_{\tilde{\Phi}(E_i, E_j)} E_k, E_j \rangle$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}, \Delta \tilde{\Phi} \rangle = & \sum_{i,j,k=1}^n \left\{ \langle [A_{\tilde{\Phi}(E_k, E_i)}, A_{\tilde{\Phi}(E_i, E_j)}] E_k, E_j \rangle - \langle \tilde{\Phi}(E_i, E_j), \tilde{\Phi}(A_{\sigma(E_j, E_k)} E_k, E_i) \rangle \right. \\ & \left. + \langle \tilde{\Phi}(E_i, E_j), \tilde{\Phi}(A_{\sigma(E_i, E_k)} E_j, E_k) \rangle - \langle \tilde{\Phi}(E_i, E_j), \tilde{\Phi}(A_{\sigma(E_i, E_j)} E_k, E_k) \rangle \right\} \\ & + cn |\tilde{\Phi}|^2 + nH \sum_{i,j=1}^n \langle \tilde{\Phi}(E_i, E_j), \tilde{\Phi}(A_1 E_j, E_i) \rangle. \quad (2.31) \end{aligned}$$

Sea $\{\xi_\alpha\}_{\alpha=1}^p$ una base ortonormal y normal a Σ entonces podemos escribir a $\tilde{\Phi}$ en términos de la base de la siguiente forma: $\tilde{\Phi} = \sum_{\alpha=1}^p \langle \phi_\alpha E_i, E_i \rangle \xi_\alpha$. Reemplazando esto en (2.31), obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}, \Delta \tilde{\Phi} \rangle = & \sum_{i,j,k=1}^n \left\{ \sum_{\alpha,\gamma=1}^p \langle \phi_\gamma E_k, E_i \rangle \langle \phi_\alpha E_i, E_j \rangle \langle [A_\gamma, A_\alpha] E_k, E_j \rangle \right. \\ & - \sum_{\alpha,\beta=1}^p \left[\langle \phi_\alpha E_i, E_j \rangle \langle \phi_\alpha A_\beta E_k, E_i \rangle \langle A_\beta E_j, E_k \rangle \right. \\ & + \langle \phi_\alpha E_i, E_j \rangle \langle \phi_\alpha A_\beta E_j, E_k \rangle \langle A_\beta E_i, E_k \rangle \\ & \left. \left. - \langle \phi_\alpha E_i, E_j \rangle \langle \phi_\alpha A_\beta E_k, E_k \rangle \langle A_\beta E_i, E_j \rangle \right] \right\} \\ & + nH \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha=1}^p \langle \phi_\alpha E_i, E_j \rangle \langle \phi_\alpha A_1 E_j, E_i \rangle + cn |\tilde{\Phi}|^2. \end{aligned}$$

Luego, sumando en i se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}, \Delta \tilde{\Phi} \rangle &= cn |\Phi|^2 + \sum_{j,k=1}^n \left\{ \sum_{\alpha,\gamma=1}^p \langle \phi_\alpha E_j, \phi_\gamma E_k \rangle \langle [A_\gamma, A_\alpha] E_k, E_j \rangle \right. \\ &\quad - \sum_{\alpha,\beta=1}^p \left[\langle \phi_\alpha E_j, \phi_\alpha A_\beta E_k \rangle \langle A_\beta E_j, E_k \rangle - \langle \phi_\alpha E_j, A_\beta E_k \rangle \langle \phi_\alpha A_\beta E_j, E_k \rangle \right. \\ &\quad \left. \left. + \langle \phi_\alpha E_j, A_\beta E_j \rangle \langle \phi_\alpha A_\beta E_k, E_k \rangle \right] \right\} + nH \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^p \langle \phi_\alpha E_j, \phi_\alpha A_1 E_j \rangle \end{aligned}$$

y ahora sumando sobre j resulta

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}, \Delta \tilde{\Phi} \rangle &= \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{\alpha,\gamma=1}^p \langle \phi_\alpha \phi_\gamma E_k, [A_\gamma, A_\alpha] E_k \rangle - \sum_{\alpha,\beta=1}^p \left[\langle \phi_\alpha^2 A_\beta E_k, A_\beta E_k \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \langle \phi_\alpha A_\beta E_k, A_\beta \phi_\alpha E_k \rangle + \langle \phi_\alpha A_\beta E_k, E_k \rangle \operatorname{tr}(\phi_\alpha A_\beta) \right] \right\} \\ &\quad + nH \sum_{\alpha=1}^p \operatorname{tr}(\phi_\alpha^2 A_1) + cn |\tilde{\Phi}|^2. \end{aligned}$$

De (2.27) y la ecuación anterior tenemos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}, \Delta \tilde{\Phi} \rangle &= \sum_{\alpha,\beta=2}^p \left\{ \operatorname{tr}([\phi_\alpha, \phi_\beta]^2) - [\operatorname{tr}(\phi_\alpha \phi_\beta)]^2 \right\} - \sum_{\alpha=1}^p [\operatorname{tr}(\phi_\alpha \phi_1)]^2 + nH \sum_{\alpha=1}^p \operatorname{tr}(\phi_\alpha^2 \phi_1) \\ &\quad + n(c + H^2) |\tilde{\Phi}|^2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde hemos usado los hechos $A_1 = \phi_1 + HI$ y $\operatorname{tr}(\phi_1) = 0$. Como último paso para concluir esta prueba, reemplazamos (2.32) en (2.29). \square

Lema 2.4.3. *Sea Σ^n una subvariedad inmersa en un espacio forma riemanniano $(n+p)$ -dimensional \mathbb{M}_c^{n+p} con vector curvatura media paralelo \mathbf{H} no nulo. Entonces*

$$\frac{1}{2} \Delta |\phi_1|^2 = - \sum_{\alpha=1}^p [\operatorname{tr}(\phi_1 \phi_\alpha)]^2 + n(c + H^2) |\phi_1|^2 + nH \operatorname{tr}(\phi_1^3) + |\nabla \phi_1|^2. \quad (2.33)$$

Demostración. Dado que H es una constante no cero, $\nabla \phi_1 = \nabla A_1$. De la ecuación de Codazzi (1.18) concluimos que $\nabla \phi_1$ es simétrico porque ξ_1 es un vector paralelo. Por lo tanto, $\nabla^2 \phi_1$ es también simétrico en sus dos primeras variables,

$$\nabla^2 \phi_1(X, Y, Z) = \nabla^2 \phi_1(Y, X, Z), \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(\Sigma).$$

Con respecto a las simetrías de $\nabla^2 \phi_1$ en las otras variables, no es difícil de ver que

$$\nabla^2 \phi_1(X, Y, Z) = \nabla^2 \phi_1(X, Z, Y) - R(Z, Y) \phi_1 X + \phi_1 (R(Z, Y) X). \quad (2.34)$$

Como $\Delta\phi_1(X) = \sum_{i=1}^n \nabla^2\phi_1(X, E_i, E_i) = \sum_{i=1}^n \nabla^2\phi_1(E_i, X, E_i)$. De (2.34) tenemos

$$\nabla^2\phi_1(E_i, X, E_i) = \nabla^2\phi_1(E_i, E_i, X) - R(E_i, X)\phi_1 E_i + \phi_1(R(E_i, X)E_i).$$

Luego, usando la ecuación de Gauss (1.7) tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta\phi_1(X) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \nabla_X(\nabla\phi_1)(E_i, E_i) - c \langle \phi_1 E_i, E_i \rangle X + c \langle \phi_1 X, E_i \rangle E_i + A_{\sigma(X, \phi_1 E_i)} E_i \right. \\ &\quad \left. - A_{\sigma(E_i, \phi_1 E_i)} X + c\phi_1 X - c \langle X, E_i \rangle \phi_1 E_i - \phi_1 A_{\sigma(X, E_i)} E_i + \phi_1 A_{\sigma(E_i, E_i)} X \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ A_{\sigma(X, \phi_1 E_i)} E_i - A_{\sigma(E_i, \phi_1 E_i)} X - \phi_1 A_{\sigma(X, E_i)} E_i \right\} + cn\phi_1 X + nH\phi_1 A_1 X \end{aligned}$$

donde hemos usado los hechos de que la traza conmuta con ∇_X y que $\text{tr}(\nabla\phi_1) = 0$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \langle \phi_1, \Delta\phi_1 \rangle &= \sum_{j=1}^n \langle \phi_1 E_j, \Delta\phi_1(E_j) \rangle = \sum_{i,j=1}^n \left\{ \langle \phi_1 A_{\sigma(E_j, \phi_1 E_i)} E_i, E_j \rangle - \langle \phi_1^2 A_{\sigma(E_j, E_i)} E_i, E_j \rangle \right\} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \text{tr}(\phi_1 A_{\sigma(E_i, \phi_1 E_i)}) + cn|\phi_1|^2 + nH\text{tr}(\phi_1^2 A_1). \end{aligned}$$

Si $\{\xi_\alpha\}_{\alpha=1}^p$ es una base ortonormal de $(T_x\Sigma)^\perp$, tenemos

$$\sigma(E_j, \phi_1 E_i) = \sum_{\alpha=1}^p \langle A_\alpha \phi_1 E_i, E_j \rangle \xi_\alpha \quad \text{y} \quad \sigma(E_i, E_j) = \sum_{\alpha=1}^p \langle A_\alpha E_i, E_j \rangle \xi_\alpha.$$

Usando esto y (2.27) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \phi_1, \Delta\phi_1 \rangle &= \sum_{\alpha=1}^p \left\{ \text{tr}((\phi_1 A_\alpha)^2) - \text{tr}(A_\alpha \phi_1^2 A_\alpha) \right\} - [\text{tr}(\phi_1 A_1)]^2 - \sum_{\alpha=2}^p [\text{tr}(\phi_1 \phi_\alpha)]^2 \\ &\quad + cn|\phi_1|^2 + nH\text{tr}[\phi_1^2(\phi_1 + HI)] \\ &= - \sum_{\alpha=1}^p [\text{tr}(\phi_1 \phi_\alpha)]^2 + cn|\phi_1|^2 + n|H|\text{tr}(\phi_1^3) + nH^2|\phi_1|^2. \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazamos esto en $(1/2)\Delta|\phi_1|^2 = |\nabla\phi_1|^2 + \langle \phi_1, \Delta\phi_1 \rangle$. \square

En particular, para hipersuperficies tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.4.4. *Sea Σ^n una hipersuperficie inmersa en un espacio forma riemanniano \mathbb{M}_c^{n+1} con curvatura media constante H , y denotemos por Φ su tensor de umbilicidad total. Entonces*

$$\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 = |\nabla\Phi|^2 + nH\text{tr}(\Phi^3) - |\Phi|^2(|\Phi|^2 - n(c + H^2)). \quad (2.35)$$

A continuación presentamos una aplicación para subvariedades inmersas en espacios forma con vector curvatura media paralelo. Para ello, consideraremos el siguiente resultado auxiliar dado por Okumura en [38].

Lema 2.4.5. *Sean a_1, \dots, a_n números reales tales que $\sum_{i=1}^n a_i = 0$. Entonces*

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{3/2} \leq \sum_{i=1}^n a_i^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{3/2}.$$

Además, la igualdad se tiene en el lado de la derecha (respectivamente, en el lado de la izquierda) si y sólo si $(n-1)$ de los a_i 's son no positivos (respectivamente, no negativos) e iguales.

En [53, Teorema 1.1] Vlachos utilizando la fórmula de Simons y el principio del máximo de Omori-Yau consiguió estimar el supremo de $|\tilde{\Phi}|$ para subvariedades completas con vector curvatura media paralelo inmersas en la esfera euclídea. Nosotros hemos podido mejorar y extender dicho teorema a subvariedades estocásticamente completas con vector curvatura media paralelo inmersas en los espacios forma riemannianos como se puede apreciar en el siguiente teorema.

Teorema 2.4.6. *Sea Σ^n una subvariedad estocásticamente completa inmersa en un espacio forma $(n+p)$ -dimensional \mathbb{M}_c^{n+p} ($c = 0, 1, -1$ y $n \geq 3$) con vector curvatura media paralelo \mathbf{H} no nulo y $H^2 + c > 0$. Entonces*

(i) o bien Σ es una subvariedad pseudoumbilical,

(ii) o bien $\sup_{\Sigma} |\tilde{\Phi}| \geq \alpha_{|H|,c} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left(\sqrt{n^2 H^2 + 4(n-1)c} - (n-2)|H| \right) > 0$.

Demostración. Podemos usar el Lema 2.4.5 para estimar $\text{tr}(\phi_1^3)$ como sigue

$$|\text{tr}(\phi_1^3)| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} |\phi_1|^3,$$

y entonces

$$nH \text{tr}(\phi_1^3) \geq -n|H| |\text{tr}(\phi_1^3)| \geq -\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} |H| |\phi_1|^3. \quad (2.36)$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que $|\text{tr}(\phi_1 \phi_\alpha)| \leq |\phi_1| |\phi_\alpha|$ para todo $\alpha \geq 1$. Luego,

$$\sum_{\alpha=1}^p [\text{tr}(\phi_1 \phi_\alpha)]^2 \leq |\phi_1|^2 \sum_{\alpha=1}^p |\phi_\alpha|^2 = |\phi_1|^2 |\tilde{\Phi}|^2.$$

Esto es,

$$-\sum_{\alpha=1}^p [\text{tr}(\phi_1 \phi_\alpha)]^2 \geq -|\phi_1|^2 |\tilde{\Phi}|^2. \quad (2.37)$$

Usando (2.36), (2.37) y el hecho que $|\phi_1| \leq |\tilde{\Phi}|$ en (2.33), encontramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta |\phi_1|^2 &\geq |\nabla \phi_1|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} |H| |\phi_1|^3 - |\phi_1|^2 (|\tilde{\Phi}|^2 - n(c+H^2)) \\ &\geq -|\phi_1|^2 P_{|H|,c}(|\tilde{\Phi}|), \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde $P_{|H|,c}(x) = x^2 + n(n-2)/\sqrt{n(n-1)}|H|x - n(c+H^2)$ es un polinomio cuadrático creciente si $x \geq 0$ (de hecho, si $x \geq -n(n-2)/(2\sqrt{n(n-1)})|H|$ véase Figura 2.1) que satisface $P_{|H|,c}(0) = -n(c+H^2) < 0$ y cuyo discriminante está dado por $n/(n-1)(n^2H^2 + 4(n-1)c)$. Además, como $H^2 + c > 0$ el polinomio $P_{|H|,c}(x)$ tiene una única raíz positiva dada por

$$\alpha_{|H|,c} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left(\sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)c} - (n-2)|H| \right),$$

pues

$$\sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)c} - (n-2)|H| > 0 \Leftrightarrow 4(n-1)(c+H^2) > 0.$$

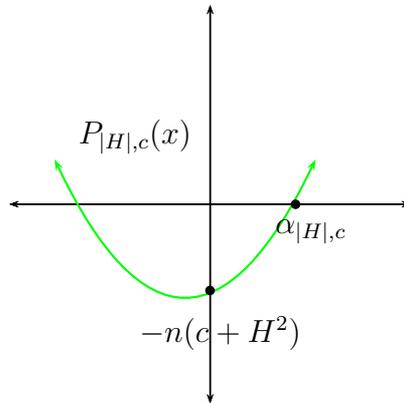


Figura 2.1. El polinomio $P_{|H|,c}(x)$ cuando $H^2 + c > 0$.

Si $\sup_{\Sigma} |\tilde{\Phi}| = +\infty$, entonces se tiene trivialmente (ii) y no hay nada que probar. Si $\sup_{\Sigma} |\tilde{\Phi}| < +\infty$, como $|\phi_1| \leq |\tilde{\Phi}|$ entonces $\sup_{\Sigma} |\phi_1| < +\infty$ y podemos aplicar (2.25) a la función $|\phi_1|^2$, así que, existe $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en Σ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\phi_1|(x_k) = \sup_{\Sigma} |\phi_1|, \quad \text{y} \quad \Delta |\phi_1|^2(x_k) < 1/k,$$

lo cual junto con (2.38) implica

$$1/k > \Delta|\phi_1|^2(x_k) \geq -2|\phi_1|^2(x_k)P_{|H|,c}(|\tilde{\Phi}|(x_k)).$$

Dado que $\{|\tilde{\Phi}|(x_k)\}$ es una sucesión acotada, tomando el límite superior cuando $k \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\left(\sup_{\Sigma} |\phi_1|\right)^2 P_{|H|,c} \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} |\tilde{\Phi}|(x_k)\right) \geq 0. \quad (2.39)$$

Se sigue de aquí o bien $\sup_{\Sigma} |\phi_1| = 0$, lo cual significa que $|\phi_1| = \text{constante} = 0$ y la subvariedad es pseudoumbilical, o bien $\sup_{\Sigma} |\phi_1| > 0$ y entonces

$$P_{|H|,c} \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} |\tilde{\Phi}|(x_k)\right) \geq 0$$

lo que implica $\sup_{\Sigma} |\tilde{\Phi}| \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} |\tilde{\Phi}|(x_k) \geq \alpha_{|H|,c}$. □

Capítulo 3

Una estimación óptima para el ínfimo de la curvatura escalar

Sumario. En este capítulo estudiamos el comportamiento de la curvatura escalar S de una hipersuperficie completa inmersa con curvatura media constante en un espacio forma riemanniano de curvatura constante, derivando una estimación óptima para el ínfimo de S . Nuestros resultados serán una aplicación de un principio débil del máximo de Omori-Yau. Los resultados de este capítulo se encuentran recogidos en el trabajo [5].

Abstract. *In this chapter we study the behavior of the scalar curvature S of a complete hypersurface immersed with constant mean curvature into a Riemannian space form of constant curvature, deriving a sharp estimate for the infimum of S . Our results will be an application of a weak Omori-Yau maximum principle. The results of this chapter are collected in the paper [5].*

3.1. Superficies con curvatura media constante

En un artículo clásico, Klotz y Osserman [29] caracterizaron las esferas totalmente umbilicales y los cilindros circulares como las únicas superficies completas inmersas en el espacio euclídeo 3-dimensional \mathbb{R}^3 con curvatura media constante no cero y cuya curvatura de Gauss no cambia de signo. Más tarde, Hoffman [26] y Tribuzy [52] dieron una extensión de este resultado al caso de superficies con curvatura media constante en la esfera euclídea 3-dimensional \mathbb{S}^3 y el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 , respectivamente. Específicamente, si colocamos juntos los resultados de estos autores en una sola afirmación, se obtiene el siguiente teorema (véase también [16, Proposición 3.3]).

Teorema 3.1.1. *Sea Σ una superficie completa inmersa en un espacio forma 3-dimensional \mathbb{M}_c^3 ($c = 0, 1, -1$) con curvatura media constante H . Si su curvatura*

de Gauss K no cambia de signo, entonces o bien Σ es una superficie totalmente umbilical o bien $K = 0$ y

- (a) $c = 0$ y Σ es un cilindro circular $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{R}^3$, con $r > 0$,
- (b) $c = 1$ y Σ es un toro llano $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{S}^3$, con $0 < r < 1$,
- (c) $c = -1$ y Σ es un cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{H}^3$, con $r > 0$.

Como una bonita aplicación del Teorema 3.1.1, obtenemos la siguiente consecuencia para el ínfimo de la curvatura de Gauss de Σ .

Teorema 3.1.2 ([5], Theorem 2). *Sea Σ una superficie completa inmersa en un espacio forma 3-dimensional \mathbb{M}_c^3 ($c = 0, 1, -1$) con curvatura media constante H tal que $H^2 + c > 0$, y denotemos por K su curvatura de Gauss. Entonces*

- (i) o bien $\inf_{\Sigma} K = H^2 + c$, y Σ es una superficie totalmente umbilical,
- (ii) o bien $\inf_{\Sigma} K \leq 0$, con igualdad si y sólo si
 - (a) $c = 0$ y Σ es un cilindro circular $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{R}^3$, con $r > 0$,
 - (b) $c = 1$ y Σ es un toro llano $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{S}^3$, con $0 < r < 1$,
 - (c) $c = -1$ y Σ es un cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{H}^3$, con $r > 0$.

Demostración. De (1.23) sabemos que en la superficie se tiene $0 \leq |\Phi|^2 = 2[H^2 - (K - c)]$. Entonces

$$K \leq H^2 + c$$

sobre Σ , con igualdad en los puntos umbilicales de Σ . Por lo tanto,

$$\inf_{\Sigma} K \leq H^2 + c$$

con igualdad si y sólo si Σ es totalmente umbilical. Esto prueba la parte (i).

Más aún, si se tiene la desigualdad estricta, es decir, $\inf_{\Sigma} K < H^2 + c$ entonces necesariamente

$$\inf_{\Sigma} K \leq 0,$$

pues de otra forma, tendríamos que $K \geq \inf_{\Sigma} K > 0$ lo cual no es posible por el Teorema 3.1.1, ya que la superficie no es totalmente umbilical ni llana como (a), (b) y (c). Esto muestra que $\inf_{\Sigma} K \leq 0$.

Finalmente, si se tiene la igualdad $\inf_{\Sigma} K = 0$ entonces $K \geq 0$ y por el Teorema 3.1.1 concluimos que Σ debe ser una de las superficies de los items (a), (b) o (c) del Teorema 3.1.1. \square

Ahora, observemos que las superficies de revolución muestran que la estimación del Teorema 3.1.2 es óptima. Por ejemplo, si consideramos las superficies de revolución de Delaunay en el espacio euclídeo. Para una constante dada $H \neq 0$, podemos considerar la familia de onduloideos en \mathbb{R}^3 (véase Figura 3.1) con curvatura media constante H , la cual está dada por la siguiente parametrización

$$(s, \theta) \xrightarrow{X} (x_B(s), y_B(s) \cos \theta, y_B(s) \sin \theta) \quad (3.1)$$

donde $0 < B < 1$ y

$$x_B(s) = \int_0^s \frac{1 + B \operatorname{sen}(2Ht)}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \operatorname{sen}(2Ht)}} dt,$$

$$y_B(s) = \frac{\sqrt{1 + B^2 + 2B \operatorname{sen}(2Hs)}}{2|H|} > 0.$$

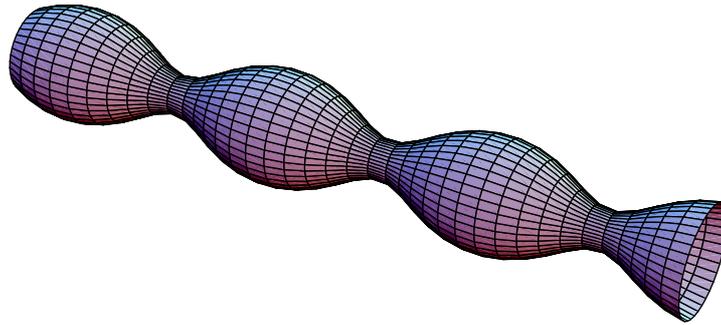


Figura 3.1. Onduloideos.

Obsérvese que las derivadas parciales de X están dadas por

$$X_s = (x'_B(s), y'_B(s) \cos \theta, y'_B(s) \sin \theta) \quad \text{y} \quad X_\theta = (0, -y_B(s) \sin \theta, y_B(s) \cos \theta).$$

Luego,

$$E := \langle X_s, X_s \rangle = x'_B(s)^2 + y'_B(s)^2 = 1.$$

En efecto, por el teorema fundamental del cálculo sabemos que

$$x'_B(s) = \frac{1 + B \operatorname{sen}(2Hs)}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \operatorname{sen}(2Hs)}}$$

y realizando un cálculo directo tenemos

$$y'_B(s) = \frac{H}{|H|} \frac{B \cos(2Hs)}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \operatorname{sen}(2Hs)}},$$

de donde se sigue que $x'_B(s)^2 + y'_B(s)^2 = 1$.

Por otra parte,

$$F := \langle X_s, X_\theta \rangle = 0, \quad G := \langle X_\theta, X_\theta \rangle = y_B^2(s) > 0, \quad \text{y} \quad \sqrt{EG} = y_B(s).$$

Así que la primera forma fundamental de estas superficies está dada por

$$ds^2 + y_B(s)^2 d\theta^2, \quad (3.2)$$

y como $F = 0$ podemos calcular la curvatura de Gauss de la siguiente forma

$$\begin{aligned} K_B(s, \theta) &= \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{E_\theta}{\sqrt{EG}} \right)_\theta + \left(\frac{G_s}{\sqrt{EG}} \right)_s \right] \\ &= \frac{-1}{2y_B(s)} \left(\frac{2y_B(s)y'_B(s)}{y_B(s)} \right)_s = -\frac{y''_B(s)}{y_B(s)} \\ &= \frac{4H^2 B(B + \sin(2Hs))(1 + B \sin(2Hs))}{(1 + B^2 + 2B \sin(2Hs))^2}. \end{aligned}$$

De manera que para estos ejemplos la función $K_B(s, \theta) = K_B(s)$ depende sólo de la variable s , así que si calculamos su primera derivada obtenemos

$$K'_B(s) = \frac{8H^3 B(1 - B^2)^2 \cos(2Hs)}{(1 + B^2 + 2B \sin(2Hs))^3}.$$

Entonces $K'_B(s) = 0$ si y sólo si $\cos(2Hs) = 0$; por consiguiente los puntos críticos de $K_B(s)$ son

$$\frac{\pi}{4H} + \frac{\pi}{H}k \quad \text{y} \quad \frac{3\pi}{4H} + \frac{\pi}{H}h, \quad \text{donde} \quad h, k \in \mathbb{Z},$$

pues $K_B(s)$ es una función periódica de periodo π/H . Por otra parte, la segunda derivada de la función $K_B(s)$ viene dada por

$$K''_B(s) = \frac{-16H^4 B(1 - B^2)^2 [6B + \sin(2Hs)(1 + B^2 - 2B \sin(2Hs))]}{(1 + B^2 + 2B \sin(2Hs))^2}.$$

Evaluando los puntos críticos en esta segunda derivada se tiene que

$$K''_B \left(\frac{\pi}{4H} + \frac{\pi}{H}k \right) = \frac{-16H^4 B(1 - B^2)^2}{(1 + B^2)} < 0$$

y

$$K''_B \left(\frac{3\pi}{4H} + \frac{\pi}{H}h \right) = \frac{16H^4 B(1 - B^2)^2}{(1 - B^2)} > 0.$$

Aplicando el criterio de la segunda derivada concluimos que en $\pi/4H + (\pi/H)k$ se alcanza un máximo y en $3\pi/4H + (\pi/H)h$ se alcanza un mínimo. Por esta razón, podemos afirmar que el

$$\inf K_B = \frac{-4H^2 B}{(1 - B)^2} < 0,$$

y para un $\varepsilon > 0$ dado, existe $0 < B < 1$ tal que

$$\inf K_B = -\varepsilon < 0.$$

A continuación presentamos otra prueba del Teorema 3.1.2 aplicando técnicas del análisis complejo y del principio del máximo de Omori-Yau.

Enfoque alternativo del Teorema 3.1.2

Dado que Σ es orientable, la métrica riemanniana inducida en Σ determina una estructura conforme sobre Σ . En lo que sigue, será útil tratar a Σ como una superficie de Riemann con respecto a esta estructura conforme y a la inmersión isométrica ψ como una inmersión conforme. Si $z = u + iv$ es una coordenada compleja sobre Σ , entonces la métrica inducida sobre Σ puede ser expresada de la siguiente forma

$$ds^2 = e^\varrho |dz|^2 \quad (3.3)$$

para una función diferenciable $\varrho = \varrho(z)$. Si realizamos las siguientes identificaciones, las cuales son lícitas,

$$\psi_u = d\psi(\partial_u) \equiv \partial_u, \quad \text{y} \quad \psi_v = d\psi(\partial_v) \equiv \partial_v,$$

se pueden definir campos locales de la forma

$$\psi_z = \frac{1}{2}(\psi_u - i\psi_v), \quad \text{y} \quad \psi_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\psi_u + i\psi_v), \quad (3.4)$$

que satisfacen

$$\langle \psi_z, \psi_z \rangle = \langle \psi_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}} \rangle = 0, \quad \langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle = \frac{e^\varrho}{2} \quad (3.5)$$

donde los subíndices denotan las derivadas parciales. En efecto,

$$\begin{aligned} \langle \psi_z, \psi_z \rangle &= \frac{1}{4} (\langle \psi_u, \psi_u \rangle - 2i \langle \psi_u, \psi_v \rangle - \langle \psi_v, \psi_v \rangle) = 0, \\ \langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle &= \frac{1}{4} (\langle \psi_u, \psi_u \rangle + \langle \psi_v, \psi_v \rangle) = \frac{e^\varrho}{2}, \\ \langle \psi_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}} \rangle &= \overline{\langle \psi_z, \psi_z \rangle} = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, $\{\psi_u, \psi_v\}$ es una base ortogonal local de campos tangentes sobre $\psi(\Sigma) \equiv \Sigma$ con $|\psi_u| = |\psi_v| = e^{\varrho/2}$, por lo tanto $\{e^{-\varrho/2}\psi_u, e^{-\varrho/2}\psi_v\}$ es una base ortonormal. Si denotamos por A al endomorfismo de Weingarten, tenemos que

$$\begin{aligned} 2H &= \text{tr}(A) = \langle A(e^{-\varrho/2}\psi_u), e^{-\varrho/2}\psi_u \rangle + \langle A(e^{-\varrho/2}\psi_v), e^{-\varrho/2}\psi_v \rangle \\ &= e^{-\varrho} [\langle A(\psi_u), \psi_u \rangle + \langle A(\psi_v), \psi_v \rangle], \end{aligned}$$

y despejando se sigue

$$2He^{\varrho} = \langle A(\psi_u), \psi_u \rangle + \langle A(\psi_v), \psi_v \rangle. \quad (3.6)$$

Definiendo ψ_z y $\psi_{\bar{z}}$ como en (3.4) y utilizando la \mathbb{C} -linealidad de A , tenemos

$$\begin{aligned} \langle A(\psi_z), \psi_{\bar{z}} \rangle &= \frac{1}{4} \langle A(\psi_u - i\psi_v), \psi_u + i\psi_v \rangle \\ &= \frac{1}{4} [\langle A(\psi_u), \psi_u \rangle + \langle A(\psi_v), \psi_v \rangle] = \frac{1}{2} He^{\varrho}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} \langle A(\psi_z), \psi_z \rangle &= \frac{1}{4} \langle A(\psi_u - i\psi_v), \psi_u - i\psi_v \rangle \\ &= \frac{1}{4} [\langle A(\psi_u), \psi_u \rangle - \langle A(\psi_v), \psi_v \rangle] - \frac{1}{2} i \langle A(\psi_u), \psi_v \rangle. \end{aligned} \quad (3.8)$$

A partir de esta expresión podemos definir una función diferenciable ϕ de la siguiente forma:

$$\phi(z) = 2 \langle A(\psi_z), \psi_z \rangle = -2 \langle N_z, \psi_z \rangle = -2(\partial_z(\langle \psi_z, N \rangle) - \langle \psi_{zz}, N \rangle) = 2 \langle \psi_{zz}, N \rangle. \quad (3.9)$$

Definición 3.1.3. A la forma diferencial cuadrática $Q(p) = \phi(z(p))dz^2(p)$ la llamaremos *diferencial de Hopf* de la superficie Σ , y diremos que es holomorfa si lo es ϕ .

Por otra parte, observemos que

$$\varrho_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\partial_{\bar{z}}(\varrho_u) - i\partial_{\bar{z}}(\varrho_v) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(\varrho_{uu} + i\varrho_{uv}) - \frac{i}{2}(\varrho_{vu} + i\varrho_{vv}) \right) = \frac{1}{4}(\varrho_{uu} + \varrho_{vv}).$$

Entonces

$$\Delta_o \varrho = \varrho_{uu} + \varrho_{vv} = 4\varrho_{z\bar{z}}, \quad (3.10)$$

donde Δ_o denota el laplaciano respecto a la métrica llana $g_o = |dz|^2 = du^2 + dv^2$.

La expresión (3.3) indica precisamente que la métrica $g = ds^2$ es localmente conforme a g_o , pues $g = e^{\varrho}g_o$. Por tanto, teniendo en cuenta la relación entre las curvaturas de Gauss de dos *métricas conformes*, se tiene que

$$e^{\varrho}K = K_o - (1/2)\Delta_o \varrho.$$

En nuestro caso, como $K_o = 0$ se tiene que la curvatura de Gauss de Σ está dada por $K = -\frac{e^{\varrho}}{2}\Delta_o \varrho$, de manera que

$$K = -2e^{-\varrho}\varrho_{z\bar{z}}. \quad (3.11)$$

Los campos vectoriales tangentes $\psi_z, \psi_{\bar{z}}$, así como también el normal N (y el vector posición ψ , cuando $c = \pm 1$) definen un sistema de referencia sobre la superficie, el cual satisface las siguientes ecuaciones estructurales para la inmersión.

Proposición 3.1.4. *Sea $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}_c^3$ una superficie orientable con aplicación de Gauss N y sea z una coordenada compleja local sobre Σ tal que $ds^2 = e^\rho |dz|^2$. Entonces*

$$\psi_{zz} = \rho_z \psi_z + \frac{1}{2} \phi N, \quad (3.12)$$

$$\psi_{z\bar{z}} = \frac{e^\rho}{2} H N - c \frac{e^\rho}{2} \psi, \quad (3.13)$$

$$N_z = -H \psi_z - \phi e^{-\rho} \psi_{\bar{z}}, \quad (3.14)$$

donde $H = (1/2)\text{tr}(A) = 2e^{-\rho} \langle \psi_{z\bar{z}}, N \rangle$ es la función curvatura media de la superficie y $\phi = 2 \langle \psi_{zz}, N \rangle$.

Demostración. Nuestro objetivo es escribir la fórmula de Gauss dada en (1.12) y la fórmula de Weingarten (1.13) para la inmersión ψ en términos de z . Entonces

$$\begin{aligned} \nabla_{\psi_z}^\circ \psi_z &= \nabla_{\psi_z} \psi_z + \langle A(\psi_z), \psi_z \rangle N - c \langle \psi_z, \psi_z \rangle \psi = \nabla_{\psi_z} \psi_z + \langle A(\psi_z), \psi_z \rangle N, \\ \nabla_{\psi_{\bar{z}}}^\circ \psi_z &= \nabla_{\psi_{\bar{z}}} \psi_z + \langle A(\psi_z), \psi_{\bar{z}} \rangle N - c \langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle \psi = \nabla_{\psi_{\bar{z}}} \psi_z + \langle A(\psi_z), \psi_{\bar{z}} \rangle N - c \frac{e^\rho}{2} \psi, \\ \nabla_{\psi_{\bar{z}}}^\circ \psi_{\bar{z}} &= \overline{\nabla_{\psi_z}^\circ \psi_z}. \end{aligned}$$

Dado que $\{\psi_z, \psi_{\bar{z}}\}$ forman una base de $T\Sigma$ tenemos

$$\nabla_{\psi_z} \psi_z = \alpha_1 \psi_z + \beta_1 \psi_{\bar{z}} \quad \text{y} \quad \nabla_{\psi_z} \psi_{\bar{z}} = \alpha_2 \psi_z + \beta_2 \psi_{\bar{z}},$$

donde $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ son funciones con valores en \mathbb{C} . Calculemos los valores de α_i, β_i para $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2e^{-\rho} \langle \nabla_{\psi_z} \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle = 2e^{-\rho} [\psi_z (\langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle) - \langle \psi_z, \nabla_{\psi_z} \psi_{\bar{z}} \rangle] \\ &= 2e^{-\rho} \left[\psi_z \left(\frac{e^\rho}{2} \right) - \langle \psi_z, \nabla_{\psi_{\bar{z}}} \psi_z \rangle \right] = 2e^{-\rho} \left[\rho_z \frac{e^\rho}{2} - \frac{1}{2} \psi_{\bar{z}} (\langle \psi_z, \psi_z \rangle) \right] = \rho_z, \\ \beta_1 &= 2e^{-\rho} \langle \nabla_{\psi_z} \psi_z, \psi_z \rangle = 2e^{-\rho} \left[\frac{1}{2} \psi_z (\langle \psi_z, \psi_z \rangle) \right] = 0. \end{aligned}$$

Análogamente, para α_2, β_2 tenemos

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 2e^{-\rho} \langle \nabla_{\psi_z} \psi_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}} \rangle = 2e^{-\rho} \left[\frac{1}{2} \psi_z (\langle \psi_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}} \rangle) \right] = 0, \\ \beta_2 &= 2e^{-\rho} \langle \nabla_{\psi_z} \psi_{\bar{z}}, \psi_z \rangle = 2e^{-\rho} \langle \nabla_{\psi_{\bar{z}}} \psi_z, \psi_z \rangle = 2e^{-\rho} \left[\frac{1}{2} \psi_{\bar{z}} (\langle \psi_z, \psi_z \rangle) \right] = 0. \end{aligned}$$

De modo que, $\nabla_{\psi_z} \psi_z = \rho_z \psi_z$ y $\nabla_{\psi_z} \psi_{\bar{z}} = 0$.

Por otra parte, $A(\psi_z)$ también se escribe en términos de la base de $T\Sigma$, así,

$$A(\psi_z) = \lambda_1 \psi_z + \lambda_2 \psi_{\bar{z}},$$

donde λ_1, λ_2 son funciones con valores en \mathbb{C} . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{e^\varrho}{2}\lambda_1 &= \langle A(\psi_z), \psi_{\bar{z}} \rangle = \frac{e^\varrho}{2}H & \text{entonces } \lambda_1 &= H, \text{ y} \\ \frac{e^\varrho}{2}\lambda_2 &= \langle A(\psi_z), \psi_z \rangle = \frac{1}{2}\phi & \text{entonces } \lambda_2 &= e^{-\varrho}\phi.\end{aligned}$$

Luego, $A(\psi_z) = H\psi_z + \frac{1}{2}\phi\psi_{\bar{z}}$ y por ende, la fórmula de Gauss está dada por

$$\nabla_{\psi_z}^o \psi_z = \varrho_z \psi_z + \frac{1}{2}\phi N \quad \text{o} \quad \nabla_{\psi_z}^o \psi_{\bar{z}} = \frac{e^\varrho}{2}HN - c\frac{e^\varrho}{2}\psi,$$

y la fórmula de Weingarten está dada por

$$N_z = \nabla_{\psi_z}^o N = -A(\psi_z) = -H\psi_z - e^\varrho\phi\psi_{\bar{z}}.$$

□

Observación 3.1.5. Existe otra forma de calcular las ecuaciones estructurales de la inmersión ψ utilizando el hecho de que los campos vectoriales $\{\psi_z, \psi_{\bar{z}}, N, \psi\}$ generan a \mathbb{M}_c^3 , y por tanto

$$\begin{aligned}\psi_{zz} &= \alpha_1\psi_z + \beta_1\psi_{\bar{z}} + \gamma_1N + \lambda_1\psi & \text{con } \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1 &\in \mathbb{C}, \\ \psi_{z\bar{z}} &= \alpha_2\psi_z + \beta_2\psi_{\bar{z}} + \gamma_2N + \lambda_2\psi & \text{con } \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \lambda_2 &\in \mathbb{C}, \\ N_z &= \alpha_3\psi_z + \beta_3\psi_{\bar{z}} + \gamma_3N + \lambda_3\psi & \text{con } \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \lambda_3 &\in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Hallemos los respectivos valores de $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \lambda_i \in \mathbb{C}$, para $i = 1, \dots, 4$. Para ello, observemos que

$$\beta_1 = 2e^{-\varrho} \langle \psi_{zz}, \psi_z \rangle = 2e^{-\varrho} \left[\frac{1}{2} \partial_z (\langle \psi_z, \psi_z \rangle) \right] = e^{-\varrho} \partial_z (0) = 0,$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2e^{-\varrho} \langle \psi_{zz}, \psi_{\bar{z}} \rangle = 2e^{-\varrho} [\partial_z (\langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle) - \langle \psi_z, \psi_{z\bar{z}} \rangle] = 2e^{-\varrho} \left[\partial_z \left(\frac{e^\varrho}{2} \right) - \langle \psi_z, \psi_{z\bar{z}} \rangle \right] \\ &= 2e^{-\varrho} \left[\partial_z \left(\frac{e^\varrho}{2} \right) - \frac{1}{2} \partial_{\bar{z}} (\langle \psi_z, \psi_z \rangle) \right] = 2e^{-\varrho} \left[\frac{e^\varrho \varrho_z}{2} - \frac{1}{2} \partial_{\bar{z}} (0) \right] = 2e^{-\varrho} \left[\frac{e^\varrho \varrho_z}{2} \right] = \varrho_z,\end{aligned}$$

$$\gamma_1 = \langle \psi_{zz}, N \rangle \quad (\text{pues } \langle N, N \rangle = 1),$$

$$\lambda_1 = c \langle \psi_{zz}, \psi \rangle = c(\partial_z (\langle \psi_z, \psi \rangle) - \langle \psi_z, \psi_z \rangle) = 0 \quad (\text{pues } \langle \psi, \psi \rangle = c).$$

Análogamente, para $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \lambda_2$ se tiene

$$\beta_2 = 2e^{-\varrho} \langle \psi_{z\bar{z}}, \psi_z \rangle = 0,$$

$$\alpha_2 = 2e^{-\varrho} \langle \psi_{z\bar{z}}, \psi_{\bar{z}} \rangle = 2e^{-\varrho} \langle \psi_{\bar{z}z}, \psi_{\bar{z}} \rangle = 0,$$

$$\gamma_2 = \langle N_z, \psi_{\bar{z}} \rangle = \langle A(\psi_z), \psi_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2}He^\varrho,$$

$$\lambda_2 = c \langle \psi_{z\bar{z}}, \psi \rangle = c(\partial_{\bar{z}} (\langle \psi_z, \psi \rangle) - \langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle) = -c\frac{e^\varrho}{2}.$$

Finalmente, encontramos que $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \lambda_3$ están dados por

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= 2e^{-\varrho} \langle N_z, \psi_{\bar{z}} \rangle = -2e^{-\varrho} \langle A(\psi_z), \psi_{\bar{z}} \rangle = -H, \\ \beta_3 &= 2e^{-\varrho} \langle N_z, \psi_z \rangle = -2e^{-\varrho} \langle N, \psi_{zz} \rangle = -\phi e^{-\varrho}, \\ \gamma_3 &= \langle N_z, N \rangle = \frac{1}{2} \partial_z (\langle N, N \rangle) = \frac{1}{2} \partial_z (1) = 0, \\ \lambda_3 &= c \langle N_z, \psi \rangle = c(\partial_z (\langle N, \psi \rangle) - \langle N, \psi_z \rangle) = 0.\end{aligned}$$

En consecuencia tenemos

$$\begin{aligned}\psi_{zz} &= \varrho_z \psi_z + \langle \psi_{zz}, N \rangle N = \varrho_z \psi_z + \frac{1}{2} \phi N, \\ \psi_{z\bar{z}} &= \frac{e^\varrho}{2} H N - c \frac{e^\varrho}{2} \psi, \\ N_z &= -H \psi_z - \phi e^{-\varrho} \psi_{\bar{z}}.\end{aligned}$$

A continuación estudiaremos las condiciones de integrabilidad del sistema.

Proposición 3.1.6. *Sea $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}_c^3$ una superficie orientable con aplicación de Gauss N y sea z una coordenada compleja local sobre Σ tal que $ds^2 = e^\varrho |dz|^2$. Entonces la ecuación de Gauss viene dada por*

$$e^{-2\varrho} |\phi|^2 = H^2 + 2e^{-\varrho} \varrho_{z\bar{z}} + c = H^2 - K + c \quad (3.15)$$

y la ecuación de Codazzi viene dada por

$$\phi_{\bar{z}} = e^\varrho H_z. \quad (3.16)$$

Demostración. Por (3.14) tenemos que $A(\psi_z) = -N_z = H\psi_z + e^{-\varrho}\phi\psi_{\bar{z}}$ y $A(\psi_{\bar{z}}) = e^{-\varrho}\bar{\phi}\psi_z + H\psi_{\bar{z}}$. Es decir, la matriz A está dada por

$$A = \begin{pmatrix} H & e^{-\varrho}\bar{\phi} \\ e^{-\varrho}\phi & H \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Dado que

$$A^2 - 2HA + \det(A)I = 0 \quad \text{y} \quad K = c + \det(A)$$

tenemos

$$|A|^2 = 4H^2 + 2c - 2K, \quad \text{o lo que es lo mismo,} \quad e^{-2\varrho} |\phi|^2 = H^2 - K + c.$$

De aquí, utilizando (3.11) se concluye (3.15). Por otra parte,

$$\begin{aligned}\nabla A(\psi_z, \psi_{\bar{z}}) &= (\nabla_{\psi_{\bar{z}}} A)(\psi_z) = \nabla_{\psi_{\bar{z}}}(A(\psi_z)) - A(\nabla_{\psi_{\bar{z}}}\psi_z) \\ &= \nabla_{\psi_{\bar{z}}}(H\psi_z + e^{-\varrho}\phi\psi_{\bar{z}}) - A(0) \\ &= H_{\bar{z}}\psi_z + H\nabla_{\psi_{\bar{z}}}\psi_z - \varrho_{\bar{z}}e^{-\varrho}\phi\psi_{\bar{z}} + e^{-\varrho}\phi_{\bar{z}}\psi_{\bar{z}} + e^{-\varrho}\phi\varrho_{\bar{z}}\psi_{\bar{z}} \\ &= H_{\bar{z}}\psi_z + e^{-\varrho}\phi_{\bar{z}}\psi_{\bar{z}},\end{aligned} \quad (3.18)$$

y

$$\begin{aligned}
\nabla A(\psi_{\bar{z}}, \psi_z) &= (\nabla_{\psi_z} A)(\psi_{\bar{z}}) = \nabla_{\psi_z}(A(\psi_{\bar{z}})) - A(\nabla_{\psi_z}\psi_{\bar{z}}) \\
&= \nabla_{\psi_z}(e^{-\varrho}\bar{\phi}\psi_z + H\psi_{\bar{z}}) - A(0) \\
&= -\varrho_z e^{-\varrho}\bar{\phi}\psi_z + e^{-\varrho}\bar{\phi}_z\psi_z + e^{-\varrho}\bar{\phi}\nabla_{\psi_z}\psi_z + H_z\psi_{\bar{z}} + H\nabla_{\psi_z}\psi_{\bar{z}} \\
&= -\varrho_z e^{-\varrho}\bar{\phi}\psi_z + e^{-\varrho}\bar{\phi}_z\psi_z + e^{-\varrho}\bar{\phi}\varrho_z\psi_z + H_z\psi_{\bar{z}} \\
&= e^{-\varrho}\bar{\phi}_z\psi_z + H_z\psi_{\bar{z}}.
\end{aligned}$$

Igualando estas dos expresiones se obtiene la ecuación de Codazzi (véase (1.18)), la cual está dada por

$$H_z = e^{-\varrho}\bar{\phi}_{\bar{z}} \quad \text{o} \quad H_{\bar{z}} = e^{-\varrho}\bar{\phi}_z.$$

□

Observación 3.1.7. Otra forma de probar las ecuaciones de Gauss y Codazzi del sistema, es utilizando el hecho de que $\psi_{z\bar{z}\bar{z}} = \psi_{z\bar{z}z}$.

$$\begin{aligned}
(\psi_{zz})_{\bar{z}} &= \left(\varrho_z\psi_z + \frac{1}{2}\phi N\right)_{\bar{z}} = \varrho_{z\bar{z}}\psi_z + \varrho_z\psi_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}\phi_{\bar{z}}N + \frac{1}{2}\phi N_{\bar{z}}, \\
(\psi_{z\bar{z}})_z &= \left(\frac{e^\varrho}{2}HN - c\frac{e^\varrho}{2}\psi\right)_z = \frac{e^\varrho}{2}\varrho_zHN + \frac{e^\varrho}{2}H_zN + \frac{e^\varrho}{2}HN_z - c\varrho_z\frac{e^\varrho}{2}\psi - c\frac{e^\varrho}{2}\psi_z.
\end{aligned}$$

Ahora, como $N_{\bar{z}} = \overline{N_z}$, por (3.14) tenemos

$$N_z = -H\psi_z - e^{-\varrho}\phi\psi_{\bar{z}} \quad \text{y} \quad N_{\bar{z}} = -e^{-\varrho}\bar{\phi}\psi_z - H\psi_{\bar{z}}$$

ya que H y $e^{-\varrho}$ son reales. Por tanto, realizando los respectivos reemplazos

$$\begin{aligned}
(\psi_{zz})_{\bar{z}} &= \varrho_{z\bar{z}}\psi_z + \varrho_z\psi_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}\phi_{\bar{z}}N + \frac{1}{2}\phi(-e^{-\varrho}\bar{\phi}\psi_z - H\psi_{\bar{z}}) \\
&= \left(\varrho_{z\bar{z}} - \frac{1}{2}|\phi|^2e^{-\varrho}\right)\psi_z + \varrho_z\psi_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}\phi_{\bar{z}}N - \frac{1}{2}H\phi\psi_{\bar{z}}, \\
(\psi_{z\bar{z}})_z &= \frac{e^\varrho}{2}\varrho_zHN + \frac{e^\varrho}{2}H_zN + \frac{e^\varrho}{2}H(-H\psi_z - e^{-\varrho}\phi\psi_{\bar{z}}) - c\varrho_z\frac{e^\varrho}{2}\psi - c\frac{e^\varrho}{2}\psi_z \\
&= \frac{e^\varrho}{2}(\varrho_zH + H_z)N - \frac{e^\varrho}{2}(H^2 + c)\psi_z - H\phi\psi_{\bar{z}} - c\varrho_z\frac{e^\varrho}{2}\psi.
\end{aligned}$$

Al igualar $\langle\psi_{z\bar{z}\bar{z}}, \psi_{\bar{z}}\rangle = \langle\psi_{z\bar{z}z}, \psi_{\bar{z}}\rangle$ nos lleva a que

$$\frac{e^\varrho}{2}\left(\varrho_{z\bar{z}} - \frac{1}{2}|\phi|^2e^{-\varrho}\right) = -\frac{e^{2\varrho}}{4}(H^2 + c),$$

es decir,

$$-2e^{-\varrho}\varrho_{z\bar{z}} + e^{-2\varrho}|\phi|^2 = H^2 + c,$$

y por (3.11) tenemos

$$e^{-2\varrho} |\phi|^2 = H^2 - K + c.$$

Por otro lado, igualando $\langle \psi_{z\bar{z}\bar{z}}, N \rangle = \langle \psi_{z\bar{z}z}, N \rangle$ encontramos que

$$\varrho_z \langle \psi_{z\bar{z}}, N \rangle + \frac{1}{2} \phi_{\bar{z}} = \frac{e^\varrho}{2} (\varrho_z H + H_z).$$

Dado que $\langle N, \psi_{z\bar{z}} \rangle = \langle -N_{\bar{z}}, \psi_z \rangle = \langle A(\psi_{\bar{z}}), \psi_z \rangle = \frac{1}{2} H e^\varrho$ (véase (3.7)), concluimos

$$\phi_{\bar{z}} = e^\varrho H_z.$$

Como una aplicación, presentamos una de las propiedades más importantes que satisface la diferencial de Hopf sobre una superficie de curvatura media constante, esta propiedad nos permitirá aplicar métodos del análisis complejo al estudio de este tipo de superficies.

Teorema 3.1.8. *Si Σ tiene curvatura media constante H , entonces la diferencial de Hopf Q es holomorfa.*

Demostración. Para demostrar que Q es holomorfa, veremos que $\phi|_U$ es holomorfa, donde $\phi(z) = 2 \langle A(\psi_z), \psi_z \rangle$. Recuérdese que ϕ es holomorfa si y sólo si $\phi_{\bar{z}} = 0$. Usando lo demostrado en (3.16) se tiene que $\phi_{\bar{z}} = e^\varrho H_z$. Como H es constante entonces $\phi_{\bar{z}} = 0$. Por tanto la diferencial de Hopf Q es holomorfa. \square

Ahora ya estamos en condiciones de probar el siguiente resultado auxiliar, que será fundamental para la demostración de los resultados principales.

Lema 3.1.9. *Sea Σ una superficie con curvatura media constante en \mathbb{M}_c^3 . Entonces, el laplaciano de su curvatura de Gauss está dado por*

$$\Delta K = -4K(H^2 - K + c) - 4e^{-3\varrho} |2\varrho_z \phi - \phi_z|^2 \leq -4K(H^2 - K + c). \quad (3.19)$$

Demostración. De (3.3) se tiene que

$$\Delta K = e^{-\varrho} \Delta_o K = 4e^{-\varrho} \frac{\partial^2 K}{\partial z \partial \bar{z}} = 4e^{-\varrho} K_{z\bar{z}}.$$

Como H es constante sabemos que $\phi_{\bar{z}} = (\bar{\phi})_z = 0$. Además, de (3.15) obtenemos

$$K_z = -(e^{-2\varrho} |\phi|^2)_z = 2\varrho_z e^{-2\varrho} |\phi|^2 - e^{-2\varrho} \phi_z \bar{\phi}, \quad (3.20)$$

y

$$\begin{aligned} K_{z\bar{z}} &= 2\varrho_{z\bar{z}} e^{-2\varrho} |\phi|^2 - 4\varrho_z \varrho_{\bar{z}} e^{-2\varrho} |\phi|^2 - e^{-2\varrho} \phi_z \bar{\phi}_{\bar{z}} + 2e^{-2\varrho} (\varrho_z \phi (\bar{\phi}_{\bar{z}}) + \varrho_{\bar{z}} \bar{\phi} \phi_z) \\ &= 2\varrho_{z\bar{z}} e^{-2\varrho} |\phi|^2 - e^{-2\varrho} |2\varrho_z \phi - \phi_z|^2. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\Delta K &= 4(2e^{-e} \varrho_{z\bar{z}})e^{-2e} |\phi|^2 - 4e^{-3e} |2\varrho_z \phi - \phi_z|^2 \\ &= -4K(H^2 - K + c) - 4e^{-3e} |2\varrho_z \phi - \phi_z|^2.\end{aligned}$$

□

Ya estamos preparados para presentar una demostración del Teorema 3.1.2 sin necesidad de utilizar el Teorema 3.1.1.

Prueba alternativa del Teorema 3.1.2. Si $\inf_{\Sigma} K = -\infty < 0$ no hay nada que probar porque se cumple trivialmente la desigualdad (ii). Entonces nos permitimos suponer $\inf_{\Sigma} K > -\infty$. En este caso, el principio débil del máximo de Omori-Yau se verifica sobre Σ , y aplicando (2.26) a la función K , sabemos que existe una sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en Σ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K(x_k) = \inf_{\Sigma} K \quad \text{y} \quad \Delta K(x_k) > -\frac{1}{k}.$$

Esto junto con (3.19), implica que

$$-\frac{1}{k} < \Delta K(x_k) \leq -4K(x_k)(H^2 - K(x_k) + c).$$

Tomando límite cuando $k \rightarrow \infty$ en esta desigualdad, obtenemos que

$$0 \leq -4 \inf_{\Sigma} K (H^2 - \inf_{\Sigma} K + c),$$

esto es,

$$\inf_{\Sigma} K (H^2 - \inf_{\Sigma} K + c) \leq 0. \quad (3.21)$$

Recordemos que $H^2 - K + c \geq 0$ y se anula precisamente en los puntos umbílicos. En particular,

$$\inf_{\Sigma} K \leq K \leq H^2 + c.$$

Así,

$$H^2 - \inf_{\Sigma} K + c \geq 0$$

y se anula si y sólo si Σ es totalmente umbilical. Entonces existen dos posibilidades:

i) o bien $H^2 - \inf_{\Sigma} K + c = 0$.

Entonces $H^2 + c = \inf_{\Sigma} K \leq K \leq H^2 + c$, por ende, $K = H^2 + c$, es decir, Σ es totalmente umbilical. Esto prueba el ítem (i).

ii) o bien $H^2 - \inf_{\Sigma} K + c > 0$.

Por (3.21) tenemos que $\inf_{\Sigma} K \leq 0$ y esta es la desigualdad en (ii). Más aún, si se tiene la igualdad $\inf_{\Sigma} K = 0$, entonces Σ es una variedad riemanniana completa con curvatura de Gauss no negativa ($K \geq 0$), y por el Teorema 2.2.2, Σ es parabólica. Siendo $K \geq 0$, por (3.19) tenemos que K es una función superarmónica y además sabemos que K está acotada inferiormente, por lo tanto K debe ser constante. Luego, H y K son ambas constantes, lo que significa que Σ es una superficie isoparamétrica completa del espacio forma 3-dimensional \mathbb{M}_c^3 con dos curvaturas principales constantes distintas. Entonces por un resultado clásico de rigidez de Levi-Civita [32], Σ debe ser uno de los tres productos estándar (a), (b) o (c).

□

Es importante señalar que la prueba del Teorema 3.1.2 depende fuertemente de la estructura conforme de la superficie 2-dimensional Σ , y no puede extenderse a dimensiones superiores. Por esta razón, en la siguiente sección siguiendo un enfoque alternativo realizamos una extensión al caso n -dimensional de hipersuperficies.

3.2. Hipersuperficies con curvatura media constante

Nuestro objetivo en esta sección, como ya lo mencionamos, es extender el Teorema 3.1.2 al caso n -dimensional de hipersuperficies, con $n \geq 3$.

Teorema 3.2.1 ([5], Theorem 3). *Sea Σ^n una hipersuperficie estocásticamente completa inmersa en un espacio forma $(n+1)$ -dimensional \mathbb{M}_c^{n+1} ($c = 0, 1, -1$ y $n \geq 3$) con curvatura media constante H tal que $H^2 + c > 0$, y denotemos por S su curvatura escalar. Entonces*

(i) o bien $\inf_{\Sigma} S = n(n-1)(c+H^2)$ y Σ es una hipersuperficie totalmente umbilical,

(ii) o bien

$$\inf_{\Sigma} S \leq \widehat{B}_{|H|,c} = \frac{n(n-2)}{2(n-1)} \left(2(n-1)c + nH^2 + |H| \sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)c} \right).$$

Además, se tiene la igualdad $\inf_{\Sigma} S = \widehat{B}_{|H|,c}$ y se alcanza este ínfimo en algún punto de Σ si y sólo si

(a) $c = 0$ y Σ es un abierto de un cilindro circular $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con $r = (n-1)/n|H| > 0$,

- (b) $c = 1$ y Σ es un abierto de o bien un toro de Clifford minimal $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n}) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, con $k = 1, \dots, n-1$, o bien un toro de curvatura media constante $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, con

$$0 < r = \sqrt{\frac{2(n-1) + nH^2 - |H|\sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)}}{2n(1+H^2)}} < \sqrt{(n-1)/n},$$

- (c) $c = -1$ y Σ es un abierto de un cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$, con

$$0 < r = \sqrt{\frac{2 - nH^2 + |H|\sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}}{2n(H^2 - 1)}}.$$

En el caso particular en que Σ^n es completa (por ejemplo, cuando Σ^n es propiamente inmersa), obtenemos la siguiente consecuencia.

Corolario 3.2.2 ([5], Corollary 4). *Sea Σ^n una hipersuperficie completa inmersa en un espacio forma $(n+1)$ -dimensional \mathbb{M}_c^{n+1} ($c = 0, 1, -1$ y $n \geq 3$) con curvatura media constante H tal que $H^2 + c > 0$. Entonces*

- (i) o bien $\inf_{\Sigma} S = n(n-1)(c+H^2)$ y Σ es una hipersuperficie totalmente umbilical,
(ii) o bien

$$\inf_{\Sigma} S \leq \widehat{B}_{|H|,c} = \frac{n(n-2)}{2(n-1)} \left(2(n-1)c + nH^2 + |H|\sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)c} \right).$$

Además, se tiene la igualdad $\inf_{\Sigma} S = \widehat{B}_{|H|,c}$ y se alcanza este ínfimo en algún punto de Σ si y sólo si

- (a) $c = 0$ y Σ es un cilindro circular $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con $r = (n-1)/n|H| > 0$,
(b) $c = 1$ y Σ es o bien un toro de Clifford minimal $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n}) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, con $k = 1, \dots, n-1$, o bien un toro de curvatura media constante $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, con

$$0 < r = \sqrt{\frac{2(n-1) + nH^2 - |H|\sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)}}{2n(1+H^2)}} < \sqrt{(n-1)/n},$$

- (c) $c = -1$ y Σ es un cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$, con $r > 0$.

El corolario anterior extiende al caso de hipersuperficies completas en los espacios forma un resultado previo dado por Li para el caso de hipersuperficies compactas en [33, Corolario 2.1] (véase también Observación 2.4 y Proposición 2.1 en [33] para una extensión al caso de hipersuperficies completas en el espacio euclídeo).

Por otra parte, sabemos que $S = n(n-1)(c+H^2) - |\Phi|^2$ (véase (1.21)), entonces

$$\inf_{\Sigma} S = n(n-1)(c+H^2) - \sup_{\Sigma} |\Phi|^2.$$

Por lo tanto, el Teorema 3.2.1 (así como el Corolario 3.2.2) pueden ser re-escritos equivalentemente en términos del tensor de umbilicidad total como sigue.

Teorema 3.2.3 ([5], Theorem 5). *Sea Σ^n una hipersuperficie estocásticamente completa inmersa en un espacio forma $(n+1)$ -dimensional \mathbb{M}_c^{n+1} ($c = 0, 1, -1$ y $n \geq 3$) con curvatura media constante H tal que $H^2 + c > 0$, y denotemos por Φ su tensor de umbilicidad total. Entonces*

- (i) o bien $\sup_{\Sigma} |\Phi| = 0$ y Σ es una hipersuperficie totalmente umbilical,
- (ii) o bien

$$\sup_{\Sigma} |\Phi| \geq \alpha_{|H|,c} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left(\sqrt{n^2 H^2 + 4(n-1)c} - (n-2)|H| \right) > 0.$$

Además, se tiene la igualdad $\sup_{\Sigma} |\Phi| = \alpha_{|H|,c}$ y se alcanza este supremo en algún punto de Σ si y sólo si Σ es una de las hipersuperficies de los ítems (a), (b) o (c) del Teorema 3.2.1.

Antes de realizar la prueba del teorema anterior, presentamos un resultado clásico local de rigidez dado por Lawson en [30, Proposición 1] que nos permitirá caracterizar la igualdad del Teorema 3.2.3 en el caso $c = 1$.

Teorema 3.2.4. *Sea Σ^n una hipersuperficie minimal inmersa isométricamente en \mathbb{S}^{n+1} . Si la segunda forma fundamental A es paralela sobre Σ , entonces Σ es un abierto de un producto minimal de esferas de la forma $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$; $k = 1, \dots, n-1$.*

Prueba del Teorema 3.2.3

Usando la fórmula de tipo Simons para el laplaciano de la función $|\Phi|^2$ (véase Corolario 2.4.4) tenemos que

$$\frac{1}{2} \Delta |\Phi|^2 = |\nabla \Phi|^2 + nH \operatorname{tr}(\Phi^3) - |\Phi|^2 (|\Phi|^2 - n(c+H^2)). \quad (3.22)$$

Dado que $\text{tr}(\Phi) = 0$, podemos usar el Lema 2.4.5 para estimar $\text{tr}(\Phi^3)$ como sigue

$$|\text{tr}(\Phi^3)| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} |\Phi|^3$$

y entonces

$$nH\text{tr}(\Phi^3) \geq -n|H||\text{tr}(\Phi^3)| \geq -\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} |H||\Phi|^3.$$

Usando esto en (3.22), encontramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 &\geq |\nabla\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} |H||\Phi|^3 - |\Phi|^2(|\Phi|^2 - n(c+H^2)) \\ &\geq -|\Phi|^2 P_{|H|,c}(|\Phi|), \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde $P_{|H|,c}(x) = x^2 + n(n-2)/\sqrt{n(n-1)}|H|x - n(c+H^2)$ es el mismo polinomio de la Sección 2.4. Recordemos que este polinomio tiene una única raíz positiva

$$\alpha_{|H|,c} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left(\sqrt{n^2 H^2 + 4(n-1)c} - (n-2)|H| \right),$$

siempre que $H^2 + c > 0$.

Si $\sup_{\Sigma} |\Phi| = +\infty$, entonces se tiene (ii) trivialmente y no hay nada que probar. Si $\sup_{\Sigma} |\Phi| < +\infty$ podemos aplicar el principio débil del máximo de Omori-Yau (2.25) a la función $|\Phi|^2$, así que existe una sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en Σ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\Phi|(x_k) = \sup_{\Sigma} |\Phi|, \quad \text{y} \quad \Delta|\Phi|^2(x_k) < \frac{1}{k},$$

lo cual junto con (3.23) implican

$$\frac{1}{k} > \Delta|\Phi|^2(x_k) \geq -2|\Phi|^2(x_k) P_{|H|,c}(|\Phi|(x_k)).$$

Tomando límite aquí, obtenemos $0 \geq -2(\sup_{\Sigma} |\Phi|)^2 P_{|H|,c}(\sup_{\Sigma} |\Phi|)$, esto es

$$\left(\sup_{\Sigma} |\Phi| \right)^2 P_{|H|,c} \left(\sup_{\Sigma} |\Phi| \right) \geq 0.$$

Se sigue de aquí que o bien $\sup_{\Sigma} |\Phi| = 0$, lo cual significa que $|\Phi| = \text{constante} = 0$ y la hipersuperficie es totalmente umbilical, o bien $\sup_{\Sigma} |\Phi| > 0$ y entonces $P_{|H|,c}(\sup_{\Sigma} |\Phi|) \geq 0$. En conclusión, el supremo de $|\Phi|$ debe satisfacer $\sup_{\Sigma} |\Phi| \geq \alpha_{|H|,c}$, lo cual da la desigualdad en (ii).

Más aún, supongamos que se tiene la igualdad $\sup_{\Sigma} |\Phi| = \alpha_{|H|,c}$. Dado que $P_{|H|,c}(|\Phi|)$ es creciente tenemos que $P_{|H|,c}(|\Phi|) \leq P_{|H|,c}(\sup_{\Sigma} |\Phi|) = 0$ sobre Σ . Esto junto con (3.23) implica que $|\Phi|^2$ es una función subarmónica sobre Σ . Por lo tanto, si existe un punto $p_0 \in \Sigma$ en el cual se alcanza este supremo, entonces $|\Phi|^2$ es una

función subarmónica sobre Σ la cual alcanza su supremo en algún punto de Σ y, por el principio clásico del máximo, debe ser constante, $|\Phi| = \text{constante} = \alpha_{|H|,c}$. Luego,

$$\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 = 0 = -|\Phi|^2 P_{|H|,c}(|\Phi|).$$

Es decir, se tiene la igualdad en (3.23). Por lo tanto todas las desigualdades de (3.23) deben ser igualdades y, en particular, obtenemos que

$$\nabla\Phi = \nabla A = 0.$$

Esto es, la segunda forma fundamental de la hipersuperficie es paralela. Si $H = 0$ (lo cual ocurre sólo si $c = 1$) entonces por el Teorema 3.2.4 sabemos que Σ es un abierto de un toro de Clifford minimal de la forma $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n}) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, con $k = 1, \dots, n-1$, el cual trivialmente satisface

$$\sup_{\Sigma} |\Phi| = \text{constante} = |\Phi| = \alpha_{0,1} = \sqrt{n}.$$

Si $H \neq 0$ obtenemos la igualdad en el Lema 2.4.5, lo cual implica que la hipersuperficie tiene exactamente dos curvaturas principales constantes, con multiplicidades $(n-1)$ y 1. Entonces, por los resultados clásicos sobre hipersuperficies isoparamétricas de espacios forma riemannianos [32, 47, 15] concluimos que Σ debe ser un abierto de uno de los siguientes tres productos estándar embebidos:

- si $c = 0$, $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con $r > 0$;
- si $c = 1$, $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, con $0 < r < 1$; y
- si $c = -1$, $\mathbb{H}^{n-1}(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$, con $0 < r < 1/\sqrt{n(n-2)}$ (recordemos que $H^2 > -c = 1$), o $\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$, con $r > 0$.

Obviamente, en todos los ejemplos anteriores $|\Phi| = \text{constante} = \sup_{\Sigma} |\Phi|$. Si observamos la Sección 1.4 y realizamos un análisis detallado de $|\Phi|$ y $\alpha_{|H|,c}$ para estos ejemplos tenemos que, cuando $c = 0$, para el producto estándar $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1(r)$ se tiene que

$$\sup_{\Sigma} |\Phi| = |\Phi| = \sqrt{n(n-1)}|H| > \alpha_{|H|,0}$$

(véase la ecuación (1.33)), mientras que para el producto estándar $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$, con $r > 0$ se tiene que

$$\sup_{\Sigma} |\Phi| = |\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}|H| = \alpha_{|H|,0}$$

(véase la ecuación (1.34)).

Por otra parte, cuando $c = 1$ podemos ver que para el producto estándar $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$ se tiene

$$\sup_{\Sigma} |\Phi| = |\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left(\sqrt{n^2 H^2 + 4(n-1)} + (n-2)|H| \right) > \alpha_{|H|,1}$$

si $r > \sqrt{(n-1)/n}$, mientras que

$$\sup_{\Sigma} |\Phi| = |\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left(\sqrt{n^2 H^2 + 4(n-1)} - (n-2)|H| \right) = \alpha_{|H|,1}$$

si $0 < r < \sqrt{(n-1)/n}$ (véase la ecuación (1.37) y tenga en cuenta el criterio del signo).

Finalmente, si $c = -1$ observemos que en $\mathbb{H}^{n-1}(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^1(r)$, $H^2 > 1$ si y sólo si $r < 1/\sqrt{n(n-2)}$ (véase la ecuación (1.43)). En ese caso

$$\sup_{\Sigma} |\Phi| = |\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left(\sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)} + (n-2)|H| \right) > \alpha_{|H|,-1}.$$

En el producto $\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$ tenemos que $H^2 > 1$ para todo $r > 0$ y de la ecuación (1.51) tenemos que

$$\sup_{\Sigma} |\Phi| = |\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left(\sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)} - (n-2)|H| \right) = \alpha_{|H|,-1}.$$

Esto finaliza la prueba del Teorema 3.2.3 y, equivalentemente, del Teorema 3.2.1.

Como en el caso del Teorema 3.2.1, en vez de probar el Corolario 3.2.2 probaremos su afirmación equivalente en términos del tensor de umbilicidad total.

Corolario 3.2.5 ([5], Corollary 6). *Sea Σ^n una hipersuperficie completa inmersa en un espacio forma $(n+1)$ -dimensional \mathbb{M}_c^{n+1} ($c = 0, 1, -1$ y $n \geq 3$) con curvatura media constante H tal que $H^2 + c > 0$. Entonces*

- (i) o bien $\sup_{\Sigma} |\Phi| = 0$ y Σ es una hipersuperficie totalmente umbilical,
- (ii) o bien

$$\sup_{\Sigma} |\Phi| \geq \alpha_{|H|,c} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left(\sqrt{n^2 H^2 + 4(n-1)c} - (n-2)|H| \right) > 0,$$

y se tiene la igualdad y se alcanza este supremo en algún punto de Σ si y sólo si Σ es una de las hipersuperficies de los items (a), (b) o (c) del Corolario 3.2.2.

Demostración. Si $\sup_{\Sigma} |\Phi| = +\infty$, entonces se tiene (ii) trivialmente y no hay nada que probar. Si $\sup_{\Sigma} |\Phi| < +\infty$, podemos estimar

$$H \langle \Phi X, X \rangle \geq -|H| |\langle \Phi X, X \rangle| \geq -|H| |\Phi| |X|^2 \geq -|H| \sup_{\Sigma} |\Phi| |X|^2,$$

y

$$\langle \Phi X, \Phi X \rangle \leq |\Phi|^2 |X|^2 \leq (\sup_{\Sigma} |\Phi|)^2 |X|^2,$$

para $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$. Entonces, por la ecuación dada para el tensor de Ricci en (1.20) obtenemos que para todo $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$,

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, X) &= (n-1)(c+H^2)|X|^2 + (n-2)H\langle\Phi X, X\rangle - \langle\Phi X, \Phi X\rangle \\ &\geq \left((n-1)(c+H^2) - (n-2)|H|\sup_{\Sigma}|\Phi| - (\sup_{\Sigma}|\Phi|)^2 \right) |X|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\sup_{\Sigma}|\Phi| < +\infty$ entonces la curvatura de Ricci de Σ está acotada inferiormente por la constante

$$C = (n-1)(c+H^2) - (n-2)|H|\sup_{\Sigma}|\Phi| - (\sup_{\Sigma}|\Phi|)^2.$$

Dado que Σ es completa, el principio del máximo clásico de Omori-Yau se verifica sobre Σ y el resultado se sigue directamente del Teorema 3.2.3 (o, equivalentemente, del Teorema 3.2.1). \square

También obtenemos la siguiente consecuencia, que es una generalización del Teorema 1.5 en [1] a hipersuperficies completas y parabólicas en espacios formas (para el concepto de parabolicidad véase Definición 2.2.1).

Corolario 3.2.6. *Sea Σ^n una hipersuperficie completa y parabólica inmersa en un espacio forma $(n+1)$ -dimensional \mathbb{M}_c^{n+1} ($c = 0, 1, -1$ y $n \geq 3$) con curvatura media constante H tal que $H^2 + c > 0$, y sea Φ su tensor de umbilicidad total. Entonces*

(i) o bien $\sup_{\Sigma}|\Phi| = 0$ y Σ es una hipersuperficie totalmente umbilical,

(ii) o bien

$$\sup_{\Sigma}|\Phi| \geq \alpha_{|H|,c} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left(\sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)c} - (n-2)|H| \right) > 0$$

con igualdad si y sólo si Σ es una de las hipersuperficies de los items (a), (b) o (c) del Teorema 3.2.1.

Demostración. En primer lugar, recordemos que el principio débil del máximo de Omori-Yau se verifica sobre toda variedad riemanniana parabólica. Entonces, por la primera parte del Teorema 3.2.3 obtenemos que o bien $\sup_{\Sigma}|\Phi| = 0$ y Σ es una hipersuperficie totalmente umbilical, o bien $\sup_{\Sigma}|\Phi| \geq \alpha_{|H|,c}$.

Además, si se tiene la igualdad $\sup_{\Sigma}|\Phi| = \alpha_{|H|,c}$, entonces como $P_{|H|,c}(x)$ es una función creciente si $x \geq 0$ tenemos que $P_{|H|,c}(|\Phi|) \leq P_{|H|,c}(\sup_{\Sigma}|\Phi|) = 0$ y $|\Phi|^2$ es una función subarmónica sobre Σ la cual está acotada superiormente. Dado que Σ es parabólica, $|\Phi|$ debe ser constante e igual a $\alpha_{|H|,c}$. La prueba entonces finaliza como en el Teorema 3.2.3, observando que los productos riemannianos estándar $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$, $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$, $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$ y $\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$ son todos parabólicos. Para $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$ y $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$ esto es claro, porque son compactos. Para los otros casos, recordemos que \mathbb{R}^1 y \mathbb{H}^1 son parabólicos, así que por la Proposición 2.2.4, tenemos que los productos riemannianos estándar $\mathbb{R}^1 \times M$ y $\mathbb{H}^1 \times M$ con M compacta son parabólicos. \square

Capítulo 4

Una estimación óptima para el supremo de la curvatura escalar

Sumario. En este capítulo derivamos una estimación óptima para el supremo de la curvatura escalar de una hipersuperficie con curvatura media constante con dos curvaturas principales inmersa en un espacio forma riemanniano de curvatura constante. Nuestros resultados serán una aplicación del principio del máximo generalizado de Omori-Yau. Los resultados de este capítulo se encuentran recogidos en el trabajo [6].

Abstract. *In this chapter we derive a sharp estimate for the supremum of the scalar curvature of a constant mean curvature hypersurface with two principal curvatures immersed into a Riemannian space form of constant curvature. Our results will be an application of the generalized Omori-Yau maximum principle. The results of this chapter are collected in the paper [6].*

4.1. Superficies con curvatura media constante

En el Capítulo 3 dimos una estimación para el ínfimo de la curvatura de Gauss (véase Teorema 3.1.2), que fue una fácil y bonita consecuencia de un resultado clásico dado por Klotz y Osserman, Hoffman y Tribuzy y enunciado en el Teorema 3.1.1; como otra aplicación de dicho teorema, obtenemos el siguiente resultado para el supremo de la curvatura de Gauss de Σ .

Teorema 4.1.1 ([6], Theorem 3). *Sea Σ una superficie completa inmersa en un espacio forma 3-dimensional \mathbb{M}_c^3 ($c = 0, 1, -1$) con curvatura media constante H , y denotemos por K su curvatura de Gauss. Entonces*

(i) o bien $\sup_{\Sigma} K = H^2 + c$,

(ii) o bien $0 \leq \sup_{\Sigma} K < H^2 + c$, con igualdad $\sup_{\Sigma} K = 0$ si y sólo si

- (a) $c = 0$ y Σ es un cilindro circular $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{R}^3$, con $r > 0$,
- (b) $c = 1$ y Σ es un toro llano $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{S}^3$, con $0 < r < 1$,
- (c) $c = -1$ y Σ es un cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{H}^3$, con $r > 0$.

Demostración. Al igual que en la prueba del Teorema 3.1.2, se tiene que $K \leq H^2 + c$ sobre Σ , con igualdad en los puntos umbilicales. Por lo tanto,

$$\sup_{\Sigma} K \leq H^2 + c.$$

Además, si $\sup_{\Sigma} K < H^2 + c$ entonces el supremo de K debe ser necesariamente

$$\sup_{\Sigma} K \geq 0.$$

En efecto, supongamos por contradicción que $\sup_{\Sigma} K < 0$ entonces $K \leq \sup_{\Sigma} K < 0$ lo cual implica por el Teorema 3.1.1 que Σ es totalmente umbilical y esto claramente no es cierto pues $\sup_{\Sigma} K < H^2 + c$. Esto muestra que o bien $\sup_{\Sigma} K = 0$ o bien $0 \leq \sup_{\Sigma} K < H^2 + c$.

Finalmente, si se tiene la igualdad $\sup_{\Sigma} K = 0$, entonces $K \leq 0$ y por tanto Σ es una de las superficies de los items (a), (b) o (c) del Teorema 3.1.1. \square

De manera análoga al Capítulo 3, las superficies de revolución muestran también que la estimación para el supremo de K en el Teorema 4.1.1 es óptima. Por ejemplo para una constante H dada, consideremos nuevamente la familia de onduloides en \mathbb{R}^3 (véase Figura 3.1) parametrizada por (3.1) y cuya primera forma fundamental (3.2) es $ds^2 + y_B(s)d\theta^2$. Sabemos entonces que la función curvatura de Gauss K_B en $\pi/(4H) + (\pi/H)k$, $k \in \mathbb{Z}$, alcanza un máximo, luego podemos afirmar que el

$$\sup K_B = \frac{4H^2B}{(1+B)^2} > 0.$$

Por lo tanto, para un $\varepsilon > 0$ dado podemos encontrar $B_1, B_2 \in (0, 1)$ tales que

$$\sup K_{B_1} = \varepsilon$$

y

$$\sup K_{B_2} = H^2 - \varepsilon,$$

respectivamente.

Enfoque alternativo del Teorema 4.1.1

Al igual que en el Capítulo 3 presentaremos una demostración alternativa del Teorema 4.1.1, utilizando la estructura conforme de la superficie. Para esto, primero realizamos la siguiente observación acerca del Lema 3.1.9 que fue una herramienta fundamental en la prueba del Teorema 3.1.2.

Observación 4.1.2. Del hecho que $|\nabla K|^2 = 4e^{-\varrho} |K_z|^2$ y la ecuación (3.20) se sigue que

$$|\nabla K|^2 = 4e^{-5\varrho} |\phi|^2 |2\varrho_z \phi - \phi_z|^2,$$

lo cual junto con (3.15) y (3.19) implican

$$(H^2 - K + c) \Delta K = -4K (H^2 - K + c)^2 - |\nabla K|^2. \quad (4.1)$$

Prueba alternativa del Teorema 4.1.1. Dado que $K \leq H^2 + c$ tenemos $\sup_{\Sigma} K \leq H^2 + c$ y podemos aplicar el principio del máximo de Omori-Yau (2.12) a la función K . Entonces existe una sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en Σ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K(x_k) = \sup_{\Sigma} K, \quad |\nabla K(x_k)| < \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad \Delta K(x_k) < \frac{1}{k}. \quad (4.2)$$

Aplicando esto a la expresión (4.1) nos lleva a

$$\begin{aligned} -4K(x_k) \left(H^2 - K(x_k) + c \right)^2 &= \left(H^2 - K(x_k) + c \right) \Delta K(x_k) + |\nabla K(x_k)|^2 \\ &\leq \left(H^2 - K(x_k) + c \right) \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $k \rightarrow \infty$ en esta desigualdad, obtenemos que

$$-4 \sup_{\Sigma} K \left(H^2 - \sup_{\Sigma} K + c \right)^2 \leq 0.$$

Esto es,

$$\sup_{\Sigma} K \left(H^2 - \sup_{\Sigma} K + c \right)^2 \geq 0.$$

Por lo tanto, existen dos posibilidades, o bien $\sup_{\Sigma} K = H^2 + c$, o bien $\sup_{\Sigma} K < H^2 + c$ y $\sup_{\Sigma} K \geq 0$.

En el caso $\sup_{\Sigma} K < H^2 + c$, se tiene $H^2 - K + c \geq H^2 - \sup_{\Sigma} K + c > 0$, de manera que podemos considerar sobre Σ la *métrica conforme*

$$\tilde{g} = \sqrt{H^2 - K + c} g,$$

donde $g = \langle, \rangle$ es la métrica riemanniana original inducida sobre Σ vía la inmersión. Dado que

$$\tilde{g} \geq \sqrt{H^2 - \sup_{\Sigma} K + c} g,$$

se tiene $\tilde{L} \geq \varepsilon L$, donde $\varepsilon = (H^2 - \sup_{\Sigma} K + c)^{1/4} > 0$ y \tilde{L} y L denotan las longitudes de una curva sobre Σ con respecto a las métricas riemannianas \tilde{g} y g , respectivamente. Ahora, dado que Σ es una superficie propiamente inmersa en \mathbb{M}_c^3 tenemos que la métrica inducida g es completa sobre Σ , y por ende \tilde{g} es también completa. Además, la curvatura de Gauss \tilde{K} de (Σ, \tilde{g}) está dada por

$$\sqrt{H^2 - K + c} \tilde{K} = K - \frac{1}{4} \Delta \log(H^2 - K + c). \quad (4.3)$$

Observemos que $\log(H^2 - K + c)$ lo podemos ver de la siguiente forma

$$\log(H^2 - K + c) = \phi(H^2 - K + c), \quad \text{donde } \phi(t) = \log(t),$$

de manera que

$$\Delta \phi(H^2 - K + c) = \phi''(H^2 - K + c) |\nabla(H^2 - K + c)|^2 + \phi'(H^2 - K + c) \Delta(H^2 - K + c),$$

donde $\phi'(t) = 1/t$ y $\phi''(t) = -1/t^2$. Usando el hecho de que H es constante y la ecuación (4.1) podemos calcular

$$\Delta \log(H^2 - K + c) = -\frac{|\nabla K|^2}{(H^2 - K + c)^2} - \frac{\Delta K}{H^2 - K + c} = 4K. \quad (4.4)$$

Por tanto, a partir de (4.3) tenemos $\tilde{K} = 0$.

Resumiendo (Σ^2, \tilde{g}) es una superficie riemanniana completa y llana, y por el Teorema 2.2.2 concluimos que (Σ^2, \tilde{g}) es parabólica. De la Proposición 2.2.3 sabemos que la propiedad de ser parabólica se preserva bajo el cambio conforme de la métrica. Entonces, (Σ^2, g) es también parabólica. Así pues, si $\sup_{\Sigma} K < H^2 + c$ y se da la igualdad $\sup_{\Sigma} K = 0$, (4.4) implica que $\log(H^2 - K + c)$ es una función superarmónica sobre (Σ^2, g) la cual está acotada inferiormente. Entonces debe ser constante. Por lo tanto, H y K son ambas constantes y la prueba finaliza como en el Teorema 3.1.2. \square

4.2. Hipersuperficies con curvatura media constante

Siguiendo el enfoque introducido en el Capítulo 3 para el caso n -dimensional, derivamos una extensión del Teorema 4.1.1 al caso de hipersuperficies n -dimensionales con curvatura media constante y dos curvaturas principales distintas, con $n \geq 3$. Específicamente, probaremos el siguiente resultado, el cual complementa nuestros resultados en la Sección 3.2.

Teorema 4.2.1 ([6], Theorem 4). *Sea Σ^n una hipersuperficie propiamente inmersa en un espacio forma $(n+1)$ -dimensional \mathbb{M}_c^{n+1} ($c = 0, 1, -1$ y $n \geq 3$) con curvatura media constante H y con dos curvaturas principales distintas, siendo una de ellas simple.*

(i) *Si $H^2 + c \geq 0$ (con $c = 0, 1, -1$) entonces*

$$B_{|H|,c} \leq \sup_{\Sigma} S \leq n(n-1)(c + H^2),$$

donde

$$B_{|H|,c} = \frac{n(n-2)}{2(n-1)} \left(2(n-1)c + nH^2 - |H|\sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)c} \right).$$

(ii) *Si $H^2 + c < 0$ (con $c = -1$) entonces o bien $\sup_{\Sigma} S = n(n-1)(c + H^2)$, o bien $4(n-1)/n^2 \leq H^2 < 1$ y*

$$B_{|H|,-1} \leq \sup_{\Sigma} S \leq \widehat{B}_{|H|,-1} < n(n-1)(c + H^2),$$

donde

$$\widehat{B}_{|H|,c} = \frac{n(n-2)}{2(n-1)} \left(2(n-1)c + nH^2 + |H|\sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)c} \right).$$

Además, se tiene la igualdad $\sup_{\Sigma} S = B_{|H|,c}$ y se alcanza este supremo en algún punto de Σ si y sólo si

(a) $c = 0$ y Σ es un cilindro circular $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con $r = 1/n|H| > 0$,

(b) $c = 1$ y Σ es un toro de curvatura media constante $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, con

$$r = \sqrt{\frac{2(n-1) + nH^2 + |H|\sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)}}{2n(1+H^2)}} \geq \sqrt{\frac{n-1}{n}},$$

(c) $c = -1$ y Σ es un cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^{n-1}(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$, con o bien $r = 1/\sqrt{n(n-2)}$ si $H^2 = 1$, o bien

$$r = \sqrt{\frac{2 - nH^2 + |H|\sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}}{2n(H^2 - 1)}} < \frac{1}{\sqrt{n(n-2)}}$$

en el caso en que $H^2 > 1$, o bien

$$\frac{1}{\sqrt{n(n-2)}} < r = \sqrt{\frac{nH^2 - 2 - |H|\sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}}{2n(1-H^2)}} \leq \frac{1}{\sqrt{n-2}}$$

en el caso en que $H^2 < 1$.

En relación a la condición de tener dos curvaturas principales distintas de nuestro Teorema 4.2.1, es bien conocida, desde el trabajo pionero de Otsuki [40], que si ambas curvaturas principales tienen multiplicidad mayor que 1, entonces las distribuciones de los espacios de vectores principales correspondientes a cada curvatura principal son completamente integrables y cada curvatura principal es constante sobre cada hoja integral de la distribución correspondiente. En particular, si la curvatura media es constante, entonces las dos curvaturas principales son también constantes y la hipersuperficie es isoparamétrica con exactamente dos curvaturas principales constantes, de multiplicidades k y $n-k$, y $1 < k < n-1$. Luego, por los resultados clásicos sobre hipersuperficies isoparamétricas en espacios forma riemannianos [32, 47, 15] la hipersuperficie debe ser un abierto de uno de los tres siguientes productos estándar embebidos:

- si $c = 0$, $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{S}^k(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con $r > 0$;
- si $c = 1$, $\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^k(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$ con $0 < r < 1$; y
- si $c = -1$, $\mathbb{H}^{n-k}(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^k(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$ con $r > 0$

(véase, por ejemplo, Lema 6 en [4] para una prueba detallada en el caso de hipersuperficies de la esfera euclídea). Por lo tanto, bajo la condición de tener dos curvaturas principales distintas, el caso interesante para estudiar es el de hipersuperficies con curvatura media constante donde una de las curvaturas principales es simple, esto es, de multiplicidad 1.

Ahora, de (1.21) sabemos que $S = n(n-1)(c + H^2) - |\Phi|^2$; esto junto con el hecho de que H es constante implican

$$\sup_{\Sigma} S = n(n-1)(c + H^2) - \inf_{\Sigma} |\Phi|^2,$$

por lo tanto al igual que en el Capítulo 3, re-escribiremos el Teorema 4.2.1 en términos del tensor de umbilicidad total como sigue.

Teorema 4.2.2 ([6], Theorem 6). *Sea Σ^n una hipersuperficie propiamente inmersa en un espacio forma $(n+1)$ -dimensional \mathbb{M}_c^{n+1} ($c = 0, 1, -1$ y $n \geq 3$) con curvatura media constante H y dos curvaturas principales distintas, siendo una de ellas simple.*

(i) *Si $H^2 + c \geq 0$ (con $c = 0, 1, -1$) entonces*

$$0 \leq \inf_{\Sigma} |\Phi| \leq \beta_{|H|,c} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left((n-2)|H| + \sqrt{n^2 H^2 + 4(n-1)c} \right).$$

(ii) *Si $H^2 + c < 0$ (con $c = -1$) entonces o bien $\inf_{\Sigma} |\Phi| = 0$ o bien $4(n-1)/n^2 \leq H^2 < 1$ y*

$$0 < \widehat{\beta}_{|H|,-1} \leq \inf_{\Sigma} |\Phi| \leq \beta_{|H|,-1},$$

donde

$$\widehat{\beta}_{|H|,-1} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left((n-2)|H| - \sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)} \right).$$

Además, se tiene la igualdad $\inf_{\Sigma} |\Phi| = \beta_{|H|,c}$ y se alcanza este ínfimo en algún punto de Σ si y sólo si Σ es una de las hipersuperficies de los ítems (a), (b) o (c) del Teorema 4.2.1.

Este enfoque nos permite establecer una versión más general de nuestro Teorema 4.2.2 (o, equivalentemente, de nuestro Teorema 4.2.1) en los siguientes términos.

Teorema 4.2.3 ([6], Theorem 7). *Sea Σ^n una hipersuperficie inmersa en un espacio forma $(n+1)$ -dimensional \mathbb{M}_c^{n+1} ($c = 0, 1, -1$ y $n \geq 3$) con curvatura media constante H y dos curvaturas principales distintas, siendo una de ellas simple. Supongamos que el principio del máximo de Omori-Yau se verifica sobre Σ .*

(i) *Si $H^2 + c \geq 0$ (con $c = 0, 1, -1$) entonces*

$$0 \leq \inf_{\Sigma} |\Phi| \leq \beta_{|H|,c}.$$

(ii) *Si $H^2 + c < 0$ (con $c = -1$) entonces o bien $\inf_{\Sigma} |\Phi| = 0$ o bien $4(n-1)/n^2 \leq H^2 < 1$ y*

$$0 < \widehat{\beta}_{|H|,-1} \leq \inf_{\Sigma} |\Phi| \leq \beta_{|H|,-1}.$$

Además, se tiene la igualdad $\inf_{\Sigma} |\Phi| = \beta_{|H|,c}$ y este ínfimo se alcanza en algún punto de Σ si y sólo si Σ es un abierto de una de las hipersuperficies de los ítems (a), (b) o (c) del Teorema 4.2.2.

El siguiente resultado auxiliar será fundamental para la demostración del teorema anterior.

Lema 4.2.4 ([6], Lemma 10). *Sea Σ^n una variedad riemanniana n -dimensional y considere $T : \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}(\Sigma)$ un tensor simétrico sobre Σ con dos valores propios distintos, siendo uno de ellos simple, tal que $\text{tr}(T) = 0$ y su diferencial covariante ∇T es simétrica. Entonces*

$$|\nabla T|^2 = \frac{n+2}{n} |\nabla |T||^2. \quad (4.5)$$

Demostración. Denotemos por λ y μ los dos valores propios distintos de T , con multiplicidades $(n-1)$ y 1 , respectivamente. Como $0 = \text{tr}(T) = \mu + (n-1)\lambda$ entonces

$$\mu = -(n-1)\lambda, \quad (4.6)$$

y por ende $\lambda \neq 0$, y

$$|T|^2 = (n-1)\lambda^2 + \mu^2 = n(n-1)\lambda^2 > 0. \quad (4.7)$$

Denotemos por D_λ y D_μ las distribuciones de los espacios propios correspondientes a cada valor propio, respectivamente. Esto es,

$$D_\lambda = \text{Ker}(T - \lambda I) = \{X \in \mathcal{X}(\Sigma) : TX = \lambda X\}$$

y análogamente

$$D_\mu = \text{Ker}(T - \mu I) = \{Y \in \mathcal{X}(\Sigma) : TY = \mu Y\}.$$

Del hecho de ser T simétrico, se sigue que $D_\lambda = D_\mu^\perp$. En efecto, para $X \in D_\lambda$ y $Z \in D_\mu$ arbitrarios se tiene que

$$\lambda \langle X, Z \rangle = \langle TX, Z \rangle = \langle X, TZ \rangle = \mu \langle X, Z \rangle,$$

como $\lambda \neq \mu$ entonces $\langle X, Z \rangle = 0$, es decir, $X \in D_\mu^\perp$.

Afirmamos que D_λ es una distribución involutiva, esto es, $[X, Y] \in D_\lambda$ para todo $X, Y \in D_\lambda$. Para probar esto, primero observemos que si descomponemos a Y de la siguiente forma $Y = Y^* + \alpha X$ donde $\langle Y^*, X \rangle = 0$ tenemos que

$$[X, Y] = [X, Y^*] + X(\alpha)X$$

donde claramente $X(\alpha)X \in D_\lambda$. Por tanto, concluimos que para probar que D_λ es involutiva basta demostrar que lo es, para campos ortogonales, es decir, $[X, Y] \in D_\lambda$ para todo $X, Y \in D_\lambda$ tales que $\langle X, Y \rangle = 0$. Esto se debe a que para cualesquier $X, Y \in D_\lambda$ ortogonales entre sí, $\nabla_X Y \in D_\lambda$. En efecto, dado $Z \in D_\mu = (D_\lambda)^\perp$ encontramos que

$$0 = Y(\langle X, Z \rangle) = \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle. \quad (4.8)$$

Por otra parte,

$$\nabla T(Y, Z) = Z(\lambda)Y + \lambda \nabla_Z Y - T(\nabla_Z Y)$$

y

$$\nabla T(Z, Y) = Y(\mu)Z + \mu \nabla_Y Z - T(\nabla_Y Z).$$

De la simetría de ∇T obtenemos $\langle \nabla T(Y, Z), X \rangle = \langle \nabla T(Z, Y), X \rangle$ lo que es equivalente a

$$\lambda \langle \nabla_Z Y, X \rangle - \langle \nabla_Z Y, TX \rangle = \mu \langle \nabla_Y Z, X \rangle - \langle \nabla_Y Z, TX \rangle.$$

Pero $TX = \lambda X$ lo que implica $0 = (\mu - \lambda) \langle \nabla_Y Z, X \rangle$. Por hipótesis $\mu \neq \lambda$ entonces $\langle \nabla_Y Z, X \rangle = 0$. De (4.8) se sigue que $\langle \nabla_Y X, Z \rangle = 0$, esto es, $\nabla_Y X \in D_\lambda$.

Ahora veamos que $X(\lambda) = 0$ para todo $X \in D_\lambda$. En efecto, si $X, Y \in D_\lambda$ entonces $\nabla T(X, Y) = \nabla T(Y, X)$. Es decir

$$\nabla_Y(TX) - T(\nabla_Y X) = \nabla_X(TY) - T(\nabla_X Y),$$

pero esto a su vez, es

$$\nabla_Y(\lambda X) - T(\nabla_Y X) = \nabla_X(\lambda Y) - T(\nabla_X Y),$$

así que

$$Y(\lambda)X + \lambda \nabla_Y X - T(\nabla_Y X) = X(\lambda)Y + \lambda \nabla_X Y - T(\nabla_X Y),$$

equivalentemente

$$Y(\lambda)X - X(\lambda)Y = \lambda(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - T(\nabla_X Y - \nabla_Y X),$$

y dado que D_λ es involutiva, $[X, Y] \in D_\lambda$ así que $T([X, Y]) = \lambda[X, Y]$. Por lo tanto,

$$Y(\lambda)X - X(\lambda)Y = 0.$$

Fijando X , podemos elegir Y tal que $\langle X, Y \rangle = 0$ de manera que $X(\lambda) = 0$.

Dado que $\dim(D_\lambda) = n - 1 \geq 2$, esto produce $X(\lambda) = 0$ para todo $X \in D_\lambda$, y por lo tanto $X(\mu) = 0$ para todo $X \in D_\lambda$.

Sea $\{E_1, \dots, E_n\}$ una base local ortonormal sobre Σ que diagonaliza el tensor T , de manera que $T(E_i) = \lambda E_i$ para todo $1 \leq i \leq n - 1$ y $T(E_n) = \mu E_n$. Por lo que probamos anteriormente se sigue que

$$\nabla \lambda = E_n(\lambda)E_n, \quad \text{y} \quad |\nabla \lambda|^2 = E_n(\lambda)^2, \quad (4.9)$$

pues $E_i(\lambda) = 0$. Entonces, denotando por $T_{\alpha, \beta, \gamma} = \langle \nabla T(E_\alpha, E_\beta), E_\gamma \rangle$ obtenemos

$$\begin{aligned} |\nabla T|^2 &= \sum_{\alpha, \beta=1}^n |\nabla T(E_\alpha, E_\beta)|^2 = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^n T_{\alpha, \beta, \gamma}^2 \\ &= \sum_{i, j, k=1}^{n-1} T_{i, j, k}^2 + \sum_{i, j=1}^{n-1} (T_{i, j, n}^2 + T_{i, n, j}^2 + T_{n, i, j}^2) + \sum_{i=1}^{n-1} (T_{i, n, n}^2 + T_{n, i, n}^2 + T_{n, n, i}^2) + T_{n, n, n}^2. \end{aligned}$$

De las simetrías de T y ∇T sabemos que $T_{\alpha, \beta, \gamma} = T_{\gamma, \beta, \alpha}$ y $T_{\alpha, \beta, \gamma} = T_{\beta, \alpha, \gamma}$, respectivamente, para todo $1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n$, y aplicando estas simetrías sucesivamente de la siguiente forma, obtenemos

$$T_{\alpha, \beta, \gamma} = T_{\beta, \alpha, \gamma} = T_{\gamma, \alpha, \beta} = T_{\alpha, \gamma, \beta}.$$

Usando esto, podemos escribir

$$|\nabla T|^2 = \sum_{i, j, k=1}^{n-1} T_{i, j, k}^2 + 3 \sum_{i, j=1}^{n-1} T_{i, j, n}^2 + 3 \sum_{i=1}^{n-1} T_{i, n, n}^2 + T_{n, n, n}^2.$$

Analicemos cada uno de los sumandos anteriores. Para facilitar los cálculos que realizaremos a continuación, usaremos la siguiente notación

$$W_i^j(E_k) = \langle \nabla_{E_k} E_i, E_j \rangle, \quad \text{para todo } i, j, k = 1, \dots, n.$$

Notemos que $W_i^n(E_j) = W_j^n(E_i)$, para todo $i, j = 1, \dots, n-1$. En efecto, dado que D_λ es involutiva si $E_i, E_j \in D_\lambda$ tenemos que $[E_i, E_j] \in D_\lambda$, así que $\langle [E_i, E_j], E_n \rangle = 0$. Por esto y el hecho de que $[E_i, E_j] = \nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i$ se tiene que $W_i^n(E_j) - W_j^n(E_i) = 0$, para todo $i, j = 1, \dots, n-1$.

Observemos que

(i) $T_{i,j,k} = 0$ para todo $1 \leq i, j, k \leq n-1$.

Como $T_{i,j,k} = \langle \nabla T(E_i, E_j), E_k \rangle$ y $\nabla T(E_i, E_j) = \nabla_{E_j} T(E_i) - T(\nabla_{E_j} E_i)$ tenemos que

$$T_{i,j,k} = \langle E_j(\lambda) E_i + \lambda \nabla_{E_j} E_i - T(\nabla_{E_j} E_i), E_k \rangle.$$

Además, $E_j(\lambda) = 0$ (pues $E_j \in D_\lambda$) y por ser T simétrico tenemos

$$T_{i,j,k} = \lambda W_i^k(E_j) - \langle \nabla_{E_j} E_i, T(E_k) \rangle$$

y dado que $T(E_k) = \lambda E_k$ se deduce fácilmente el ítem (i).

(ii) $T_{i,j,n} = 0$ y $T_{i,i,n} = E_n(\lambda)$ para todo $1 \leq i, j \leq n-1, i \neq j$

De la definición de $T_{i,j,n}$ y del hecho que T es simétrico tenemos

$$T_{i,j,n} = E_j(\lambda) \langle E_i, E_n \rangle + \lambda \langle \nabla_{E_j} E_i, E_n \rangle - \langle \nabla_{E_j} E_i, T(E_n) \rangle.$$

Recordemos que $T(E_n) = \mu E_n$ entonces

$$T_{i,j,n} = (\lambda - \mu) W_i^n(E_j) = n \lambda W_i^n(E_j).$$

Por otro lado, como $T_{i,n,j} = T_{i,j,n}$. Nótese que

$$T_{i,n,j} = E_n(\lambda) \langle E_i, E_j \rangle + \lambda W_i^j(E_n) - \lambda W_i^j(E_n) = E_n(\lambda) \langle E_i, E_j \rangle. \quad (4.10)$$

Si $i = j$ entonces $E_n(\lambda) = T_{i,n,i} = T_{i,i,n}$. Pero si por el contrario $i \neq j$ tenemos que $0 = T_{i,n,j} = T_{i,j,n}$.

(iii) $T_{i,n,n} = 0$ para todo $1 \leq i \leq n-1$.

Por las simetrías que mencionamos anteriormente

$$T_{i,n,n} = T_{n,i,n} = E_i(\mu) + \mu W_i^n(E_n) - \mu W_i^n(E_n) = 0,$$

pues por (4.6) tenemos que $E_i(\mu) = -(n-1)E_i(\lambda) = 0$.

(iv) $T_{n,n,n} = E_n(\mu) = -(n-1)E_n(\lambda)$.

De la definición de $T_{n,n,n}$ y la ecuación (4.6)

$$T_{n,n,n} = E_n(\mu) + \mu W_n^n(E_n) - \mu W_n^n(E_n) = E_n(\mu).$$

Por lo tanto, de (4.7), (4.9) y los items (i) – (iv) concluimos que

$$\begin{aligned} |\nabla T|^2 &= 3 \sum_{i=1}^{n-1} E_n(\lambda)^2 + (n-1)^2 E_n(\lambda)^2 = 3(n-1)E_n(\lambda)^2 + (n-1)^2 E_n(\lambda)^2 \\ &= (n-1)(n+2)|\nabla \lambda|^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para finalizar, de (4.7) concluimos que

$$\nabla \lambda = \pm \frac{\nabla |\Phi|}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

Luego,

$$|\nabla \lambda|^2 = \frac{|\nabla |\Phi||^2}{n(n-1)}$$

reemplazando esto en la ecuación (4.11) finalizamos la prueba del teorema. \square

Ya estamos listos para demostrar el Teorema 4.2.3. Para facilidad del lector realizaremos la prueba en dos partes, en la primera probaremos las desigualdades (i) y (ii), y en la segunda demostraremos la caracterización de la igualdad $\inf_{\Sigma} |\Phi| = \beta_{|H|,c}$.

Prueba del Teorema 4.2.3. Primera parte

Dado que Σ tiene dos curvaturas principales λ y μ distintas con multiplicidades $n-1$ y 1 , respectivamente, tenemos que los valores propios de $\Phi = A - HI$ están dados por

$$\tilde{\lambda} = \lambda - H \quad \text{y} \quad \tilde{\mu} = \mu - H,$$

donde obviamente $\tilde{\mu}$ es el valor propio simple.

Por hipótesis $\text{tr}(\Phi) = 0$, así que $\tilde{\mu} = -(n-1)\tilde{\lambda}$, y $|\Phi|$ es una función diferenciable y positiva sobre Σ , $|\Phi| > 0$, pues $n\tilde{\lambda} = \lambda - \mu \neq 0$. Luego,

$$|\Phi|^2 = (n-1)\tilde{\lambda}^2 + \tilde{\mu}^2 = n(n-1)\tilde{\lambda}^2.$$

De aquí deducimos que

$$|\tilde{\lambda}| = \frac{|\Phi|}{\sqrt{n(n-1)}}. \quad (4.12)$$

Por lo tanto, si calculamos la traza de Φ^3 tenemos que

$$\text{tr}(\Phi^3) = (n-1)\tilde{\lambda}^3 + \tilde{\mu}^3 = -n(n-2)(n-1)\tilde{\lambda}^3$$

y usando (4.12) nos lleva a

$$|\operatorname{tr}(\Phi^3)| = \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^3.$$

Esto es,

$$\operatorname{tr}(\Phi^3) = \pm \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^3.$$

Además, como H es constante $\nabla\Phi = \nabla A$ es necesariamente simétrico, así que por el Lema 4.2.4 tenemos

$$|\nabla\Phi|^2 = \frac{n+2}{n}|\nabla|\Phi||^2. \quad (4.13)$$

Usando la fórmula de tipo Simons para la función $|\Phi|^2$ (véase (2.35) en el Corolario 2.4.4) y la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} |\Phi|\Delta|\Phi| &= \frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 - |\nabla|\Phi||^2 \\ &= \frac{2}{n}|\nabla|\Phi||^2 + nH\operatorname{tr}(\Phi^3) - |\Phi|^2(|\Phi|^2 - n(c+H^2)) \\ &= \frac{2}{n}|\nabla|\Phi||^2 \pm \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi|^3 - |\Phi|^2(|\Phi|^2 - n(c+H^2)) \\ &\leq \frac{2}{n}|\nabla|\Phi||^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\Phi|^3 - |\Phi|^2(|\Phi|^2 - n(c+H^2)) \\ &= \frac{2}{n}|\nabla|\Phi||^2 - |\Phi|^2Q_{|H|,c}(|\Phi|), \end{aligned}$$

donde $Q_{|H|,c}(x) = x^2 - n(n-2)/\sqrt{n(n-1)}|H|x - n(c+H^2)$. Esto es,

$$|\Phi|\Delta|\Phi| \leq \frac{2}{n}|\nabla|\Phi||^2 - |\Phi|^2Q_{|H|,c}(|\Phi|). \quad (4.14)$$

Observe que $Q_{|H|,c}$ es un polinomio cuadrático muy similar al polinomio $P_{|H|,c}$ que encontramos al realizar la estimación del ínfimo de $|\Phi|$ (véase Sección 3.2). La única diferencia entre estos polinomios es el signo del término lineal; por lo tanto poseen el mismo discriminante $n/(n-1)(n^2H^2 + 4(n-1)c)$.

Ahora, aplicando el principio del máximo de Omori-Yau (2.13) a la función $|\Phi|$ sabemos entonces que existe $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en Σ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\Phi|(x_k) = \inf_{\Sigma} |\Phi|, \quad |\nabla|\Phi|(x_k)| < \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad \Delta|\Phi|(x_k) > -\frac{1}{k},$$

lo cual junto con (4.14) implica

$$\begin{aligned} -\frac{1}{k}|\Phi|(x_k) &< |\Phi|(x_k)\Delta|\Phi|(x_k) \leq \frac{2}{n}|\nabla|\Phi|(x_k)|^2 - |\Phi|^2(x_k)Q_{|H|,c}(|\Phi|(x_k)) \\ &< \frac{2}{nk^2} - |\Phi|^2(x_k)Q_{|H|,c}(|\Phi|(x_k)). \end{aligned}$$

Haciendo $k \rightarrow \infty$, obtenemos

$$(\inf_{\Sigma} |\Phi|)^2 Q_{|H|,c}(\inf_{\Sigma} |\Phi|) \leq 0. \quad (4.15)$$

De aquí se sigue que o bien $\inf_{\Sigma} |\Phi| = 0$, o bien $\inf_{\Sigma} |\Phi| > 0$ y entonces $Q_{|H|,c}(\inf_{\Sigma} |\Phi|) \leq 0$. Observemos que

- Si $H^2 + c > 0$ el polinomio $Q_{|H|,c}(x)$ tiene una única raíz positiva dada por

$$\beta_{|H|,c} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left((n-2)|H| + \sqrt{n^2 H^2 + 4(n-1)c} \right)$$

(véase Figura 4.1). Por lo tanto en este caso $Q_{|H|,c}(\inf_{\Sigma} |\Phi|) \leq 0$ significa que $\inf_{\Sigma} |\Phi| \leq \beta_{|H|,c}$.

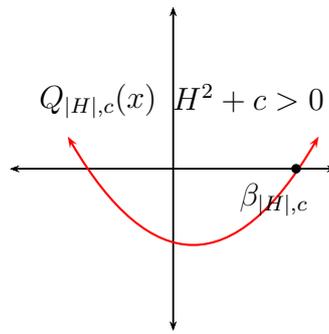


Figura 4.1. Polinomio $Q_{|H|,c}(x)$ cuando $H^2 + c > 0$.

- Si $H^2 + c = 0$ y $c = 0$, entonces $H = 0$ y $Q_{0,0}(x) = x^2$ (véase Figura 4.2), así que $Q_{0,0}(\inf_{\Sigma} |\Phi|) > 0$ para todo $\inf_{\Sigma} |\Phi| > 0$. Por lo tanto en este caso $Q_{0,0}(\inf_{\Sigma} |\Phi|) \leq 0$ significa que $\inf_{\Sigma} |\Phi| = 0 = \beta_{0,0}$.

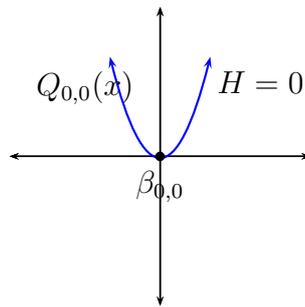
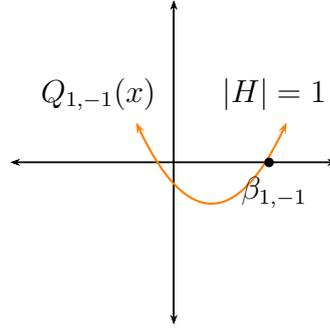


Figura 4.2. Polinomio $Q_{|H|,c}(x)$ cuando $H = 0 = c$.

- Si $H^2 + c = 0$ y $c = -1$, entonces $|H| = 1$ y $Q_{1,-1}(x)$ tiene una única raíz positiva dada por $\beta_{1,-1} = n(n-2)/\sqrt{n(n-1)}$ (véase Figura 4.3). Por tanto en este caso $Q_{1,-1}(\inf_{\Sigma} |\Phi|) \leq 0$ significa que $\inf_{\Sigma} |\Phi| \leq \beta_{1,-1}$.

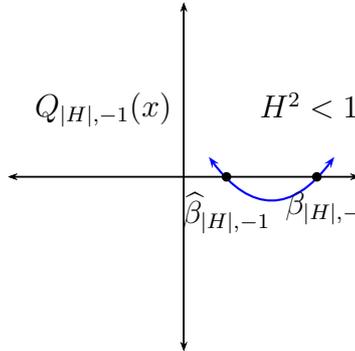
Figura 4.3. Polinomio $Q_{|H|,c}(x)$ cuando $H^2 + 1 = 0$.

- Si $H^2 + c < 0$ (con $c = -1$ necesariamente) el polinomio $Q_{|H|,-1}(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si $H^2 < 4(n-1)/n^2$. Por lo tanto, si $\inf_{\Sigma} |\Phi| > 0$ debe ser necesariamente $4(n-1)/n^2 \leq H^2 < 1$. En este caso, el polinomio $Q_{|H|,-1}(x)$ tiene dos raíces positivas (las cuales de hecho llegan a ser una raíz doble cuando $H^2 = 4(n-1)/n^2$) dadas por

$$\hat{\beta}_{|H|,-1} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left((n-2)|H| - \sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)} \right) \text{ y}$$

$$\beta_{|H|,-1} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left((n-2)|H| + \sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)} \right)$$

(véase Figura 4.4). Por consiguiente en este caso $Q_{|H|,-1}(\inf_{\Sigma} |\Phi|) \leq 0$ significa que $\hat{\beta}_{|H|,-1} \leq \inf_{\Sigma} |\Phi| \leq \beta_{|H|,-1}$. Esto finaliza la prueba de la primera parte del Teorema 4.2.3.

Figura 4.4. Polinomio $Q_{|H|,c}(x)$ cuando $H^2 + c < 0$.

Prueba del Teorema 4.2.3. Segunda parte

Ahora veamos lo que sucede cuando se tiene la igualdad $\inf_{\Sigma} |\Phi| = \beta_{|H|,c}$ y se alcanza este ínfimo en algún punto $p_0 \in \Sigma$. En este caso, $|\Phi| \geq \beta_{|H|,c}$ y, por lo tanto,

$Q_{|H|,c}(|\Phi|) \geq 0$ sobre Σ . Observemos que

$$\Delta \log |\Phi| = \frac{1}{|\Phi|} \Delta |\Phi| - \frac{1}{|\Phi|^2} |\nabla |\Phi||^2. \quad (4.16)$$

Por otra parte, de (4.14) sabemos que $|\Phi| \Delta |\Phi| \leq 2/n |\nabla |\Phi||^2 - |\Phi|^2 Q_{|H|,c}(|\Phi|)$, así que

$$\frac{1}{|\Phi|} \Delta |\Phi| \leq \frac{2}{n} \frac{1}{|\Phi|^2} |\nabla |\Phi||^2 - Q_{|H|,c}(|\Phi|).$$

Esto junto con (4.16) nos lleva a

$$\Delta \log |\Phi| \leq -\frac{n-2}{n} \frac{1}{|\Phi|^2} |\nabla |\Phi||^2 - Q_{|H|,c}(|\Phi|) = -\frac{n-2}{n} |\nabla \log |\Phi||^2 - Q_{|H|,c}(|\Phi|).$$

Esto es,

$$\Delta \log |\Phi| + \frac{n-2}{n} |\nabla \log |\Phi||^2 \leq -Q_{|H|,c}(|\Phi|).$$

Luego, dado que $Q_{|H|,c}(|\Phi|) \geq Q_{|H|,c}(\inf_{\Sigma} |\Phi|) = 0$ sobre Σ , obtenemos

$$\Delta \log |\Phi| \leq \Delta \log |\Phi| + \frac{n-2}{n} |\nabla \log |\Phi||^2 \leq 0 \quad \text{sobre } \Sigma.$$

Es decir, $\log |\Phi|$ es una función superarmónica. Dado que existe un punto $p_0 \in \Sigma$ en el que se alcanza el mínimo de la función $\log |\Phi|$, por el principio fuerte del mínimo para funciones superarmónicas concluimos que $\log |\Phi|$ es constante sobre Σ , y por ende $|\Phi|$ es también constante, es decir $|\Phi| = \beta_{|H|,c}$. Dado que la curvatura media H es constante y Σ tiene dos curvaturas principales distintas, entonces ellas son necesariamente constantes y Σ es una hipersuperficie isoparamétrica con exactamente dos curvaturas principales constantes, de multiplicidades $(n-1)$ y 1 . Luego, por los resultados clásicos sobre hipersuperficies isoparamétricas de espacios forma riemannianos [32, 47, 15] concluimos que Σ debe ser un abierto de uno de los siguientes productos estándar embebidos:

- si $c = 0$, $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con $r > 0$;
- si $c = 1$, $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, con $0 < r < 1$; y
- si $c = -1$, $\mathbb{H}^{n-1}(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$ o $\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$, con $r > 0$.

Por lo expuesto en la Sección 1.4 y realizando un análisis detallado de las constantes $|\Phi|$ y $\beta_{|H|,c}$ en estos ejemplos, de (1.33) sabemos que cuando $c = 0$, el producto $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1(r)$ satisface

$$\inf_{\Sigma} |\Phi| = |\Phi| = \sqrt{n(n-1)} |H| = \beta_{|H|,0}$$

mientras que el producto $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$, con $r > 0$ (véase (1.34)) satisface

$$\inf_{\Sigma} |\Phi| = |\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} |H| < \beta_{|H|,0}.$$

Por otra parte, cuando $c = 1$ de la ecuación (1.37) concluimos que el producto $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$ satisface

$$\inf_{\Sigma} |\Phi| = |\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left(\sqrt{n^2 H^2 + 4(n-1)} + (n-2)|H| \right) < \beta_{|H|,1}$$

si $r > \sqrt{(n-1)/n}$, mientras que

$$\inf_{\Sigma} |\Phi| = |\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left(\sqrt{n^2 H^2 + 4(n-1)} - (n-2)|H| \right) = \beta_{|H|,1}$$

si $0 < r < \sqrt{(n-1)/n}$.

En el caso hiperbólico ($c = -1$) y para un radio dado $r > 0$ tenemos que el producto estándar embebido $\mathbb{H}^{n-1}(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^1(r) \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ satisface

$$H = \frac{nr^2 + 1}{nr\sqrt{1+r^2}} \quad \text{y} \quad |\Phi| = \frac{\sqrt{n-1}}{r\sqrt{n(1+r^2)}}.$$

Además $H^2 \geq 1$ si y sólo si $r \leq 1/\sqrt{n(n-2)}$ y se tiene la igualdad $r^2 = 1/n(n-2)$ si y sólo si $H^2 = 1$, y

$$r^2 = \frac{2 - nH^2 + |H|\sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)}}{2n(H^2 - 1)}$$

cuando $H^2 > 1$. Luego, por (1.43) obtenemos que cuando $H^2 \geq 1$

$$\inf_{\Sigma} |\Phi| = |\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left((n-2)|H| + \sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)} \right) = \beta_{|H|,-1}.$$

Por otra parte, si $4(n-1)/n^2 < H^2 < 1$ recordemos que existen dos valores de $r > 1/\sqrt{n(n-2)}$ con la misma curvatura media constante H^2 , los cuales están dados por

$$\frac{1}{n(n-2)} < r^2 = \frac{nH^2 - 2 - |H|\sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)}}{2n(1-H^2)} < \frac{1}{n-2},$$

y

$$r^2 = \frac{nH^2 - 2 + |H|\sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)}}{2n(1-H^2)} > \frac{1}{n-2}.$$

De (1.46) vemos que en el primer caso

$$\inf_{\Sigma} |\Phi| = |\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left((n-2)|H| + \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)} \right) = \beta_{|H|,-1},$$

mientras en el segundo caso (véase (1.47)) obtenemos

$$\inf_{\Sigma} |\Phi| = |\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left((n-2)|H| - \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)} \right) = \widehat{\beta}_{|H|,-1} < \beta_{|H|,-1}.$$

Por lo tanto, cuando $H^2 < 1$ se tiene la igualdad $\inf_{\Sigma} |\Phi| = \beta_{|H|,-1}$ para todo $1/\sqrt{n(n-2)} < r \leq 1/\sqrt{n-2}$.

Finalmente, el producto estándar embebido $\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ tiene curvatura media constante

$$H = \frac{nr^2 + n - 1}{nr\sqrt{1+r^2}} \quad \text{y} \quad |\Phi| = \frac{\sqrt{n-1}}{r\sqrt{n(1+r^2)}}.$$

En este caso $H^2 > 1$ para todo $r > 0$ y r^2 está dado por

$$r^2 = \frac{2(n-1) - nH^2 + |H|\sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}}{2n(H^2 - 1)}.$$

Por lo tanto, en este caso tenemos que para todo $r > 0$

$$\inf_{\Sigma} |\Phi| = |\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left(-(n-2)|H| + \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)} \right) < \beta_{|H|,-1}.$$

Esto finaliza la prueba del Teorema 4.2.3.

Observación 4.2.5. Véase [24] para un resultado previo correspondiente al caso de hipersuperficies minimales en \mathbb{S}^{n+1} dado por Hasanis, Savas-Halilaj y Vlachos. También remitimos al lector a [18], [25], [41] o [54] para otros resultados previos sobre hipersuperficies compactas con dos curvaturas principales distintas en la esfera euclídea \mathbb{S}^{n+1} .

Presentamos un teorema dado por Shu y Han en [48], el cual está muy relacionado con nuestros resultados, aunque es completamente independiente y diferente a los nuestros.

Teorema 4.2.6. *Sea Σ una hipersuperficie n -dimensional inmersa en un espacio forma real \mathbb{M}_c^{n+1} completa y orientada, con curvatura media constante y dos curvaturas principales distintas λ y μ de multiplicidades $n-1$ y 1 . Si la curvatura de Ricci de Σ es no negativa, entonces*

1. Si $\lambda < \mu$ con $c \geq 0$ y $c < 0$, $H^2 + c \geq 0$ tenemos que

$$\inf_{\Sigma} |\Phi| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{n-1}} \left[(n-2)H + \sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)c} \right] \leq \sup_{\Sigma} |\Phi|, \quad (4.17)$$

y se tienen las igualdades en (4.17) si y sólo si para

- (i) $c = 0$, Σ es isométrico a $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1(n^2H^2)$;
(ii) $c = 1$, Σ es isométrico a $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1-r^2})$, donde

$$r^2 = \frac{1}{2n(1+H^2)} \left[2 + nH^2 - \sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)H^2} \right];$$

- (iii) $c = -1$, Σ es isométrico a $\mathbb{H}^{n-1}(\lambda^2 - 1) \times \mathbb{S}^1(1/\lambda^2 - 1)$, donde

$$\lambda = \frac{1}{2(n-1)} \left[nH - \sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)} \right];$$

2. Si $\lambda > \mu$, con $c \geq 0$ y $c < 0$, $H^2 + c \geq 0$ tenemos que

$$\inf_{\Sigma} |\Phi| \leq -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{n-1}} \left[(n-2)H - \sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)c} \right] \leq \sup_{\Sigma} |\Phi|, \quad (4.18)$$

y se tienen las igualdades en (4.18) si y sólo si para

- (i) $c = 0$, Σ es isométrico a $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}(n^2H^2/(n-1))$;
(ii) $c = 1$, Σ es isométrico a $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1-r^2})$, donde

$$r^2 = \frac{1}{2n(1+H^2)} \left[2 + nH^2 + \sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)H^2} \right];$$

- (iii) $c = -1$, Σ es isométrico a $\mathbb{H}^{n-1}(\lambda^2 - 1) \times \mathbb{S}^1(1/\lambda^2 - 1)$, donde

$$\lambda = \frac{1}{2(n-1)} \left[nH + \sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)} \right].$$

A continuación nos gustaría hacer algunas observaciones acerca de este resultado. En primer lugar, Shu y Han sólo consideran el caso en que $H^2 + c \geq 0$, y sus resultados no dicen nada acerca del caso $H^2 + c < 0$ (cuando $c = -1$). En segundo lugar, en la caracterización de las igualdades, su resultado es más débil que el nuestro, dado que ellos necesitan suponer que se satisfacen ambas igualdades, una para el ínfimo de $|\Phi|$ y otra para el supremo de $|\Phi|$. En particular, para la caracterización de las igualdades ellos suponen que $\inf_{\Sigma} |\Phi| = \sup_{\Sigma} |\Phi|$, lo cual significa que $|\Phi|$ es constante. Sin embargo, en nuestra caracterización de las igualdades, nosotros sólo suponemos que se tiene la igualdad para el ínfimo de $|\Phi|$, y la conclusión de que la función $|\Phi|$ debe ser constante es una consecuencia de un principio fuerte del mínimo. Finalmente, nosotros no suponemos que Σ es una hipersuperficie completa con curvatura de Ricci no negativa; sólo necesitamos suponer que el principio del máximo de Omori-Yau se verifica sobre Σ como se puede apreciar en el Teorema 4.2.3 (o que la hipersuperficie es propiamente inmersa como en el Teorema 4.2.1 y, equivalentemente, en el Teorema 4.2.2). Esto, no es sólo una diferencia técnica. Por el contrario, es una diferencia importante porque, cuando $c = -1$, las hipersuperficies que ellos caracterizan con la igualdad, no tienen curvatura de Ricci no negativa.

4.3. Un enfoque alternativo para el caso euclídeo

En esta sección introducimos un enfoque alternativo del Teorema 4.2.2 para el caso más general de hipersuperficies completas en el espacio euclídeo. Observe que nuestra versión más general de este teorema se tiene para las hipersuperficies que verifican el principio del máximo de Omori-Yau, no necesariamente completas.

Para el caso de hipersuperficies en el espacio euclídeo ($c = 0$), el Teorema 4.2.2 afirma que si Σ^n es una hipersuperficie propiamente inmersa en \mathbb{R}^{n+1} ($n \geq 3$) con curvatura media constante H y con dos curvaturas principales distintas, siendo una de ellas simple, entonces

$$\sup_{\Sigma} S \geq 0.$$

Además, se tiene la igualdad $\sup_{\Sigma} S = 0$ y se alcanza este supremo en algún punto de Σ si y sólo si Σ es un cilindro circular $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con $r = 1/n|H| > 0$.

A continuación presentamos dos lemas dados por Do Carmo y Dajczer en [20, Corolario 4.4] y Spivak en [50, página 330] respectivamente, que nos serán de gran utilidad a la hora de probar nuestros resultados bajo este enfoque.

Lema 4.3.1. *Sea $\psi : \Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{M}_c^{n+1}$, $n \geq 3$, una hipersuperficie minimal con dos curvaturas principales λ y μ , donde una de ellas, digamos λ tiene multiplicidad al menos $n - 1$. Entonces Σ está contenida en un catenoide.*

Lema 4.3.2. *Sean M y N variedades riemannianas conexas con M completa, y sea $\psi : M \hookrightarrow N$, $n \geq 3$, una isometría local. Entonces N es completa y ψ una función recubridora sobre N .*

Otra herramienta que será fundamental en la prueba de nuestros resultados principales, es el siguiente teorema dado por Smyth y Xavier en [49].

Teorema 4.3.3 (El Teorema de la Curvatura Principal). *Sea Σ^n una hipersuperficie inmersa en \mathbb{R}^{n+1} orientable y completa, la cual no es un hiperplano, y A denota su segunda forma fundamental con respecto a un campo normal global y unitario. Sea $\Lambda \subset \mathbb{R}$ el conjunto de valores no nulos que asumen los valores propios de A y sea $\Lambda^{\pm} = \Lambda \cap \mathbb{R}^{\pm}$.*

(i) *Si Λ^+ y Λ^- son ambos no vacíos, $\inf \Lambda^+ = \sup \Lambda^- = 0$.*

(ii) *Si Λ^+ o Λ^- es vacío entonces la clausura $\overline{\Lambda}$ de Λ es conexa.*

Un ejemplo donde se puede aplicar el teorema anterior, es el cilindro circular $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^3$, el cual posee dos curvaturas principales $\lambda = 1$ y $\mu = 0$, así que $\Lambda = \{1\}$ y por ende $\Lambda^- = \emptyset$, por el teorema de curvatura principal tenemos que $\overline{\Lambda}$ es conexa. Ahora, de Gauss Bonnet es fácil ver que para una pequeña perturbación de

este cilindro con soporte compacto, la clausura de dicha superficie perturbada llega a ser disconexa (véase Figura 4.5). Notemos que sus curvaturas principales satisfacen $\lambda \geq \mu$ y Λ^+ y Λ^- son no vacíos.

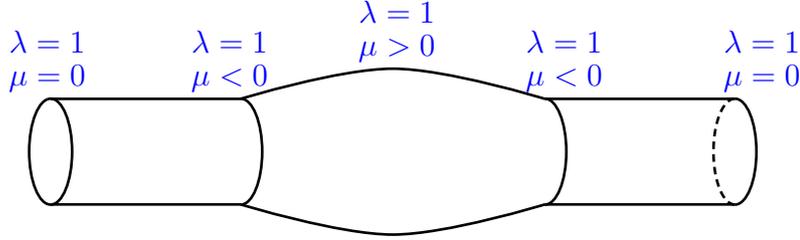


Figura 4.5. Cilindro circular $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$ con una pequeña perturbación.

Usando un argumento basado en este teorema, podemos probar el siguiente resultado, bajo la noción más general de completitud.

Teorema 4.3.4 ([6], Theorem 11). *Sea Σ^n una hipersuperficie completa en \mathbb{R}^{n+1} ($n \geq 3$) con curvatura media constante H y dos curvaturas principales distintas, una de ellas simple. Entonces*

$$\sup_{\Sigma} S \geq 0.$$

Además, se tiene la igualdad $\sup_{\Sigma} S = 0$ si y sólo si Σ es o bien un cilindro circular $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con $r = 1/n|H| > 0$, siempre que $H \neq 0$, o bien un catenoide de dimensión superior, siempre que $H = 0$.

Demostración. Sean λ y μ las dos curvaturas principales distintas de Σ con multiplicidades $(n-1)$ y 1 , respectivamente. Luego,

$$nH = (n-1)\lambda + \mu \quad \text{y} \quad |A|^2 = (n-1)\lambda^2 + \mu^2. \quad (4.19)$$

De aquí deducimos fácilmente que $|A|^2 = n(n-1)\lambda^2 + n^2H^2 - 2n(n-1)H\lambda$, lo cual, junto con la ecuación de Gauss (1.17) (para $c = 0$), nos lleva a

$$S = n^2H^2 - |A|^2 = -n(n-1)\lambda^2 + 2n(n-1)\lambda H = n(n-1)\lambda(2H - \lambda).$$

Consideremos $\Lambda \subset \mathbb{R}$ el conjunto de valores no nulos que toman λ y μ , y $\Lambda^{\pm} = \Lambda \cap \mathbb{R}^{\pm}$. Si $\sup_{\Sigma} S = -\tau^2 < 0$, entonces $S \leq -\tau^2 < 0$ y luego, de (4.20),

$$n(n-1)\lambda(2H - \lambda) = S \leq \sup_{\Sigma} S = -\tau^2.$$

Esto es,

$$\lambda^2 - 2H\lambda - \frac{\tau^2}{n(n-1)} \geq 0.$$

Observemos que, independiente del valor de H , el polinomio $x^2 - 2Hx - \tau^2/n(n-1)$ tiene una raíz positiva y una raíz negativa dadas por

$$H + \sqrt{H^2 + \frac{\tau^2}{n(n-1)}} > 0 \quad \text{y} \quad H - \sqrt{H^2 + \frac{\tau^2}{n(n-1)}} < 0.$$

Por lo tanto, o bien

$$\lambda \geq H + \sqrt{H^2 + \frac{\tau^2}{n(n-1)}} > 0, \quad (4.20)$$

o bien

$$\lambda \leq H - \sqrt{H^2 + \frac{\tau^2}{n(n-1)}} < 0. \quad (4.21)$$

Una consecuencia inmediata de (4.20) es que

$$\mu = nH - (n-1)\lambda \leq H - (n-1)\sqrt{H^2 + \frac{\tau^2}{n(n-1)}} < H - \sqrt{H^2 + \frac{\tau^2}{n(n-1)}} < 0$$

mientras que de (4.21) obtenemos lo contrario, esto es,

$$\mu = nH - (n-1)\lambda \geq H + (n-1)\sqrt{H^2 + \frac{\tau^2}{n(n-1)}} > H + \sqrt{H^2 + \frac{\tau^2}{n(n-1)}} > 0.$$

Por consiguiente, en cualquier caso, Λ^+ y Λ^- son ambos no vacíos, con

$$\inf \Lambda^+ \geq H + \sqrt{H^2 + \frac{\tau^2}{n(n-1)}} > 0$$

y

$$\sup \Lambda^- \leq H - \sqrt{H^2 + \frac{\tau^2}{n(n-1)}} < 0.$$

lo cual contradice el Teorema 4.3.3, implicando necesariamente que

$$\sup_{\Sigma} S \geq 0.$$

Para finalizar, caracterizamos la igualdad $\sup_{\Sigma} S = 0$ considerando los siguientes casos:

- Si $H = 0$, dado que Σ tiene dos curvaturas principales distintas, una de ellas simple, del Lema 4.3.1 concluimos que Σ es parte de un catenoide de dimensión superior. Ahora, basándonos en una idea presentada en la parte final de la prueba del Teorema 3.1 dada por Tam y Zhou en [51], podemos afirmar que Σ está contenida en un catenoide. Esto se debe a que Σ es completa y ψ una isometría local en el catenoide. Por el Lema 4.3.2, ψ es una función recubridora y como el catenoide es simplemente conexo por ser $n \geq 3$, no admite aplicaciones recubridoras de más de una hoja, en otras palabras, sus únicos recubridores son los homeomorfismos; por ende ψ debe ser un embebimiento. Observemos que la curvatura escalar de un catenoide de dimensión superior en \mathbb{R}^{n+1} está dada por

$$S = -n(n-1)\lambda^2 < 0$$

el cual satisface $\sup_{\Sigma} S = 0$ pues $\sup_{\Sigma} S$ no puede ser negativo.

- Si $H \neq 0$ (digamos $H > 0$) observemos que $S \leq \sup_{\Sigma} S = 0$ y lo cual, junto con (4.20) obtenemos

$$\lambda(2H - \lambda) \leq 0.$$

Esto implica que o bien $\lambda \leq 0$, o bien $\lambda \geq 2H > 0$. Claramente este último no puede suceder. En efecto, si se tiene $\lambda \geq 2H > 0$ entonces

$$\mu = nH - (n-1)\lambda \leq -(n-2)H < 0.$$

Luego, $\inf \Lambda^+ \geq 2H > 0$ y $\sup \Lambda^- \leq -(n-2)H < 0$ lo cual no es posible por el Teorema 4.3.3. Por lo tanto, necesariamente $\lambda \leq 0$ y por ende

$$\mu = nH - (n-1)\lambda \geq nH > 0.$$

Esto implica que $\inf \Lambda^+ \geq nH > 0$ y por el Teorema 4.3.3, Λ^- debe ser vacío, lo cual significa que $\lambda = \text{constante} = 0$. Por consiguiente, $\mu = \text{constante} = nH > 0$ y, de los resultados clásicos sobre hipersuperficies isoparamétricas en el espacio euclídeo [32, 47], concluimos que Σ es un cilindro circular $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con $r = 1/nH > 0$.

□

Capítulo 5

Un principio del máximo para hipersuperficies con curvatura escalar constante

Sumario. En este capítulo establecemos un principio débil del máximo para hipersuperficies completas con curvatura escalar constante en espacios forma riemannianos, y damos algunas aplicaciones para estimar la norma de la parte sin traza de su segunda forma fundamental. Los resultados de este capítulo se encuentran recogidos en [7].

Abstract. *In this chapter we establish a weak maximum principle for complete hypersurfaces with constant scalar curvature into Riemannian space forms, and give some applications to estimate the norm of the traceless part of its second fundamental form. The results of this chapter are collected in the paper [7].*

5.1. Motivación y preliminares

En este capítulo consideraremos la geometría de hipersuperficies completas con curvatura escalar constante en los espacios forma. Los primeros resultados en esta dirección fueron obtenidos en el artículo [19] por Cheng y Yau, donde ellos introducen un operador diferencial apropiado, denotado aquí por L , para estudiar tales hipersuperficies. Cuando el espacio ambiente es la esfera euclídea \mathbb{S}^{n+1} , ellos mostraron que las únicas hipersuperficies compactas en \mathbb{S}^{n+1} con curvatura escalar normalizada constante $R \geq 1$ y curvatura seccional no-negativa son o bien totalmente umbilicales o bien isométricas a un producto riemanniano $\mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-k}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, $1 \leq k \leq n-1$. Por otra parte, para el espacio euclídeo ellos también probaron que las únicas hipersuperficies completas no compactas en \mathbb{R}^{n+1} con curvatura escalar normalizada constante $R \geq 0$ y curvatura seccional no negativa son los cilindros generalizados de la forma $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{S}^k(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $1 \leq k \leq n-1$. Desde entonces, han

aparecido un gran número de trabajos sobre el tema estableciendo resultados de rigidez para tales hipersuperficies bajo varias hipótesis (por ejemplo véase [33, 55, 57] y sus referencias respectivas).

Nuestro principal objetivo en este capítulo es estudiar el análogo de los Capítulos 3 y 4, que sería el estudio del comportamiento de la curvatura media de hipersuperficies de curvatura escalar constante inmersas en espacios forma. Para ello, presentamos a continuación algunos preliminares que se utilizarán solo en este capítulo.

Definición 5.1.1 (Primera transformación de Newton). Sean $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{M}_c^{n+1}$ una hipersuperficie en el espacio forma $(n + 1)$ -dimensional y A su operador de forma. Se define la primera transformación de Newton de A , como el endomorfismo $P : \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}(\Sigma)$ dado por

$$P = nHI - A,$$

donde I denota la identidad en $\mathcal{X}(\Sigma)$ y H la función curvatura media.

En la siguiente proposición podemos apreciar algunas propiedades que satisface el operador P .

Proposición 5.1.2. *Sea $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{M}_c^{n+1}$ una hipersuperficie en el espacio forma $(n + 1)$ -dimensional. La primera transformación de Newton P verifica que*

- (i) P es un operador lineal autoadjunto el cual conmuta con A .
- (ii) $\text{tr}(P) = n(n - 1)H$,
- (iii) $\text{div}(P) = 0$.
- (iv) Para cualquier $u \in C^2(\Sigma)$ se tiene que

$$\text{div}(P(\nabla u)) = \text{tr}(P \circ \text{hess } u), \tag{5.1}$$

donde $\text{hess } u : \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}(\Sigma)$ denota el operador autoadjunto métricamente equivalente al hessiano de u , es decir, $\nabla^2 u(X, Y) = \langle \text{hess } u(X), Y \rangle$ para todo $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$.

Demostración. Para mostrar el ítem (i) consideremos X, Y dos campos arbitrarios en Σ y veamos que

$$\begin{aligned} \langle PX, Y \rangle &= \langle nHX - AX, Y \rangle = nH \langle X, Y \rangle - \langle AX, Y \rangle \\ &= nH \langle X, Y \rangle - \langle X, AY \rangle = \langle X, (nHI - A)Y \rangle = \langle X, PY \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto, P es un operador autoadjunto. Además, como A es $C^\infty(\Sigma)$ -lineal, obtenemos que

$$(P \circ A)(X) = nHAX - A^2X = A(nHX - AX) = (A \circ P)(X).$$

La propiedad (ii) se sigue directamente del hecho que $\text{tr}(A) = nH$. Para verificar la propiedad (iii), observemos que

$$\begin{aligned} (\nabla_X P)(Y) &= (\nabla_X(nHI - A))(Y) = nX(H)Y + nH(\nabla_X I)(Y) - (\nabla_X A)(Y) \\ &= nX(H)Y - (\nabla_X A)(Y). \end{aligned}$$

Si $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una base local ortonormal sobre $T\Sigma$

$$\text{div}(P) = \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} P)(E_i) = n \sum_{i=1}^n E_i(H)E_i - \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} A)(E_i).$$

Entonces para cualquier $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \text{div}(P), X \rangle &= n \langle \nabla H, X \rangle - \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{E_i} A)(E_i), X \rangle = nX(H) - \sum_{i=1}^n \langle E_i, (\nabla_{E_i} A)(X) \rangle \\ &= nX(H) - \sum_{i=1}^n \langle E_i, (\nabla_X A)(E_i) \rangle = nX(H) - \text{tr}(\nabla_X A) \\ &= nX(H) - \nabla_X(\text{tr}(A)) = n \langle \nabla H, X \rangle - X(\text{tr}(A)) = 0. \end{aligned}$$

Ahora resta probar el item (iv), el cual es una consecuencia directa de la propiedad (iii) como se puede ver a continuación

$$\begin{aligned} \text{div}(P(\nabla u)) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} P(\nabla u), E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{E_i} P)(\nabla u), E_i \rangle + \langle P(\nabla_{E_i} \nabla u), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla u, (\nabla_{E_i} P)(E_i) \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla u, P(E_i) \rangle \\ &= \langle \nabla u, \text{div}(P) \rangle + \text{tr}(P \circ \text{hess } u) = \text{tr}(P \circ \text{hess } u). \end{aligned}$$

□

Asociado a la transformación de Newton podemos definir el siguiente operador diferencial de segundo orden.

Definición 5.1.3. Sea $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{M}_c^{n+1}$ una hipersuperficie en el espacio forma $(n+1)$ -dimensional. Para todo $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ se define el operador L dado por

$$L(u) = \text{div}(P(\nabla u)), \quad (5.2)$$

donde div denota la divergencia de un campo vectorial sobre Σ .

En general, L no es elíptico. Es claro por su definición que L es elíptico si y sólo si P es definido positivo.

El operador L aparece naturalmente como el operador linealizado de la curvatura escalar por variaciones normales de la hipersuperficie (véase por ejemplo [46]).

Una propiedad interesante de este operador L es la siguiente. Para toda pareja de funciones diferenciables $u, v \in C^2(\Sigma)$ se tiene

$$L(uv) = uLv + vLu + 2\langle P(\nabla u), \nabla v \rangle. \quad (5.3)$$

En efecto, dado que $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$ tenemos $P(\nabla(uv)) = uP(\nabla v) + vP(\nabla u)$. Luego,

$$\begin{aligned} L(uv) &= \operatorname{div}(uP(\nabla v)) + \operatorname{div}(vP(\nabla u)) \\ &= \langle \nabla u, P(\nabla v) \rangle + uLv + \langle \nabla v, P(\nabla u) \rangle + vLu. \end{aligned}$$

Finalmente, como P es autoadjunto obtenemos (5.3).

El siguiente lema será esencial para nuestros cálculos, realizamos su demostración siguiendo la idea dada por Qing-Ming Cheng en [18].

Lema 5.1.4 ([7], Lemma 4). *Sea $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{M}_c^{n+1}$ una hipersuperficie isométricamente inmersa y orientada. Supongamos que Σ tiene curvatura escalar (normalizada) constante R . Entonces*

$$L(nH) = |\nabla A|^2 - n^2|\nabla H|^2 + nH\operatorname{tr}(A^3) - |A|^4 + nc(|A|^2 - nH^2). \quad (5.4)$$

Demostración. De (5.1), $L(nH) = \operatorname{tr}(P \circ \operatorname{hess}(nH)) = \sum_{i=1}^n \langle P(E_i), \nabla_{E_i} \nabla(nH) \rangle$. Si $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una base local ortonormal de $T\Sigma$ que diagonaliza a A entonces

$$\begin{aligned} L(nH) &= \sum_{i=1}^n \langle (nH - \lambda_i)E_i, \nabla_{E_i} \nabla(nH) \rangle \\ &= nH \sum_{i=1}^n \nabla^2(nH)(E_i, E_i) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla^2(nH)(E_i, E_i) \\ &= nH\Delta(nH) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla^2(nH)(E_i, E_i). \end{aligned} \quad (5.5)$$

De la ecuación de Gauss (1.15) es bien conocido que

$$n(n-1)(R-c) = n^2H^2 - |A|^2.$$

Como R es constante, podemos afirmar que

$$0 = \Delta(n^2H^2) - \Delta|A|^2.$$

Dado que $\Delta(n^2H^2) = 2(nH\Delta(nH) + n^2|\nabla H|^2)$ tenemos

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = nH\Delta(nH) + n^2|\nabla H|^2,$$

esto es,

$$nH\Delta(nH) = \frac{1}{2}\Delta|A|^2 - n^2|\nabla H|^2. \quad (5.6)$$

Un cálculo tensorial implica

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = \frac{1}{2}\Delta\langle A, A \rangle = \langle \Delta A, A \rangle + |\nabla A|^2 \quad (5.7)$$

donde el laplaciano de A está dado por

$$\Delta A(X) = \text{tr}(\nabla^2 A(X, \cdot, \cdot)) = \sum_{i=1}^n \nabla^2 A(X, E_i, E_i).$$

De la ecuación de Codazzi y las simetrías de $\nabla^2 A$ concluimos

$$\nabla^2 A(X, E_i, E_i) = \nabla^2 A(E_i, X, E_i) = \nabla^2 A(E_i, E_i, X) - R(E_i, X)AE_i + A(R(E_i, X)E_i)$$

y usando la ecuación de Gauss (1.15) se sigue que

$$\begin{aligned} \langle \Delta A, A \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \Delta A(E_i), AE_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla^2 A(E_i, E_i, E_i) - R(E_i, E_i)AE_i + A(R(E_i, E_i)E_i), AE_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \nabla_{E_i} \text{tr}(\nabla A) - \text{ctr}(A)E_i + (nc - |A|^2)AE_i + nHA^2E_i, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i [\langle \nabla_{E_i} \nabla(\text{tr}(A))E_i, E_i \rangle - cnH + (nc - |A|^2)\lambda_i + nH\lambda_i^2] \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \nabla_{E_i} \nabla(nH)E_i, E_i \rangle - cnH \sum_{i=1}^n \lambda_i + (nc - |A|^2) \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + nH \sum_{i=1}^n \lambda_i^3 \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla^2(nH)(E_i, E_i) - cn^2H^2 + (nc - |A|^2)|A|^2 + nH\text{tr}(A^3). \end{aligned}$$

Luego, de (5.6), (5.7) y la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned} nH\Delta(nH) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla^2(nH)(E_i, E_i) - |A|^4 + nc(|A|^2 - nH^2) + nH\text{tr}(A^3) \\ &\quad + |\nabla A|^2 - n^2|\nabla H|^2. \end{aligned}$$

Finalmente, la igualdad anterior y la ecuación (5.5) implican (5.4). \square

Para otra prueba del corolario anterior, véase Corolario 3.3 de [13] (con $r = 1$) el cual establece que

$$L(nH) = \frac{1}{2}\Delta S + |\nabla A|^2 - n^2|\nabla H|^2 + nH\text{tr}(A^3) - |A|^4 + nc(|A|^2 - nH^2),$$

y se sigue de una vez (5.4) dado que S es constante.

La prueba del siguiente lema se basa en la idea dada por Alencar, do Carmo y Colares en la prueba del Lema 2.5 en [2].

Lema 5.1.5. *Sea $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{M}_c^{n+1}$ una inmersión isométrica. Si R es constante sobre Σ , entonces*

$$n^2H^2(|\nabla A|^2 - n^2|\nabla H|^2) \geq n(n-1)(R-c)|\nabla A|^2.$$

En particular, si $R \geq c$ entonces

$$|\nabla A|^2 - n^2|\nabla H|^2 \geq 0.$$

Demostración. Como $n^2H^2 - |A|^2 = n(n-1)(R-c)$ (véase (1.22)) y R es constante tenemos que $2n^2H\nabla H - \nabla|A|^2 = 0$. Si denotamos los valores propios de A por λ_k con $k = 1, \dots, n$, la ecuación anterior queda de la siguiente forma

$$2 \left[n^2H\nabla H - \sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla \lambda_k \right] = 0.$$

Si $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una base ortonormal sobre $T\Sigma$ tenemos que

$$n^2H \langle \nabla H, E_i \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle \nabla \lambda_k, E_i \rangle.$$

Elevando al cuadrado

$$n^4H^2 \langle \nabla H, E_i \rangle^2 = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \langle \nabla \lambda_k, E_i \rangle \right)^2.$$

Sumando en i , se tiene que

$$\begin{aligned} n^4H^2|\nabla H|^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \langle \nabla \lambda_k, E_i \rangle \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \langle \nabla \lambda_k, E_i \rangle^2 \right) \\ &= |A|^2 \sum_{i,k=1}^n \langle \nabla \lambda_k, E_i \rangle^2 = |A|^2|\nabla A|^2. \end{aligned}$$

Como $|A|^2 = n^2H^2 - n(n-1)(R-c)$ se sigue que

$$n^2H^2(|\nabla A|^2 - n^2|\nabla H|^2) \geq n(n-1)(R-c)|\nabla A|^2$$

y en el caso en que $R \geq c$ tenemos que

$$|\nabla A|^2 - n^2|\nabla H|^2 \geq 0.$$

□

A continuación establecemos un lema que nos permitirá determinar cuándo P es semidefinido positivo.

Lema 5.1.6 ([7], Lemma 5). *Sea $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{M}_c^{n+1}$ una hipersuperficie orientada e isométricamente inmersa. Supongamos que la función curvatura media H no cambia de signo, así que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer $H \geq 0$ sobre Σ . Sean μ_- y μ_+ , respectivamente, el mínimo y el máximo de los valores propios de P en todo punto $p \in \Sigma$. Si $R > c$ sobre Σ (respectivamente, $R \geq c$ sobre Σ), entonces*

$$\mu_- > 0 \text{ (resp., } \mu_- \geq 0)$$

y

$$\mu_+ < 2nH \text{ (resp., } \mu_+ \leq 2nH).$$

Demostración. Seguimos el mismo argumento utilizado en la prueba del Lema 4.2 en [13]. De (1.22), $n^2H^2 = |A|^2 + n(n-1)(R-c)$, por lo que si $R > c$ tenemos

$$n^2H^2 > |A|^2.$$

Luego, denotando con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las curvaturas principales en la hipersuperficie, obtenemos que para j arbitrario

$$|A|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 > \lambda_j^2.$$

Por consiguiente, para cualquier j

$$nH > |\lambda_j| \Leftrightarrow -nH < \lambda_j < nH, \quad j = 1, \dots, n.$$

De manera que, para todo j

$$0 < nH - \lambda_j < 2nH.$$

Pero $\mu_j = nH - \lambda_j$ con $j = 1, \dots, n$ son precisamente los valores propios del operador $P = nHI - A$. En particular, $\mu_- > 0$ y $\mu_+ < 2nH$. Similarmente si $R \geq c$. \square

Observación 5.1.7. Nótese que si $R > c$ sobre Σ , se sigue de (1.22)

$$nH^2 = \frac{1}{n}|A|^2 + (n-1)(R-c) > 0.$$

Es decir, H no es cero. Entonces, la conexión de Σ implica que H no cambia de signo. Además, el Lema 5.1.6 implica que cuando $R > c$ el operador L es elíptico, pues P es definido positivo ya que sus valores propios son positivos.

Para la prueba del siguiente resultado necesitaremos del lema de Okumura (Lema 2.4.5), el cual estudiamos en la Sección 2.4.

Lema 5.1.8 ([7], Lemma 7). *Sea $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{M}_c^{n+1}$ una hipersuperficie orientada e isométricamente inmersa con curvatura escalar (normalizada) constante $R \geq c$. En el caso en que $R > c$, escogemos la orientación tal que $H > 0$ sobre Σ . En el caso en que $R = c$, supongamos además que la función curvatura media H no cambia de signo, y escogemos la orientación tal que $H \geq 0$ sobre Σ . Entonces*

$$\frac{1}{2}L(|\Phi|^2) \geq \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^2 Q_R(|\Phi|)\sqrt{|\Phi|^2 + n(n-1)(R-c)} \quad (5.8)$$

donde

$$Q_R(x) = -(n-2)x^2 - (n-2)x\sqrt{x^2 + n(n-1)(R-c)} + n(n-1)R. \quad (5.9)$$

Demostración. De (1.23) sabemos que $(n/(n-1))|\Phi|^2 = n^2H^2 - n^2(R-c)$. Como R es constante, obtenemos

$$\frac{n}{2(n-1)}L(|\Phi|^2) = \frac{1}{2}L(n^2H^2).$$

Por (5.3), $L(u^2) = 2uL(u) + 2\langle P(\nabla u), \nabla u \rangle$ para todo $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$. Entonces

$$\frac{n}{2(n-1)}L(|\Phi|^2) = nHL(nH) + n^2\langle P(\nabla H), \nabla H \rangle.$$

Por el Lema 5.1.6 sabemos que P es semidefinido positivo; usando esto y el Lema 5.1.4 obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{n}{2(n-1)}L(|\Phi|^2) &\geq nHL(nH) = nH(|\nabla A|^2 - n^2|\nabla H|^2) + n^2H^2\text{tr}(A^3) \\ &\quad - nH|A|^4 + n^2cH(|A|^2 - nH^2). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Por hipótesis $R \geq c$ luego del Lema 5.1.5 se tiene

$$|\nabla A|^2 - n^2|\nabla H|^2 \geq 0,$$

y como $H \geq 0$ se sigue de (5.10) que

$$\frac{1}{2(n-1)}L(|\Phi|^2) \geq nH^2\text{tr}(A^3) - H|A|^4 + ncH(|A|^2 - nH^2). \quad (5.11)$$

Recordemos que $|\Phi|^2 = |A|^2 - nH^2$, así que la desigualdad (5.11) es equivalente a

$$\frac{1}{2(n-1)}L(|\Phi|^2) \geq nH^2\text{tr}(A^3) - H(|\Phi|^2 + nH^2)^2 + ncH|\Phi|^2. \quad (5.12)$$

Por otra parte, dado que $A = \Phi + HI$ tenemos $A^3 = \Phi^3 + 3H\Phi^2 + 3H^2\Phi + H^3I$. Esto junto con el hecho de que $\text{tr}(\Phi) = 0$ implica

$$\text{tr}(A^3) = \text{tr}(\Phi^3) + 3H|\Phi|^2 + nH^3,$$

y sustituyendo esto en (5.12) da

$$\frac{1}{2(n-1)}L(|\Phi|^2) \geq nH^2\text{tr}(\Phi^3) - H|\Phi|^4 + nH(H^2 + c)|\Phi|^2. \quad (5.13)$$

Dado que $\text{tr}(\Phi) = 0$, cuando $n = 2$ se tiene $\Phi^2 = (1/2)|\Phi|^2I$. Luego, $\Phi^3 = (1/2)|\Phi|^2\Phi$ y $\text{tr}(\Phi^3) = 0$ también. Cuando $n \geq 3$, podemos usar el Lema 2.4.5 para estimar $\text{tr}(\Phi^3)$ como sigue

$$|\text{tr}(\Phi^3)| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^3, \quad (5.14)$$

y entonces

$$nH^2\text{tr}(\Phi^3) \geq -nH^2|\text{tr}(\Phi^3)| \geq -\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H^2|\Phi|^3.$$

Insertando esto en (5.13) da

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(n-1)}L(|\Phi|^2) &\geq -\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H^2|\Phi|^3 - H|\Phi|^4 + nH(H^2 + c)|\Phi|^2 \\ &= -H|\Phi|^2 \left(|\Phi|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| - n(H^2 + c) \right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Además, de (1.23) obtenemos

$$H^2 = \frac{1}{n(n-1)}|\Phi|^2 + (R - c),$$

y teniendo en cuenta que $H \geq 0$, podemos escribir

$$H = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\sqrt{|\Phi|^2 + n(n-1)(R - c)}.$$

Finalmente, reemplazando H por esta expresión en (5.15), obtenemos (5.8). \square

5.2. Un principio débil del máximo para el operador L

En esta sección queremos presentar una versión de un principio débil del máximo para el operador L que afirmamos puede ser una herramienta muy útil para el estudio de hipersuperficies con curvatura escalar constante, como se puede apreciar en la siguiente sección donde presentamos una aplicación de dicho principio del máximo. Específicamente, el principio débil del máximo que usaremos se deriva del Teorema 2.1 dado por Pigola, Rigoli y Setti en [42], que enunciamos a continuación.

Teorema 5.2.1 ([7], Theorem 9). Sean $(\Sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una variedad riemanniana completa, o un punto de referencia en Σ , y $r(x)$ la función distancia desde o . Sea h un tensor simétrico de tipo $(0, 2)$ sobre Σ y $\sharp : (T\Sigma)^* \rightarrow T\Sigma$ denote el isomorfismo musical, de manera que $h(X, \cdot)^\sharp$ es el campo vectorial sobre Σ definido por

$$\langle h(X, \cdot)^\sharp, Y \rangle = h(X, Y)$$

para todo $Y \in T_x\Sigma$ y $x \in \Sigma$. Supongamos que, para alguna función continua y positiva h_+ definida sobre $[0, +\infty)$, el tensor h satisface

$$0 \leq h(X, X) \leq h_+(r) \tag{5.16}$$

para todo $X \in T_x\Sigma$, $|X| = 1$, y todo $x \in \partial B_r$, donde B_r denota la bola geodésica de radio r centrada en o . Sea

$$h_+^*(r) = \sup_{s \leq r} h_+(s).$$

Dada $f \in C^0(\mathbb{R})$, supongamos que $u \in C^2(M)$ satisface $u^* < +\infty$ y

$$\mathcal{L}(u) = \operatorname{div}(h(\nabla u, \cdot)^\sharp) \geq f(u) \tag{5.17}$$

sobre el conjunto $\Omega_\gamma = \{x \in M : u(x) > \gamma\}$ para algún $\gamma < u^*$. Si

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{h_+^*(r)}{r^2} = 0 \tag{5.18}$$

y

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{h_+^*(r) \log \operatorname{vol} B_r}{r^2} < +\infty, \tag{5.19}$$

entonces $f(u^*) \leq 0$.

Diferentes elecciones de h en el Teorema 5.2.1 nos muestran que \mathcal{L} puede ser un operador bien conocido. Por ejemplo:

- El operador de Laplace-Beltrami, si h es la métrica de Σ . En ese caso $h(\nabla u, \cdot)^\sharp = \nabla u$ y

$$\mathcal{L}(u) = \operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u.$$

- El operador L , si consideremos el operador h como sigue $h(X, Y) = \langle PX, Y \rangle$ o equivalentemente, $h(\nabla u, \cdot)^\sharp = P(\nabla u)$. En ese caso,

$$\mathcal{L}(u) = \operatorname{div}(P(\nabla u)) = L(u).$$

La idea de esta sección es dar un principio débil del máximo para el operador L sobre hipersuperficies Σ^n completas isométricamente inmersas en espacios forma riemannianos \mathbb{M}_c^{n+1} . Por el Lema 5.1.6 y bajo las hipótesis sobre la curvatura escalar

(normalizada) de $R > c$ ó bien $R = c$ y H con signo constante, se satisface la condición (5.16) sobre Σ con

$$h_+(r) = 2n \sup_{\partial B_r} H,$$

así que

$$h_+^*(r) = 2n \sup_{B_r} H.$$

Por otra parte, también se satisfacen las condiciones (5.18) y (5.19) si $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 < +\infty$. En efecto, como $|\Phi|^2 = n(n-1)(H^2 - (R-c))$ (véase (1.23)) y R es constante se sigue que si $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 < +\infty$ entonces $\sup_{\Sigma} H < +\infty$. Así

$$h_+^*(r) = 2n \sup_{B_r} H \leq 2n \sup_{\Sigma} H, \quad (5.20)$$

y por lo tanto se satisface automáticamente (5.18). En cuanto a (5.19), por (5.20) basta con tener

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \text{vol} B_r}{r^2} < +\infty. \quad (5.21)$$

Sin embargo, dado que $|\Phi|^2 = (n-1)/n|A|^2 - (n-1)(R-c)$ (véase (1.23)) y $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 < +\infty$ también tenemos que $\sup_{\Sigma} |A|^2 < +\infty$. Luego, podemos estimar

$$H \langle AX, X \rangle \geq - \sup_{\Sigma} H |\langle AX, X \rangle| \geq - \sup_{\Sigma} H \sup_{\Sigma} |A| |X|^2$$

y

$$|AX|^2 \leq \sup_{\Sigma} |A|^2 |X|^2$$

para $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$. Entonces, por la expresión para el tensor de Ricci dado en (1.16) obtenemos que para todo $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, X) &= (n-1)c|X|^2 + nH \langle AX, X \rangle - |AX|^2 \\ &\geq \left((n-1)c - n \sup_{\Sigma} H \sup_{\Sigma} |A| - \sup_{\Sigma} |A|^2 \right) |X|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos que la curvatura de Ricci de Σ está acotada inferiormente. Dado que Σ es completa, por el teorema de comparación del volumen de Bishop se satisface (5.21). Como consecuencia, obtenemos el siguiente principio débil del máximo para L .

Corolario 5.2.2 ([7], Corollary 10). *Sea $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{M}_c^{n+1}$ una hipersuperficie orientada, completa e isométricamente inmersa con curvatura escalar (normalizada) constante $R \geq c$. En el caso en que $R = c$, supongamos además que la función curvatura media H no cambia de signo. Supongamos que $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 < +\infty$. Si $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ satisface $u^* < +\infty$ y, para una función dada $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$,*

$$L(u) \geq f(u)$$

sobre el conjunto $\Omega_{\gamma} = \{x \in \Sigma : u(x) > \gamma\}$ para algún $\gamma < u^*$, entonces $f(u^*) \leq 0$.

5.3. Una aplicación a hipersuperficies con curvatura escalar constante

El objetivo de esta sección es presentar una aplicación del principio débil del máximo para el operador L que deducimos en la sección anterior. Dicha aplicación consiste en estimar el supremo de la curvatura media para hipersuperficies con curvatura escalar constante en los espacios forma.

5.3.1. Superficies con curvatura de Gauss constante

En esta sección usaremos la estructura conforme de la superficie como lo hicimos en las Secciones 3.1 y 4.1.

Lema 5.3.1. *Sea Σ una superficie inmersa en el espacio forma \mathbb{M}_c^3 y sea z una coordenada compleja local tal que $ds^2 = e^\rho |dz|^2$. Para todo campo X sobre Σ , la divergencia de X está dada por*

$$\operatorname{div}(X) = 4e^{-\rho} \operatorname{Re}(\langle X_z, \psi_{\bar{z}} \rangle). \quad (5.22)$$

Demostración. Sea $\{E_1 = e^{-\rho} \psi_u, E_2 = e^{-\rho} \psi_v\}$ una base ortonormal tangente a Σ . Entonces

$$\operatorname{div}(X) = \langle \nabla_{E_1} X, E_1 \rangle + \langle \nabla_{E_2} X, E_2 \rangle = e^{-\rho} [\langle \nabla_{\psi_u} X, \psi_u \rangle + \langle \nabla_{\psi_v} X, \psi_v \rangle].$$

Dado que $\psi_u = \psi_z + \psi_{\bar{z}}$ y $\psi_v = i(\psi_z - \psi_{\bar{z}})$ tenemos

$$\langle \nabla_{\psi_u} X, \psi_u \rangle = \langle \nabla_{\psi_z} X, \psi_z \rangle + \langle \nabla_{\psi_z} X, \psi_{\bar{z}} \rangle + \langle \nabla_{\psi_{\bar{z}}} X, \psi_z \rangle + \langle \nabla_{\psi_{\bar{z}}} X, \psi_{\bar{z}} \rangle$$

y

$$\langle \nabla_{\psi_v} X, \psi_v \rangle = -\langle \nabla_{\psi_z} X, \psi_z \rangle + \langle \nabla_{\psi_z} X, \psi_{\bar{z}} \rangle + \langle \nabla_{\psi_{\bar{z}}} X, \psi_z \rangle - \langle \nabla_{\psi_{\bar{z}}} X, \psi_{\bar{z}} \rangle.$$

Luego,

$$\operatorname{div}(X) = 2e^{-\rho} [\langle \nabla_{\psi_z} X, \psi_{\bar{z}} \rangle + \langle \nabla_{\psi_{\bar{z}}} X, \psi_z \rangle].$$

Por último, como $\langle \nabla_{\psi_z} X, \psi_{\bar{z}} \rangle = \langle \nabla_{\psi_z}^o X, \psi_{\bar{z}} \rangle = \langle X_z, \psi_{\bar{z}} \rangle$ y $\langle \nabla_{\psi_{\bar{z}}} X, \psi_z \rangle = \langle \nabla_{\psi_{\bar{z}}}^o X, \psi_z \rangle = \langle X_{\bar{z}}, \psi_z \rangle = \overline{\langle X_z, \psi_{\bar{z}} \rangle}$ obtenemos (5.22). \square

Observación 5.3.2. Dado que $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ se puede expresar como $X = \alpha \psi_z + \bar{\alpha} \psi_{\bar{z}}$, derivando respecto a z y usando las fórmulas de Gauss (3.12) y (3.13) obtenemos

$$\begin{aligned} X_z &= \alpha_z \psi_z + \alpha \psi_{zz} + \bar{\alpha}_z \psi_{\bar{z}} + \bar{\alpha} \psi_{\bar{z}z} = \alpha_z \psi_z + \alpha \left(\rho_z \psi_z + \frac{1}{2} \phi N \right) + \bar{\alpha}_z \psi_{\bar{z}} + \bar{\alpha} \psi_{z\bar{z}} \\ &= (\alpha_z + \alpha \rho_z) \psi_z + \frac{\alpha}{2} \phi N + \bar{\alpha}_z \psi_{\bar{z}} + \bar{\alpha} \frac{e^\rho}{2} (HN - c\psi) \\ &= (\alpha_z + \alpha \rho_z) \psi_z + \bar{\alpha}_z \psi_{\bar{z}} + \left(\frac{\alpha}{2} \phi + \frac{\bar{\alpha}}{2} e^\rho H \right) N - c \bar{\alpha} \frac{e^\rho}{2} \psi. \end{aligned}$$

Luego, $\langle X_z, \psi_{\bar{z}} \rangle = e^\varrho/2(\alpha_z + \alpha_{\varrho z}) = (\alpha e^\varrho/2)_z$. Por ende, la divergencia de X puede ser calculada de la siguiente forma

$$\operatorname{div}(X) = 4e^{-\varrho} \operatorname{Re} \left[\left(\alpha \frac{e^\varrho}{2} \right)_z \right]. \quad (5.23)$$

Ejemplo 5.3.3. Sea f una función sobre la superficie Σ y dado que su gradiente se puede expresar de la siguiente forma $\nabla f = \alpha\psi_z + \bar{\alpha}\psi_{\bar{z}}$ tenemos que $\alpha e^\varrho/2 = \langle \nabla f, \psi_z \rangle = f_{\bar{z}}$. Por (5.23) tenemos que $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = 4e^{-\varrho} \operatorname{Re}(f_{\bar{z}z}) = 4e^{-\varrho} f_{z\bar{z}}$.

Dado que $\nabla H = 2e^{-\varrho}(H_{\bar{z}}\psi_z + H_z\psi_{\bar{z}})$ tenemos que

$$P(\nabla H) = 2e^{-\varrho}(H_{\bar{z}}P(\psi_z) + H_zP(\psi_{\bar{z}})).$$

De (3.17) sabemos que

$$\begin{aligned} P(\psi_z) &= 2H\psi_z - A(\psi_z) = 2H\psi_z - H\psi_z - \phi e^{-\varrho}\psi_{\bar{z}} = H\psi_z - \phi e^{-\varrho}\psi_{\bar{z}}, \\ P(\psi_{\bar{z}}) &= 2H\psi_{\bar{z}} - A(\psi_{\bar{z}}) = 2H\psi_{\bar{z}} - H\psi_{\bar{z}} - \bar{\phi} e^{-\varrho}\psi_z = H\psi_{\bar{z}} - \bar{\phi} e^{-\varrho}\psi_z. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P(\nabla H) = 2e^{-\varrho} \left([HH_{\bar{z}} - H_z\bar{\phi}e^{-\varrho}] \psi_z + [HH_z - H_{\bar{z}}\phi e^{-\varrho}] \psi_{\bar{z}} \right). \quad (5.24)$$

Proposición 5.3.4. Sea Σ una superficie inmersa en el espacio forma \mathbb{M}_c^3 con curvatura de Gauss K constante. Entonces

$$L(H) = 2K(H^2 - K + c) + \frac{1}{2}|\nabla A|^2 - 2|\nabla H|^2, \quad (5.25)$$

donde H es la curvatura media de Σ .

Demostración. De (5.24) y del hecho que $P(\nabla H) = \alpha\psi_z + \bar{\alpha}\psi_{\bar{z}}$ se deduce

$$\alpha = 2e^{-\varrho}(HH_{\bar{z}} - H_z\bar{\phi}e^{-\varrho});$$

esto es,

$$\alpha \frac{e^\varrho}{2} = HH_{\bar{z}} - H_z\bar{\phi}e^{-\varrho}. \quad (5.26)$$

Por la ecuación de Gauss (3.15), $e^{-2\varrho}|\phi|^2 = H^2 - K + c$. Derivando ésta respecto a \bar{z} y sabiendo que K es constante obtenemos

$$(e^{-2\varrho}|\phi|^2)_{\bar{z}} = 2HH_{\bar{z}}.$$

Esto implica

$$HH_{\bar{z}} = -\varrho_{\bar{z}}e^{-2\varrho}|\phi|^2 + \frac{1}{2}e^{-\varrho}H_z\bar{\phi} + \frac{1}{2}e^{-2\varrho}\phi\bar{\phi}_{\bar{z}}. \quad (5.27)$$

Por (5.26) y (5.27) concluimos que

$$\alpha \frac{e^\varrho}{2} = -\varrho_{\bar{z}} e^{-2\varrho} |\phi|^2 - \frac{1}{2} e^{-\varrho} H_z \bar{\phi} + \frac{1}{2} e^{-2\varrho} \phi \bar{\phi}_{\bar{z}}.$$

Derivando ahora respecto a z y usando la ecuación de Gauss (3.15) y la ecuación (3.11), que establece $K = -2e^{-\varrho} \varrho_{z\bar{z}}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left(\alpha \frac{e^\varrho}{2} \right)_z &= -\varrho_{z\bar{z}} e^{-2\varrho} |\phi|^2 + 2\varrho_{z\bar{z}} \varrho_z e^{-2\varrho} |\phi|^2 - \varrho_{z\bar{z}} e^{-2\varrho} (\phi \bar{\phi}_z + \phi_z \bar{\phi}) + \frac{1}{2} e^{-\varrho} \varrho_z H_z \bar{\phi} \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{-\varrho} H_{zz} \bar{\phi} - \frac{1}{2} e^{-\varrho} H_z \bar{\phi}_z - e^{-2\varrho} \varrho_z \phi \bar{\phi}_{\bar{z}} + \frac{1}{2} e^{-2\varrho} \phi_z \bar{\phi}_{\bar{z}} + \frac{1}{2} e^{-2\varrho} \phi \bar{\phi}_{z\bar{z}} \\ &= \frac{1}{2} [e^\varrho K (H^2 - K + c) + e^{-2\varrho} (4\varrho_{z\bar{z}} \varrho_z |\phi|^2 - 2\varrho_{z\bar{z}} \phi_z \bar{\phi} - 2\varrho_z \phi \bar{\phi}_{\bar{z}} + |\phi_z|^2) \\ &\quad - 2\varrho_{z\bar{z}} e^{-2\varrho} \phi \bar{\phi}_z + e^{-\varrho} \varrho_z H_z \bar{\phi} - e^{-\varrho} H_{zz} \bar{\phi} - e^{-\varrho} H_z \bar{\phi}_z + e^{-2\varrho} \phi \bar{\phi}_{z\bar{z}}]. \end{aligned}$$

Por otra parte, de la ecuación de Codazzi (3.16) sabemos que $\bar{\phi}_z = e^\varrho H_{\bar{z}}$. Si reemplazamos esto en la ecuación anterior, teniendo en mente que $|H_z|^2 = H_z H_{\bar{z}}$ y $|2\varrho_z \phi - \phi_z|^2 = 4\varrho_z \varrho_{\bar{z}} |\phi|^2 - 2(\varrho_{z\bar{z}} \bar{\phi} \phi_z + \varrho_z \phi \bar{\phi}_{\bar{z}}) + |\phi_z|^2$, concluimos

$$\begin{aligned} \left(\alpha \frac{e^\varrho}{2} \right)_z &= \frac{1}{2} [e^\varrho K (H^2 - K + c) + e^{-2\varrho} |2\varrho_z \phi - \phi_z|^2 + 2e^{-\varrho} \text{Im}(\phi H_{z\bar{z}})i \\ &\quad + 2e^{-\varrho} \text{Im}(\varrho_z H_z \bar{\phi})i - |H_z|^2]. \end{aligned}$$

De esta manera, la parte real del término anterior es igual a

$$\text{Re} \left[\left(\alpha \frac{e^\varrho}{2} \right)_z \right] = \frac{1}{2} [e^\varrho K (H^2 - K + c) + e^{-2\varrho} |2\varrho_z \phi - \phi_z|^2 - |H_z|^2].$$

Como $L(H) = \text{div}(P(\nabla H))$, por (5.23) y por la ecuación anterior obtenemos:

$$L(H) = 2K(H^2 - K + c) + 2e^{-3\varrho} |2\varrho_z \phi - \phi_z|^2 - 2e^{-\varrho} |H_z|^2. \quad (5.28)$$

Si consideramos la base ortonormal $\{E_1 = e^{-\varrho} \psi_u, E_2 = e^{-\varrho} \psi_v\}$ tenemos que $|\nabla A|^2 = \sum_{i,j=1}^2 \langle \nabla A, \nabla A \rangle (E_i, E_j)$ y

$$\begin{aligned} \nabla A(E_1, E_1) &= e^{-\varrho} [\nabla A(\psi_z, \psi_z) + 2\nabla A(\psi_z, \psi_{\bar{z}}) + \nabla A(\psi_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}})], \\ \nabla A(E_1, E_2) &= ie^{-\varrho} [\nabla A(\psi_z, \psi_z) - \nabla A(\psi_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}})] \quad y \\ \nabla A(E_2, E_2) &= -e^{-\varrho} [\nabla A(\psi_z, \psi_z) - 2\nabla A(\psi_z, \psi_{\bar{z}}) + \nabla A(\psi_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}})]. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$|\nabla A|^2 = 8e^{-2\varrho} [\langle \nabla A(\psi_z, \psi_{\bar{z}}), \nabla A(\psi_z, \psi_{\bar{z}}) \rangle + \langle \nabla A(\psi_z, \psi_z), \nabla A(\psi_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}}) \rangle].$$

De (3.18) sabemos que $\nabla A(\psi_z, \psi_{\bar{z}}) = H_{\bar{z}}\psi_z + e^{-\varrho}\phi_{\bar{z}}\psi_{\bar{z}}$. Además,

$$\begin{aligned}\nabla A(\psi_z, \psi_z) &= (\nabla_{\psi_z} A)(\psi_z) = \nabla_{\psi_z} (A(\psi_z)) - A(\nabla_{\psi_z} \psi_z) \\ &= \nabla_{\psi_z} (H\psi_z + e^{-\varrho}\phi\psi_{\bar{z}}) - \varrho_z A(\psi_z) \\ &= H_z\psi_z + H\nabla_{\psi_z} \psi_z - \varrho_z e^{-\varrho}\phi\psi_{\bar{z}} + e^{-\varrho}\phi_z\psi_{\bar{z}} - \varrho_z e^{-\varrho}\phi\psi_{\bar{z}} \\ &= H_z\psi_z + e^{-\varrho}(\phi_z - 2\varrho_z\phi)\psi_{\bar{z}}.\end{aligned}$$

De manera análoga obtenemos que $\nabla A(\psi_{\bar{z}}, \psi_{\bar{z}}) = H_{\bar{z}}\psi_{\bar{z}} + e^{-\varrho}(\bar{\phi}_{\bar{z}} - 2\varrho_{\bar{z}}\bar{\phi})\psi_z$. Así que,

$$|\nabla A|^2 = 12|H_z|^2 e^{-\varrho} + 4e^{-3\varrho}|2\varrho_z\phi - \phi_z|^2.$$

Finalmente, sustituimos la ecuación anterior y $|\nabla H|^2 = 4e^{-\varrho}|H_z|^2$ en la ecuación (5.28). \square

Estamos ya en condiciones de establecer los siguientes resultados.

Teorema 5.3.5. *Sea Σ una superficie isométricamente inmersa en la esfera euclídea \mathbb{S}^3 orientada y completa con curvatura de Gauss constante K que satisface $K \geq 1$. Si $\sup_{\Sigma} H < +\infty$ entonces $\sup_{\Sigma} H = \sqrt{K-1}$ y Σ es una superficie totalmente umbilical.*

Teorema 5.3.6. *Sea Σ una superficie isométricamente inmersa en un espacio forma riemanniano \mathbb{M}_c^3 ($c = 0, -1$), orientada y completa con curvatura de Gauss constante K que satisface $K > 0$. Si $\sup_{\Sigma} H < +\infty$ entonces $\sup_{\Sigma} H = \sqrt{K-c}$ y Σ es una superficie totalmente umbilical.*

Prueba del Teorema 5.3.5 y del Teorema 5.3.6

Dado que $\sup_{\Sigma} H < +\infty$, consideremos $u = H$. Por la Proposición 5.3.4 y el Lema 5.1.5 sabemos que $L(u) \geq f(u)$ donde $f(x) = 2K(x^2 - K + c)$. Aplicando el principio débil del operador L (véase Corolario 5.2.2) tenemos que $f(u^*) \leq 0$ esto es, $2K[(u^*)^2 - K + c] \leq 0$. Como $K > 0$, se sigue de aquí que $u^* \leq \sqrt{K-c}$. Por otra parte, como $H^2 - K + c \geq 0$ se tiene también que $u^* \geq \sqrt{K-c}$. Por lo tanto $\sup_{\Sigma} H = u^* = \sqrt{K-c}$. Teniendo en cuenta que $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 = 2(\sup_{\Sigma} H^2 - K + c) = 2((u^*)^2 - K + c)$, concluimos entonces que $|\Phi| \equiv 0$ y Σ es totalmente umbilical.

5.3.2. Hipersuperficies con curvatura escalar constante

En esta sección extendemos los resultados anteriores al caso n -dimensional.

Teorema 5.3.7. *Sea Σ^n una hipersuperficie orientada, completa e isométricamente inmersa en la esfera euclídea \mathbb{S}^{n+1} , $n \geq 3$, con curvatura escalar (normalizada) constante R que satisface $R \geq 1$. En el caso en que $R = 1$, supongamos además que la función curvatura media H no cambia de signo. Entonces*

- (i) o bien $\sup_{\Sigma} H^2 = R - 1$ y Σ es una hipersuperficie totalmente umbilical,
(ii) o bien

$$\sup_{\Sigma} H^2 \geq \gamma_{n,1}(R) = \frac{1}{n^2} \left((n-1)^2 \frac{nR - (n-2)}{n-2} - 2(n-1) + \frac{n-2}{nR - (n-2)} \right).$$

Además, si $R > 1$ se tiene la igualdad $\sup_{\Sigma} H^2 = \gamma_{n,1}(R)$ y se alcanza este supremo en algún punto de Σ si y sólo si Σ es un toro $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, con $0 < r = \sqrt{(n-2)/nR} < \sqrt{(n-2)/n}$.

Para los casos euclídeo e hiperbólico tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.3.8. *Sea Σ^n una hipersuperficie inmersa isométricamente en un espacio forma riemanniano \mathbb{M}_c^{n+1} ($c = 0, -1$, y $n \geq 3$), orientada y completa con curvatura escalar (normalizada) constante R que satisface $R > 0$. Entonces*

- (i) o bien $\sup_{\Sigma} H^2 = R - c$ y Σ es una hipersuperficie totalmente umbilical,
(ii) o bien

$$\sup_{\Sigma} H^2 \geq \gamma_{n,c}(R) = \frac{1}{n^2} \left((n-1)^2 \frac{nR - (n-2)c}{n-2} - 2(n-1)c + \frac{(n-2)c^2}{nR - (n-2)} \right).$$

Además, se tiene la igualdad $\sup_{\Sigma} H^2 = \gamma_{n,c}(R)$ y se alcanza este supremo en algún punto de Σ si y sólo si

- (a) $c = 0$ y Σ es un cilindro circular $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$,
(b) $c = -1$ y Σ es un cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$,

donde $r = \sqrt{(n-2)/nR} > 0$.

De manera análoga a los Capítulos 3 y 4, para una mayor comodidad a la hora de realizar los cálculos trabajaremos con el operador sin traza Φ . Usando la ecuación $\sup_{\Sigma} H^2 = 1/n(n-1) \sup_{\Sigma} |\Phi|^2 + (R-c)$ tenemos que los Teoremas 5.3.7 y 5.3.8 quedan de la siguiente forma:

Teorema 5.3.9 ([7], Theorem 1). *Sea Σ^n una hipersuperficie orientada, completa e isométricamente inmersa en la esfera euclídea \mathbb{S}^{n+1} , $n \geq 3$, con curvatura escalar (normalizada) constante R que satisface $R \geq 1$. En el caso en que $R = 1$, supongamos además que la función curvatura media H no cambia de signo. Entonces*

- (i) o bien $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 = 0$ y Σ es una hipersuperficie totalmente umbilical,

(ii) o bien

$$\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 \geq \alpha_{n,1}(R) = \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(nR - (n-2))} > 0.$$

Además, si $R > 1$ se tiene la igualdad $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 = \alpha_{n,1}(R)$ y se alcanza este supremo en algún punto de Σ si y sólo si Σ es un toro $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, con $0 < r = \sqrt{(n-2)/nR} < \sqrt{(n-2)/n}$.

Teorema 5.3.10 ([7], Theorem 2). *Sea Σ^n una hipersuperficie inmersa isométricamente en un espacio forma riemanniano \mathbb{M}_c^{n+1} ($c = 0, -1$, y $n \geq 3$), orientada y completa con curvatura escalar (normalizada) constante R que satisface $R > 0$. Entonces*

(i) o bien $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 = 0$ y Σ es una hipersuperficie totalmente umbilical,

(ii) o bien

$$\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 \geq \alpha_{n,c}(R) = \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(nR - (n-2)c)} > 0.$$

Además, se tiene la igualdad $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 = \alpha_{n,c}(R)$ y se alcanza este supremo en algún punto de Σ si y sólo si

(a) $c = 0$ y Σ es un cilindro circular $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$,

(b) $c = -1$ y Σ es un cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$,

donde $r = \sqrt{(n-2)/nR} > 0$.

Dado que los argumentos de la prueba son comunes para ambos teoremas, los probaremos conjuntamente.

Prueba del Teorema 5.3.9 y del Teorema 5.3.10

Si $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 = +\infty$, entonces se satisface trivialmente (ii) del Teorema 5.3.9 y del Teorema 5.3.10 y no hay nada que probar. Si $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 = 0$ (esto es, Σ es totalmente umbilical) entonces se tiene (i) y no hay nada que probar. Entonces, supongamos que $0 < \sup_{\Sigma} |\Phi|^2 < +\infty$.

Sea $u = |\Phi|^2$. Por el Lema 5.1.8 tenemos

$$L(u) \geq \frac{2}{\sqrt{n(n-1)}} u \sqrt{u + n(n-1)(R-c)} Q_R(\sqrt{u}) = f(u) \quad (5.29)$$

donde $Q_R(x)$ está dado por (5.9). Por lo tanto, aplicando el Corolario 5.2.2 a la desigualdad (5.29) tenemos

$$f(u^*) = \frac{2}{\sqrt{n(n-1)}} u^* \sqrt{u^* + n(n-1)(R-c)} Q_R(\sqrt{u^*}) \leq 0,$$

y teniendo en cuenta que $u^* > 0$ y $R \geq c$, obtenemos que

$$Q_R(\sqrt{u^*}) \leq 0. \tag{5.30}$$

Dado que $R > 0$, se tiene $Q_R(0) = n(n-1)R > 0$ y la función $Q_R(x)$ es estrictamente decreciente para todo $x \geq 0$, con $Q_R(x_0) = 0$ en

$$x_0 = R\sqrt{\frac{n(n-1)}{(n-2)(nR - (n-2)c)}} > 0$$

(véase Figura 5.1).

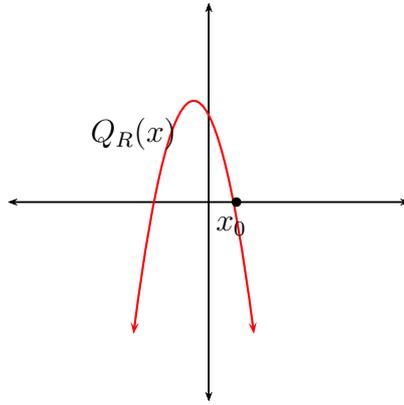


Figura 5.1. Polinomio $Q_R(x)$ con $R > 0$.

Por lo tanto (5.30) implica que

$$u^* \geq x_0^2 = \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(nR - (n-2)c)}.$$

En otras palabras,

$$\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 \geq \alpha_{n,c}(R) = \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(nR - (n-2)c)}.$$

Esto prueba la desigualdad (ii) en ambos teoremas.

Además, se tiene la igualdad $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 = \alpha_{n,c}(R)$ si y sólo si $\sqrt{u^*} = x_0$, y entonces $Q_R(\sqrt{u}) \geq Q_R(\sqrt{u^*}) = 0$ sobre Σ , lo cual junto con (5.29) implica

$$L(u) \geq 0 \quad \text{sobre } \Sigma.$$

Por la Observación 5.1.7, cuando $R > c$ el operador L es elíptico. Por lo tanto, si existe un punto $p_0 \in \Sigma$ en el cual se alcanza este supremo, entonces por el principio

del máximo, la función $u = |\Phi|^2$ debe ser constante, por ende $|\Phi| \equiv x_0$. Entonces, (5.8) llega a ser trivialmente la siguiente igualdad

$$\frac{1}{2}L(|\Phi|^2) = 0 = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^2 Q_R(|\Phi|) \sqrt{|\Phi|^2 + n(n-1)(R-c)}.$$

Por lo tanto, todas las desigualdades en la prueba del Lema 5.1.8 deben ser igualdades. En particular, (5.10) debe ser una igualdad, lo cual significa que H es constante. Además, (5.11) debe ser también una igualdad o, equivalentemente,

$$|\nabla A|^2 - n^2 |\nabla H|^2 = 0.$$

Dado que ya conocemos que H es constante, esto significa que $\nabla A = 0$. Esto es, la segunda forma fundamental es paralela. Finalmente, (5.14) debe ser también una igualdad, así que obtenemos la igualdad en el Lema 2.4.5. Esto implica que la hipersuperficie tiene exactamente dos curvaturas principales constantes de multiplicidades $(n-1)$ y 1. Entonces, por los resultados clásicos sobre hipersuperficies isoparamétricas de espacios forma riemannianos [32, 47, 15] sabemos que Σ debe ser uno de los siguientes productos estándar embebidos:

- si $c = 0$, $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con $r > 0$;
- si $c = 1$, $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, con $0 < r < 1$; y
- si $c = -1$, $\mathbb{H}^{n-1}(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$ o $\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$, con $r > 0$.

En el caso esférico ($c = 1$) y para un radio dado $0 < r < 1$ sabemos de la Sección 1.4 que el producto estándar embebido

$$\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+2}$$

tiene curvatura escalar y tensor de umbilicidad total dados por

$$R = \frac{(n-2)}{nr^2} > 0 \quad \text{y} \quad |\Phi|^2 = \frac{n-1}{nr^2(1-r^2)}.$$

En particular, $R > 1$ si y sólo si $r < \sqrt{(n-2)/n}$. Luego, de la ecuación (1.38) se tiene

$$\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 = \text{constante} = |\Phi|^2 = \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(nR - (n-2))} = \alpha_{n,1}(R).$$

Esto finaliza la prueba del Teorema 5.3.9.

Por otra parte, en el caso euclídeo ($c = 0$) y para un radio dado $r > 0$, el producto $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tiene

$$R = 0 \quad \text{y} \quad |\Phi|^2 = \frac{n-1}{nr^2}.$$

Por lo tanto este ejemplo no satisface la hipótesis de nuestro teorema ($R > 0$). Por otra parte, para un radio dado $r > 0$, el producto $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tiene

$$R = \frac{(n-2)}{nr^2} > 0 \quad \text{y} \quad |\Phi|^2 = \frac{n-1}{nr^2}.$$

Luego, de la ecuación (1.35) se tiene que

$$\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 = \text{constante} = |\Phi|^2 = \frac{(n-1)R}{n-2} = \alpha_{n,0}(R),$$

dando la caracterización de la igualdad $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 = \alpha_{n,c}(R)$ en el Teorema 5.3.10 cuando $c = 0$.

En el caso hiperbólico ($c = -1$) y para un $r > 0$ dado tenemos que el producto estándar embebido

$$\mathbb{H}^{n-1}(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^1(r) \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^n \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_1^{n+2}$$

tiene

$$R = -\frac{(n-2)}{n(1+r^2)} < 0 \quad \text{y} \quad |\Phi|^2 = \frac{n-1}{nr^2(1+r^2)}.$$

Por lo tanto este ejemplo no satisface la hipótesis de nuestro teorema ($R > 0$). Por otra parte, el producto estándar embebido

$$\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^n \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_1^{n+2}$$

tiene

$$R = \frac{(n-2)}{nr^2} > 0 \quad \text{y} \quad |\Phi|^2 = \frac{n-1}{nr^2(1+r^2)}.$$

Luego, de la ecuación (1.53) se tiene

$$\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 = \text{constante} = |\Phi|^2 = \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(nR + (n-2))} = \alpha_{n,-1}(R),$$

dando la caracterización de la igualdad $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 = \alpha_{n,c}(R)$ en el Teorema 5.3.10 cuando $c = -1$. Esto finaliza la prueba del Teorema 5.3.10.

A continuación presentamos un resultado reciente dado por Liu y Li en [35] que está muy relacionado con nuestro trabajo.

Teorema 5.3.11. *Sea Σ una hipersuperficie n -dimensional ($n \geq 3$) completa con curvatura escalar (normalizada) constante R en \mathbb{S}^{n+1} . Si*

(i) $R - 1 \geq 0$,

(ii) *la curvatura media H de Σ satisface*

$$R - 1 \leq \sup_{\Sigma} H^2 \leq \gamma_{n,1}(R),$$

entonces o bien $\sup_{\Sigma} H^2 = R - 1$ y Σ es una hipersuperficie totalmente umbilical; o bien $\sup_{\Sigma} H^2 = \gamma_{n,1}(R)$ y $\Sigma = \mathbb{S}^1(\sqrt{1 - r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$, $r = \sqrt{n - 2/nR}$.

Presentamos así mismo un resultado dado recientemente por Brasil, Colares y Palmas en [12].

Teorema 5.3.12. *Sea Σ^n una hipersuperficie completa de \mathbb{S}^{n+1} con curvatura escalar (normalizada) constante $R \geq 1$. Si*

$$|A|^2 \leq C_n(R) = (n - 1) \frac{nR - (n - 2)}{n - 2} + \frac{n - 2}{nR - (n - 2)},$$

entonces o bien

- (i) $|A|^2 \equiv n(R - 1)$ y Σ es totalmente umbilical, o bien
- (ii) $\sup_{\Sigma} |A|^2 = C_n(R)$. Si se alcanza $\sup_{\Sigma} |A|^2$ en algún punto de Σ , entonces Σ es el $H(r)$ -toro $\mathbb{S}^1(\sqrt{1 - r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$.

Cuando escribimos nuestro Teorema 5.3.9 en términos de $|A|^2$, nuestro resultado resulta ser equivalente al teorema anterior, después de observar que en dicho teorema faltan dos hipótesis para que la prueba funcione. La primera es que es necesario suponer que cuando $R = 1$ la función curvatura media H no cambia de signo, como hicimos en nuestro resultado (véase el inicio de la prueba del Teorema 1 en [12]). Esto es siempre cierto si $R > 1$, por la ecuación de Gauss (1.17) (véase también la Observación 5.1.7), pero no en el caso $R = 1$. La segunda es que, para poder caracterizar la igualdad $\sup_{\Sigma} |A|^2 = C_n(R)$, es necesario suponer que $R > 1$, como nosotros hicimos. En nuestra prueba, es necesario tener la elipticidad de nuestro operador L . En su prueba es también necesaria para tener la elipticidad de su operador L , el cual es diferente del nuestro, pero tienen la misma componente de segundo orden.

Los resultados en [12] se obtuvieron como una aplicación del principio del máximo clásico de Omori-Yau para el operador laplaciano [39, 58]. En contraste a esto, nuestro enfoque se basa en el principio débil del máximo para el operador L .

Notemos también que cuando escribimos nuestro Teorema 5.3.9 en términos de H^2 (véase Teorema 5.3.7), nuestro resultado resulta ser equivalente al Teorema 5.3.11, después de observar que en el Teorema 5.3.11 faltan también dos hipótesis para que la prueba funcione, la cual, como en [12], está basada también en el uso del principio del máximo clásico de Omori-Yau para el laplaciano. Además, la prueba de la caracterización de la igualdad dada en el Teorema 5.3.11 no es correcta. En primer lugar, como en [12], se necesita suponer que la función curvatura media H no cambia de signo. Los autores en la prueba del Teorema 5.3.11 no prestan atención a este punto, pero ellos lo necesitan para ir de su igualdad (29) a su desigualdad (31) en su prueba. La segunda hipótesis que les falta es en la caracterización de la igualdad $\sup_{\Sigma} H^2 = \gamma_{n,1}(R)$, donde es necesario suponer no solamente que $R > 1$ sino

también que este supremo se alcanza en algún punto. Aparte de eso, y a diferencia de los argumentos de los autores, uno no puede deducir que las igualdades se tienen en su ecuación (30) y en su Lema 3.1 sin probar que H es constante, y el camino natural para argumentar esto es vía el argumento de un principio del máximo. Por estas razones, la prueba de la caracterización de la igualdad $\sup_{\Sigma} H^2 = \gamma_{n,1}(R)$ dada por Liu y Li en [35] no es correcta.

Por otra parte, Liu y Su en [36] intentaron dar un resultado para hipersuperficies en el espacio hiperbólico, el cual enunciamos a continuación:

Teorema 5.3.13. *Sea Σ una hipersuperficie n -dimensional ($n \geq 3$) completa con curvatura escalar (normalizada) constante R en \mathbb{H}^{n+1} . Si*

(i) $R + 1 \geq 0$,

(ii) *la norma al cuadrado de la segunda forma fundamental $|A|^2$ satisface*

$$n(R+1) \leq \sup_{\Sigma} |A|^2 \leq \frac{n[n(n-1)(R+1)^2 - 4(n-1)(R+1) + n]}{(n-2)(nR + (n-2))} = C_{n,-1}(R)$$

entonces o bien $\sup_{\Sigma} |A|^2 = n(R+1)$ y Σ es una hipersuperficie totalmente umbilical; o bien $\sup_{\Sigma} |A|^2 = C_{n,-1}(R)$ y Σ es isométrico a $\mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{H}^1(-1/(1+r^2))$, para algún $r > 0$.

Si el teorema anterior fuese correcto, sería equivalente a nuestro Teorema 5.3.10 en el caso $c = -1$, escrito en términos de $|A|^2$. Sin embargo, el Teorema 5.3.13 no es correcto, no solo porque los autores repiten los mismos errores respecto a la caracterización de la igualdad que en el Teorema 5.3.11, sino también porque la hipótesis $R > 0$ no aparece. Sin la hipótesis de $R > 0$, el Teorema 5.3.13 es falso por la existencia del producto estándar embebido $\mathbb{H}^{n-1}(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^1(r) \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$. Tales productos embebidos son ejemplos de hipersuperficies en el espacio hiperbólico con curvatura escalar constante $-1 < R < 0$ y que satisfacen $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 = \alpha_{n,-1}(R)$ o, equivalentemente, $\sup_{\Sigma} |A|^2 = C_{n,-1}(R)$.

5.4. L -parabolicidad

En la Sección 2.2 estudiamos la parabolicidad clásica que está relacionada con el operador laplaciano. En esta sección queremos mostrar que se puede extender dicho concepto a otros operadores como L . Como en el Teorema 5.2.1, consideremos Σ una variedad riemanniana, h un campo tensorial $(0, 2)$ simétrico sobre Σ y el operador diferencial $\mathcal{L}(u) = \operatorname{div}(h(\nabla u, \cdot)^{\sharp})$. Siguiendo la misma terminología utilizada en la Sección 2.2, diremos que Σ es \mathcal{L} -parabólica si las únicas soluciones de la desigualdad $\mathcal{L}(u) \geq 0$ que están acotadas superiormente son constantes.

Este enfoque nos permite también establecer el siguiente resultado en el cual, bajo la hipótesis de L -parabolicidad, podemos mejorar la caracterización de la igualdad $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 = \alpha_{n,c}(R)$, dado que no necesitamos suponer que se alcanza el supremo en algún punto.

Teorema 5.4.1 ([7], Theorem 3). *Sea Σ^n una hipersuperficie isométricamente inmersa en un espacio forma riemanniano \mathbb{M}_c^{n+1} ($c = 0, 1, -1$, y $n \geq 3$), orientada y completa con curvatura escalar (normalizada) constante R que satisface $R \geq c$ y $R > 0$. En el caso en que $c = 1$ y $R = 1$, supongamos además que la función curvatura media H no cambia de signo. Denotemos por Φ el tensor de umbilicidad total de la inmersión y supongamos que la hipersuperficie no es totalmente umbilical. Si Σ es L -parabólica, entonces*

$$\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 \geq \alpha_{n,c}(R) = \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(nR - (n-2)c)} > 0,$$

con igualdad si y sólo si

- (a) $c = 0$ y Σ es un cilindro circular $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$,
- (b) $c = 1$ y Σ es un toro $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$,
- (c) $c = -1$ y Σ es un cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$,

donde $r = \sqrt{(n-2)/nR} > 0$.

Demostración. Primero observemos que si $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 = +\infty$ entonces trivialmente se satisface la desigualdad y no hay nada que probar. Por otra parte, si $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 < +\infty$ entonces podemos aplicar el Lema 5.1.8 y el Corolario 5.2.2 como en la primera parte de la prueba de los Teoremas 5.3.9 y 5.3.10 para concluir que

$$\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 \geq \alpha_{n,c}(R).$$

Además, si se tiene la igualdad $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 = \alpha_{n,c}(R)$, entonces tenemos que $L(|\Phi|^2) \geq 0$ sobre Σ . Por lo tanto, por la L -parabolicidad de Σ concluimos que la función $u = |\Phi|^2$ debe ser constante e igual a $\alpha_{n,c}(R)$. El resto de la prueba se sigue como en la demostración de los Teoremas 5.3.9 y 5.3.10. \square

A la luz del Teorema 5.4.1, sería interesante encontrar algún criterio de L -parabolicidad. En este sentido y como una aplicación de [42, Teorema 2.6] podemos establecer el siguiente resultado.

Lema 5.4.2 ([7], Lemma 11). *Sea Σ una variedad riemanniana completa, sea o un punto de referencia en Σ , y $r(x)$ la función distancia desde o . Sea h un campo*

tensorial simétrico $(0, 2)$ sobre Σ . Bajo las mismas hipótesis del Teorema 5.2.1, si para algún punto $o \in \Sigma$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dr}{h_+(r)\text{vol}(\partial B_r)} = +\infty$$

entonces Σ es \mathcal{L} -parabólica.

En particular, para el caso del operador L podemos dar el siguiente criterio de parabolicidad.

Corolario 5.4.3 ([7], Corollary 12). *Sea $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{M}_c^{n+1}$ una hipersuperficie orientada, completa e isométricamente inmersa con curvatura escalar (normalizada) constante $R \geq c$. En el caso en que $R = c$, supongamos además que la función curvatura media H no cambia de signo. Supongamos que $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 < +\infty$. Si para algún punto $o \in \Sigma$*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dr}{\text{vol}(\partial B_r)} = +\infty \tag{5.31}$$

entonces Σ es L -parabólica.

Demostración. Como ya mencionamos anteriormente, si $\sup_{\Sigma} |\Phi|^2 < +\infty$ entonces por la ecuación (5.20) obtenemos

$$h_+(r) \leq 2n \sup_{\Sigma} H < +\infty,$$

y aplicando el Lema 5.4.2 se sigue (5.31). □

Es importante señalar que la condición (5.31) es una condición suficiente para la parabolicidad clásica (es decir, para el operador laplaciano) de una variedad riemanniana completa; véase por ejemplo el siguiente teorema dado por Grigor'yan en [23].

Teorema 5.4.4. *Sea Σ una variedad geodésicamente completa. Si Σ satisface (5.31) entonces Σ es parabólica.*

Véase también [44, Capítulo 5] para condiciones suficientes más generales para la parabolicidad de una variedad riemanniana completa cuando se trata con el llamado φ -laplaciano.

Bibliografía

- [1] H. Alencar y M. do Carmo, *Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 1223–1229.
- [2] H. Alencar, M. do Carmo y A.G. Colares, *Stable hypersurfaces with constant scalar curvature*, Math. Z. **213** (1993), 117–131.
- [3] H. Alencar, M. do Carmo y W. Santos, *A gap theorem for hypersurfaces of the sphere with constant scalar curvature one*, Comment. Math. Helv. **77** (2002), 549–562.
- [4] L.J. Alías, S.C. de Almeida y A. Brasil Jr., *Hypersurfaces with constant mean curvature and two principal curvatures in \mathbb{S}^{n+1}* , An. Acad. Brasil. Cienc. **76** (2004), 489–497.
- [5] L.J. Alías y S.C. García-Martínez, *On the scalar curvature of constant mean curvature hypersurfaces in space forms*, J. Math. Anal. Appl. **363** (2010), 579–587.
- [6] L.J. Alías y S.C. García-Martínez, *An estimate for the scalar curvature of constant mean curvature hypersurfaces in space forms*, Geom. Dedicata **156** (2012), 31–47.
- [7] L.J. Alías, S.C. García-Martínez y Marco Rigoli, *A maximum principle for hypersurfaces with constant scalar curvature and applications*, Ann. Glob. Anal. Geom. **41** (2012), 307–320.
- [8] L.V. Ahlfors, *Sur le type d’une surface de Riemann*, C.R. Acad. Sc. Paris. **201** (1935), 30–32.
- [9] L. An-Min y L. Jimin *An intrinsic rigidity theorem for minimal submanifolds in a sphere*, Comm. Arch. Math. (Basel) **58** (1992), 582–594.
- [10] A.C. Asperti y E. de A. Costa, *Vanishing of homology groups, Ricci estimate for submanifolds and applications*, Kodai Math. J. **24** (2001), 313–328.
- [11] G.P. Bessa y M.S. Costa, *On cylindrically bounded H -hypersurfaces of $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* , Differential Geom. Appl. **26** (2008), 323–326.

- [12] A. Brasil Jr., A.G. Colares y O. Palmas, *Complete hypersurfaces with constant scalar curvature in spheres*, Monatsh. Math. **161** (2010), 369–380.
- [13] A. Caminha, *On hypersurfaces into Riemannian spaces of constant sectional curvature*, Kodai Math. I. **29** (2006), 185–210.
- [14] A. Caminha y H.F. de Lima, *Complete spacelike hypersurfaces into conformally stationary Lorentz manifolds*, Gen. Relativity Gravitation **41** (2009), 173–189.
- [15] E. Cartan, *Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante*, Ann. Mat. Pura Appl. **17** (1938), 177–191.
- [16] B-Y. Chen, *Geometry of submanifolds*. Pure and Applied Mathematics, No. 22. Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.
- [17] Q. Chen y Y.L. Xin, *A generalized maximum principle and its applications in geometry*, Amer. J. Math. **114** (1992), 355–366.
- [18] Q-M. Cheng, *The rigidity of the Clifford torus $\mathbb{S}^1(\sqrt{1/n}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{(n-1)/n})$* , Comm. Math. Helv. **71** (1996), 60–69.
- [19] S.Y. Cheng y S.T. Yau, *Hypersurfaces with constant scalar curvature*, Math. Ann. **225** (1977), 195–204.
- [20] M. do Carmo y M. Dajczer, *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 685–709.
- [21] J. Dodziuk, *Maximum principle for parabolic inequalities and the heat flow on open manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), 703–716.
- [22] D. Fisher-Colbrie y R. Schoen *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifold of non-negative scalar curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 199–211.
- [23] A. Grigor'yan, *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **36** (1999), 135–249.
- [24] T. Hasanis, A. Savas-Halilaj y T. Vlachos, *Complete minimal hypersurfaces in a unit sphere*, Monatsh. Math. **145** (2005), 301–305.
- [25] T. Hasanis y T. Vlachos, *A pinching theorem for minimal hypersurfaces in a sphere* Arch. Math. **75** (2000), 469–471.
- [26] D.A. Hoffman, *Surfaces of constant mean curvature in manifolds of constant curvature*, J. Differential Geometry **8** (1973), 161–176.

- [27] A. Huber, On subharmonic functions and differential geometry in the large, *Comment. Math. Helv.* **32** (1957), 13–72.
- [28] J.L. Kazdan, *Parabolicity and the Liouville property on complete Riemannian manifolds*, Seminar on new results in nonlinear partial differential equations (Bonn, 1984), 153–166, *Aspects Math.*, E10, Vieweg, Braunschweig, 1987.
- [29] T. Klotz y R. Osserman, *Complete surfaces in E^3 with constant mean curvature*, *Comment. Math. Helv.* **41** (1966/1967) 313–318.
- [30] H.B. Lawson Jr. *Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces*, *Ann. of Math.* (2) **89** (1969), 187–197.
- [31] P.F. Leung, *An estimate on the Ricci curvature of a submanifold and some applications*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **114** (1992), 1051–1061.
- [32] T. Levi-Civita, *Famiglia di superfici isoparametriche nell'ordinario spazio Euclideo*, *Att. Accad. naz Lincie Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur* **26** (1937), 355–362.
- [33] H. Li, *Global rigidity theorems of hypersurfaces*, *Ark. Math.* **35** (1997), 327–351.
- [34] H. Li, *Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms*, *Math. Ann.* **305** (1996), 665–672.
- [35] X. Liu y H. Li, *Complete hypersurfaces with constant scalar curvature in a sphere*, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **46** (2005), 567–575.
- [36] X. Liu y W. Su, *Hypersurfaces with constant scalar curvature in a hyperbolic space form*, *Balkan J. Geom. Appl.* **7** (2002), 121–132.
- [37] K. Nomizu y B. Smyth, *A formula of Simons' type and hypersurfaces with constant mean curvature*, *J. Differential Geometry* **3** (1969), 367–377.
- [38] M. Okumura, *Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor*, *Amer. J. Math.* **96** (1974), 207–213.
- [39] H. Omori, *Isometric immersions of Riemannian manifolds*, *J. Math. Soc. Japan* **19** (1967), 205–214.
- [40] T. Otsuki, *Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature*, *Amer. J. Math.* **92** (1970), 145–173.
- [41] O. Perdomo, *Ridigity of minimal hypersurfaces of spheres with two principal curvatures*, *Arch. Math.* **82** (2004), 180–184.

- [42] S. Pigola, M. Rigoli y A.G. Setti, *A Liouville-type result for quasi-linear elliptic equations on complete Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal. **219** (2005), 400–432.
- [43] S. Pigola, M. Rigoli y A.G. Setti, *A remark on the maximum principle and stochastic completeness*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 1283–1288.
- [44] S. Pigola, M. Rigoli y A.G. Setti, *Maximum principles on Riemannian manifolds and applications*, Memoirs Amer. Math. Soc. **822** (2005).
- [45] A. Ratto, M. Rigoli y A.G. Setti, *On the Omori-Yau maximum principle and its applications to differential equations and geometry*, J. Funct. Anal. **134** (1995), 486–510.
- [46] R.C. Reilly, *Variational properties of functions of the mean curvature for hypersurfaces in space forms*, J. Differential Geometry **8** (1973), 465–477.
- [47] B. Segre, *Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni*, Att. Accad. naz Lincie Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur **27** (1938), 203–207.
- [48] S. Shu y A.Y. Han, *Hypersurfaces with two principal curvatures in a real space form*, Int. Math. Forum **5** (2010), 163–173.
- [49] B. Smyth y F. Xavier, *Efimov's theorem in dimension greater than two*, Invent. Math. **90** (1987), 443–450.
- [50] M. Spivak *A comprehensive introduction to differential geometry*, Vol. 4, Publish or Perish, Boston, MA, 1975.
- [51] L-F. Tam y D. Zhou, *Stability properties for the higher dimensional catenoid in \mathbb{R}^{n+1}* , Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 3451–3461.
- [52] R. Tribuzy, *Hopf's method and deformations of surfaces preserving mean curvature*, An. Acad. Brasil. Cienc. **50** (1978), 447–450.
- [53] T. Vlachos, *Complete submanifolds with parallel mean curvature in a sphere*, Glasgow Math. J. **38** (1996), 343–346.
- [54] Q. Wang, *Rigidity of Clifford minimal hypersurfaces*, Monatsh. Math. **140** (2003), 163–167.
- [55] Q.L. Wang y C.Y. Xia, *Rigidity theorems for closed hypersurfaces in space forms*, Quart. J. Math. Oxford Ser. **56** (2005), 101–110.
- [56] G. Wei, *Complete hypersurfaces with constant mean curvature in a unit sphere*, Monatsh. Math. **149** (2006), 251–258.

- [57] G. Wei y Y.J. Suh, *Rigidity theorems for hypersurfaces with constant scalar curvature in a unit sphere*, Glasg. Math. J. **49** (2007), 235–241.
- [58] S.T. Yau, *Harmonic function on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 201-228.