

Propuesta de práctica de los fundamentos de la probabilidad apoyada en recursos on line basada en el trabajo presentado en las III Jornadas de Docencia en Economía (Cartagena, junio 2011).

Cómo mejorar la comprensión de los fundamentos de la probabilidad a través de las TICs

Fuensanta Arnaldos García (arnaldos@um.es)

Úrsula Faura Martínez (faura@um.es)

Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa
Universidad de Murcia

Resumen

La forma en la que se ha venido impartiendo la enseñanza de la Estadística en las universidades, ha sido la tradicional, en la cual el docente transmitía sus conocimientos de una forma plana, sin apoyo alguno de las nuevas tecnologías de la información y comunicación, TICs. Pero en el nuevo Espacio Europeo de Educación Superior, el papel del profesor es dar la base de su asignatura y actuar como motivador y guía del alumno. Así, el profesor debe proporcionar los medios para que el alumno sea capaz de seleccionar, organizar, priorizar la información con sentido crítico, etc. y es el propio alumno el que debe gestionar su proceso de aprendizaje y adquirir la capacidad de comprender y analizar los conceptos dados. En este ámbito, supone un gran avance apoyarse en las nuevas tecnologías.

En Estadística, la integración de las TICs en la docencia puede hacerse de muchas formas. Desde la búsqueda de información en fuentes estadísticas, pasando por el tratamiento de todo tipo de información a través de software estadístico o de uso general como una hoja de cálculo, o su incorporación a informes que integren distintos tipos de recursos que hayan podido ser localizados a través de buscadores.

Además de todo esto, existe otro tipo de recursos que creemos interesantes para la docencia: las simulaciones interactivas. Al igual que incluimos en nuestros materiales referencias bibliográficas también es posible incluir este otro tipo de recursos didácticos que son cada vez más numerosos en la red. Desde un formato más atractivo, tanto para el profesor como para el alumno, permiten incidir de forma directa en el proceso de aprendizaje del alumno. Proporcionan una representación interactiva de un modelo que permite al estudiante mediante su manipulación y en un proceso de ensayo-error mejorar su comprensión del fenómeno, lo que le afecta y el impacto que tiene sobre otros fenómenos.

La proliferación de este tipo de recursos en la red facilita su incorporación a la docencia. Existen numerosas simulaciones disponibles para su uso, en la mayoría de los casos

gratuitas y bajo licencias de uso Creative Commons. En su mayor parte se encuentran disponibles en forma de Applets¹, bien en páginas web que pueden ser referenciadas para su uso, bien en código abierto que puede ser incorporado a una página web diferente. También es de destacar la existencia de proyectos de potenciación de la visualización desde grandes empresas como el caso de Wolfram Research, compañía de software cuyo producto principal es Mathematica, que con el Proyecto de Demostración Wolfram proporciona miles de visualizaciones gratuitas tanto científicas como educativas, además de un software gratuito (Mathematica Player) que permite su uso interactivo.

Son muchos los ámbitos en la docencia en Estadística en los que estas simulaciones interactivas se pueden utilizar:

- Estadística descriptiva: análisis univariante de datos, interpretación de medidas descriptivas, representación gráfica de datos, regresión lineal, etc...
- Probabilidad: visualización de sucesos y operaciones de sucesos, concepto de sucesos incompatibles, independientes, probabilidad condicionada, etc.
- Variables aleatorias: comprensión de los tipos de variables aleatorias, de la interpretación de sus principales características, de las funciones que describen su comportamiento aleatorio, etc...
- Modelos de variables aleatorias: comprensión de la naturaleza y efecto de las variaciones paramétricas, mejorar la capacidad de distinción entre los diferentes tipos de modelos, etc...
- Inferencia paramétrica y no paramétrica: interpretación de las propiedades de los estimadores, naturaleza de los tipos de estimación, comprensión de conceptos como el nivel de confianza, el p-valor, potencia de un test, etc...

A la hora de ilustrar su uso, y dado el elevado número de recursos disponibles, hemos optado por centrarnos solo en uno de los posibles ámbitos de aplicación de las simulaciones: la probabilidad. Nuestro objetivo es también mostrar cómo creemos que el uso de estas simulaciones puede mejorar el aprendizaje de nuestros alumnos. Para ello proponemos una manera de integrar las mismas en el estudio del tema.

Nuestra experiencia con el uso de las simulaciones en la docencia advierte del riesgo que supone presentarlas a los alumnos (mostrarles dónde se encuentran, qué proporcionan y cómo se usan) y dejar a su libre albedrío el uso de las mismas como parte de los materiales disponibles. El resultado más probable cuando se sigue esta estrategia es que sea sólo un número muy reducido de estudiantes el que finalmente las emplea.

Creemos que es labor del profesor la integración de las simulaciones en actividades que aprovechen todo su potencial, de forma que verdaderamente mejoren el proceso de aprendizaje de nuestros alumnos. Estas actividades pueden ser programadas para realizarse de forma presencial en las aulas de informática disponibles en las Facultades o en casa. Para su planificación creemos que:

¹ Los Applets son simulaciones programadas en Java que, insertadas en una página web, pueden ejecutarse utilizando cualquier navegador. El único requisito para utilizarlas es tener instalada la Máquina Virtual de Java.

1. debe intentarse que el número de simulaciones que se propone no sea muy elevado (riesgo que se corre dado el gran número de recursos disponibles), por lo que hay que valorar lo que se obtiene con cada una de ellas.
2. debe prepararse el momento de su uso, provocando en los alumnos, a través de preguntas previas, la elaboración de una primera idea que será contrastada a través de la simulación.
3. debe comprobarse si, con el uso de las simulaciones, mejora el proceso de aprendizaje de los temas tratados.

Con estas consideraciones en mente, presentamos un proyecto de integración de las simulaciones en el estudio del tema de los fundamentos de la probabilidad. Seleccionamos al efecto algunas simulaciones, que pueden utilizarse tanto dentro como fuera del aula, como herramientas que facilitan la asimilación y comprensión de los conceptos claves de este tema. Finalmente, las acompañamos de las cuestiones que podrían motivar su uso y mejorar los efectos sobre el proceso de aprendizaje de los alumnos.

Este es sólo uno de los proyectos de integración de las simulaciones realizados en los últimos años en algunas de las asignaturas que impartimos. Otros proyectos similares se han realizado en los temas de variables aleatorias y de modelos de variables aleatorias, consiguiendo en los cursos en los que se han implementado un alto grado de satisfacción por parte de los alumnos y del profesor.

PRÁCTICA SOBRE FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Objetivos de la práctica

1. Comprensión de las operaciones entre sucesos y las consecuencias de los axiomas de Kolmogorov, para dos y tres sucesos.
2. Cálculo de probabilidades de sucesos individuales o de operaciones de sucesos mediante la interpretación clásica de la probabilidad.
3. Comprensión del significado de la interpretación frecuentista de la probabilidad.
4. Conocer el concepto de probabilidad condicionada y su relación con la probabilidad de la intersección de sucesos.
5. Planteamiento de los experimentos en etapas y el uso de los teoremas de la Probabilidad Total y Bayes para su resolución.

Fijados los objetivos, planteamos a los alumnos distintas cuestiones para que las resuelvan con lo que se ha desarrollado en clase, entregando su resolución al profesor. Posteriormente se plantea la resolución de esas mismas cuestiones mediante las simulaciones interactivas sugeridas, de manera que puedan contrastar ellos mismos si han comprendido bien los conceptos tratados, solicitándoles en la hoja de conclusiones el nivel de satisfacción de la práctica realizada. La presencia del profesor en el momento en que se usen las simulaciones puede ayudar para explicar su funcionamiento. No obstante, también puede sustituirse esta presencia por una sucinta explicación del objetivo y uso de las mismas. Al finalizar la práctica se les proponen cuestiones similares a las ya resueltas

para que las realicen sin usar simulación. Todo este material es recogido por el profesor, el cual puede determinar, comparando los resultados finales con los iniciales, el efecto del uso de las simulaciones en el proceso de aprendizaje del alumno.

Práctica de informática: fundamentos de probabilidad

Esta práctica consta de 3 partes debiendo entregarse todas a su profesor. La primera se realizará antes de acudir al aula de informática y se recogerá al inicio de la sesión. Las dos restantes se completarán durante el desarrollo de la práctica y se recogerán al final de la misma.

ALUMNO/A:

PARTE 1: complete las cuestiones

CUESTIÓN 1

Una pieza puede presentar dos defectos A y B. Describa mediante sucesos las siguientes expresiones y realice la representación gráfica correspondiente:

- a) La pieza no tiene ningún defecto.
- b) La pieza tiene al menos un defecto.
- c) La pieza tiene sólo el defecto A.
- d) La pieza tiene sólo el defecto B.
- e) La pieza tiene exactamente un defecto.

Si el porcentaje de piezas que presentan el defecto A es del 6%, el defecto B del 4% y ambos defectos es del 2%, calcule las probabilidades de los sucesos anteriores. ¿Qué le pasaría a las probabilidades que ha calculado si los sucesos fuesen disjuntos?

Imagine que son 3 los defectos que puede presentar la pieza (A, B y C). Describa mediante sucesos las siguientes expresiones y realice la representación gráfica correspondiente:

- a) La pieza no tiene ningún defecto.
- b) La pieza tiene al menos un defecto.
- c) La pieza tiene dos y sólo dos defectos.

CUESTIÓN 2

- a) En el lanzamiento de un dado, determine la probabilidad de obtener un punto mayor o igual a 4. Si se sabe que ha salido un número par, calcule la probabilidad anterior.
- b) Si se lanzan dos dados, determine la probabilidad de que la suma de sus puntos sea superior a 7. Calcule dicha probabilidad sabiendo que en al menos un dado ha salido un 3.

CUESTIÓN 3

Dado el experimento consistente en realizar sucesivos lanzamientos de una moneda perfecta, responda a las siguientes cuestiones.

- a) ¿Cree que si lanzamos la moneda 2 veces nos saldrá una vez cara y otra cruz? ¿y si lanzamos la moneda 1.000 veces, unas 500 veces será cara y unas 500 veces cruz, más o menos? ¿y si la lanzamos 100.000 veces, saldrá la mitad de las veces cara?

- b) Si al lanzar la moneda me sale 15 veces seguida cara, ¿la siguiente vez que la tire, la probabilidad de que salga cara será mayor que 1/2?

CUESTIÓN 4

Imagine que tenemos 2 urnas (U_1, U_2) con 10 bolas cada una. En la primera hay 6 bolas blancas y 4 negras, y en la segunda hay 4 bolas blancas y 6 negras. El experimento consiste en lanzar un dado regular y, en función del valor de dado, elegir una urna de donde sacar una bola. Se observará finalmente el color de la bola elegida. Teniendo en cuenta que si al tirar el dado sale un número menor que 5 utilizamos la urna U_1 y en caso contrario la urna U_2 , conteste a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuál es la probabilidad de que usemos la urna U_2 y nos salga una bola blanca?
- ¿Cuál es la probabilidad de que nos salga una bola blanca?
- ¿Cuál es la probabilidad de que hayamos usado la urna U_2 si nos ha salido una bola blanca?

PARTE 2: revise las cuestiones completadas utilizando las simulaciones interactivas

CUESTIÓN 1

Para dibujar los sucesos puede utilizarse “Interactive Venn Diagram” de Marc Brodie disponible en el proyecto de demostración Wolfram (figura 1).

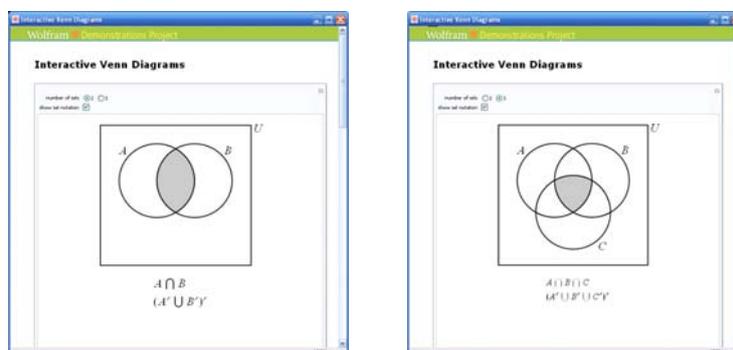


Figura 1: <http://demonstrations.wolfram.com/InteractiveVennDiagrams/>

También se puede emplear la simulación “Venn Diagram Applet” de Mike Shepperd (figura 2).

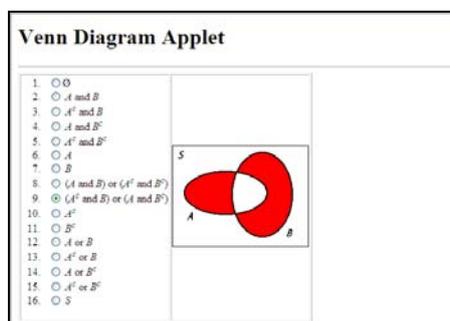


Figura 2: <http://www.teachers.ash.org.au/miKemath/VennDiagramApplet/VennGame.html>

Para calcular las probabilidades se puede consultar el applet “Diagrama de Venn” del Aula Virtual de Estadística de la Universidad de Córdoba (figura 3).

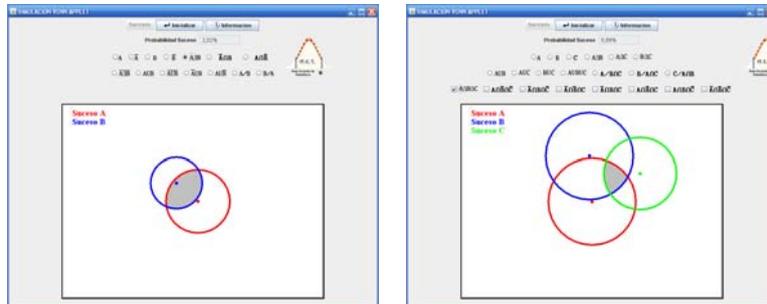


Figura 3: http://www.uco.es/simulaciones_estadisticas/set/JesusBorrego/DiagramadeVenn/?idioma=es

Al terminar revise su contestación a la **cuestión 1** y señale en la hoja de conclusiones si era o no correcta. En caso de ser incorrecta explique brevemente por qué cree que se ha equivocado y si el uso de las simulaciones ha mejorado su comprensión del problema.

CUESTIÓN 2

En el applet “C1BasicDie” del proyecto Statmedia de la Universidad de Barcelona (figura 4) se pueden calcular probabilidades de distintos sucesos en el experimento aleatorio de lanzar un dado utilizando la interpretación clásica de la probabilidad, además de probabilidades condicionadas.



Figura 4: <http://www.ub.edu/stat/GrupsInnovacio/Statmedia/demo/applets/applets01es.htm>

Para afianzar el concepto de probabilidad condicionada se puede consultar el applet “conditional probability” de R. Webster West (figura 5). Con las probabilidades de los sucesos ya fijas, se pueden desplazar ambos sucesos y alterar el valor de la probabilidad de su intersección y ver cómo afecta eso a las probabilidades condicionadas.

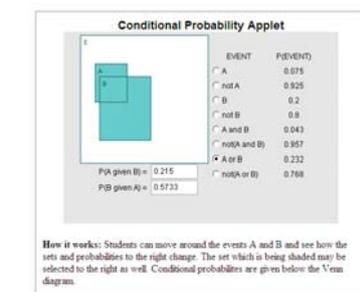


Figura 5 : <http://www.stat.tamu.edu/~west/applets/Venn1.html>

El experimento aleatorio del lanzamiento simultáneo de dos dados puede trabajarse en la simulación de R. F. Barrow (figura 6). En ella puede calcular probabilidades de distintos sucesos (suma igual a 7, mayor que 7, ambos pares, etc...), además de probabilidades condicionadas, bien alterando el espacio muestral con información adicional (método 1) o mediante la definición de la probabilidad condicionada (método 2).

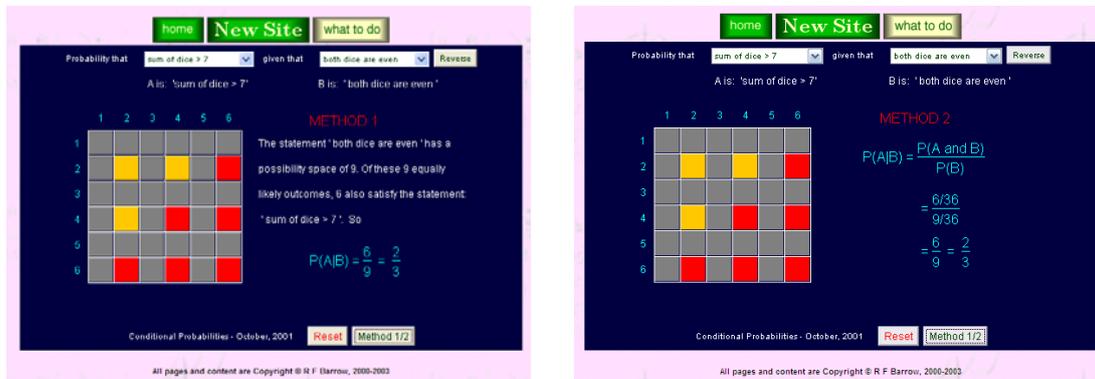


Figura 6: <http://www.rfbarrow.btinternet.co.uk/htmasa2/Prob2.htm>

Al terminar revise su contestación a la **cuestión 2** y señale en la hoja de conclusiones si era o no correcta. En caso de ser incorrecta explique brevemente por qué cree que se ha equivocado y si el uso de las simulaciones ha mejorado su comprensión del problema.

CUESTIÓN 3

Puede realizar el experimento aleatorio del lanzamiento de una moneda en el applet “lanzamiento de una moneda o de un dado” del Aula Virtual de Estadística (figura 7). Esta simulación, que también muestra el lanzamiento de uno o varios dados, ilustra el principio de regularidad estadística.

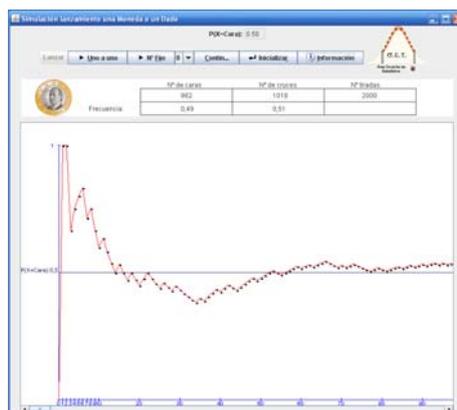


Figura 7: http://www.uco.es/simulaciones_estadisticas/set/MarisaAguilera/MonedaDado/?idioma=es

Al terminar revise su contestación a la **cuestión 3** y señale en la hoja de conclusiones si era o no correcta. En caso de ser incorrecta explique brevemente por qué cree que se ha equivocado y si el uso de las simulaciones ha mejorado su comprensión del problema.

CUESTIÓN 4

El planteamiento y resolución de la cuestión pueden tratarse a través de un diagrama de árbol en las simulaciones de J.L.Abreu y M.Oliveró del proyecto Descartes, empleando tanto el Teorema de la Probabilidad Total (figura 8) como el de Bayes (figura 9).

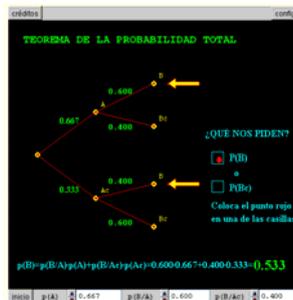


Figura 8

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/probabilidad_condicionada/probabilidad_total_jam.htm

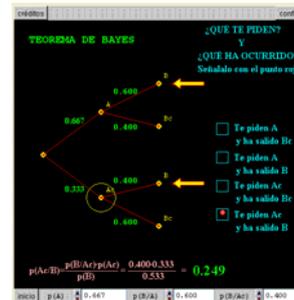


Figura 9

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/probabilidad_condicionada/probabilidad_bayes_jam.htm

También se pueden utilizar las simulaciones del experimento aleatorio del lanzamiento del dado y la extracción de una bola en una urna disponibles en el proyecto Statmedia de la Universidad de Barcelona (figuras 10 y 11).



Figura 10

<http://www.ub.edu/stat/GrupsInnovacio/Statmedia/demo/applets/applets01es.htm>

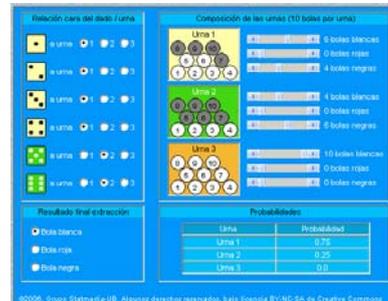


Figura 11

<http://www.ub.edu/stat/GrupsInnovacio/Statmedia/demo/Statmedia.htm>

Al terminar revise su contestación a la **cuestión 4** y señale en la hoja de conclusiones si era o no correcta. En caso de ser incorrecta explique brevemente por qué cree que se ha equivocado y si el uso de las simulaciones ha mejorado su comprensión del problema.

Hoja de conclusiones:

CUESTIÓN 1

CUESTIÓN 2

CUESTIÓN 3

CUESTIÓN 4

PARTE 3: responde a las siguientes preguntas

1. Una pieza puede presentar tres defectos A, B y C, que se consideran independientes entre sí. Si el porcentaje de piezas que presentan cada uno de los defectos es 4%, 3% y 6%, respectivamente, calcule la probabilidad de que una pieza:
 - a) tenga los tres defectos.
 - b) no tenga ningún defecto.
 - c) tenga exactamente un defecto.
 - d) tenga el defecto C sabiendo que presenta al menos uno de otros dos defectos.

2. Imagine que tenemos 3 urnas (U1, U2, U3) con 10 bolas de dos colores (blancas y negras) cada una. En cada una de las urnas hay, respectivamente, 3, 5 y 7 bolas blancas. El experimento consiste en lanzar un dado regular y, en función del valor de dado, elegir una urna de donde sacar una bola. Se observará finalmente el color de la bola elegida. Teniendo en cuenta que si al tirar el dado sale un número entre 2 y 5, ambos inclusive, utilizamos la urna U1 y en caso contrario la urna U2, conteste a las siguientes cuestiones:
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que nos salga una bola negra?
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que hayamos usado la urna U1 si nos ha salido una bola negra?

Referencias.

Aula virtual de Estadística. Universidad de Córdoba (consultado mayo 2011):

Aguilera, M.L. "Lanzamiento de una moneda o de un dado" :

http://www.uco.es/simulaciones_estadisticas/set/MarisaAguilera/MonedaDado/?idioma=es

Borrego, J. "Diagrama de Venn" :

http://www.uco.es/simulaciones_estadisticas/set/JesusBorrego/DiagramadeVenn/?idioma=es

Barrow, R.F. (consultado mayo 2011). "Lanzamiento de dos dados":

<http://www.rfbarrow.btinternet.co.uk/htmasa2/Prob2.htm>

Proyecto Demostración Wofram (consultado mayo 2011):

Brodie, M. "Interactive Venn Diagrams": <http://demonstrations.wolfram.com/InteractiveVennDiagrams/>

Proyecto Descartes (consultado mayo 2011):

Abreu, J. y Oliveró, M. "Teorema de la probabilidad total":

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/probabilidad_condicionada/probabilidad_total_jam.htm

Abreu, J. y Oliveró, M. "Teorema de Bayes":

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/probabilidad_condicionada/probabilidad_bayes_jam.htm

Proyecto Statmedia. Universidad de Barcelona (consultado mayo 2011):

"C1BasicDie ": <http://www.ub.edu/stat/GrupsInnovacio/Statmedia/demo/applets/applets01es.htm>

"Probabilidad. Caso 3: un juego de urnas y bolas":

<http://www.ub.edu/stat/GrupsInnovacio/Statmedia/demo/Statmedia.htm>

Sheepd, M. (consultado mayo 2011). "Venn Diagram applet":

<http://www.teachers.ash.org.au/miKemath/VennDiagramApplet/VennGame.html>

Webster, R. (consultado mayo 2011). "Conditional Probability applet":

<http://www.stat.tamu.edu/~west/applets/Venn1.html>