



UNIVERSIDAD DE MURCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

**CLASIFICACIÓN DE TOROS LLANOS LORENTZIANOS
EN ESPACIOS TRIDIMENSIONALES**

María Amelia León Guzmán

2012

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mis directores, Pablo Mira y José Antonio Pastor, por la confianza que han depositado en mí y su incansable dedicación durante todo este tiempo. Ellos han sabido guiarme a lo largo de las diferentes etapas de este trabajo ofreciéndome siempre un punto de vista adecuado y contagiándome de su optimismo. En definitiva, esta tesis no sería sin ellos.

No puedo olvidarme tampoco de todos aquellos profesores que consiguieron transmitirme su pasión por las matemáticas dándome así el impulso necesario para emprender este camino. Entre ellos, podría destacar a los profesores del área de Geometría y Topología, M^a Ángeles Hernández Cifre, Luis Alías, Ángel Ferrández, Pascual Lucas... quienes en muchas ocasiones me han dado ánimos para perseguir lo que parecía una meta inalcanzable.

Por supuesto, a las personas que me han acompañado durante estos años, mis padres, mi familia –los que están y los que se fueron–, mis amigos, les debo un agradecimiento muy especial por su cariño y apoyo sin los que jamás habría logrado llegar hasta aquí.

Por último, gracias Roberto por haber compartido conmigo cada paso.

A mi familia.

Índice general

Resumen	IX
Introducción	XI
1. Preliminares	1
1.1. Nociones básicas en geometría lorentziana	1
1.1.1. Espacios modelo lorentzianos	1
1.1.2. Superficies temporales en 3-variedades lorentzianas	2
1.1.3. Superficies llanas lorentzianas	4
1.2. El espacio anti-de Sitter \mathbb{H}_1^3	5
1.2.1. El espacio \mathbb{H}_1^3 como grupo de Lie	5
1.2.2. Campos invariantes a lo largo de curvas	10
1.2.3. Fibraciones de Hopf	13
1.3. Cilindros y toros de Hopf	15
2. Representación de superficies llanas lorentzianas en \mathbb{H}_1^3	19
2.1. Inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 . Parámetros característicos	19
2.2. Superficies llanas en \mathbb{H}_1^3 como producto de dos curvas	24
2.3. Algunas propiedades de las superficies llanas en \mathbb{H}_1^3	31
2.3.1. Orientabilidad	31
2.3.2. Operador forma no diagonalizable	34

3. Resultados de clasificación de superficies llanas lorentzianas en \mathbb{H}_1^3	37
3.1. Curvas en \mathbb{H}^2 con singularidades de tipo wave-front	37
3.2. Clasificación de superficies llanas completas en \mathbb{H}_1^3	44
3.3. Problemas propuestas por Dajczer y Nomizu	46
3.4. Clasificación de toros llanos en \mathbb{H}_1^3	51
3.5. Caracterización de los cilindros de Hopf lorentzianos	53
3.6. Construcción de levantamientos asintóticos	55
4. Toros lorentzianos en sumersiones de Killing	59
4.1. Sumersiones de Killing lorentzianas	59
4.2. Curvatura seccional de un plano arbitrario	62
4.3. Una fórmula integral	65
4.4. Unicidad de los toros de Hopf	69
Bibliografía	71

Resumen

Esta memoria aborda el problema de clasificar las inmersiones isométricas del plano de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^2 en ciertas variedades lorentzianas tridimensionales que admiten una estructura de sumersión de Killing, tales como el espacio anti de-Sitter tridimensional \mathbb{H}_1^3 . En particular, estaremos especialmente interesados en la clasificación de los toros llanos lorentzianos inmersos en dichos espacios.

Entre los resultados que incluimos en esta memoria sobre el problema anterior, podemos destacar tres teoremas de clasificación.

El primero de ellos es la clasificación de las inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 . Más concretamente, desarrollaremos un método que permite construir tales inmersiones isométricas a partir de un par de curvas en el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , posiblemente con singularidades de tipo *wave front*, y que cumplen ciertas condiciones de compatibilidad. Y recíprocamente, veremos que toda inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 puede ser recuperada de acuerdo con el proceso anterior. Esta descripción del espacio de inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 nos permite dar diversas aplicaciones de interés, siendo la más notable de ellas la respuesta a varios problemas abiertos de este contexto propuestos por los influyentes matemáticos Marcos Dajczer y Katsumi Nomizu en 1981. Otra aplicación destacada es la demostración de que toda inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 es orientable.

El segundo de nuestros resultados principales es la clasificación de los toros llanos lorentzianos en \mathbb{H}_1^3 . En este sentido, probaremos que el espacio de dicho toros está en correspondencia con los pares de curvas cerradas en \mathbb{H}^2 , posiblemente con singularidades de tipo *wave front*, cuyas funciones curvatura geodésica tienen rangos disjuntos. En particular, nuestro resultado muestra que existe una gran cantidad de toros llanos lorentzianos en \mathbb{H}_1^3 , de los cuales sólo una pequeña parte son los bien conocidos *toros de Hopf* obtenidos al levantar una curva regular en \mathbb{H}^2 a \mathbb{H}_1^3 via la fibración de Hopf lorentziana $h : \mathbb{H}_1^3 \rightarrow \mathbb{H}^2$. Es interesante observar que nuestro método nos permite expresar a estos toros llanos lorentzianos en coordenadas explícitas con respecto al par de curvas de \mathbb{H}^2 que lo generan.

Finalmente, el tercero de nuestros resultados principales expone la clasificación de los toros planos lorentzianos en ciertas variedades tridimensionales lorentzianas \overline{M}^3 para las cuales existe una sumersión $h : \overline{M}^3 \rightarrow M^2$ sobre una superficie riemanniana (M^2, g) , cuyas fibras son órbitas cerradas de un campo de Killing unitario y temporal en \overline{M}^3 . Llamamos a estos espacios *sumersiones de Killing lorentzianas*; entre ellos están el espacio \mathbb{H}_1^3 , junto con ciertos cocientes de \mathbb{L}^3 y algunas variedades homogéneas lorentzianas de curvatura no constante. En estos espacios, el levantamiento $h^{-1}(\gamma)$ de una curva cerrada en M^2 es un toro plano lorentziano, aunque el recíproco no siempre es cierto, como muestran los ejemplos de \mathbb{H}_1^3 estudiado anteriormente, así como los cocientes de \mathbb{L}^3 . Nuestro resultado principal en esta línea es que si \overline{M}^3 tiene curvatura del fibrado τ constante y coeficiente de anisotropía $\kappa + 4\tau^2$ distinto de cero en todo $p \in \overline{M}^3$ (aquí $\kappa(p)$ es la curvatura de M^2 en el punto $h(p)$), entonces todo toro plano lorentziano en \overline{M}^3 es un toro de Hopf $h^{-1}(\gamma)$.

La mayoría de los resultados de esta memoria están contenidos en los siguientes artículos científicos:

- [LMP] M.A. León-Guzmán, P. Mira, J.A. Pastor, The space of Lorentzian flat tori in anti-de Sitter 3-space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **363** (2011), 6549–6573.
- [Leo] M.A. León-Guzmán, Uniqueness of Lorentzian Hopf tori, *Diff. Geom. Appl.* **30** (2012), 42–48.

Introducción

Un problema fundamental en la geometría de subvariedades es la clasificación de las inmersiones isométricas entre espacios de curvatura constante. El caso más estudiado dentro de este problema general es el de superficies inmersas en los espacios modelo riemannianos tridimensionales \mathbb{R}^3 , \mathbb{S}^3 y \mathbb{H}^3 , donde la situación es la siguiente (véase [Spi]):

1. Toda inmersión isométrica de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 es un cilindro generalizado $\gamma \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ sobre una curva plana completa γ (Teorema de Hartman-Nirenberg).
2. No existen inmersiones isométricas de $\mathbb{H}^2(c)$ en \mathbb{R}^3 y \mathbb{S}^3 . Tampoco existen inmersiones isométricas de $\mathbb{H}^2(c)$ en \mathbb{H}^3 con $c < -1$ (Teorema de Hilbert).
3. Toda inmersión isométrica de $\mathbb{S}^2(c)$ en \mathbb{R}^3 , \mathbb{S}^3 o \mathbb{H}^3 es una esfera totalmente umbilical (Teorema de Liebmann). En \mathbb{S}^3 dichas esferas no existen si $0 < c < 1$.
4. Toda inmersión isométrica de \mathbb{R}^2 en \mathbb{H}^3 es una horosfera o un cilindro hiperbólico (Teorema de Volkov-Vladimirova-Sasaki). Por otra parte, existe una enorme familia de inmersiones isométricas de $\mathbb{H}^2(c)$ en \mathbb{H}^3 con $-1 \leq c < 0$; no se conoce una clasificación explícita para ellas.
5. Existe una enorme familia de inmersiones isométricas de \mathbb{R}^2 en \mathbb{S}^3 . Más aún, cualquiera de dichas inmersiones isométricas se puede expresar como el producto (viendo \mathbb{S}^3 como grupo de Lie) de dos curvas regulares de \mathbb{S}^3 que cumplen ciertas condiciones de compatibilidad. Además, el recíproco de esta construcción también se cumple, dando lugar a una descripción satisfactoria del espacio de inmersiones isométricas de \mathbb{R}^2 en \mathbb{S}^3 . (Teorema de Bianchi-Spivak).

Este último resultado es uno de nuestros puntos principales de partida, por lo que vamos a explicarlo con más detalle.

En el siglo XIX L. Bianchi ([Bia]) describió un proceso local para construir superficies llanas, esto es, de curvatura de Gauss $K = 0$, dentro de \mathbb{S}^3 . Para ello consideró a \mathbb{S}^3 dotada de su estructura usual como grupo de Lie, la cual puede ser vista, por ejemplo, como la inducida en $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ al identificar \mathbb{R}^4 con los cuaterniones $\mathcal{H} = \text{span}\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Bianchi probó que, salvo traslaciones, toda superficie llana en \mathbb{S}^3 puede ser vista *localmente* como el producto en \mathbb{S}^3 de dos curvas regulares parametrizadas por el arco $a, b : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^3$, esto es, como

$$f(u, v) = a(u)b(v).$$

Aquí, las curvas a, b pasan por el polo norte de \mathbb{S}^3 y han de tener torsión $\tau = 1$ y $\tau = -1$ en sus puntos regulares, respectivamente. La superficie $f(u, v)$ así construida contiene a dichas curvas como curvas asintóticas. Más aún, el recíproco de este resultado también se cumple, en el sentido de que el producto en \mathbb{S}^3 de dos curvas con torsiones 1 y -1 que cumplan ciertas condiciones de compatibilidad adicionales siempre da lugar a una superficie llana en \mathbb{S}^3 .

Por otra parte, si ambas curvas son cerradas, la superficie resultante es compacta, con la topología de un toro.

El proceso anterior fue extendido por Spivak para el caso de superficies llanas completas en \mathbb{S}^3 . En su libro [Spi], Spivak planteó diversos problemas tales como la clasificación de los toros llanos de \mathbb{S}^3 , o la no existencia de embebimientos isométricos de \mathbb{R}^2 en \mathbb{S}^3 ; este último problema sigue abierto a fecha de hoy.

En 1988 Y. Kitagawa dio respuesta al problema de clasificar los toros llanos de \mathbb{S}^3 . Para ello, Kitagawa proporcionó una caracterización de la propiedad de que una curva en \mathbb{S}^3 tenga torsión 1 en sus puntos regulares: la de que sea un *levantamiento asintótico* via la fibración de Hopf $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ de una curva regular de \mathbb{S}^2 . Usando esa caracterización, Kitagawa demostró que cualquier curva asintótica de un toro llano en \mathbb{S}^3 es periódica, lo cual en última instancia proporciona una descripción del espacio de toros llanos en \mathbb{S}^3 en términos de un par de curvas regulares cerradas en \mathbb{S}^2 que satisfacen ciertas condiciones de compatibilidad. La representación de Kitagawa también describe con más generalidad el espacio de superficies llanas completas con curvatura media acotada en \mathbb{S}^3 .

Por otra parte, y ya en el contexto lorentziano, el problema de clasificar las inmersiones isométricas de una superficie lorentziana de curvatura constante dentro de un espacio modelo tridimensional lorentziano también ha recibido contribuciones destacadas. Si nos restringimos al caso de inmersiones isométricas del plano de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^2 dentro de los espacios modelo lorentzianos, esto es, los espacios de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^3 , de Sitter \mathbb{S}_1^3 y anti de Sitter \mathbb{H}_1^3 , la situación es la siguiente.

1. Las inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{L}^3 fueron clasificadas por L.K Graves en 1979 [Gra]. El teorema de Graves establece que dichas inmersiones son cilindros generalizados sobre curvas planas espaciales o temporales, o bien un tipo especial de inmersiones

llamadas *B-scrolls*, las cuales tienen diversas propiedades interesantes, entre ellas que su operador forma es no diagonalizable.

2. Las immersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{S}_1^3 fueron clasificadas por Dajczer y Nomizu [DaNo]: las únicas son los *cilindros hiperbólicos* (véase también Aledo, Gálvez y Mira [AGM1]).
3. Las immersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 fueron estudiadas por Dajczer y Nomizu en [DaNo] en 1981. Dichos autores establecieron la validez de la aproximación de Bianchi-Spivak en \mathbb{S}^3 para el caso de las superficies llanas temporales en \mathbb{H}_1^3 que cumplan la condición de tener una familia de curvas asintóticas espacial, y la otra temporal. Para ello, utilizaron la expresión de \mathbb{H}_1^3 como el grupo de Lie $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ dotado de una métrica lorentziana bi-invariante.

Es importante observar que los resultados de Dajczer y Nomizu no resuelven el problema de clasificar las immersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 , como los propios autores observan. Una primera dificultad es que no queda claro si las curvas asintóticas de una superficie llana temporal en \mathbb{H}_1^3 tienen carácter causal constante, lo cual es una hipótesis esencial en los argumentos en [DaNo]. Una segunda dificultad es establecer la regularidad de las superficies construidas y, más fundamentalmente, la completitud de la superficie resultante una vez supuesto que las curvas que la generan son completas. De hecho, los autores afirman en [DaNo] que este problema parece mucho más difícil que su contrapartida euclídea, esto es, el problema de la completitud de las superficies llanas de \mathbb{S}^3 . Otra dificultad en el planteamiento de Dajczer y Nomizu es el poco control sobre cómo clasificar las curvas espaciales o temporales de torsión 1 o -1 en \mathbb{H}_1^3 .

A la vista de esta situación, nuestro **primer objetivo** dentro de esta memoria es el de clasificar las immersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 , cerrando por tanto el problema de clasificar las immersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en cualquier espacio modelo lorentziano tridimensional y generalizando sustancialmente los resultados de Dajczer y Nomizu. Para ello, nuestro punto de partida es el de extender la teoría de Kitagawa en \mathbb{S}^3 al caso lorentziano. Es importante observar que esta extensión no es trivial, pues en el contexto lorentziano existen dificultades adicionales de las que hay que hacerse cargo. Una de ellas es que las curvas asintóticas de una superficie llana lorentziana en \mathbb{H}_1^3 no tienen un carácter causal constante. Esto impide, por ejemplo, definir una red de Tschebyshev global sobre la superficie pues dichas curvas no pueden ser parametrizadas por el arco. Notemos que la existencia de esta red de Tschebyshev es uno de los ingredientes principales en el resultado riemanniano. Otra dificultad adicional es que, en el contexto lorentziano, las proyecciones mediante la fibración de Hopf de las curvas asintóticas de una superficie llana lorentziana pueden presentar singularidades.

Para presentar en esta introducción nuestra clasificación de las immersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 , necesitamos introducir algunos conceptos.

Un *wave front* (o simplemente *front*) en \mathbb{H}^2 es una aplicación $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ para la cual existe un normal unitario $\nu : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ tal que $\alpha := (\gamma, \nu) : I \rightarrow TU(\mathbb{H}^2)$ es una inmersión legendriana en el fibrado tangente unitario de \mathbb{H}^2 . De este modo, un front es una curva en \mathbb{H}^2 que puede presentar un cierto tipo de singularidades *admisibles*. Para fronts en \mathbb{H}^2 se puede definir de modo natural una noción de función curvatura geodésica, la cual toma valor infinito en los puntos singulares.

Además, definiremos la *parametrización natural* de un front $\gamma(u)$ en \mathbb{H}^2 como aquella tal que $u/2$ es el parámetro arco de $\alpha(u)$ con respecto a la métrica $\langle \alpha', \alpha' \rangle_{\mathcal{S}} := \langle \gamma', \gamma' \rangle + \langle \nu', \nu' \rangle$.

Es bien conocido que existe un recubridor de dos hojas $\pi : \mathbb{H}_1^3 \rightarrow TU(\mathbb{H}^2)$, de modo que la composición de π con la proyección canónica de $TU(\mathbb{H}^2)$ sobre \mathbb{H}^2 es justamente la fibración de Hopf $h : \mathbb{H}_1^3 \rightarrow \mathbb{H}^2$ de \mathbb{H}_1^3 . Si γ es un front en \mathbb{H}^2 procedente de una curva legendriana α en $TU(\mathbb{H}^2)$, llamamos a cada una de las curvas en $\pi^{-1}(\alpha)$ un *levantamiento asintótico* de γ .

Con esto, la clasificación de las inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 puede ser enunciada como sigue. En los Teoremas 2.6, 2.6 y 3.12 veremos una formulación alternativa de este resultado, donde precisaremos las condiciones de compatibilidad exactas que se indican aquí.

Sea $f : \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ una inmersión isométrica que pasa por $1 \in \mathbb{H}_1^3$. Entonces existen dos fronts $\gamma_1(u), \gamma_2(v) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$, parametrizados mediante su parámetro natural definido previamente, cuyos rangos de sus funciones curvatura geodésica son distintos (es decir $k_1(\mathbb{R}) \cap k_2(\mathbb{R}) = \emptyset$), tales que:

1. *Si $a_1(u), a_2(v)$ son los levantamientos asintóticos de $\gamma_1(u), \gamma_2(v)$ que pasan por $1 \in \mathbb{H}_1^3$, entonces a_1 y $\overline{a_2}$ son las curvas asintóticas de f que pasan por dicho punto.*
2. *La superficie puede recuperarse como el producto en \mathbb{H}_1^3 de dichas curvas, esto es,*

$$f(u, v) = a_1(u) \cdot \overline{a_2(v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}_1^3. \quad (0.1)$$

Y recíprocamente, dados dos fronts $\gamma_1(u), \gamma_2(v) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ parametrizados naturalmente, con rangos de sus curvaturas geodésicas disjuntos, y que cumplen ciertas condiciones técnicas de compatibilidad (véase el Teorema 3.12), la función dada por (0.1) en términos de los levantamientos asintóticos a_1, a_2 de γ_1, γ_2 es una superficie llana lorentziana completa en \mathbb{H}_1^3 (y por tanto, tras reparametrización, una inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3).

Vemos así que el espacio de las inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 se puede parametrizar en términos de los pares de curvas en \mathbb{H}^2 , posiblemente con singularidades, que cumplen unas ciertas condiciones técnicas de compatibilidad que detallaremos llegado el momento.

Como comentamos anteriormente, en su trabajo [DaNo], Dajczer y Nomizu plantearon diversos problemas abiertos sobre la estructura y forma de las inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2

en \mathbb{H}_1^3 . Nuestro resultado de clasificación nos permite dar respuesta a todas las cuestiones de Dajczer y Nomizu, estableciendo lo siguiente:

- Toda inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 se puede recuperar como producto de las dos curvas asintóticas que pasan por un punto de la superficie. No obstante, dichas curvas asintóticas no tienen carácter causal constante, con lo que la construcción de Dajczer-Nomizu no produce todas las inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 .
- Las superficies construidas por Dajczer-Nomizu son siempre regulares, esto es, son en efecto inmersiones.
- No obstante, dichas superficies no siempre son completas, como mostramos con ejemplos explícitos.

Del mismo modo, nuestro teorema de clasificación de las inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 nos permite deducir una característica topológica de dichas inmersiones isométricas.

Toda inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 es orientable.

La versión de este resultado en el caso de superficies llanas de \mathbb{S}^3 fue demostrada por Kitagawa [Kit1]. Nuestra prueba es una adaptación de una demostración alternativa de este hecho en \mathbb{S}^3 por Dadok y Sha [DaSh]. Conviene observar que la hipótesis de completitud es esencial en el resultado anterior. En efecto, es posible crear superficies llanas lorentzianas en \mathbb{H}_1^3 con la topología de una banda de Möbius.

Un hecho importante en el contexto en que estamos trabajando es que, de entre todas las inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 , hay algunas que son recubridores universales de toros llanos lorentzianos en \mathbb{H}_1^3 . Esto es, hay algunas con imagen compacta. Los ejemplos básicos en este sentido son los *toros de Hopf lorentzianos*, dados por $h^{-1}(\gamma) \subset \mathbb{H}_1^3$ donde $h : \mathbb{H}_1^3 \rightarrow \mathbb{H}^2$ es la *fibración de Hopf* de \mathbb{H}_1^3 y $\gamma \subset \mathbb{H}^2$ es una curva regular; véase [BFLM1, BFLM2] por ejemplo.

La existencia de toros llanos lorentzianos en \mathbb{H}_1^3 es un fenómeno muy destacable, pues en el contexto lorentziano hay restricciones muy severas para la existencia de superficies compactas lorentzianas inmersas en una 3-variedad ambiente lorentziana. En efecto, se tiene:

1. Cualquier superficie compacta orientable que admita una métrica lorentziana ha de ser homeomorfa a un toro (por el teorema de Poincaré-Hopf, véase por ejemplo [ONe2]). Este es un resultado intrínseco, esto es, no hay ninguna referencia a una variedad ambiente donde la superficie está contenida.
2. Si en una 3-variedad lorentziana existe una superficie lorentziana compacta inmersa, entonces dicha 3-variedad no puede ser *cronológica*, esto es, debe admitir curvas temporales cerradas. Este hecho se debe a que cualquier superficie compacta lorentziana

debe tener curvas temporales cerradas, véase [MiSa, Theorem 3.6]. En particular, no existen superficies compactas lorentzianas en el recubridor universal de \mathbb{H}_1^3 , el cual es el único espacio tridimensional lorentziano completo y simplemente conexo de curvatura constante -1 .

Estas restricciones muestran que, de hecho, el estudio de los toros llanos lorentzianos de \mathbb{H}_1^3 puede ser visto como una de las situaciones más sencillas desde un punto de vista geométrico donde existen superficies compactas lorentzianas inmersas en una 3-variedad ambiente lorentziana.

Nuestro **segundo objetivo** en esta memoria es clasificar los toros llanos lorentzianos de \mathbb{H}_1^3 . La descripción del espacio de dichos toros se obtendrá como consecuencia de nuestra clasificación previa de todas las inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 , y establece lo siguiente:

Sean $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dos fronts cerrados en \mathbb{H}^2 tales que los rangos de sus funciones curvatura geodésica son disjuntos, esto es, $k_1(\mathbb{S}^1) \cap k_2(\mathbb{S}^1) = \emptyset$.

Sea Σ la superficie llana lorentziana en \mathbb{H}_1^3 generada a partir de γ_1 y γ_2 mediante nuestro teorema de clasificación previo de las inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 . Entonces Σ tiene imagen compacta, y es por tanto un toro llano lorentziano en \mathbb{H}_1^3 .

Recíprocamente, todo toro llano lorentziano en \mathbb{H}_1^3 puede construirse por medio del proceso anterior.

En particular, el resultado muestra que el espacio de toros llanos lorentzianos en \mathbb{H}_1^3 puede ponerse en correspondencia con los pares de fronts cerrados en \mathbb{H}^2 con rangos de curvatura disjuntos; además, esta última condición establece que al menos uno de los fronts ha de estar libre de singularidades, es decir, ha de ser una curva regular cerrada en \mathbb{H}^2 .

La clasificación anterior constituye una extensión al contexto lorentziano del teorema de Kitagawa [Kit1] sobre la clasificación de los toros llanos riemannianos en \mathbb{S}^3 . No obstante, hay diversas diferencias técnicas tanto en la demostración como en el teorema final de clasificación.

Es interesante resaltar dos hechos significativos sobre el teorema anterior.

Uno de ellos es que podemos determinar con exactitud cuándo uno de los toros llanos lorentzianos dados por el teorema de clasificación es de hecho un toro de Hopf. Esto ocurre cuando una de las dos curvas que lo generan tiene curvatura constante. En particular, vemos que la familia de toros de Hopf lorentzianos no es más que una pequeña subfamilia dentro del espacio de todos los toros llanos lorentzianos de \mathbb{H}_1^3 .

Otro hecho destacable es que podemos establecer un proceso explícito para construir el levantamiento asintótico en \mathbb{H}_1^3 de una curva dada en \mathbb{H}^2 . En particular, esto proporciona una descripción en coordenadas explícitas de cualquier toro llano lorentziano de \mathbb{H}_1^3 , una vez

dadas las coordenadas de las curvas de \mathbb{H}^2 que lo generan de acuerdo con el teorema de clasificación expuesto anteriormente.

En este sentido, a lo largo de esta memoria presentaremos diversos dibujos de superficies llanas lorentzianas en \mathbb{H}_1^3 . Para ello, expondremos un modelo de \mathbb{H}_1^3 como un toro sólido de revolución tridimensional, cuyo borde es el *borde ideal* de \mathbb{H}_1^3 , y de modo que las rotaciones en el modelo corresponden a traslaciones en \mathbb{H}_1^3 a lo largo de las fibras de la fibración de Hopf sobre \mathbb{H}^2 .

Anteriormente hemos explicado cómo la existencia de toros llanos lorentzianos en una 3-variedad lorentziana \overline{M}^3 impone restricciones sobre la geometría de dicha variedad. No obstante, existen ejemplos muy naturales de esta situación, más allá de los toros llanos lorentzianos de \mathbb{H}_1^3 . Los ejemplos más sencillos de este tipo de toros son los toros producto $\gamma \times \mathbb{S}^1$ en un espacio producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{S}^1$, donde M^2 es una superficie riemanniana, $\gamma \subset M^2$ es una curva regular cerrada y el factor \mathbb{S}^1 es temporal.

Esta construcción se puede extender al caso en que el espacio ambiente \overline{M}^3 es una *sumersión de Killing lorentziana*. Este tipo de variedades tridimensionales lorentzianas están definidas por la existencia de una sumersión $\pi : \overline{M}^3 \rightarrow M^2$ sobre una superficie riemanniana (M^2, g) de modo que se cumplen las siguientes dos propiedades:

1. El campo vertical unitario ξ asociado a π es un campo de Killing temporal unitario en \overline{M}^3 .
2. Las fibras de π son geodésicas temporales cerradas.

Casos particulares de sumersiones de Killing lorentzianas son los espacios producto lorentzianos $M^2 \times \mathbb{S}^1$ comentados anteriormente, los espacios anti de Sitter $\mathbb{H}_1^3(r)$, y más generalmente una amplia familia de espacios homogéneos lorentzianos tridimensionales.

Nuestro interés en este tipo de espacios proviene del siguiente hecho básico: *si $\gamma \subset M^2$ es una curva regular, entonces $\pi^{-1}(\gamma)$ es un toro llano lorentziano en la sumersión de Killing lorentziana \overline{M}^3* . Llamaremos a estas superficies *toros de Hopf lorentzianos*.

Surge por tanto la pregunta de si todo toro llano lorentziano en una sumersión de Killing es de hecho un toro de Hopf. Nuestros resultados en \mathbb{H}_1^3 nos muestran que la respuesta a esta pregunta es negativa en el espacio anti de Sitter; además puede verse fácilmente que también es negativa en el caso $\overline{M}^3 = \mathbb{L}^3$.

El **tercer objetivo** de esta memoria es probar la unicidad de los toros de Hopf dentro de una amplia familia de sumersiones de Killing lorentzianas. Para ello definimos, dada una sumersión de Killing lorentziana \overline{M}^3 con sumersión asociada $\pi : \overline{M}^3 \rightarrow M^2$, dos importantes funciones geométricas $\kappa, \tau \in C^\infty(\overline{M}^3)$. La *curvatura de la base* κ en $p \in \overline{M}^3$ se define como la curvatura de M^2 en el punto $\pi(p)$. La *curvatura del fibrado* τ está definida por la identidad

$$\overline{\nabla}_X \xi = \tau(X \times \xi), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\overline{M}^3),$$

siendo ξ el campo de Killing temporal vertical de \overline{M}^3 . Cuando $\tau = 0$, la sumersión de Killing es de hecho un espacio producto $M^2 \times \mathbb{S}^1$, mientras que cuando $\kappa + 4\tau^2$ es idénticamente cero y κ, τ son constantes, \overline{M}^3 es isométrica a un espacio anti de Sitter (si $\kappa \neq 0$) o a un cociente de \mathbb{L}^3 (si $\kappa = 0$).

En estas condiciones, nuestro resultado principal establece lo siguiente:

Sea \overline{M}^3 una sumersión de Killing lorentziana con curvatura de la base κ y curvatura del fibrado τ . Supongamos que τ es constante y que $\kappa + 4\tau^2$ nunca se anula en \overline{M}^3 . Entonces todo toro llano lorentziano en \overline{M}^3 es un toro de Hopf.

Este teorema es una adaptación al caso lorentziano de un resultado de F. Torralbo y F. Urbano [ToUr] en el contexto de superficies en espacios riemannianos homogéneos tridimensionales. Más concretamente, Torralbo y Urbano probaron que cualquier toro llano en una esfera de Berger tridimensional, o bien en el grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R})$ dotado de una métrica riemanniana invariante izquierda con grupo de isometrías de dimensión 4 es de hecho un toro de Hopf. Para ello, obtuvieron previamente una fórmula integral para superficies compactas en estos espacios por medio de la identidad de Bochner. Nuestro resultado es una adaptación de estos resultados al contexto de sumersiones de Killing lorentzianas, no necesariamente homogéneas.

Observemos finalmente que, en el teorema anterior, es necesario imponer alguna condición sobre el signo de la función $\kappa + 4\tau^2$ para obtener la unicidad de los toros de Hopf. Recordemos en este sentido que si $\kappa + 4\tau^2$ es idénticamente cero, \overline{M}^3 es isométrica a un espacio anti de Sitter o a un cociente $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ de \mathbb{L}^3 , y en ninguno de estos espacios se verifica la unicidad de los toros de Hopf. Por otro lado, la hipótesis de que τ sea constante es una hipótesis técnica requerida en la prueba, pero que no elimina ninguno de los ejemplos más interesantes de sumersiones de Killing lorentzianas (espacios producto $M^2 \times \mathbb{S}^1$ y sumersiones lorentzianas homogéneas).

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. Nociones básicas en geometría lorentziana

En esta primera sección introduciremos brevemente algunos de los conceptos básicos y notaciones que iremos usando a lo largo de la memoria.

1.1.1. Espacios modelo lorentzianos

Denotaremos por \mathbb{R}_s^n al espacio pseudo-euclídeo de dimensión n e índice s , obtenido al considerar en \mathbb{R}^n la métrica semi-riemanniana

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = - \sum_{i=1}^s dx_i^2 + \sum_{i=s+1}^n dx_i^2,$$

donde (x_1, \dots, x_n) denotarán coordenadas canónicas en \mathbb{R}^n . Un vector $v \in \mathbb{R}_s^n$ se dirá:

- *espacial* si $\langle v, v \rangle > 0$ o $v = 0$,
- *temporal* si $\langle v, v \rangle < 0$,
- *luminoso o nulo* si $\langle v, v \rangle = 0$ con $v \neq 0$.

Del mismo modo, un subespacio vectorial $S \subset \mathbb{R}_s^n$ se dirá *espacial* (resp. *temporal*) si $\langle \cdot, \cdot \rangle|_S$ es definida positiva (resp. no degenerada y de índice uno).

Los espacios modelo lorentzianos de curvatura constante se pueden ver como hipercuádricas de \mathbb{R}_s^n . Así, tenemos:

1. El *espacio de Lorentz-Minkowski*, de curvatura cero,

$$\mathbb{L}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_1^{n+1} : x_{n+1} = 0\} \equiv \mathbb{R}_1^n.$$

2. El *espacio de de Sitter* $\mathbb{S}_1^n(r)$, de curvatura constante $1/r^2$,

$$\mathbb{S}_1^n(r) = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_1^{n+1} : \langle x, x \rangle = r^2\}.$$

Dicho espacio es difeomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$. Denotaremos $\mathbb{S}_1^n = \mathbb{S}_1^n(1)$.

3. El *espacio anti-de Sitter*, $\mathbb{H}_1^n(r)$, de curvatura constante $-1/r^2$,

$$\mathbb{H}_1^n(r) = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_2^{n+1} : \langle x, x \rangle = -r^2\}.$$

El espacio anti de-Sitter es difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, y admite geodésicas temporales cerradas. Usaremos la notación $\mathbb{H}_1^n = \mathbb{H}_1^n(1)$.

Otras dos hipercuádricas de \mathbb{R}_1^{n+1} que aparecerán a lo largo de la memoria son el *espacio hiperbólico*

$$\mathbb{H}^n = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_1^{n+1} : \langle x, x \rangle = -1, x_1 > 0\},$$

y el *cono de luz positivo*

$$\Lambda^n = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_1^{n+1} : \langle x, x \rangle = 0, x_1 > 0\}.$$

El espacio hiperbólico es el espacio modelo riemanniano de curvatura constante -1 , mientras que el cono de luz tiene una métrica degenerada en todos sus puntos; en particular, no contiene vectores temporales.

1.1.2. Superficies temporales en 3-variedades lorentzianas

Sea \overline{M}^3 una 3-variedad dotada de una métrica lorentziana $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y sea $f : M^2 \rightarrow \overline{M}^3$ una inmersión. Entonces el pullback $f^*(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ determina en cada plano tangente $T_p M$ una forma bilineal simétrica. Diremos que f es una inmersión *espacial* (resp. *temporal* o *lorentziana*) si $f^*(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ es definida positiva (resp. no degenerada y de índice uno) en todo $p \in M^2$. Si este es el caso, M^2 junto con el tensor pullback $f^*(\langle \cdot, \cdot \rangle)$, al cual seguiremos denotando por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, constituye una superficie riemanniana (resp. lorentziana), y f es una inmersión isométrica con respecto a dicha métrica.

Existen diferencias muy significativas entre el comportamiento de una superficie espacial y una superficie temporal dentro de una variedad lorentziana tridimensional. El ejemplo más claro de estas diferencias se da en el caso compacto, como pone de manifiesto la siguiente consecuencia clásica del teorema de Poincaré-Hopf:

Teorema 1.1. *Toda superficie compacta lorentziana orientable es homeomorfa a un toro.*

Por contra, no existen restricciones en el tipo topológico de una superficie espacial compacta en \overline{M}^3 ; por ejemplo, cualquier superficie riemanniana compacta (M^2, g) es una superficie espacial en el espacio producto lorentziano $M^2 \times \mathbb{L}^1$.

El teorema anterior es un teorema intrínseco, donde la superficie lorentziana no está a priori inmersa en una 3-variedad lorentziana ambiente \overline{M}^3 . Si este fuese el caso, existen a su vez fuertes restricciones sobre la variedad ambiente (véase por ejemplo [MiSa]):

Teorema 1.2. *Sea M^2 una superficie compacta lorentziana inmersa en una 3-variedad lorentziana \overline{M}^3 . Entonces \overline{M}^3 admite geodésicas temporales cerradas.*

En particular, no existen superficies lorentzianas compactas en los espacios modelo \mathbb{L}^3 y \mathbb{S}_1^3 (aunque sí en \mathbb{H}_1^3 , como veremos más adelante).

Otra diferencia destacable entre las superficies espaciales y temporales es la orientabilidad. Supongamos que la variedad ambiente \overline{M}^3 es temporalmente orientable, esto es, existe un campo temporal globalmente definido sobre ella. Entonces toda superficie espacial en \overline{M}^3 admite un campo normal unitario global. Así, si además \overline{M}^3 es orientable, la superficie también lo será. Por contra, \overline{M}^3 puede perfectamente admitir superficies temporales no orientables. Por ejemplo, más adelante veremos que existen bandas de Möbius temporales en \mathbb{H}_1^3 .

Finalmente, una tercera diferencia que podemos destacar entre las clases de superficies espaciales y temporales se refiere al operador forma de la inmersión. En el caso espacial el operador forma es, sobre cada plano tangente, un endomorfismo autoadjunto sobre un espacio euclídeo; por tanto es diagonalizable. Por contra, muchas superficies temporales inmersas en una 3-variedad lorentziana poseen operador forma no diagonalizable.

En esta memoria centraremos nuestra atención principalmente en el estudio de las superficies temporales de una variedad lorentziana \overline{M}^3 .

Sea pues $f : M^2 \rightarrow \overline{M}^3$ una superficie lorentziana en \overline{M}^3 . Entonces podemos elegir localmente alrededor de cualquier $p \in M^2$ un campo normal diferenciable η tal que $\langle \eta, \eta \rangle = 1$, y definir asociado a él la *segunda forma fundamental II*, dada por

$$II(X, Y) = \langle A_\eta X, Y \rangle \quad \text{para } X, Y \in \mathfrak{X}(M^2),$$

donde A_η es el operador forma asociado a η , dado por

$$A_\eta(X) = -\overline{\nabla}_X \eta$$

siendo $\overline{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita de \overline{M}^3 . En estas condiciones, la *ecuación de Gauss* asociada a f establece que

$$K = \overline{K} + \frac{\det(II)}{\det(I)}$$

para todo punto $p \in M^2$. Aquí, K denota la curvatura de Gauss de la superficie lorentziana M^2 en p , I la primera forma fundamental de M^2 en p , y \overline{K} es la curvatura seccional de \overline{M}^3

en $f(p)$ restringida al plano temporal $df_p(T_pM)$. De aquí podemos ver, por ejemplo, que toda superficie lorentziana en \mathbb{H}_1^3 con curvatura de Gauss $K > -1$ tiene $\det(II) < 0$, y por tanto II determina una nueva métrica lorentziana sobre M^2 .

En el caso en que \overline{M}^3 es uno de los espacios modelo lorentzianos \mathbb{L}^3 , \mathbb{S}_1^3 o \mathbb{H}_1^3 , la ecuación de Gauss es una de las dos ecuaciones de integrabilidad básicas de una superficie temporal en \overline{M}^3 . La otra condición de integrabilidad para una superficie temporal $f : M^2 \rightarrow \overline{M}^3$ con operador forma $A_\eta = A$, donde \overline{M}^3 tiene curvatura constante, es la *ecuación de Codazzi*

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X,$$

donde $X, Y \in \mathfrak{X}(M^2)$.

1.1.3. Superficies llanas lorentzianas

Sea $(M^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una superficie lorentziana *llana*, esto es, de curvatura cero. En ese caso M^2 es localmente isométrica al plano de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^2 , y por tanto alrededor de cada $p \in M^2$ existen parámetros locales (x, y) tales que

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = -dx^2 + dy^2. \quad (1.1)$$

De manera más general, si M^2 es simplemente conexa, es posible encontrar una inmersión isométrica $\Phi : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^2$, de modo que si (x, y) son parámetros canónicos en \mathbb{L}^2 , la expresión (1.1) anterior sigue siendo cierta para todo punto de M^2 (véase [AGM1]).

Podemos observar del mismo modo que la métrica llana lorentziana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ puede ser expresada a su vez localmente como $\langle \cdot, \cdot \rangle = 2du dv$ para parámetros locales (u, v) adecuados. En este caso ∂_u y ∂_v apuntan en las dos direcciones nulas independientes de la superficie en cada punto.

Una superficie lorentziana es *completa* si es geodésicamente completa, es decir, si toda geodésica maximal suya está definida sobre todo \mathbb{R} . En el caso lorentziano, la noción de completitud se comporta en muchos aspectos de un modo radicalmente distinto al concepto riemanniano análogo. No obstante, en el caso de una superficie llana, esta situación queda totalmente controlada por el siguiente resultado clásico:

Teorema 1.3. *Una superficie llana lorentziana es completa si y sólo si su recubridor universal es globalmente isométrico a \mathbb{L}^2 .*

En particular, sobre cualquier superficie llana lorentziana completa simplemente conexa existen parámetros (x, y) *globales*, esto es, definidos en todo \mathbb{R}^2 , tales que su métrica se escribe como (1.1). Además, cualquier superficie llana lorentziana completa es homeomorfa a un plano, un cilindro, un toro, una banda de Möbius o una botella de Klein.

Observemos finalmente que, por Gauss-Bonnet y el Teorema 1.1, las únicas superficies lorentzianas compactas y orientables de curvatura constante son los toros llanos lorentzianos.

1.2. El espacio anti-de Sitter \mathbb{H}_1^3

Siguiendo la notación introducida en la sección anterior, llamaremos \mathbb{R}_2^4 al espacio vectorial \mathbb{R}^4 dotado de la métrica semi-riemanniana

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = -dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

La hipersuperficie dada por $\mathbb{H}_1^3 = \{x \in \mathbb{R}_2^4 : \langle x, x \rangle = -1\}$ constituye un modelo del espacio anti-de Sitter de dimensión 3 y, de este modo, la métrica inducida en \mathbb{H}_1^3 es una métrica lorentziana de curvatura constante -1 . Desde un punto de vista topológico, el espacio \mathbb{H}_1^3 es un cilindro $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$; su recubridor universal, al que denotaremos por $\widetilde{\mathbb{H}_1^3}$, es el único espacio forma lorentziano (simplemente conexo) de curvatura constante -1 . Otro hecho destacable de \mathbb{H}_1^3 es que las curvas de la forma $(a \cos t, a \sin t, b, c)$, $t \in \mathbb{R}$, con $-a^2 + b^2 + c^2 = -1$, son geodésicas temporales cerradas de \mathbb{H}_1^3 . El recubridor universal $\widetilde{\mathbb{H}_1^3}$ no admite este tipo de curvas.

1.2.1. El espacio \mathbb{H}_1^3 como grupo de Lie

Una propiedad importante de \mathbb{H}_1^3 es que admite una estructura de grupo de Lie para la cual su métrica lorentziana es invariante con respecto a las traslaciones tanto a derecha como a izquierda. A continuación explicaremos varios modos de hacer explícita esta propiedad.

Una estructura pseudo-cuaterniónica

Veamos ahora que es posible identificar \mathbb{R}_2^4 con cierto espacio de pseudo-cuaterniones. De este modo, podremos inducir sobre \mathbb{H}_1^3 una estructura de grupo de Lie que hará que su métrica sea bi-invariante, esto es, invariante mediante multiplicaciones tanto por la derecha como por la izquierda por elementos de \mathbb{H}_1^3 . Para ello utilizamos la construcción dada en [BFLM2] aunque con algunos cambios de notación.

Empecemos considerando las aplicaciones $\mathbb{R}_2^4 \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ dadas por:

$$\begin{aligned} i(x_0, x_1, x_2, x_3) &= (x_1, -x_0, x_3, -x_2), \\ j(x_0, x_1, x_2, x_3) &= (x_2, -x_3, x_0, -x_1), \\ k(x_0, x_1, x_2, x_3) &= (x_3, x_2, x_1, x_0), \end{aligned}$$

junto con la aplicación $1 = \text{Id}_{\mathbb{R}_2^4}$. Es fácil comprobar que,

$$\begin{aligned} i^2 &= i \circ i = -1, & ji &= i \circ j = -k, & ki &= i \circ k = j, \\ ij &= j \circ i = k, & j^2 &= j \circ j = 1, & kj &= j \circ k = i, \\ ik &= k \circ i = -j, & jk &= k \circ j = -i, & k^2 &= k \circ k = 1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Así, sobre el espacio vectorial

$$\mathcal{F} = \text{span}\{1, i, j, k\} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

podemos definir una estructura de producto simplemente extendiendo por linealidad (1.2) y teniendo en cuenta que la aplicación 1 actúa como elemento neutro. Consideramos ahora el isomorfismo $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ dado por

$$\varphi(1) = (1, 0, 0, 0), \quad \varphi(i) = (0, 1, 0, 0), \quad \varphi(j) = (0, 0, 1, 0) \quad \text{y} \quad \varphi(k) = (0, 0, 0, 1).$$

Si dotamos a \mathcal{F} de la métrica $\varphi^*(\langle \cdot, \cdot \rangle)$, φ será de hecho una isometría. De este modo, identificaremos de ahora en adelante \mathbb{R}_2^4 con el grupo de Lie \mathcal{F} . Por comodidad utilizaremos simplemente $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para referirnos a la métrica $\varphi^*(\langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Es importante señalar que, aunque estamos utilizando las letras i, j, k , como suele hacerse al hablar de cuaterniones, nuestra estructura de producto (dada por (1.2)) es diferente; por este motivo hablamos de una estructura pseudo-cuaterniónica. Asociados a ella, tenemos los siguientes conceptos:

Definición 1.4. Dado $z = a + bi + cj + dk$, un elemento de \mathbb{R}_2^4 , definimos su parte real como $\text{Re}(z) = a$. Diremos que z es real si $\text{Re}(z) = z$ (es decir, si $b = c = d = 0$). Diremos que z es imaginario puro si $\text{Re}(z) = 0$.

Definición 1.5. Dado $z = a + bi + cj + dk$, un elemento de \mathbb{R}_2^4 , definimos su conjugado como $\bar{z} = a - bi - cj - dk$.

Se puede comprobar fácilmente que dados $z_1, z_2 \in \mathbb{R}_2^4$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_2 \bar{z}_1$. Además, podemos establecer las siguientes propiedades:

Proposición 1.6. Para $z, z_1, z_2, \eta \in \mathbb{R}_2^4$ se cumplen:

- i) $\langle z, z \rangle = -z\bar{z} = -\bar{z}z = \langle \bar{z}, \bar{z} \rangle$.
- ii) $\langle z_1, z_2 \rangle = -\text{Re}(z_1 \bar{z}_2) = -\text{Re}(\bar{z}_1 z_2)$ (así, $\langle z_1, z_2 \rangle = \langle \bar{z}_1, \bar{z}_2 \rangle$).
- iii) $z \in \mathbb{H}_1^3$ si, y si sólo si, $z^{-1} = \bar{z}$.
- iv) $\langle \eta z_1, \eta z_2 \rangle = \langle z_1 \eta, z_2 \eta \rangle = -\langle \eta, \eta \rangle \langle z_1, z_2 \rangle$.
- v) En particular, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es bi-invariante por multiplicaciones por elementos de \mathbb{H}_1^3 , es decir, si $\eta \in \mathbb{H}_1^3$, entonces $\langle \eta z_1, \eta z_2 \rangle = \langle z_1 \eta, z_2 \eta \rangle = \langle z_1, z_2 \rangle$.

Demostración: Para comprobar i) y ii) simplemente tenemos que aplicar nuestra definición de producto dada por (1.2) para calcular el valor de $z_1 \bar{z}_2$ para elementos arbitrarios de \mathbb{R}_2^4 , $z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$, $z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$. Una vez que i) está establecida, iii) es simplemente la definición de \mathbb{H}_1^3 .

Para demostrar *iv)*, debido a la identidad de polarización, sólo tenemos que considerar productos de la forma $\langle \eta z, \eta z \rangle$ y $\langle z \eta, z \eta \rangle$. En este caso, aplicando *i)* y el hecho de que al ser $z\bar{z}$ y $\bar{z}z$ reales conmutan con cualquier elemento de \mathbb{R}_2^4 , obtenemos:

$$\begin{aligned}\langle \eta z, \eta z \rangle &= -\eta z \bar{\eta} z = -\eta z \bar{z} \bar{\eta} = -\eta \bar{\eta} z \bar{z} \\ &= -\langle \eta, \eta \rangle \langle z, z \rangle. \\ \langle z \eta, z \eta \rangle &= -\bar{z} \bar{\eta} z \eta = -\bar{\eta} \bar{z} z \eta = -\bar{\eta} \eta \bar{z} z \\ &= -\langle \eta, \eta \rangle \langle z, z \rangle.\end{aligned}$$

Finalmente, *v)* se obtiene aplicando *iv)* en el caso particular $\eta \in \mathbb{H}_1^3$. \square

La propiedad *iii)* nos permite escribir las identidades:

$$\mathbb{H}_1^3 = \{z \in \mathbb{R}_2^4 : \langle z, z \rangle = -1\} = \{z \in \mathbb{R}_2^4 : z\bar{z} = 1\} = \{z \in \mathbb{R}_2^4 : z^{-1} = \bar{z}\},$$

mostrando además que \mathbb{H}_1^3 es un subgrupo de Lie de \mathbb{R}_2^4 con su estructura pseudo-cuaterniónica. Por otro lado, *v)* nos dice que la estructura de grupo de Lie inducida en \mathbb{H}_1^3 a través de este producto pseudo-cuaterniónico de \mathbb{R}_2^4 es precisamente su estructura “canónica”, es decir, aquella que hace que las traslaciones a derecha e izquierda sean isometrías.

Podemos observar que $1 \in \mathbb{H}_1^3$ y que los vectores $\{i, j, k\}$ forman una base ortonormal de $T_1\mathbb{H}_1^3$, es decir,

$$\begin{aligned}\langle i, i \rangle &= -1, & \langle j, j \rangle &= \langle k, k \rangle = 1, \\ \langle i, j \rangle &= \langle i, k \rangle = \langle j, k \rangle = 0.\end{aligned}$$

Definición 1.7. Sea X un campo de vectores sobre \mathbb{H}_1^3 , diremos que X es invariante por la izquierda (resp. por la derecha) si, para cualquier $z \in \mathbb{H}_1^3$, se tiene

$$X(z) = zX(1) \quad (\text{resp. } X(z) = X(1)z).$$

Así, es obvio que la base $\{i, j, k\}$ de $T_1\mathbb{H}_1^3$ se puede extender a un referencial ortonormal global de campos invariantes por la izquierda en \mathbb{H}_1^3 tomando

$$E_1(z) = zi, \quad E_2(z) = zj, \quad E_3(z) = zk.$$

En $T_1\mathbb{H}_1^3$ podemos definir el corchete de Lie de dos vectores como $[u, v] = uv - vu$. Esta operación también se puede aplicar a campos de vectores invariantes por la izquierda sobre \mathbb{H}_1^3 considerando $[U, V](z) = z[z^{-1}U(z), z^{-1}V(z)]$. Así, obtenemos

$$[E_1, E_2] = 2E_3, \quad [E_2, E_3] = -2E_1, \quad [E_3, E_1] = 2E_2.$$

Ahora, el hecho de que la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sea bi-invariante nos dice (véase [Spi] Theorem 7.43) que, para su conexión de Levi-Civita asociada ∇ ,

$$\nabla_{E_n} E_m = \frac{1}{2}[E_n, E_m] \quad n, m = 1, 2, 3. \quad (1.3)$$

Dado que estamos viendo \mathbb{H}_1^3 como una hipersuperficie de \mathbb{R}_2^4 , hay una forma natural de definir un producto vectorial en cada espacio tangente $T_z\mathbb{H}_1^3$. Para cada par de vectores $u, v \in T_z\mathbb{H}_1^3$, $u \times v$ es el único vector de $T_z\mathbb{H}_1^3$ que cumple

$$\langle u \times v, w \rangle = \det(z, u, v, w) \quad \text{para todo } w \in T_z\mathbb{H}_1^3.$$

En particular, tenemos también

$$E_n \times E_m = \frac{1}{2}[E_n, E_m] \quad n, m = 1, 2, 3. \quad (1.4)$$

Los espacios de matrices $SL(2, \mathbb{R})$ y $SU(1, 1)$

Otra manera de dotar a \mathbb{H}_1^3 de una estructura de grupo de Lie es identificar esta variedad con los espacios de matrices $SL(2, \mathbb{R})$ o $SU(1, 1)$. Este es, de hecho, el enfoque más usual en la literatura (lo podemos encontrar por ejemplo en [DaNo]). Vamos a ver a continuación que ambas construcciones dan lugar a la misma estructura de grupo de Lie.

Empezamos considerando el espacio vectorial $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ de las matrices reales 2×2 con su estructura producto usual. En este espacio podemos definir un producto escalar dado por

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2}(\text{Traza}(AB) - \text{Traza}(A)\text{Traza}(B)).$$

Así, en particular se tiene que

$$\langle A, A \rangle = -\text{Det}(A). \quad (1.5)$$

El espacio $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ se identifica con el conjunto de pseudo-cuaterniones $\mathcal{F} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, y por lo tanto con \mathbb{R}_2^4 , a través de los isomorfismos

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathcal{F} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \\ a + bi + cj + dk &\longmapsto \begin{pmatrix} a + c & -b + d \\ b + d & a - c \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : \quad \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{F} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \frac{a+d}{2} + \frac{c-b}{2}i + \frac{a-d}{2}j + \frac{b+c}{2}k. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Es fácil comprobar que estos dos isomorfismos conservan tanto la estructura de grupo como el producto escalar.

Si ahora consideramos el subgrupo $SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) : \text{Det}(A) = 1\}$, (1.5) nos dice que este subgrupo se identifica con el conjunto de pseudocuaterniones de norma uno y, en consecuencia, con el espacio anti-de Sitter \mathbb{H}_1^3 .

Considerando un isomorfismo muy parecido al dado por (1.6) podemos ver que \mathbb{R}_2^4 se puede identificar también con el grupo de matrices 2×2 complejas de la forma

$$\left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\},$$

dotadas de su producto matricial usual. Para ello, basta con tomar

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R}_2^4 &\longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\} \\ a + bi + cj + dk &\longmapsto \begin{pmatrix} a + b\sqrt{-1} & c + d\sqrt{-1} \\ c - d\sqrt{-1} & a - b\sqrt{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

En particular, φ pone en correspondencia el subgrupo \mathbb{H}_1^3 con

$$\mathrm{SU}(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \text{ con } |z|^2 - |w|^2 = 1 \right\}.$$

Otro modelo: el toro sólido de revolución

Finalmente, también podremos pensar en el espacio \mathbb{H}_1^3 como un toro sólido de revolución dentro del espacio usual \mathbb{R}^3 . Este modelo nos será especialmente útil a la hora de representar gráficamente ejemplos de superficies llanas lorentzianas inmersas en \mathbb{H}_1^3 .

Consideramos la variedad tridimensional dada por

$$\mathbb{T}^3 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(4 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 < 1 \right\}.$$

Los espacios $\mathbb{H}_1^3 = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{R}_2^4 : a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 1\}$ y \mathbb{T}^3 se identifican a través del difeomorfismo:

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{H}_1^3 &\longrightarrow \mathbb{T}^3 \\ a + bi + cj + dk &\longmapsto (x(a, b, c, d), y(a, b, c, d), z(a, b, c, d)) \end{aligned}$$

dados por

$$\begin{aligned} x(a, b, c, d) &= \left(4 + \frac{ac - bd}{a^2 + b^2}\right) \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \\ y(a, b, c, d) &= \left(4 + \frac{ac - bd}{a^2 + b^2}\right) \frac{2ab}{a^2 + b^2}, \\ z(a, b, c, d) &= \frac{ad + bc}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Así, dotamos a \mathbb{T}^3 de la métrica que hace que ψ sea una isometría. Además, en este modelo las rotaciones alrededor del eje z corresponden a traslaciones por la derecha en \mathbb{H}_1^3 mediante

elementos de la forma $\cos \theta 1 + \text{sen } \theta i \in \mathbb{H}_1^3$. En particular, dichas rotaciones corresponden a isometrías de \mathbb{H}_1^3 y sus órbitas son geodésicas temporales cerradas.

La superficie del toro de revolución, esto es, el borde $\partial\mathbb{T}^3$, se interpreta como el *borde ideal* de \mathbb{H}_1^3 .

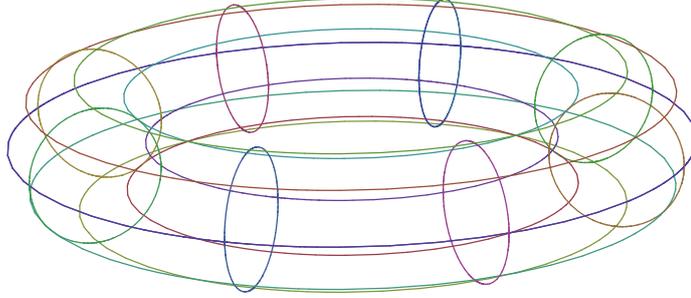


Figura 1.1: El espacio \mathbb{H}_1^3 como toro sólido de revolución.

1.2.2. Campos invariantes a lo largo de curvas

Definición 1.8. Sea $a : I \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ una curva regular con $a(0) = 1$ y X un campo de vectores a lo largo de a . Diremos que X es invariante por la izquierda (resp. por la derecha) a lo largo de a si, para todo $t \in I$, $X(t) = a(t)X(0)$ (resp. $X(t) = X(0)a(t)$).

Evidentemente, dada una curva $a : I \rightarrow \mathbb{H}_1^3$, los campos $\{E_1(a(t)), E_2(a(t)), E_3(a(t))\}$ constituyen un referencial ortonormal de campos invariantes por la izquierda a lo largo de a .

Vamos a obtener a continuación una caracterización de los campos invariantes a lo largo de una curva en \mathbb{H}_1^3 . Este resultado es análogo al que se puede dar para curvas en \mathbb{S}^3 (véase [Kit1, Lemma 2.1] y [Spi]).

Lema 1.9. Sea $a : I \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ una curva regular con $a(0) = 1$ y X un campo de vectores a lo largo de a . Entonces:

- i) X es invariante por la izquierda a lo largo de a si, y sólo si, $\nabla_{a'} X = a' \times X$.
- ii) X es invariante por la derecha a lo largo de a si, y sólo si, $\nabla_{a'} X = X \times a'$.

Demostración: Podemos escribir

$$a'(t) = \sum_{n=1}^3 a_n(t) E_n(a(t)), \quad X(t) = \sum_{m=1}^3 X_m(t) E_m(a(t)).$$

De este modo, X será invariante por la izquierda a lo largo de a si y sólo si las funciones $X_m(t)$ son constantes. Pero, usando (1.3) y (1.4) obtenemos:

$$\begin{aligned}\nabla_{a'}X(t) &= \sum_{m=1}^3 X'_m(t)E_m(a(t)) + \sum_{m=1}^3 X_m(t)\nabla_{a'}E_m(a(t)) \\ &= \sum_{m=1}^3 X'_m(t)E_m(a(t)) + \sum_{n,m=1}^3 a_n(t)X_m(t)\nabla_{E_n}E_m(a(t)) \\ &= \sum_{m=1}^3 X'_m(t)E_m(a(t)) + \sum_{n,m=1}^3 a_n(t)X_m(t)E_n(a(t)) \times E_m(a(t)) \\ &= \sum_{m=1}^3 X'_m(t)E_m(a(t)) + a'(t) \times X(t).\end{aligned}$$

y, por tanto, se tiene i).

Ahora, para probar ii) consideramos la curva $\bar{a} : I \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ y el campo de vectores \bar{X} definidos como $\bar{a}(t) = \overline{a(t)}$ y $\bar{X}(t) = \overline{X(t)}$. Se puede comprobar fácilmente que

$$\nabla_{\bar{a}'}\bar{X} = \overline{\nabla_{a'}X}, \quad \bar{a}' \times \bar{X} = \overline{a' \times X}.$$

Así, aplicando i) deducimos que \bar{X} es invariante por la izquierda a lo largo de \bar{a} si y sólo si

$$\nabla_{\bar{a}'}\bar{X} = \bar{X} \times \bar{a}'.$$

Pero \bar{X} es invariante por la izquierda a lo largo de \bar{a} si y sólo si X es invariante por la derecha a lo largo de a y, en consecuencia, tenemos ii). \square

Ahora vamos a centrar nuestra atención en curvas regulares $a : I \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ que sean en todo punto temporales o en todo punto espaciales. Podremos suponer entonces que están parametrizadas por la longitud de arco, es decir, que se tiene $\langle a', a' \rangle = -1$ o $\langle a', a' \rangle = 1$.

Definición 1.10. Diremos que $a : I \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ es una curva de Frenet temporal si admite un referencial $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ a lo largo de ella, con $\vec{t} = a'$ y $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$, de forma que

$$\langle \vec{t}, \vec{t} \rangle = -1, \quad \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = 1, \quad \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 1,$$

y además se cumplen las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \nabla_{a'}\vec{t} &= \mathbf{k}\vec{n} \\ \nabla_{a'}\vec{n} &= \mathbf{k}\vec{t} + \mathbf{t}\vec{b} \\ \nabla_{a'}\vec{b} &= -\mathbf{t}\vec{n} \end{cases} \quad \text{para ciertas } \mathbf{k}, \mathbf{t} \in C^\infty(I).$$

Definición 1.11. Diremos que $a : I \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ es una curva de Frenet espacial si admite un referencial $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ a lo largo de ella, con $\vec{t} = a'$ y $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$, de forma que

$$\langle \vec{t}, \vec{t} \rangle = 1, \quad \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = -1, \quad \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 1,$$

y además se cumplen las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \nabla_{a'} \vec{t} = \mathbf{k} \vec{n} \\ \nabla_{a'} \vec{n} = \mathbf{k} \vec{t} - \mathbf{t} \vec{b} \\ \nabla_{a'} \vec{b} = -\mathbf{t} \vec{n} \end{cases} \quad \text{para ciertas } \mathbf{k}, \mathbf{t} \in C^\infty(I).$$

Al igual que en la teoría clásica de curvas en el espacio, a las funciones \mathbf{k} y \mathbf{t} las llamaremos, respectivamente, la curvatura y la torsión de a con respecto al referencial $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$.

Tanto en los resultados sobre construcción de superficies llanas en \mathbb{S}^3 [Bia, Spi] como en el trabajo de Dajczer-Nomizu [DaNo] sobre superficies llanas en \mathbb{H}_1^3 , tienen gran importancia las curvas con torsión $\mathbf{t} = \pm 1$. Siguiendo una de las ideas que introdujo Kitagawa para el caso de superficies llanas en la esfera [Kit1], vamos a ver que para curvas de Frenet temporales o espaciales en \mathbb{H}_1^3 es posible dar una formulación alternativa de la condición $\mathbf{t} = \pm 1$.

Proposición 1.12. *Sea $a : I \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ una curva de Frenet temporal o espacial con $a(0) = 1$ y $\mathbf{k} \neq 0$ en todo punto. Entonces, son equivalentes:*

- i) a tiene torsión 1 (resp. -1).*
- ii) Existe $\xi_0 \in \mathbb{H}_1^3$ imaginario puro y unitario tal que $\langle a', a\xi_0 \rangle = 0$ (resp. $\langle a', \xi_0 a \rangle = 0$).*

Demostración: Veamos la prueba correspondiente a la condición de torsión 1, la otra se puede hacer razonando de modo análogo.

i) \Rightarrow ii) El hecho de que sea $\mathbf{t} = 1$ significa que $\nabla_{a'} \vec{b} = a' \times \vec{b}$. En esta situación, el Lema 1.9 nos dice que el campo \vec{b} es invariante por la izquierda a lo largo de a , es decir, que para todo $t \in I$, $\vec{b}(t) = a(t)\vec{b}(0)$. Entonces, teniendo en cuenta que por definición $\langle a'(t), \vec{b}(t) \rangle = 0$, tomando $\xi_0 = \vec{b}(0)$, concluimos que $\langle a'(t), a(t)\xi_0 \rangle = 0$.

ii) \Rightarrow i) La condición $\langle a', a\xi_0 \rangle = 0$ significa que el campo $a\xi_0$ es ortogonal a a' . Por otro lado, si derivamos dicha expresión deducimos que

$$\langle a'', a\xi_0 \rangle = -\langle a', a'\xi_0 \rangle.$$

Teniendo ahora en cuenta que ξ_0 es imaginario puro y unitario, y usando los apartados *iv)* y *v)* de la Proposición 1.6, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle a, a\xi_0 \rangle &= \langle 1, \xi_0 \rangle = 0, \\ \langle a'', a\xi_0 \rangle &= -\langle a', a'\xi_0 \rangle = \langle a', a' \rangle \langle 1, \xi_0 \rangle = 0, \\ \langle a\xi_0, a\xi_0 \rangle &= \langle \xi_0, \xi_0 \rangle = 1. \end{aligned}$$

En definitiva, $a\xi_0$ es un campo unitario y ortogonal a $\{a, a', a''\}$, por lo tanto

$$\vec{b}(t) = \pm a(t)\xi_0.$$

En particular, sabemos que $\vec{b}(0) = \pm \xi_0$ y que $\vec{b}(t)$ es invariante por la izquierda a lo largo de a . Así, el Lema 1.9 nos dice que $\nabla_{a'} \vec{b} = a' \times \vec{b}$, lo que por definición significa que $\mathbf{t} = 1$. \square

La principal ventaja de esta nueva condición es que tiene sentido para una curva cualquiera $a : I \rightarrow \mathbb{H}_1^3$, con independencia de su carácter causal y de la posibilidad de encontrar un referencial de Frenet asociado a ella.

Veamos además que es posible simplificar un poco esta condición, de modo que sólo sea necesario considerar una de las dos posibilidades:

Proposición 1.13. *Sea $a : I \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ una curva con $a(0) = 1$, y $\xi_0 \in \mathbb{R}_2^4$ imaginario puro y unitario. Entonces, $\langle a', a\xi_0 \rangle = 0$ si, y sólo si $\langle \bar{a}', \xi_0 \bar{a} \rangle = 0$.*

Demostración: Por ser ξ_0 imaginario puro, sabemos que $\bar{\xi}_0 = -\xi_0$. Si utilizamos ii) de la Proposición 1.6, obtenemos

$$\langle a', a\xi_0 \rangle = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\bar{a}' a \xi_0) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\bar{a}' a \bar{\xi}_0) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\bar{a}' \overline{\xi_0 a}) = 0 \Leftrightarrow \langle \bar{a}', \xi_0 \bar{a} \rangle = 0. \quad \square$$

Más adelante veremos que las curvas que cumplen $\langle a', a\xi_0 \rangle = 0$ para cierto ξ_0 serán las piezas clave para construir superficies llanas lorentzianas en el espacio anti-de Sitter.

1.2.3. Fibraciones de Hopf

Una herramienta muy utilizada en el estudio de las superficies llanas en \mathbb{S}^3 es la clásica fibración de Hopf $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Vamos a introducir ahora una serie de aplicaciones que jugarán para nosotros un papel similar a ésta. La idea de extender la fibración de Hopf a \mathbb{H}_1^3 ya se planteó en [BFLM2]; nosotros consideraremos unas aplicaciones ligeramente diferentes a las que allí se definen, pero que cumplirán las mismas propiedades fundamentales.

Para cada $\rho \in \mathbb{R}_2^4$ distinto de cero e imaginario puro definimos la aplicación $h_\rho : \mathbb{H}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ dada por:

$$h_\rho(z) = z\rho\bar{z} \quad \forall z \in \mathbb{H}_1^3.$$

Proposición 1.14. *Sean $\rho, \eta \in \mathbb{R}_2^4$ distintos de cero e imaginarios puros. Entonces, para cualquier $z \in \mathbb{H}_1^3$ se cumplen:*

- i) $\langle h_\rho(z), 1 \rangle = 0$.
- ii) $\langle h_\rho(z), h_\eta(z) \rangle = \langle \rho, \eta \rangle$ y, en particular, $\langle h_\rho(z), h_\rho(z) \rangle = \langle \rho, \rho \rangle$.
- iii) Si $\langle \rho, \rho \rangle \leq 0$, entonces $\langle \rho, i \rangle$ y $\langle h_\rho(z), i \rangle$ tienen el mismo signo.

Demostración: i) y ii) son consecuencia inmediata de la bi-invariancia de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ por multiplicaciones por elementos de \mathbb{H}_1^3 . Para probar iii) definimos $\varphi(z) = \langle h_\rho(z), i \rangle$. Claramente φ es una función continua sobre \mathbb{H}_1^3 con $\varphi(1) = \langle \rho, i \rangle$. Si φ cambiara de signo, podríamos encontrar un $z_0 \in \mathbb{H}_1^3$ con $\varphi(z_0) = 0$. La condición $\varphi(z_0) = 0$ significa que $h_\rho(z_0)$ no tiene componente en i , pero esto es imposible ya que, por i) y ii), sabemos que $h_\rho(z_0)$ es imaginario puro y que $\langle h_\rho(z_0), h_\rho(z_0) \rangle = \langle \rho, \rho \rangle \leq 0$. \square

Una vez establecida la Proposición 1.14, podemos distinguir tres tipos de aplicaciones h_ρ atendiendo a sus imágenes:

$$\begin{aligned} h_+ : \mathbb{H}_1^3 &\longrightarrow \mathbb{S}_1^2(r) && \text{si } \langle \rho, \rho \rangle = r^2, \\ h_- : \mathbb{H}_1^3 &\longrightarrow (\mathbb{H}^2(r))^\pm && \text{si } \langle \rho, \rho \rangle = -r^2 \text{ y } \langle \rho, i \rangle \leq 0, \\ h_0 : \mathbb{H}_1^3 &\longrightarrow (\Lambda^2)^\pm && \text{si } \langle \rho, \rho \rangle = 0 \text{ y } \langle \rho, i \rangle \leq 0, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_1^2(r) &= \{z \in \mathbb{R}_2^4 : \langle z, 1 \rangle = 0, \langle z, z \rangle = r^2\}, \\ (\mathbb{H}^2(r))^\pm &= \{z \in \mathbb{R}_2^4 : \langle z, 1 \rangle = 0, \langle z, z \rangle = -r^2, \langle z, i \rangle \leq 0\}, \\ (\Lambda^2)^\pm &= \{z \in \mathbb{R}_2^4 : \langle z, 1 \rangle = 0, \langle z, z \rangle = 0, \langle z, i \rangle \leq 0\}. \end{aligned}$$

Las aplicaciones h_ρ son todas sumersiones sobre su correspondiente imagen y, dado que su definición es similar a la de la fibración de Hopf clásica, utilizaremos también el término *fibraciones de Hopf* para referirnos a ellas.

Prestaremos especial atención a las fibraciones h_ρ con $\langle \rho, \rho \rangle = 1$, $\langle \rho, \rho \rangle = -1$ o $\langle \rho, \rho \rangle = 0$. En estos casos denotaremos simplemente como \mathbb{S}_1^2 , $(\mathbb{H}^2)^\pm$ o $(\Lambda^2)^\pm$ a sus imágenes. Además, cuando no dé lugar a confusión, omitiremos también la referencia a la componente conexas, utilizando solamente \mathbb{H}^2 o Λ^2 .

Proposición 1.15. *Sea $\rho \in \mathbb{R}_2^4$ imaginario puro con $\langle \rho, \rho \rangle = 1$, $\langle \rho, \rho \rangle = -1$ o $\langle \rho, \rho \rangle = 0$. Entonces, para $z_1, z_2 \in \mathbb{H}_1^3$, tenemos:*

$$h_\rho(z_1) = h_\rho(z_2) \iff z_2 = \pm z_1 e^{t\rho}$$

para algún $t \in \mathbb{R}$, donde

$$\begin{aligned} e^{t\rho} &:= \cosh(t)1 + \sinh(t)\rho && \text{si } \langle \rho, \rho \rangle = 1, \\ e^{t\rho} &:= \cos(t)1 + \sin(t)\rho && \text{si } \langle \rho, \rho \rangle = -1, \\ e^{t\rho} &:= 1 + t\rho && \text{si } \langle \rho, \rho \rangle = 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Demostración: En primer lugar, si $z_1, z_2 \in \mathbb{H}_1^3$ cumplen $h_\rho(z_1) = h_\rho(z_2)$ podemos comprobar que $h_\rho(\bar{z}_1 z_2) = \rho$. En otras palabras, z_2 se podrá escribir como

$$z_2 = z_1 z \text{ para cierto } z \in \mathbb{H}_1^3 \text{ con } h_\rho(z) = \rho.$$

Así, todo se reduce a encontrar los elementos $z \in \mathbb{H}_1^3$ que cumplen $h_\rho(z) = \rho$. Para empezar, tenemos

$$h_\rho(z) = \rho \iff z\rho\bar{z} = \rho \iff z\rho = \rho z.$$

Ahora bien, si analizamos la estructura de producto dada por (1.2), observamos que los únicos elementos de \mathbb{R}_2^4 que conmutan con ρ (imaginario puro) son los de la forma $z = a + b\rho$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Por otro lado, el hecho de que $z \in \mathbb{H}_1^3$ nos dice que debe ser

$$-a^2 + b^2\langle \rho, \rho \rangle = -1$$

y, por tanto, concluimos que $z = \pm e^{t\rho}$ para $e^{t\rho}$ dado según (1.9). \square

Notemos que en la proposición anterior, si $\langle \rho, \rho \rangle = -1$, las fibras $h_\rho^{-1}(q)$, $q \in \mathbb{H}^2$ son curvas temporales periódicas y, por tanto homeomorfas a \mathbb{S}^1 . Además son geodésicas de \mathbb{H}_1^3 . Si $\langle \rho, \rho \rangle = 1$ (resp. $\langle \rho, \rho \rangle = 0$) las fibras son geodésicas espaciales (resp. nulas) de \mathbb{H}_1^3 .

1.3. Cilindros y toros de Hopf

Las fibraciones de Hopf que acabamos de definir nos permiten, tal y como se muestra en [BFLM2], construir los ejemplos más básicos de superficies llanas en el espacio anti-de Sitter.

Proposición 1.16. *Sea $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ (resp. \mathbb{H}^2, Λ^2) una curva regular, espacial o temporal, y sea $\rho \in \mathbb{R}_2^4$ imaginario puro no nulo con $\langle \rho, \rho \rangle = 1$ (resp. $\langle \rho, \rho \rangle = -1, \langle \rho, \rho \rangle = 0$). Entonces $M_\rho(\sigma) = h_\rho^{-1}(\sigma)$ es una superficie llana que recibe el nombre de cilindro de Hopf.*

Demostración: Éste es un resultado conocido en los casos $\langle \rho, \rho \rangle = 1$ y $\langle \rho, \rho \rangle = -1$ (véase [BFLM2]). Vamos a ver, pues, la prueba para el caso $\langle \rho, \rho \rangle = 0$.

Sea $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Lambda^2$ una curva regular espacial (en Λ^2 no existen curvas temporales) y sea $a : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ una curva regular tal que $h_\rho(a(s)) = \sigma(s)$ para todo $s \in I$. Entonces, por la Proposición 1.15, podemos parametrizar $M_\rho(\sigma)$ como

$$f(s, t) = a(s)(1 + t\rho).$$

Así, teniendo en cuenta que $\langle \rho, \rho \rangle = 0$ y usando *iv)* y *v)* de la Proposición 1.6, podemos escribir su primera forma fundamental como

$$I = \langle a', a' \rangle ds^2 + 2\langle \bar{a}a', \rho \rangle ds dt. \quad (1.10)$$

Por otro lado, el hecho de que $h_\rho(a) = \sigma$, nos dice que

$$\begin{aligned} \langle \sigma', \sigma' \rangle &= \langle a'\rho\bar{a} + a\rho\bar{a}', a'\rho\bar{a} + a\rho\bar{a}' \rangle \\ &= \langle a'\rho\bar{a}, a'\rho\bar{a} \rangle + 2\langle a'\rho\bar{a}, a\rho\bar{a}' \rangle + \langle a\rho\bar{a}', a\rho\bar{a}' \rangle. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Aplicando de nuevo *iv)* y *v)* de la Proposición 1.6, deducimos que se anulan los términos primero y tercero de (1.11) y podemos escribir

$$\langle \sigma', \sigma' \rangle = 2\langle (\bar{a}a')\rho, \rho(\bar{a}a') \rangle.$$

Consideramos ahora una base de $T_1\mathbb{H}_1^3$ de la forma $\{\rho, \rho^*, \eta\}$ donde

$$\langle \rho, \rho \rangle = \langle \rho^*, \rho^* \rangle = 0, \quad \langle \rho, \rho^* \rangle = 1, \quad \langle \eta, \eta \rangle = 1, \quad \langle \eta, \rho \rangle = \langle \eta, \rho^* \rangle = 0. \quad (1.12)$$

Entonces,

$$\bar{a}a' = \lambda_1\rho + \lambda_2\rho^* + \lambda_3\eta, \quad \text{para ciertas } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathcal{C}^\infty(I). \quad (1.13)$$

Con esta notación, es fácil ver que

$$\begin{aligned}\langle \sigma', \sigma' \rangle &= 2\langle \lambda_1 \rho \rho + \lambda_2 \rho^* \rho + \lambda_3 \eta \rho, -\lambda_1 \rho \rho - \lambda_2 \rho \rho^* - \lambda_3 \rho \eta \rangle \\ &= -2(\lambda_2^2 \langle \rho^* \rho, \rho \rho^* \rangle + \lambda_2 \lambda_3 \langle \rho^* \rho, \rho \eta \rangle + \lambda_2 \lambda_3 \langle \eta \rho, \rho \rho^* \rangle + \lambda_3^2 \langle \eta \rho, \rho \eta \rangle).\end{aligned}\quad (1.14)$$

Nos planteamos ahora averiguar cuáles son las expresiones de los productos $\rho \rho^*$, $\rho^* \rho$, $\rho \eta$ y $\eta \rho$ en términos de la base de $\mathbb{R}_2^4 \{1, \rho, \rho^*, \eta\}$. Las condiciones $\langle \rho, \rho \rangle = \langle \rho^*, \rho^* \rangle = 0$ nos aseguran que $\rho \rho^*$ y $\rho^* \rho$ no tienen parte en ρ ni en ρ^* mientras que de $\langle \rho, 1 \rangle = \langle \eta, 1 \rangle = 0$ y $\langle \rho, \rho \rangle = 0$ deducimos que $\rho \eta$ y $\eta \rho$ sólo tienen parte en ρ . Con esto, la expresión (1.14) queda reducida a

$$\langle \sigma', \sigma' \rangle = -2\lambda_2^2 \langle \rho^* \rho, \rho \rho^* \rangle. \quad (1.15)$$

Como por hipótesis σ es una curva espacial regular, (1.15) nos dice que $\lambda_2(s)$ es distinta de cero para todo $s \in I$. Pero, a partir de (1.12) y (1.13) obtenemos que

$$\langle \bar{a}a', \rho \rangle = \lambda_2.$$

El hecho de que esta función nunca se anule nos permite reparametrizar la curva a de forma que sea $\langle \bar{a}a', \rho \rangle \equiv 1$. De este modo, (1.10) se puede escribir como

$$I = \phi(s)ds^2 + 2dsdt, \quad \text{con } \phi(s) = \langle a'(s), a'(s) \rangle.$$

Finalmente, si hacemos el cambio de variable

$$\begin{cases} u = s, \\ v = t + \frac{1}{2}\Phi(s), \end{cases} \quad \text{donde } \Phi(s) \text{ es una primitiva de } \phi(s),$$

la expresión de la primera forma fundamental de $M_\rho(\sigma)$ será

$$I = 2dudv,$$

lo que nos permite concluir que es una superficie llana (lorentziana). \square

Los cilindros de Hopf $M_\rho(\sigma)$ con $\langle \rho, \rho \rangle = -1$ o $\langle \rho, \rho \rangle = 0$ son siempre lorentzianos, mientras que aquellos con $\langle \rho, \rho \rangle = 1$ pueden ser lorentzianos o riemannianos dependiendo del carácter causal de la curva σ .

Por otro lado, como ya hemos visto, si $\langle \rho, \rho \rangle = -1$, las fibras de h_ρ son curvas temporales periódicas homeomorfas a \mathbb{S}^1 . En este caso, si partimos de una curva σ cerrada en \mathbb{H}^2 , el cilindro de Hopf $M_\rho(\sigma)$ será compacto con la topología de un toro. Diremos entonces que $M_\rho(\sigma)$ es un *toro de Hopf lorentziano*.

Ejemplos:

Utilizando el modelo de \mathbb{H}_1^3 como toro de revolución podemos representar gráficamente algunos ejemplos de toros y cilindros de Hopf como muestran las Figuras 1.2, 1.3, 1.4 y 1.5. En los dos últimos casos, se ha señalado en rojo el borde asintótico de dichas superficies.

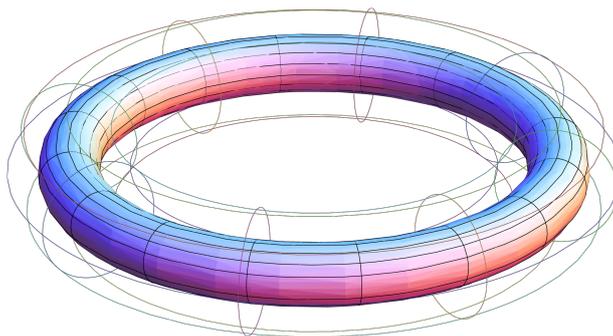


Figura 1.2: Toro de Hopf obtenido como levantamiento de una circunferencia en \mathbb{H}^2 mediante la fibración h_i .

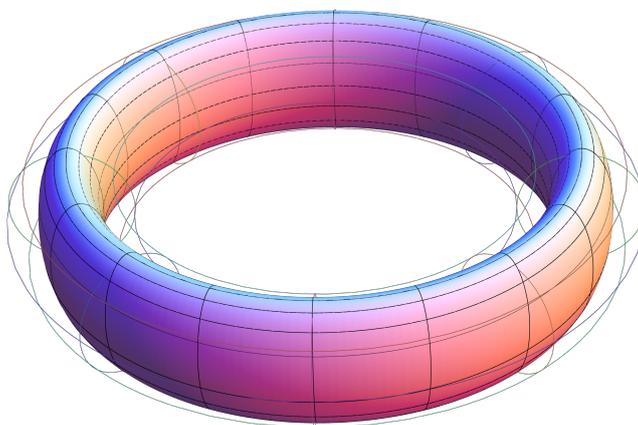


Figura 1.3: Toro de Hopf obtenido como levantamiento de una elipse en \mathbb{H}^2 mediante la fibración h_i .

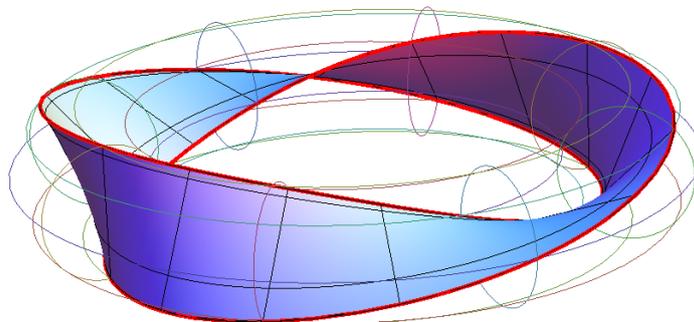


Figura 1.4: Cilindro de Hopf obtenido como levantamiento de una circunferencia en \mathbb{S}_1^2 mediante la fibración h_j . Su borde asintótico está compuesto por dos curvas de Jordan disjuntas en el borde ideal de \mathbb{H}_1^3 .

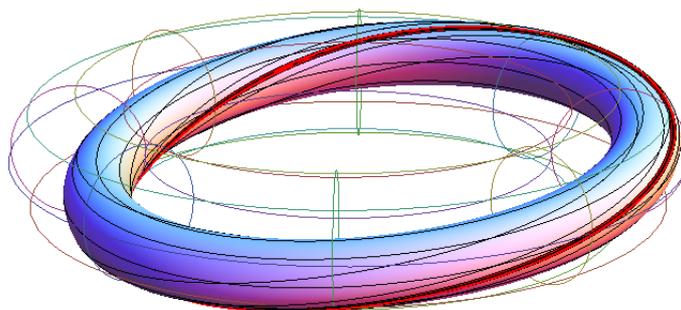


Figura 1.5: Cilindro de Hopf obtenido como levantamiento de una circunferencia en Λ^2 mediante la fibración h_{i+j} . Su borde asintótico es una curva de Jordan en el borde ideal de \mathbb{H}_1^3 .

Representación de superficies llanas lorentzianas en \mathbb{H}_1^3

2.1. Inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 . Parámetros característicos

Vamos a abordar ahora el estudio de las inmersiones isométricas del plano lorentziano \mathbb{L}^2 al espacio anti-de Sitter \mathbb{H}_1^3 . Aquí \mathbb{L}^2 representa el espacio vectorial \mathbb{R}^2 dotado de la métrica lorentziana ds^2 cuya expresión en coordenadas canónicas (x, y) es $ds^2 = -dx^2 + dy^2$. Es importante señalar que la mayoría de los resultados que se exponen a continuación son válidos también para superficies llanas lorentzianas en \mathbb{H}_1^3 que sean simplemente conexas, aunque no necesariamente completas (véase la Observación 2.4).

Empezamos considerando una inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 , escrita como $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ con respecto a coordenadas (x, y) canónicas como antes. Llamamos $N(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}_2^3 := \{z \in \mathbb{R}_2^4 : \langle z, z \rangle = 1\}$ al campo normal unitario de la inmersión f , elegido de modo que $\{f, f_x, f_y, N\}$ formen una base ortonormal positivamente orientada de \mathbb{R}_2^4 . En esta situación, la primera y segunda forma fundamental de la inmersión vienen dadas por

$$\begin{cases} I &= \langle df, df \rangle = -dx^2 + dy^2, \\ II &= -\langle df, dN \rangle = adx^2 + 2bdxdy + cdy^2, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $a := -\langle f_x, N_x \rangle$, $b := -\langle f_x, N_y \rangle$ y $c := -\langle f_y, N_y \rangle$ cumplen las ecuaciones de Gauss-Codazzi

$$a_y = b_x, \quad c_x = b_y, \quad ac - b^2 = -1.$$

Entonces, existirá cierta $\phi(x, y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, que sea solución de la ecuación de Monge-Ampère hiperbólica

$$\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2 = -1,$$

con $a = \phi_{xx}$, $b = \phi_{xy}$ y $c = \phi_{yy}$. Es decir, tendremos

$$II = \phi_{xx}dx^2 + 2\phi_{xy}dxdy + \phi_{yy}dy^2, \quad \phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2 = -1. \quad (2.2)$$

Esto nos dice que, asociada a f , podemos encontrar una inmersión isométrica $\tilde{f}(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$ del plano Euclídeo en la esfera tridimensional \mathbb{S}^3 , cuyas primera y segunda forma fundamental vienen dadas por

$$\begin{cases} \tilde{I} &= dx^2 + dy^2, \\ II &= \phi_{xx}dx^2 + 2\phi_{xy}dxdy + \phi_{yy}dy^2. \end{cases} \quad (2.3)$$

Este hecho es simplemente consecuencia de que dos formas cuadráticas (\tilde{I}, II) como las de (2.3) cumplen las ecuaciones de Gauss-Codazzi para superficies en \mathbb{S}^3 . Esta correspondencia ya fue observada, aunque con una formulación diferente, por Dajczer y Nomizu en [DaNo].

Es importante señalar que la correspondencia que acabamos de describir no es *geométrica*, en el sentido de que depende de la elección de las coordenadas (x, y) en \mathbb{L}^2 . En otras palabras, si partimos de coordenadas lorentzianas globales diferentes, (x, y) y (x', y') , que difieren únicamente en una isometría de \mathbb{L}^2 , las superficies llanas en \mathbb{S}^3 asociadas a ellas serán, en general, no congruentes.

Ahora, como \tilde{f} es una superficie llana completa en \mathbb{S}^3 , sabemos (véase por ejemplo [Spi]) que podemos encontrar *coordenadas de Tchebysheff* (u, v) globalmente definidas sobre ella. Es decir, podemos parametrizar la superficie como $\tilde{f}(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$ de forma que

$$\begin{cases} \tilde{I} &= du^2 + 2\cos\omega dudv + dv^2, \\ II &= 2\sin\omega dudv, \end{cases} \quad (2.4)$$

donde $\omega(u, v) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ verifica $0 < \omega(u, v) < \pi$ y $\omega_{uv} = 0$. De la expresión de II en (2.4) se desprende que las curvas coordenadas de esta parametrización son curvas asintóticas de la inmersión \tilde{f} .

Veamos ahora cuál es la fórmula explícita del difeomorfismo global de \mathbb{R}^2 dado por el cambio de coordenadas $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$. Comparando las expresiones de \tilde{I} en (2.3) y (2.4) deducimos que

$$\begin{cases} x_u^2 + y_u^2 &= 1, \\ x_u x_v + y_u y_v &= \cos\omega(u, v), \\ x_v^2 + y_v^2 &= 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Cualquier solución de (2.5) será de la forma

$$\begin{aligned}x_u &= \cos\omega_1, & y_u &= \operatorname{sen}\omega_1, \\x_v &= \cos\omega_2, & y_v &= -\operatorname{sen}\omega_2,\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde las $\omega_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ verifican $\omega_1 + \omega_2 = \omega$ (estas funciones están unívocamente determinadas salvo cambios del tipo $\omega_1 \mapsto \omega_1 + 2k\pi$, $\omega_2 \mapsto \omega_2 - 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$). Teniendo en cuenta que $(x_u)_v = (x_v)_u$ y $(y_u)_v = (y_v)_u$ obtenemos

$$\begin{aligned}- (\omega_1)_v \operatorname{sen} \omega_1 &= - (\omega_2)_u \operatorname{sen} \omega_2, \\- (\omega_1)_v \cos \omega_1 &= (\omega_2)_u \cos \omega_2.\end{aligned}$$

Es decir, bien $(\omega_1)_v = (\omega_2)_u = 0$ o bien $\operatorname{sen}(\omega_1 + \omega_2) = 0$, pero esto último no es posible puesto que teníamos que $\omega(u, v) \in (0, \pi)$. Así, la función $\omega(u, v)$ que aparecía en (2.4) se puede escribir como

$$\omega(u, v) = \omega_1(u) + \omega_2(v), \quad \text{con } \omega_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}).\tag{2.7}$$

De este modo, llegamos a la expresión de las coordenadas (x, y) en términos de (u, v)

$$\begin{cases}x(u, v) = \int \cos\omega_1 du + \int \cos\omega_2 dv + c_1, \\y(u, v) = \int \operatorname{sen}\omega_1 du - \int \operatorname{sen}\omega_2 dv + c_2,\end{cases}\tag{2.8}$$

con c_1 y c_2 constantes de integración que podemos suponer nulas salvo una traslación en el plano (x, y) . En particular, la aplicación dada por (2.8) será un difeomorfismo global siempre que partamos de una superficie llana completa en \mathbb{S}^3 .

Observación 2.1. *Es importante señalar que la aplicación $(x(u, v), y(u, v))$ dada por (2.8) será un difeomorfismo global de \mathbb{R}^2 exactamente cuando la métrica riemanniana*

$$\tilde{I} = du^2 + 2 \cos(\omega_1(u) + \omega_2(v)) dudv + dv^2\tag{2.9}$$

sea completa.

Una vez que hemos obtenido (2.8), podemos usarla para expresar la métrica lorentziana $I = -dx^2 + dy^2$ en términos de las coordenadas globales (u, v) . Para empezar, tenemos que

$$\begin{aligned}dx^2 &= x_u^2 du^2 + 2x_u x_v dudv + x_v^2 dv^2 \\&= \cos^2 \omega_1 du^2 + 2 \cos \omega_1 \cos \omega_2 dudv + \cos^2 \omega_2 dv^2.\end{aligned}$$

Y, por tanto, I se puede escribir como

$$\begin{aligned}-dx^2 + dy^2 &= -2dx^2 + dx^2 + dy^2 \\&= -2dx^2 + du^2 + 2 \cos \omega dudv + dv^2 \\&= -\cos(2\omega_1) du^2 - 2 \cos(\omega_1 - \omega_2) dudv - \cos(2\omega_2) dv^2.\end{aligned}$$

Tras esta discusión, podemos dar el siguiente resultado:

Proposición 2.2. Sean $\omega_1(u), \omega_2(v) \in C^\infty(\mathbb{R})$ tales que $\omega_1(u) + \omega_2(v) \in (0, \pi)$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Entonces, existe una inmersión $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ cuyas primera, segunda y tercera forma fundamental vienen dadas por

$$\begin{cases} I &= -\cos(2\omega_1)du^2 - 2\cos(\omega_1 - \omega_2)dudv - \cos(2\omega_2)dv^2, \\ II &= 2\sin(\omega_1 + \omega_2)dudv, \\ III &= \cos(2\omega_1)du^2 - 2\cos(\omega_1 - \omega_2)dudv + \cos(2\omega_2)dv^2. \end{cases} \quad (2.10)$$

De esta manera, f describe una superficie llana lorentziana en \mathbb{H}_1^3 cuyas curvas asintóticas son las imágenes de las curvas coordenadas del plano (u, v) . A estos parámetros (u, v) los llamaremos entonces parámetros característicos de la inmersión f .

Además, f representará una inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 exactamente cuando el difeomorfismo local $(x(u, v), y(u, v))$ de \mathbb{R}^2 dado por (2.8) sea, de hecho, un difeomorfismo global. Una condición suficiente para que (2.8) sea un difeomorfismo global es que

$$0 < c_1 \leq \omega_1(u) + \omega_2(v) \leq c_2 < \pi \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.11)$$

Recíprocamente, toda inmersión isométrica $f(x, y) : \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ admite una parametrización $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ de modo que se tiene (2.10) para ciertas $\omega_1(u), \omega_2(v) \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $\omega_1(u) + \omega_2(v) \in (0, \pi)$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. En esta situación, el cambio de coordenadas $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ viene dado por (2.8).

Demostración: Después de la discusión anterior queda probado todo lo que establece la parte recíproca a excepción de la expresión de la tercera forma fundamental $III = \langle dN, dN \rangle$. Ahora bien, a partir de las expresiones de I y II podemos obtener fácilmente las fórmulas de Gauss y Weingarten para la inmersión $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}_1^3$,

$$\begin{cases} f_{uu} &= \frac{\omega'_1 \cos(\omega_1 + \omega_2)}{\sin(\omega_1 + \omega_2)} f_u - \frac{\omega'_1}{\sin(\omega_1 + \omega_2)} f_v - \cos(2\omega_1) f, \\ f_{uv} &= \sin(\omega_1 + \omega_2) N - \cos(\omega_1 - \omega_2) f, \\ f_{vv} &= -\frac{\omega'_2}{\sin(\omega_1 + \omega_2)} f_u + \frac{\omega'_2 \cos(\omega_1 + \omega_2)}{\sin(\omega_1 + \omega_2)} f_v - \cos(2\omega_2) f, \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} N_u &= \frac{\cos(\omega_1 - \omega_2)}{\sin(\omega_1 + \omega_2)} f_u - \frac{\cos(2\omega_1)}{\sin(\omega_1 + \omega_2)} f_v, \\ N_v &= -\frac{\cos(2\omega_2)}{\sin(\omega_1 + \omega_2)} f_u + \frac{\cos(\omega_1 - \omega_2)}{\sin(\omega_1 + \omega_2)} f_v. \end{cases} \quad (2.13)$$

Usando ahora (2.13) y la expresión de I dada por (2.10) deducimos finalmente que

$$III = \langle dN, dN \rangle = \cos(2\omega_1)du^2 - 2\cos(\omega_1 - \omega_2)dudv + \cos(2\omega_2)dv^2.$$

Supongamos ahora que partimos de $\omega_1(u), \omega_2(v) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ con $\omega_1 + \omega_2 \in (0, \pi)$. En este caso, la existencia de una inmersión $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ para la que se cumple (2.10) es consecuencia de las ecuaciones de Gauss-Codazzi y de (2.12) y (2.13). La métrica I es llana lorentziana y, para las coordenadas (x, y) dadas por (2.8), se tiene

$$I = -dx^2 + dy^2. \quad (2.14)$$

Así, es evidente que f representará una inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 con coordenadas canónicas (x, y) cuando (2.8) sea un difeomorfismo global. Recíprocamente, si suponemos que f representa una inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 con coordenadas canónicas (x', y') , entonces por (2.14) se tendrá que $I = -dx^2 + dy^2 = -dx'^2 + dy'^2$. Pero esto implica que (x, y) y (x', y') difieren únicamente en una isometría \mathbb{L}^2 y, por tanto, (2.8) es un difeomorfismo global.

Finalmente, si se cumple (2.11) y llamamos $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, de (2.8) deducimos inmediatamente que el gradiente de Φ^{-1} tiene norma acotada alrededor de cualquier punto, es decir,

$$\|D(\Phi^{-1})\| \leq M < \infty \quad \text{para cierto } M > 0.$$

En este caso, el teorema de inversión de Hadamard-Plastock nos permite asegurar que Φ es un difeomorfismo global. Alternativamente, podríamos llegar a esta misma conclusión teniendo en cuenta que si se tiene (2.11), entonces $|\cos(\omega_1 + \omega_2)| \leq c_0 < 1$ para cierto c_0 . Esto nos dice que la métrica riemanniana \tilde{I} dada por (2.9) cumple $\tilde{I} \geq (1 - c_0^2)(du^2 + dv^2)$, y por lo tanto es completa. En ese caso, la Observación 2.1 nos dice que Φ es un difeomorfismo global. \square

Observación 2.3. *En el razonamiento anterior, el único punto en que usamos la completitud (es decir, el hecho de que f esté definida sobre todo \mathbb{R}^2) es a la hora de asegurar la existencia de los parámetros característicos (u, v) . Sin embargo, sabemos que estos parámetros siempre existen localmente, lo que se deduce de (2.8) y del hecho de que las coordenadas llanas (x, y) siempre existen localmente para cualquier superficie llana lorentziana (abstracta).*

Observación 2.4. *Además, siempre que partamos de una superficie llana simplemente conexa Σ , será posible encontrar (véase [AGM1]) una inmersión coordenada global $(x, y) : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^2$ que, de alguna manera, juega un papel análogo al de las coordenadas en sentido estricto (uno a uno) que sabemos que existen localmente o bajo la hipótesis de completitud. Así, está claro que la Proposición 2.2 puede formularse de modo más general para superficies llanas lorentzianas simplemente conexas inmersas en \mathbb{H}_1^3 . Lógicamente, en este caso no debemos imponer la condición de que (2.8) sea un difeomorfismo global.*

Observación 2.5. *En el caso de inmersiones isométricas $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$ las funciones ω_i de (2.7) están unívocamente determinadas salvo cambios de la forma*

$$\omega_1(u) \mapsto \omega_1(u) + c, \quad \omega_2(v) \mapsto \omega_2(v) - c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (2.15)$$

Sin embargo, en el caso lorentziano no se produce esta ambigüedad, es decir, un cambio como el de (2.15) haría que la superficie llana resultante en \mathbb{H}_1^3 fuese diferente.

2.2. Superficies llanas en \mathbb{H}_1^3 como producto de dos curvas

Nuestro primer objetivo en esta sección será probar que toda inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 se puede expresar como producto de dos curvas en \mathbb{H}_1^3 (Teorema 2.6). Más adelante veremos, además, que a partir de dos curvas en \mathbb{H}_1^3 que cumplan ciertas condiciones, podemos construir una inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 (Teorema 2.9). En definitiva, demostraremos que todas las inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 están representadas de forma unívoca a través de pares de curvas “adecuadas” en \mathbb{H}_1^3 .

Así pues, el primero de estos resultados es:

Teorema 2.6. *Sea $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ una inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 , donde (u, v) son los parámetros característicos globales descritos en la Proposición 2.2, y sea $N(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}_2^3$ su campo normal unitario. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $f(0, 0) = 1$ y que $N(0, 0) = j$. Entonces, se tiene que*

$$f(u, v) = a_1(u)a_2(v), \quad N(u, v) = a_1(u)ja_2(v), \quad (2.16)$$

para $a_1(u) := f(u, 0)$ y $a_2(v) := f(0, v)$. Es más, estas dos curvas asintóticas cumplen

$$\langle a_1'(u), a_1(u)j \rangle = \langle a_2'(v), ja_2(v) \rangle = 0. \quad (2.17)$$

Para demostrar este teorema, necesitaremos el siguiente lema:

Lema 2.7. *Bajo las hipótesis del Teorema 2.6, se cumple:*

- i) N , f_v y N_v son invariantes por la izquierda a lo largo de $a_1(u)$.
- ii) N , f_u y N_u son invariantes por la derecha a lo largo de $a_2(v)$.

Demostración: A partir de (2.10) sabemos que N_u es ortogonal a N , f y f_u y que $\langle N_u, N_u \rangle = \cos(2\omega_1) = -\langle f_u, f_u \rangle$. Por lo tanto, tenemos que $N_u = \pm f_u \times N$.

Para determinar este signo, debemos tener en cuenta que, como $\omega_1 + \omega_2 \in (0, \pi)$,

$$\begin{aligned} 0 > -\operatorname{sen}(\omega_1 + \omega_2) &= \langle N_u, f_v \rangle = \langle \pm f_u \times N, f_v \rangle \\ &= \mp \langle f_u \times f_v, N \rangle = \mp \left\langle f_u \times f_v, \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|} \right\rangle \\ &= \mp \|f_u \times f_v\|. \end{aligned}$$

Así, deducimos que

$$\|f_u \times f_v\| = \operatorname{sen}(\omega_1 + \omega_2) \quad (2.18)$$

y que

$$N_u(u, v) = f_u(u, v) \times N(u, v).$$

En particular,

$$\nabla_{a'_1} N = N_u(u, 0) = f_u(u, 0) \times N(u, 0) = a'_1 \times N.$$

Aplicando el Lema 1.9 concluimos que N es invariante por la izquierda a lo largo de a_1 . Un argumento análogo nos lleva a que

$$N_v(u, v) = N(u, v) \times f_v(u, v). \quad (2.19)$$

Y si particularizamos en los puntos de la forma $(0, v)$, podemos aplicar el Lema 1.9 y deducir que N es invariante por la derecha a lo largo de a_2 .

Ahora, consideramos el campo $f_{uv}(u, v)$. Usando (2.12) y (2.18) obtenemos

$$f_{uv}(u, v) = f_u(u, v) \times f_v(u, v) - \cos(\omega_1 - \omega_2)f(u, v).$$

En los puntos de la forma $(u, 0)$, esta igualdad nos dice que

$$\nabla_{a'_1} f_v = (f_{uv}(u, 0))^\top = f_u(u, 0) \times f_v(u, 0) = a'_1 \times f_v.$$

De nuevo, el Lema 1.9 nos proporciona la conclusión que buscábamos. Y, razonando de modo similar, obtenemos que f_u es invariante por la derecha a lo largo de a_2 .

Finalmente, si en la expresión (2.19) tenemos en cuenta que N y f_v son invariantes por la izquierda a lo largo de a_1 , obtenemos

$$\begin{aligned} N_v(u, 0) &= N(u, 0) \times f_v(u, 0) = (a_1(u)N(0, 0)) \times (a_1(u)f_v(0, 0)) \\ &= a_1(u)(N(0, 0) \times f_v(0, 0)) = a_1(u)N_v(0, 0), \end{aligned}$$

es decir, N_v es invariante por la izquierda a lo largo de a_1 . También en este caso, para probar que N_u es invariante por la derecha a lo largo de a_2 , debemos utilizar estas mismas ideas. Esto concluye la demostración del Lema 2.7 \square

Demostración del Teorema 2.6: Para empezar, es fácil obtener (2.17) utilizando que $\langle f_u, N \rangle = \langle f_v, N \rangle = 0$ sobre los puntos de la forma $(u, 0)$ o $(0, v)$ y la invariancia (por la derecha/izquierda) de N dada por el Lema 2.7.

Buscamos ahora demostrar que se cumple (2.16). Empezamos utilizando las expresiones de f_{uu} y N_u dadas respectivamente en (2.12) y (2.13), junto con la identidad trigonométrica

$$\frac{\cos(\omega_1 - \omega_2)}{\text{sen}(\omega_1 + \omega_2)} - \text{sen}(2\omega_1) = \frac{\cos(2\omega_1) \cos(\omega_1 + \omega_2)}{\text{sen}(\omega_1 + \omega_2)},$$

para obtener

$$\omega'_1(N_u - \text{sen}(2\omega_1)f_u) = \cos(2\omega_1)(f_{uu} + \cos(2\omega_1)f), \quad (2.20)$$

así como

$$N_u - \text{sen}(2\omega_1)f_u = \frac{\cos(2\omega_1)}{\text{sen}(\omega_1 + \omega_2)} (\cos(\omega_1 + \omega_2)f_u - f_v). \quad (2.21)$$

Ahora, para v_0 fijo, definimos las curvas $\Gamma_1, \Gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ como

$$\Gamma_1(u) = f(u, v_0), \quad \Gamma_2(u) = a_1(u)a_2(v_0).$$

A continuación vamos a construir un referencial a lo largo de cada una de ellas. Es importante señalar que, dado que el carácter causal Γ_1 y Γ_2 no tiene por qué ser constante, los referenciales que vamos a introducir ahora no serán simplemente los referenciales de Frenet de estas curvas, sino que tendremos que construirlos *ad hoc*. Consideremos, pues

$$\begin{cases} \vec{t}_1(u) &= \Gamma_1'(u) = f_u(u, v_0), \\ \vec{n}_1(u) &= \frac{\cos(\omega_1(u) + \omega_2(v_0))}{\text{sen}(\omega_1(u) + \omega_2(v_0))} f_u(u, v_0) - \frac{1}{\text{sen}(\omega_1(u) + \omega_2(v_0))} f_v(u, v_0), \\ \vec{b}_1(u) &= N(u, v_0). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{t}_2(u) &= \Gamma_2'(u) = a_1'(u)a_2(v_0), \\ \vec{n}_2(u) &= \frac{1}{\cos(2\omega_1(u))} \left(a_1'(u)j a_2(v_0) - \text{sen}(2\omega_1(u)) a_1'(u)a_2(v_0) \right), \\ \vec{b}_2(u) &= a_1(u)j a_2(v_0). \end{cases}$$

La definición que hemos dado de \vec{n}_2 sólo tiene sentido, en principio, en los puntos para los que $\cos(2\omega_1(u)) \neq 0$. Sin embargo, aplicando la invariancia por la izquierda de N a lo largo de a_1 y la igualdad (2.21), podemos escribir

$$\begin{aligned} \vec{n}_2(u) &= \frac{1}{\cos(2\omega_1(u))} \left(a_1'(u)j - \text{sen}(2\omega_1(u)) a_1'(u) \right) a_2(v_0) \\ &= \frac{1}{\cos(2\omega_1(u))} \left(N_u(u, 0) - \text{sen}(2\omega_1(u)) f_u(u, 0) \right) a_2(v_0) \\ &= \left(\frac{\cos(\omega_1(u) + \omega_2(0))}{\text{sen}(\omega_1(u) + \omega_2(0))} f_u(u, 0) - \frac{1}{\text{sen}(\omega_1(u) + \omega_2(0))} f_v(u, 0) \right) a_2(v_0). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Así, $\vec{n}_2(u)$ está definido para cualquier valor de u .

Veamos ahora que los referenciales $\{\vec{t}_1, \vec{n}_1, \vec{b}_1\}$ y $\{\vec{t}_2, \vec{n}_2, \vec{b}_2\}$ coinciden para $u = 0$. En el caso de \vec{t}_i y \vec{b}_i , esto es consecuencia inmediata de la invariancia por la derecha de f_u y N respectivamente a lo largo de a_2 . Para demostrar que $\vec{n}_1(0) = \vec{n}_2(0)$ utilizamos la invariancia por la derecha de N_u y f_u a lo largo de a_2 y (2.21) evaluada en $(0, v_0)$,

$$\begin{aligned} \vec{n}_2(0) &= \frac{1}{\cos(2\omega_1(0))} (N_u(0, 0)a_2(v_0) - \text{sen}(2\omega_1(0))f_u(0, 0)a_2(v_0)) \\ &= \frac{1}{\cos(2\omega_1(0))} (N_u(0, v_0) - \text{sen}(2\omega_1(0))f_u(0, v_0)) \\ &= \left(\frac{\cos(\omega_1(0) + \omega_2(v_0))}{\text{sen}(\omega_1(0) + \omega_2(v_0))} f_u(0, v_0) - \frac{1}{\text{sen}(\omega_1(0) + \omega_2(v_0))} f_v(0, v_0) \right) \\ &= \vec{n}_1(0). \end{aligned}$$

Finalmente, vamos a ver que ambos referenciales verifican el mismo sistema de ecuaciones diferenciales. En el caso del referencial sobre Γ_1 , para deducir estas ecuaciones, no hay más que tener en cuenta las ecuaciones de Gauss y Weingarten dadas por (2.12) y (2.13). De este modo, obtenemos:

$$\begin{aligned}\nabla_{\Gamma_1'} \vec{t}_1 &= (f_{uu}(u, v_0))^\top = \omega_1'(u) \vec{n}_1(u). \\ \nabla_{\Gamma_1'} \vec{n}_1 &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\cos(\omega_1(u) + \omega_2(v_0))}{\text{sen}(\omega_1(u) + \omega_2(v_0))} \right) f_u(u, v_0) + \frac{\cos(\omega_1(u) + \omega_2(v_0))}{\text{sen}(\omega_1(u) + \omega_2(v_0))} (f_{uu}(u, v_0))^\top \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\text{sen}(\omega_1(u) + \omega_2(v_0))} \right) f_v(u, v_0) - \frac{1}{\text{sen}(\omega_1(u) + \omega_2(v_0))} (f_{vu}(u, v_0))^\top \\ &= -\omega_1'(u) f_u(u, v_0) - N(u, v_0) \\ &= -\omega_1'(u) \vec{t}_1(u) - \vec{b}_1(u).\end{aligned}\tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{\Gamma_1'} \vec{b}_1 &= (N_u(u, v_0))^\top \\ &= \frac{\cos(\omega_1(u) - \omega_2(v_0))}{\text{sen}(\omega_1(u) + \omega_2(v_0))} f_u(u, v_0) - \frac{\cos(2\omega_1(u))}{\text{sen}(\omega_1(u) + \omega_2(v_0))} f_v(u, v_0) \\ &= \text{sen}(2\omega_1(u)) f_u(u, v_0) \\ &\quad + \cos(2\omega_1(u)) \left(\frac{\cos(\omega_1(u) + \omega_2(v_0))}{\text{sen}(\omega_1(u) + \omega_2(v_0))} f_u(u, v_0) - \frac{1}{\text{sen}(\omega_1(u) + \omega_2(v_0))} f_v(u, v_0) \right) \\ &= \text{sen}(2\omega_1(u)) \vec{t}_1(u) + \cos(2\omega_1(u)) \vec{n}_1(u).\end{aligned}$$

Para hallar las ecuaciones diferenciales del referencial sobre Γ_2 , la idea fundamental será utilizar la igualdad

$$a_1''(u) = f_{uu}(u, 0)$$

cada vez que encontremos un término de la forma $(a_1''(u))^\top a_2(v_0)$ ó $(a_1''(u))^\top j a_2(v_0)$. Así, aplicando (2.20), podremos expresar $(f_{uu}(u, 0))^\top$ en términos de $N_u(u, 0)$ y $f_u(u, 0)$. Por último, tendremos en cuenta que

$$f_u(u, 0) = a_1'(u), \quad N_u(u, 0) = a_1'(u)j,$$

(donde la segunda identidad es consecuencia de la invariancia por la izquierda de N a lo largo de a_1) para reescribir todos los términos como productos de las curvas a_1 y a_2 y sus derivadas.

Aplicando el esquema anterior llegamos a

$$\begin{aligned}\nabla_{\Gamma_2'} \vec{t}_2 &= (a_1''(u))^\top a_2(v_0) = (f_{uu}(u, 0))^\top a_2(v_0) \\ &= \left(\frac{\omega_1'(u)}{\cos(2\omega_1(u))} N_u(u, 0) - \frac{\omega_1'(u) \text{sen}(2\omega_1(u))}{\cos(2\omega_1(u))} f_u(u, 0) \right) a_2(v_0) \\ &= \frac{\omega_1'(u)}{\cos(2\omega_1(u))} (a_1'(u)j a_2(v_0) - \text{sen}(2\omega_1(u)) a_1'(u) a_2(v_0)) \\ &= \omega_1'(u) \vec{n}_2(u).\end{aligned}$$

Para obtener la ecuación diferencial correspondiente a \vec{n}_2 , podemos utilizar la expresión equivalente de \vec{n}_2 que hemos encontrado en (2.22). De esta forma, repitiendo básicamente el razonamiento visto en (2.23) (esta vez todas las expresiones están evaluadas en $(u, 0)$) y utilizando la invariancia por la izquierda de N a lo largo de a_1 , obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla_{\Gamma_2'} \vec{n}_2 &= \left(-\omega_1'(u) f_u(u, 0) - N(u, 0) \right) a_2(v_0) \\ &= -\omega_1'(u) a_1'(u) a_2(v_0) - a_1(u) j a_2(v_0) \\ &= -\omega_1'(u) \vec{t}_2(u) - \vec{b}_2(u).\end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned}\nabla_{\Gamma_2'} \vec{b}_2 &= a_1'(u) j a_2(v_0) \\ &= \cos(2\omega_1(u)) \left(\frac{1}{\cos(2\omega_1(u))} (a_1'(u) j a_2(v_0) - \operatorname{sen}(2\omega_1(u)) a_1'(u) a_2(v_0)) \right) \\ &\quad + \operatorname{sen}(2\omega_1(u)) a_1'(u) a_2(v_0) \\ &= \operatorname{sen}(2\omega_1(u)) \vec{t}_2(u) + \cos(2\omega_1(u)) \vec{n}_2(u).\end{aligned}$$

En definitiva, hemos probado que $\{\vec{t}_1, \vec{n}_1, \vec{b}_1\}$ y $\{\vec{t}_2, \vec{n}_2, \vec{b}_2\}$ coinciden en $u = 0$ y verifican el mismo sistema lineal de ecuaciones diferenciales. Por lo tanto, tenemos que ambos referenciales coinciden en todo \mathbb{R} . Esto nos permite concluir, en particular, que $\Gamma_1 \equiv \Gamma_2$. Este mismo razonamiento puede hacerse para cualquier v_0 , con lo que hemos logrado demostrar que $f(u, v) = a_1(u) a_2(v)$ y también que $N(u, v) = a_1(u) j a_2(v)$. \square

Nuestro objetivo es ahora estudiar el recíproco del Teorema 2.6, es decir, buscamos un método que nos permita construir inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 partiendo de dos curvas en \mathbb{H}_1^3 sujetas a ciertas condiciones.

Para empezar, hay que recordar que, tal y como hemos visto en la Proposición 1.13, si una curva $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ cumple $\langle a', a_j \rangle = 0$, entonces, para la curva \bar{a} se tiene que $\langle \bar{a}', j \bar{a} \rangle = 0$. Esto supone una importante simplificación de la condición (2.17). Concretamente, nuestro problema se reduce ahora a saber si dos curvas $a_1(u), a_2(v) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$, que satisfacen la condición $\langle a_i', a_i j \rangle = 0$, definen siempre una inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 con $f(u, 0) = a_1(u)$ y $f(0, v) = a_2(v)$, siendo (u, v) los parámetros característicos dados en la Proposición 2.2.

Para proseguir con nuestro estudio, necesitamos introducir la siguiente notación. Sea $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ una curva que verifica $\langle a'(s), a(s) j \rangle = 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Entonces, podemos escribir $\overline{a(s)} a'(s) = \lambda(s) i + \mu(s) k$ para ciertas $\lambda, \mu \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Definición 2.8. *En las condiciones anteriores, decimos que s es el parámetro asintótico de la curva a si $\lambda(s)^2 + \mu(s)^2 = 1$. En este caso, podremos escribir*

$$\overline{a(s)} a'(s) = \cos(\omega^a(s)) i + \operatorname{sen}(\omega^a(s)) k \quad (2.24)$$

para cierto $\omega^a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, que está unívocamente determinado salvo traslaciones de la forma $\omega^a \mapsto \omega^a + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Obviamente, cualquier curva en \mathbb{H}_1^3 que cumpla $\langle a', a_j \rangle = 0$ puede ser reparametrizada por su parámetro asintótico. De este modo, el siguiente resultado nos proporciona el recíproco del Teorema 2.6, y completa nuestro Teorema de Representación.

Teorema 2.9. Sean $a_1(u), a_2(v) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ dos curvas regulares con $a_1(0) = 1 = a_2(0)$ que verifican:

$$i) \langle a'_i, a_{ij} \rangle = 0, \text{ para } i = 1, 2.$$

ii) u y v son los parámetros asintóticos de a_1 y a_2 respectivamente.

iii) Las funciones $\omega_1 = \omega^{a_1}$ y $\omega_2 = \pi - \omega^{a_2}$ (ω^{a_i} dadas por la Definición 2.8) cumplen

$$\text{sen}(\omega_1(u) + \omega_2(v)) > 0 \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

iv) La aplicación $(x(u, v), y(u, v))$ dada por (2.8) es un difeomorfismo global.

Entonces, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ definida como

$$f(u, v) = a_1(u)\overline{a_2(v)} \quad (2.25)$$

es una inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 , y (u, v) son los parámetros característicos globales dados en la Proposición 2.2.

Demostración: Teniendo en cuenta la definición de $\omega_1(u), \omega_2(v)$, la condición iii) y la ambigüedad en la Definición 2.8, podemos suponer que $\omega_1(u) + \omega_2(v) \in (0, \pi)$. Además, tenemos

$$\begin{aligned} \overline{a_1(u)}a'_1(u) &= \cos(\omega^{a_1}(u))i + \text{sen}(\omega^{a_1}(u))k \\ &= \cos(\omega_1(u))i + \text{sen}(\omega_1(u))k, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \overline{a_2(v)}a'_2(v) &= \cos(\omega^{a_2}(v))i + \text{sen}(\omega^{a_2}(v))k \\ &= -\cos(\omega_2(v))i + \text{sen}(\omega_2(v))k, \end{aligned}$$

y, conjugando la última expresión,

$$\overline{a'_2(v)}a_2(v) = \cos(\omega_2(v))i - \text{sen}(\omega_2(v))k. \quad (2.27)$$

Así, de (2.25), (2.26) y (2.27) deducimos

$$\begin{aligned} \langle f_u(u, v), f_u(u, v) \rangle &= \langle \overline{a'_1(u)}a_2(v), \overline{a'_1(u)}a_2(v) \rangle = \langle a'_1(u), a'_1(u) \rangle = \langle \overline{a_1(u)}a'_1(u), \overline{a_1(u)}a'_1(u) \rangle \\ &= \langle \cos(\omega_1(u))i + \text{sen}(\omega_1(u))k, \cos(\omega_1(u))i + \text{sen}(\omega_1(u))k \rangle \\ &= -\cos^2(\omega_1(u)) + \text{sen}^2(\omega_1(u)) \\ &= -\cos(2\omega_1(u)), \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \langle f_v(u, v), f_v(u, v) \rangle &= \langle \overline{a_1(u)}a'_2(v), \overline{a_1(u)}a'_2(v) \rangle = \langle \overline{a'_2(v)}, \overline{a'_2(v)} \rangle = \langle \overline{a'_2(v)}a_2(v), \overline{a'_2(v)}a_2(v) \rangle \\ &= \langle \cos(\omega_2(v))i - \text{sen}(\omega_2(v))k, \cos(\omega_2(v))i - \text{sen}(\omega_2(v))k \rangle \\ &= -\cos^2(\omega_2(v)) + \text{sen}^2(\omega_2(v)) \\ &= -\cos(2\omega_2(v)), \end{aligned} \quad (2.29)$$

y

$$\begin{aligned}
\langle f_u(u, v), f_v(u, v) \rangle &= \langle a_1'(u)\overline{a_2(v)}, a_1(u)\overline{a_2'(v)} \rangle = \langle \overline{a_1(u)}a_1'(u), \overline{a_2'(v)}a_2(v) \rangle \\
&= \langle \cos(\omega_1(u))i + \text{sen}(\omega_1(u))k, \cos(\omega_2(v))i - \text{sen}(\omega_2(v))k \rangle \\
&= -\cos(\omega_1(u))\cos(\omega_2(v)) - \text{sen}(\omega_1(u))\text{sen}(\omega_2(v)) \\
&= -\cos(\omega_1(u) - \omega_2(v))
\end{aligned}$$

Ahora, para encontrar la expresión de la segunda forma fundamental en coordenadas (u, v) , utilizamos que, por (2.26) y (2.27),

$$\begin{aligned}
f_u(u, v) \times f_v(u, v) &= \\
&= \left(a_1(u)(\cos(\omega_1(u))i + \text{sen}(\omega_1(u))k) \overline{a_2(v)} \right) \times \left(a_1(u)(\cos(\omega_2(v))i - \text{sen}(\omega_2(v))k) \overline{a_2'(v)} \right) \\
&= \text{sen}(\omega_1(u) + \omega_2(v)) a_1(u)j \overline{a_2(v)}
\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$N(u, v) = \frac{f_u(u, v) \times f_v(u, v)}{\|f_u(u, v) \times f_v(u, v)\|} = a_1(u)j \overline{a_2(v)}.$$

De este modo, aplicando las propiedades básicas de nuestra estructura pseudo-cuaterniónica dadas en la Proposición 1.6 deducimos

$$\begin{aligned}
\langle f_u(u, v), N_u(u, v) \rangle &= \langle a_1'(u)\overline{a_2(v)}, a_1'(u)j\overline{a_2(v)} \rangle = -\langle a_1'(u), a_1'(u) \rangle \langle 1, j \rangle = 0, \\
\langle f_v(u, v), N_v(u, v) \rangle &= \langle a_1(u)\overline{a_2'(v)}, a_1(u)j\overline{a_2'(v)} \rangle = -\langle a_2'(v), a_2'(v) \rangle \langle 1, j \rangle = 0,
\end{aligned}$$

y, tal y como hemos visto en (2.28) y (2.29), obtenemos también

$$\begin{aligned}
\langle N_u(u, v), N_u(u, v) \rangle &= \langle a_1'(u)j\overline{a_2(v)}, a_1'(u)j\overline{a_2(v)} \rangle = -\langle a_1'(u), a_1'(u) \rangle \langle j, j \rangle \\
&= -\langle a_1'(u), a_1'(u) \rangle = \cos(2\omega_1(u)), \\
\langle N_v(u, v), N_v(u, v) \rangle &= \langle a_1(u)j\overline{a_2'(v)}, a_1(u)j\overline{a_2'(v)} \rangle = -\langle a_2'(v), a_2'(v) \rangle \langle j, j \rangle \\
&= -\langle a_2'(v), a_2'(v) \rangle = \cos(2\omega_2(v)).
\end{aligned}$$

Por otro lado, de (2.26) y (2.27) se deduce que

$$\begin{aligned}
\langle f_v(u, v), N_u(u, v) \rangle &= \langle a_1(u)\overline{a_2'(v)}, a_1'(u)j\overline{a_2(v)} \rangle = \langle \overline{a_2'(v)}a_2(v), \overline{a_1(u)}a_1'(u)j \rangle \\
&= \langle \cos(\omega_2(v))i - \text{sen}(\omega_2(v))k, (\cos(\omega_1(u))i + \text{sen}(\omega_1(u))k)j \rangle \\
&= \langle \cos(\omega_2(v))i - \text{sen}(\omega_2(v))k, \cos(\omega_1(u))k + \text{sen}(\omega_1(u))i \rangle \\
&= -\cos(\omega_2(v))\text{sen}(\omega_1(u)) - \text{sen}(\omega_1(u))\cos(\omega_2(v)) \\
&= -\text{sen}(\omega_1(u) + \omega_2(v)).
\end{aligned}$$

Así pues, $f(u, v) = a_1(u)\overline{a_2(v)}$ tiene como formas fundamentales a las expresiones dadas en (2.10). Esto acaba la prueba haciendo uso de la Proposición 2.2. \square

2.3. Algunas propiedades de las superficies llanas en \mathbb{H}_1^3

Una vez que hemos sido capaces de obtener una fórmula de representación según la cual toda inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 se puede expresar como producto de dos curvas adecuadas, cabe plantearse si dicha fórmula de representación será útil a la hora de estudiar algunas características de este tipo de superficies. En esta sección nos preguntamos bajo qué circunstancias existen superficies llanas lorentzianas no orientables en \mathbb{H}_1^3 y también analizamos cuándo una superficie llana lorentziana en \mathbb{H}_1^3 tiene operador forma no diagonalizable.

2.3.1. Orientabilidad

En primer lugar debemos señalar que es posible construir ejemplos de superficies llanas lorentzianas en \mathbb{H}_1^3 que tienen la topología de una banda de Möbius y, por lo tanto, son no orientables. Para ello, basta con utilizar la misma idea que en [GaMi] y seleccionar cierta porción del cilindro de Hopf para la fibración $h = h_i$ asociado a una curva adecuada γ en \mathbb{H}^2 como muestra la Figura 2.1.

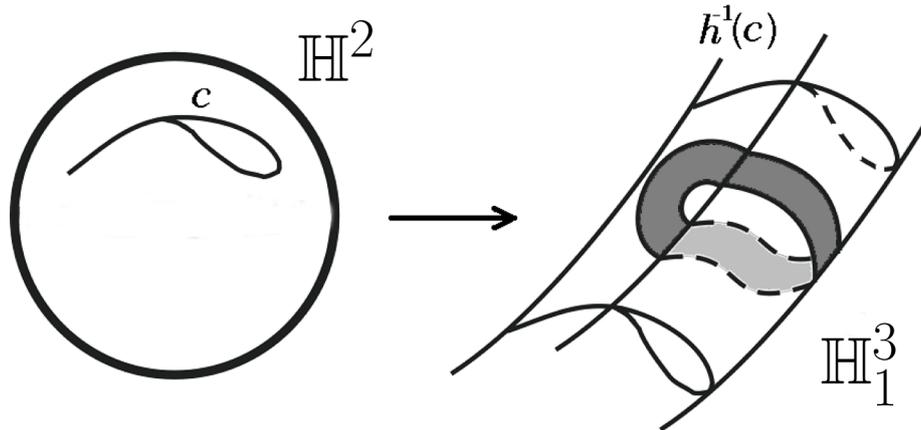


Figura 2.1: Superficie llana no orientable en \mathbb{H}_1^3 .

Este tipo de ejemplos corresponden, obviamente, a superficies no orientables y no completas. Así, parece natural abordar ahora la cuestión de si es posible encontrar superficies llanas lorentzianas completas en \mathbb{H}_1^3 que no sean orientables. Si existiera un ejemplo de estas características, éste tendría la topología de una banda de Möbius o una botella de Klein, y su recubridor universal constituiría una inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 , la cual podríamos ver en parámetros característicos como $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ del modo usual. En este caso, existiría un cierto difeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que invierte la orientación, de forma que $f = f \circ \phi$. Teniendo en cuenta esta idea y utilizando nuestra representación de superficies llanas en términos de pares de curvas, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.10. *Toda inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 es orientable.*

Demostración: Tal y como hemos visto en el Teorema 2.6, la inmersión f se puede expresar en la forma $f(u, v) = a_1(u)a_2(v)$ y el normal unitario N viene dado por $N = a_1(u)ja_2(v)$ (estamos suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $f(0, 0) = 1$ y $N(0, 0) = j$), donde a_1 y a_2 son curvas asintóticas de la inmersión. Supongamos ahora que existe un difeomorfismo global $\phi(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de modo que

$$f = f \circ \phi. \quad (2.30)$$

Por su propia definición, es claro que ϕ debe llevar direcciones y curvas asintóticas a direcciones y curvas asintóticas, es decir, necesariamente nos encontramos en una de estas dos situaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{Caso 1:} & \text{Caso 2:} \\ \phi_u = \lambda(u, v)\partial_u, & \phi_u = \lambda(u, v)\partial_v, \\ \phi_v = \mu(u, v)\partial_v, & \phi_v = \mu(u, v)\partial_u, \end{array}$$

para ciertas $\lambda, \mu \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$.

Para probar el teorema, vamos a ver que el Caso 2 no puede darse y que, si estamos en el Caso 1, necesariamente ϕ conserva la orientación.

Supongamos que se tiene el Caso 2. Como debe cumplirse $\phi_{uv} = \phi_{vu}$, deducimos que λ es sólo función de u mientras que μ es sólo función de v . Esto nos dice que

$$\phi(u, v) = (\phi_1(v), \phi_2(u))$$

para ciertos difeomorfismos adecuados $\phi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definimos ahora $\tilde{f}(u, v) = f(\phi_1(v), \phi_2(u))$. Si aplicamos el Teorema 2.6 a esta inmersión, deducimos que $\tilde{f}(u, v) = a_1(\phi_1(v))a_2(\phi_2(u))$ y que su normal unitario \tilde{N} viene dado por $\tilde{N}(u, v) = a_1(\phi_1(v))ja_2(\phi_2(u))$. Por otro lado, (2.30) nos asegura que $\tilde{f}(u, v) = f(u, v)$ y $\tilde{N}(u, v) = \pm N(u, v)$. En definitiva, se cumplen:

$$\begin{cases} a_1(\phi_1(v))a_2(\phi_2(u)) = a_1(u)a_2(v), \\ a_1(\phi_1(v))ja_2(\phi_2(u)) = \pm a_1(u)ja_2(v). \end{cases}$$

Si hacemos $u = 0$ y tenemos en cuenta que $a_1(0) = 1$, nos queda

$$\begin{cases} a_1(\phi_1(v))a_2(\phi_2(0)) = a_2(v), \\ a_1(\phi_1(v))ja_2(\phi_2(0)) = \pm ja_2(v). \end{cases}$$

Ahora multiplicamos la ecuación de arriba por la izquierda por $\pm j$ e igualamos los miembros de la derecha de ambas ecuaciones, de forma que obtenemos

$$\pm ja_1(\phi_1(v))a_2(\phi_2(0)) = a_1(\phi_1(v))ja_2(\phi_2(0)),$$

y, por lo tanto,

$$\pm ja_1(\phi_1(v)) = a_1(\phi_1(v))j. \quad (2.31)$$

Al ser ϕ_1 un difeomorfismo, existirá cierto v_0 de modo que $\phi_1(v_0) = 0$. Esto nos permite descartar el signo menos en (2.31) puesto que al evaluar dicha expresión en v_0 , como $a_1(0) = 1$, obtendríamos $-j = j$.

Sabemos pues que se tiene,

$$ja_1(\phi_1(v)) = a_1(\phi_1(v))j,$$

es decir, $a_1(\phi_1(v))$ conmuta con j . Esto nos dice que tiene que ser de la forma

$$a_1(\phi_1(v)) = \alpha(v)1 + \beta(v)j \quad (2.32)$$

para ciertas $\alpha, \beta \in C^\infty(\mathbb{R})$. Sin embargo, de acuerdo con (2.32), $a_1'(0)$ tendría que ser colineal con j (ya que $a_1'(0)$ es necesariamente ortogonal a $a_1(0) = 1$), pero esto contradice nuestra suposición de que $N(0,0) = j$. Por tanto, el Caso 2 no puede darse.

Supongamos, pues, que nos encontramos en el Caso 1. Razonando igual que antes, llegamos a que

$$\phi(u, v) = (\phi_1(u), \phi_2(v)).$$

Definimos de nuevo $\tilde{f}(u, v) = f(\phi_1(u), \phi_2(v))$ y aplicando el Teorema 2.6 deducimos que $\tilde{f}(u, v) = a_1(\phi_1(u))a_2(\phi_2(v))$ y que $\tilde{N}(u, v) = a_1(\phi_1(u))ja_2(\phi_2(v))$. Así, es claro que

$$\tilde{N}(u, v) = \pm N(\phi_1(u), \phi_2(v)) = \pm N(u, v), \quad (2.33)$$

donde este signo corresponde al de $\phi_1'(u)\phi_2'(v)$.

Si ambas $\phi_1'(u), \phi_2'(v) > 0$, tendremos claramente signo positivo en (2.33), con lo que ϕ conserva la orientación.

Si, por ejemplo, es $\phi_1'(u) < 0$, podemos asegurar que para cierto $u_0 \in \mathbb{R}$ será $\phi_1(u_0) = u_0$ (puesto que ϕ_1 es sobreyectiva y su gráfica es decreciente). Entonces, (2.30) y (2.33) evaluadas en este u_0 nos dicen que

$$\begin{cases} a_1(\phi_1(u_0))a_2(\phi_2(v)) = a_1(u_0)a_2(v), \\ a_1(\phi_1(u_0))ja_2(\phi_2(v)) = \pm a_1(u_0)ja_2(v), \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} a_2(\phi_2(v)) = a_2(v), \\ ja_2(\phi_2(v)) = \pm ja_2(v). \end{cases}$$

Así, en (2.33) tenemos el signo mas y, de nuevo, ϕ conserva la orientación. Esto concluye la demostración del teorema. \square

2.3.2. Operador forma no diagonalizable

Vamos a estudiar ahora los operadores forma de las superficies llanas lorentzianas en \mathbb{H}_1^3 . Como hemos visto, algo que distingue a la geometría lorentziana de la riemanniana es que para una superficie lorentziana el operador forma puede no ser diagonalizable en todo punto. En el caso de superficies llanas lorentzianas en \mathbb{H}_1^3 veremos que la posibilidad de expresar el operador forma en cierto punto como una matriz diagonal está estrechamente relacionado con el carácter causal de las dos curvas asintóticas de la superficie que pasan por ese punto.

Si Σ es una superficie llana lorentziana en \mathbb{H}_1^3 y $p \in \Sigma$, entonces tal y como hemos visto en la Proposición 2.2 (ver también la Observación 2.3) existen parámetros característicos locales (u, v) en un entorno de p tales que la primera y segunda formas fundamentales de Σ se escriben con respecto a dichos parámetros como

$$\begin{aligned} I &= -\cos(2\omega_1)du^2 - 2\cos(\omega_1 - \omega_2)dudv - \cos(2\omega_2)dv^2, \\ II &= 2\sin(\omega_1 + \omega_2)dudv. \end{aligned} \quad (2.34)$$

para ciertas $\omega_1(u), \omega_2(v) \in \mathcal{C}^\infty$ con $\omega_1(u) + \omega_2(v) \in (0, \pi)$ para todo (u, v) . Esta es, como sabemos, una parametrización en la que las curvas coordenadas son precisamente las curvas asintóticas. Si llamamos, como hemos hecho hasta ahora, $a_1(u), a_2(v)$ a las dos curvas asintóticas que generan la superficie, (2.34) nos dice en particular que

$$\langle a'_1, a'_1 \rangle = -\cos(2\omega_1), \quad \langle a'_2, a'_2 \rangle = -\cos(2\omega_2). \quad (2.35)$$

Por otro lado, a partir de (2.34) podemos calcular sin dificultad la expresión del operador forma A , en la base (∂_u, ∂_v) ,

$$A = \frac{1}{\sin(\omega_1 + \omega_2)} \begin{pmatrix} -\cos(\omega_1 + \omega_2) & \cos(2\omega_2) \\ \cos(2\omega_1) & -\cos(\omega_1 - \omega_2) \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de A son, por lo tanto,

$$\lambda = \frac{-\cos(\omega_1 - \omega_2) \pm \sqrt{\cos(2\omega_1)\cos(2\omega_2)}}{\sin(\omega_1 + \omega_2)}. \quad (2.36)$$

Veamos cuáles son las distintas situaciones que pueden darse en cada punto de la superficie:

- Si $\cos(2\omega_1)$ y $\cos(2\omega_2)$ son ambos positivos o ambos negativos, (2.36) dará lugar a dos soluciones reales distintas. Esto significa que el operador forma tiene dos valores propios distintos, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, y por lo tanto es diagonalizable. La expresión en forma canónica de la matriz A es:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Además, (2.35) nos dice que nos encontramos en este caso cuando las curvas a_i son ambas espaciales o ambas temporales.

- Si $\cos(2\omega_1)$ y $\cos(2\omega_2)$ tienen distinto signo, (2.36) da lugar a dos números complejos conjugados $a \pm b\sqrt{-1}$. Esto significa que el operador forma no es diagonalizable y la expresión en forma canónica de la matriz A es:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

En este caso, de (2.35) se deduce que esto sucede cuando una de las curvas a_i es espacial y la otra temporal.

- Si uno de los $\cos(2\omega_i)$ se anula y el otro no, (2.36) nos da una solución doble, es decir, el operador forma tiene un único valor propio real, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, de multiplicidad dos. Sin embargo, la dimensión de $\text{Ker}(A - \lambda_0 I)$ es uno y por lo tanto A no es diagonalizable; su expresión en forma canónica es:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Según (2.35), nos encontramos en este caso cuando una de las curvas a_i es nula y la otra es espacial o temporal.

- Finalmente, si $\cos(2\omega_1) = \cos(2\omega_2) = 0$, de nuevo (2.36) da lugar a una solución doble λ_0 , pero esta vez $\text{Ker}(A - \lambda_0 I)$ tiene dimensión dos, de modo que el operador forma sí es diagonalizable. La expresión en forma canónica de la matriz A es:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Ahora (2.35) nos dice que este caso se da si las dos curvas a_i sean nulas.

Podemos resumir toda la discusión anterior en el siguiente resultado:

Proposición 2.11. *Sea Σ una superficie llana lorentziana en \mathbb{H}_1^3 y $p \in \Sigma$. Entonces el operador forma de Σ en p es diagonalizable si y sólo si las dos curvas asintóticas de Σ que pasan por p tienen el mismo carácter causal en p .*

Resultados de clasificación de superficies llanas lorentzianas en \mathbb{H}_1^3

3.1. Curvas en \mathbb{H}^2 con singularidades de tipo wave-front

Empecemos considerando el fibrado tangente unitario a \mathbb{H}^2 ,

$$TU(\mathbb{H}^2) = \{(x, y) : x \in \mathbb{H}^2, y \in \mathbb{S}_1^2, \langle x, y \rangle = 0\},$$

donde estamos identificando $\mathbb{H}^2 = \mathbb{H}_1^3 \cap \{x_0 = 0, x_1 > 0\}$ y $\mathbb{S}_1^2 = \mathbb{S}_2^3 \cap \{x_0 = 0\}$.

Podemos considerar la aplicación

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{H}_1^3 &\longrightarrow TU(\mathbb{H}^2) \\ x &\longmapsto (x \ i \ \bar{x}, x \ k \ \bar{x}) = (h_i(x), h_k(x)). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Se trata de un recubridor de dos hojas con $\pi(-x) = \pi(x)$ para todo $x \in \mathbb{H}_1^3$.

A partir de ahora, por comodidad, denotaremos simplemente por $h(x)$ a la aplicación $h_i(x) : \mathbb{H}_1^3 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dada por $h_i(x) = x \ i \ \bar{x}$.

Definición 3.1. *Una curva legendriana en $TU(\mathbb{H}^2)$ es una inmersión $\alpha = (\gamma, \nu) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TU(\mathbb{H}^2)$ que cumple $\langle \gamma', \nu \rangle = 0$.*

Asociada a una de estas curvas legendrianas podemos definir la métrica

$$\langle d\alpha, d\alpha \rangle_S := \langle d\gamma, d\gamma \rangle + \langle d\nu, d\nu \rangle.$$

Como $\langle \gamma', \gamma' \rangle \geq 0$, $\langle \nu', \nu' \rangle \geq 0$, y α es una inmersión, tenemos que $\langle \alpha', \alpha' \rangle_S > 0$ en todo punto. En particular, podemos parametrizar α por su longitud de arco con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$.

En adelante, $p_{\mathbb{H}^2} : TU(\mathbb{H}^2) \rightarrow \mathbb{H}^2$ representará la proyección canónica de $TU(\mathbb{H}^2)$ sobre el subespacio \mathbb{H}^2 .

Definición 3.2. *Un wave-front (o simplemente un front) en \mathbb{H}^2 es una aplicación diferenciable $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ que admite un levantamiento legendriano, es decir, existe una curva legendriana $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TU(\mathbb{H}^2)$ con $p_{\mathbb{H}^2}(\alpha) = \gamma$. En estas condiciones, llamamos a la aplicación $\nu : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ tal que $\alpha = (\gamma, \nu)$ el normal unitario del front γ asociado a α .*

Un front cerrado en \mathbb{H}^2 se define de forma similar como la proyección de una curva legendriana cerrada $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow TU(\mathbb{H}^2)$.

Es obvio que cualquier curva regular en \mathbb{H}^2 es un front, pero el recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, las curvas paralelas a una curva regular en \mathbb{H}^2 son fronts que, en general, tienen singularidades (véase la Figura 3.1).

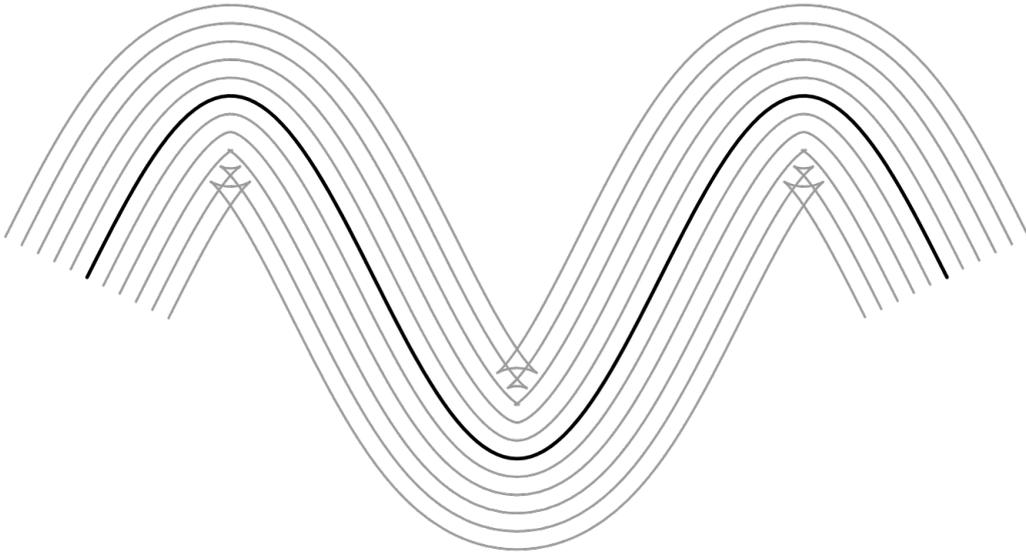


Figura 3.1: Fronts obtenidos como curvas paralelas a una curva regular en \mathbb{R}^2 .

Por otro lado, existen curvas periódicas con singularidades en \mathbb{H}^2 que no son fronts cerrados de acuerdo a la definición anterior, puesto que no tienen un normal unitario globalmente definido, esto ocurre por ejemplo en una curva cerrada con exactamente un punto cúspide (véanse las Figuras 3.2 y 3.3). Para más detalles sobre fronts véanse [SUY, MuUm, KUY, KRSUY].

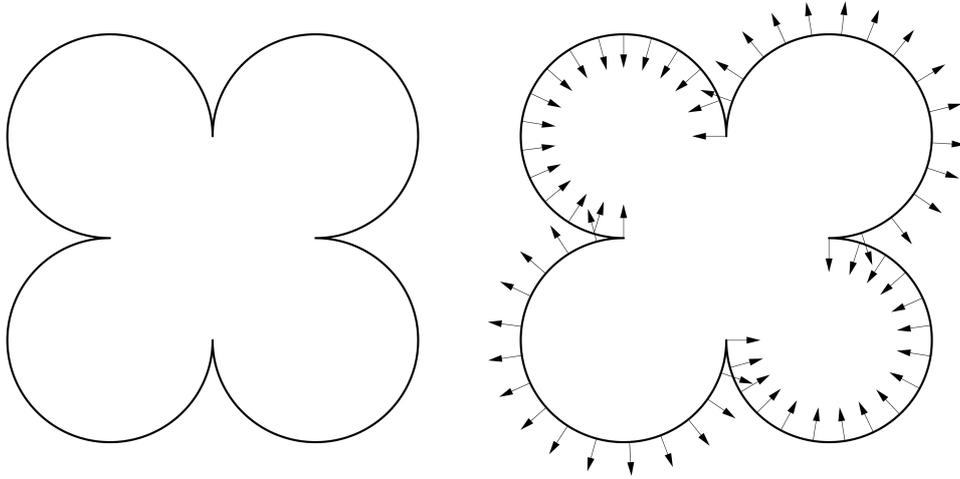


Figura 3.2: Front cerrado. Es posible encontrar un normal unitario globalmente definido.

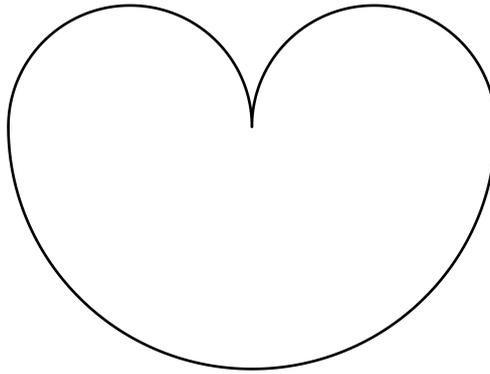


Figura 3.3: Curva cerrada con una singularidad tipo wave-front que no es un front cerrado.

El siguiente lema nos permite simplificar la condición $\langle a', a j \rangle = 0$.

Lema 3.3. *Sea $a(u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ una curva regular. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) $\langle a'(u), a(u) j \rangle = 0$.
- (2) $\pi(a(u)) : \mathbb{R} \rightarrow TU(\mathbb{H}^2)$ es una curva legendriana (para π dada por (3.1)).
- (3) $\gamma(u) := h(a(u))$ es un front en \mathbb{H}^2 con normal unitario $\nu(u) = a(u) \overline{ka(u)}$.

Demostración: De la definición de front en \mathbb{H}^2 y de (3.1) se deduce directamente que (2) y (3) son equivalentes.

Para probar que (2) \Rightarrow (1), asumimos que $\pi(a(u)) = (a(u)\overline{ia(u)}, a(u)\overline{ka(u)})$ es una curva legendriana. Entonces, $a'(u) \neq 0$ y

$$\langle a'(u)\overline{ia(u)} + a(u)\overline{ia'(u)}, a(u)\overline{ka(u)} \rangle = 0. \quad (3.2)$$

Teniendo en cuenta que $ki = j$ y aplicando la invariancia por la izquierda de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, junto con la propiedad i de la Proposición 1.6, obtenemos de (3.2) que

$$\langle a'(u), a(u)j \rangle = \langle \overline{ia'(u)}, \overline{ka(u)} \rangle = \langle a'(u)i, a(u)k \rangle = -\langle a'(u), a(u)j \rangle,$$

es decir, se tiene (1).

Veamos ahora que (1) \Rightarrow (2). Definimos $\alpha(u) := \pi(a(u)) = (\gamma(u), \nu(u))$, es decir,

$$\gamma(u) = a(u)\overline{ia(u)}, \quad \nu(u) = a(u)\overline{ka(u)}.$$

Asumamos que u es el *parámetro asintótico* de $a(u)$ dado por la Definición 2.8. Entonces, tal y como nos dice (2.24), tenemos

$$\bar{a}a' = \cos(\omega^a) i + \sen(\omega^a) k, \quad (3.3)$$

donde, por comodidad, hemos suprimido la referencia al parámetro u .

Entonces, obtenemos en primer lugar,

$$\begin{aligned} \langle \gamma', \nu \rangle &= \langle a' i \bar{a} + a i \bar{a}', a k \bar{a} \rangle = \langle \bar{a}a' i + i \bar{a}'a, k \rangle \\ &= \langle \bar{a}a' i + i(\overline{\bar{a}a'}), k \rangle = \langle 2 \sen(\omega^a) j, k \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, para ver que se tiene (2) sólo nos falta comprobar que $\pi(a(u))$ es una inmersión, es decir, que $\langle \gamma', \gamma' \rangle + \langle \nu', \nu' \rangle > 0$ en todo punto.

Para obtener $\langle \gamma', \gamma' \rangle$ y $\langle \nu', \nu' \rangle$ vamos a utilizar de nuevo (3.3) y las propiedades básicas de nuestra estructura pseudo-cuaterniónica (ítems iv) y v) de la Proposición 1.6) junto con $\langle k, k \rangle = 1$. De esta forma,

$$\begin{aligned} \langle \gamma', \gamma' \rangle &= \langle a' i \bar{a} + a i \bar{a}', a' i \bar{a} + a i \bar{a}' \rangle \\ &= \langle a' i \bar{a}, a' i \bar{a} \rangle + 2\langle a' i \bar{a}, a i \bar{a}' \rangle + \langle a i \bar{a}', a i \bar{a}' \rangle \\ &= \langle a', a' \rangle + 2\langle \bar{a}a' i, i \bar{a}'a \rangle + \langle \bar{a}', \bar{a}' \rangle \\ &= 2\langle a', a' \rangle + 2\langle \bar{a}a' i, i(\overline{\bar{a}a'}) \rangle \\ &= -2 \cos(2\omega^a) + 2\langle -\cos(\omega^a) 1 + \sen(\omega^a) j, \cos(\omega^a) 1 + \sen(\omega^a) j \rangle \\ &= -2 \cos(2\omega^a) + 2 \cos^2(\omega^a) + 2 \sen^2(\omega^a) \\ &= 4 \sen^2(\omega^a). \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
\langle \nu', \nu' \rangle &= \langle a' k \bar{a} + a k \bar{a}', a' k \bar{a} + a k \bar{a}' \rangle \\
&= \langle a' k \bar{a}, a' k \bar{a} \rangle + 2\langle a' k \bar{a}, a k \bar{a}' \rangle + \langle a k \bar{a}', a k \bar{a}' \rangle \\
&= -\langle a', a' \rangle \langle k, k \rangle + 2\langle \bar{a} a' k, k \bar{a}' a \rangle - \langle k, k \rangle \langle \bar{a}', \bar{a}' \rangle \\
&= -2\langle a', a' \rangle + 2\langle \bar{a} a' k, k \overline{(\bar{a} a')} \rangle \\
&= 2 \cos(2\omega^a) + 2\langle -\cos(\omega^a) j + \text{sen}(\omega^a) 1, -\cos(\omega^a) j - \text{sen}(\omega^a) 1 \rangle \\
&= 2 \cos(2\omega^a) + 2 \cos^2(\omega^a) + 2 \text{sen}^2(\omega^a) \\
&= 4 \cos^2(\omega^a).
\end{aligned}$$

En definitiva, tenemos que

$$\langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle_S = \langle \gamma'(u), \gamma'(u) \rangle + \langle \nu'(u), \nu'(u) \rangle = 4, \quad (3.5)$$

y por lo tanto se cumple (2). \square

Este resultado nos permite dar la siguiente definición:

Definición 3.4. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ un front en \mathbb{H}^2 con levantamiento legendriano $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TU(\mathbb{H}^2)$. Diremos que una curva regular $a : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ es un levantamiento asintótico de γ si $\pi \circ a = \alpha$, donde $\pi : \mathbb{H}_1^3 \rightarrow TU(\mathbb{H}^2)$ es el recubridor dado por (3.1).

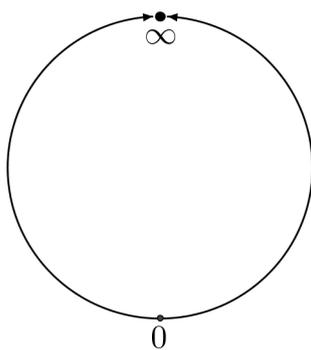
Es obvio que todo front tiene un levantamiento asintótico. Éste será único salvo el signo una vez fijado el levantamiento legendriano α , ya que π es un recubridor de dos hojas con $\pi(x) = \pi(-x)$. Además, el Lema 3.3 nos dice que el levantamiento asintótico de $\gamma(u)$ verifica $h(a(u)) = \gamma(u)$ y $\langle a'(u), a(u) j \rangle = 0$.

Observación 3.5. Podemos observar también que, si al tomar el levantamiento Legendriano del front γ sustituyéramos el normal unitario ν por $-\nu$, el levantamiento asintótico $a : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ cambiaría a $ai : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ ya que:

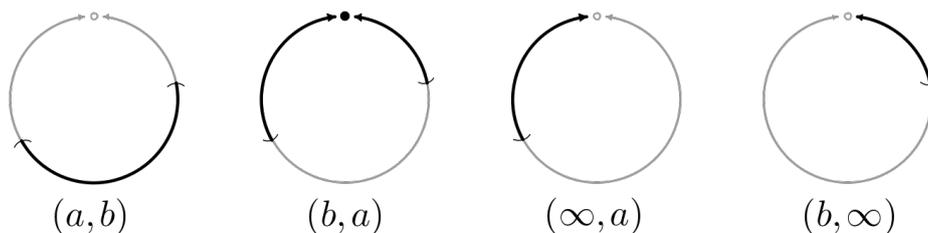
$$\begin{aligned}
ai \bar{a} = \gamma &\implies (ai) i \overline{(ai)} = -a i i i \bar{a} = a i \bar{a} = \gamma, \\
ak \bar{a} = \nu &\implies (ai) k \overline{(ai)} = -a i k i \bar{a} = -a k \bar{a} = -\nu.
\end{aligned}$$

Observación 3.6. A partir de (3.5) podemos ver que el parámetro asintótico (según la Definición 2.8) del levantamiento asintótico $a : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ de un front γ es precisamente la mitad del parámetro arco con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ del levantamiento legendriano α de γ .

Veamos ahora que la noción de curvatura geodésica de una curva regular se puede generalizar a las curvas que presentan singularidades de tipo wave-front. Para ello, tendremos que admitir que este invariante pueda tomar también el valor ∞ . El espacio $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ extiende a \mathbb{R} haciendo que sus dos extremos confluyan en un punto, al que denotamos ∞ . Desde un punto de vista aritmético, este nuevo elemento juega el papel de inverso del 0 (véase la Figura 3.4).

Figura 3.4: Representación esquemática del espacio $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

No es posible extender a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ la relación de orden en \mathbb{R} , pero sí se puede generalizar la noción de intervalo abierto (véase la Figura 3.5) y definir, a partir de ellos, una topología. De este modo, obtenemos un espacio homeomorfo a la circunferencia \mathbb{S}^1 .

Figura 3.5: Tipos de intervalos abiertos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, a y b números reales con $a < b$.

Si permitimos que las funciones tomen valores en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, algunas como $\operatorname{tg}(x)$ y $\operatorname{cot}(x)$ pasan a estar globalmente definidas de modo continuo en todo \mathbb{R} , una propiedad que no tenían como funciones con valores en \mathbb{R} . Concretamente, para $\operatorname{cot}(x)$, esto se consigue tomando $\operatorname{cot}(n\pi) = \infty$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Consideremos ahora un front $\gamma(u) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ con normal unitario $\nu : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^2$. Si $\gamma'(u_0) \neq 0$, recordemos que su curvatura geodésica en ese punto viene dada por

$$k_g(u_0) = \frac{\langle \gamma''(u_0), \nu(u_0) \rangle}{\|\gamma'(u_0)\|^2}.$$

Como vemos, esta definición no es válida en los puntos en que γ no es regular. Sin embargo, sabemos que si $\gamma'(u_0) = 0$, entonces $\nu'(u_0) \neq 0$ y por lo tanto, en cierto entorno de u_0 , será $\nu'(u) \neq 0$. En este entorno, podremos encontrar una función diferenciable $\lambda(u)$ de modo que $\gamma'(u) = \lambda(u)\nu'(u)$. Claramente, $\lambda(u_0) = 0$ y, por otro lado, como $\langle \gamma'(u), \nu(u) \rangle \equiv 0$, tenemos que

$$\langle \gamma''(u), \nu(u) \rangle = -\langle \gamma'(u), \nu'(u) \rangle.$$

Así, $\lambda = -1/k_g$ en los puntos regulares de γ . Esto justifica la siguiente definición:

Definición 3.7. Sea $\gamma(u) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ un front con normal unitario $\nu : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^2$. Llamamos curvatura geodésica de γ a la aplicación diferenciable $k_g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dada por

$$\begin{cases} k_g(u) = \frac{\langle \gamma''(u), \nu(u) \rangle}{\|\gamma'(u)\|^2} & \text{si } \gamma'(u) \neq 0, \\ \infty & \text{si } \gamma'(u) = 0. \end{cases}$$

La curvatura geodésica de un front y la función ángulo de su levantamiento asintótico están estrechamente relacionadas, tal y como nos dice el siguiente lema:

Lema 3.8. Sea $a(u) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ una curva regular en \mathbb{H}_1^3 con $\langle a'(u), a(u) \rangle = 0$ y parámetro asintótico u de acuerdo a la Definición 2.8. Entonces, la curvatura geodésica $k_g(u)$ del front $\gamma(u) = h(a(u)) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ viene dada por

$$k_g(u) = \cot(\omega^a(u)), \quad (3.6)$$

donde $\omega^a(u)$ es la función ángulo de $a(u)$ (véase de nuevo la Definición 2.8).

Demostración: La igualdad (3.4) nos dice que $\gamma'(u_0) = 0$ si y sólo si $\sin \omega^a(u_0) = 0$, de modo que (3.6) se cumple en los puntos singulares de $\gamma(u)$.

Para el resto de puntos, teniendo en cuenta (3.4), la equivalencia (1) \Leftrightarrow (3) del Lema 3.3 y la bi-invariancia de la métrica, podemos escribir

$$k_g = -\frac{\langle \gamma', \nu' \rangle}{\|\gamma'\|^2} = \frac{-1}{4 \sin^2(\omega^a)} \langle \bar{a}a' i + i(\bar{a}a'), \bar{a}a' k + k(\bar{a}a') \rangle.$$

Si ahora usamos (3.3) y las relaciones básicas $ik = -ki = -j$ y $k^2 = -i^2 = 1$, obtenemos

$$k_g = \frac{-1}{4 \sin^2(\omega^a)} \langle 2 \sin(\omega^a) j, -2 \cos(\omega^a) j \rangle = \frac{4 \sin(\omega^a) \cos(\omega^a)}{4 \sin^2(\omega^a)} = \cot(\omega^a),$$

como queríamos ver. □

Observación 3.9. Hay que señalar que la función $\cot : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es una aplicación recubridora π -periódica. Esto nos permite elegir, para todo $A \subsetneq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una determinación continua de \cot^{-1} de forma que:

$$\begin{aligned} \cot^{-1}(A) &\subset (0, \pi) \quad \text{si } \infty \notin A, \\ \cot^{-1}(A) &\subset (\pi - c, 2\pi - c) \quad \text{para cierto } c \in (0, \pi) \quad \text{si } \infty \in A. \end{aligned}$$

De ahora en adelante, \cot^{-1} representará esta determinación continua en concreto.

Lema 3.10. *Sea $\gamma(u) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ un front con normal unitario $\nu(u) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ cuya función curvatura geodésica $k_g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ no es sobreyectiva (esto ocurre, por ejemplo, si γ es regular). Entonces, invirtiendo la parametrización de γ en caso necesario, podemos asegurar que γ admite un levantamiento asintótico $a : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ tal que:*

1. *Si γ es regular, entonces $\text{sen}(\omega^a) > 0$. Esto sucederá precisamente cuando $\{\gamma', \nu\}$ sea una base positivamente orientada de $T_\gamma \mathbb{H}^2$.*
2. *Si γ no es regular, entonces $\overline{a(u_0)} a'(u_0) = -i$ (es decir, $\cos(\omega^a(u_0)) = -1$) para todos los puntos con $\gamma'(u_0) = 0$.*

Si estas condiciones se cumplen, diremos que u es un parámetro positivo para el front γ con normal unitario ν .

Demostración: Si γ es regular, entonces la igualdad (3.4) nos asegura que $\text{sen}(\omega^a) \neq 0$ en todo punto, es decir, su signo será constante. Además, si reparametrizáramos γ tomando $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(-u)$, es obvio que $\tilde{a}(u) = a(-u)$ sería levantamiento asintótico de $\tilde{\gamma}$. De este modo, teniendo en cuenta (3.3), obtendríamos:

$$\overline{\tilde{a}(u)} \tilde{a}'(u) = -\overline{a(-u)} a'(-u) = -\cos(\omega^a(-u)) i - \text{sen}(\omega^a(-u)) k, \quad (3.7)$$

es decir, sería $\text{sen}(\omega^{\tilde{a}}(u)) = -\text{sen}(\omega^a(-u))$. Por lo tanto, invirtiendo la parametrización de γ en caso necesario, podemos asegurar que $\text{sen}(\omega^a) > 0$ en todo punto.

Ahora tenemos que ver que precisamente en ese caso $\{\gamma', \nu\}$ es una base positivamente orientada de $T_\gamma \mathbb{H}^2$. Como $\{ai\bar{a}, aj\bar{a}, ak\bar{a}\}$ es una base positivamente orientada de $T_1 \mathbb{H}_1^3$ y $ai\bar{a} = \gamma$, $ak\bar{a} = \nu$, todo se reduce a comprobar que $\langle \gamma', aj\bar{a} \rangle > 0$ en todo punto. Ahora, de (3.3) deducimos

$$\begin{aligned} \langle \gamma', aj\bar{a} \rangle &= \langle a' i \bar{a} + a i \overline{a'}, aj\bar{a} \rangle = \langle \bar{a} a' i, j \rangle + \langle i (\overline{a a'}), j \rangle \\ &= -2 \langle \bar{a} a', ji \rangle = 2 \text{sen}(\omega^a) > 0, \end{aligned}$$

con lo que el primer caso del enunciado queda demostrado.

Supongamos ahora que $\gamma'(u_0) = 0$ para algún u_0 y que, por lo tanto, $\text{sen}(\omega^a(u_0)) = 0$. A la vista de (3.7) es obvio que, reparametrizando γ si es necesario, podemos suponer que $\cos(\omega^a(u_0)) = -1$. Pero ahora, teniendo en cuenta el Lema 3.8, la Observación 3.9 y la hipótesis de que k_g no es sobreyectiva sobre $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, deducimos que la condición $\cos(\omega^a(u)) = -1$ se cumple en todos los puntos singulares del front γ . Esto concluye la demostración. \square

3.2. Clasificación de superficies llanas completas en \mathbb{H}_1^3

Buscamos ahora mejorar el resultado de representación de superficies llanas en \mathbb{H}_1^3 obtenido en el capítulo anterior. Concretamente, queremos un método geométrico (sin resolución

de ecuaciones diferenciales) que nos proporcione curvas en \mathbb{H}_1^3 que cumplan la condición $\langle a', a_j \rangle = 0$. Este método se basa en el levantamiento asintótico de curvas en \mathbb{H}^2 que pueden presentar singularidades de tipo wave-front.

De este modo obtendremos nuestro principal resultado de clasificación (Teorema 3.12) en el que parametrizamos el espacio de las inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 en términos del espacio de las curvas en \mathbb{H}^2 con singularidades de tipo wave-front.

Definición 3.11. *A un par de fronts $\gamma_1(u), \gamma_2(v) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$, con normales unitarios $\nu_1(u), \nu_2(v) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ tales que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = i$ y $\nu_1(0) = \nu_2(0) = k$, lo llamaremos par admisible si u y v son parámetros positivos para γ_1 y γ_2 respectivamente y, además, se cumplen las siguientes condiciones:*

- i) γ_1 es, de hecho, una curva regular en \mathbb{H}^2 .
- ii) Si $k_1, k_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ representan las curvaturas geodésicas de γ_1 y γ_2 con respecto a los normales unitarios $\nu_1(u), \nu_2(v)$, entonces

$$k_1(u) \neq k_2(v) \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

y, en concreto, se tiene $k_1(u) > k_2(v)$ si γ_2 es también una curva regular.

Podemos observar que si los fronts γ_1, γ_2 cumplen $k_1(\mathbb{R}) \cap k_2(\mathbb{R}) = \emptyset$, entonces, intercambiando los papeles de γ_1 y γ_2 en caso necesario, $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ es un par admisible.

Ahora vamos a ver que es posible describir de forma precisa el espacio de las inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 en términos de pares admisibles de curvas con singularidades de tipo front. En concreto, obtendremos el siguiente resultado:

Teorema 3.12. *Sean $\gamma_1(u), \gamma_2(v) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ un par admisible de fronts en \mathbb{H}^2 , donde $u/2$ (resp. $v/2$) es el parámetro arco de γ_1 (resp. γ_2) con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$. Llamamos $k_1(u), k_2(v) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ a las curvaturas geodésicas de γ_1 y γ_2 , y $a_1(u), a_2(v) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ a sus levantamientos asintóticos de acuerdo al Lema 3.10. Suponemos que, para $\omega_1(u) := \cot^{-1}(k_1(u))$ y $\omega_2(v) := \pi - \cot^{-1}(k_2(v))$, la aplicación $(x(u, v), y(u, v))$ definida en (2.8) es un difeomorfismo global.*

Entonces, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ dada por $f(u, v) = a_1(u)\overline{a_2(v)}$ es una inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 , y (u, v) son los parámetros característicos globales dados en la Proposición 2.2.

Recíprocamente, toda inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 puede recuperarse mediante este proceso a partir de un par admisible de fronts en \mathbb{H}^2 .

Demostración: Para probar la parte directa, tenemos que ver que $a_1(u)$ y $a_2(v)$ verifican todas las hipótesis del Teorema 2.9. Dado que son los levantamientos asintóticos de los fronts γ_1, γ_2 , el Lema 3.3 nos asegura que $\langle a'_1, a_{1j} \rangle = \langle a'_2, a_{2j} \rangle = 0$ y, por la Observación 3.6, sabemos

también que u y v son los parámetros asintóticos de a_1 y a_2 . Además, por el Lema 3.3 y la ambigüedad en cuanto al signo del levantamiento asintótico, podemos suponer que $a_1(0) = a_2(0) = 1$.

Por otro lado, la condición *ii*) de la Definición 3.11 implica, en particular, que $k_1(\mathbb{R}), k_2(\mathbb{R}) \subsetneq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. De este modo, podemos hablar de las funciones $\cot^{-1}(k_1(u))$ y $\cot^{-1}(k_2(v))$ de acuerdo con la Observación 3.9.

Llamemos ω^{a_1} (resp. ω^{a_2}) a la función ángulo asociada a a_1 (resp. a_2). Al ser γ_1 regular, por el Lema 3.10 y la ambigüedad a la hora de determinar ω^{a_i} (véase la Definición 2.8), podemos asumir que $\omega^{a_1}(\mathbb{R}) \subset (0, \pi)$. En esta situación, el Lema 3.8 nos dice que

$$\omega^{a_1}(u) = \cot^{-1}(k_1(u)) \in (0, \pi),$$

y, análogamente,

$$\omega^{a_2}(v) = \cot^{-1}(k_2(v)),$$

donde $\omega^{a_2}(\mathbb{R}) \subset (0, \pi)$ si γ_2 es también regular y $\omega^{a_2}(\mathbb{R}) \subset (\pi - c, 2\pi - c)$ para cierto $c > 0$ si γ_2 tiene algún punto singular.

Definimos ahora $\omega_1(u) = \cot^{-1}(k_1(u))$ y $\omega_2(v) = \pi - \cot^{-1}(k_2(v))$. Si probamos que $\omega_1(u) + \omega_2(v) \in (0, \pi)$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, habremos conseguido ver que se cumplen todas las condiciones del Teorema 2.9.

Si γ_2 es una curva regular, es claro que $\omega_1(u) + \omega_2(v) > 0$ y, puesto que $k_1(u) > k_2(v)$ para todo (u, v) , concluimos que

$$\cot^{-1}(k_1(u)) - \cot^{-1}(k_2(v)) < 0,$$

es decir, $\omega_1(u) + \omega_2(v) < \pi$.

En el caso de que γ_2 tenga algún punto singular, podemos observar que $\omega_1(u_0) + \omega_2(v_0) \in (0, \pi)$ para cierto $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. A partir de esto, como la condición $k_1(u) \neq k_2(v)$ nos asegura que $\omega_1(u) + \omega_2(v) \notin \{0, \pi\}$ en todo punto, obtenemos que también $\omega_1(u) + \omega_2(v) \in (0, \pi)$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$; esto concluye la primera parte de la prueba.

Para el recíproco, sólo tenemos que tener en cuenta que el Teorema 2.6 nos aseguraba que toda inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 puede escribirse en la forma $f(u, v) = a_1(u)a_2(v)$. Así, tomando $\gamma_1(u) = p_{\mathbb{H}^2} \circ \pi(a_1(u))$, $\gamma_2(v) = p_{\mathbb{H}^2} \circ \pi(\overline{a_2(v)})$ podremos recuperar la inmersión f simplemente aplicando la parte directa a los fronts γ_1 y γ_2 . \square

3.3. Problemas propuestos por Dajczer y Nomizu

El estudio global de las inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 fue iniciado probablemente por M. Dajczer y K. Nomizu [DaNo] en 1981. En el Teorema 7.6 de este artículo, los autores

propusieron un método para construir superficies llanas lorentzianas en \mathbb{H}_1^3 mediante el producto de dos curvas $b_1(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ y $b_2(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ en \mathbb{H}_1^3 que cumplen ciertas hipótesis. Traduciéndolas a nuestra notación, estas hipótesis son:

- i) $-\langle b_1', b_1' \rangle = \langle b_2', b_2' \rangle = 1$, es decir, una de las curvas es temporal en todo punto y la otra es espacial en todo punto (de este modo, podemos suponer que están parametrizadas por la longitud de arco).
- ii) $b_1(0) = b_2(0) = 1$.
- iii) $\langle b_1', b_1 \xi_0 \rangle = \langle b_2', \xi_0 b_2 \rangle = 0$ (podemos suponer que $\xi_0 = j$).

En estas condiciones, Dajczer y Nomizu probaron que la superficie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ dada por $f(s, t) = b_1(s)b_2(t)$ es una superficie llana lorentziana para cierto $D \subset \mathbb{R}^2$ entorno del origen ($D \subset \mathbb{R}^2$ es la componente conexa en la que se encuentra el origen del conjunto de puntos $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ en los cuales f es una inmersión). Además, las curvas b_1 y b_2 son las curvas asintóticas de f en el punto $(0, 0)$.

Tras probar este resultado, Dajczer y Nomizu propusieron los siguientes problemas de carácter global relacionados con la anterior construcción:

- C1: *Si las curvas b_1 y b_2 están definidas en todo \mathbb{R} , ¿es $D = \mathbb{R}^2$?*
- C2: *Si $D = \mathbb{R}^2$, ¿es la superficie (geodésicamente) completa?*
- C3: *¿Puede toda inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 obtenerse como producto de dos curvas adecuadas?*

Teniendo en cuenta el Teorema 7.6 de [DaNo], es razonable pensar que la cuestión C3 fue formulada como un problema restringido a curvas espaciales o temporales, aunque esto no quedase especificado explícitamente en este artículo. En cualquier caso, consideraremos también el siguiente problema:

- C4: *¿Puede toda inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 obtenerse como producto de dos curvas de modo que una de ellas sea temporal en todo punto y la otra espacial en todo punto?*

La fórmula de representación que hemos obtenido en la Sección 2.2 (Teoremas 2.6 y 2.9) así como nuestro resultado de clasificación (Teorema 3.12) nos permitirán dar respuesta a estos problemas abiertos.

C3 y C4: Representación de toda superficie llana como producto de dos curvas

En primer lugar señalamos que el Teorema 2.6 ya constituye una respuesta afirmativa a la cuestión C3. Además, en el Teorema 3.12, hemos visto que estas dos curvas a_1 y a_2 pueden

obtenerse como levantamientos asintóticos de dos curvas γ_1 y γ_2 en \mathbb{H}^2 , que pueden presentar singularidades de tipo wave-front.

En este contexto, hemos visto que, si k_1 y k_2 representan las curvaturas geodésicas de γ_1 y γ_2 respectivamente, entonces, tomando

$$\omega_1 := \cot^{-1}(k_1), \quad \omega_2 := \pi - \cot^{-1}(k_2), \quad (3.8)$$

se cumple que $\langle a'_i, a'_i \rangle = -\cos(2\omega_i)$. Pero, claramente, (3.8) nos dice que $\cot(\omega_i) = k_i$. Así, teniendo en cuenta la identidad trigonométrica

$$-\cos(2\omega_i) = \frac{1 - \cot^2(\omega_i)}{1 + \cot^2(\omega_i)},$$

concluimos que

$$\begin{aligned} a'_i \text{ es temporal} &\iff |k_i| > 1, \\ a'_i \text{ es nulo} &\iff |k_i| = 1, \\ a'_i \text{ es espacial} &\iff |k_i| < 1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Esta sencilla observación nos proporciona la idea para encontrar un contraejemplo para C4. Simplemente debemos escoger dos fronts γ_1 y γ_2 en \mathbb{H}^2 , que cumplan las hipótesis del Teorema 3.12, pero de manera que para ambos sea $|k_i| > 1$ o $|k_i| < 1$. Así, sus levantamientos asintóticos a_1 y a_2 , generarán una inmersión isométrica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 pero, de acuerdo con (3.9) dichas curvas en \mathbb{H}_1^3 tendrán el mismo carácter causal.

C1: Regularidad

Nuestro Teorema 3.12 es también la clave para afrontar la cuestión C1. Allí, la hipótesis que nos permite garantizar la regularidad de las superficies obtenidas es que los dos fronts γ_1, γ_2 de partida tengan curvaturas geodésicas disjuntas. Veremos que, en la situación que proponen Dajczer y Nomizu, necesariamente se cumple esta condición.

Consideremos dos curvas $b_1(s)$ y $b_2(t)$ que verifiquen todas las hipótesis del Teorema 7.6 de [DaNo]. Podemos entonces reparametrizarlas tomando

$$a_1(u) = b_1(s(u)), \quad a_2(v) = \overline{b_2(t(v))},$$

donde u, v son los parámetros asintóticos de estas curvas (véase la Definición 2.8). Así, hemos obtenido dos curvas que cumplen $a_1(0) = a_2(0) = 1$, $\langle a'_1, a_1j \rangle = \langle a'_2, a_2j \rangle = 0$, y de forma que a_1 es temporal en todo punto y a_2 es espacial en todo punto.

Tomamos ahora los fronts γ_1, γ_2 en \mathbb{H}_1^3 dados por

$$\gamma_1(u) = h(a_1(u)), \quad \gamma_2(v) = h(a_2(v)).$$

Como acabamos de ver en (3.9), el hecho de que a_1 sea temporal y a_2 sea espacial nos dice que $|k_1| > 1$ y que $|k_2| < 1$. Entonces, cambiando el orden de γ_1 y γ_2 si fuera necesario,

tendríamos que el par de fronts $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ es un par admisible de acuerdo a la Definición 3.11. En esta situación, el Teorema 3.12 nos dice que la superficie llana lorentziana que se obtiene a partir de ellos no tiene puntos singulares. Es decir, la inmersión

$$f(s, t) = b_1(s)b_2(t) = a_1(u(s))\overline{a_2(v(t))}$$

está definida en todo \mathbb{R}^2 . Por lo tanto, también hemos obtenido una respuesta afirmativa a la cuestión C1.

C2: Completitud

Finalmente, en el siguiente teorema mostramos que la respuesta a la cuestión C2 es, en general, negativa. Por otro lado, también vemos que es posible encontrar condiciones suficientes en el sentido de [Cec] y [Sas] que aseguran la completitud en el caso lorentziano. Esta es exactamente la forma en que este problema aparece formulado en [DaNo], donde se afirma: *Éste [Cuestión C2] parece ser un problema mucho más difícil que la cuestión de la completitud de superficies llanas en \mathbb{S}^3 tratada en [Cec] y [Sas].*

Teorema 3.13. *Sean $b_1, b_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ dos curvas regulares con $b_1(0) = b_2(0) = 1$, tales que $-\langle b'_1, b'_1 \rangle = \langle b'_2, b'_2 \rangle = 1$ y $\langle b'_1, b_{1j} \rangle = \langle b'_2, b_{2j} \rangle = 0$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ la superficie llana lorentziana dada por*

$$f(s, t) = b_1(s)\overline{b_2(t)},$$

que (como hemos visto al responder la cuestión C1) no tiene puntos singulares. Entonces:

1. Los parámetros característicos (u, v) de f están globalmente definidos en \mathbb{R}^2 .
2. Si la función ángulo $\omega(u, v) = \omega_1(u) + \omega_2(v)$ asociada a los parámetros característicos (u, v) cumple $0 < c \leq \sin \omega(u, v)$ para cierta $c > 0$, entonces la superficie f es geodésicamente completa.
3. Existen curvas b_1, b_2 en estas condiciones de modo que la superficie llana lorentziana generada por ellas no es geodésicamente completa.

Demostración. Para mostrar que los parámetros característicos (u, v) están globalmente definidos en \mathbb{R}^2 , lo primero que debemos señalar es que u, v son, respectivamente, los parámetros asintóticos de las curvas b_1 y b_2 (Teorema 2.9). Veremos pues que $u = u(s)$ está globalmente definido en \mathbb{R} ; el caso de $v = v(t)$ es totalmente análogo. Como $\langle b'_1(s), b_1(s)j \rangle \equiv 0$ y $\langle b'_1(s), b'_1(s) \rangle \equiv -1$, podemos escribir

$$\overline{b(s)}b'(s) = \pm \cosh(\theta(s))i \pm \sinh(\theta(s))k \quad \text{para cierta } \theta \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

De este modo, el parámetro asintótico de b_1 (Definición 2.8) viene dado por

$$u(s) = \int_0^s \sqrt{\cosh^2(\theta(r)) + \sinh^2(\theta(r))} dr.$$

Por lo tanto,

$$|u(s)| = \left| \int_0^s \sqrt{\cosh^2(\theta(r)) + \sinh^2(\theta(r))} dr \right| \geq \left| \int_0^s 1 dr \right| = |s|.$$

Como s está globalmente definido en \mathbb{R} , también lo está u , con lo que 1. queda demostrada. Por otro lado, 2. se deduce directamente de la Proposición 2.2.

Finalmente, para probar 3. tendremos que encontrar una superficie llana lorentziana

$$f(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}_1^3$$

con parámetros característicos (u, v) globalmente definidos, con $\langle f_u, f_u \rangle < 0$, $\langle f_v, f_v \rangle > 0$ y de modo que las curvas $f(u, 0)$ y $f(0, v)$, al ser parametrizadas por la longitud de arco, estén globalmente definidas en \mathbb{R} , pero que no sea una superficie geodésicamente completa.

Para ello, consideremos $\omega_1(u) : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi/4)$ una función diferenciable que verifique:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \int_0^\infty \sqrt{\cos(2\omega_1(u))} du = \infty \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^0 \sqrt{\cos(2\omega_1(u))} du = \infty. \\ \text{ii)} \quad & \int_0^\infty \cos(2\omega_1(u)) du < \infty, \end{aligned}$$

y definimos a partir de ella $\omega_2 := \pi/2 + \omega_1 : \mathbb{R} \rightarrow (\pi/2, 3\pi/4)$.

Por la Proposición 2.2, sabemos que ω_1 y ω_2 determinan una única superficie llana lorentziana $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ con parámetros característicos (u, v) globalmente definidos. Además, teniendo en cuenta la expresión de la primera forma fundamental de esta superficie dada por (2.10), la hipótesis i) nos garantiza que las curvas $f(u, 0)$ y $f(0, v)$ estarán globalmente definidas en \mathbb{R} una vez sean parametrizadas por la longitud de arco.

Ahora, para demostrar que la superficie no es geodésicamente completa, tendríamos que probar que la aplicación $(x(u, v), y(u, v))$ dada por (2.8) no es un difeomorfismo global de \mathbb{R}^2 . Sin embargo, gracias a la Observación 2.1, esto se reduce a ver que la métrica llana riemanniana $\tilde{I} := dx^2 + dy^2$ no es completa.

Para ello, consideramos la curva divergente $\gamma(t) = (t, t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ en el plano (u, v) . Usando (2.9) y observando que, por nuestra definición de ω_2 , es

$$\cos(\omega_1(u) + \omega_2(v)) = \cos(2\omega_1 + \pi/2) = -\sin(2\omega_1),$$

obtenemos,

$$\tilde{I}(\gamma'(u), \gamma'(u)) = 2(1 - \sin(2\omega_1(u))).$$

Pero si ahora aplicamos la identidad trigonométrica

$$\sqrt{1 - \sin(2\omega_1)} = \frac{\cos(2\omega_1)}{\sqrt{1 + \sin(2\omega_1)}},$$

y tenemos en cuenta la hipótesis *ii*) sobre la función ω_1 , deducimos que

$$\int_0^\infty \sqrt{\tilde{I}(\gamma', \gamma')} du < \infty,$$

es decir, γ es una curva divergente de longitud finita. Por tanto, $\tilde{I} = dx^2 + dy^2$ no es completa. Esto nos indica que la superficie llana lorentziana $f(u, v)$ no es (geodésicamente) completa. \square

3.4. Clasificación de toros llanos en \mathbb{H}_1^3

Nos centramos ahora en el caso de superficies llanas lorentzianas que sean compactas y orientables. Una superficie Σ de este tipo tiene necesariamente la topología de un toro y su recubridor universal $\tilde{\Sigma}$ la de un plano. Nuestro resultado de clasificación para superficies llanas lorentzianas completas en \mathbb{H}_1^3 (Teorema 3.12), proporciona un método geométrico para construir superficies llanas lorentzianas completas en \mathbb{H}_1^3 a partir de pares de curvas con singularidades en \mathbb{H}^2 . Buscamos ahora encontrar condiciones sobre esos pares de curvas que nos garanticen que la superficie generada por ellas sea el recubridor universal de un toro llano. Nuestro siguiente resultado establece que esto ocurre precisamente cuando, al aplicar el Teorema 3.12, partimos de dos curvas cerradas en \mathbb{H}^2 , posiblemente con singularidades.

Teorema 3.14. *Sean $\gamma_1(u), \gamma_2(v) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dos fronts cerrados en \mathbb{H}^2 (con u y v parámetros positivos para γ_1 y γ_2 respectivamente) tales que $\gamma_1(p_0) = \gamma_2(p_0) = i$ y $\nu_1(p_0) = \nu_2(p_0) = k$ para cierto $p_0 \in \mathbb{S}^1$ (ν_i representa el normal unitario de γ_i). Supongamos que, además, cumplen*

$$k_1(\mathbb{S}^1) \cap k_2(\mathbb{S}^1) = \emptyset, \quad (3.10)$$

donde k_i es la curvatura geodésica de γ_i en \mathbb{H}^2 . Entonces, intercambiando el orden de γ_1 y γ_2 en caso necesario, la superficie llana lorentziana en \mathbb{H}_1^3 que generan a través del Teorema 3.12 tiene imagen compacta y corresponde, por lo tanto, a un toro llano lorentziano inmerso isométricamente en \mathbb{H}_1^3 .

Recíprocamente, todo toro llano lorentziano de \mathbb{H}_1^3 puede construirse mediante el proceso descrito en el Teorema 3.12 a partir de dos fronts cerrados γ_1, γ_2 en \mathbb{H}^2 que cumplen la condición de regularidad (3.10).

Demostración: La parte directa es inmediata, sólo tenemos que tener en cuenta que, por definición, γ_i es un front cerrado con normal unitario ν_i si la curva legendriana regular $\alpha_i := (\gamma_i, \nu_i)$ en $TU(\mathbb{H}^2)$ es cerrada. En este caso, como π dada en (3.1) es una aplicación recubridora de dos hojas, entonces también la curva $a_i := \pi^{-1}(\alpha_i)$ en \mathbb{H}_1^3 será cerrada. De este modo, la superficie llana $f = a_1 \bar{a}_2$ es el producto de dos curvas cerradas en \mathbb{H}_1^3 y, por lo tanto, es compacta y tiene la topología de un toro.

Para probar la parte recíproca, supongamos ahora que Σ es un toro llano lorentziano en \mathbb{H}_1^3 . Llamamos $\tilde{\Sigma} \equiv \mathbb{L}^2$ a su recubridor universal y $p : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ a la aplicación recubridora canónica. Así, podemos considerar $\tilde{\Sigma}$ como una superficie llana lorentziana completa inmersa isométricamente en \mathbb{H}_1^3 , con segunda forma fundamental dada por $p^*(II) = \tilde{II}$, donde II representa la segunda forma fundamental del toro Σ .

En esta situación, el Teorema 3.12 nos permite parametrizar $\tilde{\Sigma}$ como una inmersión $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ de modo que

$$f(u, v) = a(u)\overline{b(v)}, \quad N(u, v) = a(u)j\overline{b(v)}.$$

Aquí estamos suponiendo que $f(0, 0) = 1$ y $N(0, 0) = j$.

Consideremos ahora la aplicación

$$N\bar{f} : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{S}_1^2.$$

Claramente, $N\bar{f}$ está bien definida en Σ y, por lo tanto, $N\bar{f}(\Sigma) = N\bar{f}(\tilde{\Sigma})$ es compacta en \mathbb{H}^2 . Además, en términos de los parámetros (u, v) , se tiene

$$(N\bar{f})(u, v) = a(u)j\overline{b(v)}b(v)\overline{a(u)} = a(u)j\overline{a(u)},$$

de modo que $N\bar{f}(\tilde{\Sigma})$ es una curva cerrada en \mathbb{S}_1^2 . Veamos que es también regular.

Llamamos β_1 a esta curva, $\beta_1(u) := a(u)j\overline{a(u)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^2$. Entonces, tenemos

$$\overline{\beta_1}\beta_1' = -aj\overline{a}(a'j\overline{a} + aj\overline{a'}) = -aj\overline{a}a'j\overline{a} - aj\overline{a}aj\overline{a'} = -aj\overline{a}a'j\overline{a} - a\overline{a'}. \quad (3.11)$$

Por otro lado, la condición $\langle a', aj \rangle = 0$ nos dice que $\text{Re}(a'j\overline{a}) = 0$ y, de esta forma,

$$a'j\overline{a} = -\overline{a'j\overline{a}} = aj\overline{a'}.$$

Sustituyendo esto en (3.11), llegamos a

$$\overline{\beta_1}\beta_1' = -aj\overline{a}aj\overline{a'} - a\overline{a'} = -2a\overline{a'} \neq 0.$$

Así, concluimos que $\beta_1(u)$ es una curva regular y cerrada.

De forma similar, podemos definir

$$-\bar{N}f : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{S}_1^2,$$

y, razonando igual que antes, llegamos a que la curva $\beta_2(v) := b(v)j\overline{b(v)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ es regular y cerrada.

Hay que señalar que, por su construcción, estas β_i pueden verse también como curvas definidas en el toro llano Σ . Consideramos ahora la aplicación

$$G = (N\bar{f}, -\bar{N}f) : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{S}_1^2.$$

Es importante notar que $G(\Sigma) \equiv \beta_1 \times \beta_2 \subset \mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{S}_1^2$; así, como las curvas β_i son regulares, G es un difeomorfismo local y $G(\Sigma)$ es un toro llano. Entonces, por compacidad, G será necesariamente una aplicación recubridora de un número finito de hojas. Así, los levantamientos a Σ de todas las curvas de la forma $\Gamma := \beta_1 \times \{p\}$ o $\Gamma := \{p\} \times \beta_2$ del toro $\beta_1 \times \beta_2$ son curvas cerradas.

Además, se deduce de la definición de β_1, β_2 que una curva $\tilde{\alpha}$ es una curva asintótica de $\tilde{\Sigma}$ (si y sólo si $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$ es una curva asintótica de Σ) si y sólo si $\tilde{G}_i \circ \tilde{\alpha}$ es constante para algún $i = 1, 2$, donde por definición $\tilde{G}_i = G_i \circ p$, siendo $G = (G_1, G_2) : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{S}_1^2$. Así, α es una curva asintótica de Σ si y sólo si $\beta_i \circ \alpha$ es constante para algún $i = 1, 2$, es decir, si y sólo si α es el levantamiento mediante G de una curva de la forma $\Gamma := \beta_1 \times \{p\}$ o $\Gamma := \{p\} \times \beta_2$ en $\beta_1 \times \beta_2$.

En resumen, hemos probado la propiedad fundamental de que *las curvas asintóticas de un toro llano lorentziano en \mathbb{H}_1^3 son cerradas*. En particular, la proyección a \mathbb{H}^2 mediante la fibración de Hopf h de una de estas curvas asintóticas es un front cerrado. Este hecho, junto con la parte recíproca del Teorema 3.12, nos permite asegurar que todo toro llano lorentziano en \mathbb{H}_1^3 puede ser construido a partir de dos fronts cerrados en \mathbb{H}^2 que cumplan la condición de regularidad (3.10). De este modo, hemos concluido la prueba. \square

Corolario 3.15. *Las curvas asintóticas de un toro llano lorentziano en \mathbb{H}_1^3 son cerradas.*

3.5. Caracterización de los cilindros de Hopf lorentzianos

Como hemos visto en el capítulo de preliminares, los ejemplos más sencillos de superficies llanas en \mathbb{H}_1^3 que podemos encontrar son los llamados cilindros de Hopf. Se representan como $M_\rho(\sigma)$ y son las superficies obtenidas como preimagen, mediante la fibración de Hopf h_ρ (con $\langle \rho, \rho \rangle = 1$, $\langle \rho, \rho \rangle = -1$ o $\langle \rho, \rho \rangle = 0$) de una curva espacial o temporal σ (contenida en \mathbb{S}_1^2 , \mathbb{H}^2 o Λ^2 respectivamente). En el caso de que σ sea una curva cerrada en \mathbb{H}^2 y $\langle \rho, \rho \rangle = -1$, el cilindro de Hopf asociado $M_\rho(\sigma)$ es una superficie compacta que recibe el nombre de toro de Hopf.

Dado que los cilindros de Hopf lorentzianos son casos particulares de inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 , el Teorema 3.12 nos dice que pueden recuperarse a partir de dos fronts γ_1, γ_2 en \mathbb{H}^2 . En esta situación, nos planteamos encontrar condiciones sobre las curvas γ_i que permitan caracterizar a estos cilindros de Hopf entre todas las inmersiones isométricas de \mathbb{L}^2 en \mathbb{H}_1^3 .

Teorema 3.16. *Sea $f : \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ una inmersión isométrica que es un toro de Hopf lorentziano $M_\rho(\sigma)$. Asumimos que $f(0, 0) = 1$ y $N(0, 0) = j$ (lo cual implica que $\langle \rho, j \rangle = 0$). Entonces f puede ser recuperada, mediante el proceso descrito en el Teorema 3.12, a partir de dos fronts γ_1, γ_2 en \mathbb{H}^2 de forma que al menos uno de ellos tiene curvatura geodésica k_i*

constante. Además,

$$\begin{aligned} |k_i| > 1 &\iff \langle \rho, \rho \rangle = -1, \\ |k_i| = 1 &\iff \langle \rho, \rho \rangle = 0, \\ |k_i| < 1 &\iff \langle \rho, \rho \rangle = 1. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Demostración. Sea $c(t)$ la fibra de h_ρ que pasa por $1 = f(0, 0)$. La curva $c(t)$ es una geodésica de \mathbb{H}_1^3 y se trata, por lo tanto, de una curva asintótica de la inmersión.

Por (1.9) sabemos que esta curva es de la forma $c(t) = e^{t\rho}$ y es fácil comprobar que

$$\overline{c(t)}c'(t) = c'(t)\overline{c(t)} = \rho.$$

Si reparametrizamos $c(t)$ mediante su parámetro asintótico s (véase la Definición 2.8), entonces, para cierta constante $\omega_0 \in \mathbb{R}$, podemos escribir

$$\overline{c(s)}c'(s) = c'(s)\overline{c(s)} = \cos(\omega_0)i + \operatorname{sen}(\omega_0)k. \tag{3.13}$$

A partir de esta expresión es claro que

$$\rho = \lambda(\cos(\omega_0)i + \operatorname{sen}(\omega_0)k), \quad \text{para cierto } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0. \tag{3.14}$$

Por otro lado, si consideramos ahora los parámetros característicos globales (u, v) de la inmersión f (dados por la Proposición 2.2) podemos aplicar el Teorema 2.6 y concluir que

$$f(u, v) = a_1(u)a_2(v) \quad \text{con } a_1 = f(u, 0), \quad a_2 = f(0, v).$$

Usando la terminología del Teorema 3.12, hemos visto que la inmersión f puede ser obtenida a partir de los fronts $\gamma_1 = h(a_1)$ y $\gamma_2 = h(\overline{a_2})$ en \mathbb{H}^2 .

El hecho de que $c(s)$ sea una curva asintótica de f que pase por $f(0, 0)$ significa que se trata de una reparametrización de una de las curvas a_i . En esta situación, el front γ_i tendrá curvatura geodésica constante si y sólo si la tiene el front $h(c(s))$ (o $h(\overline{c(s)})$). Pero, utilizando el Lema 3.8, deducimos de (3.13) que las curvaturas geodésicas de $h(c(s))$ y $h(\overline{c(s)})$ vienen ambas dadas por

$$k_g = \cot(\omega_0).$$

Finalmente, si tenemos en cuenta (3.14), podemos relacionar las diferentes posibilidades para $\langle \rho, \rho \rangle$ con las de $|\cot(\omega_0)|$. Concretamente, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \rho, \rho \rangle = -1 &\iff |\cos(\omega_0)| > |\operatorname{sen}(\omega_0)| \iff |\cot(\omega_0)| > 1, \\ \langle \rho, \rho \rangle = 0 &\iff |\cos(\omega_0)| = |\operatorname{sen}(\omega_0)| \iff |\cot(\omega_0)| = 1, \\ \langle \rho, \rho \rangle = 1 &\iff |\cos(\omega_0)| < |\operatorname{sen}(\omega_0)| \iff |\cot(\omega_0)| < 1, \end{aligned}$$

de modo que (3.12) ha quedado demostrada. \square

3.6. Construcción de levantamientos asintóticos

Hemos visto en el Teorema 3.12 que los levantamientos asintóticos (véase la Definición 3.4) de curvas en \mathbb{H}^2 juegan un papel esencial a la hora de establecer una caracterización de las superficies llanas en \mathbb{H}_1^3 en términos de pares de curvas (posiblemente con singularidades) en \mathbb{H}^2 . Por este motivo, nos ocupamos ahora de encontrar un método para construir de forma explícita, a partir de una curva en \mathbb{H}^2 dada, su levantamiento asintótico en \mathbb{H}_1^3 .

Proposición 3.17. *Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ una curva regular de la forma $\gamma(s) = \gamma_1(s)i + \gamma_2(s)j + \gamma_3(s)k$ con normal unitario $\nu : I \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ tal que $\gamma(0) = i$ y $\nu(0) = k$. Entonces, la curva $c : I \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ dada por*

$$c(s) = \frac{1}{\sqrt{2(\gamma_1(s) + 1)}} [(\gamma_1(s) + 1)1 - \gamma_3(s)j + \gamma_2(s)k], \quad (3.15)$$

verifica las siguientes condiciones:

- i) c es un levantamiento de $\gamma(s)$ mediante la fibración h , es decir, $h(c(s)) = \gamma(s)$ para todo $s \in I$.
- ii) $c(0) = 1$.
- iii) $c(s)$ es regular y $\overline{c(s)}c'(s)$ no es colineal con i para ningún $s \in I$. Podemos, por lo tanto, escribir

$$\overline{c(s)}c'(s) = \lambda(s)i + r(s)(\cos \theta(s)j + \sin \theta(s)k), \quad (3.16)$$

para ciertas $r : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ y $\lambda, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ con $\theta(0) = \pi/2$.

Demostración: En primer lugar podemos señalar que la condición $\gamma(s) \subset \mathbb{H}^2$ nos dice que $\gamma_1(s) > 0$ para todo $s \in I$ y, por lo tanto, nos asegura que la curva $c(s)$ está bien definida. Por otro lado, a partir de la definición de $c(s)$ y de la condición $\gamma(0) = i$ concluimos de forma inmediata que se cumple ii).

Veamos ahora que c es un levantamiento de γ mediante h :

$$\begin{aligned} h(c) &= ci\bar{c} = \frac{1}{2(\gamma_1 + 1)} ((\gamma_1 + 1)1 - \gamma_3j + \gamma_2k)i((\gamma_1 + 1)1 + \gamma_3j - \gamma_2k) \\ &= \frac{1}{2(\gamma_1 + 1)} (((\gamma_1 + 1)^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)i + 2\gamma_2(\gamma_1 + 1)j + 2\gamma_3(\gamma_1 + 1)k), \end{aligned} \quad (3.17)$$

pero, de nuevo, el hecho de que $\gamma(s) \subset \mathbb{H}^2$ nos asegura que

$$(\gamma_1 + 1)^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 2\gamma_1(\gamma_1 + 1).$$

Introduciendo esta información en (3.17) y simplificando, obtenemos que $h(c(s)) = \gamma(s)$, es decir, se cumple i).

Para probar *iii*) lo primero que debemos observar es que la condición *i*) nos dice que

$$\gamma' = c'i\bar{c} + c\bar{c}'. \quad (3.18)$$

Por otro lado, sabemos que para todo $s \in I$, los vectores $\{c1\bar{c}, ci\bar{c}, cj\bar{c}, ck\bar{c}\} = \{1, \gamma, cj\bar{c}, ck\bar{c}\}$ forman una base de \mathbb{R}_2^4 . En consecuencia, como γ es regular y necesariamente $\langle \gamma', 1 \rangle = \langle \gamma', \gamma \rangle = 0$, podemos asegurar que los productos $\langle \gamma', cj\bar{c} \rangle$ $\langle \gamma', ck\bar{c} \rangle$ no son ambos nulos.

Supongamos ahora que, para algún $s \in I$, $\bar{c}c'$ es colineal con i . En ese caso, se tendría

$$\langle \bar{c}c', j \rangle = 0, \quad (3.19)$$

$$\langle \bar{c}c', k \rangle = 0. \quad (3.20)$$

Partiendo de (3.19) y multiplicando por la izquierda por c y por la derecha por $i\bar{c}$ deducimos que

$$\langle c'i\bar{c}, ck\bar{c} \rangle = 0. \quad (3.21)$$

Además, tal y como vimos en la Proposición 1.6, la condición (3.19) es equivalente a $\langle c'c, j \rangle = 0$. Si en este último producto multiplicamos por la izquierda por ci y por la derecha por \bar{c} llegamos a

$$\langle ci\bar{c}', ck\bar{c} \rangle = 0. \quad (3.22)$$

Así, teniendo en cuenta (3.18), las igualdades (3.21) y (3.22) nos dicen que $\langle \gamma', ck\bar{c} \rangle = 0$. Razonando de forma análoga, partiendo de (3.20) llegamos a la conclusión de que $\langle \gamma', cj\bar{c} \rangle = 0$. Por lo tanto, no pueden darse a la vez (3.19) y (3.20). Finalmente, la condición $\nu(0) = k$ implica que $\theta(0) = \pi/2$, con lo que *iii*) queda demostrada. \square

Teorema 3.18. *Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ una curva regular de la forma $\gamma(s) = \gamma_1(s)i + \gamma_2(s)j + \gamma_3(s)k$ con normal unitario $\nu : I \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ tal que $\gamma(0) = i$ y $\nu(0) = k$. Sea $c : I \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ el levantamiento de γ dado por (3.15). Entonces la curva $a : I \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ definida como*

$$a(s) = c(s) \left(\cos \left(\frac{2\theta(s) - \pi}{4} \right) 1 + \operatorname{sen} \left(\frac{2\theta(s) - \pi}{4} \right) i \right),$$

siendo $\theta(s)$ la función ángulo dada por (3.16), es el levantamiento asintótico de γ que cumple que $a(0) = 1$.

Demostración: A partir de la definición de $a(s)$, teniendo en cuenta (1.9) y que $c(s)$ era un levantamiento de $\gamma(s)$ mediante h , es evidente que $a(s)$ también lo es. Además, de la condición $\theta(0) = \pi/2$ se obtiene inmediatamente que $a(0) = c(0) = 1$.

Así, sólo nos falta ver que se cumple la condición $\langle a'(s), a(s)j \rangle = 0$ para todo $s \in I$. Para empezar, observamos que

$$a' = c' \left(\cos \left(\frac{2\theta - \pi}{4} \right) 1 + \operatorname{sen} \left(\frac{2\theta - \pi}{4} \right) i \right) + \frac{c\theta'}{2} \left(-\operatorname{sen} \left(\frac{2\theta - \pi}{4} \right) 1 + \cos \left(\frac{2\theta - \pi}{4} \right) i \right),$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle a', aj \rangle &= \langle c' (\cos(\frac{2\theta-\pi}{4}) 1 + \text{sen}(\frac{2\theta-\pi}{4}) i), c (\cos(\frac{2\theta-\pi}{4}) j + \text{sen}(\frac{2\theta-\pi}{4}) k) \rangle \\ &\quad + \frac{\theta'}{2} \langle c (-\text{sen}(\frac{2\theta-\pi}{4}) 1 + \cos(\frac{2\theta-\pi}{4}) i), c (\cos(\frac{2\theta-\pi}{4}) j + \text{sen}(\frac{2\theta-\pi}{4}) k) \rangle. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Claramente, el segundo sumando de (3.23) se anula. En el primer sumando, vamos a multiplicar por la izquierda por \bar{c} y a utilizar la expresión para $\bar{c}c'$ dada en (3.16). De esta forma, llegamos a

$$\begin{aligned} \langle a', aj \rangle &= \langle \bar{c}c' (\cos(\frac{2\theta-\pi}{4}) 1 + \text{sen}(\frac{2\theta-\pi}{4}) i), (\cos(\frac{2\theta-\pi}{4}) j + \text{sen}(\frac{2\theta-\pi}{4}) k) \rangle \\ &= \langle (\lambda i + r(\cos(\theta)j + \text{sen}(\theta)k)) (\cos(\frac{2\theta-\pi}{4}) 1 + \text{sen}(\frac{2\theta-\pi}{4}) i), (\cos(\frac{2\theta-\pi}{4}) j + \text{sen}(\frac{2\theta-\pi}{4}) k) \rangle \\ &= r \left(\cos(\theta) \cos^2(\frac{2\theta-\pi}{4}) - \cos(\theta) \text{sen}^2(\frac{2\theta-\pi}{4}) + 2 \text{sen}(\theta) \text{sen}(\frac{2\theta-\pi}{4}) \cos(\frac{2\theta-\pi}{4}) \right) \\ &= r \left(\cos(\theta) \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) + \text{sen}(\theta) \text{sen}(\theta - \frac{\pi}{2}) \right) \\ &= r \cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

con lo que concluye la prueba. \square

Toros lorentzianos en sumersiones de Killing

4.1. Sumersiones de Killing lorentzianas

En este último capítulo consideraremos superficies lorentzianas en un cierto tipo de espacios lorentzianos tridimensionales que, como en el caso de \mathbb{H}_1^3 , admiten una noción natural de toro de Hopf lorentziano. Con esta idea, introducimos la siguiente definición, que es una adaptación al contexto lorentziano del concepto riemanniano correspondiente, definido en [RST, EsOl].

Definición 4.1. *Sea \overline{M} una variedad lorentziana tridimensional (conexa) orientable para la que existe una sumersión $\pi : \overline{M} \rightarrow M$ sobre una superficie riemanniana (M, g) tal que:*

1. *Las fibras, $\pi^{-1}(p)$ con $p \in M$, son curvas temporales homeomorfas a \mathbb{S}^1 .*
2. *El campo temporal unitario tangente a las fibras de π es un campo de Killing sobre \overline{M} (por lo tanto, las fibras son geodésicas de \overline{M}).*

En esta situación, diremos que \overline{M} es una sumersión de Killing lorentziana.

Podemos señalar que cualquier espacio producto de la forma $M^2 \times \mathbb{S}^1$ dotado de una métrica producto lorentziana de forma que \mathbb{S}^1 sea temporal constituye un ejemplo de sumersión de Killing lorentziana. Otro ejemplo es, como hemos visto, el espacio anti-de Sitter \mathbb{H}_1^3 para las sumersiones h_ρ con $\langle \rho, \rho \rangle = -1$ y, en general, todos los espacios de la forma

$\mathbb{H}_1^3(r) = \{x \in \mathbb{R}_2^4 : \langle x, x \rangle = -r^2\}$. En estos casos las fibraciones son no triviales, en el sentido de que la métrica de $\mathbb{H}_1^3(r)$ no es una métrica producto para esta fibración.

De ahora en adelante, \overline{M} representará una sumersión de Killing lorentziana y usaremos, como es habitual, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para su métrica, $[\cdot, \cdot]$ para el corchete de Lie y $\overline{\nabla}$ para su conexión de Levi-Civita.

La existencia de una sumersión $\pi : \overline{M} \rightarrow M$ sobre una superficie riemanniana (M, g) induce una descomposición de $\mathfrak{X}(\overline{M})$. Un campo se dice que es *vertical* si es siempre tangente a las fibras y se dice que es *horizontal* si es siempre ortogonal a éstas. Cualquier campo $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ se puede descomponer, por lo tanto, en una parte vertical X^v y una parte horizontal X^h .

Además, como estamos suponiendo que \overline{M} es orientable, podemos considerar una estructura natural de producto vectorial en $\mathfrak{X}(\overline{M})$ de manera que, si $\{E_1, E_2, E_3\}$ forman un referencial ortonormal (es decir, $\langle E_1, E_1 \rangle = -1$, $\langle E_2, E_2 \rangle = \langle E_3, E_3 \rangle = 1$, $\langle E_i, E_j \rangle = 0$ si $i \neq j$) globalmente definido y positivamente orientado, entonces

$$E_1 \times E_2 = E_3, \quad E_2 \times E_3 = -E_1, \quad E_3 \times E_1 = E_2. \quad (4.1)$$

En una sumersión de Killing lorentziana se tiene el siguiente resultado, que es análogo a su equivalente para sumersiones de Killing riemannianas demostrado por Espinar y Oliveira en [EsOl]:

Proposición 4.2. *Sea \overline{M} una sumersión de Killing lorentziana y sea ξ su campo vertical unitario temporal de Killing asociado. Entonces, existe $\tau \in C^\infty(\overline{M})$ tal que, para cualquier $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$,*

$$\overline{\nabla}_X \xi = \tau(X \times \xi). \quad (4.2)$$

A esta función τ la llamaremos *curvatura del fibrado* de \overline{M} .

Por otro lado, también podemos definir la *curvatura de la base*, κ , en un punto $p \in \overline{M}$ como la curvatura de la superficie riemanniana (M, g) en el punto $\pi(p)$.

Estas dos funciones κ, τ codifican una gran cantidad de información relativa a la sumersión de Killing lorentziana \overline{M} . Por ejemplo, si $\tau = 0$, entonces necesariamente \overline{M} es un espacio producto lorentziano de la forma $M^2 \times \mathbb{S}^1$. Si ambas curvaturas κ, τ son constantes \overline{M} es un espacio lorentziano homogéneo tridimensional (en [Cal, BLP, LiHi] podemos encontrar diversas propiedades de los espacios lorentzianos homogéneos tridimensionales). Finalmente, si $\kappa + 4\tau^2 = 0$ y κ, τ son ambas constantes, se puede comprobar que \overline{M} tiene curvatura constante $-\tau^2$ y se trata, o bien de un cociente de $\mathbb{L}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$, en caso de que $\tau = 0$, o bien de un cociente de $\mathbb{H}_1^3(1/\tau)$ cuando $\tau \neq 0$. Vamos a estudiar con algo más de detalle algunos ejemplos concretos de sumersiones de Killing.

Sumersiones lorentzianas homogéneas

Sean $\kappa, \tau \in \mathbb{R}$ dos constantes y N^3 la variedad tridimensional

$$\begin{cases} N^3 = \mathbb{R}^3 & \text{si } \kappa \geq 0 \\ N^3 = \mathbb{D}(2/\sqrt{-\kappa}) \times \mathbb{R} & \text{si } \kappa < 0, \end{cases}$$

dotada de la métrica lorentziana homogénea escrita en coordenadas canónicas (x_1, x_2, x_3) como

$$ds^2 = \lambda^2(dx_1^2 + dx_2^2) - (\tau\lambda(x_2dx_1 - x_1dx_2) + dx_3)^2,$$

donde

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{\kappa}{4}(x_1^2 + x_2^2)}.$$

Las traslaciones de la forma $(x_1, x_2, x_3) \rightsquigarrow (x_1, x_2, x_3 + c)$ con $c \in \mathbb{R}$ son isometrías de (N^3, ds^2) y, así, el campo $\xi = \partial/\partial x_3$ es un campo de Killing temporal unitario globalmente definido sobre N^3 .

Además, si consideramos la proyección $\pi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ y dotamos a $M^2 = \pi(N^3)$ ($M^2 = \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{D}(2/\sqrt{-\kappa})$) de su métrica de curvatura constante κ dada por

$$g = \lambda^2(dx_1^2 + dx_2^2),$$

entonces π es una sumersión de N^3 en (M^2, g) . Observemos además que las fibras $\pi^{-1}(q)$ son rectas verticales y, por tanto, ξ es tangente a ellas. Finalmente, haciendo el cociente $\bar{M}^3 = N^3/\sim$ donde

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \iff z - z' \in \mathbb{Z},$$

obtenemos una sumersión de Killing lorentziana sobre (M^2, g) según la Definición 4.1.

Observemos a continuación algunos casos particulares:

- i) Si $\kappa = \tau = 0$, tenemos $(N^3, ds^2) = \mathbb{L}^3$, el espacio de Lorentz-Minkowski usual.
- ii) Si $\kappa = 0$ pero $\tau \neq 0$, (N^3, ds^2) es el espacio de Heisenberg lorentziano. Este espacio puede ser visto como el grupo de Lie formado por las matrices 3×3 de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}^3,$$

dotado de una métrica lorentziana invariante izquierda.

- iii) Si $\kappa < 0$ y $\kappa + 4\tau^2 = 0$, (N^3, ds^2) tiene curvatura constante negativa $-\tau^2$, y es por tanto isométrico al espacio anti-de Sitter $\mathbb{H}_1^3(1/\tau)$.
- iv) Si $\tau = 0$, (N^3, ds^2) es el espacio producto lorentziano $M^2(\kappa) \times \mathbb{L}$.

- v) Si $\kappa < 0$ y $\kappa + 4\tau^2 \neq 0$, (N^3, ds^2) es isométrico al grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R})$ dotado de una métrica lorentziana invariante izquierda (pero no invariante derecha) de curvatura no constante.

4.2. Curvatura seccional de un plano arbitrario

Partimos de una sumersión de Killing lorentziana tridimensional \overline{M} (véase la sección 4.1) con campo vertical unitario y temporal asociado ξ . En adelante, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representará su métrica, $[\cdot, \cdot]$ su corchete de Lie, $\overline{\nabla}$ su conexión de Levi-Civita y \times su producto vectorial dado por (4.1). Nuestro objetivo es ahora intentar obtener una expresión que nos dé la curvatura seccional \overline{K} de cualquier plano no degenerado $\Pi_p \subset T_p \overline{M}$.

Empezamos considerando un referencial ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ globalmente definido y positivamente orientado con $E_1 = \xi$ y E_2, E_3 horizontales. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle E_1, E_1 \rangle &= -1, & E_1 \times E_2 &= E_3, \\ \langle E_2, E_2 \rangle &= \langle E_3, E_3 \rangle = 1, & E_2 \times E_3 &= -E_1, \\ \langle E_i, E_j \rangle &= 0 \text{ si } i \neq j, & E_3 \times E_1 &= E_2. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (4.2) deducimos que:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{E_1} E_1 &= 0, & \overline{\nabla}_{E_2} E_1 &= -\tau E_3, & \overline{\nabla}_{E_3} E_1 &= \tau E_2, \\ \overline{\nabla}_{E_1} E_2 &= \alpha E_3, & \overline{\nabla}_{E_2} E_2 &= -\beta E_3, & \overline{\nabla}_{E_3} E_2 &= \tau E_1 - \delta E_3, \\ \overline{\nabla}_{E_1} E_3 &= -\alpha E_2, & \overline{\nabla}_{E_2} E_3 &= -\tau E_1 + \beta E_2, & \overline{\nabla}_{E_3} E_3 &= \delta E_2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde τ es la curvatura del fibrado de \overline{M} (dada por la Proposición 4.2) y $\alpha, \beta, \delta \in C^\infty(\overline{M})$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= \overline{\nabla}_{E_1} E_2 - \overline{\nabla}_{E_2} E_1 = (\alpha + \tau) E_3, \\ [E_2, E_3] &= \overline{\nabla}_{E_2} E_3 - \overline{\nabla}_{E_3} E_2 = -2\tau E_1 + \beta E_2 + \delta E_3, \\ [E_3, E_1] &= \overline{\nabla}_{E_3} E_1 - \overline{\nabla}_{E_1} E_3 = (\alpha + \tau) E_2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Vamos a calcular ahora las componentes del tensor curvatura de Riemann \overline{R} de \overline{M} en la base $\{E_1, E_2, E_3\}$, es decir, las funciones $\overline{R}_{ijkl} = \langle \overline{R}(E_i, E_j)E_k, E_\ell \rangle$ para $i, j, k, \ell \in \{1, 2, 3\}$. Debido a las antisimetrías de \overline{R} , sabemos que todos los términos \overline{R}_{ijkl} con $i = j$ o $k = \ell$ se anulan. En otras palabras, el tensor de Riemann \overline{R} está completamente determinado por la siguiente matriz simétrica:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \overline{R}_{2323} & \overline{R}_{2331} & \overline{R}_{2312} \\ \overline{R}_{3123} & \overline{R}_{3131} & \overline{R}_{3112} \\ \overline{R}_{1223} & \overline{R}_{1231} & \overline{R}_{1212} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Usando (4.3) y (4.4) obtenemos,

$$\begin{aligned}
\overline{R}(E_2, E_3)E_1 &= \overline{\nabla}_{E_3}\overline{\nabla}_{E_2}E_1 - \overline{\nabla}_{E_2}\overline{\nabla}_{E_3}E_1 + \overline{\nabla}_{[E_2, E_3]}E_1 \\
&= \overline{\nabla}_{E_3}(-\tau E_3) - \overline{\nabla}_{E_2}(\tau E_2) + \overline{\nabla}_{-2\tau E_1 + \beta E_2 + \delta E_3}E_1 \\
&= -E_3(\tau)E_3 - \delta\tau E_2 - E_2(\tau)E_2 + \beta\tau E_3 - \beta\tau E_3 + \delta\tau E_2 \\
&= -E_3(\tau)E_3 - E_2(\tau)E_2,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
\overline{R}(E_3, E_1)E_1 &= \overline{\nabla}_{E_1}\overline{\nabla}_{E_3}E_1 - \overline{\nabla}_{E_3}\overline{\nabla}_{E_1}E_1 + \overline{\nabla}_{[E_3, E_1]}E_1 \\
&= \overline{\nabla}_{E_1}(\tau E_2) + \overline{\nabla}_{(\alpha + \tau)E_2}E_1 \\
&= E_1(\tau)E_2 + \alpha\tau E_3 - \tau(\alpha + \tau)E_3 \\
&= E_1(\tau)E_2 - \tau^2 E_3,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

y

$$\begin{aligned}
\overline{R}(E_1, E_2)E_1 &= \overline{\nabla}_{E_2}\overline{\nabla}_{E_1}E_1 - \overline{\nabla}_{E_1}\overline{\nabla}_{E_2}E_1 + \overline{\nabla}_{[E_1, E_2]}E_1 \\
&= -\overline{\nabla}_{E_1}(-\tau E_3) + \overline{\nabla}_{(\alpha + \tau)E_3}E_1 \\
&= E_1(\tau)E_3 - \alpha\tau E_2 + \tau(\alpha + \tau)E_2 \\
&= E_1(\tau)E_3 + \tau^2 E_2.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

A partir de (4.6) obtenemos $\overline{R}_{2312} = \overline{R}_{1223} = -E_2(\tau)$ y $\overline{R}_{2331} = \overline{R}_{3123} = E_3(\tau)$. De forma similar, de (4.7) deducimos que $\overline{R}_{3131} = \tau^2$ y $\overline{R}_{1231} = \overline{R}_{3112} = E_1(\tau)$, mientras que (4.8) nos dice que $\overline{R}_{1212} = \tau^2$ pero también que $\overline{R}_{1231} = \overline{R}_{3112} = -E_1(\tau)$ y, así, concluimos que $E_1(\tau) = 0$.

Para hallar \overline{R}_{2323} , lo primero que podemos observar es que $\overline{R}_{2323} = \overline{K}(E_2, E_3)$. Además, para cualquier punto $p \in \overline{M}$ y para cualquier par de campos horizontales $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ se cumple la siguiente relación (véanse el Lema 2 y el Corolario 1 de [ONe1]; aunque este resultado está enunciado en [ONe1] en versión riemanniana, su análogo semi-riemanniano es también cierto, como de hecho se afirma en [ONe1] justo después del Corolario 1):

$$\overline{K}(X, Y) = K(\pi_*(X), \pi_*(Y)) - \frac{3}{4}\langle [X, Y]^v, [X, Y]^v \rangle. \tag{4.9}$$

Aquí, \overline{K} (resp. K) representa la curvatura seccional de \overline{M} en p (resp. de M en $\pi(p)$). Así, puesto que E_2 y E_3 son horizontales, (4.9) nos dice que

$$\begin{aligned}
\overline{R}_{2323} = \overline{K}(E_2, E_3) &= \kappa - \frac{3}{4}\langle [E_2, E_3]^v, [E_2, E_3]^v \rangle \\
&= \kappa - \frac{3}{4}\langle -2\tau E_1, -2\tau E_1 \rangle \\
&= \kappa + 3\tau^2.
\end{aligned}$$

En definitiva, hemos obtenido

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \kappa + 3\tau^2 & E_3(\tau) & -E_2(\tau) \\ E_3(\tau) & \tau^2 & 0 \\ -E_2(\tau) & 0 & \tau^2 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Podemos observar que, si la curvatura del fibrado τ es constante, \mathcal{A} tiene la forma de matriz diagonal. En este caso, seremos capaces de calcular la curvatura seccional de cualquier plano no degenerado $\Pi_p \subset T_p\overline{M}$.

Proposición 4.3. *Sea \overline{M} una sumersión de Killing lorentziana con curvatura del fibrado τ constante. Para cualquier par de campos $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, la curvatura seccional del plano generado por $\{X_1, X_2\}$ en un punto dado es*

$$\overline{K}(X_1, X_2) = \kappa + 3\tau^2 + \frac{B(X_1, X_2)}{Q(X_1, X_2)}(\kappa + 4\tau^2), \quad (4.11)$$

con

$$B(X_1, X_2) = -\langle X_1^h, X_1^h \rangle \langle X_2^v, X_2^v \rangle + 2\langle X_1^h, X_2^h \rangle \langle X_1^v, X_2^v \rangle - \langle X_2^h, X_2^h \rangle \langle X_1^v, X_1^v \rangle,$$

y

$$Q(X_1, X_2) = \langle X_1, X_1 \rangle \langle X_2, X_2 \rangle - \langle X_1, X_2 \rangle^2.$$

Demostración: Empezamos expresando X_1 y X_2 como combinación lineal de los $\{E_1, E_2, E_3\}$:

$$\begin{aligned} X_1 &= \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3, \\ X_2 &= \mu_1 E_1 + \mu_2 E_2 + \mu_3 E_3, \end{aligned}$$

con $\lambda_i, \mu_i \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$. Ahora, utilizamos la multilinealidad del tensor curvatura de Riemann \overline{R} para escribir $\langle \overline{R}(X_1, X_2)X_1, X_2 \rangle$ en términos de los \overline{R}_{ijkl} con $i, j, k, \ell \in \{1, 2, 3\}$. Como hemos visto, la mayoría de estos términos se anulan debido a las antisimetrías de \overline{R} . Además, como estamos suponiendo que la curvatura del fibrado τ es constante, la matriz \mathcal{A} dada por (4.10) es diagonal. De este modo, tenemos

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(X_1, X_2)X_1, X_2 \rangle &= A\langle \overline{R}(E_2, E_3)E_2, E_3 \rangle + B_1\langle \overline{R}(E_3, E_1)E_3, E_1 \rangle + B_2\langle \overline{R}(E_1, E_2)E_1, E_2 \rangle \\ &= A(\kappa + 3\tau^2) + (B_1 + B_2)\tau^2 = A(\kappa + 3\tau^2) + B\tau^2, \end{aligned} \quad (4.12)$$

para ciertas $A, B, B_1, B_2 \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$ asociadas a X_1, X_2 . Vamos a obtener ahora una expresión para A y B en términos de los productos de las partes horizontales y verticales de los campos X_1, X_2 :

$$\begin{aligned} A &= \lambda_2\mu_3\lambda_2\mu_3 + \lambda_3\mu_2\lambda_3\mu_2 - \lambda_2\mu_3\lambda_3\mu_2 - \lambda_3\mu_2\lambda_2\mu_3 \\ &= \lambda_2^2\mu_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3\mu_2\mu_3 + \lambda_3^2\mu_2^2 \\ &= (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)(\mu_2^2 + \mu_3^2) - (\lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3)^2 \\ &= \langle X_1^h, X_1^h \rangle \langle X_2^h, X_2^h \rangle - \langle X_1^h, X_2^h \rangle^2, \\ B &= \lambda_3\mu_1\lambda_3\mu_1 + \lambda_1\mu_3\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1\lambda_1\mu_3 - \lambda_1\mu_3\lambda_3\mu_1 \\ &\quad + \lambda_1\mu_2\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2\lambda_2\mu_1 - \lambda_2\mu_1\lambda_1\mu_2 \\ &= \lambda_3^2\mu_1^2 - 2\lambda_3\mu_1\lambda_1\mu_3 + \lambda_1^2\mu_3^2 + \lambda_1^2\mu_2^2 - 2\lambda_1\mu_2\lambda_2\mu_1 + \lambda_2^2\mu_1^2 \\ &= \mu_1^2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 2\lambda_1\mu_1(\lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3) + \lambda_1^2(\mu_2^2 + \mu_3^2) \\ &= -\langle X_2^v, X_2^v \rangle \langle X_1^h, X_1^h \rangle + 2\langle X_1^v, X_2^v \rangle \langle X_1^h, X_2^h \rangle - \langle X_1^v, X_1^v \rangle \langle X_2^h, X_2^h \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado, podemos usar la bilinealidad de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para desarrollar la expresión

$$\begin{aligned} Q(X_1, X_2) &= \langle X_1, X_1 \rangle \langle X_2, X_2 \rangle - \langle X_1, X_2 \rangle^2 = \\ &= \langle X_1^h + X_1^v, X_1^h + X_1^v \rangle \langle X_2^h + X_2^v, X_2^h + X_2^v \rangle - \langle X_1^h + X_1^v, X_2^h + X_2^v \rangle^2, \end{aligned}$$

y así deducimos que

$$Q(X_1, X_2) = A - B.$$

Si ahora sumamos y restamos $B(\kappa + 3\tau^2)$ en el lado derecho de (4.12), obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X_1, X_2)X_1, X_2 \rangle &= A(\kappa + 3\tau^2) - B(\kappa + 3\tau^2) + B(\kappa + 3\tau^2) + B\tau^2 \\ &= (A - B)(\kappa + 3\tau^2) + B(\kappa + 4\tau^2) \\ &= Q(X_1, X_2)(\kappa + 3\tau^2) + B(\kappa + 4\tau^2). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Por lo tanto, hemos probado (4.11). \square

Observación 4.4. *En el caso en que X_2 es un campo horizontal espacial unitario ortogonal a X_1 , podemos observar que las expresiones de $B(X_1, X_2)$ y $Q(X_1, X_2)$ toman una forma bastante simplificada. En concreto, podemos escribir la curvatura seccional dada por (4.11) simplemente como*

$$\bar{K}(X_1, X_2) = \kappa + 3\tau^2 - \frac{\langle X_1^v, X_1^v \rangle}{\langle X_1, X_1 \rangle} (\kappa + 4\tau^2). \tag{4.14}$$

4.3. Una fórmula integral

Consideremos una superficie lorentziana orientable y compacta Σ isométricamente inmersa en una sumersión de Killing lorentziana tridimensional \bar{M} con campo de Killing unitario temporal ξ . Como sabemos, esta superficie Σ tiene necesariamente la topología de un toro. Utilizaremos N para referirnos a su campo normal unitario en \bar{M} .

En esta situación, llamamos *función ángulo* de Σ a

$$\nu := \langle N, \xi \rangle \in C^\infty(\Sigma). \tag{4.15}$$

Como podemos ver, si ∇ representa la conexión de Levi-Civita de Σ , de (4.2) y (4.15) deducimos que, para cualquier $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$,

$$\nabla_X \xi = (\bar{\nabla}_X \xi)^\top = (\tau(X \times \xi))^\top = (\tau(X \times \xi^\top) + \tau(X \times \nu N))^\top = \tau\nu(X \times N). \tag{4.16}$$

Definimos ahora sobre Σ el campo

$$Y := \xi^\top = \xi - \nu N. \tag{4.17}$$

Para este $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\langle Y, Y \rangle &= \langle \xi - \nu N, \xi - \nu N \rangle \\ &= \langle \xi, \xi \rangle - 2\nu \langle \xi, N \rangle + \nu^2 \langle N, N \rangle \\ &= -1 - 2\nu^2 + \nu^2 = -(1 + \nu^2) < 0.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Además, será $Y = Y^h + Y^v = Y^h + a\xi$, de modo que $\langle Y, \xi \rangle = -a$. Pero por otro lado,

$$\langle Y, \xi \rangle = \langle \xi - \nu N, \xi \rangle = \langle \xi, \xi \rangle - \nu \langle N, \xi \rangle = -(1 + \nu^2).$$

Así, obtenemos que $a = 1 + \nu^2$ y por lo tanto,

$$\langle Y^v, Y^v \rangle = \langle a\xi, a\xi \rangle = -a^2 = -(1 + \nu^2)^2.\tag{4.19}$$

Aplicando la clásica fórmula de Bochner al campo Y podremos demostrar nuestro siguiente resultado, que es una extensión al contexto lorentziano de la fórmula integral obtenida por Torralbo y Urbano en [ToUr].

Teorema 4.5. *Sea Σ un toro lorentziano inmerso en un sumersión de Killing lorentziana \overline{M} con curvatura del fibrado constante. Entonces,*

$$\int_{\Sigma} (1 + 3\nu^2)K + 2 \int_{\Sigma} \nu^4(\kappa + 4\tau^2) = 0,\tag{4.20}$$

donde K representa la curvatura de Gauss de la superficie Σ , ν su función ángulo y κ, τ son, respectivamente, las curvaturas de la base y del fibrado de la sumersión \overline{M} .

Demostración: Dado que Σ es una superficie compacta, podemos utilizar la versión lorentziana de la fórmula de Bochner (se puede encontrar por ejemplo en [Rom]) para el campo Y definido en (4.17). Tenemos, por lo tanto, que

$$\int_{\Sigma} [(\text{Traza}(A_Y))^2 - \text{Traza}(A_Y^2) - \text{Ric}(Y, Y)] = 0,\tag{4.21}$$

donde $A_Y : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ viene dado por $A_Y(X) = -\nabla_X Y$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Para calcular $\text{Traza}(A_Y^2)$ y $(\text{Traza}(A_Y))^2$, vamos a ver primero cómo actúan los operadores A_Y y A_Y^2 sobre un campo arbitrario $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$:

$$A_Y(X) = -\nabla_X Y = -(\overline{\nabla}_X(\xi - \nu N))^{\top} = -\nabla_X \xi + \nu \nabla_X N,\tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}A_Y^2(X) &= A_Y(A_Y(X)) = \nabla_{\nabla_X Y} Y = (\overline{\nabla}_{\nabla_X \xi - \nu \nabla_X N}(\xi - \nu N))^{\top} \\ &= \nabla_{\nabla_X \xi} \xi - \nu \nabla_{\nabla_X N} \xi - \nu \nabla_{\nabla_X \xi} N + \nu^2 \nabla_{\nabla_X N} N \\ &=: A_1(X) + A_2(X) + A_3(X) + A_4(X).\end{aligned}\tag{4.23}$$

Consideremos ahora sobre Σ coordenadas locales (x, y) tales que $\langle \cdot, \cdot \rangle = \lambda(-dx^2 + dy^2)$ para cierta $\lambda \in C^\infty(\Sigma)$ y de modo que la base $\{\partial_x, \partial_y, N\}$ esté positivamente orientada. En esta situación, de (4.1) y (4.16) deducimos que

$$\nabla_{\partial_x} \xi = \tau\nu(\partial_x \times N) = -\tau\nu\partial_y, \quad \nabla_{\partial_y} \xi = \tau\nu(\partial_y \times N) = -\tau\nu\partial_x. \quad (4.24)$$

Si la segunda forma fundamental de Σ se expresa, con respecto a las coordenadas (x, y) , como

$$II = e dx^2 + 2f dx dy + g dy^2,$$

entonces, la matriz del operador $A_N = -\nabla N$ en la base $\{\partial_x, \partial_y\}$ es

$$A_N = \begin{pmatrix} -e/\lambda & -f/\lambda \\ f/\lambda & g/\lambda \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Usando ahora (4.22), (4.24) y (4.25), obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Traza}(A_Y) &= \frac{1}{\lambda} (-\langle A_Y(\partial_x), \partial_x \rangle + \langle A_Y(\partial_y), \partial_y \rangle) \\ &= \frac{1}{\lambda} (\langle \nabla_{\partial_x} \xi, \partial_x \rangle - \nu \langle \nabla_{\partial_x} N, \partial_x \rangle - \langle \nabla_{\partial_y} \xi, \partial_y \rangle + \nu \langle \nabla_{\partial_y} N, \partial_y \rangle) \\ &= \frac{1}{\lambda} (\langle -\tau\nu\partial_y, \partial_x \rangle - \nu \langle \frac{e}{\lambda}\partial_x - \frac{f}{\lambda}\partial_y, \partial_x \rangle - \langle \tau\nu\partial_x, \partial_y \rangle + \nu \langle \frac{f}{\lambda}\partial_x - \frac{g}{\lambda}\partial_y, \partial_y \rangle) \\ &= \frac{\nu(e-g)}{\lambda}, \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$(\text{Traza}(A_Y))^2 = \frac{\nu^2(e^2 - 2eg + g^2)}{\lambda^2}. \quad (4.26)$$

Por otro lado, a partir de (4.23) está claro que

$$\text{Traza}(A_Y^2) = \sum_{i=1}^4 \text{Traza}(A_i).$$

Para calcular las trazas de estos $A_i : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$, usaremos que los operadores $A_\xi := -\nabla \xi$ y $A_N := -\nabla N$ son, respectivamente, antiadjunto y autoadjunto (véase [ONe2]); también tendremos en cuenta (4.24).

$$\begin{aligned} \text{Traza}(A_1) &= \frac{1}{\lambda} (-\langle \nabla_{\nabla_{\partial_x} \xi} \xi, \partial_x \rangle + \langle \nabla_{\nabla_{\partial_y} \xi} \xi, \partial_y \rangle) \\ &= \frac{1}{\lambda} (\langle \nabla_{\partial_x} \xi, \nabla_{\partial_x} \xi \rangle - \langle \nabla_{\partial_y} \xi, \nabla_{\partial_y} \xi \rangle) \\ &= \frac{\tau^2 \nu^2}{\lambda} (\langle \partial_y, \partial_y \rangle - \langle \partial_x, \partial_x \rangle) \\ &= 2\tau^2 \nu^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Traza}(A_2) &= \frac{1}{\lambda} \left(-\langle -\nu \nabla_{\nabla_{\partial_x} N} \xi, \partial_x \rangle + \langle -\nu \nabla_{\nabla_{\partial_y} N} \xi, \partial_y \rangle \right) \\
&= \frac{\nu}{\lambda} \left(-\langle \nabla_{\partial_x} \xi, \nabla_{\partial_x} N \rangle + \langle \nabla_{\partial_y} \xi, \nabla_{\partial_y} N \rangle \right) \\
&= \frac{\tau \nu^2}{\lambda} \left(\langle \partial_y, \frac{e}{\lambda} \partial_x - \frac{f}{\lambda} \partial_y \rangle - \langle \partial_x, \frac{f}{\lambda} \partial_x - \frac{g}{\lambda} \partial_y \rangle \right) \\
&= \frac{\tau \nu^2}{\lambda} (-f + f) = 0,
\end{aligned}$$

de forma análoga,

$$\begin{aligned}
\text{Traza}(A_3) &= \frac{1}{\lambda} \left(-\langle -\nu \nabla_{\nabla_{\partial_x} \xi} N, \partial_x \rangle + \langle -\nu \nabla_{\nabla_{\partial_y} \xi} N, \partial_y \rangle \right) \\
&= \frac{\nu}{\lambda} \left(\langle \nabla_{\partial_x} N, \nabla_{\partial_x} \xi \rangle - \langle \nabla_{\partial_y} N, \nabla_{\partial_y} \xi \rangle \right) \\
&= -\text{Traza}(A_2) = 0,
\end{aligned}$$

y, por último,

$$\begin{aligned}
\text{Traza}(A_4) &= \frac{1}{\lambda} \left(-\langle \nu^2 \nabla_{\nabla_{\partial_x} N} N, \partial_x \rangle + \langle \nu^2 \nabla_{\nabla_{\partial_y} N} N, \partial_y \rangle \right) \\
&= \frac{\nu^2}{\lambda} \left(-\langle \nabla_{\partial_x} N, \nabla_{\partial_x} N \rangle + \langle \nabla_{\partial_y} N, \nabla_{\partial_y} N \rangle \right) \\
&= \frac{\nu^2}{\lambda} \left(-\langle \frac{e}{\lambda} \partial_x - \frac{f}{\lambda} \partial_y, \frac{e}{\lambda} \partial_x - \frac{f}{\lambda} \partial_y \rangle + \langle \frac{f}{\lambda} \partial_x - \frac{g}{\lambda} \partial_y, \frac{f}{\lambda} \partial_x - \frac{g}{\lambda} \partial_y \rangle \right) \\
&= \frac{\nu^2}{\lambda} \left(\frac{e^2}{\lambda} - \frac{f^2}{\lambda} - \frac{f^2}{\lambda} + \frac{g^2}{\lambda} \right) \\
&= \frac{\nu^2(e^2 - 2f^2 + g^2)}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Además, teniendo en cuenta (4.18) y la expresión general $\text{Ric} = \langle \cdot, \cdot \rangle K$, podemos escribir

$$\text{Ric}(Y, Y) = \langle Y, Y \rangle K = -(1 + \nu^2)K.$$

De este modo, obtenemos

$$\begin{aligned}
&(\text{Traza}(A_Y))^2 - \text{Traza}(A_Y^2) - \text{Ric}(Y, Y) = \\
&= \frac{\nu^2(e^2 - 2eg + g^2)}{\lambda^2} - 2\tau^2\nu^2 - \frac{\nu^2(e^2 - 2f^2 + g^2)}{\lambda^2} + (1 + \nu^2)K \\
&= 2\nu^2 \left(\frac{f^2 - eg}{\lambda^2} - \tau^2 \right) + (1 + \nu^2)K,
\end{aligned}$$

y (4.21) nos dice que

$$\int_{\Sigma} \left[2\nu^2 \left(\frac{f^2 - eg}{\lambda^2} - \tau^2 \right) + (1 + \nu^2)K \right] = 0. \quad (4.27)$$

Recordemos ahora la ecuación de Gauss,

$$K = \bar{K} + K_{ext}, \quad (4.28)$$

donde $K_{ext} = (-eg + f^2)/\lambda$ y \bar{K} es la curvatura seccional en \bar{M} del plano tangente a Σ . Para calcular este término, consideramos un campo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ con $\langle X, X \rangle = 1$ y $\langle X, Y \rangle = 0$ (nótese que esta condición implica necesariamente que X es horizontal). Es obvio que para cualquier $p \in \Sigma$, $\{Y_p, X_p\}$ generan $T_p\Sigma$ y también que estos campos cumplen las condiciones de la Observación 4.4. Así, de (4.14), (4.18) y (4.19) deducimos que

$$\begin{aligned}\bar{K} &= \kappa + 3\tau^2 - \frac{\langle Y^v, Y^v \rangle}{\langle Y, Y \rangle} (\kappa + 4\tau^2) \\ &= \kappa + 3\tau^2 - (1 + \nu^2)(\kappa + 4\tau^2) \\ &= -\tau^2 - \nu^2(\kappa + 4\tau^2).\end{aligned}$$

Esto nos permite escribir la ecuación (4.28) en la forma

$$\frac{f^2 - eg}{\lambda^2} - \tau^2 = K + \nu^2(\kappa + 4\tau^2).$$

Finalmente, si introducimos esta información en (4.27) obtenemos, tal y como pretendíamos, la fórmula (4.20). \square

4.4. Unicidad de los toros de Hopf

La fórmula integral (4.20) nos permitirá deducir que, en sumersiones de Killing que cumplan ciertas condiciones, los toros de Hopf son las únicas superficies lorentzianas llanas y compactas que podemos encontrar. También veremos que, en este tipo de espacios, los toros de Hopf son las únicas superficies lorentzianas compactas orientables que tienen función ángulo (véase (4.15)) constante. Para llegar a estas conclusiones debemos señalar en primer lugar el siguiente hecho:

Observación 4.6. *Si Σ es una superficie lorentziana compacta inmersa en una sumersión de Killing con función ángulo $\nu \equiv 0$, entonces la diferencial $d(\pi|_{\Sigma})_p : T_p\Sigma \rightarrow T_{\pi(p)}M$ tiene rango uno para todo $p \in \Sigma$. Esta condición nos asegura que $\pi(\Sigma)$ es una curva regular $\gamma \subset M$ y, por lo tanto, Σ es el toro de Hopf dado por $\pi^{-1}(\gamma)$.*

A partir de esta observación y de la fórmula (4.20) obtenemos los siguientes resultados:

Teorema 4.7. *Sea \bar{M} una sumersión de Killing lorentziana con curvatura de la base κ y curvatura del fibrado τ . Supongamos además que τ es constante y que $\kappa + 4\tau^2$ no se anula en ningún punto de \bar{M} . Entonces, toda superficie lorentziana llana y compacta en \bar{M} es un toro de Hopf.*

Demostración: Partimos de una superficie lorentziana Σ llana y compacta en \bar{M} . En este caso, como la curvatura de Gauss es $K \equiv 0$, la fórmula (4.20) se escribe simplemente como

$$\int_{\Sigma} \nu^4(\kappa + 4\tau^2) = 0. \quad (4.29)$$

Como estamos suponiendo que $\kappa + 4\tau^2$ nunca se anula, sabemos que tendrá signo constante y, de este modo, (4.29) nos dice que debe ser $\nu \equiv 0$. Finalmente, tal y como hemos visto en la Observación 4.6, esto significa que Σ es un toro de Hopf. \square

Teorema 4.8. *Sea \overline{M} una sumersión de Killing lorentziana con curvatura de la base κ y curvatura del fibrado τ . Supongamos además que τ es constante y que $\kappa + 4\tau^2$ no se anula en ningún punto de \overline{M} . Entonces, toda superficie lorentziana compacta en \overline{M} con función ángulo ν (dada por (4.15)) constante es un toro de Hopf.*

Demostración: Para una superficie lorentziana compacta Σ cuya función ángulo ν sea constante, la fórmula (4.20) toma la forma

$$(1 + 3\nu^2) \int_{\Sigma} K + 2\nu^4 \int_{\Sigma} (\kappa + 4\tau^2) = 0. \quad (4.30)$$

Por otro lado, sabemos que Σ tiene necesariamente la topología de un toro y, así, el Teorema de Gauss-Bonnet (véase la observación final de [BiNo]) nos asegura que la primera integral de (4.30) vale cero. Además, la hipótesis de que $\kappa + 4\tau^2$ no se anula nos permite decir que la segunda integral toma un valor distinto de cero. En definitiva, obtenemos que debe ser $\nu \equiv 0$ y, de nuevo, por la Observación 4.6 concluimos que Σ es un toro de Hopf. \square

Bibliografía

- [AGM1] J.A. Aledo, J.A. Gálvez, P. Mira, Isometric immersions of \mathbb{L}^2 into \mathbb{L}^4 , *Diff. Geom. Appl.* **24** (2006), 613–627.
- [AGM2] J.A. Aledo, J.A. Gálvez, P. Mira, A D'Alembert formula for flat surfaces in the 3-sphere, *J. Geom. Anal.* **19** (2009), 211–232.
- [BFLM1] M. Barros, A. Ferrández, P. Lucas, M.A. Meroño, Hopf cylinders, B -scrolls and solitons of the Betchov-Da Rios equation in the three-dimensional anti-de Sitter space, *C. R. Acad. Sci. Paris* **321** (1995), 505–509.
- [BFLM2] M. Barros, A. Ferrández, P. Lucas, M.A. Meroño, *Solutions of the Betchov-Da Rios soliton equation in the anti-De Sitter 3-space*. New Approaches in Nonlinear Analysis. Hadronic Press Inc., Palm Harbor, Florida, 1999, pp. 51–71.
- [Bia] L. Bianchi, Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **24** (1896), 93–129.
- [BiNo] G.S. Birman and K. Nomizu, The Gauss-Bonnet Theorem for 2-dimensional spacetimes, *Michigan Math. J.*, **31** (1984), 77–81.
- [BLP] C. Barot, M.C. Lima, N. Pizzo, *Fundamental equations of surfaces in anti-de Sitter spaces*, preprint.
- [Cal] G. Calvaruso, Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds, *J. Geom. Phys.* **57** (2007), 1279–1291.
- [Cec] T. Cecil, On the completeness of flat surfaces in \mathbb{S}^3 , *Coll. Math.*, **33** (1975), 139–143.
- [DaNo] M. Dajczer and K. Nomizu, *On flat surfaces in S_1^3 and H_1^3* , Manifolds and Lie groups (Notre Dame, Ind., 1980), Progr. Math., 14, Birkhäuser, Boston, Mass., 1981, pp. 71–108.

- [DaSh] J. Dadok, J. Sha, On embedded flat surfaces in S^3 , *J. Geom. Anal.* **7** (1997), 47–55.
- [EsOl] J.M. Espinar, I.S. de Oliveira, *Locally convex surfaces immersed in a Killing submersion*, preprint (2010).
- [GaMi] J.A. Gálvez, P. Mira, Isometric immersions of \mathbb{R}^2 into \mathbb{R}^4 and perturbation of Hopf tori, *Math. Z.* **266** (2010), 207–227.
- [Gra] L. K. Graves, Codimension one isometric immersions between Lorentz spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **252** (1979), 367–392.
- [KUY] M. Kokubu, M. Umehara, K. Yamada, Flat fronts in hyperbolic 3-space. *Pacific J. Math.* **216** (2004), 149–175.
- [KRSUY] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, Singularities of flat fronts in hyperbolic space, *Pacific J. Math.* **221** (2005), 303–351.
- [Kit1] Y. Kitagawa, Periodicity of the asymptotic curves on flat tori in S^3 , *J. Math. Soc. Japan* **40** (1988), 457–476.
- [Kit2] Y. Kitagawa, Embedded flat tori in the unit 3-sphere, *J. Math. Soc. Japan* **47** (1995), 275–296.
- [Leo] M.A. León-Guzmán, Uniqueness of Lorentzian Hopf tori, *Diff. Geom. Appl.* **30** (2012), 42–48.
- [LiHi] J.H. Lira, J.A. Hinojosa, The Gauss map of minimal surfaces in the anti-de Sitter space, *J. Geom. Phys.* **61** (2011), 610–623.
- [LMP] M.A. León-Guzmán, P. Mira, J.A. Pastor, The space of Lorentzian flat tori in anti-de Sitter 3-space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **363** (2011), 6549–6573.
- [MiSa] E. Minguzzi, M. Sánchez, *The causal hierarchy of spacetimes*. Recent developments in pseudo-Riemannian geometry, ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc., Zürich, 2008, pp. 299–358.
- [MuUm] S. Murata, M. Umehara, Flat Surfaces with singularities in Euclidean 3-space, *J. Diff. Geom.*, **82** (2009), 279–316.
- [ONe1] B. O’Neill, The fundamental equations of a submersion, *Michigan Math. J.*, **13** (1966), 459–469.
- [ONe2] B. O’Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc., New York, 1983.
- [Rom] A. Romero, The Introduction of Bochner’s Technique on Lorentzian Manifolds, *Non-linear Analysis*, **47** (2001), 3047–3059.

-
- [RST] H. Rosenberg, R. Souam, E. Toubiana, General Curvature Estimates for Stable H -Surfaces in 3-Manifolds and applications, *J. Differential Geom.* **84** (2010), 623–648.
- [Sas] S. Sasaki, On complete surfaces with Gaussian curvature zero in 3-sphere, *Coll. Math.*, **26**(1972), 165–174.
- [Spi] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry, Vol. IV*. Publish or Perish, Inc., Boston, Mass., 1975.
- [SUUY] K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, The geometry of fronts, *Ann. Math.* **169** (2009), 491–529.
- [ToUr] F. Torralbo, F. Urbano, On the Gauss curvature of compact surfaces in homogeneous 3-manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.* **138** (2010), 2561–2567.
- [Wei] J.L. Weiner, Flat tori in \mathbb{S}^3 and their Gauss maps, *Proc. London Math. Soc.* **62** (1991), 54–76.