Discontinuidad de los modelos de situación de las operaciones multiplicativas[1]

BERNARDO GÓMEZ ALFONSO
Universidad de Valencia

Resumen:
La falta de competencia de los estudiantes en la resolución de los problemas multiplicativos depende de varios factores, uno de ellos es el fenómeno de la discontinuidad semántica de los modelos de situación de las operaciones al pasar de los números naturales a racionales.
En este artículo se explica el papel de los modelos de situación y sus efectos en la enseñanza, se presenta el problema de la discontinuidad semántica de los modelos y se ofrecen diversos enfoques para abordar este problema.

Palabras clave:
Aritmética, operaciones, modelos, problemas multiplicativos, dificultades, discontinuidades.

Abstract:
The lack of competencies of the students in the resolution of the multiplicative problems depend on several factors, one of them is the phenomenon of the semantic discontinuity of the operations situations models on passing from natural to rational numbers.
In this article, is explained the paper of the models of situation and his effects in teaching, also the problem of the semantic discontinuity of the models and finally, various methods to solve this problem are offered.

Key words:
Arithmetic, operations, models, multiplicative problems, difficulties, discontinuities.

Résumé:
La manque de compétence des étudiants dans la résolution des problèmes multiplicatifs dépend de divers facteurs, l'un d'eux est le phénomène de la discontinuité sémantique des modèles de situation des opérations quand on pas des nombres naturels à rationnels.
Dans cet article s'explique le papier des modèles de situation et ses effets dans l'enseignement, on présente le problème de la discontinuité sémantique des modèles et divers points de vue s'offrent à aborder ce problème.

Mots clés:
Arithmétique, opérations, modèles, problèmes multiplicatifs, difficultés, discontinuités.

1 Esta aportación se sustenta en un proyecto de investigación financiado por el MEC. Ref.: EDU2009-10599 (subprograma EDUC).

Fecha de recepción : 17-02-2011
Fecha de aceptación : 16-03-2011

Introducción

La importancia de los problemas multiplicativos en la enseñanza está de sobra justificada, no sólo por su interés educativo, por su transversalidad en las distintas ramas de las ciencias, o como preparación para la vida por sus muchas aplicaciones cotidianas en las cuestiones mercantiles y de proporcionalidad; sino porque constituyen la culminación de la aritmética, y el sustento de los primeros pasos del álgebra al reducirse a ecuaciones de primer grado y funciones lineales. Esto ha hecho que los problemas multiplicativos hayan sido objeto de gran interés para la investigación educativa.

Las aportaciones de referencia sobre este tema se pueden situar en los años 80, coincidiendo con el cambio de orientación que supuso abandonar la creencia predominante por la cual la cuestión primordial en la enseñanza de la aritmética es la habilidad algorítmica o de cálculo, para dar paso a la idea de que las operaciones han de enseñarse en un amplio rango de contextos y modelos de situación de las operaciones.

Estas aportaciones han puesto de manifiesto la falta de competencia de los estudiantes en los problemas multiplicativos, especialmente cuando trabajan con números racionales, y que las dificultades con que tropiezan los estudiantes al intentar resolver estos problemas dependen principalmente de dos variables: una es la complejidad numérica y diversidad contextual de los enunciados, y la otra es la complejidad estructural y dimensional de las relaciones entre las cantidades y entre las cantidades y sus referentes.

Marco teórico

1. En relación con la complejidad numérica y diversidad contextual son de obligada referencia los trabajos de Bell, Fischbein, & Greer (1984), Fischbein, Deri, Nello, & Marino (1985) y Greer (1987, 1992) que apuntan a la necesidad de enseñar las operaciones en diferentes contextos y modelos de situación, prestando atención a

su invariabilidad al cambiar el tipo y tamaño de los números; y a los malentendidos que tienen los estudiantes a consecuencia de las generalizaciones que hacen a partir de sus limitadas y sesgadas experiencias con números naturales, como por ejemplo que multiplicar hace mayor, dividir hace menor o que lo que hay que dividir es el número mayor por el número menor (Hart, 1981, Bell, Swan y Taylor, 1981).

2. En relación con las relaciones entre las cantidades y entre las cantidades y sus referentes, el foco lo han puesto los trabajos de Vergnaud (1983) y Schwartz (1988). El primero apuntando a la necesidad de reexaminar la noción de multiplicar al contemplarla como una relación funcional entre espacios de medida, que en el caso más común es una relación cuaternaria y no una relación ternaria como se desprende de la forma escolar $a \times b = c$. Esto se puede ver fácilmente en el caso más común de problemas multiplicativos el de la proporción directa entre dos espacios de medida, M1 y M2, que corresponde a un caso particular de "la regla de tres" en el que hay cuatro cantidades, dos son medidas de una cierta clase y otras dos son medidas de otra clase, una de las cuales es la unidad. La relación funcional permite esquematizar la situación aislando las cantidades (medidas) particulares, que son los datos del problema, de la tabla más completa que representaría la correspondencia, lo que facilita enormemente el reconocimiento de la operación directa que resuelve los problemas y las rutas escalar y funcional para hacerlo.

M1	M2
x	y=f(x)
x′	y′=f(x′)

Por su parte, Schwartz, apunta al efecto que la composición de cantidades produce en las unidades de referencia. Para explicar este efecto Schwartz señala que las cantidades usadas en matemáticas se derivan de las acciones de contar y medir, dependiendo de que estemos cuantificando cantidades discretas o continuas del entorno. Todas las cantidades que surgen en el curso de contar o medir tienen unidades de referencia (referentes).

En el conjunto de estas cantidades con referentes es posible definir operaciones binarias que a su vez pueden ser usadas para generar nuevas cantidades que pueden tener o no nuevas unidades de referencia. La composición de dos cantidades para producir una tercera cantidad puede tomar cualquiera de las dos formas: composición conservando la unidad de referencia o composición transformando la unidad de referencia.

La adición y sustracción son operaciones de composición de cantidades que conservan el referente, con cantidades similares se produce una tercera del mismo tipo. Mientras que la multiplicación y la división transforman el referente, dos cantidades de diferente especie producen una tercera cuya especie no es la misma que la de ninguna de las dos cantidades dadas. Por ejemplo, 5 paquetes de 4 caramelos por paquete son 20 caramelos, pero no 20 paquetes, ni 20 caramelos por paquete.

Las composiciones que transforman el referente llevan a Schwartz, a distinguir entre dos tipos de cantidades, las extensivas que expresan la extensión de una entidad como 4 canicas, que son las que responden a la pregunta cuánto o cuántos de una cantidad asociada a un tipo de objetos; y las intensivas que expresan una cualidad, un aspecto intensivo, como la velocidad o la densidad, pero no nos dicen cuántos hay de una cantidad en términos absolutos. Estas últimas expresan una relación entre una cantidad y una unidad de otra cantidad, por lo que a menudo son valores unitarios que contienen la palabra "por" (precio por cantidad unitaria), y su valor es constante como ocurre con la concentración de zumo de naranja, que es la misma en el vaso que en la jarra de donde procede.

Fuentes de dificultad en los problemas multiplicativos con números racionales

Atendiendo a las dos variables señaladas en los dos puntos anteriores, se ha constatado que la manera usual de presentar la multiplicación y división a los niños tiene defectos de procedimiento y conceptuales, porque se basa en modelos que son restrictivos, válidos en el dominio de los números naturales pero no siempre en el de los racionales, y porque no enseñan a pensar las relaciones entre cantidades y las relaciones entre las cantidades y sus referentes, de tal modo que constituyen un obstáculo para la comprensión apropiada de la multiplicación y división en un amplio rango de contextos y situaciones.

Por eso, se concluye que, en el caso de los números racionales, la dificultad de los problemas multiplicativos no es simplemente debida a la introducción de números más "duros", no es su mera presencia lo que influye en la dificultad, sino el papel que juegan en el problema, o cómo son interpretados en relación con los términos que dotan de significado a las operaciones multiplicativas[2].

Los modelos de situación

Un elemento crucial que afecta a la comprensión de los significados de las operaciones y de sus términos (multiplicando, multiplicador, producto, dividendo, divisor y cociente) es el de la discontinuidad en los modelos de situación al pasar de los números naturales a los racionales.

La noción de modelo de situación

La palabra modelo se usa en matemáticas para referirse a objetos matemáticos que reproducen, en forma simbólica, características esenciales de un fenómeno o situación del mundo real, que se pretende estudiar.

La finalidad del modelo matemático es la de hacer una réplica de la realidad y su función es la de simular acciones para deducir o predecir resultados. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, con la derivada, que es un modelo matemático de la velocidad instantánea.

En la enseñanza de las operaciones matemáticas elementales la relación entre los fenómenos o situaciones y sus modelos es a la recíproca. En vez de usar el modelo matemático para explicar un determinado fenómeno o situación, se usa un fenómeno o situación, con el que están familiarizados los estudiantes, para explicar el modelo matemático.

Es lo que ocurre, por ejemplo, con la temperatura, o con una pizza, como situaciones que se usan para modelar los números positivos y negativos, o las fracciones respectivamente.

La finalidad de este fenómeno o situación es crear condiciones para que de su observación y manipulación surja el conocimiento matemático que se persigue.

2 "La fuente de la dificultad está más probablemente en la falta de comprensión que tienen los niños de las diferentes maneras en que la multiplicación está involucrada en los problemas verbales" (Thibodeau & Mestre, 1989, p. 547).

Los modelos de situación, que por su intencionalidad de enseñanza-aprendizaje son modelos didácticos, tienen aquí dos funciones, una es la de apoyar la comprensión y la otra la de justificar y explicar el por qué sus propiedades son las que son y no otras, y que sus reglas de procedimiento no son caprichosas o son «porque sí».

Modelos de situación en las operaciones aritméticas elementales

Las operaciones matemáticas que se enseñan en la escuela elemental se representan por dos diferentes tipos de modelos: Los modelos simbólicos, que representan las operaciones por medio de numerales y signos; y los modelos de situación, que representan las operaciones con objetos tridimensionales, manipulables o pictóricos (imagen 1 y 2), o con problemas verbales, que es como aparecen comúnmente en los libros de texto (imagen 2).

Así, por ejemplo, las fórmulas $a + b = c$ y $a \times b = c$, constituyen modelos simbólicos de las operaciones de suma y multiplicación; mientras que la unión de dos conjuntos de objetos, la repetición de grupos de objetos iguales, o los problemas de añadir, constituyen modelos de situación didácticos de las operaciones de sumar o multiplicar. Las imágenes 1 y 2 siguientes, son ejemplos de modelos de situación de las operaciones elementales con diferentes sistemas de representación.

Imagen 1. Regletas de Cuisenaire

Imagen 2. Aguado, 1940, p. 42

En la práctica de la enseñanza de las operaciones aritméticas elementales, los modelos de situación se asocian a problemas verbales o de enunciado, como el que acompaña a la imagen de los candelabros en la imagen 2. Pero no todos son igualmente buenos para empezar por ellos. Una vez elegido uno, se favorecen unos aspectos o características de la operación y otros quedan en segundo plano o se ignoran.

En función de esto el problema-modelo de situación dota de significados restringidos a la operación y delimita los resultados de la enseñanza. Esto hace que las operaciones aritméticas están ligadas a problemas muy estereotipados que se asocian a lo que Fischbein y sus colegas denominan modelos intuitivos, implícitos, inconscientes y primitivos, los cuales son determinantes para la identificación de la operación correcta para resolver un problema[3].

Estos modelos primitivos intervienen en la interpretación de la operación, de tal modo que algunas veces facilitan el proceso de resolución, pero otras, cuando el problema no encaja con ellos, pueden retrasar, desviar o incluso bloquear dicho proceso de solución (Fischbein et al. op. cit., p. 14).

Modelos primitivos de la multiplicación y la división

De acuerdo con Fischbein, et al. (op. cit., p.6) el modelo primitivo que desarrollan los niños para la multiplicación es el de "adición repetida", y el de la división está basado inicialmente en la "partición" (repartir) y después en la "cuotición" (sustracción repetida o medida).

En la "adición repetida", un número de colecciones del mismo tamaño se ponen juntas, como ocurre en el ejemplo 1 (tomado de Fischbein et al., op. cit.):

Ejemplo 1: "1 kilo de naranjas cuesta 1500 liras. ¿Cuánto cuestan 3 kilos?"

Bajo la interpretación de "adición repetida", la multiplicación no es semánticamente conmutativa, ya que un factor (el número de colecciones) se toma como operador y el otro (la magnitud de cada colección) como operando. El operando puede ser cualquier cantidad, pero el ope-

3 "Cada operación aritmética fundamental permanece generalmente vinculada a un modelo, intuitivo implícito, inconsciente y primitivo. La identificación de la operación que se necesita para resolver un problema con dos ítems de datos numéricos no ocurre directamente sino que está mediatizada por el modelo. El modelo impone sus propias restricciones en el proceso de reconocimiento" (Fischbein et al., op. cit., p. 4).

rador debe ser un número entero natural, y consecuentemente multiplicar necesariamente hace mayor.

En la división por el operador se tiene la división "partitiva", donde un objeto o colección de objetos se divide en un número igual de fragmentos o subcolecciones, como así ocurre en el ejemplo 2, (tomado también de Fischbein et al., op. cit.):

Ejemplo 2: "En 8 cajas hay 96 botellas de agua mineral. ¿Cuántas botellas hay en cada caja?".

Bajo este modelo el dividendo debe ser mayor que el divisor, el divisor debe ser un número entero, y el cociente debe ser más pequeño que el dividendo, de acuerdo con la idea de que dividir hace más pequeño.

En la división por el operando se tiene la división "cuotitiva", donde se busca hallar cuántas veces una cantidad determinada esta contenida en una cantidad mayor, como se puede ver en el ejemplo 3 (también de Fiechbein et al., op. cit.).

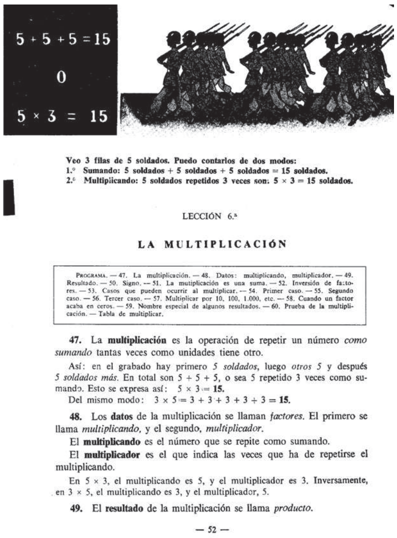
Ejemplo 3: "Para comprar un dólar se necesitan 1400 liras. ¿Cuántos dólares puedo comprar con 35 000 liras?".

En este caso, la única restricción es que el dividendo debe ser mayor que el divisor. Si el cociente es un número entero, el modelo puede ser visto como sustracción repetida (Fischbein et al., op., cit., p. 6). El cuadro 1 recoge en síntesis estos tres modelos.

Multiplicación-Adición repetida	División-partición	División - cuotición
1 kilo de naranjas cuesta 1500 liras. ¿Cuánto cuestan 3 kilos?	En 8 cajas hay 96 botellas de agua mineral. ¿Cuántas botellas hay en cada caja?	Para comprar un dólar se necesitan 1400 liras. ¿Cuántos dólares puedo comprar con 35 000 liras?

Cuadro 1. Ejemplos de los modelos usados en el estudio de Fischbein et al.

Estos modelos reflejan el modo en que los conceptos de las operaciones han sido inicialmente enseñados en la escuela, y responden a una tradición que se encuentra reflejada en los libros escolares, como por ejemplo en la siguiente aritmética de Edelvives, muy popular en nuestro país en los años 50.



5 + 5 + 5 = 15

0

5 × 3 = 15

Veo 3 filas de 5 soldados. Puedo contarlos de dos modos:
1.º Sumando: 5 soldados + 5 soldados + 5 soldados = 15 soldados.
2.º Multiplicando: 5 soldados repetidos 3 veces son: 5 × 3 = 15 soldados.

LECCIÓN 6.ª

LA MULTIPLICACIÓN

Programa. — 47. La multiplicación. — 48. Datos: multiplicando, multiplicador. — 49. Resultado. — 50. Signo. — 51. La mutiplicación es una suma. — 52. Inversión de factores. — 53. Casos que pueden ocurrir al multiplicar. — 54. Primer caso. — 55. Segundo caso. — 56. Tercer caso. — 57. Multiplicar por 10, 100, 1.000, etc. — 58. Cuando un factor acaba en ceros. — 59. Nombre especial de algunos resultados. — 60. Prueba de la multiplicación. — Tabla de multiplicar.

47. La **multiplicación** es la operación de repetir un número *como sumando* tantas veces como unidades tiene otro.

Así: en el grabado hay primero *5 soldados*, luego *otros 5* y después *5 soldados más*. En total son 5 + 5 + 5, o sea 5 repetido 3 veces como sumando. Esto se expresa así: 5 × 3 = **15.**

Del mismo modo: 3 × 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = **15.**

48. Los **datos** de la multiplicación se llaman *factores*. El primero se llama *multiplicando*, y el segundo, *multiplicador*.

El **multiplicando** es el número que se repite como sumando.

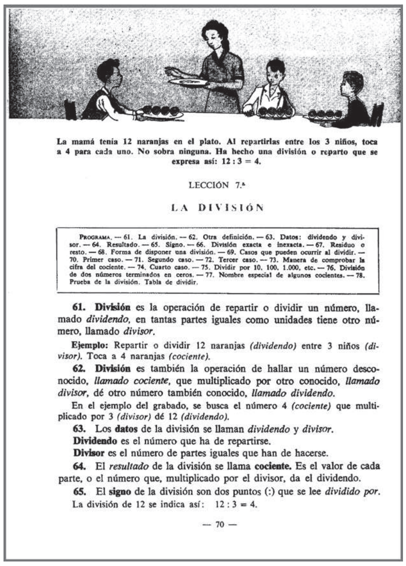
El **multiplicador** es el que indica las veces que ha de repetirse el multiplicando.

En 5 × 3, el multiplicando es 5, y el multiplicador es 3. Inversamente, en 3 × 5, el multiplicando es 3, y el multiplicador, 5.

49. El **resultado** de la multiplicación se llama *producto*.

— 52 —

"El multiplicando es el número que se repite como sumando. El multiplicador es el que indica las veces que ha de repetirse el multiplicando"



La mamá tenía 12 naranjas en el plato. Al repartirlas entre los 3 niños, toca a 4 para cada uno. No sobra ninguna. Ha hecho una división o reparto que se expresa así: 12 : 3 = 4.

LECCIÓN 7.ª

LA DIVISIÓN

Programa. — 61. La división. — 62. Otra definición. — 63. Datos: dividendo y divisor. — 64. Resultado. — 65. Signo. — 66. División exacta e inexacta. — 67. Residuo o resto. — 68. Forma de disponer una división. — 69. Casos que pueden ocurrir al dividir. — 70. Primer caso. — 71. Segundo caso. — 72. Tercer caso. — 73. Manera de comprobar la cifra del cociente. — 74. Cuarto caso. — 75. Dividir por 10, 100, 1.000, etc. — 76. División de dos números terminados en ceros. — 77. Nombre especial de algunos cocientes. — 78. Prueba de la división. Tabla de dividir.

61. División es la operación de repartir o dividir un número, llamado *dividendo*, en tantas partes iguales como unidades tiene otro número, llamado *divisor*.

Ejemplo: Repartir o dividir 12 naranjas *(dividendo)* entre 3 niños *(divisor)*. Toca a 4 naranjas *(cociente)*.

62. División es también la operación de hallar un número desconocido, *llamado cociente*, que multiplicado por otro conocido, *llamado divisor*, dé otro número también conocido, *llamado dividendo*.

En el ejemplo del grabado, se busca el número 4 *(cociente)* que multiplicado por 3 *(divisor)* dé 12 *(dividendo)*.

63. Los **datos** de la división se llaman *dividendo* y *divisor*.

Dividendo es el número que ha de repartirse.

Divisor es el número de partes iguales que han de hacerse.

64. El *resultado* de la división se llama **cociente.** Es el valor de cada parte, o el número que, multiplicado por el divisor, da el dividendo.

65. El **signo** de la división son dos puntos (:) que se lee *dividido por*.

La división de 12 se indica así: 12 : 3 = 4.

— 70 —

"Dividendo es el número que ha de repartirse. Divisor es el número de partes iguales"

Imagen 3. Edelvives, 1949, pgs. 52 y 70

Cuando se usan modelos "rectangulares", como el de los soldados, ilustrado en la parte derecha superior de la imagen 3, es inapropiado hablar de multiplicando y el multiplicador porque la situación es simétrica, basta con girar el dibujo para que lo que en la figura es una fila pase a ser una columna, y, en consecuencia, no es posible diferenciar el sumando que se repite, ya que tanto se puede decir que se repiten 5 soldados 3 veces como que se repiten 3 soldados 5 veces.

Efectos en la enseñanza de los modelos de situación

Limitaciones de los modelos primitivos

Las concepciones basadas en estos modelos primitivos son restrictivas, ya que funcionan en algunos casos pero no siempre, especialmente cuando los datos son números racionales.

De hecho se ha observado que muchos niños cambian su elección de la operación cuando se les presentan sucesivamente problemas que solo difieren en términos numéricos, y esto no lo consideran incongruente porque los consideran como problemas diferentes (Bell, Swan, & Taylor, 1981, p. 405). Por ejemplo, Ekenstam y Greger, (1983) plantearon a niños de 12 – 13 años un test de lápiz y papel con un problema sobre el precio del queso, en semanas diferentes pusieron el mismo problema cambiando los datos. Los problemas fueron (op. cit., p. 376):

- "Un queso pesa 5 kg., 1 kg cuesta 28 kr (coronas). Halla el precio del queso. ¿Qué operación has de hacer?: 28/5, 5×28, 5+28, 28+28+28+28
- Una pieza de queso pesa 0.923 kg., 1 kg cuesta 27.50 kr (coronas). Halla el precio del queso. ¿Qué operación has de hacer?: 27.50+0.923, 27.50/0.923, 0.923×27.50, 27.50-0.923"

Los porcentajes de aciertos fueron 83% y 29% para el primero y segundo problemas respectivamente. En opinión de los autores del trabajo, el segundo porcentaje fue tan bajo porque los niños elegían al azar la respuesta y la mayoría contestó que la respuesta correcta era la división, lo que explicaron diciendo que el coste del queso debía ser menor que 27.50, "por eso debo dividir para obtener un número menor" (op. cit., p. 376).

Como explicación de esta observación experimental, en la que los niños eligen la división, cuando en el mismo problema con números naturales eligen la multiplicación, Hart (1981) apuntó a los malentendidos o concepciones erróneas de los niños debidas a generalizaciones incorrectas, realizadas a partir de su primeras experiencias en cálculo, que están limitadas a los números naturales en cuyo dominio son correctas, como por ejemplo que la multiplicación hace mayor, la división hace menor y que la división es siempre del número mayor por el menor.

Dificultades para identificar la operación

Al pasar de trabajar con números naturales a trabajar con números racionales, la enseñanza de la multiplicación y división se suele orientar a la práctica de los algoritmos. Los modelos de situación de las operaciones ya no son un objetivo de enseñanza porque se dan por aprendidos, con lo cual los problemas se ponen, más o menos arbitrariamente, con el fin de mostrar que los algoritmos enseñados tienen aplicaciones, pero sin una base sólida que permita comprender cómo se selecciona la operación.

Esto es desafortunado, ya que tiene consecuencias en la competencia de los estudiantes que tienen dificultad para reconocer la operación en una gran variedad de problemas de multiplicación y de división de fracciones o decimales, porque en su enunciado no encuentran nada que permita identificarla. No encuentran nada en el enunciado que les diga si es de dividir o de multiplicar, o cuál es el multiplicador, el multiplicando, el dividendo o el divisor. Esto es algo que se puede apreciar en los ejemplos 4 y 5 siguientes, tomados de la influyente Aritmética de Rey Pastor y Puig Adam (1935, p. 211):

Ejemplo 4. "Si cada tarta pesa 3/7 kg., ¿qué porción de tarta tendré con 2/9 kg.?"

Ejemplo 5. "3/7 de tarta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la tarta?"

Sin resolver el problema, el lector puede tantear a dar su opinión sobre cuál es la operación directa que resuelve el problema: multiplicar o dividir, y en su caso, quién es el multiplicando, el multiplicador, el dividendo o el divisor.

Discontinuidad semántica

Significado de los términos de la operación en los modelos de situación primitivos

En las situaciones multiplicativas la interpretación de los términos de las operaciones aritméticas es relevante para identificar la operación. Cuando la situación es asimétrica, hay un término que actúa como operador y hay otro que actúa como operando.

En el caso de la "adición repetida", como en el caso del ejemplo 6 (Anaya, 1986, p. 70), el operador es el multiplicador que es fácilmente reconocible porque indica cuántas veces ha de repetirse el operando. El operando es el multiplicando y es reconocible porque es el número que se repite.

Ejemplo 6. "Una caja contiene 36 bombones. Averigua los que contienen 5 cajas".

Como ya se ha dicho antes, la diferenciación entre multiplicando y multiplicador determina dos tipos de división, según que se divida por el uno o por el otro. También determina significados diferentes para los términos de la división. Mientras que en la división lo que es el producto de la multiplicación pasa a ser el dividendo, el divisor adquiere el significado derivado del multiplicador o del multiplicando, según la opción de división elegida, "partición" o "cuotición", como se ve en los ejemplos 7 y 8, tomados también de Anaya (op. cit., p. 82):

Ejemplo 7. "Si pagamos 96 pesetas por 34 helados ¿cuánto cuesta cada uno?"

En el ejemplo 7, la división es "partitiva" ya que el divisor corresponde al multiplicador en la multiplicación indicada 34 × ¿? = 96; pero ahora, en vez de indicar el número de veces que se repite una cantidad, el multiplicando, indica el número de partes iguales, 34, en que se descompone otra cantidad, el dividendo, 96.

El multiplicando, en vez de indicar el número cuya repetición da el producto, indica ahora el número en cada una de esas partes iguales, su tamaño, y es el número que se busca o cociente.

Ejemplo 8. "Un profesor reparte 78 dibujos entre sus alumnos, de forma que a cada uno le tocan 6 dibujos. ¿Cuántos alumnos tiene?"

En el ejemplo 8, la división es "cuotitiva", ya que el divisor corresponde al multiplicando en la multiplicación indicada ¿? × 6 = 78; pero ahora, en vez de indicar el número cuya repetición da el producto, indica el número, 6, contenido un número desconocido de veces en el dividendo, 78.

El multiplicador, en vez de indicar el número de veces que el multiplicando está repetido, indica el número de veces que el divisor está contenido en el dividendo, y es el número que se busca o cociente. Noción que no tiene sentido cuando el dividendo es menor que el divisor.

El cuadro 2 resume estos significados.

Multiplicación - sumar un número tantas veces como unidades tiene otro. Multiplicador - número que indica cuántas veces ha de sumarse o repetirse el multiplicando. Multiplicando - número que se suma o repite tantas veces como indica el multiplicador.	Divisor: el multiplicador - número de partes iguales en que se descompone el dividendo. Cociente- número en cada una de las partes en que se descompone el dividendo	Divisor: el multiplicando – número contenido repetidamente en el dividendo. Cociente – número de veces que el divisor está contenido en el dividendo.
Una caja contiene 36 bombones. Averigua los que contienen 5 cajas.	Si pagamos 96 pesetas por 34 helados, ¿cuánto cuesta cada uno?	Un profesor reparte 78 dibujos entre sus alumnos, de forma que a cada uno le tocan 6 dibujos. ¿Cuántos alumnos tiene?"

Cuadro 2. Significados de los términos de los problemas 6, 7 y 8

Discontinuidad semántica de los modelos de situación

El significado del multiplicando y del multiplicador en los problemas asimétricos basado en el modelo de "adición repetida" no funciona cuando se trabaja con números racionales. Esto se puede observar en el ejemplo 9 (Rey Pastor y Puig Adam, 1935, p. 209), donde es evidente que la estrategia de iterar el número de veces requerido no puede llevarse a cabo.

Ejemplo 9. "Cada metro de tela cuesta 3/5 de duro, ¿cuántos duros cuestan 7/4 de m?"

Así, mientras que sería normal hablar de repetir 3 duros 7 veces, no lo es hablar de repetir 3 duros 7/4 de vez, o 3/5 de duro 7/4 de vez. Por tanto, se puede decir que el modelo de "adición repetida" no tiene continuidad semántica cuando el multiplicador es una fracción.

En el caso de la división "partición", tampoco funciona la interpretación del dividendo y divisor cuando los datos son números racionales. Esto se puede ver en el ejemplo 10 (adaptado de Santillana, 1997, p. 53), donde la estrategia de partir o repartir el dividendo no puede llevarse a cabo, ya que mientras que es normal repartir 10 entre 5, no lo es repartir 3 entre 5, y mucho menos repartir 3/4 entre 5/12. Por tanto, tampoco el modelo de división "partición" tiene continuidad semántica cuando el divisor es una fracción.

Ejemplo 10. "Un móvil A recorre ¾ de km en 5/12 de minuto. Calcula el recorrido en 1 minuto".

Sin embargo, con el modelo de la división "cuotición" no parece haber discontinuidad semántica, como así se puede observar en el ejemplo 11, (Anaya, 2004b, p. 76), que es fácilmente reconocible como de división "cuotición", a pesar de que los datos son números racionales.

Ejemplo 11: "Un frasco de perfume tiene una capacidad de 1/20 de litro. ¿Cuántos frascos de perfume se pueden llenar con el contenido de una botella de ¾ de litro?"

Es más, aunque con los enteros naturales la división "cuotición" solo tiene sentido cuando el divisor es menor que el dividendo, en el caso de los números racionales esta condición se puede sortear. Esto es lo que se hace cuando se pretende medir una longitud con una unidad mayor, y lo que se hace es partir la unidad mayor en subunidades y dar el resultado de la medida mediante esas subunidades que no son otra cosa que partes de esa unidad; es decir, como una fracción. Así el cociente es una fracción menor que la unidad, pero la división sigue siendo "cuotición".

Enfoques para salvar las dificultades derivadas de la discontinuidad semántica

En los libros de texto hay diversidad de enfoques para superar el problema de la discontinuidad semántica de los modelos de situación de los problemas multiplicativos. En lo que sigue se presentan estas formas bajo los epígrafes: análisis semántico, dimensional, estructural, comparativo y aritmético.

Análisis semántico

Hay una tradición de enseñanza que propone fijarse en la naturaleza o especie de los datos del problema para identificar los términos de la operación.

La forma textual en que queda recogida esa tradición está reflejada en el siguiente extracto: "El producto es de la misma especie que el multiplicando porque este es una parte de aquél, y un todo y sus partes son necesariamente de la misma especie" (Cirodde, 1865, p. 12).

Al aplicar esta condición al ejemplo 9, citado antes: Cada metro de tela cuesta 3/5 de duro, ¿cuántos duros cuestan 7/4 de m?, se observa que 3/5 es de la misma especie que la cantidad que se busca, ambas cantidades se refieren a "duros", por lo que 3/5 es el multiplicando, 7/4 es el multiplicador y la cantidad que se busca es el producto.

Otra tradición de enseñanza es la que trata es de hacer aparecer la multiplicación de fracciones o decimales como una generalización de la definición primitiva de multiplicación de números naturales; y al revés, que esa noción general de multiplicación de números racionales se particularice en la forma primitiva de multiplicación de números naturales.

Esto se logra al considerar que "multiplicar un número por otro es formar un número con el primero de la misma manera que el segundo está formado con la unidad" (Lacroix, 1846, p. 44), de modo que el objeto de multiplicar, que con números naturales es aumentar el multiplicando, con fracciones es tomar una parte de él[4].

4 "La doctrina de las fracciones nos permite generalizar la definición de multiplicación dada en el artículo 21. Cuando el multiplicador es un número entero, indica cuantas veces el multiplicando debe repetirse, al extenderlo a las expresiones fraccionarias, esto no siempre implica aumento, como en el caso de los números enteros. Para englobar en una sola frase todos los casos posibles, se podría decir que multiplicar un número por otro es formar un número con el primero, de la misma manera que el

Este consideración, que es útil para reconocer la operación de multiplicar en determinados problemas con números racionales, determina un nuevo modelo de situación conocido como "Parte de" (entero) o "Fracción de fracción" según sea el caso.

Los ejemplos, 12 y 13, ilustran los dos casos en este modelo de situación:

Ejemplo 12. Parte o fracción de entero. "Un empresario se comprometió a construir la carretera que debía unir dos pueblos de importancia, por 24.500 pesetas; mas dicho contrato quedó sin efecto, mediante convenio, al haber construido los 5/9 de la mencionada carretera. ¿Cuánto debió recibir el empresario?" (Dalmau, 1944, p. 104).

Ejemplo 13. Parte o fracción de fracción. "En una clase, 5/6 de los alumnos han aprobado el control de matemáticas. Si 1/5 de los aprobados tienen calificación de notable, ¿qué fracción del total tienen notable?" (Anaya, 2004a, p. 145).

Bajo este modelo el significado de los términos cambia. Ahora, multiplicar es tomar de un número dado una parte denotada por el multiplicador, el multiplicador es la parte o fracción que se toma, el multiplicando es la cantidad de la que se toma una parte y el producto la cantidad reducida resultante tras tomar una parte.

En la división, lo que en la correspondiente multiplicación sería el producto o cantidad reducida es ahora el dividendo, y el divisor adquiere el significado derivado del multiplicador o del multiplicando, según la opción de división elegida, como se puede observar en los ejemplos 14 y 15:

Ejemplo 14. "¿Cuántos habitantes tiene una población sabiendo que los menores de quince años son 2800 y suponen los 2/7 del total?" (Anaya, 2004a, p. 145).

---

segundo está formado con la unidad.

De hecho, cuando se requiere multiplicar por 2, por 3, &c. el producto consiste en dos, tres, veces, &c. el multiplicando, de la misma manera que el multiplicador consiste en dos, tres, &c. unidades; y multiplicar cualquier número por una fracción, 1/5 por ejemplo, es tomar la quinta parte de él, porque multiplicar por 1/5 que es la quinta parte de la unidad, indica que el producto debe ser la quinta parte del multiplicando.

También, multiplicar cualquier número por 4/5 es tomar de ese número o del multiplicando, una parte, que será cuatro quintos de él, o igual a cuatro veces un quinto.

De aquí que el objeto de multiplicar por una fracción, cualquiera que sea el multiplicando, es tomar del multiplicando una parte, denotada por el multiplicador fracción" (Lacroix, op. cit., p. 44).

En el ejemplo 14, la parte reducida resultante, 2800, es el dividendo y el divisor es la fracción o parte que se toma, 2/7, que correspondería al multiplicador; siendo la cantidad buscada, el cociente, la cantidad de la que se toma una parte, que correspondería al multiplicando.

Ejemplo 15. "El ancho de una foto mide 9'5 cm. Se quiere hacer una fotocopia de la misma para pegarla en el espacio en blanco de una página cuyo ancho es 6'4 cm. ¿Qué número tiene que aparecer en el indicador del zoom de la fotocopiadora?" (S.M., 1998, p. 80).

En el ejemplo 15, el dividendo también es la parte reducida, 6'4, mientras que el divisor es la cantidad de la que se toma una parte, 9'5, que correspondería al multiplicando, y el cociente es la fracción que se toma, que correspondería al multiplicador.

El cuadro 3 recoge estos significados.

Multiplicación: tomar del multiplicando una parte denotada por el multiplicador fracción Multiplicador: parte o fracción que se toma Multiplicando: cantidad de la que se toma una parte	Divisor: multiplicador- fracción o parte que se toma Dividendo – parte reducida resultante Cociente – cantidad de la que se toma una parte	Divisor: multiplicando - cantidad de la que se toma una parte Dividendo – parte reducida resultante Cociente – fracción que se toma
Un empresario se comprometió a construir la carretera que debía unir dos pueblos de importancia, por 24.500 pesetas; mas dicho contrato quedó sin efecto, mediante convenio, al haber construido los 5/9 de la mencionada carretera. ¿Cuánto debió recibir el empresario?	¿Cuántos habitantes tiene una población sabiendo que los menores de quince años son 2800 y suponen los 2/7 del total?	El ancho de una foto mide 9'5 cm. Se quiere hacer una fotocopia de la misma para pegarla en el espacio en blanco de una página cuyo ancho es 6'4 cm. ¿Qué número tiene que aparecer en el indicador del zoom de la fotocopiadora?

Cuadro 3. Significados de los términos en los problemas 12, 14 y 15

Análisis dimensional

Si en el ejemplo 9: "Cada metro de tela cuesta 3/5 de duro, ¿cuántos duros cuestan 7/4 de m?", en lugar de atender a la especie de las cantidades: duros y metros, se centra la atención en el referente de las cantidades, se observara que aunque el multiplicando y el producto son de la misma especie de unidades no tienen el mismo referente. El referente de una de las cantidades, 3/5, es duros/metro, y el de la otra cantidad, 7/4, es metros, mientras que el referente del producto no es ni duros/metro ni metros, sino duros. Por eso, Schwartz (1988) dice que la afirmación de que el multiplicando y el producto son de la misma especie deja de lado la característica esencial de la multiplicación, que es una composición que transforma el referente dando lugar a una cantidad de un nuevo tipo. Ante estos problemas, Schwartz propone fijarse en la triada semántica: I, E, E′ (la cantidad intensiva y las dos extensivas), y en su referentes.

1. En los problemas que son de Isomorfismo de medidas (una proporción simple directa entre dos espacios de medida donde uno de los datos es la unidad), siempre hay una cantidad intensiva que es un valor unitario. Puede ocurrir que el valor unitario, la cantidad intensiva I, sea un dato del problema o sea la cantidad que se busca. Si el valor unitario es un dato conocido, cuando el problema es de multiplicar, es el multiplicando, y cuando es de dividir es el divisor. Cuando el valor unitario es la cantidad que se busca, es el cociente.

Esto se puede ver en los ejemplos 16, 17 y 18, para cuya resolución se usa el análisis dimensional.

Ejemplo 16. "En un jarro caben 2/5 de litro. ¿Cuántos litros hay en ¾ de jarro?" (Anaya, 1995, p. 145).

Las cantidades son : $I_{litros/jarro} = 2/5$, $E_{jarro} = 3/4$, $E_{litros} =$ ¿? La operación que permite obtener el valor de E_{litros} es $I_{litros/jarro} \times E_{jarro} = 2/5 \times 3/4$.

Ejemplo 17. "3/7 de tarta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la tarta?" (Rey Pastor y Puig Adam, 1935, p. 211).

Se busca el valor unitario. Las cantidades son: $E_{kg}= 2/9$, $E_{tarta}= 3/7$, $I_{kg/tarta} =$ ¿? La operación que permite obtener el valor de $I_{kg/tarta}$ es $E_{kg} \div E_{tarta} = 2/9 \div 3/7$

Ejemplo 18. "Si cada tarta pesa 3/7 kg., ¿qué porción de tarta tendré con 2/9 kg?" (Rey Pastor y Puig Adam, 1935, p. 211).

Se conoce el valor unitario. Las cantidades son: $I_{kg/tarta} = 3/7$, $E_{kg} = 2/9$, $E_{tarta}=$ ¿? La operación que permite obtener el valor de E_{tarta} es $E_{kg} \div I_{kg/tarta}= 2/9\div3/7$

El cuadro 4 resume el análisis dimensional de estos problemas

Multiplicador: valor unitario.	*Divisor: multiplicador-cantidad extensiva. Cociente valor unitario*	*Divisor: multiplicando-valor unitario.*
En un jarro caben 2/5 de litro. ¿Cuántos litros hay en ¾ de jarro? $E_{litros} = I_{litros/jarro} \times E_{jarro} = 2/5\times3/4$	3/7 de tarta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la tarta? $I_{kg/tarta} = E_{kg} \div E_{tarta} = 2/9 \div 3/7$	Si cada tarta pesa 3/7 kg., ¿qué porción de tarta tendré con 2/9 kg.? $E_{tarta} = E_{kg} \div I_{kg/tarta}= 2/9\div3/7$

Cuadro 4. Análisis dimensional de los problemas 16, 17 y 18

2. No en todos los problemas multiplicativos cambia el referente, ni siempre hay un valor unitario. Esto es lo que ocurre en los problemas de un solo espacio de medida como el del ejemplo 19:

Ejemplo 19. "La edad de una señora es 3 veces mayor que la de su hija, que tiene 10 años. ¿Cuántos años tendrá la señora?" (S.T.J., serie, p. 76).

En este tipo de problemas, a diferencia de los problemas de dos espacios de medida, el multiplicador no tiene referente y el multiplicando es una medida que cambia de magnitud en el producto. Además las expresiones lingüísticas "x veces más o x veces menos" son inevitables en el enunciado (Vergnaud, 1991, p. 220).

Cuando los datos son fracciones, estos problemas corresponden al modelo de situación "parte de" o "fracción de fracción". El cambio de la medida dada en el enunciado del problema no es aumentando un número de veces sino reduciendo en una parte o fracción, de modo que en la multiplicación el multiplicando es la medida que cambia de magnitud reduciéndose y en la división es el divisor si la división es por el multiplicando, y es el cociente si la división es por el multiplicador. Los ejemplos, 20, 21 y 22 ilustran las tres situaciones posibles.

Ejemplo 20. "En una clase, 5/6 de los alumnos han aprobado el control de matemáticas. Si 1/5 de los aprobados tienen calificación de notable, ¿qué fracción del total son notables?" (Anaya, 2004ª, p. 145).

Los datos son: $E_{\text{aprobados-clase}}= 5/6$, $K_{\text{operador escalar}}= 1/5$, $E_{\text{alumnos notable}}=$ ¿? La operación que permite obtener el valor de $E_{\text{alumnos notable}}$ es $K_{\text{operador-escalar}} \times E_{\text{aprobados-clase}} = 1/5 \times 5/6$

Ejemplo 21. "¿Cuántos habitantes tiene una población sabiendo que los menores de quince años son 2800 y suponen los 2/7 del total? (Anaya, 2004a, p. 145).

Los datos son: $E_{\text{habitantes-menores}}= 2800$, $K_{\text{operador-escalar}}= 2/7$, $E_{\text{habitantes-totales}}=$ ¿? La operación que permite obtener el valor de $E_{\text{habitantes-totales}}$ es $E_{\text{habitantes-menores}}/K_{\text{operador-escalar}}= 2800 \div 2/7$

Ejemplo 22. "Mientras que un ciclista hace los 3/8 de una distancia, un auto hace los 4/5 de la misma distancia. ¿Cuántas veces va más deprisa el auto que el ciclista" (Cenzano, 1938, p. 198).

Los datos son: $E_{\text{distancia}}= 4/5$, $E_{\text{distancia-menor}}=3/8$, $K_{\text{operador escalar}}=$ ¿? La operación que permite obtener el valor de $K_{\text{operador escalar}}$ es $E_{\text{distancia}}/E_{\text{distancia-menor}}= 4/5\div3/8$

El cuadro 5 resume el análisis dimensional de estos problemas.

Multiplicador: operador escala	Divisor: multiplicador - operador escalar	Divisor: multiplicando - medida que se reduce
En un rebaño de 300 ovejas el 20% son negras. ¿cuántas ovejas negras hay? $E_{negras}=K\times E_{rebaño}=20/100\times 300$	¿Cuántos habitantes tiene una población sabiendo que los menores de quince años son 2800 y suponen los 2/7 del total? $E_{hab\text{-}totales}=E_{hab\text{-}menores}/K$ $=2800\div 2/7$	Mientras que un ciclista hace los 3/8 de una distancia, un auto hace los 4/5 de la misma distancia. ¿Cuántas veces va más deprisa el auto que el ciclista. $K=E_{distancia}/E_{distancia\text{-}menor}=$ $4/5\div 3/8$

Cuadro 5. Análisis dimensional de los problemas 20, 21 y 22

Análisis estructural

Una de las herramientas más útiles salvar la discontinuidad semántica y facilitar el reconocimiento de la operación directa que resuelve los problemas multiplicativos es el análisis estructural de Vergnaud (1983), que en el caso de los problemas de dos espacios de medida se apoya en el esquema cuaternario representado en una tabla de doble entrada.

1. La forma de proceder, en el caso de los problemas de Isomorfismo de medidas, se ilustra a continuación con los mismos problemas, 16, 17 y 18, ya estudiados dimensionalmente.

Se conoce el valor unitario. "En un jarro caben 2/5 de litro. ¿Cuántos litros hay en ¾ de jarro?"

jarro	litros
1	2/5
3/4	x

Sol. $x=3/4\times 2/5$

Se busca el valor unitario: "3/7 de tarta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la tarta?"

tarta	kg
1	x
3/7	2/9

Sol. $x=2/9 \div 3/7$

Se conoce el valor unitario: “Si cada tarta pesa 3/7 kg., ¿qué porción de tarta tendré con 2/9 kg?”

tarta	kg
1	3/7
x	2/9

Sol. x=2/9 ÷ 3/7

2. La forma de proceder, en el caso de los problemas de un solo espacio de medidas, se ilustra con los mismos problemas 20, 21 y 22 estudiados antes. Aquí, el esquema ya no es cuaternario.

Multiplicación. “En una clase, 5/6 de los alumnos han aprobado el control de matemáticas. Si 1/5 de los aprobados tienen calificación de notable, ¿qué fracción del total son notables?

	alumnos
Aprobados	5/6 ↓1/5
Notable	x

Sol. 1/5 × 5/6

División por el multiplicador. “¿Cuántos habitantes tiene una población sabiendo que los menores de quince años son 2800 y suponen los 2/7 del total?”

	Habitantes
Población	x ↓2/7
Menores	2800

Sol. 2800 ÷ 2/7

División por el multiplicando. “Mientras que un ciclista hace los 3/8 de una distancia, un auto hace los 4/5 de la misma distancia. ¿Cuántas veces va más deprisa el auto que el ciclista? (Cenzano, 1938, p. 198).

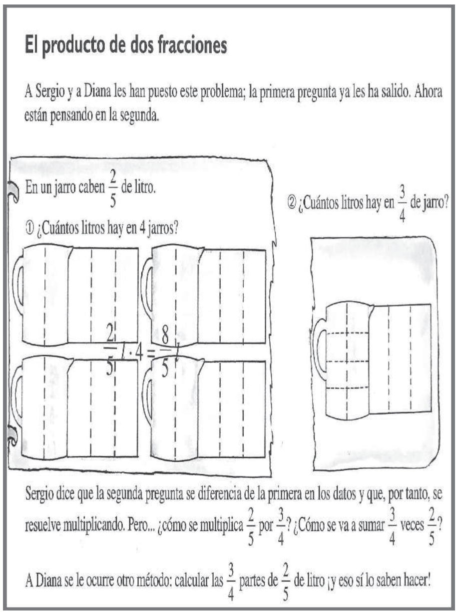
	distancia
Auto	4/5 ↓x
Ciclista	3/8

Sol. 4/5 ÷ 3/8

Análisis comparativo

Una alternativa a los métodos de análisis anteriores para identificar los términos y la operación correcta cuando el enunciado del problema no permite reconocer la operación es el análisis comparativo o por analogía, que admite dos modalidades:

1. Análisis comparativo directo: Comparar con un problema análogo con enteros naturales para ver si la operación se muestra más nítidamente al hacer visible el modelo de situación que la identifica. En la imagen 4 se recoge la forma en que se plantea esta comparación en un texto de la editorial Anaya (1995, p. 145).


El producto de dos fracciones

A Sergio y a Diana les han puesto este problema; la primera pregunta ya les ha salido. Ahora están pensando en la segunda.

En un jarro caben $\frac{2}{5}$ de litro.

① ¿Cuántos litros hay en 4 jarros?

$\frac{2}{5} l \cdot 4 = \frac{8}{5} l$

② ¿Cuántos litros hay en $\frac{3}{4}$ de jarro?

Sergio dice que la segunda pregunta se diferencia de la primera en los datos y que, por tanto, se resuelve multiplicando. Pero... ¿cómo se multiplica $\frac{2}{5}$ por $\frac{3}{4}$? ¿Cómo se va a sumar $\frac{3}{4}$ veces $\frac{2}{5}$?

A Diana se le ocurre otro método: calcular las $\frac{3}{4}$ partes de $\frac{2}{5}$ de litro ¡y eso sí lo saben hacer!

Imagen 4. Análisis comparativo directo (Anaya, 1995, p. 145)

2. Análisis comparativo indirecto o por reducción a común denominador.

Consiste en transformar el problema en otro equivalente reduciendo las fracciones a común denominador, con ello se persigue ver si la operación se muestra más nítidamente al hacer visible el modelo de situación con números naturales.

El siguiente extracto de Rey Pastor y Puig Adam (1935) ilustra el procedimiento.

"Ejemplo. Si cada torta pesa $\frac{3}{7}$ kg., ¿qué porción de torta tendré con $\frac{2}{9}$ kg.? Indicaremos la operación así: 2/9 : 3/7 (dividendo y divisor homogéneos).

Reduciendo los pesos a la misma parte alícuota de kg., plantearemos la pregunta de este otro modo: Si cada torta pesa $\frac{3\cdot 9}{7\cdot 9}$ kilogramos, ¿cuánto tendré por $\frac{2\cdot 7}{9\cdot 7}$? De modo que, tomando por nueva unidad $\frac{1}{7\cdot 9}$ kg., la torta pesa 3×9 unidades, luego con 2×7 unidades tendré una porción de torta igual a $\frac{2\cdot 7}{3\cdot 7}$; este cociente abstracto tiene la misma expresión que antes; pero ahora representa fracción de torta, mientras que antes lo era de kilo" (op. cit., pgs. 211 y 212).

Como se ve, igual que antes, al tomar como nueva unidad el denominador común, el problema se reduce a un modelo de división conocido (medida).

Análisis aritmético o por inversión de la fracción

Finalmente, se reseña una última alternativa que consiste en deshacer la fracción utilizando como mediador la fracción unitaria. Aquí subyace una concepción de las operaciones de multiplicar y de dividir fracciones con base en la noción de fracción como operador. Esta concepción interpreta estas operaciones como una operación doble de multiplicar y dividir naturales[5], evitando así implementar el cambio conceptual necesario para interpretar la discontinuidad de los modelos de situación cuando los datos son números racionales.

5 Los problemas llamados de multiplicación de fracciones son, en rigor, problemas de multiplicación y división combinados (Rey Pastor y Puig Adam, op. cit., p. 210).

Los siguientes extractos de Rey Pastor y Puig Adam (op. cit., pgs. 209 y 2011) sobre los ejemplos 9 y 13, utilizados anteriormente, ilustran el procedimiento:

Ejemplo. "Cada metro de tela cuesta 3/5 de euro ¿cuántos euros cuestan 7/4 de m?

Indicaremos la operación así: $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{4}$; y diremos. Si cada m cuesta $\frac{3}{5}$ de euro, la cuarta parte de un m, es decir, ¼ m costará $\frac{3}{5}\div 4=\frac{3}{5\cdot 4}$ de euro, y $\frac{7}{4}$ costará siete veces más, o sea $\frac{3\cdot 7}{5\cdot 4}=\frac{21}{20}$ de euro".

Ejemplo. "$\frac{3}{7}$ de torta pesan $\frac{2}{9}$ de kilo. ¿Cuánto pesa la torta? Indicaremos la operación así 2/9 : 3/7 y diremos: si

Si 3 séptimos de torta pesan $\frac{2}{9}$ de kilo,

1 séptimo de torta pesará $\frac{2}{9}\div 3 = \frac{2}{9\cdot 3}$

y la torta entera = 7 séptimos de torta, pesará $\frac{2}{9\cdot 3}\times 7=\frac{2\cdot 7}{9\cdot 3}$ ".

Conclusiones y cuestiones abiertas

En general, los aportes de la investigación en relación con la comprensión de las operaciones aritméticas elementales y los problemas de situación que las modelan, en particular en el tránsito de los números naturales a los racionales, pone de evidencia que la falta de competencia de los estudiantes en la resolución de los problemas multiplicativos está influida por diversos factores, uno de ellos es el fenómeno de la discontinuidad de los modelos de situación.

En este artículo se ofrecen varios enfoques para abordar este fenómeno, en unos de ellos se requiere un cambio conceptual, para dar acceso a nuevos modelos de situación, y a nuevos significados de las operaciones y de sus términos; en otros se ignora o evita este cambio conceptual atendiendo a las relaciones entre las cantidades y entre las cantidades y sus referentes, o mediante procedimientos como invertir la fracción, reducir a común denominador o comparar con un problema análogo con números naturales.

Estos enfoques plantean alternativas para desarrollar un curriculum que permita salvar las discontinuidades señaladas, pero no sabemos gran cosa de cómo se debe hacer esto. Tal vez algunos enfoques funcionen mejor con unos problemas que con otros, y tal vez algunos enfoques no necesitan ser enseñados porque los estudiantes los desarrollan por sí mismo y otros necesiten intervención externa del profesor o del libro de texto.

Lo que y tal vez está por ver es qué conocimientos usan los estudiantes para salvar las discontinuidades y qué enfoques son los más apropiados para diseñar la intervención del profesor de modo que se favorezca que los estudiantes que tropiezan con dificultades las superen.

Referencias bibliográficas

Aguado, A. (1940). *Aritmética del parvulario. Método por imágenes*. Madrid: Autor.

Anaya (1986). Azimut.Matemáticas 3º E.G.B. Equipo signo. Madrid: Autor.

- (1995). Matemáticas 6º Primaria (L. Ferrero, I. Gaztelu, Mª J. Luelmo, P. Martín y L. Martínez) Madrid: Autor.

- (2004a). Matemáticas, 1º ESO (J. Colera, I. Gaztelu). Madrid: Autor.

- (2004b). Matemáticas, 2º ESO. (J. Colera y I. Gaztelu). Madrid: Autor.

Bell, A., Fischbein, E., & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics, 15,* 129–147.

Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational studies in Mathematics*, *12*, 399-420.

Cenzano, J. (1938). *Matemáticas* Primer Curso. Bachillerato, plan 1938. Madrid.

Cirodde, P. L. (1865). *Lecciones de Aritmética*. (Traducido por Francisco Zoleo). Undécima tirada. Madrid: Carlos Bailly-Bailliere.

Dalmáu Carles. J. (1944). *Aritmética razonada y Nociones de álgebra. Tratado teórico-práctico demostrado con aplicación a las diferentes cuestiones mercantiles para uso de las Escuelas Normales y de las de Comercio*. Nueva Edición corregida y aumentada. Libro del alumno. Grado profesional. Gerona. Ed. Dalmáu Carles. 1ª ed de 1898.

Edelvives (1949). *Aritmética primer grado*. Zaragoza: Luis Vives.

Ekenstam, A., & Greger, K. (1983). Some aspects of children's ability to solve mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, 14,* 369-384.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education 16,* 3–17.

Greer, B. (1987). Understanding of arithmetical operations as models of situations. En

J. Sloboda y D. Rogers (eds.), *Cognitive processes in mathematics* (60-80). Oxford: Clarendon Press.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (276-295). New York: Macmillan.

Hart, K. (ed.) (1981). *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*. London: Murray.

Lacroix, S. F. (1846). *Curso completo elemental de Matemáticas Puras*, compuesto en francés por S. F. Lacroix: traducido al castellano por D. Josef Rebollo y Morales, catedrático de los Caballeros Pages de S. M. Tomo II. Algebra. Sexta edición. (Primera edición del original 1819. Título: Cours Complet de Mathematiques à l'usage de l'Ecole centrale des Quatre -Nations; Ouvrage adopté par le Gouvernement pour les Lycées, ecoles secondaires, Colléges, etc.). Madrid: En la Imprenta Nacional.

Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1935). *Elementos de Aritmética. Colección elemental intuitiva*. Tomo I. Madrid. 1º ed. 1927.

Santillana (1997). Matemáticas, 2º Secundaria. (J. A. Almodóvar, P. García, J. Gil y A. Nortes). Madrid: Autor.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (41-52), Reston VA: NCTM; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

SM (1998). *Aritmos, Matemáticas 2º Secundaria*. Madrid: Autor (José R. Vizmanos y Máximo Anzola).

S.T.J. (serie, primera mitad del siglo XX). *Aritmética. Segundo grado*. Tercer y cuarto curso. 2ª ed. Barcelona. Editorial Altés: Autor.

Thibodeau, P. & Mestre, J. P. (1989). Understanding Multiplicative Contexts Involving Fractions. *Journal of educational Psychology*. *81*, 4, 547-557.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* . N. Y.: Academic Press, pp. 127-174.

Vergnaud, G. (1991). *L'enfant, la mathématique et la realité.* Problémes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. 4ª Ed. Berne-Frankfurt-New York-París. Peter Lang. 1981 (Hay edición en español de Trillas).