

**UNIVERSIDAD DE MURCIA**

Departamento de Ingeniería de la Información y las  
Comunicaciones

Tesis Doctoral

**Razonamiento Espacial con Relaciones  
Cardinales Basado en Problemas de  
Satisfacción de Restricciones y Lógicas  
Modales**

Autor

**Antonio Morales Nicolás**

Directores

**Isabel María Navarrete Sánchez**

**Guido Sciavicco**

**Marzo de 2010**



# Agradecimientos

En primer lugar quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mis directores de tesis, Isabel Navarrete Sánchez y Guido Sciavicco, por su apoyo constante y sus acertados consejos durante estos años, y porque sin su ayuda este trabajo de investigación no hubiera llegado a buen término.

Gracias al grupo de investigación de Inteligencia Artificial e Ingeniería del Conocimiento de la Universidad de Murcia, en especial a los doctores Roque Marín Morales y José Tomás Palma Méndez por darme la oportunidad de iniciarme en el mundo la investigación. A mis compañeros Manuel Campos Martínez, José Manuel Juárez Herrero y José Salort Rodríguez Navas por darme su apoyo siempre que lo he necesitado desde el principio. Todos ellos han sido para mí un ejemplo a seguir.

No puedo olvidarme tampoco de aquellas personas con las que he trabajado y coincidido en el ámbito académico desde mis inicios en el grupo de investigación y con las que he compartido muy buenos momentos: mis compañeros de laboratorio Pedro Hernández, José Ricardo, Tamara Riestra y Antonio Gomariz; Joaquín Cañadas y Paco Guil de la Universidad de Almería; mis compañeros mejicanos de doctorado Rodrigo, Mario y Gerardo y el Dr. Francisco Palacios del Hospital Universitario de Getafe.

Un agradecimiento muy especial a mis padres y hermanos, a mi novia Marisa y a mis amigos por su apoyo incondicional durante estos años y el interés que han demostrado siempre en lo que he estado haciendo, aunque no hayan llegado a entenderlo del todo.

Por último, agradecer a las instituciones que han hecho posible la realización de este trabajo por la ayuda económica recibida. En concreto al Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN) y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER) por la concesión de los proyectos MEDICI (TIC2003-09400-C04-01) e IDEATIO (TIN2006-15460-C04-01), y también a la Fundación Séneca de la Región de Murcia por las ayudas para la asistencia a congresos.



## Resumen

El Razonamiento Espacial Cualitativo juega un papel muy importante en Inteligencia Artificial y las Ciencias de la Computación debido sobre todo al interés que despierta en distintas áreas de aplicación como, por ejemplo, los robots móviles, los sistemas de información geográfica, las bases de datos espaciales o la composición de textos. Las técnicas cualitativas de razonamiento y representación espacial ofrecen una forma de interacción con los datos espaciales más intuitiva y cercana a la forma de pensar de las personas que las técnicas puramente cuantitativas.

Son varios los aspectos a tener en cuenta a la hora de formalizar el razonamiento espacial desde el punto de vista cualitativo. Por un lado están los aspectos *ontológicos*, es decir, cuáles son las entidades espaciales básicas (puntos, regiones, líneas, etc.) y las posibles relaciones entre ellas (topológicas, direccionales, de distancia, etc.). Por otro lado tenemos que elegir un *lenguaje formal* adecuado que nos permita representar los problemas de razonamiento asociados a dichas entidades y relaciones. Por último tenemos que identificar mecanismos eficientes para resolver dichos problemas. La combinación de todos estos aspectos ha dado lugar a una amplia variedad de modelos posibles para razonamiento espacial cualitativo.

Esta tesis supone una aportación más al campo del Razonamiento Espacial Cualitativo, ofreciendo mejoras en algunos modelos ya existentes y proporcionando otros nuevos. La tesis se centra en modelos que consideran un espacio bidimensional en el que las entidades espaciales de interés son regiones del plano o regiones aproximadas por rectángulos con lados paralelos a los ejes del plano. Las posibles relaciones entre las entidades son relaciones direccionales cardinales del tipo *norte*, *sur*, *este*, *oeste*, etc. Los modelos propuestos se basan en dos formalismos muy utilizados para razonamiento cualitativo: los *problemas de satisfacción de restricciones* y las *lógicas modales*. Además, en la tesis se investiga la conexión entre estos modelos espaciales y los modelos existentes para razonamiento temporal cualitativo.

La tesis se estructura en dos partes claramente diferenciadas. La primera parte está dedicada al razonamiento espacial con relaciones cardinales basado en restricciones: se estudia un modelo existente de relaciones cardinales entre regiones y se proponen nuevos algoritmos para resolver diversos problemas de razonamiento. La segunda parte está dedicada al razonamiento espacial con lógicas modales: se propone una nueva lógica modal para el razonamiento espacial con direcciones cardinales entre rectángulos, se estudian sus propiedades, su expresividad y el problema de la validez de las fórmulas.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Razonamiento Espacial Cualitativo . . . . .	2
1.1.1. Estructura del Espacio . . . . .	3
1.1.2. Entidades Espaciales . . . . .	5
1.1.3. Relaciones Espaciales . . . . .	6
1.1.4. Formalismos . . . . .	7
1.1.5. Aplicaciones . . . . .	9
1.2. Objetivo de la Tesis . . . . .	10
1.3. Alcance de la Tesis . . . . .	10
1.4. Estructura de la Tesis . . . . .	11
<b>I Razonamiento Espacial Cualitativo con Relaciones Cardinales Basado en Restricciones</b>	<b>15</b>
<b>2. Razonamiento Espacial Cualitativo Basado en Restricciones</b>	<b>17</b>
2.1. Problemas de Satisfacción de Restricciones . . . . .	17
2.2. Razonamiento Temporal y Espacial Cualitativo basado en CSPs . . . . .	18
2.2.1. Álgebras de Relaciones Binarias . . . . .	19
2.2.2. Consistencia y Red Mínima . . . . .	22
2.3. Modelos de Relaciones Temporales . . . . .	26
2.3.1. Álgebra de Puntos . . . . .	27
2.3.2. Álgebra de Intervalos . . . . .	28
2.4. Modelos de Relaciones Espaciales . . . . .	32
2.4.1. Relaciones Topológicas . . . . .	32
2.4.2. Relaciones Direccionales . . . . .	35

2.4.3.	Razonamiento Espacial con Varios Tipos de Relaciones . . . . .	39
<b>3.</b>	<b>Razonamiento con Relaciones Cardinales entre Regiones</b>	<b>41</b>
3.1.	El Modelo DC de Relaciones Direccionales Cardinales entre Regiones . . .	42
3.1.1.	Regiones, Tiles y Direcciones Cardinales . . . . .	42
3.1.2.	Relaciones Cardinales. Satisfacibilidad . . . . .	44
3.1.3.	Conjuntos de Relaciones Cardinales Básicas . . . . .	47
3.1.4.	Operaciones con Relaciones Cardinales . . . . .	49
3.1.5.	Red de Restricciones Cardinales. Consistencia . . . . .	51
3.2.	Algoritmo DIS-BCon para Consistencia de Relaciones Básicas entre Regiones	53
3.2.1.	Paso S1: Traducción a restricciones de orden . . . . .	57
3.2.2.	Paso S2: Verificación de las Restricciones de Orden . . . . .	60
3.2.3.	Paso S3: Verificación de las Restricciones de Unión . . . . .	62
3.2.4.	Complejidad y Corrección del Algoritmo . . . . .	64
3.3.	Optimización del Algoritmo de Consistencia y Búsqueda de una Solución .	66
3.3.1.	Modificación del Paso S3 de Verificación de Restricciones de Unión	67
3.3.2.	Complejidad y Corrección del Algoritmo Modificado . . . . .	69
3.4.	Discusión . . . . .	73
3.4.1.	Descripción del algoritmo de consistencia Pixels-BCsol . . . . .	73
3.4.2.	Consistencia y Solución de Redes de Relaciones Básicas entre Re- giones Conectadas . . . . .	74
3.4.3.	Comparación y Posibilidad de Extensión de Ambos Algoritmos . . .	75
<b>4.</b>	<b>Razonamiento con Relaciones Cardinales entre Rectángulos</b>	<b>79</b>
4.1.	El Álgebra de Rectángulos . . . . .	80
4.2.	El Modelo DCR y el Álgebra de Rectángulos . . . . .	83
4.2.1.	De Relaciones Cardinales Rectangulares a Relaciones del Álgebra de Rectángulos . . . . .	84
4.2.2.	De Relaciones del Álgebra de Rectángulos a Relaciones Cardinales Rectangulares . . . . .	88
4.3.	La Subclase de Relaciones Cardinales Rectangulares Convexas . . . . .	91
4.3.1.	Retículo del Modelo DCR . . . . .	91
4.3.2.	Relaciones Convexas de RA y DCR . . . . .	93
4.3.3.	La Subclase Convexa del Modelo DCR . . . . .	96

4.4.	Tratabilidad de la Subclase Convexa de DCR . . . . .	97
4.4.1.	Consistencia y Solución en Redes Convexas . . . . .	98
4.4.2.	El Problema de la Red Mínima . . . . .	103
4.5.	Relaciones Cardinales Rectangulares no Convexas . . . . .	106
4.5.1.	Relaciones con Proyecciones no Convexas . . . . .	107
4.5.2.	Relaciones con Proyecciones Convexas . . . . .	116
4.5.3.	Algoritmo de Backtracking para Relaciones Cardinales Rectangulares	116
<b>II</b>	<b>Razonamiento Espacial Cualitativo con Relaciones Cardinales Basado en Lógicas Modales</b>	<b>119</b>
<b>5.</b>	<b>Razonamiento Espacial Cualitativo Basado en Lógicas Modales</b>	<b>121</b>
5.1.	Conceptos Generales sobre Lógicas Modales . . . . .	121
5.1.1.	Sintaxis y Semántica . . . . .	122
5.1.2.	Lógicas modales normales . . . . .	123
5.1.3.	Decidibilidad y Complejidad . . . . .	124
5.2.	Lógicas Modales Espaciales . . . . .	125
5.2.1.	Lógicas Modales con Relaciones Topológicas . . . . .	126
5.2.2.	Lógicas Modales con Relaciones Direccionales . . . . .	128
5.3.	Una Lógica de Rectángulos . . . . .	130
5.3.1.	Lógicas Modales Basadas en Intervalos Temporales . . . . .	131
5.3.2.	La Lógica PNL . . . . .	133
5.3.3.	La Lógica RL . . . . .	133
5.3.4.	Fragmentos Decidibles de RL . . . . .	137
<b>6.</b>	<b>La Lógica SpPNL</b>	<b>139</b>
6.1.	Sintaxis y Semántica . . . . .	140
6.2.	Teorema de Representación . . . . .	141
6.3.	Poder Expresivo y Posibles Aplicaciones . . . . .	146
6.3.1.	Ejemplos en el Dominio Geográfico . . . . .	146
6.3.2.	Comparativa con el Álgebra de Rectángulos . . . . .	150
6.4.	Indecidibilidad . . . . .	154
6.5.	Deducción basada en un Árbol Semántico . . . . .	158
6.5.1.	El Método . . . . .	158

6.5.2.	Corrección y Completitud . . . . .	162
6.6.	Una Subclase Decidible: $\text{SpPNL}_t$ . . . . .	168
6.6.1.	Temporalización de la Lógica PNL . . . . .	168
6.6.2.	$\text{SpPNL}_t$ como un Fragmento de SpPNL . . . . .	170
6.6.3.	Decidibilidad y Poder Expresivo de $\text{SpPNL}_t$ . . . . .	171
<b>III</b>	<b>Conclusiones, Apéndices y Bibliografía</b>	<b>173</b>
<b>7.</b>	<b>Conclusiones y Trabajos Futuros</b>	<b>175</b>
<b>A.</b>	<b>Conjuntos de Relaciones Cardinales</b>	<b>181</b>
A.1.	Conjunto de Relaciones Cardinales Básicas en el Dominio de Regiones Co- nectadas . . . . .	181
A.2.	Conjunto de Relaciones Cardinales Rectangulares Convexas . . . . .	182
<b>B.</b>	<b>Diseño e Implementación del Modelo DC</b>	<b>191</b>
B.1.	Descripción de la Librería . . . . .	191
B.2.	Herramientas y Utilidades . . . . .	194
B.3.	Sintaxis de los ficheros de restricciones . . . . .	196

# Índice de figuras

1.1. Interior, clausura y frontera . . . . .	4
1.2. Ejemplos de conjuntos en el plano . . . . .	4
1.3. Jerarquía de objetos espaciales en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	5
1.4. Objeto espacial no regular y regular. . . . .	6
2.1. Algoritmo PC-2 . . . . .	23
2.2. Algoritmo con backtracking para decidir la consistencia . . . . .	25
2.3. Algoritmo CSPAN . . . . .	27
2.4. Retículo y representación en el plano de las relaciones entre intervalos. . .	31
2.5. Ejemplo de las relaciones de RCC8 y del modelo de 4 y 9 intersecciones. . .	32
2.6. Modelos de relaciones cardinales entre puntos. . . . .	35
2.7. Modelos de relaciones direccionales para entidades extendidas . . . . .	37
3.1. Tiles y <i>mbb</i> con respecto a la región <i>b</i> . . . . .	43
3.2. Restricción cardinal básica . . . . .	47
3.3. Composición débil vs composición en el modelo DC. . . . .	49
3.4. Relaciones básicas de <i>inv(N)</i> . . . . .	50
3.5. Algoritmo DIS-BCON. . . . .	55
3.6. Ilustración del Ejemplo 3.3. . . . .	56
3.7. Función TRANSFORMA. . . . .	58
3.8. Asignaciones iniciales y maximales del Ejemplo 3.5. . . . .	61
3.9. Pseudo-código para las funciones GLOBALCHECKNTB y CHECKNTB. . .	62
3.10. Ejemplo de aplicación de la función CheckNTB. . . . .	65
3.11. Algoritmo DIS-BCSOL. . . . .	66
3.12. Funciones GLOBALCHECKNTB2 y CHECKNTB2 . . . . .	68
4.1. Relaciones básicas del álgebra de rectángulos. . . . .	80

4.2.	Ejemplo de relación cardinal rectangular . . . . .	83
4.3.	Relaciones básicas de RA y DCR. . . . .	85
4.4.	El retículo $(\mathcal{K}, \leq_{\mathcal{K}})$ . . . . .	92
4.5.	Agrupación de relaciones básicas en el retículo $(\mathcal{B}_{ia}, \leq_{ia})$ y en el plano. . . . .	92
4.6.	Retículo $(\mathcal{B}_{rec}, \leq_{rec})$ . . . . .	94
4.7.	Algoritmo para generar el conjunto de relaciones convexas de DCR. . . . .	96
4.8.	Algoritmo PC-débil . . . . .	100
4.9.	Relaciones para la cláusula $C_i$ y literales complementarios $l_{i,j}$ y $l_{k,m}$ de la reducción del caso 1. . . . .	113
4.10.	Algoritmo de backtracking para decidir la consistencia de un conjunto de restricciones cardinales rectangulares . . . . .	117
5.1.	Traducción estándar de la lógica modal a la lógica de primer orden. . . . .	125
5.2.	Ejemplos de fórmulas verdaderas de la lógica de compás y la lógica de conos	129
6.1.	Ejemplo de fórmulas verdaderas en un modelo de SpPNL. . . . .	141
6.2.	Matriz de unidades espaciales . . . . .	148
6.3.	Ejemplo de aplicación de SpPNL. . . . .	149
6.4.	Relaciones del RA expresables directamente en SpPNL . . . . .	150
6.5.	Relaciones básicas no directas entre rectángulos . . . . .	152
6.6.	Ejemplo de árbol semántico para SpPNL . . . . .	162
6.7.	Ejemplo de modelo resultante de la temporalización de PNL. . . . .	169
B.1.	Paquetes de la librería para razonamiento espacial basado en restricciones. . . . .	192
B.2.	Clases principales de la librería para razonamiento espacial basado en restricciones. . . . .	193
B.3.	Herramienta <i>Composition/Inverse Tool</i> . . . . .	194
B.4.	Herramienta <i>CSP Solver</i> . . . . .	194
B.5.	Herramienta <i>Basic Cardinal Direction Consistency Tool</i> . . . . .	195

# Índice de tablas

2.1. Relaciones del álgebra de puntos y tabla de composición. . . . .	26
2.2. Relaciones básicas del álgebra de intervalos. . . . .	28
2.3. Tabla de composición de relaciones básicas entre intervalos . . . . .	30
2.4. Definición de las relaciones de RCC8. . . . .	33
2.5. Relaciones topológicas en el modelo de 4-intersecciones. . . . .	34
2.6. Correspondencia entre el álgebra de relaciones cardinales y el álgebra de puntos. . . . .	36
4.1. Traducción de relaciones básicas de DCR a relaciones de RA . . . . .	87
5.1. Axiomas más comunes de la lógica modal. . . . .	123
5.2. Lenguajes modales más comunes. . . . .	124
6.1. Marcos espaciales para el árbol semántico de la Figura 6.6. . . . .	163
7.1. Modelos de razonamiento espacial basados en proyecciones. . . . .	178



# Capítulo 1

## Introducción

El Razonamiento Cualitativo es el área de la Inteligencia Artificial dedicada a representar de forma discreta o simbólica los aspectos continuos del mundo físico que nos rodea [For97]. Como se indica en [For97, WdK91], dos observaciones motivan principalmente su interés:

1. Habitualmente las personas utilizan el sentido común para interactuar diariamente con el mundo físico que les rodean. Dicho sentido se caracteriza por utilizar en mayor medida una abstracción cualitativa de la información que un conocimiento cuantitativo completo.
2. Los científicos e ingenieros utilizan este tipo de razonamiento en la conceptualización inicial de un problema o en la interpretación de los resultados de experimentos, cálculos o medidas de carácter cuantitativo.

El principal objetivo del Razonamiento Cualitativo es hacer explícito este tipo de conocimiento cualitativo y proporcionar las técnicas de razonamiento automáticas adecuadas de tal modo que un ordenador pueda predecir, diagnosticar y explicar el comportamiento de un sistema físico de forma cualitativa y sin tener que recurrir a un modelo cuantitativo, ya sea porque dicho modelo es computacionalmente intratable o simplemente no existe [CH01]. Si bien los modelos cualitativos sólo proporcionan una solución aproximada, son capaces de adaptarse de forma sencilla a la incertidumbre de los datos espaciales.

Dos de las variables físicas que se han estudiado con mayor interés en Inteligencia Artificial en general, y en el Razonamiento Cualitativo en particular, son el *tiempo* y el *espacio*. La información cualitativa temporal es información del tipo “La crisis económica mundial se produjo durante la presidencia de Zapatero”, donde sólo se especifica el orden entre los instantes finales e iniciales de los dos eventos. Por otro lado, la información cualitativa espacial es información del tipo “Murcia está al sureste de Madrid y limita

con Alicante, Almería y Albacete”. En ambos casos no se utiliza ninguna información numérica exacta ni aproximada de la posición o distancia entre las entidades temporales y espaciales. Las áreas del Razonamiento Cualitativo que tratan con la información cualitativa temporal y espacial se conocen como *Razonamiento Temporal Cualitativo* [Vil94] y *Razonamiento Espacial Cualitativo* [CH01] respectivamente. A la combinación de ambos tipos de razonamiento se le conoce como *Razonamiento Cualitativo Espacio-Temporal* [GN02, BCWZ02]<sup>1</sup>.

La complejidad asociada a los problemas de representación y razonamiento con el tiempo y el espacio es directamente proporcional a la dimensión de cada uno de ellos. La concepción del tiempo en Inteligencia Artificial ha sido tradicionalmente unidimensional (un orden lineal discreto o denso, total o parcial), donde se han identificado básicamente dos tipos de entidades temporales (*puntos e intervalos*) y un conjunto reducido de relaciones entre ellas. Sin embargo, en el espacio se pueden considerar varias dimensiones y por lo tanto las entidades espaciales y sus relaciones son más numerosas y complejas. Seguramente, esta mayor simplicidad del dominio temporal ha sido el motivo de que la comunidad científica haya estudiado preferentemente y con mayor profundidad los problemas derivados del razonamiento temporal. De hecho, como veremos a lo largo de esta tesis, muchos resultados obtenidos del razonamiento temporal han sido utilizados para resolver problemas del razonamiento espacial.

## 1.1. Razonamiento Espacial Cualitativo

El objetivo principal en el Razonamiento Espacial Cualitativo es capturar el conocimiento acerca del espacio de la manera más cercana posible al sentido común, y proporcionar métodos para trabajar con la información espacial sin tener que recurrir a modelos cuantitativos que generalmente son computacionalmente intratables o difíciles de formalizar.

En esta sección vamos a introducir algunos aspectos relativos a la representación y razonamiento en el espacio desde un punto de vista cualitativo. Dentro de la complejidad del dominio espacial nos limitaremos tan sólo a aquellos aspectos que estén directamente relacionados con el trabajo desarrollado en esta tesis. Algunas referencias que recopilan diversos temas del razonamiento espacial cualitativo son [CH01, Her94, ET98a].

---

<sup>1</sup>A partir de ahora, a no ser que se diga lo contrario, cuando hablemos de forma general sobre razonamiento, razonamiento espacial o razonamiento temporal, lo haremos siempre desde el punto de vista cualitativo.

### 1.1.1. Estructura del Espacio

Desde un punto de vista matemático la noción de espacio más habitual es la de *espacio euclídeo*. Un espacio euclídeo es un espacio vectorial normado sobre el conjunto de los números reales ( $\mathbb{R}$ ) donde la norma es el producto escalar ordinario. Los elementos básicos son *puntos* y se definen como una  $n$ -tupla  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  donde  $x_i \in \mathbb{R}$  y  $n$  es la dimensión. Utilizaremos  $\mathbb{R}^n$  para referirnos a un espacio euclídeo  $n$ -dimensional (a  $\mathbb{R}^2$  se le conoce como *plano euclídeo*). Un espacio euclídeo es a su vez un *espacio métrico*, con la función de *distancia euclídea* habitual entre puntos, y un *espacio topológico* inducido por la función de distancia anterior, al que llamaremos *espacio topológico euclídeo*.

A continuación vamos a profundizar un poco más en el concepto de espacio topológico y sus propiedades. De forma abstracta un espacio topológico  $\langle X, \tau \rangle$  es una estructura formada por un conjunto  $X$  y una colección de subconjuntos de  $X$  ( $\tau$ ), que satisfacen los siguientes axiomas:

1. El conjunto vacío y  $X$  pertenecen a  $\tau$ .  
 $\emptyset, X \in \tau$ .
2. La unión de toda colección de conjuntos de  $\tau$  pertenece a  $\tau$ .  
 $\forall S \subset \tau, \bigcup_{O \in S} O \in \tau$ .
3. La intersección de cualquier colección finita de  $\tau$  pertenece a  $\tau$ .  
 $O_1, O_2 \in \tau \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \tau$ .

La colección  $\tau$  recibe el nombre de *topología* de  $X$ . Los conjuntos que pertenecen a  $\tau$  reciben el nombre de *conjuntos abiertos*, y sus complementarios en  $X$  reciben el nombre de *conjuntos cerrados*. En el caso de  $\mathbb{R}^n$  la topología consiste en los subconjuntos  $B \subset \mathbb{R}^n$  tales que para cualquier punto  $x$  de  $B$  existe un número  $\epsilon > 0$  de tal manera que el conjunto  $\{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < \epsilon\}$  está totalmente incluido en  $B$ , siendo  $d$  la distancia euclídea.

Algunos operadores interesantes que se pueden definir en un espacio topológico son los de *interior*, *clausura* y *frontera* de un conjunto  $A \subset X$  (denotados como  $Int(A)$ ,  $Cl(A)$  y  $Fr(A)$  respectivamente). El interior de  $A$  se define como el conjunto abierto más grande que está contenido en  $A$ . La clausura de  $A$  se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a  $A$ , y la frontera de  $A$  se define en términos de los dos anteriores como la clausura menos el interior de  $A$  ( $Fr(A) = Cl(A) \setminus Int(A)$ ). En la Figura 1.1 se muestra un ejemplo de estas propiedades en  $\mathbb{R}^2$ . Interior y clausura son operadores duales, es decir,  $Int(A) = X \setminus Cl(X \setminus A)$  y  $Cl(A) = X \setminus Int(X \setminus A)$ . Es más, un espacio topológico puede ser definido equivalentemente a partir del operador interior o del operador clausura satisfaciendo los siguientes axiomas para todo  $A, B \subset X$ :

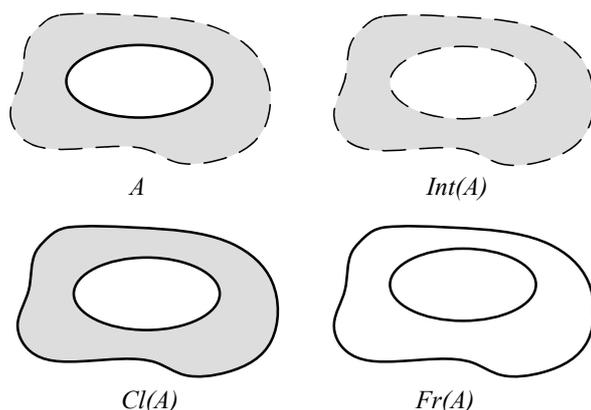


Figura 1.1: Interior, clausura y frontera de un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^2$ .

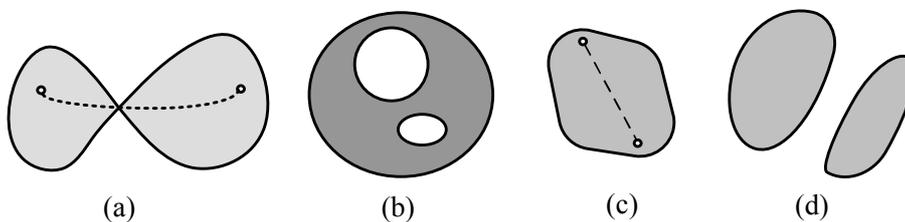


Figura 1.2: Ejemplos de conjuntos en el plano: (a), (b) y (c) son conectados, mientras que (d) es desconectado. (a) es camino conectado, (b) es fuertemente conectado y (c) es convexo.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Int}(X) = X & \text{Cl}(\emptyset) = \emptyset \\
 \text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) & \text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl}(A) \cup \text{Cl}(B) \\
 \text{Int}(A) \subset A & A \subset \text{Cl}(A) \\
 \text{Int}(A) \subset \text{Int}(\text{Int}(A)) & \text{Cl}(\text{Cl}(A)) \subset \text{Cl}(A)
 \end{array}$$

Un *homeomorfismo* o *transformación topológica* es un isomorfismo entre dos espacios topológicos que preserva las propiedades topológicas como, por ejemplo, las de conjunto abierto, conjunto cerrado, interioridad y frontera. Intuitivamente el concepto de homeomorfismo refleja cómo dos espacios topológicos son idénticos pero vistos de otra manera, por ejemplo, si nuestro espacio topológico es plano podríamos estirarlo y distorsionarlo todo lo que quisiéramos siempre que no lo doblemos o lo cortemos. Si el resultado de aplicar un homeomorfismo a un conjunto  $A$  es otro conjunto  $B$ , decimos que  $A$  y  $B$  son *topológicamente equivalentes*.

La *conectividad* (*connectedness*) es otra propiedad interesante en un espacio topológico. Un subconjunto  $A$  de  $X$  se dice que es *conectado* (o *conexo*) cuando no se puede representar como la unión disjunta de dos o más subconjuntos abiertos no vacíos. En otro caso se dice que es *desconectado*. Dentro de los conjuntos conectados podemos distinguir

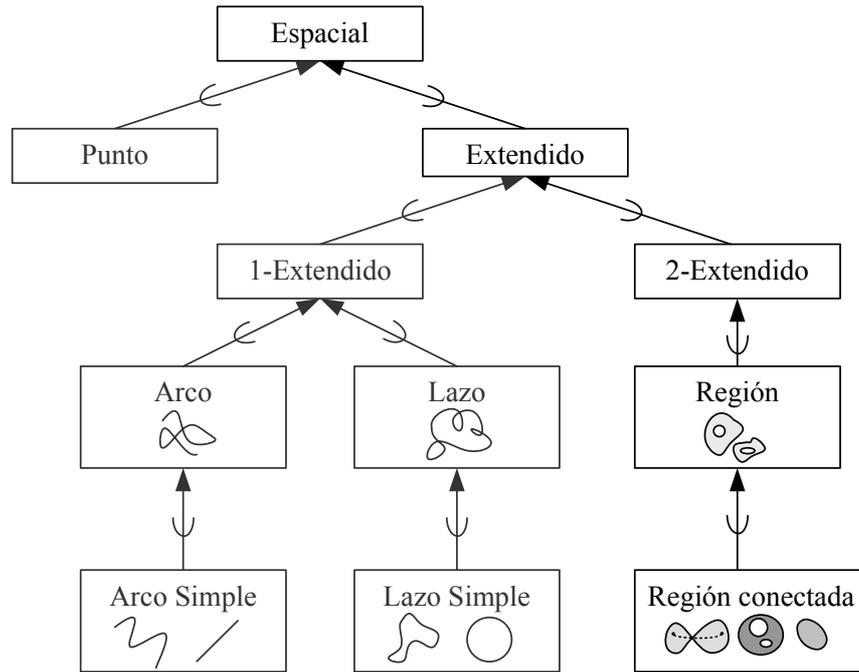


Figura 1.3: Jerarquía de objetos espaciales en  $\mathbb{R}^2$ .

entre *camino conectados* y *fuertemente conectados*. Un subconjunto  $A$  de  $X$  es *camino conectado* si cualquier par de puntos perteneciente a  $A$  pueden ser unidos por un camino dentro del propio conjunto (Figura 1.2-(a)). Un subconjunto  $A$  de  $X$  es fuertemente-conectado si  $Int(A)$  es camino conectado (Figura 1.2-(b)).

Por último, definimos el concepto de *conjunto convexo*. Un subconjunto  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  es *convexo* si para cada par de puntos del conjunto  $C$ , la línea recta que los une también está contenida en  $C$  (Figura 1.2-(c)).

### 1.1.2. Entidades Espaciales

En esta sección vamos a definir la *ontología* del espacio, es decir, vamos a definir los distintos tipos de objetos o entidades espaciales que se pueden definir en el plano euclídeo. Para tal fin adoptamos la clasificación elaborada por Worboys y Duckham en [WD04]. La Figura 1.3 muestra una posible jerarquía de entidades espaciales. La entidad más general (la raíz) es la entidad *espacial*. En el siguiente nivel tenemos *puntos* y objetos de tipo *extendido* que se especializan en objetos extendidos de una o dos dimensiones (*1-extendido* y *2-extendido*). Dentro de los objetos 1-extendidos están los *arcos*, los *lazos* (arcos con los extremos unidos), los *arcos simples* y los *lazos simples* (que no se entrecruzan consigo mismos). Un *segmento* o línea recta acotada es un tipo concreto de arco simple. De hecho, todo arco simple es topológicamente equivalente a un segmento. Del mismo

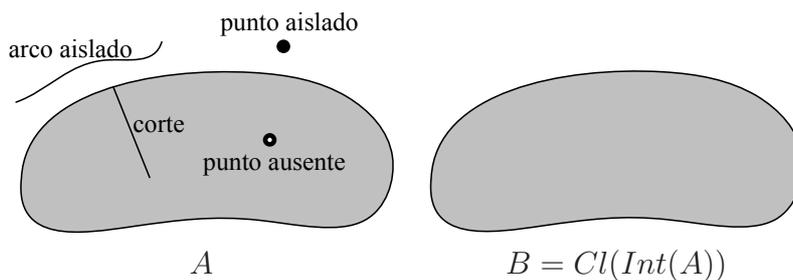


Figura 1.4: Objeto espacial no regular y regular.

modo, la circunferencia sería un ejemplo de lazo simple.

En cuanto a los objetos 2-extendidos una *región* se define como un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  cerrado y regular. Con regular queremos decir que no está formado por la mezcla de puntos aislados, líneas y otros objetos 2-extendidos. Formalmente,  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  es cerrado regular si  $S = Cl(Int(S))$ . La Figura 1.4 muestra un objeto 2-extendido  $A$  no regular y su correspondiente objeto 2-extendido regular  $B = Cl(Int(A))$ .

Por último, una *región conectada*, como indica su nombre, es una región que cumple la propiedad de ser conexa o conectada. Dentro de las regiones conectadas podemos tener regiones camino conectadas, fuertemente conectadas y regiones convexas.

### 1.1.3. Relaciones Espaciales

En el Razonamiento Cualitativo Espacial las situaciones espaciales se representan especificando las relaciones entre las entidades consideradas. Las relaciones cualitativas entre entidades espaciales pueden ser *direccionales* (a la izquierda de, arriba), de *distancia* (cerca, lejos), de *tamaño* (más grande que, más pequeño que), *topológicas* (dentro de, tocando con) o combinaciones de las anteriores. Las relaciones topológicas y direccionales son, sin duda, las más estudiadas en razonamiento espacial.

#### Relaciones Topológicas

Las relaciones topológicas son aquellas relaciones entre entidades espaciales (normalmente definidas como conjuntos de puntos) que se definen independientemente de su forma o de su posición mutua. Las relaciones se derivan del estudio de las propiedades topológicas vistas anteriormente. Así, por ejemplo, “ $A$  es parte propia de  $B$ ”, “ $A$  se superpone con  $B$ ” o “ $A$  tiene el borde conectado con el borde de  $B$ ” son relaciones topológicas.

## Relaciones Direccionales y Cardinales

Las relaciones direccionales describen la posición relativa de un objeto (objeto primario) con respecto a otro (objeto de referencia) en el espacio. Así, por ejemplo, “*A* está a la derecha de *B*” o “*A* está encima de *B*” son relaciones direccionales. Al contrario que las relaciones topológicas, las direccionales dependen directamente de la forma de los objetos y el sistema de referencia cobra importancia en el razonamiento. De acuerdo con Levinson [Lev96] podemos distinguir entre tres tipos de sistemas o marcos de referencia:

1. *Intrínsecos*. En un sistema de referencia intrínseco la posición relativa entre el objeto primario y el objeto de referencia viene dada por alguna propiedad intrínseca del objeto de referencia (por ejemplo su parte frontal o su parte trasera). En este caso, las relaciones direccionales se conocen generalmente como *relaciones de orientación*.
2. *Relativos*. En un sistema de referencia relativo, se utiliza un tercer objeto (por ejemplo la persona que describe la situación) como origen de referencia dando lugar a una relación de orientación ternaria en la que intervienen el objeto primario, el objeto de referencia y el objeto origen. Así, por ejemplo, una pelota (objeto primario) puede estar situada a la izquierda de una silla (objeto de referencia) desde el punto de vista de una persona que describe la situación (objeto origen).
3. *Absolutos*. Un marco de referencia es absoluto cuando no se utilizan ni un tercer objeto ni una propiedad intrínseca como referencia. En su lugar se utiliza algún factor externo global que sirva para fijar la las orientación de todos los objetos involucrados.

Cuando se considera un sistema de referencia absoluto, se fija una dirección de referencia de tal forma que la dirección entre dos objetos se puede representar en términos de relaciones binarias con respecto a la dirección de referencia dada. Un caso particular son las *relaciones cardinales* (norte, sur, este, oeste, etc.), que son utilizadas normalmente para describir situaciones de posición entre objetos en un espacio a gran escala o un espacio geográfico [Kui78].

### 1.1.4. Formalismos

Hasta ahora hemos visto los elementos necesarios para representar conocimiento sobre el espacio (estructura del espacio, entidades espaciales y sus relaciones). En este punto nos centramos en los mecanismos formales para representar el conocimiento espacial de manera que podamos desarrollar sistemas inteligentes que nos permitan razonar con dicho conocimiento. De forma análoga a como se hace en razonamiento temporal, podemos

distinguir entre *razonamiento espacial basado en lógicas formales* y *razonamiento espacial basado en restricciones*.

El razonamiento espacial basado en lógicas formales utiliza un lenguaje lógico formal, ya sea clásico, de primer orden, de orden superior o modal. Dicho lenguaje está definido por una sintaxis que da lugar a las fórmulas bien formadas de la lógica, en las que además de las primitivas y conectores lógicos habituales se definen otras primitivas y operadores interpretados todos ellos sobre ciertas estructuras espaciales (regiones de un espacio topológico, puntos, rectángulos, etc.). Desde un punto de vista lógico los principales problemas de razonamiento son el problema de la *satisfacibilidad* (determinar si una fórmula es verdadera en alguna interpretación), el problema de la *validez* (determinar si una fórmula es verdadera en todas las interpretaciones) y el problema de *model checking* (determinar si una fórmula es verdadera en una interpretación dada).

Por otro lado, en el razonamiento espacial basado en restricciones el conocimiento espacial se suele representar mediante un conjunto de relaciones binarias (con una estructura algebraica) que pueden interpretarse como restricciones de las propiedades espaciales de las entidades que estamos describiendo. Dentro de este formalismo podemos resolver tareas de razonamiento como inferir nuevas restricciones a partir de la información dada (que suele ser incompleta e imprecisa), decidir si las restricciones espaciales son consistentes o encontrar una representación lo más explícita posible de dicha información.

Si hacemos una breve comparación entre ambos, el razonamiento espacial basado en restricciones es menos expresivo que el basado en lógicas formales. De hecho, el primero se puede considerar como un caso particular del segundo ya que la representación del conocimiento toma la forma de expresiones de la lógica de primer orden cuantificadas existencialmente:  $\exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i,j} \bigvee_{R \in \mathcal{A}} R(x_i, x_j)$ , donde  $x_1 \dots x_n$  son variables que toman valores en el dominio de las entidades espaciales,  $\mathcal{A}$  es el conjunto de relaciones posibles y  $R(x_i, x_j)$  es una restricción binaria que limita los posibles valores que pueden tomar  $x_i, x_j$ . El problema de resolver una fórmula de este tipo se conoce como *Problema de Satisfacción de Restricciones* (CSP). Como ventaja, los métodos de razonamiento asociados a los modelos basados en restricciones suelen ser más eficientes que los asociados a modelos basados en lógicas formales. Pero en general, los problemas que se plantean en ambos formalismos tienen una dificultad computacional elevada (suelen ser NP-completos para los primeros e incluso indecidibles para los segundos, en el peor de los casos).

Desde el punto de vista del razonamiento espacial basado en restricciones el objetivo es encontrar clases y subclases de álgebras de relaciones suficientemente expresivas y cuyos problemas de razonamiento asociados sean *tratables* (es decir, que tengan complejidad computacional polinomial). En el campo de las lógicas para razonamiento espacial el objetivo suele ser encontrar sistemas lógicos suficientemente expresivos cuyo problema de

satisfacibilidad/validez de las fórmulas sea decidible<sup>2</sup> o al menos *semi-decidible*<sup>3</sup>.

### 1.1.5. Aplicaciones

Son muy diversas las aplicaciones del razonamiento espacial cualitativo en distintas áreas de la Inteligencia Artificial y de las Ciencias de las Computación. Por ejemplo, en los Sistemas de Información Geográfica (SIG), las bases de datos espaciales, la navegación de robots, la composición de documentos o la visión por computador.

Los SIG son sistemas informáticos utilizados para capturar, modelar, almacenar, recuperar, compartir, manipular, analizar y visualizar información geográfica [WD04]. Estos sistemas se están convirtiendo en una herramienta cada vez más utilizada para la planificación de negocios, gestión de recursos medioambientales o para proporcionar servicios basados en la localización del usuario. Los SIG actuales trabajan con una gran cantidad de información almacenada en formato vectorial o *raster* (mapas digitalizados), lo cual provoca que su manejo sea poco intuitivo para un usuario no experto. El razonamiento espacial cualitativo puede aplicarse en este dominio para abstraernos de esa gran cantidad de información numérica y facilitar las tareas propias de un SIG utilizando un lenguaje de consulta más cercano al lenguaje natural [EM95, SGA06, Fra96, BCI97].

Las bases de datos espaciales son bases de datos optimizadas para almacenar datos sobre objetos en el espacio (normalmente mediante estructuras geométricas como líneas, puntos o polígonos). Las técnicas de razonamiento espacial cualitativo pueden utilizarse para facilitar la integración de datos espaciales [EGA01], comprobar la consistencia de consultas espaciales y reducir el espacio de búsqueda [Ege94]. También pueden aplicarse para realizar tareas de descubrimiento de conocimiento espacial con técnicas de minería de datos [SA04] o para inferir nuevas relaciones espaciales que no están almacenadas explícitamente [AEG95].

Otra de las áreas de aplicación del razonamiento espacial cualitativo es la navegación de robots autónomos. Este problema ha sido tratado tradicionalmente con técnicas cuantitativas y métodos numéricos. Sin embargo, la utilización de modelos cualitativos puede facilitar los problemas de navegación hacia un objetivo cuando se dispone de información poco precisa [ET98b], o en la exploración de áreas desconocidas para reducir el intercambio de información entre robots [SS07].

El razonamiento cualitativo espacial también ha sido aplicado en el reconocimiento y

---

<sup>2</sup>Existe un algoritmo tal que para cada fórmula de la lógica es capaz de decidir correctamente, en un número finito de pasos, si la fórmula es satisfacible/válida o no.

<sup>3</sup>Existe un algoritmo tal que para cada fórmula de la lógica es capaz de decidir correctamente, en un número finito de pasos, si la fórmula es satisfacible/válida, pero en caso de que no lo sea el algoritmo no es capaz de decírnoslo, por ejemplo porque no termina nunca.

el análisis de la estructura de documentos escritos [FM91, Aie02] o páginas web [GB06]; en la visualización de escenas a partir de su descripción cualitativa [Her94] o en el control de tráfico a partir de imágenes de vídeo [FCH99].

## 1.2. Objetivo de la Tesis

La hipótesis de partida que ha motivado esta tesis es que los formalismos sobre razonamiento temporal cualitativo tales como el álgebra de intervalos [All83], el álgebra de rectángulos [BCdC98, BCdC99] o las lógicas de intervalos [GMS04], pueden ser de gran utilidad para mejorar las técnicas ya existentes de razonamiento espacial cualitativo o para desarrollar otras nuevas, ya sea tanto a nivel algebraico como lógico.

*El objetivo principal de esta tesis es proponer mejoras en los modelos existentes de razonamiento espacial cualitativo con relaciones direccionales y proponer nuevos modelos y técnicas de razonamiento haciendo uso de resultados previos en razonamiento temporal cualitativo.*

## 1.3. Alcance de la Tesis

El trabajo realizado en esta tesis y los resultados obtenidos se centran en los siguientes aspectos concretos del Razonamiento Espacial Cualitativo:

- a) **Estructura del espacio.** En el contexto de esta tesis nos limitaremos a trabajar con el plano euclídeo. En la parte de la tesis dedicada a la representación lógica del razonamiento espacial relajaremos la definición anteriormente dada de espacio y utilizaremos simplemente estructuras espaciales definidas por el producto cartesiano  $\mathbb{D}^2$  donde  $\mathbb{D}$  es un conjunto totalmente ordenado cualquiera.

En principio, nos centramos en un espacio de escala geográfica, que se define como aquel espacio que se encuentra por encima de la escala de cuerpo humano y que no se puede observar a simple vista [Kui78]. Sin embargo, los modelos aquí presentados pueden aplicarse a escalas inferiores siempre y cuando las entidades y relaciones sean compatibles.

- b) **Entidades espaciales.** Los modelos que se presentan en esta tesis utilizan objetos espaciales 2-extendidos de tipo región. En ocasiones trabajaremos con objetos más concretos como regiones rectangulares.
- c) **Relaciones espaciales.** Los modelos de razonamiento espacial obtenidos en esta tesis utilizan relaciones direccionales binarias sobre un sistema de referencia abso-

luto. Concretamente utilizan relaciones direccionales cardinales del tipo *norte*, *este*, *sureste*, etc.

- d) **Formalismos para razonamiento.** Por un lado utilizaremos técnicas de razonamiento basado en restricciones (concretamente basadas en CSP binarios), y por otro lado, emplearemos las lógicas formales (concretamente lógicas modales) para representar y razonar con las relaciones espaciales.
- e) **Dominio de aplicación.** En esta tesis no se considera ningún dominio espacial de aplicación en concreto. Realizamos un estudio de carácter teórico, pero los modelos que aquí se presentan pueden utilizarse en cualquier dominio espacial siempre y cuando encajen con los aspectos descritos en los puntos a) a d). Aunque, en varias ocasiones, utilizaremos ejemplos del dominio geográfico ya que es el más adecuado para las relaciones cardinales.

## 1.4. Estructura de la Tesis

El resto de la tesis se organiza en tres partes.

En la primera parte (Capítulos 2, 3 y 4) se trata el problema del razonamiento espacial con direcciones cardinales como un problema de satisfacción de restricciones:

- En el Capítulo 2 repasamos brevemente los conceptos fundamentales sobre problemas de satisfacción de restricciones y redes de restricciones. Los dominios considerados son infinitos y las restricciones se representan mediante relaciones binarias, por lo que introducimos la terminología básica sobre álgebras de relaciones binarias. Se describe el problema fundamental de la consistencia de una red y se muestran esquemas algorítmicos generales para resolver este problema y otros problemas relacionados. Por último se revisan varios modelos de interés para razonamiento temporal y espacial basados en CSPs con álgebras de relaciones binarias.
- El Capítulo 3 se centra en un modelo existente de razonamiento espacial con direcciones cardinales basado en restricciones, al que llamamos modelo DC [GE97, Goy00, SK04, SK05]. Describimos con detalle este modelo, indicando posibles dominios de regiones, tipos de relaciones y operaciones con relaciones. Después revisamos un algoritmo previo para decidir la consistencia de una red [SK05] de relaciones cardinales básicas entre regiones posiblemente desconectadas y proponemos un nuevo algoritmo que mejora el tiempo de ejecución y además sirve para obtener soluciones diversas para la red.

- En el Capítulo 4 proponemos una variante del modelo de relaciones cardinales direccionales, que llamamos *modelo DCR*, para razonar con relaciones cardinales rectangulares, que relacionan regiones aproximadas por sus rectángulos mínimos. En concreto:
  - Estudiamos el vínculo existente entre las relaciones cardinales rectangulares y las relaciones del álgebra de rectángulos [BCdC98], estableciendo un método de traducción de relaciones cardinales rectangulares a relaciones del álgebra de rectángulos y viceversa.
  - Teniendo en cuenta la conexión anterior, indentificamos una subclase tratable de DCR formada por el conjunto de relaciones cardinales rectangulares convexas. Para esta subclase proponemos métodos para resolver el problema de la consistencia y el problema de la red mínima.
  - Probamos que el problema de la consistencia de una red de restricciones de DCR es NP-completo. Por último, se propone un algoritmo con backtracking para decidir la consistencia de una red de restricciones de DCR, aprovechando la tratabilidad de la subclase de relaciones convexas.

En la segunda parte (Capítulos 5 y 6) se trata el problema del razonamiento espacial cualitativo con direcciones cardinales desde el punto de vista de las lógicas modales:

- En el Capítulo 5 introducimos los conceptos fundamentales sobre lógicas modales y hacemos un breve repaso de las principales lógicas modales existentes para razonamiento espacial. Para terminar planteamos el problema de extender las lógicas modales temporales basadas en intervalos para dar lugar a una lógica espacial de rectángulos.
- En el Capítulo 6 presentamos SpPNL, una nueva lógica modal para razonamiento espacial con direcciones cardinales donde los objetos espaciales involucrados son rectángulos. En concreto:
  - Definimos la sintaxis y semántica de la lógica y abordamos el problema de la satisfacibilidad de las fórmulas bien formadas, que resulta ser indecidible.
  - Proponemos un teorema de representación para marcos espaciales rectangulares y un método de decisión correcto y completo basado en árboles semánticos para SpPNL.
  - Analizamos el poder expresivo de SpPNL mediante algunos ejemplos en el dominio geográfico y mostramos como es posible expresar en el lenguaje de SpPNL el problema de la consistencia de una red de restricciones del álgebra de rectángulos.

- Para terminar, identificamos un fragmento decidible de la lógica SpPNL utilizando una técnica de composición de lógicas temporales.

La tercera y última parte de la tesis contiene el Capítulo 7, donde se hace un resumen de los principales resultados obtenidos en esta tesis y se plantean una serie de problemas abiertos, que a nuestro parecer, necesitan ser investigados en mayor detalle.



## Parte I

# Razonamiento Espacial Cualitativo con Relaciones Cardinales Basado en Restricciones



# Capítulo 2

## Razonamiento Espacial Cualitativo Basado en Restricciones

En este capítulo hacemos un breve repaso de los conceptos fundamentales sobre problemas de satisfacción de restricciones (CSP, *Constraint Satisfaction Problem*) y álgebras de relaciones. Después se plantea el problema del razonamiento temporal y espacial como un caso de CSP y revisamos varios modelos de interés para el razonamiento temporal y espacial con restricciones que nos servirán como punto de partida.

### 2.1. Problemas de Satisfacción de Restricciones

El razonamiento basado en restricciones es un paradigma de representación e inferencia de conocimiento sobre el que se ha llevado a cabo una intensa investigación tanto teórica como aplicada en diversos campos de las Ciencias de la Computación, y de la Inteligencia Artificial en particular. En [Tsa93, Dec03, Apt03] podemos encontrar una amplia recopilación de técnicas de razonamiento usadas en CSPs. Dado que los resultados presentados en esta tesis hacen uso de técnicas generales de los CSP adaptadas al razonamiento temporal y espacial, vamos a introducir algunos conceptos básicos sobre problemas de satisfacción de restricciones.

Formalmente un CSP consiste en un conjunto finito  $\mathfrak{V} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de *variables* y un conjunto finito  $\mathfrak{C}$  de *restricciones* sobre ellas. Cada variable  $x_i$  puede tomar valores de un determinado dominio  $\mathcal{D}_i$  y las restricciones limitan los valores que pueden tomar las variables simultáneamente.

Una *restricción* sobre un subconjunto  $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$  de  $k$  variables de  $\mathfrak{V}$ , se especifica mediante una *relación  $k$ -aria*  $R_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  que representa un subconjunto del producto cartesiano de los dominios de las variables involucradas, esto es,  $R_{i_1, i_2, \dots, i_k} \subseteq \mathcal{D}_{i_1} \times \mathcal{D}_{i_2} \times$

$\dots \times \mathcal{D}_{i_k}$ . Se dice que una  $k$ -tupla  $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$ , que representa una asignación o instancia para  $k$  variables:  $x_{i_j} = v_{i_j}, j \in \{1, \dots, k\}$ , *satisface* la relación  $R_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  si  $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}) \in R_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ . Una  $n$ -tupla  $S = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \dots \times \mathcal{D}_n$  es una *solución* para el CSP si existen proyecciones de los valores de  $S$  que satisfacen todas las restricciones del conjunto  $\mathcal{C}$ .

El problema esencial que se plantea en un CSP es el *problema de la consistencia* (o *satisfacibilidad*), que consiste en decidir si existe al menos una solución. Si existe una solución se dice que el CSP es *consistente* (o *satisfacible*) y en otro caso se dice que es *inconsistente*. Cuando un CSP es consistente se puede pasar a resolver otras tareas de razonamiento, tales como:

1. Encontrar una *solución* o instancia consistente para las variables.
2. En CSPs con dominios infinitos se considera el problema de encontrar un *escenario consistente*, que consiste en una selección de relaciones precisas entre cada par de variables escogidas de un conjunto finito de posibles relaciones. Las relaciones de un escenario consistente se satisfacen en alguna solución.
3. Buscar *todas las soluciones*, si los dominios son finitos, o buscar todas las relaciones satisfacibles en caso de CSPs infinitos. Las *relaciones satisfacibles* o viables son aquellas que forman parte de algún escenario consistente.
4. Encontrar una *solución óptima* de acuerdo con una *función objetivo* específica que se establece teniendo en cuenta algún tipo de conocimiento sobre el dominio de aplicación. Son los denominados *problemas de optimización*.
5. Encontrar una *solución parcial*, que consiste en una asignación consistente para un subconjunto de variables del CSP.
6. Reducir al mínimo los valores para cada variable o cada relación. Esto supone encontrar una representación equivalente del problema lo más explícita posible, donde se descartan valores de las variables o relaciones entre variables que no forman parte de ninguna solución o escenario consistente.

## 2.2. Razonamiento Temporal y Espacial Cualitativo basado en CSPs

Los CSPs clásicos tratan con *variables simbólicas* a las que se le asignan valores o etiquetas de dominios finitos, y por tanto las restricciones sobre las variables consisten

en relaciones finitas. Ejemplos típicos son el problema de las  $n$ -reinas y el problema del coloreo de un grafo. Por otra parte, los CSPs infinitos tratan con *variables numéricas* cuyo dominio es infinito. Los problemas que surgen en el campo del razonamiento temporal y espacial pueden formalizarse mediante CSPs infinitos.

Existe una amplia variedad de modelos de razonamiento temporal y espacial que usan técnicas basadas en CSPs, algunos de los cuales revisaremos brevemente en secciones posteriores. Todos estos modelos comparten las siguientes características:

1. El CSP es binario, es decir, utiliza relaciones binarias para restringir el valor de las variables. Se usa la notación infija  $x_i R_{ij} x_j$  para representar a las restricciones binarias, donde  $R_{ij}$  es la relación se establece entre las variables  $x_i, x_j$ .
2. Las variables toman valores de dominios infinitos y densos, por ejemplo de  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  o, en general, de  $\mathbb{R}^n$ .
3. Como consecuencia de lo anterior, las relaciones binarias entre variables tienen un número infinito de elementos, por lo que se representan usando un conjunto finito de símbolos. Por ejemplo, en razonamiento temporal se suele utilizar el símbolo ' $<$ ' para representar la relación "antes que", formada por los pares de puntos temporales  $\{(x, y) \mid x < y\}$ , donde  $x, y$  pertenecen a  $\mathbb{Q}$  o  $\mathbb{R}$ .

Un CSP binario infinito puede representarse mediante una *red de restricciones*, dada por un grafo dirigido etiquetado donde cada nodo se corresponde con una variable y cada arco se etiqueta con símbolos de relación.

### 2.2.1. Álgebras de Relaciones Binarias

Dado que en los CSPs infinitos no se pueden representar las relaciones de forma extensiva, una manera de formalizar las tareas de razonamiento cualitativo es estableciendo un álgebra o cálculo para operar simbólicamente con un número finito de relaciones binarias. En razonamiento temporal y espacial cualitativo lo usual es partir de un conjunto  $\mathcal{B}$  de relaciones binarias sobre cierto dominio  $\mathcal{D}$ , de tal manera que  $\mathcal{B}$  constituye una partición de  $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ , o lo que es lo mismo, las relaciones son JEPD (*Jointly Exhaustive and Pairwise Disjoint*). A las relaciones de  $\mathcal{B}$  se les llama relaciones *atómicas* o *básicas* [NS02, LR04] y cada una se representa mediante un símbolo, como por ejemplo  $<$ ,  $>$  ó = para relaciones binarias entre instantes de tiempo.

A partir del conjunto de relaciones básicas  $\mathcal{B}$  se considera el álgebra booleana  $\mathcal{R}$ , formada por todos los subconjuntos de  $\mathcal{B}$  junto con las operaciones de unión, intersección y complementación, esto es,  $\mathcal{R} = (2^{\mathcal{B}}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, \mathcal{B})$ , donde  $\emptyset$  es la *relación vacía* y el

propio conjunto  $\mathcal{B}$  es la *relación universal*, que se corresponde con la unión de todas las relaciones básicas y por tanto contiene todos los pares de  $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ . En un CSP basado en relaciones JEPD, cuando se desconoce la relación entre dos variables se utiliza la relación universal para establecer la restricción inicial entre ellas. Como cada par de elementos del dominio está relacionado por una de las relaciones básicas, podemos representar conocimiento preciso en el dominio estableciendo restricciones mediante las relaciones de  $\mathcal{B}$ . El conocimiento impreciso o indefinido se puede representar mediante la unión de relaciones básicas, que llamaremos *relaciones disyuntivas*. Una relación disyuntiva  $R$  definida como unión de relaciones básicas de la forma  $R = \bigcup_{i=1}^k r_i, k > 1, r_i \in \mathcal{B}$ , se representa simbólicamente como elemento de  $2^{\mathcal{B}}$  de la forma  $R = \{r_1, \dots, r_k\}$ . Teniendo en cuenta la representación de relaciones disyuntivas como conjuntos de símbolos de relación, se entiende que la restricción  $x_i \{r_1, \dots, r_k\} x_j$  equivale a la disyunción  $(x_i r_1 x_j) \vee \dots \vee (x_i r_k x_j)$ . En adelante usaremos letras minúsculas para referirnos a las relaciones atómicas de  $\mathcal{B}$  y letras mayúsculas para las relaciones de  $2^{\mathcal{B}}$ , posiblemente disyuntivas. Si se quiere destacar en la notación las variables relacionadas usaremos subíndices. Así  $R_{ij}$  o  $r_{ij}$  indica que la relación se establece entre las variables  $x_i$  y  $x_j$ .

Para que un cálculo con relaciones binarias sea de utilidad en técnicas de propagación de restricciones típicas de los CSPs, es necesario que el álgebra booleana  $\mathcal{R} = (2^{\mathcal{B}}, \cup, \cap, -, \emptyset, \mathcal{B})$  se extienda con operaciones adicionales de *composición* ( $\circ$ ) e *inversa* ( $^{-1}$ ) de relaciones, siendo estas operaciones cerradas en  $2^{\mathcal{B}}$ . También es deseable que se incluya la *relación de identidad*  $Id$ , que contiene todos los pares de elementos considerados iguales en el dominio. Las operaciones de composición e inversa se definen formalmente:

$$\begin{aligned} R_1 \circ R_2 &= \{(x, z) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \mid \exists y \in \mathcal{D} : x R_1 y \wedge y R_2 z\} \\ R^{-1} &= \{(y, x) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \mid (x, y) \in R\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

El cálculo simbólico en  $2^{\mathcal{B}}$  de las operaciones de unión, intersección y complementación de relaciones es sencillo, pues se corresponde con las operaciones típicas de la teoría de conjuntos. Sin embargo, el cálculo simbólico de la composición y la inversa de relaciones básicas depende de la propia semántica de las relaciones. Los símbolos de relación que representan la composición de dos relaciones básicas cualesquiera se guardan en una tabla que recibe el nombre de *tabla de composición* o *tabla de transitividad*. Las relaciones inversas de las básicas suelen formar parte del propio conjunto  $\mathcal{B}$  de relaciones básicas. En otro caso también habría que guardar en una tabla los símbolos de relación de la inversa de cada relación básica. Una vez que se sabe cómo calcular simbólicamente la composición (o inversa) de relaciones atómicas, se puede obtener fácilmente la composición (o inversa) de relaciones disyuntivas como la unión en  $2^{\mathcal{B}}$  de la composición (o inversa) de las relaciones básicas que la forman.

En determinados dominios puede ocurrir que el conjunto de relaciones binarias  $2^{\mathcal{B}}$  del álgebra booleana  $\mathcal{R}$  no sea cerrado bajo la operación composición, en el sentido de que el conjunto de pares de elementos resultante no se corresponde con ninguna relación de  $2^{\mathcal{B}}$ . Eso implica que la composición de relaciones básicas no se puede tabular y por tanto la composición no se puede calcular simbólicamente. En estos casos el álgebra se extiende con una operación interna llamada *composición débil* (*weak composition*) [RL05, LR04]. La composición débil  $R_1 \circ_w R_2$  es la menor relación de  $2^{\mathcal{B}}$  que contiene a todos los pares de elementos de la composición  $R_1 \circ R_2$  definida en (2.1) y, por tanto, puede considerarse que es la relación del álgebra que mejor aproxima a la composición. Formalmente se define:

$$R_1 \circ_w R_2 = \{r \in \mathcal{B} \mid \exists x, y, z \in \mathcal{D} : x R_1 y \wedge y R_2 z \wedge x r z\}$$

El resultado del cálculo simbólico de la composición débil de dos relaciones básicas cualesquiera puede guardarse en una tabla de transitividad, que luego puede ser usada para calcular la composición débil de relaciones disyuntivas. Cuando la composición es una operación cerrada en  $2^{\mathcal{B}}$  se cumple que ambos tipos de composición coinciden, en el sentido de que la relaciones obtenidas al aplicar las dos operaciones se corresponden con el mismo conjunto de tuplas. Si no es así, se da el caso de que existen tuplas  $(x, z)$  para las que  $(x, z) \in R_{ik} \circ_w R_{kj}$  tal que  $(x, z) \notin R_{ik} \circ R_{kj}$ . Por ejemplo, en el *álgebra de intervalos* de Allen [All83] ocurre que la operación de composición es interna, con lo que  $R_1 \circ R_2$  y  $R_1 \circ_w R_2$  coinciden. Sin embargo, en el *álgebra de intervalos discreta*, que tiene una estructura análoga excepto que los intervalos se interpretan sobre  $\mathbb{Z}$  en lugar de  $\mathbb{R}$ , no coinciden ambos tipos de composiciones. Lo vemos con un ejemplo, el par de intervalos  $([1, 3], [4, 7])$  no pertenece a la relación  $b \circ b$ , porque no existe otro intervalo entero  $J$  tal que  $[1, 3]$  este antes que (*before*)  $J$  y  $J$  esté antes que  $[4, 7]$ . Sin embargo, se considera que  $b = b \circ_w b$ , con lo cual el par de intervalos  $([1, 3], [4, 7])$  sí que pertenece a la relación  $b \circ_w b$ .

Una estructura  $\mathcal{R} = (2^{\mathcal{B}}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, \mathcal{B}, \circ_w, ^{-1})$ , donde  $\mathcal{B}$  es un conjunto de relaciones básicas JEPD,  $Id \in \mathcal{B}$  y  $r^{-1} \in \mathcal{B}, \forall r \in \mathcal{B}$  se considera un *álgebra de relaciones binaria*. Si además la composición débil coincide con la composición se tiene un *álgebra de relaciones propia* [LM94, DWM99, LR04]. Un álgebra de relaciones propia requiere ser cerrada bajo composición. No obstante, a efectos prácticos de razonamiento basado en restricciones, se puede usar un álgebra de relaciones no propia, incluso se puede partir de un álgebra de relaciones binaria más relajada, donde se exigen menos propiedades al conjunto de relaciones y a las operaciones, que se puede llamar *álgebra de restricciones*, por diferenciarla de un álgebra de relaciones en sentido estricto [NS02, LR04].

### 2.2.2. Consistencia y Red Mínima

En razonamiento temporal y espacial cualitativo el principal problema que debe resolverse es el de decidir la consistencia de una red de restricciones. Si este problema es decidible entonces la tratabilidad o intratabilidad de otras tareas de razonamiento de interés práctico depende de la complejidad del problema de la consistencia. Desafortunadamente, en la mayoría de modelos conocidos formalizados mediante CSPs con álgebras de relaciones el problema de la consistencia es intratable, aunque decidible. Por este motivo se han planteado diferentes algoritmos polinomiales de propagación de restricciones que consiguen diversos niveles de *consistencia local* en una red de restricciones. Estos algoritmos sólo aseguran que todas las subredes de cierto número de variables son consistentes, no que la red completa sea consistente. Sin embargo, en algunos modelos se ha probado que cierto nivel de consistencia local es suficiente para asegurar la consistencia de una red, lo cual significa que el problema de decidir la consistencia es tratable.

Se dice que una red es *k-consistente* si toda solución parcial para cualquier combinación de  $k - 1$  variables de una red de restricciones puede extenderse a una solución parcial considerando cualquier otra variable adicional. Cada  $k$  define un nivel de consistencia y para  $k = 3$  se tiene nivel muy común de consistencia local que es equivalente al concepto de *camino-consistencia* [Mon74, Mac77]. Un método de propagación de restricciones muy usado en razonamiento temporal y espacial para obtener una red camino-consistente es el *algoritmo PC (Path Consistency)*. Este algoritmo usa la composición para inferir nuevas relaciones entre cada dos variables y con la intersección se actualiza cada relación binaria a partir de la relación conocida y la inducida por composición, consiguiendo así una reducción de relaciones atómicas correspondientes a tuplas que no pueden formar parte de una solución. Las relaciones actualizadas se propagan al resto de la red en el proceso de aplicación de composición e intersección. Básicamente lo que se hace es revisar todas las tripletas de variables  $(x_i, x_j, x_k) \in \mathfrak{V}$  y se realiza la siguiente operación de actualización hasta que se alcance un punto fijo:

$$R_{ij} \leftarrow R_{ij} \cap (R_{ik} \circ R_{kj})$$

Si se obtiene la relación vacía como resultado de aplicar la operación anterior entonces el CSP es inconsistente. En otro caso, tras finalizar el algoritmo, el CSP puede ser consistente o no, es decir, la camino-consistencia no asegura que el CSP sea consistente pero en algunos formalismos de razonamiento temporal y espacial es condición suficiente para afirmar que lo es. En cualquier caso, un algoritmo de camino-consistencia reduce la extensión de las relaciones para asegurar la consistencia entre cada tres variables y permite deducir nuevas relaciones entre variables inicialmente no restringidas. En este sentido puede considerarse una *técnica de inferencia*. Existen diversas variantes del algoritmo PC para forzar la

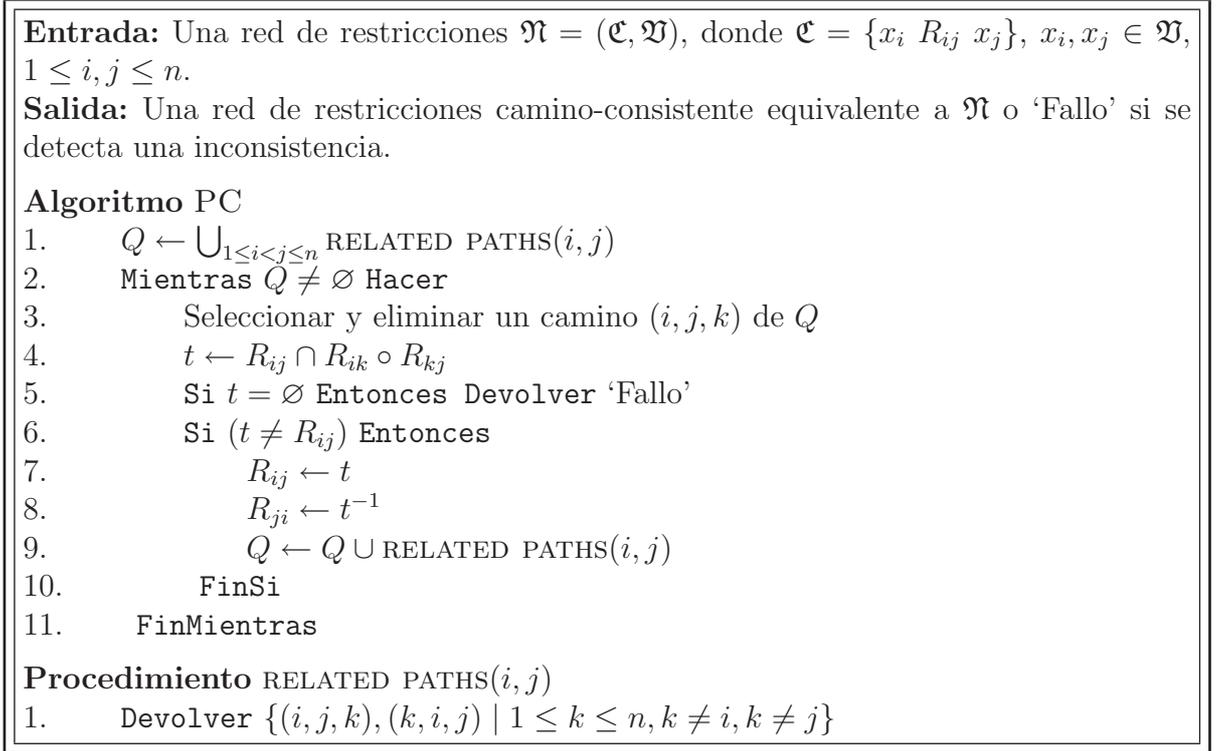


Figura 2.1: Algoritmo PC de van Beek [vB92]

camino-consistencia en una red de  $n$  variables en tiempo  $O(n^3)$ . En la Figura 2.1 se muestra una adaptación del algoritmo PC-2 de Mackworth [Mac77] al caso de CSPs que usan un álgebra de relaciones.

Como comentábamos anteriormente, puede ser que el conjunto de relaciones de un álgebra  $\mathcal{R}$  no sea cerrado bajo la operación de composición. En ese caso se sustituye la operación de composición por la de composición débil en el algoritmo PC y entonces hablamos de un *algoritmo de camino-consistencia débil* (algoritmo PC-débil) o *algoritmo de clausura algebraica* [RL05]. El algoritmo PC consigue que la red sea 3-consistente (en el sentido de que cualquier instanciación consistente para dos variables puede extenderse a una tercera variable), mientras que el algoritmo PC-débil tan sólo asegura que cada subred de tres variables es consistente y las relaciones binarias cumplen  $R_{ij} \subseteq (R_{ik} \circ_w R_{kj})$ , para todo tripleta de variables. Esta diferencia puede tener su importancia a la hora de obtener una solución de la red a partir de una solución parcial. Tras aplicar el algoritmo PC-débil, puede haber tuplas  $(v, z) \in R_{ik} \circ_w R_{kj}$  tal que  $(v, z) \notin R_{ik} \circ R_{kj}$ , lo cual implica que la asignación  $x_i = v, x_j = z$  no puede extenderse a la variable  $x_k$ , porque no existe un valor  $y$  del dominio tal que  $(v, y) \in R_{ik}$  y  $(y, z) \in R_{kj}$ . Si la operación de composición es interna, tras el algoritmo PC podemos asegurar que la asignación  $x_i = v, x_j = z$  puede extenderse a una solución parcial considerando  $x_k$  o cualquier otra variable adicional. Sin embargo, en el hecho de que un algoritmo de clausura algebraica sea válido para decidir

la consistencia no influye que la composición sea débil o no. Existen modelos donde el algoritmo PC-débil sirve para decidir la consistencia de una red de restricciones y otros donde no sirve. Parece ser que lo que importa es que el dominio de las variables sea ordenado o estructurado [RL05].

Dado un subconjunto  $\mathcal{S}$  de relaciones de cierto álgebra  $\mathcal{R}$  con conjunto de relaciones JEPD  $\mathcal{B}$  y conjunto total de relaciones  $2^{\mathcal{B}}$ , llamaremos  $\text{CSPSAT}(\mathcal{S})$  al problema de decidir la consistencia de una red cuyas relaciones pertenecen a  $\mathcal{S}$ . El caso general  $\text{CSPSAT}(2^{\mathcal{B}})$  suele ser intratable, por lo que resulta de gran interés encontrar subconjuntos  $\mathcal{S}$  para los que sea posible resolver  $\text{CSPSAT}(\mathcal{S})$  en tiempo polinomial. En estos casos se dice que  $\mathcal{S}$  es un *conjunto de relaciones tratable*, y si además  $\mathcal{S}$  es cerrado bajo composición, intersección e inversa entonces se dice que  $\mathcal{S}$  es una *subclase tratable* del álgebra  $\mathcal{R}$ . Una subclase tratable es una *subclase maximal tratable* si al añadir cualquier otra relación a  $\mathcal{S}$ , el cierre algebraico del conjunto ampliado resulta una subclase intratable.

Cuando  $\text{CSPSAT}(\mathcal{S})$  es decidible entonces es posible aplicar un método efectivo basado en backtracking que resuelve el problema general  $\text{CSPSAT}(2^{\mathcal{B}})$  [LR97, RN07]. Para que este método sea lo más eficiente posible es deseable que se cumplan varias condiciones [LR97]:

1. El problema  $\text{CSPSAT}(\mathcal{S})$  debe ser tratable.
2. Todas las relaciones de  $2^{\mathcal{B}}$  se deben obtener como unión de relaciones de  $\mathcal{S}$  (el conjunto  $\mathcal{S}$  divide a  $2^{\mathcal{B}}$  exhaustivamente), lo cual implica que el conjunto de relaciones básicas  $\mathcal{B}$  debe estar incluido en  $\mathcal{S}$ .
3. El cálculo de la composición o composición débil debe ser eficiente. Si se utiliza una tabla de composición, ésta debe poder almacenarse y ser accesible eficientemente.
4.  $\mathcal{S}$  debe ser el subconjunto de relaciones más amplio que cumpla las condiciones anteriores, ya que esto permite reducir el factor de ramificación en la búsqueda por backtracking.

El algoritmo de backtracking de la Figura 2.2 es una generalización del algoritmo propuesto en [LR97]. El algoritmo utiliza la función DECIDIR que debe ser un procedimiento de decisión correcto y completo para  $\text{CSPSAT}(\mathcal{S})$ . La llamada al algoritmo PC (que podría sustituirse por un algoritmo PC-débil) es opcional y se utiliza como preprocesamiento para restringir el espacio de búsqueda. Para ser usada es necesario que el conjunto de relaciones  $\mathcal{S}$  sea una subclase del álgebra  $\mathcal{R}$ . Si la función DECIDIR se ejecuta en tiempo polinomial entonces el algoritmo CONSISTENCIA es exponencial en el número de restricciones. Además, si el algoritmo PC es válido para decidir la consistencia de

**Entrada:** Una red de restricciones entre puntos  $\mathfrak{N} = (\mathfrak{C}, \mathfrak{V})$ , donde  $\mathfrak{C} = \{x_i R_{ij} x_j\}$ ,  $R_{ij} \in 2^{\mathcal{B}}$ ,  $x_i, x_j \in \mathfrak{V}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , y un subconjunto  $\mathcal{S} \subseteq 2^{\mathcal{B}}$  que divide a  $2^{\mathcal{B}}$  exhaustivamente y para el que  $\text{CSPSAT}(\mathcal{S})$  es decidible.

**Salida:** ‘Verdadero’ si y sólo si  $\mathfrak{N}$  es consistente.

**Algoritmo CONSISTENCIA**

1.  $\text{PC}(\mathfrak{N})$
2. Si  $\text{PC}(\mathfrak{N})$  devuelve ‘Fallo’ Entonces Devolver ‘Falso’
3. SiNo elegir una restricción no procesada  $x_i R_{ij} x_j$  y dividir  $R_{ij}$  en  $S_1, \dots, S_k \in \mathcal{S}$  tal que  $S_1 \cup \dots \cup S_k = R_{ij}$
4. Si no se puede dividir ninguna restricción Entonces Devolver  $\text{DECIDIR}(\mathfrak{N})$
5. Para cada  $S_l (1 \leq l \leq k)$  Hacer
6.  $R_{ij} \leftarrow S_l$
7. Si  $\text{CONSISTENCIA}(\mathfrak{N})$  Entonces Devolver ‘Verdadero’
8. FinPara
9. Devolver ‘Falso’

Figura 2.2: Algoritmo de backtracking para decidir la consistencia [RN07].

$\text{CSPSAT}(\mathcal{S})$  entonces en el paso 4 se puede suprimir la llamada a la función  $\text{DECIDIR}$  y devolver directamente ‘Verdadero’.

Otros problemas fundamentales en razonamiento temporal y espacial basado en álgebras de relaciones son los problemas de etiquetado mínimo (*minimal labeling problems*). Cuando las restricciones iniciales del problema son disyuntivas interesa hacer más explícito el conocimiento incompleto sobre estas restricciones. Como una relación binaria disyuntiva consiste en uniones de relaciones básicas cuyos símbolos etiquetan al arco correspondiente en la red de restricciones, lo que se hace es descartar aquellos símbolos de relación que no forman parte de ningún escenario consistente, o lo que mismo, no se satisfacen en ninguna solución. La relación resultante se llama *relación mínima*. Una red de restricciones donde cada arco está etiquetado con relaciones mínimas se llama *red mínima* y al problema de obtener dicha red a partir de una dada, con relaciones de cierto conjunto  $\mathcal{S}$ , lo llamaremos  $\text{CSPMIN}(\mathcal{S})$ . Resolver este problema supone encontrar una red equivalente a la original, en el sentido de que tiene exactamente las mismas soluciones, pero con un conocimiento explícito más preciso del problema.

Los problemas  $\text{CSPSAT}(\mathcal{S})$  y  $\text{CSPMIN}(\mathcal{S})$  en razonamiento temporal con álgebras de relaciones son polinomialmente equivalentes bajo Turing reducción [GS93], resultado que se puede extender a modelos de razonamiento espacial con propiedades algebraicas similares. Intuitivamente, el algoritmo de decisión que resuelve  $\text{CSPSAT}(\mathcal{S})$  puede ser usado para calcular la relación mínima  $R_{ij}$  entre cualquier par de variables  $x_i, x_j$ . Basta con instanciar el algoritmo con la red original excepto con una relación básica de  $R_{ij}$  cada

<b>Relación</b>	<	>	=	≤	≥	≠	?	∅
<b>Símbolo</b>	<	>	=	≤	≥	≠	?	∅
<b>Inversa</b>	>	<	=	≥	≤	≠	?	∅

(a)

o	=	<	≤	>	≥	≠	?	∅
=	=	<	≤	>	≥	≠	?	∅
<	<	<	<	?	?	?	?	∅
≤	≤	<	≤	?	?	?	?	∅
>	>	?	?	>	>	?	?	∅
≥	≥	?	?	>	≥	?	?	∅
≠	≠	?	?	?	?	?	?	∅
?	?	?	?	?	?	?	?	∅
∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅

(b)

Tabla 2.1: Relaciones del álgebra de puntos y tabla de composición.

vez y considerar aquellas con las que la red es consistente. Si hay un número finito de relaciones básicas, como es el caso de álgebras con relaciones JEPD, la complejidad de obtener una relación mínima es la misma que la del problema de la consistencia. Para resolver  $CSPMIN(\mathcal{S})$ , a falta de otro algoritmo especializado más eficiente, se puede aplicar un método consistente en calcular todas las relaciones mínimas iterando el procedimiento anterior para cada relación. Como hay  $O(n^2)$  relaciones básicas en un CSP de  $n$  variables esto asegura que  $CSPMIN(\mathcal{S})$  es tratable si y sólo si  $CSPSAT(\mathcal{S})$  lo es. Aquí se pone de manifiesto la importancia de encontrar algoritmos eficaces para resolver el problema esencial de la consistencia de una red de restricciones.

### 2.3. Modelos de Relaciones Temporales

Un problema de razonamiento temporal cualitativo puede considerarse como un caso particular de un problema de satisfacción de restricciones donde las variables representan objetos temporales (como instantes o intervalos) y las restricciones representan conjuntos de relaciones temporales permitidas entre ellos.

Los modelos más representativos para razonamiento temporal cualitativo formalizados como CSP son el *álgebra de puntos* de Vilain y Kautz [VK86] y el *álgebra de intervalos* de Allen [All83]. En esta sección haremos un breve repaso de estos dos formalismos ya que han servido como base para otros modelos de razonamiento espacial que veremos en el capítulo siguiente. Igualmente nos serán de gran utilidad para resolver algunos de los problemas que se plantean en esta tesis.

**Entrada:** Una red de restricciones entre puntos  $\mathfrak{N} = (\mathfrak{C}, \mathfrak{V})$ , donde  $\mathfrak{C} = \{x_i R_{ij} x_j\}$ ,  $R_{ij} \in 2^{\mathcal{B}^{pa}}$ ,  $x_i, x_j \in \mathfrak{V}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Salida:** Una asignación consistente para las variables de  $\mathfrak{V}$  o ‘Fallo’ si la red es inconsistente.

**Algoritmo** CSPAN

1. Identificar las componentes fuertemente conexas (CFCs) de  $\mathfrak{N}$  utilizando sólo los arcos (relaciones) etiquetados con  $\{<\}$ ,  $\{\leq\}$  y  $\{=\}$ . Sean  $S_1, \dots, S_m$  las CFCs encontradas.
2. Construimos una red nueva  $\hat{\mathfrak{N}} = (\hat{\mathfrak{C}}, \hat{\mathfrak{V}})$ , con  $\hat{\mathfrak{V}} = \{S_1, \dots, S_m\}$  y  $\hat{\mathfrak{C}} = \{S_k \hat{R}_{kl} S_l\}$ ,  $\hat{R}_{kl} \in 2^{\mathcal{B}^{pa}}$  y  $S_k, S_l \in \hat{\mathfrak{V}}$ .
3. Para  $k, l \leftarrow 1, \dots, m$  Hacer
4.      $\hat{R}_{kl} \leftarrow ?$
5.     Para cada  $x_i \in S_k, x_j \in S_l$  Hacer
6.          $\hat{R}_{kl} \leftarrow \hat{R}_{kl} \cap R_{ij}$
7.         Si  $\hat{R}_{kl} = \emptyset$  Entonces Devolver ‘Fallo’
8.     FinPara
9. FinPara
10. Reemplazar cualquier etiqueta (relación)  $\{\leq\}$  que quede en  $\hat{\mathfrak{N}}$  por  $\{<\}$ .
11. Ejecutar un orden topológico en  $\hat{\mathfrak{N}}$  utilizando solamente los arcos etiquetados con  $\{<\}$ .

Figura 2.3: Algoritmo CSPAN [vB92].

### 2.3.1. Álgebra de Puntos

En el *álgebra de puntos* (PA, *Point Algebra*) de Vilain y Kautz [VK86], dados dos puntos  $p_i$  y  $p_j$ , las tres relaciones básicas entre ellos vienen dadas por el conjunto  $\mathcal{B}_{pa} = \{<, >, =\}$  que expresan de forma exacta y excluyente la posición relativa de los puntos en un eje temporal denso: el punto  $p_i$  puede ser anterior ( $<$ ), posterior ( $>$ ) o igual ( $=$ ) al punto  $p_j$ . Por tanto las relaciones disyuntivas entre dos puntos son las formadas por el conjunto  $2^{\mathcal{B}_{pa}} = \{=, <, \leq, >, \geq, \neq, ?, \emptyset\}$ , donde  $? = \{<, >, =\}$  es la relación universal (ver la Tabla 2.1-(a)). Formalmente, el álgebra de puntos es un álgebra de relaciones propio que está formada por el álgebra booleana de los 8 símbolos de  $2^{\mathcal{B}_{pa}}$  ampliada con las operaciones internas de inversión ( $^{-1}$ ) y composición ( $\circ$ ). La tabla de composición se muestra en la Tabla 2.1-(b).

Una subclase del álgebra de puntos de especial interés es el *álgebra de puntos convexa*, con las mismas operaciones del PA, pero donde se excluye la relación  $\neq$ . Los conjuntos de pares de valores que definen las relaciones de esta subclase son conjuntos convexos y esto supone que los algoritmos de razonamiento para este modelo sean más eficientes.

El problema de decidir si una red de restricciones del PA es consistente puede resolverse en  $O(n^3)$  con un algoritmo de camino-consistencia, donde  $n$  es el número de variables. En

Relación básica	Inversa	Ilustración	Puntos extremos
$I$ before $J$ ( $b$ )	$J$ after $I$ ( $bi$ )		$I^+ < J^-$
$I$ meets $J$ ( $m$ )	$J$ met by $I$ ( $mi$ )		$I^+ = J^-$
$I$ overlaps $J$ ( $o$ )	$J$ overlapped by $I$ ( $oi$ )		$I^- < J^- < I^+$ , $I^+ < J^+$
$I$ starts $J$ ( $s$ )	$J$ started by $I$ ( $si$ )		$I^- = J^-$ , $I^+ < J^+$
$I$ during $J$ ( $d$ )	$J$ contains $I$ ( $di$ )		$I^- > J^-$ , $I^+ < J^+$
$I$ finishes $J$ ( $f$ )	$J$ finished by $I$ ( $fi$ )		$I^+ = J^+$ , $I^- > J^-$
$I$ equals $J$ ( $e$ )	$J$ equals $I$ ( $e$ )		$I^- = J^-$ , $I^+ = J^+$

Tabla 2.2: Relaciones básicas del álgebra de intervalos.

[vB92], Van Beek propone un algoritmo más eficiente, llamado CSPAN (ver la Figura 2.3), que determina la consistencia y adicionalmente encuentra una solución en  $O(n+e)$ , donde  $e$  es el número de arcos en la red de restricciones. El algoritmo se basa en la búsqueda de componentes fuertemente conexas en el grafo de restricciones para obtener un grafo reducido, donde los arcos están etiquetados sólo con las relaciones  $<$ ,  $>$  o  $?$ . Si sobre el grafo reducido se lleva a cabo una ordenación topológica entonces puede obtenerse una asignación consistente para las variables (es decir, una solución).

### 2.3.2. Álgebra de Intervalos

En el *álgebra de intervalos* (IA, *Interval Algebra*) de Allen [All83], las variables representan intervalos temporales. Un intervalo en un eje temporal denso se define como  $J \equiv [J^-, J^+]$  donde  $J^-$ ,  $J^+$  son los puntos inicial y final ( $J^- < J^+$ ). El conjunto de relaciones básicas se corresponde con las 13 posibles posiciones relativas de otro intervalo  $I$  con respecto a  $J$  (ver la Tabla 2.2).

Sea  $\mathcal{B}_{ia} = \{f, d, s, o, m, b, e, fi, di, si, oi, mi, bi\}$  el conjunto de relaciones básicas. Formalmente el álgebra de intervalos es un álgebra de relaciones propia formada por el álgebra booleana de los 8192 subconjuntos posibles de  $2^{\mathcal{B}_{ia}}$  ampliada con las operaciones de composición ( $\circ$ ) e inversa ( $^{-1}$ ). La inversa de una relación disyuntiva  $R = \{r_1, \dots, r_k\}$ ,  $r_i \in \mathcal{B}_{ia}$ , puede obtenerse como  $R^{-1} = \{r_1^{-1}, \dots, r_k^{-1}\}$  y la composición de relaciones disyuntivas  $R \circ R' = \{r \circ r' \mid r \in R, r' \in R'\}$  puesto que las operaciones de inversa y composición

son distributivas con respecto a la unión. La composición de dos relaciones básicas viene dada por la tabla de transitividad que se puede ver en la Tabla 2.3.

Desafortunadamente todos los problemas de razonamiento interesantes sobre el álgebra de intervalos son NP-duros. En particular el problema de la consistencia es NP-completo [VK86]. Por tanto resolver estas tareas es bastante costoso, y es interesante considerar subclases del álgebra de Allen que tengan mejores propiedades computacionales. Las más significativas son:

- a) Subclase *continuous endpoint*: conjunto de relaciones que pueden expresarse como una conjunción de relaciones del álgebra de puntos convexa entre los puntos extremos de los intervalos [VKvB90].
- b) Subclase *pointisable*: conjunto de relaciones que pueden expresarse como una conjunción de relaciones del álgebra de puntos [VKvB90, vB92].
- c) Subclase *ORD-Horn*: conjunto de relaciones del IA que pueden expresarse como conjunción de restricciones de ORD-Horn sobre los puntos límite de los intervalos. Una restricción de ORD-Horn se entiende aquí como una disyunción de cualquier número de literales negativos  $a \neq b$  y como mucho un literal positivo de la forma  $a = b$  o  $a \leq b$ . Es la única clase maximal tratable que contiene a todas las relaciones básicas del IA y cubre un 10 por ciento del álgebra completa [NB95].

Para las subclases *continuous endpoint* y *pointisable* los problemas de la consistencia, búsqueda de una solución y red mínima se resuelven trasladando las relaciones entre intervalos a conjunciones de relaciones entre puntos y aplicando los algoritmos correspondientes para el álgebra de puntos. Para la subclase *ORD-Horn* se aplica el algoritmo PC para decidir la consistencia.

## Relaciones Convexas y Preconvexas

Otra forma alternativa de caracterizar subclases tratables del álgebra de intervalos sin recurrir a una traducción al álgebra de puntos es la propuesta por Ligozat [Lig91, Lig94, Lig98b]. Según Ligozat, un intervalo  $[J^-, J^+]$  define una partición de la línea temporal en 5 zonas: la zona 0 es  $]-\infty, J^-[$ , la zona 1 es  $\{J^-\}$ , la zona 2 es  $]J^-, J^+[$ , la zona 3 es  $\{J^+\}$  y la zona 4 es  $]J^+, \infty[$ . Cada relación básica de un intervalo  $[I^-, I^+]$  con respecto a  $[J^-, J^+]$  está determinada completamente por el par ordenado de números correspondientes a las zonas particionadas por  $J$  a las que  $I^-, I^+$  pertenecen. Utilizando este par de números, Ligozat establece un orden parcial sobre  $\mathcal{B}_{ia}$  que define un retículo como el de la Figura 2.4-(a). Otra manera de representar las relaciones entre intervalos es mediante regiones en el plano euclídeo (Figura 2.4-(b)). Un intervalo  $[I^-, I^+]$  está en la relación  $R$  con respecto

<i>o</i>	<i>b</i>	<i>bi</i>	<i>d</i>	<i>di</i>	<i>o</i>	<i>oi</i>	<i>m</i>	<i>mi</i>	<i>s</i>	<i>si</i>	<i>f</i>	<i>fi</i>	<i>e</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	?	<i>b, o, m, d, s</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b, o, m, d, s</i>	<i>b</i>	<i>b, o, m, d, s</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b, o, m, d, s</i>	<i>b</i>	<i>b</i>
<i>bi</i>	?	<i>bi</i>	<i>bi, oi, mi, d, f</i>	<i>bi</i>	<i>bi, oi, mi, d, f</i>	<i>bi</i>	<i>bi, oi, mi, d, f</i>	<i>bi</i>	<i>bi, oi, mi, d, f</i>	<i>bi</i>	<i>bi</i>	<i>bi</i>	<i>bi</i>
<i>d</i>	<i>b</i>	<i>bi</i>	<i>d</i>	?	<i>b, o, m, d, s</i>	<i>bi, oi, mi, d, f</i>	<i>b</i>	<i>bi</i>	<i>d</i>	<i>bi, oi, mi, d, f</i>	<i>d</i>	<i>b, o, m, d, s</i>	<i>d</i>
<i>di</i>	<i>b, o, m, di, fi</i>	<i>bi, oi, mi, si</i>	<i>o, oi, dur, con, e</i>	<i>di</i>	<i>o, di, fi</i>	<i>oi, di, si</i>	<i>o, di, fi</i>	<i>oi, di, si</i>	<i>di, fi, o</i>	<i>di</i>	<i>di, si, oi</i>	<i>di</i>	<i>di</i>
<i>o</i>	<i>b</i>	<i>bi, oi, di, mi, si</i>	<i>o, d, s</i>	<i>b, o, m, di, fi</i>	<i>b, o, m</i>	<i>o, oi, dur, con, e</i>	<i>b</i>	<i>oi, di, si</i>	<i>o</i>	<i>di, fi, o</i>	<i>d, s, o</i>	<i>b, o, m</i>	<i>o</i>
<i>oi</i>	<i>b, o, m, di, fi</i>	<i>bi</i>	<i>oi, d, f</i>	<i>bi, oi, mi, di, si</i>	<i>o, oi, dur, con, e</i>	<i>bi, oi, mi</i>	<i>o, di, fi</i>	<i>bi</i>	<i>oi, d, f</i>	<i>oi, bi, mi</i>	<i>oi</i>	<i>oi, di, si</i>	<i>oi</i>
<i>m</i>	<i>b</i>	<i>bi, oi, mi, di, si</i>	<i>o, d, s</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>o, d, s</i>	<i>b</i>	<i>f, fi, e</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>d, s, o</i>	<i>b</i>	<i>m</i>
<i>mi</i>	<i>b, o, m, di, fi</i>	<i>bi</i>	<i>oi, d, f</i>	<i>bi</i>	<i>oi, d, f</i>	<i>bi</i>	<i>s, si, e</i>	<i>bi</i>	<i>d, f, oi</i>	<i>bi</i>	<i>mi</i>	<i>mi</i>	<i>mi</i>
<i>s</i>	<i>b</i>	<i>bi</i>	<i>d</i>	<i>b, o, m, di, fi</i>	<i>b, o, m</i>	<i>oi, d, f</i>	<i>b</i>	<i>mi</i>	<i>s</i>	<i>s, si, e</i>	<i>d</i>	<i>b, m, o</i>	<i>s</i>
<i>si</i>	<i>b, o, m, di, fi</i>	<i>bi</i>	<i>oi, d, f</i>	<i>di</i>	<i>o, di, fi</i>	<i>oi</i>	<i>o, di, fi</i>	<i>mi</i>	<i>s, si, e</i>	<i>si</i>	<i>oi</i>	<i>di</i>	<i>si</i>
<i>f</i>	<i>b</i>	<i>bi</i>	<i>d</i>	<i>bi, oi, mi, di, si</i>	<i>o, d, s</i>	<i>bi, oi, mi</i>	<i>m</i>	<i>bi</i>	<i>d</i>	<i>bi, oi, mi</i>	<i>f</i>	<i>f, fi, e</i>	<i>f</i>
<i>fi</i>	<i>b</i>	<i>bi, oi, mi, di, si</i>	<i>o, d, s</i>	<i>di</i>	<i>o</i>	<i>oi, di, si</i>	<i>m</i>	<i>si, oi, di</i>	<i>o</i>	<i>di</i>	<i>f, fi, e</i>	<i>fi</i>	<i>fi</i>
<i>e</i>	<i>b</i>	<i>bi</i>	<i>d</i>	<i>di</i>	<i>o</i>	<i>oi</i>	<i>m</i>	<i>mi</i>	<i>s</i>	<i>si</i>	<i>f</i>	<i>fi</i>	<i>e</i>

Tabla 2.3: Tabla de composición de relaciones básicas entre intervalos [All83]:  $dur = \{d, s, f\}$ ,  $con = \{di, si, fi\}$ .

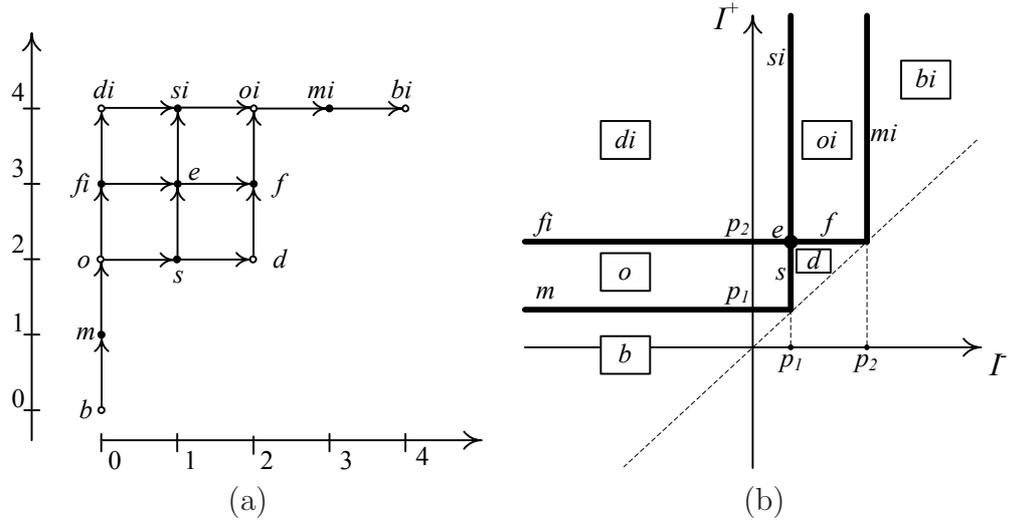


Figura 2.4: Retículo y representación en el plano de las relaciones entre intervalos.

a un intervalo fijo  $[p_1, p_2]$  si y sólo si  $[I^-, I^+]$  pertenece a cierta región en el semiplano definido por la inecuación  $I^- < I^+$ . La *dimensión* de una relación básica, denotada por  $dim(r)$ , se define como la dimensión de la región asociada en el plano, y la dimensión de una relación  $R \in 2^{\mathcal{B}_{ia}}$  es la dimensión máxima de sus relaciones básicas. Así pues, tenemos relaciones básicas de dimensión 2:  $b, bi, o, oi, d, di$ ; de dimensión 1:  $m, mi, s, si, f, fi$ , y  $e$  es la única relación básica de dimensión 0.

A partir del retículo, Ligozat define dos subclases:

- a) La subclase de *relaciones convexas*: las relaciones convexas son el conjunto de relaciones que se corresponden con intervalos en el retículo. Un intervalo  $[r_1, r_2], r_1, r_2 \in \mathcal{B}_{ia}$  del retículo está formado por todas las relaciones básicas mayores que  $r_1$  y menores que  $r_2$  (ambas incluidas). Por ejemplo, la relación  $\{m, o, s, fi, e\}$  es convexa ya que se corresponde con el intervalo  $[m, e]$ .
- b) La subclase de *relaciones preconexas*: esta clase incluye a las relaciones convexas y a las que se obtienen a partir de éstas suprimiendo átomos de dimensión inferior a 2.

Ligozat demuestra que tanto la subclase de relaciones convexas como la de relaciones preconexas son subclases tratables para las que el algoritmo PC es válido para decidir la consistencia. Es más, Ligozat demuestra que en el álgebra de intervalos la subclase de relaciones convexas coincide con la subclase *continuous endpoint* y que la subclase de relaciones preconexas coincide con la subclase *ORD-Horn*.

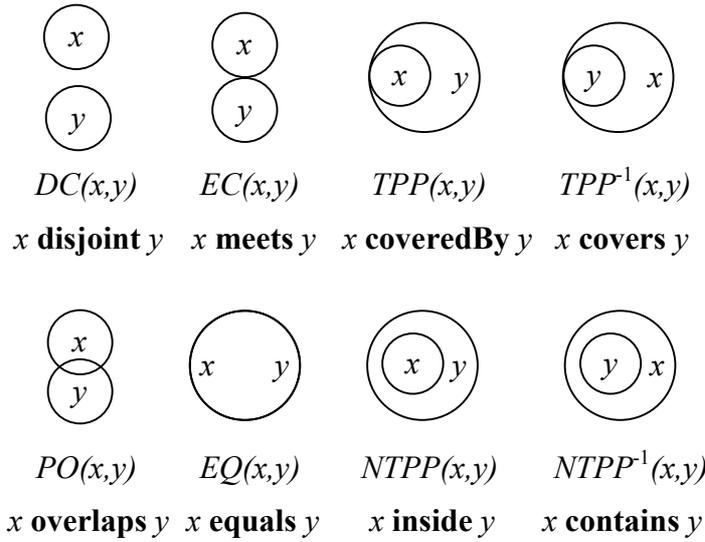


Figura 2.5: Ejemplo de las relaciones de RCC8 y del modelo de 4 y 9 intersecciones.

## 2.4. Modelos de Relaciones Espaciales

En el Razonamiento Espacial Cualitativo es muy común considerar uno o varios aspectos del espacio como la topología, las direcciones o la distancia para desarrollar un sistema de relaciones cualitativas entre las entidades espaciales que cubran estos aspectos y que sean de utilidad desde un punto de vista de su aplicación en determinados dominios. En esta sección vamos a hacer un repaso de los principales modelos para razonamiento espacial basado en restricciones. Nos centraremos principalmente en aquellos que tratan los aspectos topológicos y direccionales del espacio para los que se han desarrollado formalismos basados en CSP.

### 2.4.1. Relaciones Topológicas

En la mayoría de los modelos de razonamiento espacial con relaciones topológicas las entidades espaciales involucradas suelen ser entidades 2-extendidas (de tipo región según la clasificación realizada en la Sección 1.1.2).

El cálculo de relaciones topológicas más utilizado en razonamiento espacial es el RCC8, que está formado por 8 relaciones básicas:  $DC$ ,  $EC$ ,  $PO$ ,  $EQ$ ,  $TPP$ ,  $NTPP$ ,  $TPP^{-1}$  y  $NTPP^{-1}$ . Estos símbolos son las abreviaturas de *DisConnected*, *Externally Connected*, *Partially Overlapping*, *Equal*, *Tangential Proper Part*, *Non Tangential Proper Part* y las relaciones inversas de las dos últimas (en la Figura 2.5 se puede ver un ejemplo de cada relación). El RCC8 tiene su origen en una teoría de lógica de primer orden conocida como *Region Connection Calculus* (RCC) [RCC92]. Esta teoría está basada en la primitiva

---

$DC(x, y)$	$\equiv$	$\neg C(x, y)$
$P(x, y)$	$\equiv$	$\forall z[C(z, x) \rightarrow C(z, y)]$
$PP(x, y)$	$\equiv$	$P(x, y) \wedge \neg P(y, x)$
$EQ(x, y)$	$\equiv$	$P(x, y) \wedge P(y, x)$
$O(x, y)$	$\equiv$	$\exists z[P(z, x) \wedge P(z, y)]$
$PO(x, y)$	$\equiv$	$O(x, y) \wedge \neg P(x, y) \wedge \neg P(y, x)$
$EC(x, y)$	$\equiv$	$C(x, y) \wedge \neg O(x, y)$
$TPP(x, y)$	$\equiv$	$PP(x, y) \wedge \exists z[EC(z, x) \wedge EC(z, y)]$
$NTTP(x, y)$	$\equiv$	$PP(x, y) \wedge \neg \exists z[EC(z, x) \wedge EC(z, y)]$
$TPP^{-1}(x, y)$	$\equiv$	$TPP(y, x)$
$NTTP^{-1}(x, y)$	$\equiv$	$NTTP(y, x)$

---

Tabla 2.4: Definición de las relaciones de RCC8.

$C(x, y)$  que se define como “la región  $x$  está conectada con la región  $y$ ”, o en términos del operador clausura,  $C(x, y)$  se cumple si  $Cl(x) \cap Cl(y) \neq \emptyset$ . Esta primitiva es una relación reflexiva y simétrica, y satisface los siguientes axiomas:

1.  $\forall x[C(x, x)]$
2.  $\forall x, y[C(x, y) \rightarrow C(y, x)]$

A partir de esta primitiva se pueden definir varias relaciones topológicas entre las que se encuentran las 8 anteriores (Tabla 2.4).

Un modelo más sencillo que el RCC8, llamado RCC5, es aquel en el que no se tienen en cuenta las fronteras de las regiones, es decir, no se distingue entre  $DC$  y  $EC$  y entre  $TPP$  y  $NTTP$ . Estas relaciones se combinan para dar lugar a la relación  $DR$  (DiscRete) y  $PP$  (ProperPart), respectivamente. Así, el conjunto de relaciones de RCC5 está formado por las siguientes relaciones:  $DR$ ,  $PO$ ,  $PP$ ,  $PP^{-1}$  y  $EQ$ .

Otra forma de obtener un conjunto JEPD de relaciones topológicas se basa en los conceptos de *frontera* y de *interior* de las entidades espaciales. Dados dos objetos espaciales  $X$  y  $Y$ , se definen las fronteras  $Fr(X)$ ,  $Fr(Y)$ , y los interiores  $Int(X)$ ,  $Int(Y)$ , y se consideran todas las posibles combinaciones de las intersecciones entre ellos. Es decir, se consideran los siguientes conjuntos:

$$\begin{array}{ll} Fr(X) \cap Fr(Y), & Fr(X) \cap Int(Y), \\ Int(X) \cap Int(Y), & Int(X) \cap Fr(Y). \end{array}$$

Cada uno de estos conjuntos puede ser vacío o no vacío. Los posibles resultados varían entre  $(\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$  y  $(\neg\emptyset, \neg\emptyset, \neg\emptyset, \neg\emptyset)$ , y cada una de la 16 posibles combinaciones da lugar a una sola relación topológica entre  $X$  e  $Y$ . Si restringimos el dominio de los objetos

Relación topológica	$Fr(X) \cap Fr(Y)$	$Int(X) \cap Int(Y)$	$Fr(X) \cap Int(Y)$	$Int(X) \cap Fr(Y)$
$X$ disjoint $Y$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$X$ meets $Y$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$X$ equals $Y$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$X$ inside $Y$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
$X$ coveredBy $Y$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
$X$ contains $Y$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
$X$ convers $Y$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
$X$ overlaps $Y$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$

Tabla 2.5: Relaciones topológicas en el modelo de 4-intersecciones.

espaciales a sólo regiones de tipo *celda*<sup>1</sup>, entonces sólo 8 de las 16 combinaciones son posibles (ver la Tabla 2.5 y la Figura 2.5 para un ejemplo). Este modelo recibe el nombre de *modelo de 4-intersecciones* [EF91]. Dicho modelo ha sido extendido teniendo en cuenta también el operador topológico *complemento* o *exterior* para poder estudiar también las relaciones entre objetos espaciales distintos a celdas (p.e. líneas, puntos). En este caso las relaciones binarias espaciales entre dos objetos se clasifican comprobando la intersección de las 9 combinaciones de los tres operadores aplicados a los objetos. Este modelo es conocido por *modelo de 9-intersecciones* [Ege91]. Del mismo modo, en el modelo de 9-intersecciones si consideramos entidades espaciales de tipo celda podemos obtener el mismo conjunto de 8 relaciones topológicas que en el modelo de 4-intersecciones.

Aunque el conjunto de relaciones básicas del modelo de 4-intersecciones es el mismo que el de RCC8 existen diferencias entre ambos. En primer lugar en el modelo de 4-intersecciones las entidades espaciales consideradas son celdas mientras que en RCC8 se considera el dominio de regiones regulares que permiten agujeros o estar desconectadas. En segundo lugar, las propiedades computacionales difieren considerablemente cuando ambos modelos se plantean como un CSP. Razonar con el álgebra de relaciones de RCC8 es más simple que razonar con el modelo de 4 o 9 intersecciones. Para RCC8 se han identificado varias subclases tratables (varias de ellas maximales, incluyendo todas las relaciones básicas) para los que se puede resolver el problema CSPSAT y el de la red mínima en tiempo polinomial empleando un algoritmo de camino-consistencia. Además se ha demostrado que CSPSAT para el álgebra completa de RCC8 es NP-completo [Ren99, CP05]. Sin embargo para el modelo de intersecciones el problema de la consistencia de relaciones básicas es equivalente al problema de decidir si un grafo es un grafo de intersección de curvas en el plano (*string graph problem*) [GPP95], problema que es NP-completo [SSS03].

Una discusión más amplia de estos y otros modelos de relaciones topológicas basados en restricciones y de sus propiedades computacionales se puede encontrar en [Ren02].

<sup>1</sup>Una *celda* es una región fuertemente conectada y que no tiene agujeros, o lo que es lo mismo, es topológicamente equivalente al llamado *disco unidad cerrado* definido como el conjunto  $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ .

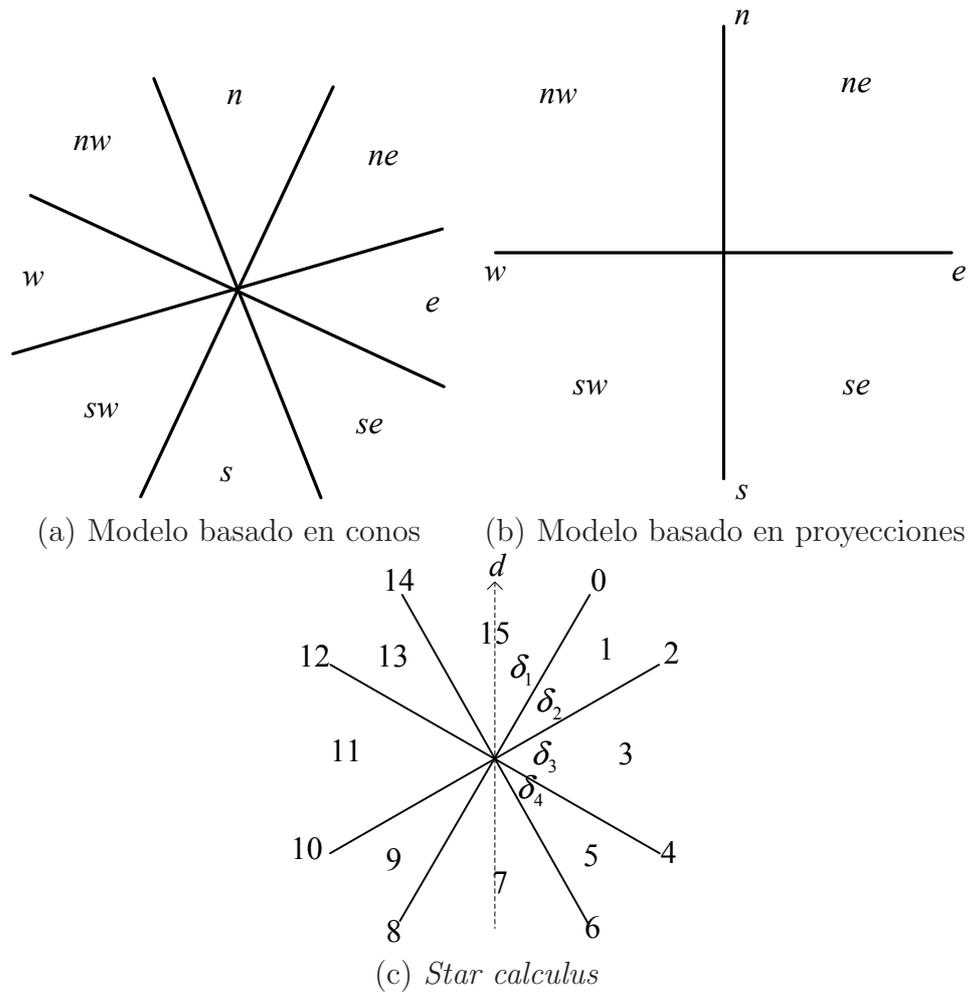


Figura 2.6: Modelos de relaciones cardinales entre puntos.

### 2.4.2. Relaciones Direccionales

Dentro del razonamiento espacial basado en restricciones con relaciones direccionales podemos clasificar los distintos modelos existentes según el marco de referencia utilizado y dependiendo de si tratamos con puntos o con entidades espaciales 1- o 2-extendidas. En esta tesis estamos interesados en los modelos que utilizan sistemas de referencia absolutos que sirvan para razonar con direcciones cardinales. Otros modelos con direcciones que utilizan otros sistemas de referencia los podemos encontrar en [MJ90, Her93, ZF96].

#### Relaciones Direccionales entre Puntos

En el caso de puntos espaciales destacamos el trabajo de Frank [Fra96], que enumera cuales deberían ser las propiedades deseables para un cálculo de direcciones cardinales en un espacio geográfico (es decir, las direcciones son del tipo *norte*, *sur*, *noreste*, etc.). En

$eq$	$n$	$e$	$s$	$w$	$ne$	$nw$	$se$	$sw$
$(=, =)$	$(=, >)$	$(>, =)$	$(=, <)$	$(<, =)$	$(>, >)$	$(<, >)$	$(>, <)$	$(<, <)$

Tabla 2.6: Correspondencia entre el álgebra de relaciones cardinales y el álgebra de puntos.

dicho trabajo Frank propone dos formalismos para determinar los sectores que representan las direcciones con respecto a un punto de referencia: el *modelo basado en conos* y el *modelo basado en proyecciones*. En el primero, los sectores son conos con un grado de apertura de  $\frac{360}{n}$  grados, donde  $n$  es el número de relaciones básicas direccionales (Figura 2.6-(a)). En el modelo basado en proyecciones, los ejes de coordenadas dividen el espacio en 4 semiplanos, que junto con los 4 semi-ejes más el punto de referencia dan lugar a 9 zonas donde podemos situar al punto primario (Figura 2.6-(b)).

Las propiedades algebraicas del modelo basado en proyecciones han sido estudiadas en profundidad por Ligozat [Lig98a]. El conjunto de relaciones JEPD básicas consta de 9 elementos. Este modelo, conocido como *álgebra de relaciones cardinales*, puede verse como una extensión bidimensional del álgebra de puntos, ya que una relación básica se puede definir como una tupla  $(r_x, r_y)$  donde  $r_x$  (resp.  $r_y$ ) es la relación entre los puntos proyectados en el eje  $x$  (resp. eje  $y$ ). La Tabla 2.6 muestra la correspondencia entre las relaciones cardinales y las del álgebra de puntos. Al igual que en el álgebra de intervalos, Ligozat define un orden parcial entre las relaciones básicas e identifica las subclases tratables de relaciones *convexas* y *preconvexas*, siendo esta última una subclase maximal.

Otro modelo formal de direcciones cardinales basados en puntos espaciales es el *Star Calculus* de Renz y Mitra [RM04], que es una generalización de los dos modelos anteriores. La principal diferencia con los anteriores es que el nivel de granularidad de las relaciones es variable y no fijo, es decir, el número de relaciones y su semántica es parametrizable en el modelo, lo cual permite adaptarse a varias situaciones. Concretamente, fijada una dirección de referencia  $d$  y un punto  $p$ , se hace una partición del espacio por  $m$  rectas que pasan por  $p$  formando cada uno de ellos un ángulo  $\delta_i, 1 \leq i \leq m$  con respecto a la dirección de referencia  $d$ . De esta forma se divide el espacio en  $4m + 1$  zonas incluyendo los  $2m$  semi-rectas resultantes de las  $m$  rectas, las  $2m$  semi-áreas que quedan entre las semi-rectas y el propio punto  $p$ . El ejemplo de la Figura 2.6-(c) muestra un modelo posible de *star calculus* donde  $m = 4$  y  $\delta_1 = 30, \delta_2 = 60, \delta_3 = 120, \delta_4 = 150$ ; cada posible relación se enumera con un valor entre 0 y 15, siendo las relaciones pares las correspondientes a las semi-rectas y las impares a las semi-áreas delimitadas por cada dos semi-rectas.

El modelo basado en proyecciones tiene varias ventajas con respecto al modelo basado en conos. En primer lugar, la estructura propuesta por este modelo es idéntica a aquella proporcionada por los sistemas de posicionamiento basados en la latitud y la longitud. En segundo lugar, en este modelo el mecanismo de inferencia basado en la composición

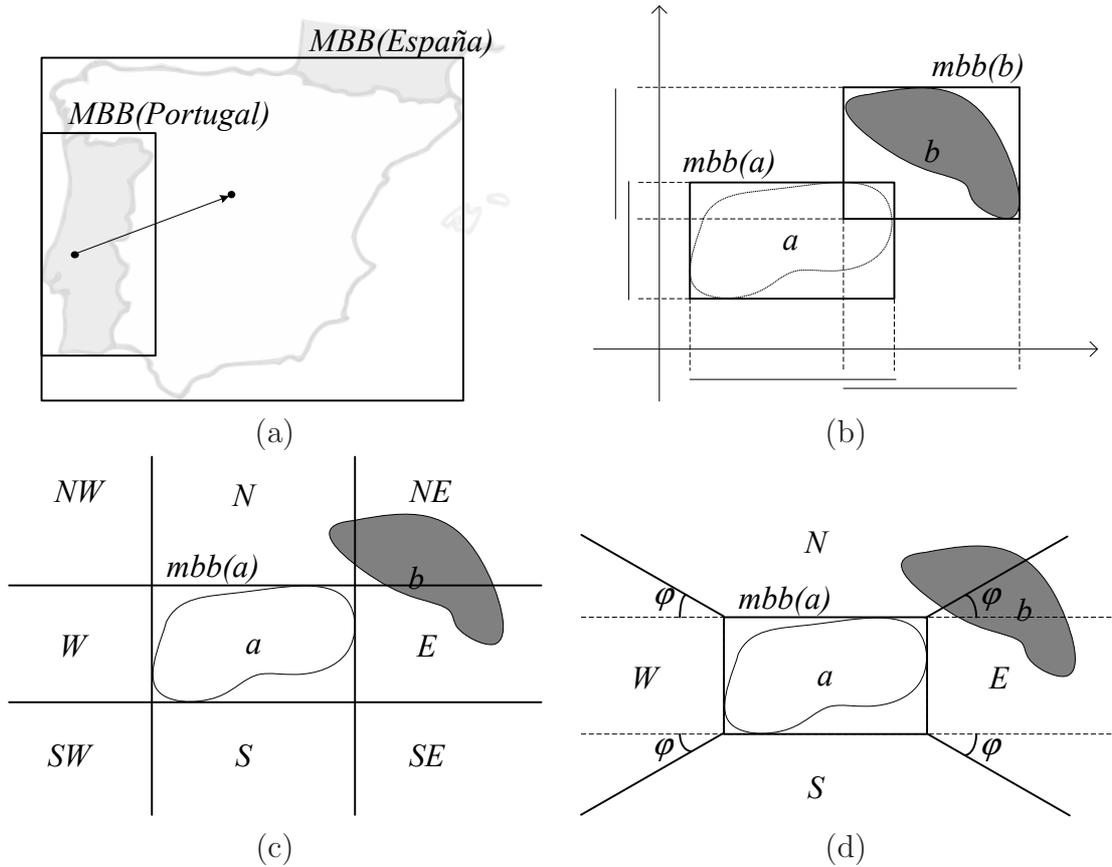


Figura 2.7: Modelos de relaciones direccionales para entidades extendidas: aproximación por puntos (a), aproximación por  $mbbs$  (b), aproximación por  $mbb$  del objeto referencia basado en proyecciones (c), y aproximación por  $mbb$  del objeto referenciado basado en conos y proyecciones (d).

da lugar a relaciones más precisas en comparación con el modelo basado en conos [Fra96]. Por otro lado, el modelo basado en conos es más adecuado cuando queremos utilizar más relaciones cualitativas que las 9 proporcionadas por el modelo basado en proyecciones. Además, el modelo basado en conos es más representativo para situaciones en las que las direcciones está limitada por cierto ángulo de visión [RM04].

### Relaciones Direccionales entre Entidades Extendidas

Una forma de tratar con relaciones direccionales entre entidades espaciales extendidas es aproximar estas mediante otros objetos espaciales más simples. Por ejemplo, podemos utilizar un punto representativo (por ejemplo, el centroide) para aproximar las entidades espaciales y realizar razonamiento direccional usando los formalismos mencionados anteriormente (Figura 2.7-(a)).

Otra forma muy utilizada de tratar con objetos espaciales extendidos es aproximándolos

los por el *rectángulo mínimo* que los contiene (*mbb*) (*minimum bounding box* o *minimum bounding rectangle*). Los rectángulos mínimos son muy utilizados en Bases de Datos Espaciales y en Razonamiento Espacial [MJ90, AEG94, PSTE95, PT97] porque su representación es sencilla (por ejemplo, usando los puntos de la esquina superior derecha y la esquina inferior izquierda). Esta aproximación mediante rectángulos permite utilizar un modelo basado en proyecciones, como el de Frank, pero en lugar de puntos se proyectan los lados del rectángulo mínimo (Figura 2.7-(b)). Un cálculo bastante expresivo que permite razonamiento con relaciones direccionales entre objetos aproximados por rectángulos es el *álgebra de rectángulos* [BCdC98, BCdC99], que describiremos con cierto detalle en el Capítulo 4.

Un problema que surge con los modelos aproximados por puntos y rectángulos es que la información relativa a las regiones originales puede ser inexacta o contradictoria. Por ejemplo, según la aproximación por puntos, un país como España estaría al noreste de Portugal (ver la Figura 2.7-(a)), relación que se puede considerar inadecuada. Mediante la aproximación por rectángulos se pierde también información cuando las regiones no son convexas o tienen forma diagonal. Por ejemplo, la Figura 2.7-(b) indica que los rectángulos mínimos de las regiones  $a$  y  $b$  se superponen, pero la situación real es que  $a$  y  $b$  están desconectadas.

Para solventar estos problemas, algunos autores [GE97, Goy00, SK05] proponen un modelo relaciones cardinales entre regiones donde sólo se aproxima la región de referencia por su rectángulo mínimo. En la Figura 2.7-(c) aparece un ejemplo de una región  $b$  (primaria) que se extiende al norte, noreste y este de la región  $a$  (referencia), que se considera aproximada por su *mbb*. En un modelo donde ambas regiones se aproximan por rectángulos, la situación sería la indicada en la Figura 2.7-(b), de la que se deduce además que la región  $b$  se extiende también dentro de los límites del *mbb* de la región  $a$ , lo cual no es cierto. Dedicaremos completamente los capítulos 3 y 4 al modelo de relaciones cardinales entre regiones propuesto por Skiadopoulos y Koubarakis [SK05], ya que los principales resultados obtenidos en esta primera parte de la tesis se basan en dicho modelo.

Una familia de modelos para regiones, presentada recientemente en [SS07], combina características de los modelos de relaciones cardinales entre regiones basados en proyecciones y basados en conos (ver Figura 2.7-(d)). La familia contiene un número infinito de modelos, donde cada modelo se identifica por un único valor para  $\varphi$  ( $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ ) (el ángulo para las líneas que particionan el espacio). Se han calculado las operaciones de composición e inversa pero no se han propuesto aún algoritmos para resolver los principales problemas de razonamiento.

Por último, los formalismos anteriores que aproximan el objeto de referencia por su rectángulo mínimo, aunque muy expresivos, proporcionan poca información cuando el

objeto primario se encuentra dentro del *mbb* del objeto de referencia. En el ejemplo de la Figura 2.7-(a), el modelo nos diría que Portugal se encuentra dentro del *mbb* de España pero no nos dice que está, por ejemplo, en el interior al oeste. Este tipo de relaciones son muy habituales en los Sistemas de Información Geográfica para analizar la situación de regiones dentro de países. Varios autores han tratado este tipo de relaciones [AEG94, LWJW05].

### 2.4.3. Razonamiento Espacial con Varios Tipos de Relaciones

En esta sección mencionamos algunos trabajos realizados sobre razonamiento espacial en el que intervienen varios tipos de relaciones a la vez, debido al interés que despierta este tipo de modelos en los últimos años. Estos tipos de modelos espaciales permiten inferir información sobre un tipo de relación espacial a partir de los otros tipos de relaciones que forman parte del modelo.

Según Sharma [Sha96] un sistema automático para razonamiento espacial que trabaje con varios tipos de relaciones debe poder razonar de forma independiente con cada tipo de relación, o con varias combinaciones de relaciones de diferentes tipos o con tuplas de relaciones que formen una relación integrada. De este modo podemos distinguir varios tipos de razonamiento:

1. *Homogéneo*. Aquel en el que se deriva un único tipo de relación espacial a partir de otras dos relaciones espaciales del mismo tipo. Por ejemplo, inferir “*A* está desconectado de *C*” (topológica) dado que “*A* está desconectado de *B*” (topológica) y “*B* contiene a *C*” (topológica). Este es el tipo de razonamiento estándar con un sólo tipo de relación.
2. *Heterogéneo*. Aquel en el que se deriva una relación espacial de cualquier tipo a partir de dos relaciones espaciales de distinto tipo. Por ejemplo, inferir “*A* está al Norte de *C*” (direccional) dado que “*A* está en el interior de *B*” (topológico) y que “*B* está al norte de *C*” (direccional).
3. *Mixto*. Aquel en el que se deriva una relación espacial de un tipo de la composición de dos relaciones espaciales de otro tipo distinto. Por ejemplo, inferir “*A* está desconectado de *C*” dado que “*A* está al norte de *B*” y que “*B* está al norte de *C*”.
4. *Integrado*. Aquel en el que se deriva cada tipo de relación espacial dado dos conjuntos de tipos idénticos de relaciones espaciales. Por ejemplo, inferir “*A* está desconectado y al norte de *B*” a partir de que “*A* está conectado y al norte de *B*” y que “*B* está conectado y al norte de *C*”.

Los mecanismos de razonamiento espacial homogéneo, heterogéneo y mixto se pueden considerar conjuntamente como un mecanismo de *razonamiento combinado* que trabaja con tipos de relaciones espaciales individuales. A diferencia del razonamiento combinado, el razonamiento integrado trabaja con conjunciones de tipos de relaciones.

En esta línea de investigación podemos destacar los trabajos de Frank [Fra96] y el de Clementini *et ál.* [CFH97] sobre relaciones direccionales y de distancia entre puntos. En cuanto a la combinación de relaciones topológicas y direccionales recordamos el trabajo del propio Sharma [Sha96] que proporciona las tablas de composición para el razonamiento heterogéneo, mixto e integrado entre regiones convexas aproximadas por rectángulos mínimos. En [Li07] se presenta un modelo que combina RCC8 con un cálculo de direcciones cardinales llamado DIR9, que es una subclase del álgebra de rectángulos. En [SL04] los autores presentan un modelo de razonamiento integrado de las relaciones RCC8 con el modelo de direcciones cardinales de Goyal y Egenhofer [GE97]. Por último, Gerevini y Renz [GR02] combinan las relaciones RCC8 con relaciones de tamaño cualitativas y cuantitativas entre regiones.

# Capítulo 3

## Razonamiento con Relaciones Cardinales entre Regiones

Una vez introducidos los conceptos básicos sobre CSPs y los principales modelos para razonamiento temporal y espacial basado en restricciones, en este capítulo nos centramos en un modelo de razonamiento espacial con relaciones cardinales entre regiones, al que nos referimos aquí abreviadamente como *modelo DC* (de Direccional Cardinal). Estudiamos los problemas de la consistencia y búsqueda de una solución para redes de relaciones básicas entre regiones, y proponemos un algoritmo para resolver estos problemas, que aporta mejoras en cuanto a tiempo de ejecución y posibilidades de extensión respecto a algoritmos previos.

La estructura del capítulo es la siguiente:

- En la Sección 3.1 presentamos una introducción al modelo DC de relaciones cardinales entre regiones. Mostramos los conceptos principales, la terminología, operaciones y tipos de relaciones y los resultados más relevantes conocidos sobre el problema de la consistencia. Aportamos una pequeña prueba de que la operación de inversa de una relación no es cerrada en el conjunto de relaciones cardinales, en contra de una afirmación anterior.
- En la Sección 3.2 se describe detalladamente el algoritmo DIS-BCON, propuesto por Skiadopoulos y Koubarakis [SK05], que decide la consistencia de una red de restricciones cardinales básicas entre regiones en  $O(n^5)$ , donde  $n$  es el número de variables involucradas.
- En la Sección 3.3 presentamos una variante del algoritmo DIS-BCON para comprobar la consistencia de una red de restricciones cardinales básicas entre regiones, que supone una mejora del tiempo de ejecución de  $O(n^5)$  a  $O(n^4)$ . También introduci-

mos los cambios necesarios para que el algoritmo propuesto, DIS-BCSOL, pueda proporcionar una solución de la red en el caso de que sea consistente, cosa que no hace el algoritmo original.

- En la Sección 3.4 discutimos sobre las ventajas e inconvenientes del algoritmo que proponemos frente al algoritmo de Zhang *et al.* [ZLLY08] que resuelve el mismo problema. Este algoritmo se adapta también para el problema de la consistencia de relaciones cardinales básicas entre regiones conectadas y sugerimos los cambios que habría que hacer en nuestro algoritmo para resolver el mismo problema. Justificamos que, en lo que se refiere a la búsqueda de múltiples soluciones y a las posibilidades de integración con relaciones cuantitativas para aumentar la expresividad del modelo, nuestra propuesta resulta más adecuada, e incluso la única que, hasta la fecha, que admite integración con relaciones cuantitativas con cambios mínimos.

## 3.1. El Modelo DC de Relaciones Direccionales Cardinales entre Regiones

En esta sección presentamos una introducción al modelo DC de relaciones cardinales entre regiones propuesto originalmente por Goyal y Egenhofer [GE97, Goy00] y formalizado posteriormente por Skiadopoulos y Koubarakis [SK04, SK05]. Mostramos los conceptos principales, la terminología y los resultados más relevantes sobre el problema fundamental de la consistencia.

### 3.1.1. Regiones, Tiles y Direcciones Cardinales

Recordamos que una *región* se definía en la Sección 1.1.2 como un objeto o figura bidimensional regular del plano. En términos más precisos, una región es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^2$  que cumple la propiedad de coincidir con la clausura topológica de su interior (es regular). Esto excluye a los puntos, a los segmentos y demás figuras de una dimensión, y a los objetos bidimensionales formados por unión de figuras de distinta dimensión.

Sea  $b$  una región y sean  $x$  e  $y$  los dos ejes de coordenadas del plano euclídeo. Los símbolos  $b_x^-$  (resp.,  $b_x^+$ ) y  $b_y^-$  (resp.,  $b_y^+$ ) denotan el *ínfimo* (resp., *supremo*) de la proyección de la región  $b$  sobre los eje  $x$  e  $y$ .

**Definición 3.1** (Rectángulo Mínimo). *El rectángulo mínimo que contiene a la región  $b$ , denotado con  $mbb(b)$  (*m*inimum *b*ounding *b*ox de  $b$ ), es el rectángulo de lados paralelos a los ejes del plano dado por las líneas rectas  $x = b_x^-$ ,  $x = b_x^+$ ,  $y = b_y^-$ ,  $y = b_y^+$  (ver la Figura 3.1). Nos referiremos a  $b_x^-, b_x^+, b_y^-, b_y^+$  como a los puntos extremos de  $mbb(b)$ .*

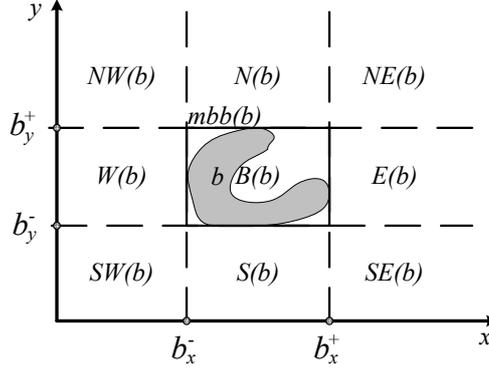


Figura 3.1: Tiles y  $mbb$  con respecto a la región  $b$ .

**Definición 3.2** (Rectángulo Trivial y No Trivial). *A cualquier rectángulo con lados paralelos a los ejes del plano euclídeo y con área mayor que cero lo llamaremos rectángulo no trivial. Un rectángulo trivial es un punto o parte de la frontera de un rectángulo no trivial, y por tanto, no es una región.*

**Proposición 3.1.** *Si  $b$  es una región del plano entonces  $mbb(b)$  es un rectángulo no trivial y se cumple que  $b_x^- < b_x^+ \wedge b_y^- < b_y^+$ .*

### Dominios de Regiones

En el modelo DC se pueden considerar distintos tipos de regiones, atendiendo a si tienen una forma homogénea, como un rectángulo, o si son conectadas o desconectadas. Nosotros consideramos los siguientes dominios para las regiones:

1. El propio conjunto de todas las regiones regulares. Denotaremos con  $DIS$  a dicho conjunto. Como sabemos  $DIS$  admite cualquier objeto espacial 2-extendido regular que puede ser conectado o desconectado y posiblemente con agujeros.
2. Regiones fuertemente conectadas, entendiendo que son regiones cuyo interior es camino conectado (existe un camino entre cada dos puntos dentro de la región). Denotaremos con  $CON$  a dicho conjunto. Este es el tipo de dominio considerado originalmente para el modelo DC.
3. Por último, consideraremos el conjunto  $REC = \{mbb(a) \mid a \in DIS\}$ . Este conjunto contiene a todos los rectángulos de lados paralelos a los ejes  $x, y$  del plano euclídeo, ya que cada rectángulo de este tipo se corresponde con el rectángulo mínimo de cierta región regular  $a$ .

Claramente se tiene que  $REC \subset CON \subset DIS$ . En el resto del capítulo se introduce la terminología usada en el modelo DC común a los tres dominios y usaremos el término

$DOM$  para referirnos a cualquiera de estos tres dominios.

## Tiles del Plano y Direcciones Cardinales

En el modelo DC estamos interesados en cómo cierta *región primaria*  $a$  está relacionada con otra *región de referencia*  $b$  por medio de una relación direccional de tipo cardinal. La región  $b$  se aproxima por  $mbb(b)$  y las líneas que se prologan de  $mbb(b)$  dividen el plano en 9 *tiles* (o áreas) representadas por  $t(b)$ , donde  $t$  es un *símbolo de dirección cardinal de tile* (abreviadamente ‘símbolo de tile’) y puede ser uno de los incluidos en el siguiente conjunto  $T = \{B, S, SW, W, NW, N, NE, E, SE\}$ . Las tiles periféricas se sitúan en las 8 direcciones cardinales usuales *South*, *SouthWest*, *West*, *NorthWest*, *North*, *NorthEast*, *East*, *SouthEast*, con respecto a la región de referencia. La tile central  $B(b)$  coincide con  $mbb(b)$ , de ahí el nombre del símbolo  $B$  (‘en el **B**ounding box de’). En la Figura 3.1 se pueden observar las diferentes tiles en las que se divide el plano considerando la región de referencia  $b$ . Las tiles son cerradas, ilimitadas (a excepción de la central) y su unión es  $\mathbb{R}^2$ . Dos tiles cualesquiera son disjuntas en su interior. Pero como cada tile incluye parte de las líneas que la delimitan, dos tiles pueden compartir un punto o una línea de frontera.

Una expresión como  $t_1:t_2:\dots:t_k$ , donde  $k > 1$ ,  $t_i \in T$  y tal que  $t_i \neq t_j$  para todo  $i \neq j$ , es un *símbolo de dirección cardinal multi-tile* (abreviadamente ‘símbolo multi-tile’) que sirve para denotar la unión de las tiles situadas en ciertas direcciones con respecto a una región de referencia, concretamente,  $t_1:t_2:\dots:t_k(b) = \bigcup_{i=1}^k t_i(b)$ . En adelante, por unicidad en la representación, consideramos un orden para escribir los símbolos multi-tile, que es el que viene dado por el orden en que aparecen enumerados anteriormente los símbolos de  $T$ . Por ejemplo, debemos entender que  $B:S:W$  y  $W:B:S$  denotan lo mismo, pero usaremos la primera expresión en lugar de la segunda atendiendo al orden establecido para la escritura de los símbolos multi-tile.

### 3.1.2. Relaciones Cardinales. Satisfacibilidad

A continuación definimos formalmente las relaciones cardinales dentro del modelo DC, que permiten establecer restricciones binarias entre variables de tipo región de  $DOM$  y establecemos las condiciones que se deben dar para que una restricción con relaciones cardinales sea satisfacible. Abusando de la notación, usaremos los símbolos de tile y multi-tile para representar relaciones binarias, además de usarlos para denotar a las tiles del plano situadas en las diferentes direcciones cardinales con respecto a una región de referencia.

**Definición 3.3** (Relación Cardinal Básica). *Una relación cardinal básica es una relación*

binaria, denotada por un símbolo de tile o multi-tile  $t_1:\dots:t_k$  ( $k \geq 1$ ), que se define como:

$$t_1:\dots:t_k = \{(\alpha, \beta) \in DOM^2 \mid \alpha = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_k, \alpha_i \in DOM, 1 \leq i \leq k \\ \wedge \alpha_1 \subseteq t_1(\beta), \dots, \alpha_k \subseteq t_k(\beta)\}$$

Una relación básica  $t_1:\dots:t_k$  se llama relación de tile cuando  $k = 1$ ; en otro caso se dice que es una relación multi-tile.

**Definición 3.4** (Restricción Cardinal Básica. Satisfacibilidad). *Una fórmula  $a t_1:\dots:t_k b$ , donde  $a, b$  son variables sobre  $DOM$  y  $t_1:\dots:t_k$  es una relación cardinal básica, se dice que es una restricción cardinal básica. La restricción  $a t_1:\dots:t_k b$  es satisfacible si existe una asignación de regiones  $a = \alpha, b = \beta$  tal que  $(\alpha, \beta) \in t_1:\dots:t_k$ .*

En adelante usaremos el término ‘satisfacible’ para restricciones o relaciones indistintamente. Obsérvese que la condición  $(\alpha, \beta) \in t_1:\dots:t_k$  podría escribirse como  $\alpha \subseteq t_1:\dots:t_k(\beta)$ , que indica que la región  $\alpha$  está incluida, como conjunto de puntos, en la unión de las tiles respecto a la región  $\beta$  situadas en las direcciones cardinales indicadas en cada símbolo de tile. Para comprender mejor la semántica de las relaciones cardinales básicas vamos a analizar con más detalle las condiciones que deben cumplirse para ser satisfacibles. Primero consideramos el caso más simple de relaciones de tile.

Para una relación de tile  $t$  se cumple por definición que  $a t b$  si  $\alpha \subseteq t(\beta)$ , siendo  $(\alpha, \beta)$  el par de regiones asignado a las variables. Por ejemplo, si  $t = N$  entonces la restricción  $a N b$  establece que  $a$  es una región que ocupa parte de la tile norte de  $b$  y no se extiende hacia otras direcciones, intuitivamente significa que  $a$  es una región situada al norte de  $b$ . Pues bien, en estos casos la restricción  $a t b$  puede expresarse de forma equivalente en términos de restricciones de orden entre los extremos de los rectángulos mínimos  $mbb(a)$  y  $mbb(b)$ , es decir, como un conjunto de restricciones binarias del álgebra de puntos convexa (ver Sección 2.3.1). Teniendo esto en cuenta, la satisfacibilidad de cada relación de tile se puede caracterizar de forma alternativa como se indica en la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.** *Las restricciones cardinales con relaciones de tile entre regiones son lógicamente equivalentes a restricciones de orden entre los puntos extremos de los rectángulos mínimos de las regiones, como se indica a continuación:*

$$\begin{array}{lcl}
 a B b & \Leftrightarrow & b_x^- \leq a_x^- \wedge a_x^+ \leq b_x^+ \wedge b_y^- \leq a_y^- \wedge a_y^+ \leq b_y^+ \\
 a S b & \Leftrightarrow & a_y^+ \leq b_y^- \wedge b_x^- \leq a_x^- \wedge a_x^+ \leq b_x^+ \\
 a SW b & \Leftrightarrow & a_x^+ \leq b_x^- \wedge a_y^+ \leq b_y^- \\
 a W b & \Leftrightarrow & a_x^+ \leq b_x^- \wedge b_y^- \leq a_y^- \wedge a_y^+ \leq b_y^+ \\
 a NW b & \Leftrightarrow & a_x^+ \leq b_x^- \wedge b_y^+ \leq a_y^- \\
 a N b & \Leftrightarrow & b_y^+ \leq a_y^- \wedge b_x^- \leq a_x^- \wedge a_x^+ \leq b_x^+ \\
 a NE b & \Leftrightarrow & b_x^+ \leq a_x^- \wedge b_y^+ \leq a_y^- \\
 a E b & \Leftrightarrow & b_x^+ \leq a_x^- \wedge b_y^- \leq a_y^- \wedge a_y^+ \leq b_y^+ \\
 a SE b & \Leftrightarrow & b_x^+ \leq a_x^- \wedge a_y^+ \leq b_y^-
 \end{array}$$

Una restricción cardinal con relación multi-tile del tipo  $a t_1 : \dots : t_k b$  puede descomponerse en un conjunto de restricciones cardinales más simples con relaciones de tile y otras restricciones adicionales de unión de regiones. Teniendo en cuenta que la restricción  $a t_1 : \dots : t_k b$  se satisface si existe una asignación de regiones  $a = \alpha, b = \beta$  tal que  $(\alpha, \beta) \in t_1 : \dots : t_k$  y teniendo en cuenta la definición de la relación cardinal básica, podemos observar que la restricción original equivale a un conjunto de restricciones en las que interviene la variable  $b$ , la variable  $a$  y  $k$  variables asociadas a ella  $a_1^b, \dots, a_k^b$ , que reciben el nombre de *variables componentes* de  $a$  con respecto a  $b$ .

Cada una de estas variables componentes  $a_i^b$  representa una porción de la región de  $a$  que ocupa parte de la tile  $t_i$  de la región de  $b$  y se debe cumplir, por tanto, la restricción simple  $a_i^b t_i b$ . Para que este conjunto de restricciones con relaciones de tile entre variables componentes sea equivalente a la restricción original entre  $a$  y  $b$  hay que asegurar que la variable  $a$  representa a la región formada por la unión de porciones de región de las variables componentes.

**Proposición 3.3.** *La restricción cardinal  $a t_1 : \dots : t_k b$  con relaciones multi-tile es equivalente a la conjunción de las siguientes restricciones sobre las variables  $a, b$  y las variables componentes  $a_1^b, \dots, a_k^b$  de  $a$  con respecto a  $b$ :*

- Restricciones de tile:  $a_1^b t_1 b, \dots, a_k^b t_k b$ .
- Restricciones de unión:  $a = a_1^b \cup \dots \cup a_k^b$ .

**Ejemplo 3.1.** *La restricción cardinal básica  $a W : NW : N b$  es satisficible por la asignación  $a = \alpha$  y  $b = \beta$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son las regiones dibujadas en la Figura 3.2. Es más, la región  $\alpha$  se puede particionar en 3 regiones de tal forma que  $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$  y las restricciones componentes  $a_1^b W b$ ,  $a_2^b NW b$  y  $a_3^b N b$  se satisfacen por las asignaciones  $a_1^b = \alpha_1, a_2^b = \alpha_2, a_3^b = \alpha_3$ , respectivamente.*

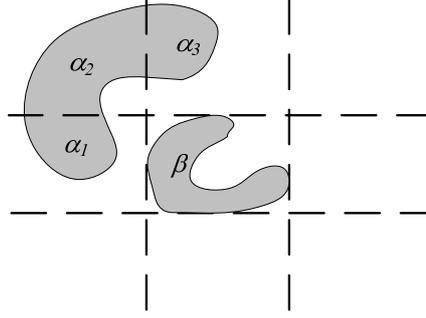


Figura 3.2: Restricción cardinal básica: dos regiones que satisfacen a  $W:NW:N$   $b$ .

**Definición 3.5** (Relación Cardinal Disyuntiva). *Una relación cardinal disyuntiva es una relación formada por unión de dos o más relaciones cardinales básicas y se representa como  $\{r_1, \dots, r_m\}$ ,  $m > 1$ . Una restricción cardinal disyuntiva a  $\{r_1, \dots, r_m\}$   $b$  es satisficible si y sólo si  $a r_1 b \vee \dots \vee a r_m b$  lo es.*

Las restricciones cardinales disyuntivas sirven para expresar conocimiento incompleto o indefinido sobre la posición relativa de dos regiones. Por ejemplo, si  $R = \{N:NE, E\}$  la restricción  $a R b$ , equivalentemente  $a N:NE b \vee a E b$ , es fácil de interpretar a partir de los símbolos de tile e indica que la región  $a$  se encuentra parte al norte y parte al noreste de  $b$ , o bien está situada al este de la región  $b$ . Usaremos el término *relación cardinal* para referirnos a las relaciones básicas o disyuntivas del modelo DC. Como es habitual, usaremos letras minúsculas  $r$  para referirnos a una relación básica y  $R$  para cualquier tipo de relación cardinal.

### 3.1.3. Conjuntos de Relaciones Cardinales Básicas

Al considerar un dominio u otro para las regiones se obtienen modelos de relaciones cardinales distintos, en el sentido de que tratan con conjuntos de relaciones básicas diferentes, como veremos en esta sección. Sin embargo, los distintos modelos comparten conceptos esenciales, por lo que usamos el término ‘modelo DC’ (sin más) para referirnos a un formalismo que usa relaciones cardinales entre regiones, sin hacer distinción entre los dominios de las mismas. Al diferenciar entre los tres dominios definidos en la Sección 3.1.1 para las regiones, se establecen tres conjuntos de relaciones cardinales básicas, que particionan cada una al producto cartesiano del dominio considerado. Son, por tanto, conjuntos de relaciones  $JEPD$ , a partir de los cuales se definirá una estructura algebraica para operar con las relaciones.

Consideremos en primer lugar el dominio más general  $DIS$ , que contiene a todas las regiones regulares del plano, posiblemente desconectadas. Denotamos con  $\mathcal{B}_{dis}$  al con-

junto que contiene a todas las relaciones básicas  $r$  que satisfacen dos regiones regulares cualesquiera  $a, b$  del plano. Ya que en  $DIS$  se permiten regiones regulares de todo tipo, las relaciones de  $\mathcal{B}_{dis}$  son todas las relaciones cardinales  $t_1:t_2:\dots:t_k$  que se forman por combinación de todos los símbolos de tile, por tanto hay  $\sum_{i=1}^9 \binom{9}{i} = 511$  relaciones en este conjunto. El conjunto potencia  $2^{\mathcal{B}_{dis}}$  está formado por todas las relaciones básicas y disyuntivas en  $DIS$ .

En el dominio  $CON$  de regiones fuertemente conectadas, el conjunto de relaciones básicas es un subconjunto propio de  $\mathcal{B}_{dis}$ , formado por las posibles relaciones cardinales básicas entre regiones fuertemente conectadas:

$$\mathcal{B}_{con} = \{r \in \mathcal{B}_{dis} \mid \exists \alpha, \beta \in CON : \alpha r \beta\}$$

$\mathcal{B}_{con}$  no permite relaciones del tipo  $S:N$  o  $NE:SE$  ya que estas relaciones sólo se satisfacen entre regiones desconectadas. De esta forma, el conjunto  $\mathcal{B}_{con}$  se restringe a sólo 218 de las 512 relaciones de  $\mathcal{B}_{dis}$  (en el Apéndice A.1 se enumeran todas las relaciones). El conjunto potencia  $2^{\mathcal{B}_{con}}$  contiene a todas las relaciones cardinales básicas y disyuntivas en  $CON$ .

Por último, consideramos el dominio de regiones en  $REC$ . Las regiones consideradas son rectángulos paralelos a los ejes  $x$  e  $y$  del plano. Denotamos con  $\mathcal{B}_{rec}$  al conjunto de relaciones cardinales rectangulares básicas. Este conjunto es un subconjunto propio de  $\mathcal{B}_{con}$ , puesto que  $REC \subset CON$ . Luego podemos definir  $\mathcal{B}_{rec}$  como:

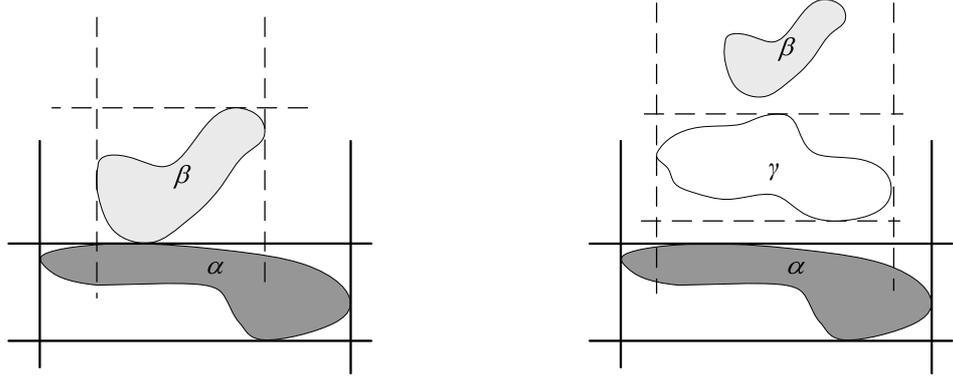
$$\mathcal{B}_{rec} = \{r \in \mathcal{B}_{con} \mid \exists \rho_1, \rho_2 \in REC : \rho_1 r \rho_2\}$$

Hay un total de 36 relaciones en  $\mathcal{B}_{rec}$ , que son las siguientes:

$\{B, S, SW, NW, N, NE, E, SE, S:SW, B:W, NW:N, N:NE, B:E, S:SE, SW:W, B:S, E:SE, W:NW, B:N, NE:E, S:SW:SE, NW:N:NE, B:W:E, B:S:N, SW:W:NW, NE:E:SE, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N, B:S:N:NE:E:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$ .

El conjunto  $2^{\mathcal{B}_{rec}}$  contiene a todas las relaciones cardinales básicas y disyuntivas en  $REC$ . A las relaciones de este conjunto se les llama *relaciones cardinales rectangulares*, porque son todas las relaciones de tipo cardinal que pueden darse entre rectángulos.

**Ejemplo 3.2.** *La relación  $W:E$  pertenece a  $\mathcal{B}_{dis}$  y no a  $\mathcal{B}_{con}$ , ya que no existen dos regiones  $a$  y  $b$  conectadas tales que  $aW:E b$ . Por otro lado, la relación  $W:NW:N$  pertenece a  $\mathcal{B}_{con}$  y por tanto a  $\mathcal{B}_{dis}$ , pero no pertenece a  $\mathcal{B}_{rec}$ , ya que no existen dos rectángulos  $a$  y  $b$  tales que  $aW:NW:N b$ .*



(a)  $(\beta, \alpha) \in N \circ_w N$ , pero  $(\beta, \alpha) \notin N \circ N$  (b)  $(\beta, \alpha) \in N \circ_w N$ , y  $(\beta, \alpha) \in N \circ N$

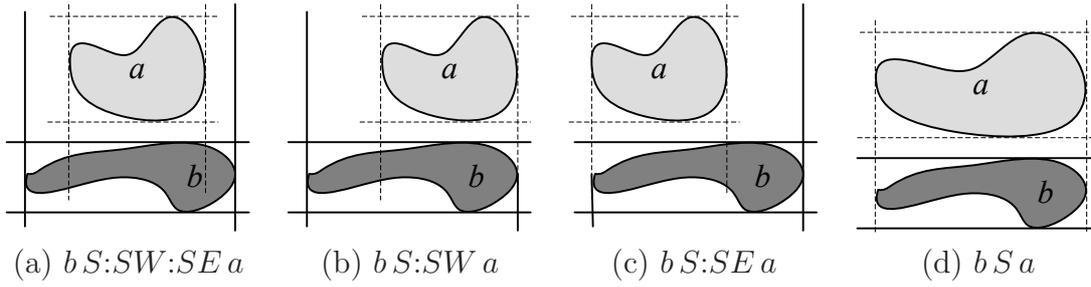
Figura 3.3: Composición débil vs composición en el modelo DC.

### 3.1.4. Operaciones con Relaciones Cardinales

Dado un dominio  $DOM$ , donde  $DOM$  puede ser  $REC$ ,  $CON$  o  $DIS$ , denotamos con  $\mathcal{B}_{dom}$  al conjunto de relaciones cardinales básicas en dicho dominio. En el modelo DC con dominio  $DOM$  se considera el álgebra  $\mathcal{R}_{dom} = (2^{\mathcal{B}_{dom}}, \cup, \cap, \bar{\cdot}, \emptyset, \mathcal{B}_{dom}, \circ_w, inv)$ , formada por el álgebra booleana con conjunto de relaciones  $2^{\mathcal{B}_{dom}}$ , junto con las operaciones de composición débil ( $\circ_w$ ) e inversa débil ( $inv$ ). Estas dos operaciones se definen del siguiente modo:

$$\begin{aligned} R_1 \circ_w R_2 &= \{r \in \mathcal{B}_{dom} \mid \exists a, b, c \in DOM : a R_1 b \wedge b R_2 c \wedge a r c\} \\ inv(R) &= \{r \in \mathcal{B}_{dom} \mid \exists a, b \in DOM : b r a \wedge a R b\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

En el álgebra del modelo DC se utiliza la composición débil porque la composición no es una operación interna. Eso supone que las tuplas resultantes no pueden describirse con los símbolos de relación del álgebra, o lo que es lo mismo, la composición no se puede calcular de forma simbólica en  $2^{\mathcal{B}_{dom}}$ . Por ejemplo, si tenemos dos regiones  $\alpha, \beta$ , como las de la Figura 3.3-(a), entonces  $(\beta, \alpha) \notin N \circ N$ , porque no hay espacio para una tercera región  $\gamma$  tal que  $\beta N \gamma$  y  $\gamma N \alpha$ . Pero  $(\beta, \alpha) \in N \circ_w N$  porque  $N$  es una de las relaciones básicas incluidas en  $N \circ_w N$ , al existir regiones  $b, c, a$  tales que  $b N c \wedge c N a \wedge b N a$ . En la Figura 3.3-(b) tenemos un ejemplo de esto último, considerando  $a = \alpha, b = \beta, c = \gamma$ . En este caso se cumple que  $(\beta, \alpha) \in N \circ_w N$  y  $(\beta, \alpha) \in N \circ N$ . La composición débil se considera la mejor aproximación a la composición real, al ser la menor relación de  $2^{\mathcal{B}_{dom}}$  que contiene al conjunto de tuplas de toda la extensión de la composición. En [SK04] se describe un algoritmo para calcular de forma simbólica la composición débil de relaciones cardinales básicas para los dominios  $CON$  y  $DIS$ . A partir de la tabla de composición


 Figura 3.4: Relaciones básicas de  $inv(N)$ .

débil que se obtiene, se puede calcular simbólicamente la composición débil de relaciones disyuntivas como unión en  $2^{\mathcal{B}_{dom}}$  de la composición débil de todos los pares de relaciones básicas:

$$\{r_1, \dots, r_k\} \circ_w \{r'_1, \dots, r'_m\} = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^m r_i \circ_w r'_j$$

La definición usual de inversa de una relación cardinal sería

$$R^{-1} = \{(b, a) \in DOM \times DOM \mid (a, b) \in R\}$$

Esta operación tampoco es cerrada en  $2^{\mathcal{B}_{dom}}$ , porque  $R^{-1}$  contiene menos tuplas que las que se pueden representar con una relación del álgebra, como comprobaremos a continuación. Por eso usamos una operación aproximada  $inv$ , a la que llamamos *inversa débil* por distinguirla de la inversa real. En [SK04] se destaca que la inversa de una relación cardinal básica no es una relación cardinal básica. Por ejemplo,  $inv(N) = \{S:SW:SE, S:SW, S:SE, S\}$ . Para comprender por qué, tenemos en cuenta la definición de  $inv(R)$ , particularizando para  $R = N$ , y comprobamos que si  $a N b$  entonces las posibles relaciones básicas que se satisfacen entre  $b$  y  $a$  son las indicadas para  $inv(N)$ . En la Figura 3.4 se ilustran casos representativos de  $a$  y  $b$  tal que  $a N b$  y  $br a$ , siendo  $r$  una relación básica distinta en cada caso. Se tiene que  $b S:SW:SE a$ ,  $b S:SW a$ ,  $b S:SE a$  y  $b S a$  y esos son todos los casos posibles de  $br a$  siendo  $a N b$ .

En trabajos previos no se diferencia entre operación de inversa e inversa débil, porque no se analiza si la definición de  $inv(R)$ , dada en (3.1), representa exactamente a las tuplas de la relación  $R^{-1}$ . Aquí probamos que la inversa de una relación cardinal no es una relación del álgebra  $\mathcal{R}_{dom}$  y que la inversa débil proporciona la mejor aproximación en  $2^{\mathcal{B}_{dom}}$  para la inversa.

**Lema 3.1.** *La operación de inversa no es interna en  $2^{\mathcal{B}_{dom}}$  y para cualquier relación cardinal  $R$  se cumple que  $inv(R)$  es la menor relación de  $2^{\mathcal{B}_{dom}}$ , en sentido de número de átomos, que contiene a las tuplas de  $R^{-1}$ .*

**Demostración.**

Por definición de  $R^{-1}$  se cumple que  $a R b \Leftrightarrow b R^{-1} a$  y por tanto  $(a, b) \in R$  implica que  $(b, a) \in R^{-1}$ . Si  $r$  es la relación básica que se satisface entre  $b$  y  $a$  tenemos que  $r$  es uno de los símbolos de relación de  $inv(R)$ , por definición de inversa débil. Por tanto, el par  $(b, a)$  forma parte también del conjunto de tuplas de  $inv(R)$ . Esto implica que la relación  $inv(R)$  contiene a todas las tuplas de  $R^{-1}$  y se cumple la implicación  $a R b \Rightarrow b inv(R) a$ , para cualquier par de regiones  $a, b$  del dominio. De lo anterior y de la definición de  $inv(R)$  se desprende que no existe una relación  $R'$  con menos átomos que  $R$  y que contenga a  $R^{-1}$ .

Por otra parte, el hecho de que  $b inv(R) a$  no implica necesariamente que  $a R b$ , puesto que  $R$  puede ser básica y  $inv(R)$  disyuntiva. Por ejemplo, consideremos el caso de  $R = N$  y supongamos que  $b S:SW a$  y  $a N:NE b$ . Entonces se cumple que  $b inv(N) a$ , puesto que  $inv(N)$  es disyuntiva y contiene a la relación  $S:SW$ . Sin embargo, no es cierto que  $a N b$ , puesto que hemos partido de que  $a N:NE b$  y sabemos que las relaciones básicas son JEPD, por lo que son disjuntas dos a dos. Este razonamiento indica que en  $inv(N)$  hay más tuplas que en  $N^{-1}$ , porque no se cumple  $a N b \Leftrightarrow b inv(N) a$ . Como  $inv(N)$  es la menor relación en  $2^{\mathcal{B}_{dom}}$  que contiene a las tuplas de  $N^{-1}$ , resulta que esta relación inversa no es una relación del álgebra. Por tanto el conjunto de relaciones cardinales no es cerrado bajo la operación de inversión de relaciones.  $\square$

En [SK04] se afirma que la inversa de una relación cardinal  $inv(R)$  es la relación cardinal que satisface  $b inv(R) a \Leftrightarrow a R b$ , para cualquier par de regiones  $a, b \in DOM$ . Pero del lema anterior deducimos que esa afirmación es falsa, porque en ese caso  $inv(R)$  coincidiría con  $R^{-1}$  para cualquier relación, cosa que ya hemos visto que no es cierta. Al ser la inversa de una relación básica una relación disyuntiva, se necesita especificar tanto la relación entre  $a$  y  $b$  como la relación entre  $b$  y  $a$  para describir con exactitud la posición relativa de dos regiones  $a$  y  $b$  mediante relaciones cardinales. Al no ser la composición ni la inversión operaciones internas, el álgebra de restricciones  $\mathcal{R}_{dom}$  del modelo DC no es un álgebra de relaciones propia, ni siquiera es un álgebra de relaciones binaria en sentido estricto, pues la relación identidad no se incluye en el conjunto de átomos y la inversa de una relación básica no es una relación básica.

### 3.1.5. Red de Restricciones Cardinales. Consistencia

En el modelo DC con cierto dominio  $DOM$ , podemos formalizar los problemas de razonamiento espacial con direcciones cardinales como CSPs, mediante *redes de restricciones cardinales*:

**Definición 3.6** (Red de Restricciones Cardinales). *Una red de restricciones cardinales*

consiste en un conjunto de variables  $\mathfrak{V} = \{a_1, \dots, a_n\}$  sobre  $DOM$  y un conjunto  $\mathfrak{C}$  de restricciones entre variables especificadas mediante relaciones cardinales del álgebra  $\mathcal{R}_{dom}$ . Una red de restricciones cardinales es consistente (o satisfacible) si existe una solución dada por una  $n$ -tupla  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in DOM^n$  tal que todas las restricciones cardinales en  $\mathfrak{C}$  se satisfacen por la asignación  $a_i = \alpha_i, 1 \leq i \leq n$ .

El principal problema de razonamiento asociado a una red de restricciones cardinales es el de decidir si es consistente o no, que llamaremos  $CSPSAT(2^{\mathcal{B}_{dom}})$ . En la Sección 2.2.2 vimos que el problema de la consistencia de una red, en formalismos basados en álgebras de relaciones binarias, suele ser intratable cuando se considera el conjunto completo de relaciones. También es este el caso en el modelo DC, de hecho veremos que  $CSPSAT(2^{\mathcal{B}_{dom}})$  es NP-completo en todos los casos de dominio  $DOM$  que estudiamos en esta tesis. Una manera de abordar este problema es encontrando un subconjunto de relaciones  $\mathcal{S}$  para el que  $CSPSAT(\mathcal{S})$  sea tratable y que contenga al menos a todas las relaciones básicas. De esta forma es posible aplicar un algoritmo exponencial con backtracking que vaya comprobando todas las subredes tratables.

Por lo tanto, la primera cuestión es si existen algoritmos eficientes para decidir la consistencia en el caso de relaciones cardinales básicas. Ya que en el modelo DC las relaciones son JEPD y es posible calcular la operación de composición débil [SK04], existe la posibilidad de que el algoritmo PC-débil pueda decidir la consistencia de una red de restricciones cardinales básicas [RL05] (como ocurre en RCC8 [RCC92]). Desafortunadamente esto no es así en el caso de los dominios  $DIS$  y  $CON$ , como se demuestra en [SK04]. Como aportación de esta tesis, en el Capítulo 4 probamos que el algoritmo PC-débil sí que es válido para decidir la consistencia de una red de relaciones básicas con dominio  $REC$ . Es más, identificamos una subclase tratable del modelo DC con dominio  $REC$ , que resulta ser la primera subclase tratable encontrada que incluye relaciones cardinales disyuntivas.

Dado que el algoritmo PC-débil no es adecuado para resolver los problemas  $CSPSAT(\mathcal{B}_{dis})$  o  $CSPSAT(\mathcal{B}_{con})$ , es necesario diseñar algoritmos específicos para resolver eficientemente estos problemas (un modelo donde pasa lo mismo es en el *Star Calculus* [RM04]). En la literatura podemos encontrar varios algoritmos *ad hoc* que resuelven versiones más simples del problema de la consistencia con relaciones cardinales básicas:

1. El problema de la *consistencia de pares* ha sido resuelto en [CF04]. Se trata de decidir si una restricción cardinal básica  $a r b$  es consistente con la restricción cardinal básica  $b r' a$  donde  $r, r' \in \mathcal{B}_{con}$ . Los autores proponen un algoritmo que se ejecuta en tiempo constante para resolver este problema.
2. En [KM03] se propone un algoritmo de orden  $O(n^4)$  basado en grafos dirigidos para decidir la consistencia de una red de restricciones cardinales básicas entre regiones

conectadas, pero excluyendo relaciones que contienen el símbolo de tile  $B$ .

3. Skiadopoulos y Koubarakis [SK05] presentan el primer algoritmo, de complejidad  $O(n^5)$ , para decidir la consistencia de una red de restricciones cardinales básicas entre regiones. En el artículo citado se dejaba abierta la cuestión de si el problema de la consistencia es decidible o no cuando se consideran regiones conectadas.
4. En [NMS07] se establecía la decibilidad del problema de la consistencia de redes con relaciones cardinales básicas entre regiones conectadas y se proponía un método para decidir la consistencia.
5. Recientemente Zhang *et al.* [ZLLY08] han presentado un algoritmo de complejidad  $O(n^3)$  para decidir la consistencia relaciones cardinales básicas entre regiones desconectadas y una adaptación para el dominio de regiones conectadas.

En la Sección 3.3 proponemos una mejora del algoritmo de decisión de Skiadopoulos y Koubarakis para regiones desconectadas, que consigue rebajar la complejidad a  $O(n^4)$  y sirve además como algoritmo que genera una solución para la red. Luego justificamos en la Sección 3.4 la ventaja de nuestra propuesta frente al algoritmo de Zhang *et al.*

## 3.2. Algoritmo DIS-BCon para Consistencia de Relaciones Básicas entre Regiones

El método más sencillo para decidir la consistencia de redes de restricciones básicas en formalismos de razonamiento temporal y espacial basados en álgebras de restricciones es un algoritmo de camino-consistencia (débil o no) o algoritmo de clausura algebraica. Para el álgebra de puntos, álgebra de intervalos, álgebra de rectángulos y el RCC8, por nombrar a algunos de los modelos más conocidos que se introducen en capítulos anteriores, es suficiente un algoritmo de clausura algebraica para comprobar la consistencia de restricciones con relaciones básicas.

Skiadopoulos y Koubarakis demuestran en [SK04] que un algoritmo de clausura algebraica en el modelo DC no sirve para decidir la consistencia de una red de restricciones con relaciones cardinales básicas, tanto si se considera el dominio de regiones *DIS* como en el dominio de regiones conectadas *CON*. Los mismos autores demuestran en [SK05] que el problema  $\text{CSPSAT}(\mathcal{B}_{dis})$  es decidible, proponiendo el primer algoritmo diseñado *ad-hoc* para comprobar la consistencia de relaciones básicas entre regiones. Este algoritmo, al que llamamos aquí DIS-BCON, es de complejidad  $O(n^5)$ , donde  $n$  es el número de variables de la red. En esta sección haremos un resumen detallado de este algoritmo, más complejo

que los algoritmos típicos de consistencia, ya que las mejoras y modificaciones propuestas en las siguientes secciones se basan en él.

El algoritmo DIS-BCON toma como entrada una red  $\mathfrak{N}$ , formada por un conjunto  $\mathfrak{C}$  de restricciones con relaciones cardinales básicas de  $\mathcal{B}_{dis}$  y un conjunto  $\mathfrak{V}$  con  $n$  variables de regiones en  $DIS$ , y devuelve ‘Consistente’ si  $\mathfrak{N}$  es consistente y en caso contrario devuelve ‘Inconsistente’. El algoritmo es constructivo, en el sentido de que trata de probar que la red es consistente comprobando que existe una solución para la misma y construyéndola en parte, en lugar de apoyarse en propiedades algebraicas del conjunto de relaciones. La corrección del algoritmo se basa en un hecho fundamental y es que si la red es consistente entonces debe existir una solución que asigna regiones formadas por unión de rectángulos no triviales a las variables. Los rectángulos son representables mediante puntos, lo que implica que la satisfacibilidad de las restricciones cardinales puede ser comprobada mediante operaciones sencillas del álgebra de puntos (ver Sección 2.3.1, Capítulo 2) y operaciones de intersección de rectángulos, lo cual hace abordable el problema de chequeo de la consistencia.

Decíamos en la sección anterior que una restricción básica multi-tile como  $a t_1 \cdots t_k b$  se puede descomponer de forma equivalente (Proposición 3.3) como conjunción de:

- *Restricciones de tile:*  $a_1^b t_1 b, \dots, a_k^b t_k b$ .
- *Restricciones de unión:*  $a = a_1^b \cup \dots \cup a_k^b$ .

A su vez, cada restricción individual de tile  $a_i^b t_i b$  equivale a una conjunción de restricciones de orden (Proposición 3.2) entre los puntos extremos de las proyecciones de cada variable componente  $a_i^b$  de  $a$  y la variable de referencia  $b$ . Estos son los puntos que definen los rectángulos mínimos  $mbb(a_i^b)$  y  $mbb(b)$ . En adelante, por ‘puntos extremos’ nos referiremos de forma equivalente a los puntos que definen el rectángulo mínimo ( $mbb$ ) de una región o a los puntos extremos de la proyección de la región en los ejes  $x$  e  $y$  del plano. Podemos considerar que cada variable de región  $v$  en una restricción cardinal básica (de tile o multi-tile) tiene asociada una tupla  $(v_x^-, v_x^+, v_y^-, v_y^+)$  de variables de puntos extremos.

El algoritmo DIS-BCON, que presentamos resumido en la Figura 3.5, funciona en esencia de la siguiente forma:

- **Paso S0.** Para cada restricción multi-tile  $a t_1 \cdots t_k b$ , ( $k > 1$ ), se introducen nuevas variables componentes de  $a$  con respecto a  $b$ , que son las del conjunto  $V_a^b = \{a_1^b, \dots, a_k^b\}$ .
- **Paso S1.** Para cada restricción  $a t_1 \cdots t_k b$  se introduce la tupla de variables de puntos extremos asociada a la variable primaria, a sus variables componentes (si

**Entrada:** Una red  $\mathfrak{N} = (\mathfrak{C}, \mathfrak{V})$ , donde  $\mathfrak{C}$  es un conjunto de restricciones con relaciones cardinales básicas de  $\mathcal{B}_{dis}$  y  $\mathfrak{V}$  es un conjunto de  $n$  variables en  $DIS$ .

**Salida:** ‘Consistente’ si  $\mathfrak{N}$  es consistente; ‘Inconsistente’ en otro caso.

**Algoritmo DIS-BCON**

**Paso S0: Introducir nuevas variables componentes.**

- Para cada restricción multi-tile  $a t_1 : \dots : t_k b$  ( $k > 1$ ) se añade el conjunto de variables componentes  $V_a^b = \{a_1^b, \dots, a_k^b\}$ .

**Paso S1: Traducción a restricciones de orden.**

- Introducir variables de puntos extremos asociados a cada variable de región y transformar las restricciones cardinales en restricciones de orden.
- Se obtiene una red  $\mathfrak{N}^O$  de restricciones de orden entre puntos extremos  $\mathfrak{N}^O \leftarrow \text{TRANSFORMA}()$

**Paso S2: Verificación de restricciones de orden.**

- Si  $\text{CSPAN}(\mathfrak{N}^O)$  devuelve ‘Inconsistente’ Entonces Devolver ‘Inconsistente’
- SiNo Obtener una solución  $\Pi^O$  para la red de puntos  $\mathfrak{N}^O$ .
- A partir de  $\Pi^O$  obtener una asignación inicial de rectángulos  $\Sigma^{O_i}$  para todas las variables.
- A partir de  $\Sigma^{O_i}$  obtener una asignación maximal de rectángulos  $\Sigma^O$  para las variables componentes que respete las restricciones de orden.

**Paso S3: Verificación de restricciones de unión.**

- Comprobar que a partir de la asignación maximal  $\Sigma^O$  para variables componentes se puede obtener una solución para las variables de región originales que satisfaga las restricciones de unión.

Si  $\text{GLOBALCHECKNTB}(\Sigma^O)$  devuelve ‘Falso’ Entonces Devolver ‘Inconsistente’

Devolver ‘Consistente’

Figura 3.5: Algoritmo DIS-BCON.

la relación es multi-tile) y a la variable de referencia. Se añaden las restricciones de orden entre los puntos implicadas por cada restricción individual de tile y restricciones adicionales entre puntos para representar la posición relativa de  $mbb(a)$  y  $mbb(b)$  teniendo en cuenta las tiles en conjunto de la relación cardinal. Se introducen además restricciones de orden que aseguran que los puntos extremos definen rectángulos mínimos no triviales para las variables de región y que el rectángulo asociado a cada variable componente esté incluido en el rectángulo de su variable primaria. Este paso lo lleva a cabo la función TRANSFORMA, que como resultado devuelve una red del álgebra de puntos convexa  $\mathfrak{N}^O$ .

- **Paso S2.** Se comprueba si la red  $\mathfrak{N}^O$  es consistente. Si no lo es entonces la red original tampoco es consistente, pues necesariamente han de cumplirse las restricciones de orden. En otro caso se obtiene una solución  $\Pi^O$  para esta red de puntos. Esta solución para puntos extremos define una asignación inicial de rectángulos  $\Sigma^{O_i}$

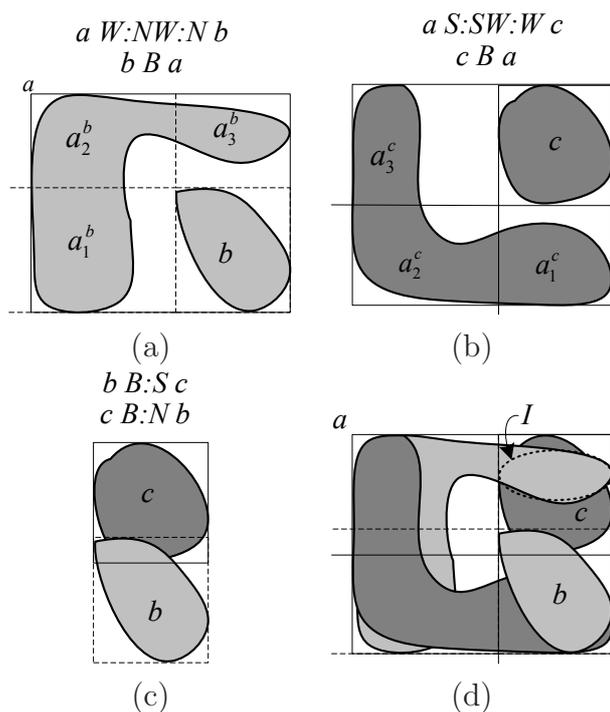


Figura 3.6: Ilustración del Ejemplo 3.3.

para las variables de región originales y las variables componentes. A partir de esta asignación inicial puede obtenerse una asignación maximal de rectángulos  $\Sigma^O$  para variables componentes, que supone una solución para las variables de región considerando únicamente las restricciones de orden.

- Paso S3.** La asignación inicial de rectángulos  $\Sigma^{O_i}$  obtenida en el paso anterior para las variables originales no es necesariamente una solución para la red de restricciones cardinales. Esto es debido a que las relaciones cardinales no tienen por qué ser rectangulares, por lo que los rectángulos obtenidos no satisfacen necesariamente las relaciones cardinales. Lo que se hace en este paso es comprobar si a partir de la asignación maximal de rectángulos  $\Sigma^O$  para variables componentes puede obtenerse una asignación para las variables primarias que satisfaga las restricciones de unión entre ellas. En definitiva, se comprueba si existe una solución donde a cada variable original se le asigna una región formada por unión de rectángulos no triviales, de manera que las regiones satisfacen todas las relaciones cardinales. Esa comprobación la lleva a cabo la función GLOBALCHECKNTB.

Los tres pasos principales  $S1, S2, S3$  los pasamos a describir a continuación con más detalle. Para ilustrar cada paso del algoritmo utilizaremos la red de restricciones del siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.3.** Sea una  $\mathfrak{R}$  una red de restricciones cardinales básicas formada por las siguientes restricciones:

$$\mathfrak{C} = \{a \text{ W:NW:N } b, a \text{ S:SW:W } c, b \text{ B } a, b \text{ B:S } c, c \text{ B } a, c \text{ B:N } b\}$$

y el conjunto de variables de regiones  $\mathfrak{V} = \{a, b, c\}$ . Las Figuras 3.6-(a), 3.6-(b) y 3.6-(c) muestran tres regiones que satisfacen las restricciones entre pares de regiones  $\{a \text{ W:NW:N } b, b \text{ B } a\}$ ,  $\{a \text{ S:SW:W } c, c \text{ B } a\}$  y  $\{b \text{ SW } c, c \text{ B:N } b\}$ , respectivamente. Aunque las regiones dibujadas son consistentes dos a dos, no existe una asignación que satisfaga todas las restricciones a la vez, es decir, la red  $\mathfrak{R}$  es inconsistente. Para ver que esto es así consideremos la Figura 3.6-(d). La restricción a  $\text{W:NW:N } b$  obliga a que la región  $I$  (rodeada con un círculo de línea discontinua) sea parte de la región  $a$ , mientras que la restricción a  $\text{S:SW:W } c$  obliga a que  $I$  no sea parte de  $a$ , lo cual resulta ser inconsistente.

### 3.2.1. Paso S1: Traducción a restricciones de orden

El primer paso del algoritmo DIS-BCON utiliza la función TRANSFORMA de la Figura 3.7 para traducir cada restricción cardinal básica en un conjunto de restricciones de orden entre puntos extremos asociados a las variables de región, de manera que la satisfacibilidad de la restricción cardinal implica la satisfacibilidad de las restricciones de orden obtenidas. Básicamente la función TRANSFORMA funciona del siguiente modo. Para cada restricción en  $\mathfrak{C}$  de la forma  $a \text{ } t_1: \dots : t_k \text{ } b$  se añaden variables de puntos para representar los puntos extremos de las proyecciones de las regiones primaria y de referencia, o lo que es lo mismo, los puntos que definen los rectángulos mínimos  $mbb(a)$  y  $mbb(b)$ . Si las relación entre estas variables es multi-tile ( $k > 1$ ) se añaden además las variables de puntos para cada variable componente  $a_i^b$ , donde  $a_i^b \in V_a^b = \{a_1^b, \dots, a_k^b\}$ . En los pasos  $T1$  a  $T4$  de la función TRANSFORMA se añaden restricciones de orden entre las variable de puntos implicadas por la restricción cardinal  $a \text{ } t_1: \dots : t_k \text{ } b$ , teniendo en cuenta si la relación es multi-tile o no.

En el paso  $T1$  se introducen las restricciones de orden entre puntos extremos equivalentes a las restricciones individuales de tile indicadas en la Proposición 3.2 y que recordamos

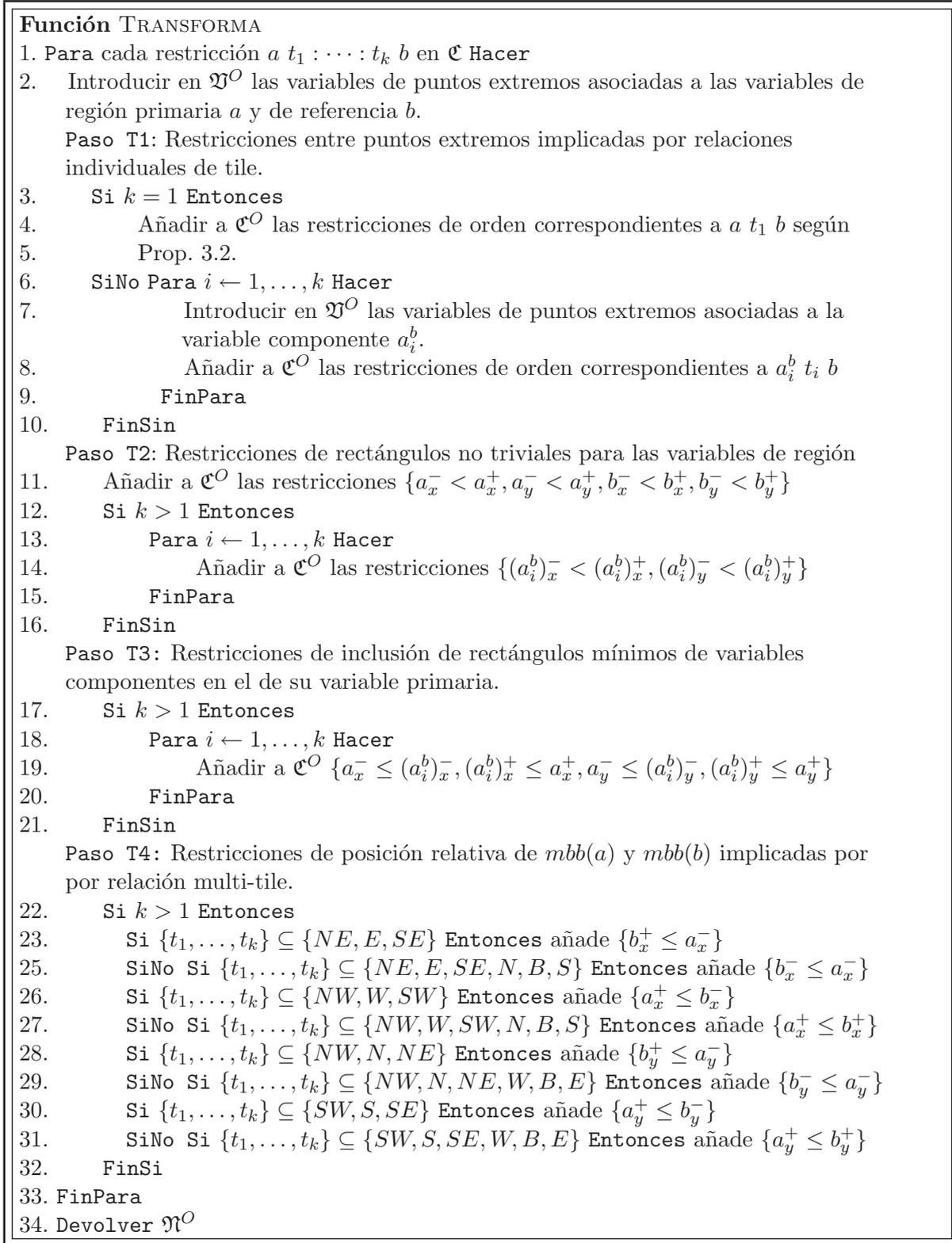


Figura 3.7: Función TRANSFORMA.

a continuación:

$$\begin{aligned}
 v B u &\Leftrightarrow u_x^- \leq v_x^- \wedge v_x^+ \leq u_x^+ \wedge u_y^- \leq v_y^- \wedge v_y^+ \leq u_y^+ \\
 v S u &\Leftrightarrow v_y^+ \leq u_y^- \wedge u_x^- \leq v_x^- \wedge v_x^+ \leq u_x^+ \\
 v SW u &\Leftrightarrow v_x^+ \leq u_x^- \wedge v_y^+ \leq u_y^- \\
 v W u &\Leftrightarrow v_x^+ \leq u_x^- \wedge u_y^- \leq v_y^- \wedge v_y^+ \leq u_y^+ \\
 v NW u &\Leftrightarrow v_x^+ \leq u_x^- \wedge u_y^+ \leq v_y^- \\
 v N u &\Leftrightarrow u_y^+ \leq v_y^- \wedge u_x^- \leq v_x^- \wedge v_x^+ \leq u_x^+ \\
 v NE u &\Leftrightarrow u_x^+ \leq v_x^- \wedge u_y^+ \leq v_y^- \\
 v E u &\Leftrightarrow u_x^+ \leq v_x^- \wedge u_y^- \leq v_y^- \wedge v_y^+ \leq u_y^+ \\
 v SE u &\Leftrightarrow u_x^+ \leq v_x^- \wedge v_y^+ \leq u_y^-
 \end{aligned}$$

En el paso  $T2$  se introducen *restricciones de rectángulo no trivial*, que son restricciones de orden que evitan que los puntos extremos asociados a las variables  $a, b$  y cada  $a_i^b$  definan rectángulos triviales, lo que supondría que las variables originales no pueden ser instanciadas con regiones de  $DIS$  (Proposición 3.1). En el paso  $T3$  se fuerza a que cada variable componente  $a_i^b$  represente una subregión o porción de la región de la variable  $a$ . Para ello se introducen restricciones de orden entre los puntos extremos de  $a$  y cada  $a_i^b$ , que aseguren la inclusión de cada rectángulo mínimo de una variable componente en el rectángulo mínimo asociado a su variable primaria. Por último, en el paso  $T4$  se introducen restricciones de orden para representar la posición relativa entre  $mbb(a)$  y  $mbb(b)$  en el caso de que la relación cardinal sea multi-tile.

Las nuevas variables de puntos y las restricciones de orden entre ellas que se introducen en los pasos anteriores forman una red del álgebra de puntos  $\mathfrak{N}^O = (\mathfrak{C}^O, \mathfrak{V}^O)$ , que se retorna al algoritmo principal.

**Ejemplo 3.4.** Consideremos la red de restricciones del Ejemplo 3.3. La función  $TRANSFORMA$  procesará en primer lugar la restricción  $a W : NW : N b$ . Las variables componentes  $a_1^b, a_2^b, a_3^b$  representan las subregiones de  $a$  tales que  $a_1^b W b$ ,  $a_2^b NW b$  y  $a_3^b N b$ . Estas restricciones cardinales de tile se traducen a las siguientes restricciones de orden, que se añaden al conjunto  $\mathfrak{C}^O$  y las variables de puntos se añaden  $\mathfrak{V}^O$ :

$$\text{Restricción } a_1^b W b: \quad (a_1^b)_x^+ \leq b_x^-, b_y^- \leq (a_1^b)_y^-, (a_1^b)_y^+ \leq b_y^+.$$

$$\text{Restricción } a_2^b NW b: \quad (a_2^b)_x^+ \leq b_x^-, b_y^+ \leq (a_2^b)_y^-.$$

$$\text{Restricción } a_3^b N b: \quad (a_3^b)_x^+ \leq b_x^+, b_y^+ \leq (a_3^b)_y^-, b_x^- \leq (a_3^b)_x^-.$$

En el paso  $T2$  se introducen en el conjunto  $\mathfrak{C}^O$ , para cada variable  $v \in \{a, b, a_1^b, a_2^b, a_3^b\}$ , las siguientes restricciones de orden:  $v_x^- < v_x^+$  y  $v_y^- < v_y^+$ .

A continuación, en el paso  $T3$ , para cada variable componente  $v \in \{a_1^b, a_2^b, a_3^b\}$ , se introducen en el conjunto  $\mathfrak{C}^O$  las restricciones de orden que indican que cada  $v$  es una subregión de  $a$ :  $a_x^- \leq v_x^-, v_x^+ \leq a_x^+, a_y^- \leq v_y^-$  y  $v_y^+ \leq a_y^+$ .

Por último, en el paso T4 como  $\{W, NW, N\}$  es un subconjunto de  $\{NW, W, SW, N, B, S\}$  y  $\{NW, N, NE, W, B, E\}$  se introducen en  $\mathfrak{C}^O$  las siguientes restricciones de orden:  $a_x^+ \leq b_x^+$  y  $b_y^- \leq a_y^-$ .

De forma similar se procedería con el resto de restricciones cardinales en  $\mathfrak{C}$ .

### 3.2.2. Paso S2: Verificación de las Restricciones de Orden

En este paso se resuelve la red de puntos  $\mathfrak{N}^O$ , por ejemplo con el algoritmo CSPAN [vB92] (ver Figura 2.3), que además de comprobar la consistencia puede obtener una solución para los puntos. Si  $\text{CSPAN}(\mathfrak{N}^O)$  devuelve ‘Inconsistente’ entonces el algoritmo DIS-BCON devuelve también ‘Inconsistente’, pues no se cumplen las restricciones de orden implicadas por las restricciones cardinales. En otro caso se obtiene una *solución de puntos*  $\Pi^O$ , que asigna números a las variables de puntos extremos asociadas a las variables de región. Recordamos que la tupla de variables de puntos correspondiente a una variable de región representa a los puntos extremos de las proyecciones de la región el eje  $x$  e  $y$  y por tanto sirven para definir el rectángulo mínimo ( $mbb$ ) de la variable. Así que a partir de  $\Pi^O$  puede obtenerse una asignación inicial de rectángulos  $\Sigma^{O_i}$  para las variables de región originales y las variables componentes.

Sea  $v$  una variable de región, ya sea primaria, componente o de referencia. El *rectángulo inicial*  $\rho$  que se asigna a la variable  $v$  es el rectángulo definido por los puntos del plano  $(\rho_x^-, \rho_y^-)$  (esquina inferior izquierda) y  $(\rho_x^+, \rho_y^+)$  (esquina superior derecha), donde  $(\rho_x^-, \rho_y^-, \rho_x^+, \rho_y^+)$  son las soluciones que  $\Pi^O$  asigna a la tupla de variables de puntos extremos proyectados  $(v_x^-, v_y^-, v_x^+, v_y^+)$  asociada a la variable  $v$ . Los rectángulos iniciales  $\alpha, \beta$ , asignados a una variable primaria  $a$  y a su variable de referencia  $b$ , respectivamente, en principio no suponen una asignación consistente con la relación cardinal entre estas variables, ya que la relación puede no ser rectangular. En adelante nos referiremos a estos rectángulos como  $mbb(\alpha)$  y  $mbb(\beta)$ , por diferenciarlos de los rectángulos asignados a las variables componentes.

Una vez obtenida una asignación inicial de rectángulos  $\Sigma^{O_i}$ , se construye una *asignación maximal de rectángulos*  $\Sigma^O$  para variables componentes, que sigue respetando las restricciones de orden entre puntos extremos. Para ello se considera, por cada par de variables  $a, b$  y cada variable componente  $a_i^b$  del conjunto  $V_a^b$ , el rectángulo inicial  $\rho_i^b$  para  $a_i^b$  y se extiende en cada dirección posible hasta tocar la línea más cercana de las que delimitan a los rectángulos  $mbb(\alpha)$  y  $mbb(\beta)$  asignados inicialmente a las variables  $a$  y  $b$ . Al término de este paso se tiene un rectángulo maximal  $\sigma_i^b$  asignado a la variable componente  $a_i^b$ . Podemos considerar que el rectángulo maximal es el mayor de los rectángulos que se pueden asignar a la región  $a_i^b$  que está incluido dentro de  $mbb(a)$  y dentro de la tile  $t_i(b)$ . A partir de la solución de puntos  $\Pi^O$  se obtiene pues una asignación maximal de

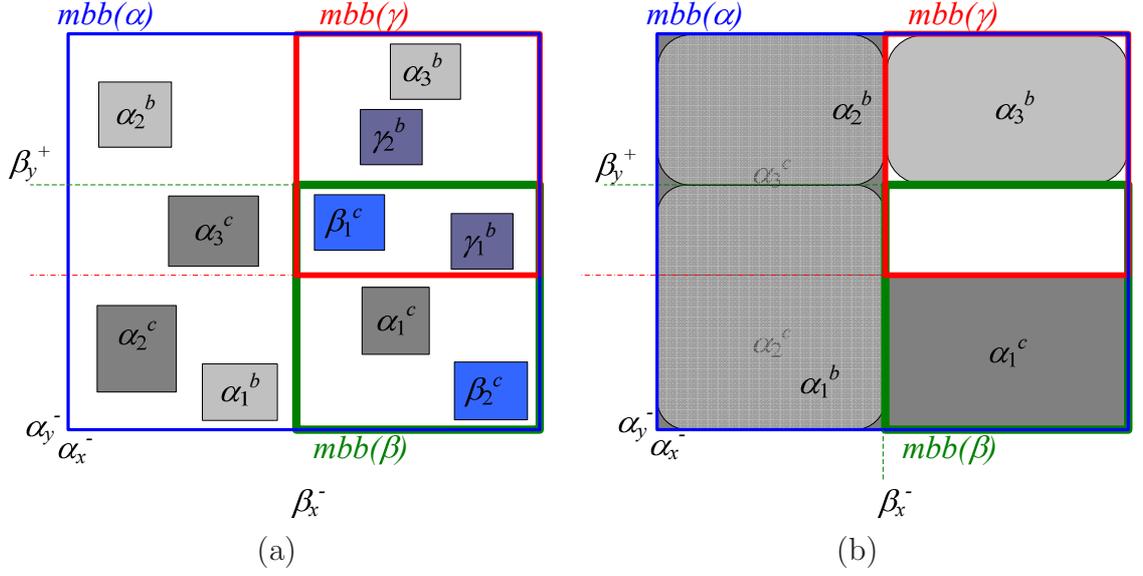


Figura 3.8: Asignaciones iniciales y maximales del Ejemplo 3.5.

rectángulos  $\Sigma_a^b = \{\sigma_1^b, \dots, \sigma_k^b\}$  para las variables componentes  $V_a^b = \{a_1^b, \dots, a_k^b\}$  y para cada restricción multi-tile  $a t_1 : \dots : t_k b$ . Al conjunto de todos rectángulos maximales asignados a las variables componentes lo llamamos  $\Sigma^O$  y a partir de él se pasa a comprobar, en el paso  $P3$  del algoritmo DIS-BCON, si finalmente puede obtenerse una solución para la red.

**Ejemplo 3.5.** Continuemos con las restricciones del Ejemplo 3.3:

$$\mathfrak{C} = \{a W:NW:N b, a S:SW:W c, b B a, b B:S c, c B a, c B:N b\}$$

En el Ejemplo 3.4 vimos como se obtenía el conjunto  $\mathfrak{C}^O$  de restricciones de orden entre puntos extremos. A partir de este conjunto se puede construir la red del álgebra de puntos  $\mathfrak{N}^O$  con las restricciones de  $\mathfrak{C}^O$  y las variables de puntos extremos proyectados  $(v_x^-, v_x^+, v_y^-, v_y^+)$  para cada  $v \in \{a, b, c, a_1^b, a_2^b, a_3^b, a_1^c, a_2^c, a_3^c, b_1^c, b_2^c, c_1^b, c_2^b\}$ . La red  $\mathfrak{N}^O$  es consistente y se puede obtener una asignación inicial de rectángulos a partir de una solución para puntos; por ejemplo, la que asigna a las variables de región  $a, b, c$ , los rectángulos  $mbb(\alpha), mbb(\beta), mbb(\gamma)$  y a las variables componentes  $a_1^b, a_2^b, a_3^b, a_1^c, a_2^c, a_3^c, b_1^c, b_2^c, c_1^b, c_2^b$  los rectángulos  $\alpha_1^b, \alpha_2^b, \alpha_3^b, \alpha_1^c, \alpha_2^c, \alpha_3^c, \beta_1^c, \beta_2^c, \gamma_1^b, \gamma_2^b$  de la Figura 3.8-(a) respectivamente.

A continuación se pueden extender los rectángulos iniciales de las variables componentes en todas las direcciones hasta que toquen las líneas más cercanas que delimitan los rectángulos de las regiones primaria y de referencia de la variable componente. Por ejemplo, podemos extender  $\alpha_1^b$  al oeste hasta que toque la línea vertical  $y = \alpha_x^-$ , al este hasta que toque la línea  $y = \beta_x^-$ , al sur hasta que toque la línea horizontal  $x = \alpha_y^-$  y al norte

<p><b>Función</b> GLOBALCHECKNTB(<math>\Sigma^O</math>)</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Para cada variable <math>a</math> en <math>\mathfrak{A}</math> Hacer</li> <li>2. Sean <math>V_a^{b_1}, \dots, V_a^{b_m}</math> los conjuntos de variables componentes de <math>a</math> introducidos en el paso S0 del algoritmo DIS-BCON.</li> <li>3. Sean <math>\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_m}</math> los conjuntos de rectángulos maximales de <math>\Sigma^O</math> asignados a las variables de <math>V_a^{b_1}, \dots, V_a^{b_m}</math>, respectivamente.</li> <li>4. Si CHECKNTB(<math>\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_m}</math>) devuelve ‘Falso’ Entonces Devolver ‘Falso’</li> <li>5. FinPara</li> <li>6. Devolver ‘Verdadero’</li> </ol> <p><b>Función</b> CHECKNTB(<math>\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_m}</math>)</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Para cada <math>s</math> en <math>\Sigma_a^{b_1} \cup \dots \cup \Sigma_a^{b_m}</math> Hacer</li> <li>2. <math>Q \leftarrow \{s\}</math></li> <li>3. Para cada <math>S</math> en <math>\{\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_m}\}</math> Hacer</li> <li>4. <math>Q' \leftarrow \emptyset</math></li> <li>5. Para cada <math>s'</math> en <math>S</math> y cada <math>q</math> en <math>Q</math> Hacer</li> <li>6. Si <math>s' \cap q</math> es un rectángulo no-trivial</li> <li>7. Entonces <math>Q' \leftarrow Q' \cup \{s' \cap q\}</math></li> <li>8. FinPara</li> <li>9. Si <math>Q' = \emptyset</math> Devolver ‘Falso’</li> <li>10. <math>Q \leftarrow Q'</math></li> <li>11. FinPara</li> <li>12. FinPara</li> <li>13. Devolver ‘Verdadero’</li> </ol>
--

Figura 3.9: Pseudo-código para las funciones GLOBALCHECKNTB y CHECKNTB.

hasta la línea  $x = \beta_y^+$ . La Figura 3.8-(b) muestra como quedarían todos los rectángulos de la asignación maximal para las variables componentes  $a_1^b, a_2^b, a_3^b$  y  $a_1^c, a_2^c, a_3^c$  y se puede comprobar que sus puntos extremos satisfacen todas las restricciones de orden en  $\mathfrak{C}^O$ . Eso supone también que la asignación maximal  $\Sigma^O$  obtenida en este ejemplo satisface todas las restricciones individuales de tile en que se descompone cada restricción cardinal básica.

### 3.2.3. Paso S3: Verificación de las Restricciones de Unión

La asignación inicial de rectángulos  $\Sigma^{O_i}$  obtenida para las variables originales en el paso S2 del algoritmo no es necesariamente una solución para la red de restricciones cardinales. Tan sólo se han verificado las restricciones de orden que se derivan de las relaciones cardinales, teniendo en cuenta fundamentalmente las relaciones individuales de tile en que se descompone una relación cardinal, no las relaciones cardinales multi-tile. Según las restricciones de unión que se derivan de una restricción cardinal multi-tile como  $a t_1 : \dots : t_k b$ , debe ser  $a = a_1^b \cup \dots \cup a_k^b$ . Como las restricciones de unión resultan complicadas de comprobar, pues las regiones pueden tener formas muy diversas, lo que se hace es considerar la unión de los rectángulos para variables componentes obtenidos a

partir de la asignación maximal  $\Sigma^O$ . Por tanto, la variable  $a$  debería ser instanciada con la unión de los rectángulos maximales para las variables de  $V_a^b$ , esto es, con el conjunto  $\Sigma_a^b$ , y esta unión no es necesariamente un rectángulo, pues la relación cardinal puede no ser rectangular.

Ahora bien, como la variable primaria  $a$  puede estar relacionada con varias variables de referencia mediante relaciones multi-tile, pongamos por caso con las del conjunto  $\{b_1, \dots, b_m\}$ , entonces hay que comprobar que las asignaciones maximales para cada conjunto  $V_a^{b_j}$ ,  $1 \leq j \leq m$ , de variables componentes son compatibles entre sí. Esto quiere decir que los conjuntos  $\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_m}$ , con las distintas uniones de rectángulos en que se puede partir la región de  $a$ , deben tener una intersección  $\bigcap_{1 \leq j \leq m} \Sigma_a^{b_j}$  formada por unión de rectángulos no triviales que satisfaga las relaciones cardinales entre la variable  $a$  y todas las del conjunto  $\{b_1, \dots, b_m\}$ . Tal intersección existe si y sólo si los conjuntos  $\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_m}$  satisfacen el siguiente predicado, que llamamos NTB (de ‘Non-Trivial Box’, o rectángulo no-trivial):

**Predicado NTB:** Para todo  $s \in S_1 \cup \dots \cup S_m$  existe una tupla  $(s_1, \dots, s_m) \in S_1 \times \dots \times S_m$  tal que  $mbb(s) \cap mbb(s_1) \cap \dots \cap mbb(s_m)$  es un rectángulo no-trivial, donde cada  $S_i$  es un conjunto finito de regiones.

El predicado NTB requiere que la intersección de  $m + 1$  rectángulos no triviales  $(mbb(s), mbb(s_1), \dots, mbb(s_m))$  sea un rectángulo no trivial. Esta comprobación puede realizarse operando con los puntos extremos proyectados de los rectángulos. Por ejemplo, dados dos rectángulos no triviales cualesquiera  $c$  y  $d$ , de lados paralelos a los ejes del plano, su intersección  $q = c \cap d$  es un rectángulo definido por:

$$\begin{aligned} q_x^- &= \max\{c_x^-, d_x^-\}, & q_x^+ &= \min\{c_x^+, d_x^+\} \\ q_y^- &= \max\{c_y^-, d_y^-\}, & q_y^+ &= \min\{c_y^+, d_y^+\} \end{aligned}$$

Y el rectángulo  $q$  es un rectángulo no trivial si  $q_x^- < q_x^+ \wedge q_y^- < q_y^+$ .

La función CHECKNTB de la Figura 3.9 controla, para cierta región  $a \in \mathfrak{A}$ , si los conjuntos  $\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_m}$  con los rectángulos maximales obtenidos para los conjuntos de variables componentes  $V_a^{b_1}, \dots, V_a^{b_m}$ , respectivamente, satisfacen el predicado NTB. Obsérvese que los conjuntos  $\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_m}$  no son uniones de regiones arbitrarias, como se indica en la formulación del predicado NTB, sino uniones de rectángulos, por tanto, en este caso  $mbb(s) = s$ , para cualquier rectángulo  $s$  de estos conjuntos. Si CHECKNTB  $(\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_m})$  devuelve ‘Verdadero’ eso implica que la variable  $a$  puede ser instanciada con  $\bigcap_{1 \leq j \leq m} \Sigma_a^{b_j}$  y esta asignación satisface las relaciones cardinales entre la variable  $a$  y las variables de referencia  $\{b_1, \dots, b_m\}$ . Si CHECKNTB  $(\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_m})$  devuelve ‘Falso’ eso implica que la red es inconsistente, pues no se satisfacen las relaciones cardinales entre la variable  $a$  y

las variables con las que se relaciona por relaciones multi-tile.

El predicado NTB ha de comprobarse para cada variable de  $\mathfrak{V}$  que sea variable primaria en una restricción multi-tile, con objeto de saber si admite una asignación consistente. De esto se encarga la función GLOBALCHECKNTB (Figura 3.9), que a partir de la asignación maximal de rectángulos  $\Sigma^O$  llama a la función CHECKNTB una vez por cada variable  $a \in \mathfrak{V}$ , pasándole como argumento los conjuntos de rectángulos maximales obtenidos para los conjuntos de sus variables componentes. Si en alguna de estas llamadas la función CHECKNTB devuelve ‘Falso’ entonces GLOBALCHECKNTB a su vez devuelve ‘Falso’ al algoritmo principal y por tanto DIS-BCON devuelve ‘Inconsistente’. En caso contrario, tras finalizar el Paso S3, se puede concluir que la red es consistente, pues puede obtenerse una solución que asigna a cada variable una región formada por unión de rectángulos no triviales (pertenece a *DIS*), o un sólo rectángulo no trivial (su rectángulo inicial obtenido en el Paso S2), si la variable no aparece como variable primaria en restricciones multi-tile.

### 3.2.4. Complejidad y Corrección del Algoritmo

**Teorema 3.1.** *Sea  $\mathfrak{N}$  una red de restricciones cardinales básicas en el dominio de regiones DIS. El algoritmo DIS-BCON decide correctamente si  $\mathfrak{N}$  es consistente en  $O(n^5)$ , donde  $n$  es el número de variables de regiones en  $\mathfrak{N}$ .*

La demostración se incluye con todo detalle en [SK05]. La corrección del algoritmo se basa en que la red  $\mathfrak{N}$  es consistente si y sólo si se cumplen las condiciones siguientes:

1. La red  $\mathfrak{N}^D$  obtenida en el Paso S1, con las restricciones de orden entre puntos extremos, es consistente.
2. Los conjuntos de rectángulos maximales  $\{\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_m}\}$  obtenidos en el Paso S2 satisfacen el predicado NTB, para toda variable  $a$  de  $\mathfrak{V}$ .
3. La función CHECKNTB del Paso S3 decide correctamente si los conjuntos  $\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_m}$ , de rectángulos maximales para cierta variable primaria  $a$ , satisfacen el predicado NTB.

En cuanto a la complejidad computacional, observamos que una red de restricciones cardinales básicas con  $n$  variables tiene  $O(n^2)$  restricciones. Se introducen  $O(n^2)$  variables componentes y variables de puntos extremos asociadas. El problema de la consistencia en la red de puntos  $\mathfrak{N}^O$  en realidad trabaja con  $O(n^2)$  variables de puntos. Por otra parte, examinando la función TRANSFORMA, podemos ver que se añaden sólo  $O(n^2)$  restricciones a la red de puntos. Por tanto, ya que el algoritmo CSPAN es de orden  $O(p+e)$ , donde  $p$  es el número de variables de puntos y  $e$  es el número de restricciones, la complejidad del proceso

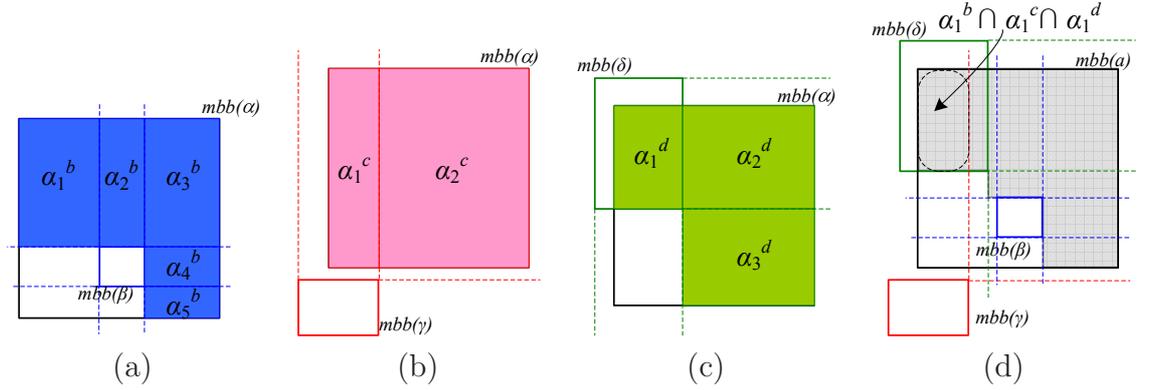


Figura 3.10: Ejemplo de aplicación de la función CheckNTB.

de comprobación de consistencia de  $\mathfrak{N}^O$  y obtención de solución para puntos es  $O(n^2)$ . El proceso de asignación maximal de rectángulos es  $O(n^2)$ , pues se consigue en tiempo constante para cada variable componente y hay  $O(n^2)$  variables de este tipo. Por otro lado, la función CHECKNTB trabaja en tiempo  $O(n^4)$ , ya que los bucles de las líneas 1 y 3 son  $O(n)$  y el de la línea 5 realiza como mucho  $O(n^2)$  intersecciones, ya que el conjunto  $Q$  puede tener un máximo de  $O(n^2)$  elementos. Esto es así porque para cada variable  $a$ , el rectángulo  $mbb(a)$  puede partirse en  $O(n^2)$  piezas o rectángulos maximales de variables componentes, pues hay  $O(n)$  variables con las que se relaciona  $a$  y las restricciones de orden introducidas suponen dividir  $mbb(a)$  en  $O(n)$  líneas horizontales y verticales. El conjunto  $Q$  no puede contener más elementos (rectángulos) que las posibles piezas en que se divide  $mbb(a)$ , puesto que la intersección de dos rectángulos es un rectángulo. Por tanto, el tamaño máximo de  $Q$  es  $O(n^2)$ . Finalmente la función CHECKNTB es llamada  $O(n)$  veces por la función GLOBALCHECKNTB, lo cual supone una complejidad global del algoritmo DIS-BCON de  $O(n^5)$ .

**Ejemplo 3.6.** Consideremos de nuevo la red de restricciones cardinales básicas del Ejemplo 3.3:

$$\mathfrak{C} = \{a \text{ W:NW:N } b, a \text{ S:SW:W } c, b \text{ B } a, b \text{ B:S } c, c \text{ B } a, c \text{ B:N } b\}$$

Sean  $\Sigma_a^b = \{\alpha_1^b, \alpha_2^b, \alpha_3^b\}$  y  $\Sigma_a^c = \{\alpha_1^c, \alpha_2^c, \alpha_3^c\}$  los conjuntos de asignaciones maximales a variables componentes de  $a$  que se muestran en el Ejemplo 3.5 (ver también la Figura 3.8-(b)). Podemos comprobar que el predicado NTB no se cumple para estos conjuntos ya que, por ejemplo, para  $\alpha_3^b \in \Sigma_a^b$  no existe un rectángulo  $s \in \Sigma_a^c$  tal que  $\alpha_3^b \cap s$  sea un rectángulo no trivial. Entonces CHECKNTB( $\Sigma_a^b, \Sigma_a^c$ ) devolvería ‘Falso’, por lo que la función GLOBALCHECKNTB también devuelve ‘Falso’ y por tanto el algoritmo DIS-BCON devuelve ‘Inconsistente’.

**Entrada:** Una red  $\mathfrak{N} = (\mathfrak{C}, \mathfrak{V})$ , donde  $\mathfrak{C}$  es un conjunto de restricciones con relaciones cardinales básicas de  $\mathcal{B}_{dis}$  y  $\mathfrak{V}$  es un conjunto de  $n$  variables en  $DIS$ .

(N) Una variable booleana GENERA para generar o no una solución.

(N) **Salida:** ‘Consistente’ o una solución si  $\mathfrak{N}$  es consistente; ‘Inconsistente’ en otro caso.

**Algoritmo DIS-BCSOL**

Paso 0: Introducir nuevas variables componentes.

Paso 1: Traducción a restricciones de orden.

Paso 2: Verificación de restricciones de orden.

(N) Paso 3: Verificación de restricciones de unión.

- Comprobar si existe una solución y obtenerla en caso afirmativo.

Si GLOBALCHECKNTB2( $\Sigma^O$ ) devuelve ‘Falso’ Entonces Devolver ‘Inconsistente’

(N) Paso 4: Generar la salida.

Si GENERA=0 Entonces Devolver ‘Consistente’

Sean  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  las regiones solución asignadas en GLOBALCHECKNTB2.

Devolver  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Figura 3.11: Algoritmo DIS-BCSOL.

Otro ejemplo es el que se muestra en la Figura 3.10. Sean  $\Sigma_a^b = \{\alpha_1^b, \alpha_2^b, \alpha_3^b, \alpha_4^b, \alpha_5^b\}$ ,  $\Sigma_a^c = \{\alpha_1^c, \alpha_2^c\}$  y  $\Sigma_a^d = \{\alpha_1^d, \alpha_2^d, \alpha_3^d\}$  (casos (a) a (c), resp.) los conjuntos de asignaciones maximales para la variables componentes de  $a$  con respecto a las variables  $b$ ,  $c$  y  $d$ , correspondientes a las restricciones

$$\{a \text{ NW:N:NE:E:SE } b, a \text{ N:NE } c, a \text{ B:E:SE } d\}.$$

Es fácil de comprobar que la función CHECKNTB( $\Sigma_a^b, \Sigma_a^c, \Sigma_a^d$ ) devuelve ‘Verdadero’ y por tanto se cumple el predicado NTB. Por ejemplo, para  $s = \alpha_1^b \in \Sigma_a^b$  la tupla  $(\alpha_1^b, \alpha_1^c, \alpha_1^d) \in \Sigma_a^b \times \Sigma_a^c \times \Sigma_a^d$  cumple que  $\alpha_1^b \cap \alpha_1^c \cap \alpha_1^d$  es un rectángulo no trivial, con lo cual esa intersección estaría en el conjunto  $Q$  al finalizar el bucle externo para  $s = \alpha_1^b$  (ver Figura 3.10-(d)). Con el resto de rectángulos pasa lo mismo, siempre hay una tupla de rectángulos en  $\Sigma_a^b \times \Sigma_a^c \times \Sigma_a^d$  con intersección no trivial. La Figura 3.10-(d) muestra (en gris) la región  $\Sigma_a^b \cap \Sigma_a^c \cap \Sigma_a^d$ . Es de destacar que la función CHECKNTB sólo comprueba que se satisface NTB, no se obtiene la intersección de los conjuntos de rectángulos maximales y, por tanto, no se asigna ninguna región a la variable primaria.

### 3.3. Optimización del Algoritmo de Consistencia y Búsqueda de una Solución

El principal resultado que presentamos en esta sección es una variante del algoritmo DIS-BCON para chequeo de consistencia de una red de restricciones cardinales básicas

entre regiones de  $DIS$ , que supone una mejora del tiempo de ejecución de  $O(n^5)$  a  $O(n^4)$ . También introducimos los cambios necesarios para que el algoritmo pueda proporcionar una solución de la red en el caso de que sea consistente, cosa que no hace el algoritmo original de Skiadopoulos y Koubarakis. En DIS-BCON el chequeo de la consistencia se basa en comprobar si existe una solución y para ello se van obteniendo asignaciones localmente consistentes para determinado grupo de variables y relaciones, pero este algoritmo no acaba de obtener la solución de la red.

Llamaremos DIS-BCSOL al nuevo algoritmo que proponemos, que aparece resumido en la Figura 3.11. Las modificaciones con respecto al algoritmo DIS-BCON se preceden con (N). El algoritmo DIS-BCSOL puede llamarse con una variable booleana GENERA con valor 0, para usarlo simplemente como algoritmo de chequeo de consistencia, o con valor 1 para que devuelva la solución encontrada. Así que este algoritmo funciona como algoritmo de decisión o como algoritmo de búsqueda de una solución.

### 3.3.1. Modificación del Paso S3 de Verificación de Restricciones de Unión

Proponemos una optimización de la función CHECKNTB del Paso S3, que reduce la complejidad de la misma de  $O(n^4)$  a  $O(n^3)$ . También modificamos esta función y la GLOBALCHECKNTB para que, además de realizar las comprobaciones finales para la consistencia de la red, pueda obtenerse una solución. La Figura 3.12 muestra las nuevas funciones CHECKNTB2 y GLOBALCHECKNTB2.

#### Descripción de las funciones del Paso 3

La función CHECKNTB2 se usa para comprobar que se cumple el predicado NTB para los conjuntos  $\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_m}$  de rectángulos maximales de cierta variable primaria  $a$  con respecto a cada una de sus variable de referencia  $b_1, \dots, b_m$ . En caso de cumplirse el predicado entonces CHECKNTB2 devuelve a GLOBALCHECKNTB2 una región que en principio es solución para la variable  $a$ . En otro caso devuelve una región vacía, que es señal de que se ha detectado inconsistencia.

En la primera parte de la función CHECKNTB2 (Paso C1) se calcula la intersección  $\Sigma_a^{b_1} \cap \dots \cap \Sigma_a^{b_m}$  y se guarda en el conjunto  $Q$ . Inicialmente  $Q$  contiene sólo el conjunto  $\Sigma_a^{b_1}$  y luego, en el bucle más externo (línea 2), se considera el resto de conjuntos por turno. Supongamos que se han procesado los conjuntos  $\Sigma_a^{b_1}$  a  $\Sigma_a^{b_{k-1}}$ ,  $1 \leq k-1 < m$ . En este caso,  $Q$  contiene al final de la iteración para  $k-1$  todos los rectángulos no triviales de la intersección  $\bigcap_{i=1}^{k-1} \Sigma_a^{b_i}$ . En la siguiente iteración se considera  $\Sigma_a^{b_k}$  y se entra en un bucle interno (línea 4) para calcular  $\Sigma_a^{b_k} \cap Q$ . Para ello se considera cada rectángulo  $s \in \Sigma_a^{b_k}$  y

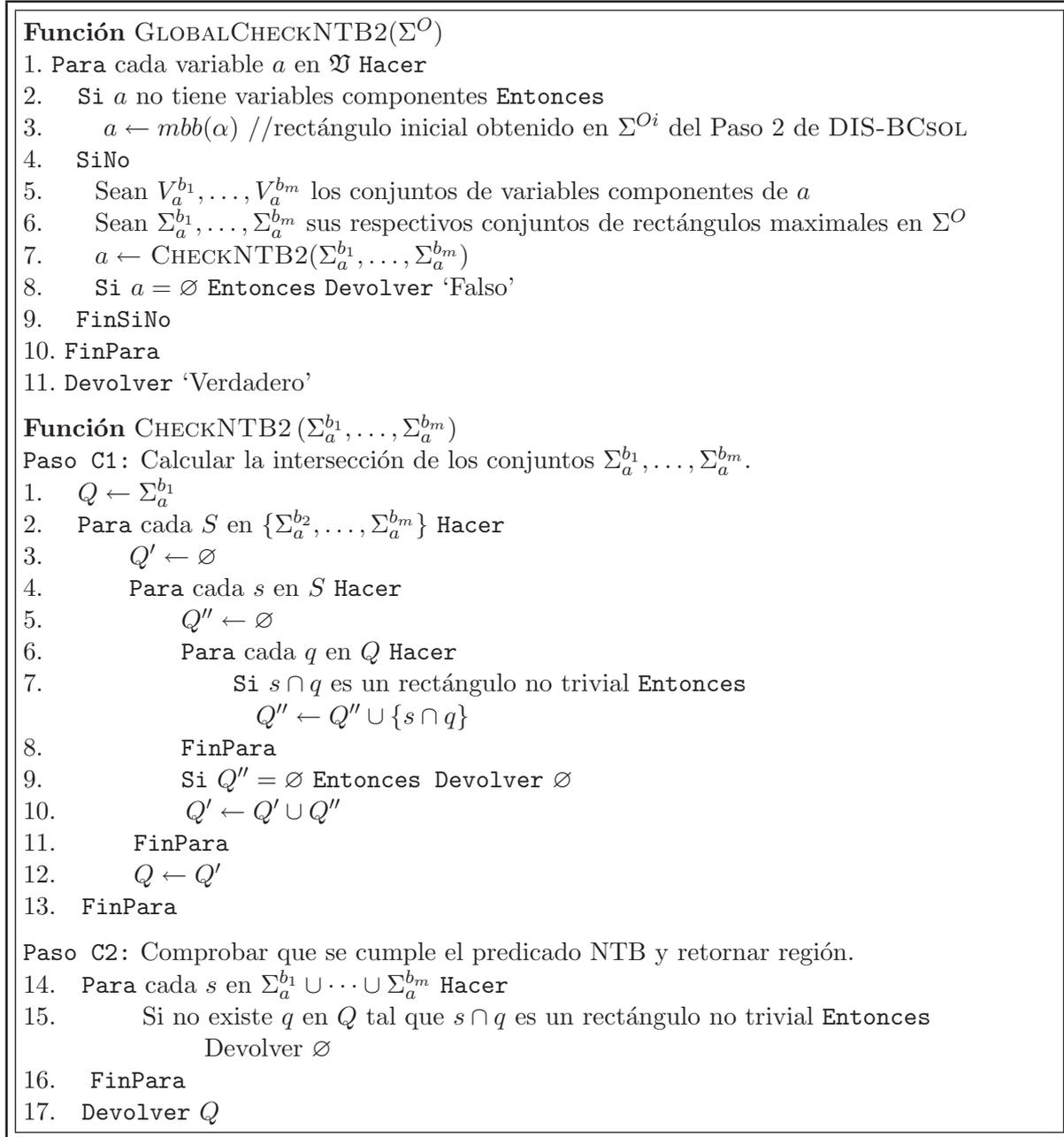


Figura 3.12: Funciones GLOBALCHECKNTB2 y CHECKNTB2

se itera ahora sobre cada  $q \in Q$  (bucle línea 6). Si se cumple que  $s \cap q$  es un rectángulo no trivial se añade esta intersección a un nuevo conjunto auxiliar  $Q''$ . Si tras la finalización del bucle más interno  $Q''$  es vacío entonces no se cumple el predicado NTB y la función CHECKNTB2 devuelve  $Q''$  (región vacía). En otro caso, los elementos de  $Q''$  se añaden un conjunto  $Q'$  (línea 10), que al final contiene todos los rectángulos no triviales resultantes de la intersección  $\Sigma_a^{b_k} \cap Q$ . Luego se asigna  $Q'$  a  $Q$  (línea 12) y la función continúa con el resto de conjuntos  $\Sigma_a^{b_{k+1}}, \dots, \Sigma_a^{b_m}$ . Después de la última iteración del bucle externo tendremos que  $Q = \bigcap_{i=1}^m \Sigma_a^{b_i}$  y todos sus elementos son rectángulos no triviales.

En la segunda parte de la función CHECKNTB2 (Paso C2) se comprueba si los conjuntos  $\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_m}$  verifican el predicado NTB, partiendo de que la intersección de todos ha quedado almacenada en  $Q$ . Para ello se comprueba que para cada rectángulo  $s \in \Sigma_a^{b_1} \cup \dots \cup \Sigma_a^{b_m}$  (bucle línea 14) existe al menos un rectángulo  $q \in Q$  tal que  $s \cap q$  es un rectángulo no trivial (bucle implícito en línea 15). En caso afirmativo, la función devuelve  $Q$ , que es la región que se asignará a la variable  $a$  en la función GLOBALCHECKNTB2. En caso contrario, la función devuelve una región vacía, que es señal de inconsistencia, porque no se cumple el predicado NTB.

La función GLOBALCHECKNTB2 usa un bucle para considerar cada una de las variables de la red por turno. Si la variable  $a$  de cierta iteración es una variable que sólo se relaciona con otras mediante relaciones de tile entonces se le asigna el rectángulo inicial que se ha calculado en el paso 2 del algoritmo. En otro caso se realiza una llamada a la función CHECKNTB2 y se le asigna la región devuelta por esta función. Si alguna región es vacía entonces GLOBALCHECKNTB2 devuelve 'Falso' y el algoritmo DIS-BCSOL devuelve 'Inconsistente'. En otro caso, la función GLOBALCHECKNTB2 devuelve 'Verdadero' y además habrá obtenido una asignación para variables, que estará disponible para que el algoritmo DIS-BCSOL proporcione una tupla solución para la red, dada por los valores asignados a las variables.

### 3.3.2. Complejidad y Corrección del Algoritmo Modificado

El algoritmo DIS-BCSOL tiene la misma estructura que el algoritmo original DIS-BCON excepto por los cambios comentados en el Paso 3 de verificación de restricciones de unión. Mostraremos que las modificaciones introducidas en las funciones CHECKNTB y GLOBALCHECKNTB son válidas para el chequeo de la consistencia y la obtención de una solución. También comprobaremos que la complejidad total del algoritmo se reduce de  $O(n^5)$  a  $O(n^4)$ .

**Lema 3.2.** Sean  $\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_m}$  los conjuntos de rectángulos maximales para las variables componentes de  $a$  con respecto a las variables de referencia  $b_1, \dots, b_m$ . La función CHE-

CKNTB2 devuelve una región no vacía si y sólo si los conjuntos  $\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_m}$  satisfacen el predicado NTB.

### Demostración.

Por la discusión anterior, sabemos que cuando la función CHECKNTB2 ha procesado en el paso C1 los conjuntos  $\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_{k-1}}, 1 \leq k-1 < m$ , se tiene que  $Q = \bigcap_{i=1}^{k-1} \Sigma_a^{b_i}$  y, además, por la forma de ir añadiendo rectángulos a  $Q$ , este conjunto contiene todas las intersecciones  $\sigma_1 \cap \dots \cap \sigma_{k-1}$  que cumplen que son rectángulos no triviales, donde  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}) \in \Sigma_a^{b_1} \times \dots \times \Sigma_a^{b_{k-1}}$ . Por tanto, cuando se considera el conjunto  $\Sigma_a^{b_k}$ , si la función devuelve un conjunto vacío en la línea 9 es porque existe un  $s \in \Sigma_a^{b_k}$  cuya intersección con cualquier elemento de  $Q$  es vacía o trivial. Eso implica que no se cumple el predicado NTB. En otro caso, al terminar el paso C1 tenemos que

$$Q = \bigcap_{i=1}^m \Sigma_a^{b_i} = \bigcup (\sigma_1 \cap \dots \cap \sigma_m), \text{ tal que } (\sigma_i \in \Sigma_a^{b_i}, 1 \leq i \leq m) \wedge \bigcap_{i=1}^m \sigma_i \text{ es no trivial.}$$

El hecho de que  $Q$  sea la unión de todas las intersecciones no triviales de rectángulos correspondientes a todas las tuplas  $(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \Sigma_a^{b_1} \times \dots \times \Sigma_a^{b_m}$  no quiere decir que los conjuntos  $\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_m}$  satisfagan el predicado NTB. Esto es debido a que el paso C1, sólo se limita a calcular dicha unión de intersecciones no triviales y no a verificar que “para todo  $s \in \Sigma_a^{b_1} \cup \dots \cup \Sigma_a^{b_m}$  existe una tupla  $(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \Sigma_a^{b_1} \times \dots \times \Sigma_a^{b_m}$  tal que  $s \cap (\sigma_1 \cap \dots \cap \sigma_m)$  es un rectángulo no trivial”, como debería ser para asegurar que se satisface el predicado NTB. Es precisamente en el paso C2 cuando se verifica tal condición, como queda claro a partir del código de dicho paso y del contenido de  $Q$ . Entonces, si CHECKNTB2 devuelve una región vacía en la línea 15 es debido a que no se satisface NTB, en otro caso CHECKNTB2 devuelve  $Q$ , que es una región de DIS, y es señal de que se cumple NTB. Luego CHECKNTB2 devuelve una región no vacía si y solo si los conjuntos  $\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_m}$  satisfacen el predicado NTB, como queríamos probar.  $\square$

**Ejemplo 3.7.** Consideremos de nuevo el Ejemplo 3.6, con las restricciones de una red completa

$$\mathfrak{C} = \{a W:NW:N b, a S:SW:W c, b B a, b B:S c, c B a, c B:N b\}$$

Las asignaciones iniciales  $a = mbb(\alpha), b = mbb(\beta), c = mbb(\gamma)$  para las variables y los conjunto se rectángulos maximales para variables componentes  $\Sigma_a^b = \{\alpha_1^b, \alpha_2^b, \alpha_3^b\}$  y  $\Sigma_a^c = \{\alpha_1^c, \alpha_2^c, \alpha_3^c\}$  se muestran en la Figura 3.8-(b). En este ejemplo se mostraba cómo la función CHECKNTB comprueba que los conjuntos de asignaciones maximales no satisfacían el predicado NTB. Ahora comprobamos que la función CHECKNTB2 también detecta que no se cumple NTB y devuelve una región vacía. Al principio  $Q = \Sigma_a^b$  y en la línea 2

se considera el conjunto  $\Sigma_a^c$ , del cual se selecciona el primer rectángulo  $\alpha_1^c$ . Como este rectángulo no interseca con ninguno de los de  $Q$  entonces quedaría  $Q'' = \emptyset$ , por lo que CHECKNTB2 devuelve esta región vacía.

**Lema 3.3.** *La función GLOBALCHECKNTB2 devuelve ‘Verdadero’ si y sólo si la red de restricciones cardinales básicas de entrada al algoritmo DIS-BCSOL es consistente. En caso de ser consistente, las asignaciones obtenidas para las variables son una solución de la red.*

**Demostración.**

Observamos que la función GLOBALCHECKNTB2 es análoga a la función GLOBALCHECKNTB del algoritmo DIS-BCON, en cuanto a lo que se refiere a las comprobaciones finales de consistencia de la red. La única diferencia se da en la función CHECKNTB2 y, por el Lemma 3.2, esta función comprueba correctamente si los conjuntos de rectángulos maximales para las variables componentes satisfacen el predicado NTB, de la misma forma que lo hace la función CHECKNTB. Por tanto, GLOBALCHECKNTB2 devuelve ‘Verdadero’ si y sólo GLOBALCHECKNTB devuelve ‘Verdadero’. Además, por la corrección del algoritmo DIS-BCON (ver Sección 3.2.4), sabemos que GLOBALCHECKNTB devuelve ‘Verdadero’ si y sólo si la red es consistente, puesto que este algoritmo de chequeo de consistencia finaliza con la llamada a esta función en el Paso 3. Por tanto, la nueva función GLOBALCHECKNTB2 devuelve ‘Verdadero’ si y sólo si la red es consistente.

Ahora justificamos por qué las asignaciones obtenidas para las variables originales en la función GLOBALCHECKNTB2 son una solución de la red. De nuevo hay que remitirse a la corrección del algoritmo DIS-BCON. Aunque este algoritmo no obtiene una solución, Skiadopoulus y Koubarakis [SK05] demuestran que en el caso de que la red sea consistente, se puede obtener una solución para la misma partiendo de las asignaciones de rectángulos iniciales  $\Sigma^{O_i}$  y maximales  $\Sigma^O$ , obtenidas tras resolver la red de puntos  $\mathfrak{N}^O$ . La solución que se propone consiste en asignar a cada variable  $a$  que no tenga variables componentes su rectángulo inicial  $a = mb(\alpha)$ , obtenido en el Paso 2. Esto es lo que se hace en la función GLOBALCHECKNTB2 para este tipo de variables. Si la variable  $a$  tiene componentes, porque se relaciona mediante relaciones multi-tile, entonces se le puede asignar la región que resulta de la intersección de sus conjuntos de rectángulos maximales, una vez que se sabe que estos conjuntos satisfacen el predicado NTB. Es decir, si  $\Sigma_a^{b_1}, \dots, \Sigma_a^{b_m}$  son los conjuntos de rectángulos maximales para las variables componentes de  $a$  con respecto a todas sus variables de referencia  $b_1, \dots, b_m$ , entonces una posible región solución para  $a$  vendría dada por  $a = \Sigma_a^{b_1} \cap \dots \cap \Sigma_a^{b_m}$ . Esta es precisamente la región que devuelve la función CHECKNTB2 y GLOBALCHECKNTB2 se la asigna a la variable  $a$ . De manera análoga se procedería con el resto de variables, de una en una, sin importar el orden. Por tanto, podemos afirmar que GLOBALCHECKNTB2 obtiene una solución cuando la red es

consistente. □

**Ejemplo 3.8.** En el Ejemplo 3.6 se mostraba un conjunto de restricciones que tienen a  $a$  como variable primaria:

$$\{a \text{ NW:N:NE:E:SE } b, \quad a \text{ N:NE } c, \quad a \text{ B:E:SE } d\}$$

Las asignaciones iniciales para variables originales son  $a = mbb(\alpha)$ ,  $b = mbb(\beta)$ ,  $c = mbb(\gamma)$ ,  $d = mbb(\delta)$  y los conjuntos maximales para variables componentes de  $a$  son  $\Sigma_a^b = \{\alpha_1^b, \alpha_2^b, \alpha_3^b, \alpha_4^b, \alpha_5^b\}$ ,  $\Sigma_a^c = \{\alpha_1^c, \alpha_2^c\}$  y  $\Sigma_a^d = \{\alpha_1^d, \alpha_2^d, \alpha_3^d\}$  (Figura 3.10). Estos conjuntos satisfacen el predicado NTB y así lo detecta la nueva función CHECKNTB2. Cuando GLOBALCHECKNTB2 realiza la llamada CHECKNTB2( $\Sigma_a^b, \Sigma_a^c, \Sigma_a^d$ ), esta función calcula la intersección de los conjuntos y la guarda en el conjunto  $Q$ . Después comprueba que se cumple NTB y retorna  $Q$ , que es la región que se asignará a la variable  $a$  como posible solución. Esta región es la que se muestra en gris en la Figura 3.10-(d).

Supongamos que la red completa tiene las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} = \{ & a \text{ NW:N:NE:E:SE } b, \quad a \text{ N:NE } c, \quad a \text{ B:E:SE } d, \\ & b \text{ B } a, \quad b \text{ NE } c, \quad b \text{ SE } d, \\ & c \text{ S:SW } a, \quad c \text{ SW } b, \quad c \text{ S:SW } d, \\ & d \text{ B:W:NW:N } a, \quad d \text{ NW } b, \quad d \text{ N:NE } c\}. \end{aligned}$$

Esta red es consistente. La función GLOBALCHECKNTB2 realiza sucesivas llamadas a CHECKNTB2 para las variables  $a, c, d$  por turno. No hay llamada correspondiente a la variable  $b$ , porque la relación entre esta variable y cada una de las otras es una relación de tile y por tanto  $b$  no tiene variables componentes. Se puede comprobar que para las variables  $c$  y  $d$ , las intersecciones de sus conjuntos respectivos de rectángulos maximales coinciden con sus rectángulos iniciales  $mbb(\gamma)$  y  $mbb(\delta)$ . Por tanto, la función GLOBALCHECKNTB2 obtiene la siguiente solución para la red:

$$a = \Sigma_a^b \cap \Sigma_a^c \cap \Sigma_a^d, \quad b = mbb(\beta), \quad c = \Sigma_c^a \cap \Sigma_c^d = mbb(\gamma), \quad d = \Sigma_d^a \cap \Sigma_d^c = mbb(\delta).$$

**Teorema 3.2.** Sea  $\mathfrak{N} = (\mathfrak{C}, \mathfrak{V})$  una red de restricciones cardinales básicas en el dominio de regiones DIS. El algoritmo DIS-BCSOL decide correctamente si la red es consistente y, en caso de ser consistente, obtiene una solución para la misma. El orden de complejidad del algoritmo es  $O(n^4)$ , siendo  $n$  el número de variables de  $\mathfrak{V}$ .

### Demostración.

La corrección del algoritmo, tanto para comprobar la consistencia como para obtener una solución, se deduce del hecho que el algoritmo DIS-BCON es correcto para decidir la

consistencia, de que DIS-BCSOL tiene una estructura análoga y de que los cambios introducidos en las funciones CHECKNTB y GLOBALCHECKNTB preservan la corrección de las comprobaciones finales de consistencia (Lemas 3.2 y 3.3). Además, esta última función construye correctamente una solución para la red en caso de que ésta sea consistente, como se indica en el Lema 3.3.

En cuanto a la complejidad computacional, se mantienen los pasos 0 a 2 del algoritmo original, que son de tiempo  $O(n^2)$ , como ya se discutió en la Sección 3.2.4. Por otro lado, la primera parte de la función CHECKNTB2 (líneas 1 a 11) se ejecuta en  $O(n^3)$ , ya que el número de iteraciones del bucle externo de la línea 2 es  $O(n)$ , el de la línea 4 realiza un número constante de iteraciones (hay 9 rectángulos como mucho en  $S$ ) y el bucle más interno en la línea 6 es  $O(n^2)$ . Esto último es debido a que el número máximo de elementos en el conjunto  $Q$  es  $O(n^2)$ , como ya se argumentó en el análisis de la función CHECKNTB original y el contenido de  $Q$  sigue siendo el mismo en la nueva función. La segunda parte de CHECKNTB2 (líneas 14 a 17) se ejecuta también en  $O(n^3)$ . La función GLOBALCHECKNTB2 es  $O(n^4)$ , porque realiza  $O(n)$  llamadas a CHECKNTB2. Así que  $O(n^4)$  es la complejidad global del algoritmo DIS-BCSOL.  $\square$

## 3.4. Discusión

En esta sección comparamos nuestro algoritmo para consistencia y búsqueda de una solución de una red de relaciones cardinales básicas entre regiones, con otro algoritmo reciente para el mismo problema propuesto por Zhang *et al.* [ZLLY08]. Este algoritmo se adapta también para el problema de la consistencia cuando las regiones son conectadas y sugerimos los cambios que habría que hacer en nuestro algoritmo para resolver el mismo problema.

La principal ventaja del algoritmo de Zhang *et al.* es su eficiencia, pues puede comprobar si la red es consistente en  $O(n^3)$ . Sin embargo, este algoritmo sólo es capaz de proporcionar una solución, además bastante restrictiva, mientras que el que proponemos, basado en la aproximación de Skiadopoulos y Koubarakis, puede adaptarse para obtener múltiples soluciones y para permitir la integración con restricciones de tipo métrico o cuantitativo sobre los puntos extremos de los rectángulos mínimos asociados a las variables.

### 3.4.1. Descripción del algoritmo de consistencia Pixels-BCsol

Pasamos a describir brevemente el algoritmo de Zhang *et al.*, al que nos referiremos de ahora en adelante como PIXELS-BCSOL. Los pasos esenciales son los siguientes:

Parte de una red  $\mathfrak{N}$  de restricciones cardinales básicas entre las variables  $\mathfrak{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ , todas de tipo región de *DIS*.

1. Obtiene dos redes básicas del álgebra de intervalos  $N_x$  y  $N_y$ , donde cada par de relaciones  $r_{i,j}^x$  y  $r_{i,j}^y$  son las relaciones entre los intervalos proyectados en el eje  $x$  y en el eje  $y$ , respectivamente, de  $mbb(v_i)$  y  $mbb(v_j)$ . Estas relaciones entre intervalos son implicadas por las relaciones cardinales entre cada par de variables  $(v_i, v_j)$ .
2. Obtiene, si es posible, una solución canónica digitalizada para la red de intervalos, donde los puntos extremos de los intervalos son enteros entre 0 y  $2n - 1$ .
3. A partir de la solución de intervalos obtiene una asignación inicial de rectángulos para las variables de la forma  $v_i = mbb(v_i)$ . Cada uno de estos rectángulos, definido por los puntos de los extremos proyectados de  $mbb(v_i)$ , está formado por unión de píxeles, que son rectángulos de área  $1 \times 1$ . De esta forma se establece un *marco digital* de  $n^2$  píxeles como máximo, que encierra a los *mbb* de todas las variables.
4. Modifica la asignación inicial de rectángulos digitalizados a variables para excluir aquellos píxeles que no deben formar parte de la región solución para la variable en cuestión, debido a las restricciones cardinales entre esa variable y las demás. Se obtiene así una región digitalizada para cada variable.
5. Se comprueba si la región digitalizada obtenida para cada variable es una *solución maximal canónica*. Para ello se comprueba por cada par de variables si las regiones satisfacen las relaciones cardinales, por un proceso de comprobación de inclusión de píxeles de la región primaria en las tiles, digitalizadas y acotadas por el marco digital, del *mbb* de la región de referencia.
6. Si se consigue obtener una solución maximal canónica entonces la red es consistente; en otro caso es inconsistente.

### 3.4.2. Consistencia y Solución de Redes de Relaciones Básicas entre Regiones Conectadas

Para el problema de comprobar la consistencia de relaciones básicas entre regiones, Zhang *et al.* muestran una modificación del algoritmo PIXELS-BCSOL que consiste en incluir un paso previo al paso 5, donde se comprueba si cada región digitalizada obtenida en el paso anterior es una región conectada. Para ello se construye un grafo con un nodo por píxel y se incluyen arcos entre pares de píxeles adyacentes. Se aplica un algoritmo de componentes fuertemente conexas y se comprueba si hay una única componente conexas

cuyo *mbb* coincida con el de la región. Si esta condición no se cumple entonces la red es inconsistente. En otro caso se pasa a comprobar si es una solución maximal canónica.

Para adaptar el algoritmo DIS-BCSOL de manera que decida correctamente la consistencia y obtenga una solución con regiones conectadas, habría que hacer algo parecido, sólo que tras el paso 3 de verificación de restricciones de orden y obtención de una asignación para las variables. Faltaría probar que dicha asignación, que se sabe es consistente con las relaciones cardinales, está compuesta por regiones conectadas. Para ello se procedería de forma análoga a al algoritmo anterior. Para cada variable habría que calcular las componentes conexas de su región y verificar que sólo hay una. No es necesario probar que el rectángulo mínimo de dicha componente coincide con el de la región asignada, porque la satisfacibilidad del predicado NTB lo asegura. Si hay más de una componente conexa la red es inconsistente; en otro caso la red es consistente y la asignación para variables obtenida en la función GLOBALCHECKNTB2 es una solución para la red.

### 3.4.3. Comparación y Posibilidad de Extensión de Ambos Algoritmos

Los algoritmos PIXELS-BCSOL y DIS-BCSOL son semejantes en el sentido de que para comprobar la consistencia ambos parten de una asignación inicial de rectángulos para las regiones, que es consistente con las relaciones de orden derivadas de las relaciones cardinales, y a partir de ahí se intenta construir una solución para cada región formada por unión de rectángulos más pequeños incluidos en su rectángulo inicial. La forma de obtener la solución varía sustancialmente, pues el algoritmo PIXELS-BCSOL no usa variables componentes e impone restricciones fuertes en la construcción de la solución, con objeto de disminuir la complejidad de  $O(n^4)$  a  $O(n^3)$ . Como algoritmo de decisión para el problema de la consistencia, PIXELS-BCSOL es más adecuado que el algoritmo DIS-BCSOL, por ser más eficiente.

#### Flexibilidad en la Obtención de una Solución

Aclaremos las limitaciones del algoritmo PIXELS-BCSOL en cuanto a la forma de obtener una solución y justificamos la ventaja que supone usar DIS-BCSOL, no como algoritmo de decisión, sino como algoritmo de búsqueda de una solución. En el algoritmo PIXELS-BCSOL los rectángulos iniciales para las variables son digitales, formados por unión de píxeles, y el marco en que se incluyen todos ellos es de tamaño no superior a  $n^2$  píxeles, siendo  $n$  el número de variables. En el algoritmo DIS-BCSOL los rectángulos iniciales para las variables no tienen estas restricciones. Los puntos extremos de dichos rectángulos vienen dados por la solución generada por el algoritmo CSPAN. Este algoritmo

se basa en una ordenación topológica de los nodos que representan las variables de puntos y el valor asignado a cada punto es arbitrario, siempre que respete el orden topológico. Así pues, la asignación inicial del rectángulos en el algoritmo DIS-BCSOL no impone ninguna limitación en cuanto al área y a la asignación de valores a los puntos proyectados. Esto supone que la solución que finalmente se obtiene para las variables de región no tiene por qué ser única, basta con cambiar la solución de puntos generada por el algoritmo CSPAN. El algoritmo PIXELS-BCSOL, por contra, sólo permite generar una única solución digitalizada PIXELS-BCSOL, pues la corrección del mismo se basa en la existencia de una única solución maximal canónica, que es precisamente la solución generada en caso de que la red sea consistente.

### Integración con restricciones cuantitativas

Aunque queda fuera del alcance de esta tesis el estudio de restricciones de tipo métrico o cuantitativo para razonamiento espacial, merece la pena señalar que en la literatura hay diversos formalismos para razonamiento espacial y temporal que integran relaciones cualitativas y cuantitativas entre diversos tipos de entidades. Por ejemplo, para la integración de relaciones cualitativas y métricas entre puntos [Mei96, KL91], para relaciones cualitativas entre intervalos (o rectángulos) y restricciones métricas entre sus puntos extremos [Con00], integración de relaciones topológicas y métricas sobre el tamaño o distancia de las regiones [GR02], etc.

Estos modelos para razonamiento temporal o espacial cualitativo combinado con relaciones métricas se basan fundamentalmente en el *problema temporal simple*, STP de Dechter *et al.* [DMP91]. Un STP es un tipo de problema de satisfacción de restricciones donde las variables representan puntos y las restricciones son del tipo  $x_i [inf, sup] x_j$  y establece una restricción sobre la distancia de los puntos de la forma:  $inf \leq x_j - x_i \leq sup$ . Se permite también que los intervalos sean abiertos y no acotados. En general, el problema de la consistencia o búsqueda de una solución en estos modelos es NP-duro y los casos tratables suelen tener mayor complejidad que sus correspondientes problemas cualitativos.

La integración de relaciones cardinales entre regiones y relaciones métricas no ha sido estudiada previamente y puede resultar de interés para lenguajes de consultas a bases de datos espaciales, recuperación de imágenes, sistemas de información geográfica con coordenadas proyectadas, etc. En el caso de una red de relaciones básicas entre regiones, se tiene que las relaciones de orden entre puntos extremos de los rectángulos mínimos de las regiones son relaciones del álgebra de puntos convexa y una red de este tipo aumentada con relaciones métricas entre las distancias de los puntos extremos puede resolverse en tiempo polinomial cúbico. Por tanto, se puede aumentar la expresividad de las restricciones cardinales básicas añadiendo relaciones métricas entre los puntos proyectados de las

regiones, tanto en el eje  $x$ , como en el eje  $y$ . De esta forma, además de restricciones de orden, se pueden expresar restricciones sobre la anchura o altura de las regiones teniendo en cuenta sus proyecciones, por ejemplo estableciendo que “la distancia entre el extremo derecho de la proyección de la región  $a$  y el extremo izquierdo es de exactamente 14 unidades, (o entre 12 y 25,30 unidades)”, etc.; o restricciones de separación entre regiones, como “la distancia entre el extremo derecho de la proyección de la región  $a$  y el extremo izquierdo de la región  $b$  es entre 0 y 2,5 (o mayor de 3)”, etc.

También es posible establecer restricciones métricas sobre la anchura, altura o separación relativa entre los intervalos proyectados de las dos regiones a partir de un modelo combinado de relaciones cualitativas y métricas entre puntos y duraciones [NSWM02, NSM03], para expresar restricciones del tipo “la anchura entre las regiones  $b$  y  $a$  difiere en 15,75 unidades (o entre cierta cantidad y otra)”, o “la región  $a$  es de menor altura que la región  $b$ ”, etc.

Cabe destacar que el algoritmo DIS-BCSOL puede usarse como punto de partida para resolver el problema de la consistencia y búsqueda de una solución de una red donde se integran relaciones cardinales básicas entre regiones y relaciones métricas entre las distancias de los puntos extremos de las proyecciones de las regiones, realizando los cambios convenientes en el paso de transformación a restricciones de orden y en el paso de verificación de restricciones de orden y obtención de una solución para los puntos extremos. Sin embargo, el algoritmo PIXELS-BCSOL no ofrece esta posibilidad, por lo discutido anteriormente sobre la inflexibilidad en la obtención de una asignación inicial para rectángulos de las regiones, que conduce a una única solución para la red.



## Capítulo 4

# Razonamiento con Relaciones Cardinales entre Rectángulos

En este capítulo introducimos una variante del modelo de relaciones cardinales direccionales, que llamamos *modelo DCR*, para razonar con relaciones cardinales entre regiones aproximadas por sus rectángulos mínimos. Este modelo para razonamiento espacial cualitativo resulta ser menos expresivo que el que considera relaciones cardinales entre regiones cualesquiera, debido a que se hace una aproximación por rectángulos tanto de la región de referencia como de la primaria. En contrapartida, la simplicidad del modelo permite que las tareas de razonamiento sean más eficientes. El modelo DCR puede ser interesante en determinadas aplicaciones para las que es suficiente con aproximar las regiones por rectángulos [Gue89, MJ90, PSTE95, AEG94].

El capítulo se estructura del siguiente modo:

- En la Sección 4.1 hacemos un repaso del cálculo de relaciones entre rectángulos conocido como *álgebra de rectángulos* [BCdC98].
- En la Sección 4.2 se estudia el vínculo existente entre las relaciones cardinales rectangulares y las relaciones del álgebra de rectángulos.
- En la Sección 4.3 se identifica una subclase tratable de DCR formada por el conjunto de relaciones cardinales rectangulares convexas.
- En la Sección 4.4 se ofrecen métodos para resolver el problema de la consistencia y el problema de la red mínima para la subclase de relaciones cardinales rectangulares convexas de DCR.
- Para terminar el capítulo, en la Sección 4.5 se demuestra que el problema de la consistencia de una red de restricciones de DCR es NP-completo. También se demuestra que el problema es NP-completo para un subconjunto propio de relaciones

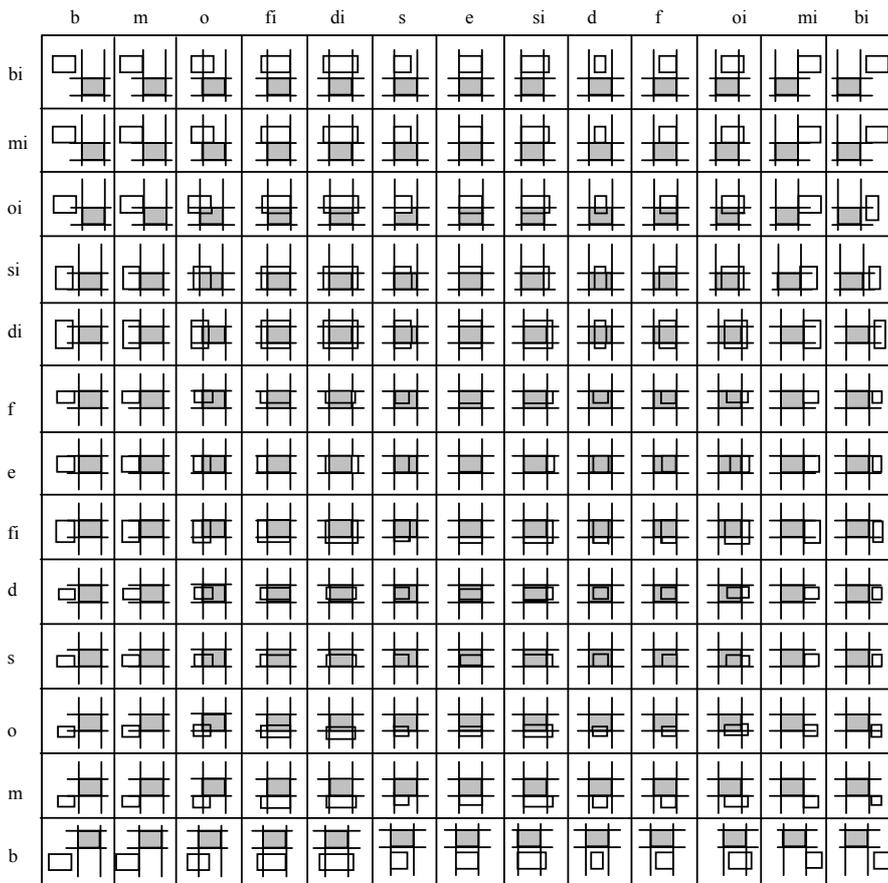


Figura 4.1: Relaciones básicas del álgebra de rectángulos.

de DCR que incluye a las relaciones convexas. Por último, se propone un algoritmo de backtracking para decidir la consistencia de una red de restricciones de DCR, aprovechando la tratabilidad de la subclase de relaciones convexas.

## 4.1. El Álgebra de Rectángulos

El *álgebra de rectángulos* (RA, *Rectangle Algebra*) es el nombre que dan Balbiani, Condotta y del Cerro [BCdC98] a la extensión bidimensional del álgebra de intervalos de Allen (IA). Previamente, Hans Guesgen [Gue89] fue el primero en proponer un cálculo espacial basado en dicha extensión. El RA es un formalismo para el razonamiento cualitativo basado en restricciones sobre rectángulos cuyos lados son paralelos a los ejes de una base ortogonal de  $\mathbb{R}^2$ . Aunque inicialmente se concibió como un cálculo para razonamiento temporal bidimensional, su utilidad en el dominio espacial es inmediata: el RA es suficientemente expresivo para establecer relaciones espaciales tanto de tipo direccional como topológico entre objetos rectangulares u objetos espaciales aproximados por rectángulos.

Un rectángulo  $p$  se caracteriza totalmente por la tupla  $(p_x, p_y)$ , que se corresponde con los dos intervalos proyectados del rectángulo  $p$  sobre los ejes  $x$  e  $y$  del plano. Una *relación rectangular básica* es un par  $r = (r_x, r_y)$ , donde  $r_x$  es la relación básica del álgebra de intervalos proyectada en el eje  $x$  ( $x$ -proyección de  $r$ ) y  $r_y$  es la relación básica del álgebra de intervalos proyectada en el eje  $y$  ( $y$ -proyección de  $r$ ). Una *restricción rectangular básica*  $p(r_x, r_y) q$  se satisface si y sólo si las restricciones de intervalos  $p_x r_x q_x$  y  $p_y r_y q_y$  también se satisfacen.

El conjunto de todas las relaciones básicas  $\mathcal{B}_{ra}$  es el formado por el producto cartesiano del conjunto de relaciones básicas del álgebra de intervalos  $\mathcal{B}_{ia}$ , es decir,  $\mathcal{B}_{ra} = \mathcal{B}_{ia} \times \mathcal{B}_{ia} = \{(r_x, r_y) \mid r_x, r_y \in \mathcal{B}_{ia}\}$ , siendo  $|\mathcal{B}_{ra}| = 13 \times 13 = 169$ . Estas relaciones son muy expresivas ya que pueden representar tanto relaciones direccionales, tales como *encima (norte)*, *debajo(sur)*, *izquierda-de,...*, como relaciones topológicas como *disjunto de*, *tocando con*, *dentro de,...*, entre rectángulos.

En [PSTE95] podemos encontrar una figura con ejemplos representativos de pares de rectángulos para cada una de las relaciones básicas entre rectángulos. Hemos adaptado esta figura para mostrar una tabla con una fila por cada  $y$ -proyección y una columna por cada  $x$ -proyección de una relación básica de RA (Figura 4.1). Cada entrada  $T[r_y, r_x]$  de la tabla contiene dos rectángulos representativos,  $\rho$  (claro) y  $\sigma$  (oscuro), que cumplen  $\rho(r_x, r_y) \sigma$ . Así, por ejemplo, si un rectángulo  $p$  está por debajo y a la derecha del rectángulo  $q$  y  $p$  no toca a  $q$ , entonces la relación entre  $p$  y  $q$  es  $(bi, b)$  porque  $p_x b_i q_x$  y  $p_y b q_y$ . La posición  $T[b, bi]$  de la matriz de la Figura 4.1 ilustra esta situación.

Para representar y razonar con conocimiento incompleto sobre la posición relativa entre dos rectángulos, se utiliza el conjunto  $2^{\mathcal{B}_{ra}}$ , que incluye a todas las relaciones básicas y disyuntivas. El álgebra de rectángulos viene dada por el conjunto  $2^{\mathcal{B}_{ra}}$ , junto con las extensiones de las operaciones del IA. Aparte de las operaciones del álgebra booleana generada por el conjunto de relaciones básicas, el RA dispone, como es usual en álgebras de relaciones binarias, de las operaciones de composición e inversa, que se definen a partir de las operaciones del IA:

- Composición:  $R \circ S = \{(r_x, r_y) \circ (s_x, s_y) \mid (r_x, r_y) \in R, (s_x, s_y) \in S\}$ , donde  $(r_x, r_y) \circ (s_x, s_y) = (r_x \circ s_x) \times (r_y \circ s_y)$ .
- Inversa:  $R^{-1} = \{(r_x, r_y)^{-1} \mid (r_x, r_y) \in R\}$ , donde  $(r_x, r_y)^{-1} = (r_x^{-1}, r_y^{-1})$ .

Al igual que en el álgebra de intervalos, se puede establecer un orden parcial  $\leq_{ra}$  entre relaciones rectangulares básicas a partir del orden parcial  $\leq_{ia}$  del IA (ver Capítulo 2, Figura 2.4-(a)):

$$(r_x, r_y) \leq_{ra} (s_x, s_y) \Leftrightarrow (r_x \leq_{ia} s_x) \wedge (r_y \leq_{ia} s_y).$$

El orden parcial  $\leq_{ra}$  define un retículo  $(\mathcal{B}_{ra}, \leq_{ra})$ , que contiene relaciones de dimensión 0

a 4, siendo  $\dim((r_x, r_y)) = \dim(r_x) + \dim(r_y)$ . La dimensión de una relación disyuntiva  $R \in 2^{\mathcal{B}^{ra}}$  es la dimensión máxima de sus relaciones básicas.

Como el RA es una extensión del IA, éste hereda la misma dificultad computacional. Balbiani *et ál.* demuestran que el problema de la consistencia de una red del RA ( $\text{CSPSAT}(2^{\mathcal{B}^{ra}})$ ) es *NP*-completo, aunque se han identificado varios fragmentos tratables [BCdC98, BCdC99]. Estos son:

- a) Subclase *convexa*. Contiene a las relaciones del RA que se obtienen como el producto cartesiano de dos relaciones convexas del IA. Son aquellas relaciones que se corresponden con intervalos en el retículo  $(\mathcal{B}_{ra}, \leq_{ra})$ .
- b) Subclase *preconvexa saturada*. Contiene las relaciones del RA que se obtienen como el producto cartesiano de dos relaciones preconvexas del IA.
- c) Subconjunto de relaciones *fuertemente preconvexas*. Para caracterizar a este conjunto de relaciones Balbiani *et ál.* [BCdC99] definen el conjunto  $\mathcal{W}$  de relaciones *débilmente preconvexas*, que son las equivalentes en el RA a las relaciones preconvexas del álgebra de intervalos. Se dice que  $R$  es una relación *fuertemente preconvexa* si para toda relación convexa  $S$  se tiene que  $R \cap S$  es una relación de  $\mathcal{W}$ . Se desconoce si el subconjunto de relaciones *fuertemente preconvexas* es cerrado bajo la operación de composición, por tanto no se puede afirmar que este conjunto sea una subclase del RA.

El problema de la consistencia de una red de restricciones para todas las subclases anteriores es resoluble en tiempo polinomial mediante el algoritmo PC o mediante un algoritmo de camino consistencia débil (usa una aproximación convexa de la composición) para el caso c). Además, se cumple la siguiente relación de inclusión propia entre los subconjuntos tratables anteriores: a)  $\subset$  b)  $\subset$  c). El conjunto de relaciones fuertemente preconvexas constituye el subconjunto tratable, que incluye a las 169 relaciones básicas, más amplio identificado hasta la fecha para el álgebra de rectángulos, aunque sigue siendo una cuestión abierta si es maximal y cerrado bajo la operación de composición.

En [BCdC02], Balbiani *et ál.* estudian la generalización del álgebra de intervalos y del álgebra de rectángulos para cualquier dimensión  $p \geq 1$  a la que llaman *álgebra de bloques*, donde el conjunto de relaciones básicas está formado por las relaciones que pertenecen al

producto cartesiano  $\underbrace{\mathcal{B}_{ia} \times \cdots \times \mathcal{B}_{ia}}_{p \text{ veces}}$ .

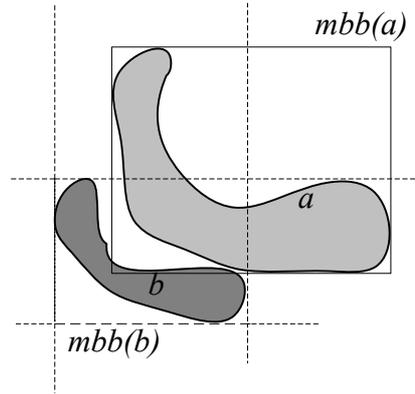


Figura 4.2: Ejemplo de relación cardinal rectangular.  $mbb(a) B:N:NE:E mbb(b)$ .

## 4.2. El Modelo DCR y el Álgebra de Rectángulos

En el capítulo anterior, Sección 3.1, se definían los distintos tipos de relaciones cardinales direccionales, las operaciones comunes entre ellas y el concepto de satisfacibilidad de restricciones con relaciones cardinales. Las relaciones cardinales se clasificaban según el dominio de las regiones.

Llamábamos  $\mathcal{B}_{rec}$  al conjunto de *relaciones cardinales rectangulares básicas*, que son las que se pueden dar entre dos rectángulos mínimos  $mbb(a)$  y  $mbb(b)$ , siendo  $a, b$  regiones regulares cualesquiera. Estas relaciones se definen siempre entre rectángulos de lados paralelos a los ejes del plano. Al dominio de estos rectángulos lo llamábamos  $REC$ . Hay un total de 36 relaciones en  $\mathcal{B}_{rec}$ , que son las siguientes:

$\{B, S, SW, NW, N, NE, E, SE, S:SW, B:W, NW:N, N:NE, B:E, S:SE, SW:W, B:S, E:SE, W:NW, B:N, NE:E, S:SW:SE, NW:N:NE, B:W:E, B:S:N, SW:W:NW, NE:E:SE, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N, B:S:N:NE:E:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$ .

Al considerar las regiones aproximadas por sus rectángulos mínimos se tiene que la relación cardinal  $r$  entre  $mbb(a)$  y  $mbb(b)$  no tiene por qué coincidir con la relación cardinal  $r'$  entre la región primaria  $a$  y la de referencia  $b$ , como se puede observar en el Ejemplo 4.1.

**Ejemplo 4.1.** La Figura 4.2 muestra dos regiones  $a$  y  $b$  tales que  $a B:N:E b$ , pero la relación existente entre  $mbb(a)$  y  $mbb(b)$  es  $mbb(a) B:N:NE:E mbb(b)$ .

Las relaciones cardinales rectangulares se introducen en [SK04] para calcular la composición débil de relaciones cardinales. Nosotros introducimos el modelo DCR como un cálculo para razonamiento cualitativo que considera el *álgebra de restricciones cardinales*

rectangulares. Este álgebra viene dada por  $(2^{\mathcal{B}_{rec}}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, \mathcal{B}_{rec}, \circ_w, inv)$ , formada por el álgebra booleana con conjunto de relaciones  $2^{\mathcal{B}_{dom}}$ , junto con las operaciones de composición débil ( $\circ_w$ ) e inversa débil ( $inv$ ), que son las mismas del modelo DC pero restringidas a relaciones del conjunto  $2^{\mathcal{B}_{rec}}$ .

En el resto de la sección investigamos la conexión entre el modelo DCR y el álgebra de rectángulos. Decíamos en la Sección 4.1 que el RA considera que las relaciones se definen sobre el conjunto de rectángulos de lados paralelos a los ejes del plano, que coincide por tanto con el dominio  $REC$  considerado para las relaciones cardinales rectangulares. Aunque los conjuntos de relaciones en el modelo DCR y en RA no son las mismas, el hecho de que una restricción en uno de los modelos sea satisficible implica que una restricción en el otro también lo es. Analizamos a continuación cuándo se dan dichas implicaciones y las consecuencias que de ellas se derivan.

### 4.2.1. De Relaciones Cardinales Rectangulares a Relaciones del Álgebra de Rectángulos

Sabemos que las relaciones básicas del álgebra de rectángulos son de la forma  $r \equiv (r_x, r_y)$ , donde  $r_x$  es la  $x$ -proyección de  $r$ ,  $r_y$  es la  $y$ -proyección y ambas proyecciones son relaciones básicas del álgebra de intervalos. En total hay  $13 \times 13$  relaciones básicas en el conjunto  $\mathcal{B}_{ra}$  de relaciones básicas de RA. Ampliamos la tabla de la Figura 4.1, que muestra ejemplos de rectángulos para cada una de las relaciones básicas de RA, con información adicional sobre la relación cardinal básica entre cada par de rectángulos. Así pues, mostramos en la Figura 4.3 una tabla con una fila por cada  $y$ -proyección y una columna por cada  $x$ -proyección de una relación de RA y cada entrada  $T[r_y, r_x]$  de la tabla contiene dos rectángulos representativos  $\alpha, \beta$  tal que  $\alpha (r_x, r_y) \beta$  y además se incluye la relación cardinal rectangular básica  $r_c$  tal que  $\alpha r_c \beta$ .

A partir de los ejemplos representativos mostrados en la tabla podemos comprobar que para cada relación básica  $(r_x, r_y)$  de RA existe una única relación básica  $r_c$  de DCR tal que  $a (r_x, r_y) b \Rightarrow a r_c b$ , para cualquier par de rectángulos  $a, b \in REC$ . La implicación anterior es equivalente a decir que  $(r_x, r_y) \subseteq r_c$ , considerando que las relaciones son conjuntos de pares de rectángulos. También podemos comprobar a partir de la tabla que una misma relación básica de DCR contiene a los pares de rectángulos de varias relaciones básicas de RA. Por tanto la inclusión anterior es propia, esto es,  $(r_x, r_y) \subset r_c$ .

Teniendo en cuenta estas observaciones definimos una función  $T_r$  que permite ‘traducir’ una relación básica  $r_c$  del modelo DCR en una relación disyuntiva de RA de la siguiente forma:

	b	m	o	fi	di	s	e	si	d	f	oi	mi	bi
bi	NW 	NW 	NW:N 	NW:N 	NW:N:NE 	N 	N 	N:NE 	N 	N 	N:NE 	NE 	NE 
mi	NW 	NW 	NW:N 	NW:N 	NW:N:NE 	N 	N 	N:NE 	N 	N 	N:NE 	NE 	NE 
oi	NW:W 	NW:W 	NW:N:W:B 	NW:N:W:B 	NW:W:B: N:NE:E 	N:B 	N:B 	N:B:NE:E 	N:B 	N:B 	N:B:NE:E 	NE:E 	NE:E 
si	NW:W 	NW:W 	NW:N:W:B 	NW:N:W:B 	NW:W:B: N:NE:E 	N:B 	N:B 	N:B:NE:E 	N:B 	N:B 	N:B:NE:E 	NE:E 	NE:E 
di	NW:W:SW 	NW:W:SW 	NW:N:W: B:SW:S 	NW:N:W: B:SW:S 	U 	N:B:S 	N:B:S 	N:B:S: NE:E:SE 	N:B:S 	N:B:S 	N:B:S: NE:E:SE 	NE:E:SE 	NE:E:SE 
f	W 	W 	W:B 	W:B 	W:B:E 	B 	B 	B:E 	B 	B 	B:E 	E 	E 
e	W 	W 	W:B 	W:B 	W:B:E 	B 	B 	B:E 	B 	B 	B:E 	E 	E 
fi	W:SW 	W:SW 	W:B:SW:S 	W:B:SW:S 	W:B:E: SW:S:SE 	B:S 	B:S 	B:E:S:SE 	B:S 	B:S 	B:E:S:SE 	E:SE 	E:SE 
d	W 	W 	W:B 	W:B 	W:B:E 	B 	B 	B:E 	B 	B 	B:E 	E 	E 
s	W 	W 	W:B 	W:B 	W:B:E 	B 	B 	B:E 	B 	B 	B:E 	E 	E 
o	W:SW 	W:SW 	W:B:SW:S 	W:B:SW:S 	W:B:SW:S 	B:S 	B:S 	E:B:S:SE 	B:S 	B:S 	E:B:S:SE 	E:SE 	E:SE 
m	SW 	SW 	SW:S 	SW:S 	SW:S:SE 	S 	S 	S:SE 	S 	S 	S:SE 	SE 	SE 
b	SW 	SW 	SW:S 	SW:S 	SW:S:SE 	S 	S 	S:SE 	S 	S 	S:SE 	SE 	SE 

Figura 4.3: Relaciones básicas de RA y DCR.

$$\begin{aligned}
 T_r : \mathcal{B}_{rec} &\longrightarrow 2^{\mathcal{B}_{ra}} \\
 T_r(r_c) &= \{r \in \mathcal{B}_{ra} \mid r \subset r_c\}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Haciendo un análisis de todos los casos mostrados en la Tabla 4.3 obtenemos  $T_r(r_c)$ , para cualquier  $r_c \in \mathcal{B}_{rec}$  según se indica en la Tabla 4.1.

Como se puede observar a partir de esta tabla, para cada relación básica  $r_c$  de DCR la relación disyuntiva  $T_r(r_c)$  se corresponde con el producto cartesiano de dos relaciones disyuntivas del álgebra de intervalos IA. Así pues  $T_r(r_c) = K_i \times K_j$ , donde  $K_i, K_j$  son una de las siguientes seis relaciones, que agrupamos en el conjunto  $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6\}$ :

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \{m, b\}, & K_2 &= \{fi, o\}, & K_3 &= \{d, s, f, e\} \\
 K_4 &= \{di\}, & K_5 &= \{si, oi\}, & K_6 &= \{mi, bi\}.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Una vez que sabemos traducir adecuadamente cada relación cardinal rectangular básica, extendemos la función  $T_r$  para obtener la traducción de cualquier relación cardinal rectangular:

$$\begin{aligned} T_r : 2^{\mathcal{B}_{rec}} &\longrightarrow 2^{\mathcal{B}_{ra}} \\ T_r(\{r_1, \dots, r_m\}) &= \bigcup_{i=1}^m T_r(r_i). \end{aligned} \quad (4.3)$$

**Ejemplo 4.2.** Consideremos la relación cardinal  $R = \{N, NE\}$ . Consultando la Tabla 4.1 se obtiene la traducción de cada relación básica de  $R$  y a partir de ahí tenemos que  $T_r(R) = T_r(N) \cup T_r(NE) = \{d, s, f, e\} \times \{mi, bi\} \cup \{mi, bi\} \times \{mi, bi\} = K_3 \times K_6 \cup K_6 \times K_6$ .

Puesto que cada elemento de  $\mathcal{K} \times \mathcal{K} = \mathcal{K}^2$  es la imagen de una relación básica de DCR, a partir de la definición de  $T_r$  en la Ecuación (4.3) podemos deducir que  $2^{\mathcal{K}^2}$  es el conjunto imagen de  $T_r$ . Además,  $\mathcal{K}^2$  es un subconjunto propio del conjunto  $2^{\mathcal{B}_{ra}}$  de todas las relaciones del álgebra de rectángulos, ya que no toda relación de  $2^{\mathcal{B}_{ra}}$  resulta de la traducción de una relación cardinal rectangular. Las relaciones cardinales rectangulares únicamente reflejan relaciones de dirección y orientación entre rectángulos y pueden utilizarse para abstraerse de las restricciones topológicas y de otras restricciones geométricas sobre los límites de los rectángulos, como si se tocan o están alineados verticalmente, etc. Por lo tanto, el modelo DCR es conceptual y algebraicamente más simple que el álgebra de rectángulos, ya que parte de 36 relaciones básicas, en lugar de 169 y consecuentemente el número total de relaciones es mucho menor en el modelo DCR.

El siguiente lema muestra que una restricción con relaciones cardinales rectangulares es satisficible si y sólo si la restricción con la relación traducida según  $T_r$  es satisficible.

**Lema 4.1.** Para toda relación cardinal  $R \in 2^{\mathcal{B}_{rec}}$  se cumple que  $R$  y  $T_r(R)$  contienen los mismos pares de rectángulos. Como consecuencia  $a R b \Leftrightarrow a T_r(R) b$ .

### **Demostración.**

Comprobamos que  $R$  y  $T_r(R)$  son en realidad la misma relación, que se representa con símbolos distintos en cada modelo. En efecto, dos pares de rectángulos  $(\alpha, \beta) \in R$  si y sólo si  $(\alpha, \beta) \in r_i$ , para alguna relación  $r_i$  de  $R$ . Según la Ecuación (4.1),  $T_r(r_i) = \{r \in \mathcal{B}_{ra} \mid r \subset r_i\}$ . Cada par de rectángulos  $(\alpha, \beta) \in r_i$  está incluido también en alguna relación  $r \in \mathcal{B}_{ra}$ , por ser  $\mathcal{B}_{ra}$  un conjunto exhaustivo de relaciones. Al considerar que  $T_r(r_i)$  contiene todas las relaciones básicas de  $\mathcal{B}_{ra}$  tales que  $r \subset r_i$  resulta que la relación traducida  $T_r(r_i)$  contiene exactamente los mismos pares que  $r_i$ . Por tanto, como conjuntos de pares de rectángulos  $T_r(R) = R$ , ya que por la Ecuación (4.3) tenemos  $T_r(R) = \bigcup_{i=1}^m T_r(r_i)$ .  $\square$

El Lema 4.1 resulta de gran utilidad a la hora de decidir la consistencia de una red de relaciones cardinales rectangulares. Con ese objetivo en mente vamos a ver cómo se puede traducir una red de restricciones binarias en el modelo DCR a una red equivalente

$r_c$ : relación básica de DCR	$T_r(r_c)$ : relación disyuntiva de RA	$K_i \times K_j$
$B$	$\{d, s, f, e\} \times \{d, s, f, e\}$	$K_3 \times K_3$
$S$	$\{d, s, f, e\} \times \{m, b\}$	$K_3 \times K_1$
$N$	$\{d, s, f, e\} \times \{mi, bi\}$	$K_3 \times K_6$
$E$	$\{mi, bi\} \times \{d, s, f, e\}$	$K_6 \times K_3$
$W$	$\{m, b\} \times \{d, s, f, e\}$	$K_1 \times K_3$
$NE$	$\{mi, bi\} \times \{mi, bi\}$	$K_6 \times K_6$
$NW$	$\{m, b\} \times \{mi, bi\}$	$K_1 \times K_6$
$SE$	$\{mi, bi\} \times \{m, b\}$	$K_6 \times K_1$
$SW$	$\{m, b\} \times \{m, b\}$	$K_1 \times K_1$
$S:SW$	$\{fi, o\} \times \{m, b\}$	$K_2 \times K_1$
$S:SE$	$\{si, oi\} \times \{m, b\}$	$K_5 \times K_1$
$NW:N$	$\{fi, o\} \times \{mi, bi\}$	$K_2 \times K_6$
$N:NE$	$\{si, oi\} \times \{mi, bi\}$	$K_5 \times K_6$
$B:W$	$\{fi, o\} \times \{d, s, f, e\}$	$K_2 \times K_3$
$B:E$	$\{si, oi\} \times \{d, s, f, e\}$	$K_5 \times K_3$
$B:S$	$\{d, s, f, e\} \times \{fi, o\}$	$K_3 \times K_2$
$B:N$	$\{d, s, f, e\} \times \{si, oi\}$	$K_3 \times K_5$
$W:SW$	$\{m, b\} \times \{fi, o\}$	$K_1 \times K_2$
$W:NW$	$\{m, b\} \times \{si, oi\}$	$K_1 \times K_5$
$E:SE$	$\{mi, bi\} \times \{fi, o\}$	$K_6 \times K_2$
$NE:E$	$\{mi, bi\} \times \{si, oi\}$	$K_6 \times K_5$
$S:SW:SE$	$\{di\} \times \{m, b\}$	$K_4 \times K_1$
$NW:N:NE$	$\{di\} \times \{mi, bi\}$	$K_4 \times K_6$
$B:W:E$	$\{di\} \times \{d, s, f, e\}$	$K_4 \times K_3$
$B:S:N$	$\{d, s, f, e\} \times \{di\}$	$K_3 \times K_4$
$SW:N:NW$	$\{m, b\} \times \{di\}$	$K_1 \times K_4$
$NE:E:SE$	$\{mi, bi\} \times \{di\}$	$K_6 \times K_4$
$B:S:SW:W$	$\{o, fi\} \times \{o, fi\}$	$K_2 \times K_2$
$B:W:NW:N$	$\{o, fi\} \times \{si, oi\}$	$K_2 \times K_5$
$B:S:E:SE$	$\{si, oi\} \times \{o, fi\}$	$K_5 \times K_2$
$B:N:NE:E$	$\{si, oi\} \times \{si, oi\}$	$K_5 \times K_5$
$B:S:SW:W:NW:N$	$\{o, fi\} \times \{di\}$	$K_2 \times K_4$
$B:S:N:NE:E:SE$	$\{si, oi\} \times \{di\}$	$K_5 \times K_4$
$B:S:SW:W:E:SE$	$\{di\} \times \{fi, o\}$	$K_4 \times K_2$
$B:W:NW:N:NE:E$	$\{di\} \times \{si, oi\}$	$K_4 \times K_5$
$B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE$	$\{di\} \times \{di\}$	$K_4 \times K_4$

Tabla 4.1: Traducción de relaciones básicas de DCR a relaciones de RA

en el modelo RA. Sea  $\mathfrak{N} = (\mathfrak{V}, \mathfrak{C})$  una red de DCR, es decir, una red con un conjunto de variables  $\mathfrak{V}$  que toman valores en  $REC$  y un conjunto de restricciones binarias  $\mathfrak{C}$  con relaciones del conjunto  $2^{\mathcal{B}^{rec}}$ . Podemos extender la función  $T_r$  a redes de restricciones, de modo que  $T_r(\mathfrak{N}) = (T_r(\mathfrak{V}), T_r(\mathfrak{C}))$  es una red de RA dada por:

$$T_r(\mathfrak{N}) = \begin{cases} T_r(\mathfrak{V}) = \mathfrak{V} \\ T_r(\mathfrak{C}) = \bigcup_{aRb \in \mathfrak{C}} aT_r(R)b. \end{cases} \quad (4.4)$$

**Teorema 4.1.** *Sea  $\mathfrak{N}$  una red de DCR.  $\mathfrak{N}$  es consistente si y sólo si  $T_r(\mathfrak{N})$  es consistente.*

### Demostración.

Sabemos que  $\mathfrak{N} = (\mathfrak{V}, \mathfrak{C})$ , con  $\mathfrak{V} = \{a_1, \dots, a_n\}$ , es consistente si y sólo si existe una asignación de rectángulos a variables que satisface todas las restricciones  $a_i R a_j$  del conjunto  $\mathfrak{C}$ . Por el Lema 4.1,  $a_i R a_j$  si y sólo si  $a_i T_r(R) a_j$ . Por lo tanto,  $\mathfrak{N}$  es consistente si y sólo si  $T_r(\mathfrak{N})$  es consistente.  $\square$

El Teorema 4.1 muestra que existe un modo de razonar con relaciones de DCR mediante la traducción a relaciones de RA. De esta forma, los algoritmos para detectar la consistencia de una red de RA se puede aplicar para decidir la consistencia de una red de DCR, una vez que ésta última se ha traducido a una red de relaciones del álgebra de rectángulos. Volveremos a este resultado en la Sección 4.3, para identificar una subclase de modelo DCR para la que el problema de la consistencia es tratable.

## 4.2.2. De Relaciones del Álgebra de Rectángulos a Relaciones Cardinales Rectangulares

Siguiendo con la conexión entre relaciones del modelo DCR y relaciones de RA, estamos interesados ahora en obtener una función inversa de  $T_r$ , para traducir cualquier relación de RA a una relación de DCR. Sin embargo  $T_r$  no es invertible, ya que  $T_r : 2^{\mathcal{B}^{rec}} \longrightarrow 2^{\mathcal{B}^{ra}}$  no es biyectiva. En ese caso tendremos en cuenta la relación cardinal rectangular que mejor aproxime a una relación de RA. Para ello definimos el concepto de cierre cardinal de una relación del álgebra de rectángulos.

**Definición 4.1.** *Llamamos cierre cardinal de una relación  $R \in 2^{\mathcal{B}^{ra}}$  a la menor relación cardinal rectangular  $R_c \in 2^{\mathcal{B}^{rec}}$  que contiene a todos los pares de rectángulos de  $R$ .*

**Proposición 4.1.** *La función  $T_c : 2^{\mathcal{B}^{ra}} \longrightarrow 2^{\mathcal{B}^{rec}}$ , definida recursivamente como:*

$$T_c(R) = \begin{cases} T_r^{-1}(K_i \times K_j) & \text{si } (R \in \mathcal{B}_{ra}) \wedge (R \in K_i \times K_j), K_i \times K_j \in \mathcal{K}^2 \\ T_c(r_1) \cup \dots \cup T_c(r_m) & \text{si } R = \{r_1 \dots, r_m\}, r_i \in \mathcal{B}_{ra} \end{cases}$$

obtiene el cierre cardinal de  $R$ , para cada  $R \in 2^{\mathcal{B}_{ra}}$ .

**Demostración.**

En primer lugar observamos que el conjunto  $\mathcal{K}$  de las seis relaciones  $K_i$  de IA mostradas en la Ecuación (4.2) es una partición del conjunto  $\mathcal{B}_{ia}$  de relaciones básicas de IA. Luego  $\mathcal{K}^2$  es una partición de  $\mathcal{B}_{ra}$  y por tanto para cada relación básica  $r \equiv (r_x, r_y)$  de RA existe exactamente una relación básica  $r_c$  de DCR tal que  $T_r(r_c) = K_i \times K_j$ , donde  $K_i \times K_j \in \mathcal{K}^2$  y  $(r_x, r_y) \in K_i \times K_j$  (ver la Tabla 4.1). Está claro que  $r_c = T_r^{-1}(K_i \times K_j)$  es el cierre cardinal de  $r$ , ya que es la relación cardinal rectangular más pequeña que contiene los pares de  $r$ . Para el caso de una relación disyuntiva de RA, tal como  $R = \{r_1 \dots, r_m\}$ , debemos considerar la menor relación cardinal rectangular que contiene a todos los pares de todas las relaciones básicas de  $R$  y será la unión del cierre cardinal de cada relación básica. Así es como se indica en el caso recursivo de la definición de  $T_c$ . Por tanto la función  $T_c$  calcula correctamente el cierre cardinal de cualquier relación del álgebra de rectángulos.  $\square$

**Ejemplo 4.3.** Sea la relación  $R = \{(d, mi), (bi, bi)\}$ . Calculamos  $T_c(R) = T_c((d, mi)) \cup T_c((bi, bi)) = T_r^{-1}(K_3 \times K_6) \cup T_r^{-1}(K_6 \times K_6)$ , ya que  $(d, mi) \in \{d, s, f, e\} \times \{mi, bi\} \equiv K_3 \times K_6$  y  $(bi, bi) \in \{mi, bi\} \times \{mi, bi\} \equiv K_6 \times K_6$ . Según la Tabla 4.1  $T_r(N) = K_3 \times K_6$  y  $T_r(NE) = K_6 \times K_6$ , así que  $T_c(R) = \{N, NE\}$ .

**Lema 4.2.** Para toda relación  $R \in 2^{\mathcal{B}_{ra}}$  y todo par  $(a, b) \in REC^2$  se cumple que  $a R b \Rightarrow a T_c(R) b$ .

**Demostración.**

Es consecuencia inmediata de la definición de cierre cardinal. Tenemos que  $T_c(R)$  obtiene la menor relación cardinal que contiene los pares de  $R$  (Proposición 4.1). Luego  $R \subseteq T_c(R)$  y por tanto si  $a R b$  (que equivale a  $(a, b) \in R$ ) entonces  $a T_c(R) b$  (que equivale a  $(a, b) \in T_c(R)$ ).  $\square$

La función  $T_c$  se puede extender a redes de RA, de modo que dada  $\mathfrak{N} = (\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ ,

$$T_c(\mathfrak{N}) = \begin{cases} T_c(\mathfrak{V}) = \mathfrak{V} \\ T_c(\mathfrak{E}) = \bigcup_{aRb \in \mathfrak{E}} a T_c(R) b. \end{cases} \quad (4.5)$$

Obtener  $T_c(\mathfrak{N})$  tiene su utilidad para calcular la red mínima equivalente a una red de relaciones cardinales rectangulares. Trataremos el problema del cálculo de la red mínima en la Sección 4.4.2.

Otra posible aplicación de la función  $T_c$  está en el cálculo de las operaciones de composición débil e inversa del álgebra del modelo DCR. En [SK04] se propone un método para

calcular la composición de dos relaciones cardinales arbitrarias y [SK05] se indica cómo calcular la inversa. Los métodos propuestos son complicados, por lo que aquí proponemos una forma de simplificar estos cálculos en el modelo DCR usando las funciones  $T_c$  y  $T_r$ .

**Proposición 4.2.** *Las operaciones de composición e inversa débil en el modelo DCR se pueden calcular como:*

$$\begin{aligned} R_1 \circ_w R_2 &= T_c(T_r(R_1) \circ T_r(R_2)), \forall R_1, R_2 \in 2^{\mathcal{B}_{rec}} \\ inv(R) &= T_c(T_r(R)^{-1}), \forall R \in 2^{\mathcal{B}_{rec}}. \end{aligned}$$

### Demostración.

Sabemos que si  $R$  es una relación cardinal rectangular entonces  $T_r(R)$  es la misma relación que  $R$  en el sentido de que ambas contienen los mismos pares de rectángulos (ver Lema 4.1). Por tanto  $T_r(R_1) \circ T_r(R_2) = R_1 \circ R_2$ . Lo que ocurre es que la composición  $R_1 \circ R_2$  no es una operación cerrada considerando el conjunto de relaciones cardinales rectangulares  $2^{\mathcal{B}_{rec}}$ , como comentábamos en la Sección 3.1. Esto quiere decir que la relación  $R_1 \circ R_2$  contiene un conjunto de pares de rectángulos que no se corresponde con ninguna relación de  $2^{\mathcal{B}_{rec}}$ . La composición débil obtiene la menor relación cardinal rectangular que contiene (estrictamente) a  $R_1 \circ R_2$ . Por tanto  $R_1 \circ_w R_2$  coincide con  $T_c(T_r(R_1) \circ T_r(R_2))$ , ya que  $T_c$  obtiene la menor relación cardinal rectangular que contiene a todos los pares de rectángulos de  $T_r(R_1) \circ T_r(R_2)$ , que es lo mismo que decir que contiene a todos los pares de  $R_1 \circ R_2$ .

Para la operación de inversa débil la idea es parecida. Tenemos que  $T_r(R)$  es la misma relación que  $R$ , luego  $R^{-1}$  coincide como conjunto de pares de rectángulos con  $T_r(R)^{-1}$ . Ahora bien,  $R^{-1}$  tampoco es una operación cerrada en  $2^{\mathcal{B}_{rec}}$  y la menor relación cardinal rectangular que contiene a  $R^{-1}$  viene dada por  $inv(R)$ . Por tanto, como  $T_c(T_r(R)^{-1})$  denota también a la menor relación cardinal que contiene a todos los pares de  $R^{-1}$ , debe ser  $inv(R) = T_c(T_r(R)^{-1})$ .  $\square$

Para utilizar la composición débil de forma práctica, se debe pre-calcular una tabla de  $36 \times 36$  entradas como se indica en la Proposición 4.2, para almacenar el resultado de la operación aplicada a relaciones básicas de DCR. Una vez que se conoce la inversa de cada relación básica, para relaciones disyuntivas es mejor obtener  $R_1 \circ_w R_2$  como  $\bigcup_{r_i \in R_1, r_j \in R_2} r_i \circ_w r_j$  en lugar de calcular  $T_c(T_r(R_1) \circ T_r(R_2))$ . El cálculo de la composición de relaciones disyuntivas como unión composiciones de relaciones básicas se puede optimizar como se indica en [LR97] para el caso de álgebras con un número muy grande de relaciones básicas. Se puede aplicar una estrategia similar para el caso de la inversa débil, aunque el cálculo de esta operación es menos costoso.

### 4.3. La Subclase de Relaciones Cardinales Rectangulares Convexas

En esta sección identificamos un subconjunto de relaciones del modelo DCR que es cerrado para las operaciones del álgebra subyacente. En secciones posteriores comprobaremos que los problemas de decidir la consistencia y el cálculo de la red mínima pueden resolverse en tiempo polinomial cuando se considera esta subclase del modelo DCR y resultan ser problemas intratables con el conjunto completo de relaciones cardinales rectangulares.

#### 4.3.1. Retículo del Modelo DCR

En el álgebra de intervalos y de rectángulos la representación de las relaciones básicas mediante un retículo tiene interés para identificar las *relaciones convexas*, que forman subclases tratables en ambos modelos. Ahora comprobamos cómo se puede identificar un retículo en el conjunto de relaciones básicas  $\mathcal{B}_{rec}$  de DCR a partir del retículo de relaciones básicas del álgebra de intervalos y su extensión a rectángulos.

A partir de la Tabla 4.1 podemos observar que la traducción de cualquier relación básica de DCR se expresa como el producto cartesiano de dos relaciones del álgebra de intervalos, esto es,  $T_r(r) = K_i \times K_j$ , donde  $K_i, K_j \in \mathcal{K} = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6\}$ , siendo

$$\begin{aligned} K_1 &= \{m, b\}, & K_2 &= \{fi, o\}, & K_3 &= \{d, s, f, e\} \\ K_4 &= \{di\}, & K_5 &= \{si, oi\}, & K_6 &= \{mi, bi\}. \end{aligned}$$

El conjunto  $\mathcal{K}$  es una partición del conjunto  $\mathcal{B}_{ia}$  de relaciones básicas de IA y podemos establecer un *orden parcial en el conjunto*  $\mathcal{K}$  inducido por el orden parcial  $\leq_{ia}$  definido para  $\mathcal{B}_{ia}$  (ver Sección 2.3.2), de la siguiente manera:

$$\forall K_i, K_j \in \mathcal{K} : K_i \leq_{\mathcal{K}} K_j \Leftrightarrow r_m \leq_{ia} r_n, \forall r_m \in K_i, r_n \in K_j.$$

El orden parcial  $\leq_{\mathcal{K}}$  define un retículo  $(\mathcal{K}, \leq_{\mathcal{K}})$  mostrado en la Figura 4.4, que resulta ser una versión condensada del retículo  $(\mathcal{B}_{ia}, \leq_{ia})$  del álgebra de intervalos. En lugar de tener un nodo por cada relación básica de IA, tenemos un nodo que agrupa las relaciones básicas de IA que pertenecen a la misma parte en  $\mathcal{K}$  (ver la Figura 4.5-(a)) y además cada  $K \in \mathcal{K}$  resulta ser un intervalo del retículo  $(\mathcal{B}_{ia}, \leq_{ia})$ . Recordamos que un intervalo  $[r^-, r^+]$  en un retículo de relaciones básicas de IA contiene a todas las relaciones básicas  $r$  tales que  $r^- \leq_{ia} r \leq_{ia} r^+$ . Como vemos, cada relación de  $\mathcal{K}$  contiene exactamente una relación básica de dimensión 2 del álgebra de intervalos:  $b, bi, o, oi, d, di$ . Por tanto cualquier

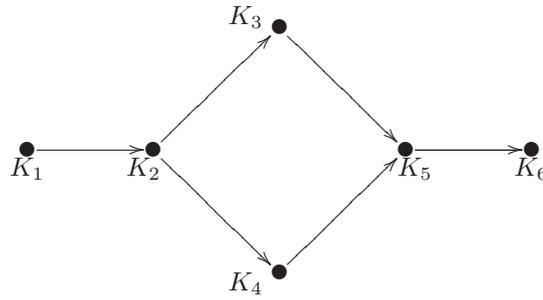


Figura 4.4: El retículo  $(\mathcal{K}, \leq_{\mathcal{K}})$ .

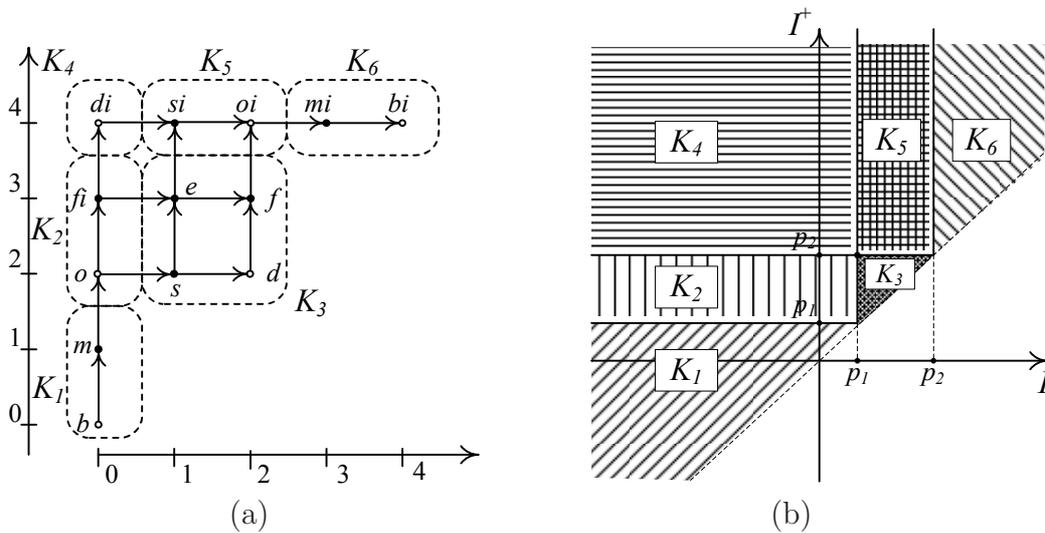


Figura 4.5: Agrupación de relaciones básicas en el retículo  $(\mathcal{B}_{ia}, \leq_{ia})$  y en el plano.

relación de  $\mathcal{K}$  es de dimensión 2, puesto que la dimensión de una relación disyuntiva es la máxima dimensión de sus relaciones básicas [Lig98b].

La representación en el plano de las relaciones básicas de IA, que mostrábamos en la Figura 2.4 de la Sección 2.3.2, puede adaptarse para considerar sólo las 6 regiones correspondientes a la partición  $\mathcal{K}$  (ver la Figura 4.5-(b)). Se puede observar también aquí como cada región es de dimensión 2, ya que las regiones limítrofes correspondientes a las relaciones básicas de dimensión 1 en IA ahora están incluidas en una de las regiones de  $\mathcal{K}$ .

El retículo  $(\mathcal{B}_{ra}, \leq_{ra})$  de RA, se define a partir del orden del retículo de IA:

$$\forall (r_x, r_y), (r'_x, r'_y) \in \mathcal{B}_{ra} : (r_x, r_y) \leq_{ra} (r'_x, r'_y) \Leftrightarrow (r_x \leq_{ia} r'_x) \wedge (r_y \leq_{ia} r'_y).$$

Ahora consideramos el conjunto  $\mathcal{K}^2 = \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ . Este conjunto es una partición del conjunto

$\mathcal{B}_{ra}$  de relaciones básicas de RA y cada relación  $K_i \times K_j \in \mathcal{K}^2$  es de dimensión 4, puesto que contiene una relación básica de RA de dimensión 4. El orden parcial  $\leq_{\mathcal{K}}$  se puede extender a  $\mathcal{K}^2$  de forma análoga a como se extiende el orden parcial entre relaciones básicas de IA a relaciones básicas de RA:

$$\forall K_i \times K_j, K_m \times K_n \in \mathcal{K}^2 : K_i \times K_j \leq_{\mathcal{K}^2} K_m \times K_n \Leftrightarrow (K_i \leq_{\mathcal{K}} K_m) \wedge (K_j \leq_{\mathcal{K}} K_n).$$

El orden parcial  $\leq_{\mathcal{K}^2}$  define una versión condensada del retículo  $(\mathcal{B}_{ra}, \leq_{ra})$  de RA. Cada nodo del retículo  $(\mathcal{K}^2, \leq_{\mathcal{K}^2})$  agrupa las relaciones básicas de RA que pertenecen a la misma parte en  $\mathcal{K}^2$  y cada  $K_i \times K_j \in \mathcal{K}^2$  resulta ser un intervalo del retículo  $(\mathcal{B}_{ra}, \leq_{ra})$ .

Por último, a partir del orden en  $\mathcal{K}^2$  establecemos un *orden parcial en el conjunto*  $\mathcal{B}_{rec}$  de relaciones básicas del modelo DCR:

$$\forall r, r' \in \mathcal{B}_{rec} : r \leq_{rec} r' \Leftrightarrow T_r(r) \leq_{\mathcal{K}^2} T_r(r'). \quad (4.6)$$

El retículo  $(\mathcal{B}_{rec}, \leq_{rec})$  del modelo DCR se puede representar por un grafo de 36 nodos, donde cada nodo se corresponde con una relación básica del conjunto  $\mathcal{B}_{rec}$  y se incluye un arco de  $r$  a  $r'$  si y sólo si  $r \leq_{\mathcal{B}_{rec}} r'$  (ver la Figura 4.6). El retículo  $(\mathcal{B}_{rec}, \leq_{rec})$  resulta ser isomorfo a  $(\mathcal{K}^2, \leq_{\mathcal{K}^2})$ . En efecto, puesto que la traducción de cualquier relación  $r \in \mathcal{B}_{rec}$  viene dada por  $T_r(r) = K_i \times K_j$ , donde  $K_i, K_j \in \mathcal{K}^2$ , entonces resulta que por cada nodo del grafo de  $(\mathcal{B}_{rec}, \leq_{rec})$  tenemos exactamente un nodo del grafo de  $(\mathcal{K}^2, \leq_{\mathcal{K}^2})$  y por cada arco de  $r$  a  $r'$  en el primer grafo tenemos un arco de  $T_r(r)$  a  $T_r(r')$  en el segundo, ya que el orden  $\leq_{rec}$  se define a partir del orden  $\leq_{\mathcal{K}^2}$  (ver Ecuación (4.6)). Por otra parte, como cada relación  $T_r(r) = K_i \times K_j$  es de dimensión 4, podemos considerar que todas las relaciones básicas y disyuntivas en el modelo DCR son de dimensión 4.

### 4.3.2. Relaciones Convexas de RA y DCR

Recordamos que una subclase tratable del álgebra de intervalos es la *subclase convexa* ( $C-IA$ ), que según Ligozat [Lig91] contiene a las relaciones convexas de IA. Cada relación convexa se corresponde con un intervalo del retículo  $(\mathcal{B}_{ia}, \leq_{ia})$  de IA. Extendiendo el concepto de relación convexa a dos dimensiones se define una relación convexa del álgebra de rectángulos como una relación que se corresponde con un intervalo del retículo  $(\mathcal{B}_{ra}, \leq_{ra})$  de RA. Decir que una relación  $R$  de RA es un intervalo del retículo  $(\mathcal{B}_{ra}, \leq_{ra})$  es equivalente a decir que  $R$  es el producto cartesiano de dos relaciones convexas del álgebra de intervalos, esto es,  $R = R_x \times R_y$ , donde  $R_x, R_y \in C-IA$ .

A continuación definimos las relaciones convexas dentro del modelo DCR de forma análoga a como se hace en IA y RA.

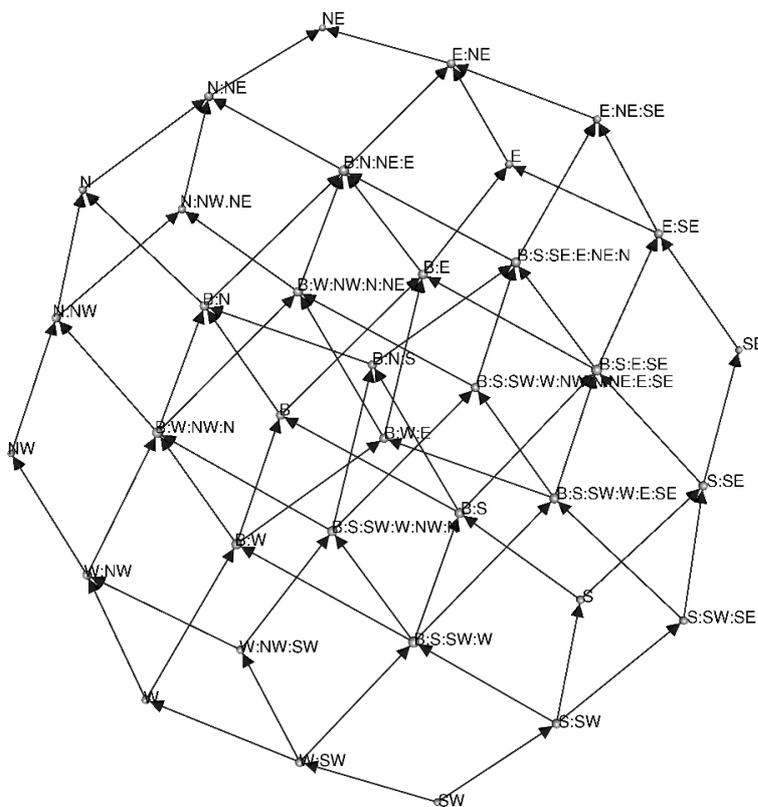


Figura 4.6: Retículo  $(\mathcal{B}_{rec}, \leq_{rec})$ .

**Definición 4.2.**  $R$  es una relación convexa de DCR si  $R$  se corresponde con un intervalo del retículo  $(\mathcal{B}_{rec}, \leq_{rec})$  del modelo DCR.

Puesto que sabemos que toda relación de DCR contiene los mismos pares de rectángulos que la relación traducida al álgebra de rectángulos entonces resulta natural que el concepto de convexidad esté relacionado en ambos modelos.

**Lema 4.3.**  $R$  es una relación convexa de DCR si y sólo si  $T_r(R)$  es una relación convexa de RA. Equivalentemente,  $R$  es una relación convexa de DCR si y sólo si  $T_r(R)$  es el producto cartesiano de dos relaciones convexas de IA.

**Demostración.**

$R$  es una relación convexa del modelo DCR si, por definición, se corresponde con un intervalo en el retículo, es decir,  $R = [r^-, r^+]$  y este intervalo contiene todas las relaciones básicas  $r \in \mathcal{B}_{rec}$  tales que  $r^- \leq_{rec} r \leq_{rec} r^+$ . Puesto que el retículo  $(\mathcal{B}_{rec}, \leq_{rec})$  es isomorfo a

$(\mathcal{K}^2, \leq_{\mathcal{K}^2})$ , tenemos que  $[r^-, r^+]$  es un intervalo del primero si y sólo si  $[T_r(r^-), T_r(r^+)]$  es un intervalo del segundo. Al ser  $(\mathcal{K}^2, \leq_{\mathcal{K}^2})$  una versión condensada del retículo de RA, resulta que al considerar todas las relaciones básicas incluidas en alguna relación del intervalo  $[T_r(r^-), T_r(r^+)]$  se obtiene un intervalo del retículo  $(\mathcal{B}_{ra}, \leq_{ra})$  dado por  $[\min_{\leq_{ra}}\{T_r(r^-)\}, \max_{\leq_{ra}}\{T_r(r^+)\}]$ , donde  $\min_{\leq_{ra}}\{T_r(r^-)\}$  es la relación mínima según el orden  $\leq_{ra}$  de entre todas las relaciones básicas de  $T_r(r^-)$  y  $\max_{\leq_{ra}}\{T_r(r^+)\}$  denota la relación máxima de  $T_r(r^+)$ . Luego  $R = [r^-, r^+]$  si y sólo si  $T_r(R) = [\min_{\leq_{ra}}\{T_r(r^-)\}, \max_{\leq_{ra}}\{T_r(r^+)\}]$ . Por tanto  $R$  es convexa si y sólo si  $T_r(R)$  es convexa. Como consecuencia de la caracterización alternativa de relaciones convexas en RA, podemos afirmar que  $R$  es una relación convexa de DCR si y sólo si  $T_r(R)$  es el producto cartesiano de dos relaciones convexas de IA.  $\square$

**Ejemplo 4.4.** *Vamos a comprobar que la relación  $R = \{N, NE, N:NE\}$  es una relación cardinal rectangular convexa. Tenemos que  $T_r(R) = T_r(N) \cup T_r(NE) \cup T_r(N:NE) = \{d, s, f, e\} \times \{mi, bi\} \cup \{mi, bi\} \times \{mi, bi\} \cup \{si, oi\} \times \{mi, bi\}$ , o lo que es lo mismo  $T_r(R) = \{d, s, f, e, si, oi, mi, bi\} \times \{mi, bi\}$ . Luego  $T_r(R)$  es una relación convexa de RA puesto que coincide con el producto cartesiano de dos relaciones convexas de IA. Puede comprobarse que cada una es un intervalo del retículo  $(\mathcal{B}_{ia}, \leq_{ia})$  mostrado en la Figura 4.5-(a). Se puede comprobar también que  $T_r(R)$  se corresponde con el intervalo  $[(s, mi), (bi, bi)]$  del retículo  $(\mathcal{B}_{ra}, \leq_{ra})$ . Según el Lema 4.3 podemos afirmar que  $R$  es una relación convexa de DCR.*

**Lema 4.4.** *Si  $R$  es una relación convexa de RA entonces  $T_c(R)$  es una relación convexa de DCR.*

**Demostración.**

Puede ser que  $R \in 2^{\mathcal{K}^2}$ , o lo que es lo mismo, que  $R$  sea la imagen de una relación cardinal rectangular. En ese caso  $R = T_r(T_c(R))$  y por el Lema 4.3 tenemos que  $T_c(R)$  es convexa, puesto que  $T_r(T_c(R))$  lo es por hipótesis de partida. En otro caso  $R \subset T_r(T_c(R))$ . Como  $R$  es convexa entonces se corresponde con un intervalo  $[r^-, r^+]$  del retículo  $(\mathcal{B}_{ra}, \leq_{ra})$  y por definición  $T_c(R) = \bigcup_{r \in [r^-, r^+]} T_c(r)$ . Probamos que  $T_c(R) = [T_c(r^-), T_c(r^+)]$  y por tanto es convexa.

El orden  $\leq_{\mathcal{K}^2}$  depende en definitiva del orden de las relaciones básicas de RA incluidas en cada relación  $K_i \times K_j \in \mathcal{K}^2$ . Así que  $r^- \leq_{ra} r \leq_{ra} r^+$  si y sólo si  $T_r(T_c(r^-)) \leq_{\mathcal{K}^2} T_r(T_c(r)) \leq_{\mathcal{K}^2} T_r(T_c(r^+))$  y como el retículo  $(\mathcal{B}_{rec}, \leq_{rec})$  es isomorfo a  $(\mathcal{K}^2, \leq_{\mathcal{K}^2})$  se tiene que  $T_c(r^-) \leq_{rec} T_c(r) \leq_{rec} T_c(r^+)$ . De lo anterior se deduce que  $T_c(r) \in T_c(R) \Leftrightarrow T_c(r) \in [T_c(r^-), T_c(r^+)]$ , luego  $T_c(R) = [T_c(r^-), T_c(r^+)]$ .  $\square$

**Algoritmo** GENERA  $C$ -DCR

1.  $C$ -DCR  $\leftarrow \emptyset$
2. Para cada intervalo  $[K_i^-, K_i^+]$  en  $(\mathcal{K}, \leq_{\mathcal{K}})$  Hacer
3.     Para cada intervalo  $[K_j^-, K_j^+]$  en  $(\mathcal{K}, \leq_{\mathcal{K}})$  Hacer
4.          $R \leftarrow \emptyset$
5.         Para cada  $K_i \in [K_i^-, K_i^+]$  Hacer
6.             Para cada  $K_j \in [K_j^-, K_j^+]$  Hacer
7.                  $R \leftarrow R \cup T_r^{-1}(K_i \times K_j)$
8.             FinPara
9.         FinPara
10.          $C$ -DCR  $\leftarrow C$ -DCR  $\cup R$
11.     FinPara
12. FinPara

Figura 4.7: Algoritmo para generar el conjunto de relaciones convexas de DCR.

### 4.3.3. La Subclase Convexa del Modelo DCR

Es un hecho probado que el conjunto  $C$ -RA de relaciones convexas del álgebra de rectángulos, junto con las operaciones de intersección, composición e inversa, constituye una subclase tratable del álgebra de rectángulos [BCdC98]. Demostramos ahora que se llega a una conclusión análoga considerando el conjunto de relaciones cardinales rectangulares convexas.

Sea  $C$ -DCR el conjunto de todas las relaciones convexas del modelo DCR. Observamos primero que todas las relaciones básicas de  $\mathcal{B}_{rec}$  son convexas, ya que  $T_r(r) = K_i \times K_j$ , es una relación convexa de RA, puesto que cada  $K \in \mathcal{K}$  es una relación convexa de IA (es un intervalo de su retículo). Veamos ahora cuántas relaciones hay en el conjunto  $C$ -DCR. Puesto que  $R$  es convexa si y sólo si  $T_r(R)$  es convexa (Lema 4.3) y el retículo  $(\mathcal{B}_{rec}, \leq_{rec})$  es isomorfo a  $(\mathcal{K}^2, \leq_{\mathcal{K}^2})$ , entonces para saber cuántas relaciones convexas hay en  $C$ -DCR basta con saber cuántos intervalos hay en el retículo  $(\mathcal{K}^2, \leq_{\mathcal{K}^2})$ . Por otra parte, cada intervalo de  $(\mathcal{K}^2, \leq_{\mathcal{K}^2})$  es una relación convexa de RA que se corresponde con un producto cartesiano de intervalos del retículo  $(\mathcal{K}, \leq_{\mathcal{K}})$ .

El número de intervalos en  $(\mathcal{K}^2, \leq_{\mathcal{K}^2})$  será pues el cuadrado del número de intervalos en el retículo  $(\mathcal{K}, \leq_{\mathcal{K}})$ . Existen 20 intervalos en el retículo  $(\mathcal{K}, \leq_{\mathcal{K}})$  (ver Figura 4.4) y por tanto  $|C$ -DCR $| = 20 \times 20 + 1 = 401$ , incluyendo la relación vacía (en el Apéndice A.2 se enumeran todas las relaciones convexas de DCR). El número de relaciones convexas no vacías de IA es 83, y por lo tanto, hay  $83 \times 83 + 1 = 6890$  en el conjunto  $C$ -RA de relaciones convexas de RA. La Figura 4.7 muestra un algoritmo sencillo para generar el conjunto  $C$ -DCR basado en la definición de  $T_r$  y el Lema 4.3.

A continuación demostramos que el conjunto  $C$ -DCR de relaciones cardinales rectan-

gulares convexas, junto con las operaciones intersección, composición débil e inversa débil, es una subclase del álgebra del modelo DCR.

**Teorema 4.2.** *El conjunto C-DCR es cerrado bajo las operaciones de unión, intersección, inversa débil y composición débil.*

**Demostración.**

Intersección. Puesto que la función de transformación  $T_r$  sólo supone un renombramiento de relaciones y no un cambio en el conjunto de pares de rectángulos de  $T_r(R)$  con respecto a  $R$  (Lema 4.3), se deduce que  $T_r(R_1 \cap R_2) = T_r(R_1) \cap T_r(R_2)$ . Supongamos que  $R_1, R_2$  son relaciones de  $C$ -DCR. Entonces  $T_r(R_1), T_r(R_2)$  son relaciones de  $C$ -RA (Lema 4.3) y, además,  $T_r(R_1) \cap T_r(R_2)$  es una relación de  $C$ -RA, puesto que el conjunto  $C$ -RA es cerrado bajo la operación de intersección de relaciones. Así pues  $T_r(R_1 \cap R_2)$  es una relación convexa del álgebra de rectángulos, por lo que  $R_1 \cap R_2$  es una relación del conjunto  $C$ -DCR (Lema 4.3), como queríamos probar.

Composición débil. Por la Proposición 4.2,  $R_1 \circ_w R_2 = T_c(T_r(R_1) \circ T_r(R_2))$ . Como en el caso anterior, si  $R_1, R_2$  son relaciones de  $C$ -DCR entonces  $T_r(R_1), T_r(R_2)$  son también convexas y  $T_r(R_1) \circ T_r(R_2)$  es una relación de  $C$ -RA, puesto que el conjunto  $C$ -RA es cerrado bajo la operación de composición. Por último,  $T_c(T_r(R_1) \circ T_r(R_2))$ , que coincide con  $R_1 \circ_w R_2$ , es una relación del conjunto  $C$ -DCR, según se deduce del Lema 4.4.

Inversa débil. El caso es análogo al anterior teniendo en cuenta que  $inv(R) = T_c(T_r(R)^{-1})$  y que la inversa de una relación convexa del álgebra de rectángulos es una relación convexa.  $\square$

Del teorema anterior se deduce que el conjunto de relaciones convexas  $C$ -DCR junto con las operaciones de intersección, composición débil e inversa débil es una subclase del modelo DCR.

## 4.4. Tratabilidad de la Subclase Convexa de DCR

La subclase convexa del álgebra de rectángulos es tratable [BCdC98]. Aprovecharemos las conexiones que hemos identificado en secciones anteriores entre el álgebra de rectángulos y el modelo DCR para demostrar el problema fundamental  $CSPSAT(C$ -DCR) (decidir la consistencia de una red con relaciones de  $C$ -DCR) se resuelve en tiempo polinomial, por lo que la subclase convexa de DCR es tratable y es la primera subclase tratable identificada que incluye relaciones cardinales no básicas entre regiones regulares del plano. Otros problemas de razonamiento típicos con redes convexas de DCR, como encontrar una solución u obtener la red mínima también resultan tratables.

### 4.4.1. Consistencia y Solución en Redes Convexas

Sabemos que cualquier relación convexa  $R$  de RA se puede expresar como el producto cartesiano de dos relaciones convexas del álgebra de intervalos. Esto es,  $R = R_x \times R_y$ , donde  $R_x, R_y \in C-IA$ . Decíamos que  $R_x$  es la  $x$ -proyección de  $R$  y  $R_y$  es  $y$ -proyección de  $R$  y nos referiremos a ambas como *proyecciones de la relación  $R$* .

**Definición 4.3.** *Una red convexa de IA es una red donde todas las relaciones pertenecen al conjunto C-IA. De forma análoga decimos que una red convexa de RA o DCR es una red donde todas las relaciones pertenecen a C-RA o C-DCR, respectivamente.*

A toda red convexa del álgebra de rectángulos se le puede asociar dos redes convexas del álgebra de intervalos.

**Definición 4.4** (Proyecciones de una Red Convexa). *Sea  $\mathfrak{N}$  una red convexa de RA. Denotamos con  $\mathfrak{N}_x$  a la  $x$ -proyección de  $\mathfrak{N}$ , que es la red de convexa de IA con las mismas variables de  $\mathfrak{N}$  y cada relación  $R$  sustituida por la  $x$ -proyección de  $R$ . De forma análoga  $\mathfrak{N}_y$  es la  $y$ -proyección de  $\mathfrak{N}$ .*

La consistencia de una red convexa de RA puede comprobarse directamente en el álgebra de rectángulos o indirectamente comprobando la consistencia de sus proyecciones en el álgebra de intervalos, como indica la siguiente proposición.

**Proposición 4.3** ([BCdC98]). *Una red convexa  $\mathfrak{N}$  de RA es consistente si y sólo si sus proyecciones  $\mathfrak{N}_x$  y  $\mathfrak{N}_y$  son consistentes. Además, si  $\mathfrak{N}$  es camino-consistente entonces  $\mathfrak{N}$  es consistente.*

Para comprobar la consistencia de cada proyección de la red, se puede aplicar el algoritmo PC, ya que este algoritmo es un método válido para decidir la consistencia de una red de relaciones convexas del álgebra de intervalos [VKvB90].

Ahora demostramos que comprobar la consistencia de una red convexa del modelo DCR es un problema de complejidad semejante a su análogo en RA.

**Teorema 4.3.** *El problema CSPSAT(C-DCR) se puede resolver en tiempo polinomial.*

#### Demostración.

Sea  $\mathfrak{N}$  una red de la subclase convexa del modelo DCR con  $n$  variables. Sabemos que  $\mathfrak{N}$  consistente si y sólo si  $T_r(\mathfrak{N})$  es consistente (Teorema 4.1) y toda relación binaria en  $T_r(\mathfrak{N})$  es una relación convexa del álgebra de rectángulos (Lema 4.3). Por un lado, el algoritmo PC sirve para decidir la consistencia de una red convexa de RA con  $n$  variables en  $O(n^3)$  (Proposición 4.3, [BCdC98]), así que se puede utilizar para decidir la consistencia

de  $T_r(\mathfrak{N})$  y por tanto de  $\mathfrak{N}$  sin aumento de complejidad, ya que la traducción de  $\mathfrak{N}$  a  $T_r(\mathfrak{N})$  según lo indicado en la Ecuación (4.4) puede hacerse en  $O(n^2)$ .

Por otro lado, se da el caso de que  $T_r(\mathfrak{N})$  es consistente si y sólo si sus proyecciones  $T_r(\mathfrak{N})_x$  y  $T_r(\mathfrak{N})_y$  son consistentes (Proposición 4.3), con lo que podemos aplicar el algoritmo *PC* a las proyecciones de  $T_r(\mathfrak{N})$  para comprobar si son consistentes, cada una en  $O(n^3)$ . Se puede obtener cada proyección en  $O(n^2)$ . En total este método requiere  $O(n^3)$ .

Alternativamente, existe un tercer método que asintóticamente es más eficiente. Consiste en pasar de  $\mathfrak{N}$  a  $T_r(\mathfrak{N})$ , obtener  $T_r(\mathfrak{N})_x$  y  $T_r(\mathfrak{N})_y$  y ‘traducir’ cada proyección al álgebra de puntos (PA), para comprobar la consistencia de cada una en PA con el algoritmo *CSPAN*, que trabaja en tiempo cuadrático [vB92]. Este método es posible puesto que cada restricción con relaciones convexas entre intervalos se puede expresar de forma equivalente como restricciones convexas entre los puntos extremos de los intervalos [vBC90]. En total este método tiene una complejidad de  $O(n^2)$ .  $\square$

Entre métodos propuestos en la demostración del teorema anterior para decidir la consistencia de una red convexa de DCR no incluimos ninguno que use directamente las operaciones del álgebra de este modelo. Recordamos que las operaciones de composición e inversa no son internas en el conjunto  $2^{\mathcal{B}^{rec}}$ , por lo que en el álgebra del modelo DCR y en la subclase *C-DCR* se usan las versiones débiles de estas operaciones. Al ser la composición y la inversa operaciones débiles sólo podemos optar a aplicar un algoritmo de *camino-consistencia débil* (PC-débil, ver Sección 2.2.1). En la Figura 4.8 mostramos el algoritmo PC-débil adaptado para incluir comprobaciones adicionales en la actualización la relación inversa, teniendo en cuenta que  $inv(inv(R))$  no es necesariamente igual a  $R$ , como sucede en álgebras de relaciones y en otras álgebras de restricciones con composición débil pero con inversa interna (por ejemplo, RCC8 [RCC92]).

El siguiente resultado nos indica que el algoritmo PC-débil sirve para decidir la consistencia de una red convexa de DCR, en el sentido de que si la red obtenida como resultado de la aplicación del algoritmo no incluye ninguna relación vacía (es PC-débil) entonces la red original es consistente.

**Teorema 4.4.** *Sea  $\mathfrak{N}$  una red de la subclase convexa del modelo DCR. Si  $\mathfrak{N}$  es una red PC-débil entonces es consistente. Como consecuencia, el algoritmo PC-débil es un método válido para decidir la consistencia de una red convexa de DCR.*

### Demostración.

Consideremos la red  $T_r(\mathfrak{N})$ . Sabemos que toda relación binaria en  $T_r(\mathfrak{N})$  es una relación convexa del álgebra de rectángulos (Lema 4.3). Sea  $T_r(\mathfrak{N})'$  la red resultante al aplicar el algoritmo PC a  $T_r(\mathfrak{N})$  y sea  $T_r(R_{ij})'$  una relación cualquiera en  $T_r(\mathfrak{N})'$ . Si  $\mathfrak{N}'$  es la red resultante de aplicar el algoritmo PC-débil, entonces  $\mathfrak{N}'$  es una red de relaciones cardinales

**Entrada:** Una red de restricciones  $\mathfrak{N} = (\mathfrak{C}, \mathfrak{V})$ , donde  $\mathfrak{C} = \{x_i R_{ij} x_j\}$ ,  $R_{ij} \in \mathcal{R}$ ,  $x_i, x_j \in \mathfrak{V}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Salida:** Una red de restricciones PC-débil equivalente a  $\mathfrak{N}$  o ‘Fallo’ si se obtiene alguna relación vacía.

**Algoritmo** PC-débil

1. Para  $1 \leq i, j \leq n$  Hacer
2.      $R_{ij} \leftarrow R_{ij} \cap \text{inv}(R_{ji})$
3.      $Q \leftarrow \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \text{RELATED PATHS}(i, j)$
4.     Mientras  $Q \neq \emptyset$  Hacer
5.         Seleccionar y eliminar un camino  $(i, j, k)$  de  $Q$
6.          $t \leftarrow R_{ij} \cap (R_{ik} \circ_w R_{kj})$
7.         Si  $(t \neq R_{ij})$  Entonces
8.              $R_{ij} \leftarrow t$
9.              $R_{ji} \leftarrow R_{ji} \cap \text{inv}(t)$
10.          $Q \leftarrow Q \cup \text{RELATED PATHS}(i, j)$
11.     FinSi
12.     FinMientras

**Procedimiento** RELATED PATHS( $i, j$ )

1.     Devolver  $\{(i, j, k), (k, i, j) \mid 1 \leq k \leq n, k \neq i, k \neq j\}$

Figura 4.8: Algoritmo PC-débil

rectangulares convexas ya que el conjunto  $C\text{-DCR}$  es cerrado bajo las operaciones de intersección, composición débil e inversa débil (Teorema 4.2). Ahora demostraremos que  $R'_{ij} = T_c(T_r(R_{ij})')$ , para cualquier relación  $R'_{ij}$  de  $\mathfrak{N}'$ . Por la Proposición 4.2 podemos reemplazar la operación  $R_{ij} \leftarrow R_{ij} \cap (R_{ik} \circ_w R_{kj})$  por  $R_{ij} \leftarrow T_c(T_r(R_{ij})) \cap T_c(T_r(R_{ik})) \circ T_r(R_{kj})$  y la operación  $R_{ji} \leftarrow R_{ji} \cap \text{inv}(R_{ij})$  por  $R_{ji} \leftarrow T_c(T_r(R_{ji})) \cap T_c(T_r(R_{ij}))^{-1}$ . Por tanto,  $R_{ij} \leftarrow T_c(T_r(R_{ij}) \cap (T_r(R_{ik}) \circ T_r(R_{kj})))$  y  $R_{ji} \leftarrow T_c(T_r(R_{ji}) \cap T_r(R_{ij})^{-1})$ . Cada vez que una relación  $R_{ij}$  se actualiza, la relación resultante es el cierre cardinal de su correspondiente relación actualizada en  $T_r(\mathfrak{N})$ . Podemos concluir que la red  $\mathfrak{N}'$  obtenida con el algoritmo PC-débil coincide con la clausura cardinal de la red  $T_r(\mathfrak{N})'$  obtenida por el algoritmo PC aplicado a la red traducida  $T_r(\mathfrak{N})$ , esto es,  $\mathfrak{N}' = T_c(T_r(\mathfrak{N})')$ . Esta igualdad implica que  $\mathfrak{N}'$  es PC-débil si y sólo si  $T_r(\mathfrak{N})'$  es camino-consistente.

Por la Proposición 4.3 sabemos que si  $T_r(\mathfrak{N})'$  es camino-consistente entonces  $T_r(\mathfrak{N})'$  es consistente. Supongamos que  $T_r(\mathfrak{N})'$  es camino-consistente. Eso quiere decir que debe existir una solución dada por una asignación consistente de rectángulos a variables, o equivalentemente, un escenario consistente de  $T_r(\mathfrak{N})'$ . Dicho escenario es una subred de  $T_r(\mathfrak{N})'$  formada por las relaciones básicas de RA  $\{r_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$  que se satisfacen entre los rectángulos asignados a variables. Puesto que  $\mathfrak{N}' = T_c(T_r(\mathfrak{N})')$  tenemos que  $\{T_c(r_{ij})\}_{1 \leq i, j \leq n}$  sería un escenario consistente para la red PC-débil  $\mathfrak{N}'$ , ya que el Lema 4.2 establece que si una

relación entre rectángulos es satisficible también lo es el cierre cardinal de la relación. De lo anterior se deduce que si una red de DCR es PC-débil entonces es consistente. El algoritmo PC-débil obtendría una red equivalente a la original, y si ninguna relación es vacía entonces la red es consistente; en otro caso sería inconsistente. Con lo cual el algoritmo PC-débil es válido para determinar si una red DCR es consistente. Además, este algoritmo es de orden  $O(n^3)$ , siendo  $n$  el número de variables de la red. El orden de complejidad es el mismo que en el algoritmo PC aplicado al álgebra de intervalos o rectángulos, pues el orden es independiente del número de relaciones básicas, aunque cuanto menor es el número de estas relaciones más eficiente es el algoritmo.  $\square$

### Algoritmos para Resolver el Problema de la Consistencia

A continuación resumimos los métodos que proponemos para resolver el problema CSPSAT( $C$ -DCR). Partimos de una red convexa  $\mathfrak{N}$  de DCR con  $n$  variables.

#### 1. Algoritmo indirecto basado en RA:

- Obtener  $T_r(\mathfrak{N})$  por traducción de  $\mathfrak{N}$ .
- Calcular  $T_r(\mathfrak{N})' \leftarrow PC(T_r(\mathfrak{N}))$ .
- Si alguna relación en  $T_r(\mathfrak{N})'$  es vacía entonces la red  $\mathfrak{N}$  es inconsistente; en otro caso  $\mathfrak{N}$  es consistente.

Complejidad:  $O(n^3)$ .

#### 2. Algoritmo indirecto basado en IA:

- Obtener  $T_r(\mathfrak{N})$  por traducción de  $\mathfrak{N}$ .
- Obtener proyecciones  $T_r(\mathfrak{N})_x$  y  $T_r(\mathfrak{N})_y$ .
- Calcular  $T_r(\mathfrak{N})'_x \leftarrow PC(T_r(\mathfrak{N})_x)$  y  $T_r(\mathfrak{N})'_y \leftarrow PC(T_r(\mathfrak{N})_y)$ .
- Si alguna relación en  $T_r(\mathfrak{N})'_x$  o  $T_r(\mathfrak{N})'_y$  es vacía entonces la red  $\mathfrak{N}$  es inconsistente; en otro caso  $\mathfrak{N}$  es consistente.

Complejidad:  $O(n^3)$ .

#### 3. Algoritmo indirecto basado en PA:

- Obtener  $T_r(\mathfrak{N})$  por traducción de  $\mathfrak{N}$ .
- Obtener proyecciones  $T_r(\mathfrak{N})_x$  y  $T_r(\mathfrak{N})_y$ .
- Traducir  $T_r(\mathfrak{N})_x$  a una red  $\mathfrak{N}_x^P$  de PA equivalente; traducir  $T_r(\mathfrak{N})_y$  a una red  $\mathfrak{N}_y^P$  de PA equivalente.

- Aplicar CSPAN a  $\mathfrak{N}_x^P$  y  $\mathfrak{N}_y^P$ ; si CSPAN devuelve ‘inconsistente’ con alguna de las redes entonces la red  $\mathfrak{N}$  es inconsistente; en otro caso  $\mathfrak{N}$  es consistente.

Complejidad:  $O(n^2)$ .

#### 4. Algoritmo directo:

- Calcular  $\mathfrak{N}' \leftarrow PC\text{-débil}(\mathfrak{N})$ .
- Si alguna relación de  $\mathfrak{N}'$  es vacía entonces la red  $\mathfrak{N}$  es inconsistente; en otro caso  $\mathfrak{N}$  es consistente.

Complejidad:  $O(n^3)$ .

Un análisis empírico completo para comparar la eficiencia de estos algoritmos se encuentra fuera del alcance de esta tesis. Un análisis teórico revela que el algoritmo 3 es asintóticamente mejor. Pero requiere más pre-procesamiento, lo que significa  $O(n^2)$  para cada obtener cada una de las cinco redes intermedias. Las redes de puntos tienen cada una  $2n$  variables, en lugar de las  $n$  variables de la red de partida, y hay que aplicar CSPAN a cada una, lo cual supone una complejidad de  $O(5n^2) + O((2n)^2)$ . El algoritmo 4 tiene la ventaja de que no requiere ninguna traducción a redes intermedias. Puede aplicarse directamente el método de propagación basado en camino-consistencia.

### Búsqueda de una Solución para una Red Convexa

En el capítulo anterior mostrábamos cómo obtener una asignación inicial de rectángulos compatible con las restricciones de orden derivadas de las restricciones cardinales entre regiones cualesquiera, aunque dicha asignación no era necesariamente una solución para la red. La idea ahora es parecida, sólo que al ser las relaciones cardinales rectangulares y convexas, sabemos que las restricciones se pueden traducir sin pérdida de información a restricciones del álgebra de rectángulos, de intervalos o de puntos. En definitiva, resolviendo dos redes del álgebra de puntos de forma independiente y combinando resultados se puede obtener una solución de rectángulos para la red convexa de DCR.

Consideramos que un rectángulo  $\rho$  solución para una variable  $v$  se representa por los 4 puntos extremos de las proyecciones de  $\rho$  en los ejes  $x$  e  $y$  del plano, teniendo en cuenta que los intervalos  $\rho_x, \rho_y$  de las proyecciones se representan con su par de puntos extremos, esto es,  $\rho_x = (\rho_x^-, \rho_x^+)$  y  $\rho_y = (\rho_y^-, \rho_y^+)$ . El algoritmo indirecto para decidir la consistencia de una red convexa de DCR puede adaptarse sin coste adicional para generar una solución de la red, esto es, una asignación consistente de rectángulos para las variables, como se indica a continuación:

#### Algoritmo para obtener una solución:

Partimos de una red convexa  $\mathfrak{N}$  de DCR con  $n$  variables.

1. Obtener  $T_r(\mathfrak{N})$  por traducción de  $\mathfrak{N}$ .
2. Obtener proyecciones  $T_r(\mathfrak{N})_x$  y  $T_r(\mathfrak{N})_y$ .
3. Traducir  $T_r(\mathfrak{N})_x$  a una red  $\mathfrak{N}_x^P$  de PA equivalente; traducir  $T_r(\mathfrak{N})_y$  a una red  $\mathfrak{N}_y^P$  de PA equivalente.
4. Aplicar CSPAN a  $\mathfrak{N}_x^P$  y  $\mathfrak{N}_y^P$  y generar una solución  $S_x$  para la primera y  $S_y$  para la segunda, si no se detecta inconsistencia; en otro caso ‘Fallo’.
5. Sean  $v_x$  y  $v_y$  las variables de intervalos en  $T_r(\mathfrak{N})_x$  y  $T_r(\mathfrak{N})_y$  correspondientes a la variable  $v$  en  $T_r(\mathfrak{N})$ , que coincide con la variable  $v$  en  $\mathfrak{N}$ . Sean  $(v_x^-, v_x^-)$  y  $(v_y^-, v_y^-)$  las variables de puntos en  $\mathfrak{N}_x^P$  y  $\mathfrak{N}_y^P$  asociadas a los variables de intervalos  $v_x$  y  $v_y$ .  
La solución para cada variable  $v$  de  $\mathfrak{N}$  viene dada por los valores asignados según  $S_x$  al par de variables  $(v_x^-, v_x^-)$  y los valores asignados según  $S_y$  al par  $(v_y^-, v_y^-)$ .

El algoritmo CSPAN realiza una ordenación topológica de los nodos a partir del orden parcial que se extrae de las restricciones entre los puntos. Una vez que se obtiene un orden total se puede obtener una asignación de números racionales a los nodos que representan las variables de puntos. La asignación es arbitraria y puede variarse para generar distintas soluciones. Todo lo discutido en la Sección 3.4 sobre la posibilidad de integración con relaciones métricas entre puntos extremos de los rectángulos, para aumentar de forma tratable la expresividad, vale para la subclase  $C$ -DCR de relaciones cardinales rectangulares convexas.

#### 4.4.2. El Problema de la Red Mínima

Ahora analizamos el problema de obtener la red mínima equivalente a una red convexa de DCR y lo hacemos recurriendo de nuevo al álgebra de rectángulos y al álgebra de intervalos. Sabemos que para una red convexa de IA el algoritmo PC obtiene la red mínima equivalente en  $O(n^3)$  [vBC90]. Aunque el problema de la red mínima no se ha considerado para RA, demostramos que se puede llegar a la misma conclusión para una red convexa de RA.

**Proposición 4.4.** *Sea  $\mathfrak{N}$  una red una red convexa de RA con  $n$  variables. El algoritmo PC obtiene la red mínima equivalente a  $\mathfrak{N}$  en  $O(n^3)$ .*

**Demostración.**

Sea  $\mathfrak{N}^m$  la red resultante al aplicar el algoritmo PC a  $\mathfrak{N}$ . Resulta que  $\mathfrak{N}^m$  es una red convexa de RA, puesto que el conjunto  $C$ -RA de relaciones convexas de RA es cerrado

bajo las operaciones de intersección, composición e inversa. Podemos afirmar que las proyecciones  $\mathfrak{N}_x^m$  y  $\mathfrak{N}_y^m$  de  $\mathfrak{N}^m$  son redes convexas de IA, pues de lo contrario  $\mathfrak{N}^m$  no sería convexa. Al estar basadas las operaciones de RA en las operaciones de IA se puede deducir además que las proyecciones  $\mathfrak{N}_x^m$  y  $\mathfrak{N}_y^m$  son redes camino-consistentes. Además,  $\mathfrak{N}_x^m$  y  $\mathfrak{N}_y^m$  son redes mínimas, puesto que una red de intervalos convexa que es camino-consistente es también mínima [vBC90], es decir, toda relación básica entre cada par de variables es *factible* (la relación básica se satisface en alguna solución de la red, aparece en algún escenario consistente).

Comprobamos que  $\mathfrak{N}^m$  es una red mínima. Será mínima si todas las relaciones básicas  $(r_x, r_y) \in R^m$  son factibles, donde  $R^m = R_x^m \times R_y^m$  es cualquier relación de  $\mathfrak{N}^m$ . Tenemos que  $r_x$  es una relación factible en  $\mathfrak{N}_x^m$  y  $r_y$  es también factible en  $\mathfrak{N}_y^m$ , por ser ambas redes mínimas. Entonces existe un solución para  $\mathfrak{N}_x^m$  tal que  $\alpha_x r_x \beta_x$ , para cierto par de intervalos  $(\alpha_x, \beta_x)$  y de forma análoga se puede decir que  $\alpha_y r_y \beta_y$  para cierto par de intervalos  $(\alpha_y, \beta_y)$ . Por tanto, el par de rectángulos dado por  $\alpha_x \times \alpha_y$  y  $\beta_x \times \beta_y$  satisface  $\alpha_x \times \alpha_y (r_x, r_y) \beta_x \times \beta_y$ . Eso significa que toda relación  $(r_x, r_y) \in R^m$  se satisface en alguna solución, por lo que toda relación  $R^m$  en  $\mathfrak{N}^m$  es mínima.  $\square$

De lo anterior se deduce que la red mínima  $\mathfrak{N}^m$  equivalente a una red convexa  $\mathfrak{N}$  de RA se puede obtener directamente aplicando el algoritmo PC, o indirectamente haciendo  $\mathfrak{N}^m \leftarrow \mathfrak{N}_x^m \times \mathfrak{N}_y^m$ . Con esta expresión resumimos las operaciones necesarias para calcular primero las proyecciones mínimas  $\mathfrak{N}_x^m, \mathfrak{N}_y^m$ , aplicando PC a cada proyección de  $\mathfrak{N}$ , y obteniendo luego  $R^m \leftarrow R_x^m \times R_y^m$ , es decir, recuperando relaciones mínimas  $R^m$  de  $\mathfrak{N}^m$  a través del producto cartesiano de las relaciones mínimas  $R_x^m$  y  $R_y^m$  de  $\mathfrak{N}_x^m$  y  $\mathfrak{N}_y^m$ , respectivamente.

**Teorema 4.5.** *El problema de obtener la red mínima equivalente a una red convexa de DCR puede resolverse en  $O(n^3)$ , siendo  $n$  el número de variables de la red.*

### Demostración.

Sea  $\mathfrak{N}$  una red convexa de DCR y sea  $\mathfrak{N}^m$  su red mínima equivalente, donde cada  $R_{ij}^m$  es la relación mínima que contiene a todas las relaciones básicas factibles entre cualquier par de variables  $v_i$  y  $v_j$ . Demostramos cómo obtener  $\mathfrak{N}^m$  y cómo de eficiente es el proceso. Podemos obtener  $T_r(\mathfrak{N})$  y calcular  $T_r(\mathfrak{N})^m \leftarrow PC(T_r(\mathfrak{N}))$ . Como cada relación  $T_r(R_{ij})^m$  entre las variables  $v_i$  y  $v_j$  de  $T_r(\mathfrak{N})^m$  es mínima (Proposición 4.4) eso significa que  $T_c(T_r(R_{ij})^m)$  es la relación mínima correspondiente a  $R_{ij}$  en  $\mathfrak{N}^m$ , esto es,  $R_{ij}^m = T_c(T_r(R_{ij})^m)$ . Esto es así puesto que, por definición,  $T_c(T_r(R_{ij})^m)$  es la menor relación que contiene a todos los pares de rectángulos de  $T_r(R_{ij})^m$  y eso implica que si  $v_i T_r(R_{ij})^m v_j$  entonces  $v_i T_c(T_r(R_{ij})^m) v_j$ . Así pues,  $R_{ij}^m = T_c(T_r(R_{ij})^m)$  para cada relación mínima  $T_r(R_{ij})^m$  en  $T_r(\mathfrak{N})^m$ , por lo que la red mínima equivalente a la red convexa de DCR se obtiene haciendo  $\mathfrak{N}^m \leftarrow T_c(T_r(\mathfrak{N})^m)$  (como en la Ecuación (4.5)).

Este cálculo requiere un tiempo  $O(n^3)$ , puesto que obtener  $T_r(\mathfrak{N})$  es  $O(n^2)$ , calcular  $T_r(\mathfrak{N})^m \leftarrow PC(T_r(\mathfrak{N}))$  es  $O(n^3)$  y obtener  $\mathfrak{N}^m \leftarrow T_c(T_r(\mathfrak{N})^m)$  es  $O(n^2)$ .  $\square$

El siguiente resultado demuestra que el algoritmo PC-débil (Figura 4.8) también obtiene la red mínima equivalente de una red convexa de DCR.

**Teorema 4.6.** *Sea  $\mathfrak{N}$  una red convexa de DCR. El algoritmo PC-débil obtiene la red mínima equivalente a  $\mathfrak{N}$  en  $O(n^3)$ , donde  $n$  es el número de variables de regiones de REC.*

**Demostración.**

Sea  $\mathfrak{N}^m$  la red obtenida al aplicar el algoritmo PC-débil sobre  $\mathfrak{N}$  y sea  $T_r(\mathfrak{N})^m$  la red resultante al aplicar el algoritmo PC sobre la red  $T_r(\mathfrak{N})$ . En la demostración del Teorema 4.4 se prueba que  $\mathfrak{N}^m = T_c(T_r(\mathfrak{N})^m)$ , es decir, toda relación  $R_{ij}^m$  de  $\mathfrak{N}^m$  es de la forma  $R_{ij}^m = T_c(T_r(R_{ij})^m)$ . Por la Proposición 4.4 sabemos que  $T_r(R_{ij})^m$  es mínima en  $T_r(\mathfrak{N})^m$  y esto implica que  $R_{ij}^m$  es mínima en  $\mathfrak{N}^m$ , por lo argumentado en la demostración del Teorema 4.5. El coste de obtener la red mínima equivalente a  $\mathfrak{N}$  aplicando el algoritmo PC-débil es  $O(n^3)$ .  $\square$

**Algoritmos para Obtener la Red Mínima**

A continuación resumimos los métodos para calcular la red mínima equivalente a una red convexa de DCR, basados en la Proposición 4.4 y los Teoremas 4.5 y 4.6. Partimos de una red convexa  $\mathfrak{N}$  de DCR con  $n$  variables.

**1. Algoritmo indirecto basado en RA:**

- Obtener  $T_r(\mathfrak{N})$  por traducción de  $\mathfrak{N}$ .
- Calcular la red traducida mínima  $T_r(\mathfrak{N})^m \leftarrow PC(T_r(\mathfrak{N}))$ .
- Obtener la red mínima por cierre cardinal  $\mathfrak{N}^m \leftarrow T_c(T_r(\mathfrak{N})^m)$ .

Complejidad:  $O(n^3)$ .

**2. Algoritmo indirecto basado en IA:**

- Obtener  $T_r(\mathfrak{N})$  por traducción de  $\mathfrak{N}$ .
- Obtener las proyecciones  $T_r(\mathfrak{N})_x$  y  $T_r(\mathfrak{N})_y$ .
- Calcular las proyecciones mínimas  $T_r(\mathfrak{N})_x^m \leftarrow PC(T_r(\mathfrak{N})_x)$ .  
 $T_r(\mathfrak{N})_y^m \leftarrow PC(T_r(\mathfrak{N})_y)$ .

- Obtener la red traducida mínima por el producto cartesiano de las proyecciones mínimas  $T_r(\mathfrak{N})^m \leftarrow T_r(\mathfrak{N})_x^m \times T_r(\mathfrak{N})_y^m$ .
- Obtener la red mínima por cierre cardinal  $\mathfrak{N}^m \leftarrow T_c(T_r(\mathfrak{N})^m)$ .

Complejidad:  $O(n^3)$ .

### 3. Algoritmo directo:

- Calcular  $\mathfrak{N}^m \leftarrow PC\text{-débil}(\mathfrak{N})$ .
- $\mathfrak{N}^m$  es la red mínima.

Complejidad:  $O(n^3)$ .

Los tres algoritmos son de complejidad  $O(n^3)$ , pero el algoritmo 2 parece ser más ineficiente puesto que requiere más traducciones de redes entre modelos y dos aplicaciones del algoritmo PC. El algoritmo 3 es el mejor para calcular la red mínima ya que no necesita ningún preprocesamiento ni traducción con  $T_r$  ni  $T_c$ , si tenemos precalculadas las tablas de composición e inversa.

## 4.5. Relaciones Cardinales Rectangulares no Convexas

Si consideramos el conjunto completo de relaciones cardinales rectangulares, que incluye relaciones no convexas, el problema de decidir la consistencia se vuelve intratable.

**Teorema 4.7.**  $CSPSAT(2^{\mathcal{B}_{rec}})$  es NP-completo.

### Demostración.

Sea  $\mathfrak{N}$  una red de DCR. El problema de decidir la consistencia de  $\mathfrak{N}$  está en NP, ya que un algoritmo no determinista puede adivinar una subred  $\mathfrak{N}_b$  donde todas las relaciones son básicas. Cada relación básica es convexa, por lo que la consistencia de  $\mathfrak{N}_b$  se puede decidir en tiempo polinomial, por el Teorema 4.3. Para demostrar que  $CSPSAT(2^{\mathcal{B}_{rec}})$  es NP-duro se puede usar la reducción del problema 3SAT al problema de la consistencia de un conjunto de restricciones cardinales entre regiones conectadas que se muestra en [SK05], ya que en dicha reducción los autores construyen una red donde sólo se utilizan relaciones cardinales rectangulares.  $\square$

Nebel y Bürckert [NB95] demostraron que existe una única subclase maximal tratable para el álgebra de intervalos que incluye a todas las relaciones básicas. Esta subclase es la que considera el conjunto de relaciones que pueden ser expresadas mediante cláusulas

de ORD-Horn entre los puntos extremos de los intervalos (ver Sección 2.3.2). El conjunto más amplio de relaciones tratables descubierto hasta ahora para el álgebra de rectángulos es precisamente el que incluye a las relaciones entre rectángulos que se pueden expresar mediante cláusulas de ORD-Horn entre los puntos extremos de las proyecciones de los rectángulos [BCdC99]. Sin embargo, no se ha podido demostrar que esta subclase sea maximal, en el sentido de que al añadir cualquier otra relación la subclase generada a partir de la ampliación es intratable. Ni siquiera se sabe si existe otra subclase tratable que contenga a todas las relaciones básicas de RA.

Todas las relaciones de subclases tratables identificadas para el álgebra de rectángulos cumplen al menos la *condición de preconvexidad*:  $\dim(I(R) \setminus R) < \dim(R)$ , donde  $I(R)$  es el *cierre convexo* de  $R$ , o menor relación convexa que contiene a  $R$ . Una relación que cumple esta condición diremos que es una *relación preconvexa*. Todas las relaciones convexas son también preconvexas, puesto que  $\dim(I(R) \setminus R) = 0$  al ser  $I(R) \setminus R = \emptyset$ . Para el álgebra de intervalos Ligozat [Lig98b] demuestra que cumplir la condición de preconvexidad es equivalente a afirmar que la relación es de tipo ORD-Horn. Sin embargo, no todas las relaciones preconvexas del álgebra de rectángulos (llamadas *weak preconvex* en [BCdC99]) son de tipo ORD-Horn. De hecho, el conjunto de relaciones que se caracterizan sólo por cumplir la condición de preconvexidad no es tratable.

**Proposición 4.5.** *Si  $R$  es una relación no convexa de DCR entonces  $T_r(R)$  no es preconvexa.*

#### Demostración.

Si  $R$  no es convexa entonces  $R$  no se corresponde con un intervalo en el retículo de DCR, lo que significa que  $I(R) \setminus R$  contiene al menos una relación básica de dimensión 4 (ver Sección 4.3.1). Por tanto,  $T_r(R)$  es una relación no convexa de RA, por el Lema 4.3, y  $\dim(I(T_r(R)) \setminus T_r(R)) = \dim(T_r(R)) = 4$ . Al no cumplir la condición de preconvexidad  $T_r(R)$  no es preconvexa.  $\square$

Como consecuencia, toda relación  $R$  no convexa de DCR no es representable mediante cláusulas de ORD-Horn, ya que  $T_r(R)$  no es ni siquiera preconvexa. No es una cuestión fácil determinar si existe o no una subclase tratable de modelo DCR que contenga estrictamente al subconjunto  $C$ -DCR de relaciones convexas. Ahora comprobamos que si al conjunto  $C$ -DCR se le añaden cierto tipo de relaciones no convexas se obtienen subclases no tratables.

### 4.5.1. Relaciones con Proyecciones no Convexas

Sabemos que si  $R$  es una relación cardinal rectangular no convexa entonces  $T_r(R)$  no es preconvexa. Eso no implica que las proyecciones  $T_r(R)_x$  o  $T_r(R)_y$  tengan que ser necesariamente no convexas.

**Ejemplo 4.5.** Sea la relación cardinal rectangular

$$R = \{B:W:NW:N, B:W:E\}$$

Se tiene que  $T_r(R) = \{o, fi\} \times \{si, oi\} \cup \{di\} \times \{d, s, f, e\}$ . Entonces  $T_r(R)_x = \{o, fi, di\}$  y  $T_r(R)_y = \{si, oi, d, s, f, e\}$  son convexas, sin embargo  $T_r(R)$  no es preconvexa porque  $I(T_r(R)) \setminus T_r(R)$  contiene una relación básica como  $(o, d)$  que es de dimensión 4, al igual que  $T_r(R)$ .

En el álgebra de intervalos existen relaciones no convexas que sin embargo son preconvexas y resultan tratables. Comprobamos ahora que cualquier proyección no convexa de una relación de DCR es necesariamente no preconvexa, o lo que es lo mismo, no existen relaciones estrictamente preconvexas que puedan ser proyección de la traducción de una relación de DCR.

**Proposición 4.6.** Si  $T_r(R)_x$  (o  $T_r(R)_y$ ) es una proyección no convexa de una relación cardinal rectangular  $R$  entonces  $R$  no es convexa y además  $T_r(R)_x$  (o  $T_r(R)_y$ ) no es preconvexa.

**Demostración.**

Que  $R$  no es convexa está claro observando que  $T_r(R)$  no es convexa. Esto último es cierto porque las relaciones convexas de RA se pueden expresar como producto cartesiano de relaciones convexas de IA y por tanto sus proyecciones son siempre convexas. Por otra parte, al ser  $2^{\mathcal{K}^2}$  el conjunto imagen de  $T_r$ , resulta que si  $T_r(R)_x$  no es convexa entonces tampoco es preconvexa. Esto es así porque  $T_r(R)_x$  no es un intervalo en el retículo de  $\mathcal{K}$  y eso implica que  $I(T_r(R)_x) \setminus T_r(R)_x$  contiene al menos una relación básica de dimensión 2, puesto que cada  $K_i \in \mathcal{K}$  es de dimensión 2, que es la máxima dimensión posible para una relación entre intervalos. Por tanto  $T_r(R)_x$  no es preconvexa porque no cumple la condición de preconvexidad. De forma análoga se llega a la conclusión de que si  $T_r(R)_y$  no es convexa entonces tampoco es preconvexa.  $\square$

Nebel y Bürckert [NB95] demostraron que cualquier subconjunto de relaciones del álgebra de intervalos que contenga a las relaciones básicas, que sea cerrado bajo intersección, composición e inversa (es una subclase de IA) y contenga una relación que no es de tipo ORD-Horn debe contener a una de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} N_1 &= \{di, si, oi, d, f\}, & N_2 &= \{oi, si, di, o, fi\} \\ N_1^{-1} &= \{d, s, o, fi, di\}, & N_2^{-1} &= \{o, d, s, f, oi\} \end{aligned}$$

Ligozat llama a estas relaciones no preconvexas “relaciones esquina” (*corner relations*), porque se corresponden cada una con una esquina de la representación del intervalo  $[o, oi]$

en el retículo de IA. Se ha demostrado que cualquier subclase que incluya a las relaciones básicas y a cualquiera de las relaciones esquina es intratable. A partir de ahí Nebel y Bürckert probaron que cualquier subclase del álgebra de intervalos que contenga estrictamente a la subclase  $\mathcal{H}$  de relaciones de ORD-Horn es intratable, con lo que esta subclase es maximal respecto a la tratabilidad. El problema de la consistencia para la subclase  $\mathcal{H}$  se resuelve aplicando el algoritmo de camino-consistencia. Esta subclase contiene estrictamente al conjunto  $C$ -IA de relaciones convexas del álgebra de intervalos.

**Definición 4.5.** *Llamamos relación esquina máxima a las relaciones esquina del retículo de  $\mathcal{K}$  que contienen a todas las relaciones básicas de una las relaciones esquina y son las siguientes:*

$$\begin{aligned} E_1 &= K_4 \cup K_5 \cup K_3 = \{di, si, oi, d, s, f, e\} \\ E_2 &= K_5 \cup K_4 \cup K_2 = \{oi, si, di, o, fi\} \\ E_3 &= K_3 \cup K_2 \cup K_4 = \{d, s, f, e, o, fi, di\} \\ E_4 &= K_2 \cup K_3 \cup K_5 = \{o, fi, d, s, f, e, oi, si\} \end{aligned}$$

Las relaciones esquina máxima también son no preconvexas porque  $\dim(I(E_i) \setminus E_i) = 2 = \dim(E_i)$ . Las llamamos de *esquina máxima* porque si se añade otra relación  $K_i \subset [o, oi]$  la relación obtenida sería el propio intervalo  $[K_2, K_5] = K_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup K_5$ , que es una relación convexa que se corresponde con el intervalo  $[o, oi]$  del retículo de IA. En lo que sigue usamos la función  $T_k : 2^{\mathcal{B}ia} \rightarrow 2^{\mathcal{K}}$  para obtener  $T_k(R)$  como la menor relación de  $2^{\mathcal{K}}$  que contiene a todas las relaciones básicas de  $R$ . De esta forma  $T_k(N_1) = E_1$  y  $T_k(N_2) = E_2$ ,  $T_k(N_1^{-1}) = E_3$  y  $T_k(N_2^{-1}) = E_4$ .

**Proposición 4.7.** *Sea  $C$ - $K$  el conjunto de relaciones convexas de IA que se corresponden con intervalos del retículo de  $\mathcal{K}$ , esto es  $C$ - $K = 2^{\mathcal{K}} \cap C$ -IA. Si  $R_n$  es cualquier relación no preconvexa del conjunto  $2^{\mathcal{K}}$  entonces a partir de las relaciones de  $C$ - $K \cup \{R_n\}$  y las operaciones del álgebra de intervalos puede generarse una relación  $R$  tal que  $T_k(R)$  es una relación esquina máxima.*

### Demostración.

Procedemos a un análisis de casos similar al que se muestra en [Lig98b] para probar que se puede generar algebraicamente una relación esquina a partir de relaciones convexas de IA y cualquier otra relación no preconvexa de IA. La diferencia es que aquí usamos el conjunto de relaciones de  $C$ - $K$  y cualquier otra relación no preconvexa  $R_n$  de  $2^{\mathcal{K}}$ . Al ser  $R_n$  no preconvexa  $I(R_n) \setminus R_n$  debe contener al menos una de las relaciones  $K_2, K_3, K_4, K_5$  y no a  $K_1, K_6$ , pues estas relaciones son la mínima y máxima, respectivamente, del retículo de  $\mathcal{K}$  y si pertenecen a  $I(R_n)$  también pertenecen a  $R_n$ . Veamos los posibles casos de relaciones incluidas en  $I(R_n) \setminus R_n$ .

1.  $I(R_n) \setminus R_n$  contiene a  $K_2$ . Eso significa que las relaciones básicas de  $K_2$  no están en  $R_n$ . Entonces podemos distinguir dos subcasos:  $R_n \cap K_1 = \emptyset$  y  $R_n \cap K_1 \neq \emptyset$ 
  - a) Si  $R_n \cap K_1 = \emptyset$  entonces debe ser  $R_n \cap K_4 \neq \emptyset$  y  $R_n \cap K_3 \neq \emptyset$  pues en otro caso  $I(R_n) \setminus R_n$  no contiene a  $K_2$ . Se puede comprobar que  $R_n \circ K_5$  contiene a todos los átomos de la relación esquina  $N_1$  y no a la relación  $o$  ni  $fi$ . Por tanto se puede obtener  $R = (R_n \circ K_5) \cap [o, oi]$  y esta relación cumple que  $T_k(R) = E_1$ .
  - b) Si  $R_n \cap K_1 \neq \emptyset$  se consideran varios casos:
    - Que  $R_n \cap K_4 \neq \emptyset$  y  $R_n \cap K_3 \neq \emptyset$ , en cuyo caso se considera  $R'_n = R_n \cap [o, oi]$  y ahora  $R'_n$  es una relación del tipo 1.a), por lo que se obtiene  $R = (R'_n \circ K_5) \cap [o, oi]$  y  $T_k(R) = E_1$ .
    - Que  $R_n \cap K_4 \neq \emptyset$  y  $R_n \cap K_3 = \emptyset$ . En este caso se obtiene  $R = (K_5 \circ R_n) \cap [o, oi]$  y  $T_k(R) = E_2$ .
    - Que  $R_n \cap K_4 = \emptyset$  y  $R_n \cap K_3 \neq \emptyset$ . Se puede obtener  $R = (R_n \circ K_5) \cap [o, oi]$  y  $T_k(R) = E_4$ .
    - Que  $R_n \cap K_4 = \emptyset$  y  $R_n \cap K_3 = \emptyset$ . En este caso se usa  $K_3 \cup K_5 = \{d, s, f, e, si, oi\}$  para componer y puede hacerse porque es una relación conveja. Entonces  $R = T_k(R_n \circ (K_3 \cup K_5) \cap [o, oi])$  y  $T_k(R) = E_4$ .
2.  $I(R_n) \setminus R_n$  contiene a  $K_4$ . Consideramos las relaciones  $K_1 \cup K_2$ ,  $K_3$  y  $K_5 \cup K_6$ . Debe ser  $R_n \cap (K_1 \cup K_2) \neq \emptyset$  y  $R_n \cap (K_5 \cup K_6) \neq \emptyset$  para que  $K_4$  esté en  $I(R_n)$  y no en  $R_n$ . Eso implica que se puede obtener  $R = (R_n \circ K_3) \cap [o, oi]$ , tal que  $T_k(R) = E_4$ .
3.  $I(R_n) \setminus R_n$  contiene a  $K_5$ . Este caso es análogo al caso 1. Podemos distinguir dos subcasos:  $R_n \cap K_1 = \emptyset$  y  $R_n \cap K_1 \neq \emptyset$ 
  - a) Si  $R_n \cap K_1 = \emptyset$  entonces debe ser  $R_n \cap K_4 \neq \emptyset$  y  $R_n \cap K_3 \neq \emptyset$  pues en otro caso  $I(R_n) \setminus R_n$  no contiene a  $K_5$ . Se puede comprobar que  $R_n \circ K_2$  contiene a todos los átomos de la relación esquina  $N_1^{-1}$  y no a la relación  $oi$  ni  $si$ . Por tanto se puede obtener  $R = (R_n \circ K_2) \cap [o, oi]$  y esta relación cumple que  $T_k(R) = E_3$ .
  - b) Si  $R_n \cap K_1 \neq \emptyset$  se consideran varios casos:
    - Que  $R_n \cap K_4 \neq \emptyset$  y  $R_n \cap K_3 \neq \emptyset$ , en cuyo caso se considera  $R'_n = R_n \cap [o, oi]$  y ahora  $R'_n$  es una relación del tipo 3.a), por lo que  $E_3 = T_k((R'_n \circ K_2) \cap [o, oi])$ .
    - Que  $R_n \cap K_4 \neq \emptyset$  y  $R_n \cap K_3 = \emptyset$ . En este caso  $E_2 = T_k((K_2 \circ R_n) \cap [o, oi])$ .
    - Que  $R_n \cap K_4 = \emptyset$  y  $R_n \cap K_3 \neq \emptyset$ . En este caso  $E_4 = T_k((R_n \circ K_2) \cap [o, oi])$ .
    - Que  $R_n \cap K_4 = \emptyset$  y  $R_n \cap K_3 = \emptyset$ . En este caso se usa  $K_3 \cup K_5 = \{d, s, f, e, si, oi\}$  para componer y puede hacerse porque es una relación conveja. Entonces  $E_4 = T_k(R_n \circ (K_3 \cup K_5) \cap [o, oi])$ .

4.  $I(R_n) \setminus R_n$  contiene a  $K_3$ . Este caso es análogo al caso 2. Consideramos las relaciones  $K_1 \cup K_2, K_4$  y  $K_5 \cup K_6$ . Debe ser  $R_n \cap (K_1 \cup K_2) \neq \emptyset$  y  $R_n \cap (K_5 \cup K_6) \neq \emptyset$  para que  $K_4$  esté en  $I(R_n)$  y no en  $R_n$ . Eso implica que se puede obtener  $R = (R_n \circ K_4) \cap [o, oi]$  tal que  $T_k(R) = E_2$ .

□

Ahora consideramos el subconjunto  $C\text{-DCR}$  que contiene a las relaciones convexas de DCR y probamos que al añadir cualquier relación  $R_N$  con proyección no convexa se puede generar algebraicamente una relación cardinal del tipo  $T_c(E_i \times \mathcal{B}_{ia})$ , o bien,  $T_c(\mathcal{B}_{ia} \times E_i)$ . Estas relaciones tienen un proyección que es la relación universal de IA y la otra proyección es una relación esquina máxima y las llamaremos *relaciones cardinales rectangulares tipo esquina*.

**Lema 4.5.** *Si  $R_N$  es una relación de DCR tal que  $T_r(R_N)_x$  o  $T_r(R_N)_y$  es no convexa entonces a partir de las relaciones de  $C\text{-DCR} \cup \{R_N\}$  y las operaciones del álgebra del modelo DCR se puede generar una relación cardinal rectangular tipo esquina.*

**Demostración.**

Si la proyección  $T_r(R_N)_x$  no es convexa entonces tampoco es preconvexa (Prop. 4.6). Para los distintos casos de relación no preconvexa analizados en la Proposición 4.7 se puede generar algebraicamente una relación cardinal rectangular tipo esquina. Mostramos cómo se genera en el primer caso y en el resto el proceso es análogo.

Si  $I(T_r(R_N)_x) \setminus T_r(R_N)_x$  contiene a  $K_2$  y  $T_r(R_N)_x \cap K_1 = \emptyset$  entonces sabemos que  $E_1 = T_k((T_r(R_N)_x \circ K_5) \cap [o, oi])$ . Sean las relaciones cardinales rectangulares  $R_1 = T_c(K_5 \times \mathcal{B}_{ia})$  y  $R_2 = T_c([o, oi] \times \mathcal{B}_{ia})$ , ambas convexas. Operando con relaciones cardinales rectangulares obtendríamos la relación tipo esquina  $T_c(E_1 \times \mathcal{B}_{ia}) = (R_N \circ_w R_1) \cap R_2$ . En efecto, por la Proposición 4.2 tendríamos  $(R_N \circ_w R_1) \cap R_2 = T_c((T_r(R_N) \circ K_5 \times \mathcal{B}_{ia}) \cap [o, oi] \times \mathcal{B}_{ia})$ . Entonces  $(T_r(R_N) \circ K_5 \times \mathcal{B}_{ia}) \cap [o, oi] \times \mathcal{B}_{ia}$  es una relación  $R$  cuya  $x$ -proyección cumple  $R_x = T_k(E_1)$  y la  $y$ -proyección es la relación universal. Por tanto  $(R_N \circ_w R_1) \cap R_2 = T_c(R_x \times \mathcal{B}_{ia}) = T_c(E_1 \times \mathcal{B}_{ia})$ . Si la proyección no convexa fuera  $T_r(R_N)_y$  entonces de manera análoga se puede generar la relación tipo esquina  $T_c(\mathcal{B}_{ia} \times E_1)$  realizando las operaciones  $(R_N \circ_w R_1) \cap R_2$ , donde en este caso  $R_1 = T_c(\mathcal{B}_{ia} \times K_5)$  y  $R_2 = T_c(\mathcal{B}_{ia} \times [o, oi])$ . □

Llamamos  $\overline{C\text{-DCR} \cup \{R\}}$  a la menor subálgebra del modelo DCR generada por el conjunto de relaciones convexas junto a otra relación adicional  $R$ . Cuando  $R$  es una relación con una proyección no convexa entonces la subclase  $\overline{C\text{-DCR} \cup \{R\}}$  resulta intratable, pues el problema de decidir la consistencia es NP-completo. Este resultado se muestra en el siguiente teorema.

**Teorema 4.8.** *Si  $R_N$  una relación cardinal rectangular tal que  $T_r(R)_x$  o  $T_r(R)_y$  es no convexa entonces  $\text{CSPSAT}(\overline{C\text{-DCR} \cup \{R_N\}})$  es NP-completo.*

### Demostración.

La pertenencia a la clase NP está clara ya que  $\overline{C\text{-DCR} \cup \{R_N\}}$  es una subclase de  $2^{\mathcal{B}_{rec}}$  y por el Teorema 4.7  $\text{CSPSAT}(2^{\mathcal{B}_{rec}})$  es NP-completo. El conjunto  $\overline{C\text{-DCR} \cup \{R_N\}}$  debe contener una relación cardinal tipo esquina, puesto que el Lema 4.5 asegura que puede generarse algebraicamente una relación de este tipo a partir de las relaciones de  $C\text{-DCR} \cup \{R_N\}$ . Veamos que existe una reducción polinomial de 3SAT a  $\text{CSPSAT}(\overline{C\text{-DCR} \cup \{R_N\}})$ . Para tal propósito adaptamos la reducción, mostrada en [NB95], del problema 3SAT al problema de la consistencia de una red de IA construida a partir de una relación esquina y relaciones convexas. Nosotros tenemos que considerar los posibles casos de relación cardinal tipo esquina:  $T_c(E_i \times \mathcal{B}_{ia})$  y  $T_c(\mathcal{B}_{ia} \times E_i)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ . Sólo mostramos la reducción para relaciones tipo  $T_c(E_i \times \mathcal{B}_{ia})$ , pues la reducción para las relaciones tipo esquina con  $y$ -proyección no convexa es análoga. Por claridad usamos la notación  $T_c(R)$ , donde  $R$  es una relación del álgebra de rectángulos en lugar de usar directamente la relación cardinal, que tendría una expresión más larga.

**Caso 1** Partimos de que  $\overline{C\text{-DCR} \cup \{R_N\}}$  contiene a la relación  $T_c(E_1 \times \mathcal{B}_{ia}) = T_c(\{di, si, oi, d, s, f, e\} \times \mathcal{B}_{ia})$ . Sea  $D = \{C_i\}$  un conjunto de cláusulas, donde  $C_i = l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee l_{i,3}$ . Construimos una red  $\mathfrak{N}$  con variables que representan regiones rectangulares y restricciones binarias en las que sólo se usan relaciones cardinales de esta subclase. A cada literal  $l_{i,j}$  se asocia un par de regiones  $X_{i,j}, Y_{i,j}$  y se establece la restricción con la relación tipo esquina:

$$X_{i,j} T_c(\{di, si, oi, d, s, f, e\} \times \mathcal{B}_{ia}) Y_{i,j}$$

Se considera la relación cardinal convexa  $T_c(\{b, m, o, fi, di\} \times \mathcal{B}_{ia})$  y se añaden las siguientes restricciones para cada cláusula  $C_i$ :

$$\begin{aligned} X_{i,1} T_c(\{b, m, o, fi, di\} \times \mathcal{B}_{ia}) Y_{i,3} \\ X_{i,2} T_c(\{b, m, o, fi, di\} \times \mathcal{B}_{ia}) Y_{i,1} \\ X_{i,3} T_c(\{b, m, o, fi, di\} \times \mathcal{B}_{ia}) Y_{i,2} \end{aligned}$$

Se considera la relación cardinal convexa  $T_c(\{b, m, o, fi, d, s, f, e\} \times \mathcal{B}_{ia})$  y por cada par  $l_{i,j}, l_{k,m}$  de literales complementarios se añaden las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} X_{k,m} T_c(\{b, m, o, fi, d, s, f, e\} \times \mathcal{B}_{ia}) Y_{i,j} \\ X_{i,j} T_c(\{b, m, o, fi, d, s, f, e\} \times \mathcal{B}_{ia}) Y_{k,m} \end{aligned}$$

Sabemos por el Teorema 4.1 que  $\mathfrak{N}$  es consistente si y sólo si  $T_r(\mathfrak{N})$  es consistente. Por otra parte, dado que para cualquier relación  $R$  de la red se tiene que  $T_r(R)_y$  es la relación

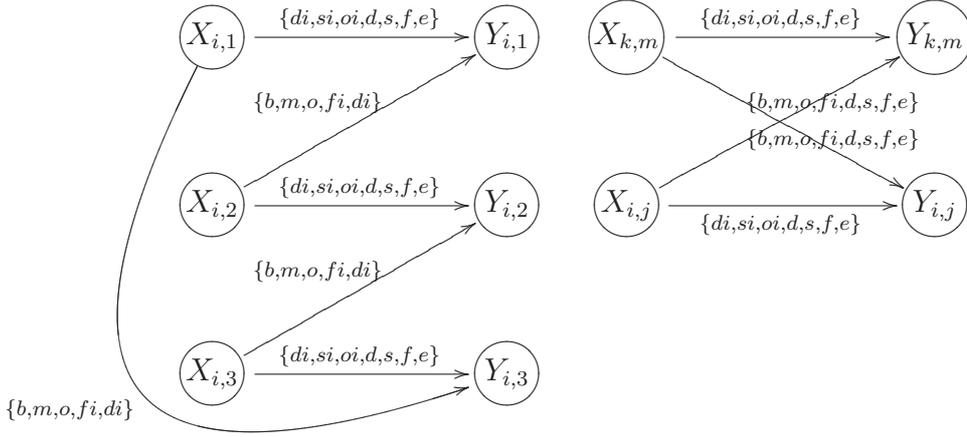


Figura 4.9: Relaciones para la cláusula  $C_i$  y literales complementarios  $l_{i,j}$  y  $l_{k,m}$  de la reducción del caso 1.

universal entre intervalos, resulta que  $T_r(\mathfrak{N})$  es consistente si y sólo si la red de IA con las  $x$ -proyecciones es consistente. Luego  $\mathfrak{N}$  es consistente si y sólo si  $T_r(\mathfrak{N})_x$  es consistente.

En el grafo parcial de la Figura 4.9 se muestran las relaciones de  $T_r(\mathfrak{N})_x$  que afectan a las variables correspondientes a los literales de cada cláusula  $C_i$  y a las variables de literales complementarios, donde ahora las variables representan intervalos. Si todas las parejas de intervalos  $X_{i,j}, Y_{i,j}$  de un literal de la cláusula  $C_i$  se relacionan mediante alguna de las relaciones de  $E_1 \setminus \{di\}$  entonces la red  $T_r(\mathfrak{N})_x$  resulta inconsistente y en otro caso es consistente. Esto es así porque  $\{si, oi, d, s, f, e\} \circ \{bi, mi, oi, f, d\} = \{bi, mi, oi, f, d\}$ , con lo cual al componer relaciones por camino-consistencia se tendría la relación inducida  $X_{i,1} \{bi, mi, oi, f, d\} Y_{i,3}$  que es la inversa de la relación  $\{b, m, o, fi, di\}$  que se establece en la red  $T_r(\mathfrak{N})_x$  entre esas variables. Pero si al menos una pareja de intervalos  $X_{i,j}, Y_{i,j}$  se relacionan mediante la relación  $di$  la red es consistente. Así pues, podemos interpretar que el literal  $l_{i,j}$  es verdadero cuando la relación entre  $X_{i,j}$  e  $Y_{i,j}$  es  $\{di\}$  y es falso en otro caso.

Por otra parte tenemos que asegurar que si satisface la relación  $\{di\}$  entre los intervalos  $X_{i,j}, Y_{i,j}$  correspondientes a un literal entonces esa relación no se satisface entre los intervalos del literal complementario, pues en otro caso sería como interpretar un literal y su complementario como verdaderos simultáneamente. Las relaciones establecidas en  $T_r(\mathfrak{N})_x$  para los intervalos de literales complementarios impiden esta situación porque la subred que resulta considerando la relación  $\{di\}$  entre  $X_{k,m}, Y_{i,j}$  y también entre  $X_{i,j}, Y_{k,m}$  resulta inconsistente.

Por último comprobamos que con esta transformación del conjunto de cláusulas  $D$  en la red  $\mathfrak{N}$  y posteriormente en  $T_r(\mathfrak{N})_x$ , que claramente se puede hacer en tiempo polinomial, se tiene que  $D$  es satisfacible si y sólo si  $T_r(\mathfrak{N})_x$  es consistente. La red  $\mathfrak{N}$ , o equivalentemente  $T_r(\mathfrak{N})_x$ , es consistente si y sólo si al menos un par de intervalos correspondientes a un

literal  $l_{i,j}$  de cada cláusula  $C_i$  se relacionan mediante  $\{di\}$  (el literal  $l_{i,j}$  toma el valor verdadero) y la relación entre intervalos del literal complementario es una relación del conjunto  $E_1 \setminus \{di\}$  (el literal complementario toma el valor falso). Por todo lo expuesto anteriormente se deduce que  $D$  es satisfacible si y sólo si  $T_r(\mathfrak{N})_x$  es consistente. Por tanto el problema 3SAT se reduce al problema de decidir la consistencia de la red  $\mathfrak{N}$  construida sólo a partir de relaciones cardinales rectangulares convexas y la relación tipo esquina  $T_c(E_1 \times \mathcal{B}_{ia})$ .

**Caso 2** Partimos de que  $\overline{C-DCR \cup \{R_N\}}$  contiene a la relación  $T_c(E_2 \times \mathcal{B}_{ia})$ . Ahora construimos una red  $\mathfrak{N}$  y a partir de ella la red  $T_r(\mathfrak{N})_x$  considerando que por cada literal  $l_{i,j}$  se establece la restricción con la relación esquina máxima  $E_2 = \{oi, si, di, o, fi\}$ :

$$X_{i,j} \{oi, si, di, o, fi\} Y_{i,j}$$

y para cada cláusula  $C_i$  se añaden las siguientes restricciones convexas:

$$\begin{aligned} Y_{i,1} \{b, m, o, fi, di\} X_{i,2} \\ Y_{i,2} \{b, m, o, fi, di\} X_{i,3} \\ Y_{i,3} \{b, m, o, fi, di\} X_{i,1} \end{aligned}$$

Por cada par  $l_{i,j}, l_{k,m}$  de literales complementarios se añaden las mismas restricciones que en el caso 1. Si todas las parejas de intervalos  $X_{i,j}, Y_{i,j}$  de un literal de la cláusula  $C_i$  se relacionan mediante alguna de las relaciones de  $E_2 \setminus \{oi\}$  entonces la red  $T_r(\mathfrak{N})_x$  resulta inconsistente y en otro caso es consistente. Podemos interpretar que el literal  $l_{i,j}$  es verdadero cuando la relación entre  $X_{i,j}$  e  $Y_{i,j}$  es  $\{oi\}$  y es falso en otro caso. Además, si se satisface la relación  $\{oi\}$  entre los intervalos correspondientes a un literal entonces esa relación no se satisface entre los intervalos del literal complementario, por las restricciones establecidas en  $T_r(\mathfrak{N})_x$  para los intervalos de literales complementarios. Por razonamiento análogo al caso 1 se deduce que  $D$  es satisfacible si y sólo si  $T_r(\mathfrak{N})_x$  es consistente. Por tanto el problema 3SAT se reduce también al problema de decidir la consistencia de la red  $\mathfrak{N}$  construida sólo a partir de relaciones cardinales rectangulares convexas y la relación tipo esquina  $T_c(E_2 \times \mathcal{B}_{ia})$ .

**Caso 3**  $\overline{C-DCR \cup \{R_N\}}$  contiene a la relación  $T_c(E_3 \times \mathcal{B}_{ia})$ . Construimos una red  $\mathfrak{N}$  y a partir de ella la red  $T_r(\mathfrak{N})_x$  considerando que por cada literal  $l_{i,j}$  se establece la restricción con la relación esquina máxima  $E_3 = \{d, s, f, e, o, fi, di\}$ :

$$X_{i,j} \{d, s, f, e, o, fi, di\} Y_{i,j}$$

Para cada cláusula  $C_i$  se añaden las mismas restricciones que en el caso 2 y por cada par

$l_{i,j}, l_{k,m}$  de literales complementarios se añaden las restricciones:

$$\begin{aligned} Y_{i,j} \{b, m, o, fi, d, s, f, e\} X_{k,m} \\ Y_{k,m} \{b, m, o, fi, d, s, f, e\} X_{i,j} \end{aligned}$$

Si todas las parejas de intervalos  $X_{i,j}, Y_{i,j}$  de un literal de la cláusula  $C_i$  se relacionan mediante alguna de las relaciones de  $E_3 \setminus \{d\}$  entonces la red  $T_r(\mathfrak{N})_x$  resulta inconsistente y en otro caso es consistente. Interpretamos que el literal  $l_{i,j}$  es verdadero cuando la relación entre  $X_{i,j}$  e  $Y_{i,j}$  es  $\{d\}$  y es falso en otro caso. Si se satisface la relación  $\{d\}$  entre los intervalos correspondientes a un literal entonces esa relación no se satisface entre los intervalos del literal complementario, por las restricciones establecidas para los intervalos de literales complementarios. De lo anterior se deduce que  $D$  es satisfacible si y sólo si  $T_r(\mathfrak{N})_x$  es consistente. Por tanto el problema 3SAT se reduce al problema de decidir la consistencia de la red  $\mathfrak{N}$  construida sólo a partir de relaciones cardinales rectangulares convexas y la relación tipo esquina  $T_c(E_3 \times \mathcal{B}_{ia})$ .

**Caso 4**  $\overline{C-DCCR \cup \{R_N\}}$  contiene a la relación  $T_c(E_4 \times \mathcal{B}_{ia})$ . Construimos una red  $\mathfrak{N}$  y a partir de ella la red  $T_r(\mathfrak{N})_x$  considerando que por cada literal  $l_{i,j}$  se establece la restricción con la relación esquina máxima  $E_4 = \{o, fi, d, s, fe, oi, si\}$ :

$$X_{i,j} \{o, fi, d, s, fe, oi, si\} Y_{i,j}$$

Para cada cláusula  $C_i$  se añaden las mismas restricciones que en el caso 1 y por cada par  $l_{i,j}, l_{k,m}$  de literales complementarios se añaden las mismas restricciones que en el caso 3. Si todas las parejas de intervalos  $X_{i,j}, Y_{i,j}$  de un literal de la cláusula  $C_i$  se relacionan mediante alguna de las relaciones de  $E_3 \setminus \{o\}$  entonces la red  $T_r(\mathfrak{N})_x$  resulta inconsistente y en otro caso es consistente. Interpretamos que el literal  $l_{i,j}$  es verdadero cuando la relación entre  $X_{i,j}$  e  $Y_{i,j}$  es  $\{o\}$  y es falso en otro caso. Si se satisface la relación  $\{o\}$  entre los intervalos correspondientes a un literal entonces esa relación no se satisface entre los intervalos del literal complementario, por las restricciones establecidas para los intervalos de literales complementarios. De lo anterior se deduce que  $D$  es satisfacible si y sólo si  $T_r(\mathfrak{N})_x$  es consistente. Por tanto el problema 3SAT se reduce al problema de decidir la consistencia de la red  $\mathfrak{N}$  construida sólo a partir de relaciones cardinales rectangulares convexas y la relación tipo esquina  $T_c(E_4 \times \mathcal{B}_{ia})$ .

Del análisis de casos anterior concluimos que el problema 3SAT se reduce al problema de decidir la consistencia de una red  $\mathfrak{N}$  de relaciones cardinales rectangulares convexas y cualquiera de las relaciones tipo esquina  $T_c(E_i \times \mathcal{B}_{ia})$ . Por tanto, existe una reducción polinomial de 3SAT a  $\text{CSPSAT}(\overline{C-DCCR \cup \{R_N\}})$ , siendo  $R_N$  cualquier relación cardinal rectangular con  $x$ -proyección no convexa y de forma análoga se llega a la misma conclu-

sión cuando la  $y$ -proyección de  $R_N$  es no convexa. Por tanto, al ser el problema 3SAT NP-completo y  $\text{CSPSAT}(\overline{C\text{-DCR}} \cup \{R_N\})$  perteneciente a NP se deduce que este último problema es NP-completo.  $\square$

### 4.5.2. Relaciones con Proyecciones Convexas

Como consecuencia del Teorema 4.8 la subclase de relaciones cardinales rectangulares convexas no puede aumentarse con relaciones no convexas que tengan proyecciones no convexas sin que se pierda la tratabilidad. Pero, ¿qué ocurriría si añadimos un relación  $R$  no convexa tal que  $T_r(R)_x$  y  $T_r(R)_y$  son relaciones convexas? En este caso no podemos afirmar que la subclase generada sea intratable. Sin embargo, existen relaciones de DCR no convexas con proyecciones convexas a partir de las cuales puede generarse algebraicamente una relación con proyección no convexa.

Un ejemplo sencillo es la relación  $R = \{SW, B:S:SW:W, S\}$ , para la que  $T_r(R) = \{b, m\} \times \{b, m\} \cup \{o, fi\} \times \{o, fi\} \cup \{d, s, f, e\} \times \{b, m\}$ . Tanto  $T_r(R)_x$  como  $T_r(R)_y$  son relaciones convexas de IA. Consideremos la relación convexa  $R_c = \{SW, S:SW, S\}$ . Entonces  $R \cap R_c = R_i = \{SW, S\}$ , y  $T_r(R_i) = \{b, m, d, s, f, e\} \times \{b, m\}$  para la que  $T_r(R_i)_x$  no es preconvexa. Por el Lema 4.5, una relación cardinal rectangular tipo esquina puede ser derivada algebraicamente a partir de  $C\text{-DCR} \cup \{R_i\}$  y eso implica según el Teorema 4.8 que  $\text{CSPSAT}(\overline{C\text{-DCR}} \cup \{R_i\})$  es NP-completo. Pero no está claro que este problema sea intratable para cualquier relación  $R$  no convexa con proyecciones convexas que se añada al conjunto  $C\text{-DCR}$ . Por tanto no podemos afirmar que la subclase  $C\text{-DCR}$  sea maximal con respecto a la tratabilidad.

### 4.5.3. Algoritmo de Backtracking para Relaciones Cardinales Rectangulares

Para manejar conjuntos no tratables de relaciones cardinales rectangulares se pueden utilizar algunas técnicas para mejorar el tiempo de los algoritmos de búsqueda por backtracking. En razonamiento espacial ya se han estudiado heurísticas similares para redes de relaciones topológicas [RN01]. En el Capítulo 2, Sección 2.2 describimos un algoritmo general eficiente basado en backtracking para decidir la consistencia de un conjunto de restricciones. Este algoritmo puede aplicarse al modelo DCR y que se cumplen las condiciones necesarias:

1. El cálculo de la operación de composición es eficiente, como sugerimos en la Sección 4.2.

**Entrada:** Una red de restricciones cardinales rectangulares  $\mathfrak{N} = (\mathfrak{C}, \mathfrak{V})$ , donde  $\mathfrak{C} = \{x_i R_{ij} x_j\}$  tal que  $x_i, x_j \in \mathfrak{V}$  y  $R_{ij} \in 2^{\mathcal{B}^{rec}}$ ; y el conjunto  $C\text{-DCR} \subset 2^{\mathcal{B}^{rec}}$ .

**Salida:** ‘Verdadero’ si y sólo si  $\mathfrak{N}$  es consistente.

**Algoritmo CONSISTENCIADCR**

1. PC-débil( $\mathfrak{N}$ ) (algoritmo de la Figura 4.8)
2. Si PC-débil( $\mathfrak{N}$ ) devuelve ‘Fallo’ Entonces Devolver ‘Falso’
3. SiNo elegir una restricción no procesada  $x_i R_{ij} x_j$  y dividir  $R_{ij}$  en  $S_1, \dots, S_k \in C\text{-DCR}$  tal que  $S_1 \cup \dots \cup S_k = R_{ij}$
4. Si no se puede dividir ninguna restricción Entonces Devolver ‘Verdadero’
5. Para cada  $S_l (1 \leq l \leq k)$  Hacer
6.  $R_{ij} \leftarrow S_l$
7. Si CONSISTENCIADCR( $\mathfrak{N}$ ) Entonces Devolver ‘Verdadero’
8. FinPara
9. Devolver ‘Falso’

Figura 4.10: Algoritmo de backtracking para decidir la consistencia de un conjunto de restricciones cardinales rectangulares.

2. Hemos identificado un subconjunto tratable de relaciones cardinales rectangulares convexas para el que hemos propuesto varios métodos polinomiales para decidir el problema de la consistencia.
3. El subconjunto tratable de relaciones convexas contiene a las 36 relaciones básicas del modelo DCR más otras 364 relaciones disyuntivas, lo cual puede ayudar a reducir significativamente el factor de ramificación en la búsqueda. En nuestro caso, una relación cardinal rectangular cualquiera puede verse como la unión de relaciones cardinales rectangulares convexas y no solamente como la unión de relaciones básicas, lo que disminuye el tamaño de las etiquetas.
4. El algoritmo PC-débil es un procedimiento completo para decidir la consistencia del subconjunto convexo de relaciones rectangulares. En este caso nos sirve también como un método de preprocesamiento y poda (especialmente para problemas de gran tamaño).

El algoritmo CONSISTENCIADCR (ver Figura 4.10) es una variación del algoritmo general mostrado en la Sección 2.2. Como el algoritmo PC-débil decide la consistencia de una red de restricciones cardinales convexas, en el paso 4 no es necesario llamar a la función DECIDIR cuando todas las relaciones son convexas ya que se ha comprobado la consistencia en el paso 1.



## Parte II

# Razonamiento Espacial Cualitativo con Relaciones Cardinales Basado en Lógicas Modales



## Capítulo 5

# Razonamiento Espacial Cualitativo Basado en Lógicas Modales

Al contrario que los problemas de satisfacción de restricciones (CSP), las lógicas permiten un razonamiento estructurado sobre dominios que, en general, pueden ser infinitos y con una capacidad de cálculo que se ve aumentada gracias a la utilización de operadores como los cuantificadores (en el caso de las lógicas de primer orden), la disyunción generalizada y la negación (permitiéndonos utilizar todo el poder expresivo del álgebra booleana). Por ejemplo, con un álgebra de relaciones podemos expresar como mucho información incompleta del tipo  $(a R_1 b \vee a R_2 b) \wedge (a R_1 c \vee a R_2 c)$ , donde  $R_1$  y  $R_2$  son dos relaciones binarias cualesquiera. Sin embargo, con las lógicas es posible expresar información incompleta entre cualquier par de variables:  $(a R_1 b) \vee (a R_1 c)$ ; o reglas del tipo “si  $a R_2 b$  entonces  $a R_2 c$ ”.

En este capítulo definiremos los conceptos básicos sobre lógicas modales. Posteriormente haremos un repaso del trabajo existente sobre lógicas modales para el razonamiento espacial. Por último, planteamos el problema de extender las lógicas modales temporales basadas en intervalos para dar lugar a una lógica espacial de rectángulos.

### 5.1. Conceptos Generales sobre Lógicas Modales

Dentro de la lógica formal, las lógicas *modales* se ocupan de enunciados afectados por modalidades del tipo “posiblemente” y “necesariamente”. La lógica modal es *intencional*, en el sentido de que el valor de verdad de un enunciado que contiene expresiones modales no depende exclusivamente del valor de verdad de sus enunciados componentes.

### 5.1.1. Sintaxis y Semántica

El lenguaje de la lógica (proposicional) modal puede verse como una extensión del lenguaje (proposicional) clásico. Al alfabeto clásico se le añaden *operadores modales* o *modalidades* sobre fórmulas, denotados generalmente con  $\diamond$  y  $\square$  (informalmente: “es posible que” y “es necesario que”). El *lenguaje básico modal proposicional* tiene una estructura similar a la del lenguaje de la lógica clásica proposicional, añadiendo una regla para el operador modal:

$$\phi ::= p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid \diamond\phi, \quad (5.1)$$

donde  $p \in \mathcal{AP}$ , siendo  $\mathcal{AP}$  el conjunto de todas las variables proposicionales.

El resto de operadores clásicos ( $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,  $\vee$ , etc.) se pueden expresar a partir de  $\neg$  y  $\wedge$ , ya que  $\{\neg, \wedge\}$  forma un conjunto completo de conectivas lógicas. Así, por ejemplo,  $\phi \rightarrow \varphi$  es equivalente a  $\phi \wedge \neg\varphi$ . El operador modal  $\square$  tampoco es necesario añadirlo al lenguaje modal ya que  $\diamond$  y  $\square$  son operadores *duales*, es decir,  $\square\phi = \neg\diamond\neg\phi$ .

En la lógica proposicional clásica una *interpretación* para una fórmula consiste en una asignación de valores de verdad (consistente y completa) para todas las variables proposicionales que aparecen en ella. En el lenguaje modal las asignaciones de valores de verdad son relativas a *mundos posibles*<sup>1</sup>. Un *modelo* para el lenguaje modal es una tripleta  $\langle W, R, \mathcal{V} \rangle$ , en la que  $W$  es un conjunto de *mundos*,  $R \subseteq W \times W$  es una *relación de accesibilidad*, y  $\mathcal{V}$  es una función que asigna, para cada mundo  $w$ , el conjunto  $\mathcal{V}(w)$  de todas y solamente todas las variables proposicionales verdaderas en  $w$ . El par  $\langle W, R \rangle$  recibe el nombre de *marco*. Por ejemplo, dada una fórmula cualquiera  $\phi$  de la lógica definida por la gramática de la Ecuación (5.1), podemos definir recursivamente la *verdad* o *satisfacibilidad* de  $\phi$  con respecto a un mundo  $w$  en un modelo  $M$  (simbólicamente  $M, w \Vdash \phi$ ) como se indica a continuación:

1.  $M, w \Vdash p$  si y sólo si  $p \in \mathcal{V}(w)$ ,
2.  $M, w \Vdash \neg\phi$  si y sólo si no se cumple que  $M, w \Vdash \phi$ ,
3.  $M, w \Vdash \phi \wedge \psi$  si y sólo si  $M, w \Vdash \phi$  y  $M, w \Vdash \psi$ ,
4.  $M, w \Vdash \diamond\phi$  si y sólo si existe  $w' \in W$  tal que si  $w R w'$  entonces  $M, w' \Vdash \phi$ .

Esta definición de verdad se puede generalizar y decir que  $\phi$  es *satisfacible globalmente* con respecto a un modelo  $M$  ( $M \Vdash \phi$ ) si es verdad para todo  $w \in W$ . Asimismo, decimos

<sup>1</sup>Esta forma de interpretar las lógicas modales en base a mundos posibles y relaciones de accesibilidad recibe el nombre de *semántica relacional* o *semántica de Kripke* debido a su autor Saul Kripke [Kri59].

Nombre	Fórmula	Condición sobre $R$	
<b>K</b>	$\Box(\phi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Box\varphi)$		
<b>T</b>	$\Box\phi \rightarrow \phi$	Reflexiva	$\forall x[x R x]$
<b>4</b>	$\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$	Transitiva	$\forall x, y, z [x R y \wedge y R z \rightarrow x R z]$
<b>B</b>	$\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$	Simétrica	$\forall x, y[x R y \rightarrow y R x]$
<b>D</b>	$\Box\phi \rightarrow \Diamond\phi$	Serial	$\forall x\exists y[x R y]$
<b>5</b>	$\Diamond\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$	Euclídea	$\forall x, y, z[x R y \wedge x R z \rightarrow y R z]$

Tabla 5.1: Axiomas más comunes de la lógica modal.

que  $\phi$  es *válida* si es verdad en todo modelo (denotado con  $\Vdash \phi$ ), y  $\phi$  es *válida con respecto a un marco*  $\langle W, R \rangle$  si es verdad en todo modelo  $M$  basado en dicho marco.

La relación  $R$  es binaria si las modalidades son unarias, ternaria si las modalidades son binarias, etc. Intuitivamente,  $W$  es el conjunto de los mundos posibles y  $R$  es la relación de accesibilidad entre ellos. Entonces,  $R$  expresa una posibilidad relativa. En principio, no todo lo que es posible en un mundo es posible en otro mundo. Supongamos tres situaciones:  $w_0, w_1, w_2$ . El mundo  $w_0$  es la situación actual, en la que el ministro Sr.  $x$  ha participado en un acto de corrupción (que necesariamente había de ser descubierto) y ha quedado destituido del cargo. El mundo  $w_1$  es una situación anterior en la que el Sr.  $x$  estaba pensando en participar en el acto de corrupción y  $w_2$  es una situación exactamente igual a la actual excepto en que el Sr.  $x$  no ha participado en el acto de corrupción y no ha sido destituido. Hay un sentido del término “posible” en el que el enunciado “Es posible que el Sr.  $x$  no sea destituido” es verdadero en  $w_1$  pero no en  $w_0$ . De modo que  $w_2$  es un mundo posible relativo a  $w_1$ , pero no relativo a  $w_0$ . Expresamos esta posibilidad relativa diciendo que  $w_1 R w_2$  ( $w_2$  es accesible desde  $w_1$ ), pero no  $w_0 R w_2$ .

### 5.1.2. Lógicas modales normales

Los tipos de lógicas modales en las que estamos interesados son las llamadas *lógicas normales*, es decir, la familia de lógicas que se obtienen de extender la lógica modal básica K. La lógica K contiene todas las tautologías de la lógica proposicional clásica, el axioma  $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ , y es cerrada bajo las siguientes reglas de inferencia:

- Si  $\phi, \phi \rightarrow \varphi \in K$  entonces  $\varphi \in K$  (*Modus Ponens*).
- Si  $\phi \in K$  y  $p$  es verdadero en  $\phi$  entonces  $\phi[\varphi|p] \in K$ . (*Sustitución Uniforme*).
- Si  $\phi \in K$  entonces  $\Box\phi \in K$  (*Necessitation*).

La Tabla 5.1 muestra los axiomas más comunes y la condición implicada sobre la relación de accesibilidad. La Tabla 5.2 muestra varias lógicas modales normales derivadas de la combinación de tales axiomas.

Nombre	Axiomas	Condición sobre $R$
K	K	Ninguna restricción
T	K, T	Reflexiva
K4	K, 4	Transitiva
S4	K, T, 4	Preorden (reflexiva y transitiva)
S5	S4, B o T, 5	Equivalencia
D	K, T	Serial

Tabla 5.2: Lenguajes modales más comunes.

Además, las lógicas modales que estudiaremos son lógicas *multi-modales*, es decir, pueden contener más de un operador modal  $\diamond$ . Cada modalidad  $\diamond_i$  se asocia con una relación de accesibilidad distinta  $R_i \subseteq W \times W$ , y por tanto  $M, w \Vdash \diamond_i \phi$  si y sólo si existe  $w' \in W$  tal que si  $w R_i w'$  entonces  $M, w' \Vdash \phi$ .

### 5.1.3. Decidibilidad y Complejidad

Los problemas computacionales más relevantes sobre lógicas modales son el problema de la *satisfacibilidad*, el problema de la *validez* y el problema de *model checking*,

El problema de la satisfacibilidad (resp. validez) consiste en determinar si una fórmula  $\phi$  es satisfacible (resp. válida). Así, decimos que una lógica modal es *decidible* cuando el problema de la satisfacibilidad (resp. validez) es decidible, es decir, es posible (sin tener en cuenta restricciones de tiempo y espacio) escribir un algoritmo que tome una fórmula modal como entrada y termine después de un número finito de pasos diciéndonos correctamente si la fórmula es verdadera en algún modelo (resp. en todos los modelos). Satisfacibilidad y validez son problemas duales, en el sentido de que una fórmula  $\phi$  es válida si y sólo si  $\neg\phi$  no es satisfacible, y por tanto si encontramos un método para resolver uno de los problemas entonces el mismo método nos sirve para resolver el otro problema.

El problema de *model checking* se puede enunciar de forma general del siguiente modo: *dado un modelo  $M$ , y una fórmula  $\phi$ , devolver el conjunto de mundos en  $M$  que satisfacen  $\phi$* . Esta técnica es utilizada en la comprobación de sistemas *hardware* y *software*, representados mediante lógicas temporales, para detectar la ausencia de ciclos o de estados no deseados que pueden provocar que el sistema falle. Aunque el problema de *model checking* es de gran interés se le ha prestado más atención al problema de la satisfacibilidad y validez de las fórmulas en el dominio de las lógicas temporales y espaciales. Nosotros, en las lógicas propuestas en esta tesis, también nos centraremos en el problema de la satisfacibilidad y la validez.

La complejidad asociada al problema de la satisfacibilidad/validez depende de la semántica de la lógica modal. En general podemos decir que toda lógica modal cuyas

$$\begin{aligned}
ST_x(p) &= P(x) \\
ST_x(\neg\phi) &= \neg ST_x(\phi) \\
ST_x(\phi \wedge \varphi) &= ST_x(\phi) \wedge ST_x(\varphi) \\
ST_x(\diamond_i\phi) &= \exists y(R_i(x, y) \wedge ST_y(\phi)) \\
ST_x(\Box_i\phi) &= \forall y(R_i(x, y) \rightarrow ST_y(\phi))
\end{aligned}$$

Figura 5.1: Traducción estándar de la lógica modal a la lógica de primer orden.

relaciones de accesibilidad puede expresarse en lógica de primer orden es como mucho semi-decible. Esto es así porque es posible traducir las fórmulas de la lógica modal a las fórmulas de la lógica de primer orden mediante una *traducción estándar* [BvB06] (ver la Figura 5.1). En el caso más simple, si consideramos un lenguaje modal básico como el descrito anteriormente (Ecuación (5.1)), sobre el que no establecemos ninguna restricción sobre la relación de accesibilidad, el problema de la satisfacibilidad es decidable. Una forma sencilla de ver esto es que la traducción estándar anterior puede reducirse al fragmento de la lógica de primer orden con dos variables (fragmento de la lógica de primer orden en el que cada fórmula contiene sólo dos variables), cuyo problema de satisfacibilidad es decidable (NEXPTIME-completo) [BvB06].

El problema surge cuando trabajamos con lenguajes modales no básicos, donde ampliamos la lógica con otros axiomas que introducen restricciones sobre las relaciones de accesibilidad. Estas modificaciones pueden elevar el coste computacional de los problemas de decisión, pudiendo llegar a ser fuertemente indecidibles (ni siquiera semi-decibles). Este es el caso de muchas de las lógicas modales espaciales y temporales que veremos en las siguientes secciones y en el capítulo siguiente.

## 5.2. Lógicas Modales Espaciales

El interés de la aplicación de lógicas modales para razonamiento cualitativo se debe principalmente a que suponen un compromiso entre expresividad y eficiencia. Por un lado, las lógicas modales son teorías formales que permiten expresar propiedades con un nivel de complejidad mayor que las teorías basadas en satisfacción de restricciones, aproximándose a la expresividad de una lógica de primer orden. Por otro lado, los problemas de razonamiento para este tipo de lógicas son computacionalmente menos costosos que los de las teorías de primer orden.

En la literatura, se han dado diferentes interpretaciones a los mundos y a la relación de accesibilidad, y las lógicas modales han sido aplicadas en diferentes contextos. Cuando, por ejemplo, los mundos se interpretan como *instantes temporales*, y la relación de accesibilidad es una relación de orden total entre los instantes, entonces a la lógica se le da el

nombre de *lógica temporal* (de puntos): el operador modal  $\diamond$  se interpreta como *existe en el futuro*, y su dual como *siempre en el futuro*.

En esta tesis estamos interesados en las *lógicas modales espaciales* que son aquellas donde los mundos posibles son objetos espaciales (puntos, líneas, rectángulos, etc.) sobre alguna estructura espacial definida previamente (espacio topológico, espacio geométrico afín, espacio geométrico métrico, plano euclídeo, etc.), y las conectivas lógicas y operadores modales hacen referencia, según el caso, a alguna propiedad espacial (relación topológica, direccional, de proximidad, etc.) entre los objetos. La variedad de posibles clases de objetos y relaciones da lugar a un amplio abanico de posibles lógicas espaciales. Un estudio reciente de las principales teorías matemáticas del espacio (desde lenguajes de restricciones hasta lenguajes de primer o segundo orden) lo podemos encontrar en [APHvB07], y más concretamente sobre lógicas modales en [AvB02] y [vBB07].

En esta sección nos centraremos únicamente en las lógicas modales aplicables en el campo de la Inteligencia Artificial para la representación y razonamiento cualitativo en el espacio desde un punto de vista topológico y direccional.

### 5.2.1. Lógicas Modales con Relaciones Topológicas

Los trabajos existentes sobre lógicas modales con relaciones topológicas se centran en la interpretación topológica de la lógica S4 y en la interpretación de los operadores modales como relaciones del cálculo RCC.

#### Interpretación Topológica de la Lógica S4

En el contexto de las lógicas modales para el razonamiento con relaciones topológicas, el punto de partida es la interpretación topológica de la lógica modal S4, que tiene su origen en los trabajos de Tarski y McKinsey ([Tar56, MT44]). El lenguaje básico de la lógica modal topológica está formado por el conjunto  $\mathcal{AP}$  de todas las variables proposicionales, la conectivas booleanas  $\neg$ ,  $\wedge$ , y los operadores modales  $\Box$ ,  $\diamond$ . Un *modelo topológico* es un espacio topológico  $\langle X, \tau \rangle$  junto con una función de evaluación  $\mathcal{V} : X \mapsto 2^{\mathcal{AP}}$ . La verdad de una fórmula modal en un punto  $x$  sobre un modelo topológico  $M = \langle X, \tau, \mathcal{V} \rangle$  se define inductivamente del siguiente modo:

- $M, x \Vdash p$  si y sólo si  $p \in \mathcal{V}(x)$  para cada  $p \in \mathcal{AP}$ ;
- $M, x \Vdash \neg\phi$  si y sólo si no es cierto que  $M, x \Vdash \phi$ ;
- $M, x \Vdash \phi \wedge \varphi$  si y sólo si  $M, x \Vdash \phi$  y  $M, x \Vdash \varphi$ ;
- $M, x \Vdash \Box\phi$  si y sólo si  $\exists U \in \tau(x \in U \wedge \forall y \in U : M, y \Vdash \phi)$ ;

- $M, x \Vdash \Diamond\phi$  si y sólo si  $\forall U \in \tau(x \in U \rightarrow \exists y \in U : M, x \Vdash \phi)$ .

La utilización de la lógica S4 como una lógica para razonamiento topológico se deduce directamente de interpretar el operador modal  $\Box$  (resp.  $\Diamond$ ) como el operador interior (resp. el operador clausura) en un espacio topológico. Es fácil ver que los axiomas de la lógica S4 se corresponden con los axiomas necesarios para definir un espacio topológico a partir del operador interior [Ben96].

Dicha lógica ha sido extendida con otros operadores para aumentar su capacidad expresiva. En este sentido, recordamos aquí el trabajo de Bennett [Ben94, Ben96], posteriormente extendido por el mismo Bennett, junto con Cohn, Wolter y Zakharyashev, en [BCWZ02]. En [Ben94], Bennett propone interpretar las regiones como sub-conjuntos de un espacio topológico dado, y muestra como es posible utilizar tanto el cálculo proposicional clásico como el cálculo intuicionista, junto con ciertos vínculos de meta-nivel acerca de la deducción de fórmulas, para el razonamiento espacial topológico. De esta forma, un problema de restricciones espaciales puede resolverse a través de la satisfacibilidad de una fórmula lógica. En [Ben96], Bennett extiende su metodología a través de la lógica modal S4 e interpreta el operador modal en un sentido topológico como el operador de *interior*. En el mismo trabajo, se dota a la lógica anterior de un operador modal universal, y un operador de convexidad que llama *convex-hull*, traduciendo un esquema axiomático de primer orden en un esquema modal y realizando al mismo tiempo una comparación entre las fórmulas de la lógica modal y las 8 relaciones básicas del cálculo RCC. Posteriormente, en [BCWZ02], los autores consideran un sistema multi-modal para el razonamiento espacio-temporal basado en el trabajo de Bennett. Otro trabajo relacionado con este tema lo encontramos en [Nut99], donde Nutt describe rigurosamente los fundamentos de la traducción de relaciones topológicas en una lógica modal, introduciendo relaciones topológicas generalizadas. Por último, Kontchakov *et ál.* [KPHWZ08] estudian las propiedades computacionales de varias lógicas espaciales (entre ellas la lógica S4 con la modalidad universal) a las que añaden las restricciones de conectividad  $c(r)$  y  $c^{\leq k}(r)$  cuyo significado es “la región  $r$  es conexa” y “la región  $r$  contiene como mucho  $k$  componentes conexas”, respectivamente.

Es importante destacar que los resultados anteriores explotan básicamente la propiedad de *modelo finito* y la decidibilidad de la lógica clásica proposicional, de la lógica modal S4, y algunas de sus extensiones.

### Lógica Modal Topológica basada en RCC

Al contrario que los trabajos anteriores, otro importante sistema lógico que utiliza todo el poder de la lógica modal para el razonamiento sobre el espacio, en lugar de

utilizarlo solamente para la solución de restricciones, es la *lógica modal con relaciones topológicas* de Lutz y Wolter [LW06]. Lutz y Wolter presentan un conjunto de lógicas modales donde las variables proposicionales son interpretadas como regiones del espacio topológico y las referencias a otras regiones se realizan a través de operadores modales interpretados como relaciones topológicas. Los operadores topológicos estudiados son el conjunto RCC8 y su versión reducida RCC5. En cuanto al tipo de regiones se consideran de forma general aquellas regiones que son subconjuntos regulares, cerrados y no vacíos de un espacio topológico dado. Lutz y Wolter analizan las propiedades computacionales y la expresividad de esta lógica modal para distintas interpretaciones. Consideran un espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  ( $n > 1$ ) sobre el que definen varias estructuras topológicas: 1) el conjunto de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de un espacio topológico; 2) el conjunto de todos los hiper-rectángulos; 3) subestructuras de las estructuras anteriores. En general, todas las lógicas modales basadas en las estructuras anteriores resultan ser indecidibles y algunas de ellas ni siquiera llegan a ser recursivamente enumerables. De especial interés para esta tesis es la lógica modal RCC5 de relaciones topológicas sobre la estructura definida por todos los hiper-rectángulos de un Espacio Euclideo ( $\mathbb{R}^2$ ); Lutz y Wolter demuestran que el problema de la satisfacibilidad de esta lógica no es ni siquiera recursivamente enumerable, lo que significa que no es posible construir un método de deducción semi-decidible para esta lógica en concreto.

### 5.2.2. Lógicas Modales con Relaciones Direccionales

Los trabajos existentes sobre lógicas modales con relaciones direccionales se limitan a estructuras en las que los mundos son puntos pertenecientes a un espacio definido por el producto cartesiano de dos conjuntos totalmente ordenados. La *lógica de compás* y la *lógica de conos* son un ejemplo de este tipo de lógicas.

#### Lógica de Compás

La *lógica de compás* (*Compass Logic*) [Ven90, MR99] es una lógica modal proposicional que se caracteriza por cuatro operadores modales, denotados con los símbolos  $\diamond$ ,  $\diamond$ ,  $\diamond$  y  $\diamond$ . Las variables proposicionales se interpretan sobre puntos pertenecientes a un *marco espacial* del tipo  $\mathbb{F} = \mathbb{H} \times \mathbb{V}$  donde  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{V}$  son dos conjuntos totalmente ordenados cualesquiera que no tienen por qué ser iguales. Las fórmulas de la lógica de compás se obtienen a partir de la siguiente sintaxis abstracta:

$$\phi ::= p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid \diamond\phi \mid \diamond\phi \mid \diamond\phi \mid \diamond\phi.$$

Los modelos son del tipo  $M = \langle \mathbb{F}, \nu \rangle$  donde  $\nu : \mathbb{F} \mapsto 2^{\mathcal{A}P}$  es la función de evaluación.

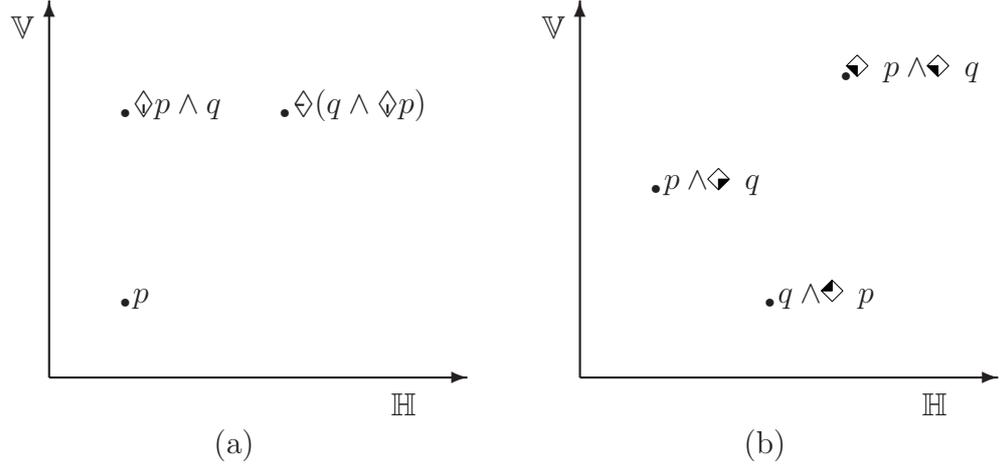


Figura 5.2: Ejemplos de fórmulas verdaderas de la lógica de compás (a) y la lógica de conos (b).

Los operadores modales se interpretan como las cuatro principales direcciones cardinales entre dos puntos dados: *norte*, *sur*, *este*, y *oeste*. Su semántica es la siguiente, donde  $M$  es un modelo y  $(h, v) \in \mathbb{F}$ :

- $M, (h, v) \Vdash p$  si y sólo si  $p \in \nu((h, v))$ ;
- $M, (h, v) \Vdash \neg\phi$  si y sólo si no se cumple que  $M, (h, v) \Vdash \phi$ ;
- $M, (h, v) \Vdash \phi \wedge \psi$  si y sólo si  $M, (h, v) \Vdash \phi$  y  $M, (h, v) \Vdash \psi$ ;
- $M, (h, v) \Vdash \diamond\phi$  si y sólo si  $\exists v' \in \mathbb{V}$  tal que  $v < v'$  y  $M, (h, v') \Vdash \phi$ ;
- $M, (h, v) \Vdash \blacklozenge\phi$  si y sólo si  $\exists v' \in \mathbb{V}$  tal que  $v' < v$  y  $M, (h, v') \Vdash \phi$ ;
- $M, (h, v) \Vdash \blacktriangleright\phi$  si y sólo si  $\exists h' \in \mathbb{H}$  tal que  $h < h'$  y  $M, (h', v) \Vdash \phi$ ;
- $M, (h, v) \Vdash \blacktriangleleft\phi$  si y sólo si  $\exists h' \in \mathbb{H}$  tal que  $h' < h$  y  $M, (h', v) \Vdash \phi$ .

La Figura 5.2-(a) muestra el ejemplo de un modelo en la lógica de compás.

Esta lógica tiene su origen en un trabajo de Venema [Ven90] sobre la propiedad de completitud y expresividad de la lógica temporal modal HS [HS91] basada en las relaciones de intervalos de Allen. En este artículo se indaga la posibilidad de interpretar los intervalos temporales sobre estructuras lineales como puntos en el espacio bidimensional. Asimismo, se definen los operadores modales de la lógica de compás en términos de los operadores modales de HS. Posteriormente, en [MR99], Marx y Reynolds estudian en mayor profundidad las propiedades de la lógica de compás y demuestran que el problema de la validez es RE-completo (y por tanto indecidible) para la clase de todos los marcos espaciales. La demostración se basa en una reducción del problema de dominó (o *tiling problem*) [Ber66].

## Lógica de Conos

Otra lógica modal reciente para razonamiento con direcciones cardinales es la *lógica de conos* (*Cone Logic*) [MPS09]. En esta lógica las variables proposicionales también se interpretan sobre puntos definidos por el marco espacial  $\mathbb{F} = \mathbb{H} \times \mathbb{V}$  formado por el producto cartesiano de dos órdenes lineales, pero que en este caso son densos. Esta lógica se caracteriza por cuatro modalidades que se corresponden con los cuatro cuadrantes resultantes de dividir el espacio mediante dos ejes perpendiculares que se cortan en un punto de referencia dado. Las fórmulas de esta lógica se definen recursivamente del siguiente modo:

$$\phi ::= p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid \blacklozenge\phi \mid \blacktriangleright\phi \mid \blacktriangleleft\phi \mid \blacklozenge\phi.$$

Entonces, dado un modelo  $M$  y un punto  $(h, v) \in \mathbb{F}$ :

- $M, (h, v) \Vdash \blacklozenge\phi$  si y sólo si  $\exists(h', v') \in \mathbb{F}$  tal que  $(h', v') \neq (h, v), h \leq h', v \leq v'$  y  $M, (h', v') \Vdash \phi$ ;
- $M, (h, v) \Vdash \blacktriangleright\phi$  si y sólo si  $\exists(h', v') \in \mathbb{F}$  tal que  $(h', v') \neq (h, v), h' \leq h, v \leq v'$  y  $M, (h', v') \Vdash \phi$ ;
- $M, (h, v) \Vdash \blacktriangleleft\phi$  si y sólo si  $\exists(h', v') \in \mathbb{F}$  tal que  $(h', v') \neq (h, v), h \leq h', v' \leq v$  y  $M, (h', v') \Vdash \phi$ ;
- $M, (h, v) \Vdash \blacklozenge\phi$  si y sólo si  $\exists(h', v') \in \mathbb{F}$  tal que  $(h', v') \neq (h, v), h' \leq h, v' \leq v$  y  $M, (h', v') \Vdash \phi$ .

La Figura 5.2-(b) muestra el ejemplo de un modelo en la lógica de conos.

Según la clasificación de Frank [Fra96], la lógica de conos es un modelo basado en conos para el razonamiento espacial con relaciones cardinales. Al contrario que la lógica de compás, que es un modelo basado en proyecciones, el problema de la satisfacibilidad de las fórmulas de la lógica de conos es decidible (PSPACE-completo).

## 5.3. Una Lógica de Rectángulos

Como hemos podido ver en la sección anterior, en el razonamiento espacial basado en lógicas modales, se ha prestado mayor atención al estudio de las propiedades topológicas de las entidades espaciales que a . Con respecto a las relaciones cardinales, el poco trabajo existente se ha centrado en el estudio de lógicas de puntos. Por lo que sabemos, no existen

en la literatura lógicas espaciales con relaciones direccionales o cardinales sobre entidades espaciales extendidas.

Al igual que el álgebra de rectángulos ha supuesto la extensión bidimensional del álgebra de intervalos de Allen (ver Secciones 4.1 y 2.3), desde el punto de vista lógico no se ha realizado ningún trabajo parecido hasta la fecha. En esta sección se plantea este problema. Comenzaremos haciendo un breve repaso sobre el trabajo existente en lógicas modales de intervalos. A continuación introduciremos formalmente una lógica modal para razonar de forma completa con rectángulos en el espacio.

### 5.3.1. Lógicas Modales Basadas en Intervalos Temporales

Dado un orden parcial estricto (o conjunto parcialmente ordenado)  $\mathbb{D} = \langle D, < \rangle$ , un *intervalo* en  $\mathbb{D}$  es un par de puntos  $[d_0, d_1]$  tal que  $d_0, d_1 \in D$  y  $d_0 \leq d_1$ , y se dice que es *estricto* si  $d_0 < d_1$  y *singular* si  $d_0 = d_1$ . El conjunto de todos los intervalos sobre  $\mathbb{D}$  lo denotaremos con  $\mathbb{I}(\mathbb{D})$ . Llamaremos *estructura de intervalo* al par  $\langle \mathbb{D}, \mathbb{I}(\mathbb{D}) \rangle$ .

Las estructuras de intervalos pueden clasificarse en base a la propiedad del intervalo y del ordenamiento parcial a partir del que se construye. Una estructura se dice:

1. *Lineal* o *Total* si cada dos puntos es comparable;
2. *Discreta* si cada punto con sucesor o predecesor tiene un sucesor o predecesor inmediato en cada camino que empieza o termina en él:

$$\begin{aligned} & \forall x, y [x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z \leq y \wedge \forall w (x < w \wedge w \leq y \rightarrow z \leq w))], \\ & \forall x, y [x < y \rightarrow \exists z (x \leq z \wedge z < y \wedge \forall w (x \leq w \wedge w < y \rightarrow w \leq z))]; \end{aligned}$$

3. *Densa* si para cada par de puntos comparables existe un tercer punto entre ellos:

$$\forall x, y [x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y)];$$

4. *Ilimitada superiormente* (resp. *inferiormente*) si cada punto tiene un sucesor (resp. predecesor);
5. *Dedekind completa* si cada conjunto de puntos no vacío e ilimitado superiormente tiene un límite superior mínimo (o supremo).

Otras estructuras de especial interés son aquellas que se basan generalmente en los conjuntos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R}$  (conjuntos naturales, enteros, racionales y reales, respectivamente) dotados con su orden estándar.

Las relaciones posibles entre los intervalos pueden ser las 13 relaciones de Allen que ya vimos en la Sección 2.3.2.

La sintaxis y la semántica de una lógica modal proposicional genérica basada en intervalos se construye de forma similar a una lógica proposicional estándar como la vista en la Sección 5.1.1, pero con la particularidad de que el conjunto de mundos posibles es el conjunto  $\mathbb{I}(\mathbb{D})$  de todos los intervalos. Los modelos son del tipo  $M = \langle \mathbb{D}, \mathbb{I}(\mathbb{D}), \mathcal{V} \rangle$  donde  $\mathcal{V} : \mathbb{I}(\mathbb{D}) \mapsto 2^{A^P}$  es una función que asigna a cada intervalo el conjunto de variables proposicionales que son verdaderas en dicho intervalo. La semántica de los operadores modales temporales depende de las relaciones temporales entre intervalos que se quieran representar.

Son varias las propuestas de formalización de lenguajes temporales basados en este tipo de estructuras de intervalos. Las lógicas modales más expresivas sobre intervalos temporales son la lógica HS [HS91] y la lógica CDT [Ven91]. La lógica HS contiene todos los operadores modales correspondientes a las 13 relaciones de Allen. Los operadores modales primitivos son  $\langle B \rangle$  (*begins*),  $\langle E \rangle$  (*ends*),  $\langle A \rangle$  (*met by*) y sus recíprocos  $\langle \overline{B} \rangle$ ,  $\langle \overline{E} \rangle$  y  $\langle \overline{A} \rangle$ . A partir de estos operadores se pueden definir cualquier otro operador modal asociado a una de las 13 relaciones de Allen. Así, por ejemplo, la semántica asociada al operador  $\langle B \rangle$  es la siguiente:

$$M, [d_0, d_1] \Vdash \langle B \rangle \phi \Leftrightarrow \exists d_2 \in D, d_0 \leq d_2 < d_1 \text{ tal que } M, [d_0, d_2] \Vdash \phi.$$

La lógica HS es altamente indecidible, en particular en [HS91] se muestran resultados relativos a la no decidibilidad y completitud del problema de la satisfacibilidad de las fórmulas de HS en diversas clases de modelos basados en los órdenes lineales más comunes.

Al contrario que la lógica HS, la lógica CDT es una lógica en la que los operadores modales son binarios. Consta de tres operadores, a saber,  $C$ ,  $D$  y  $T$  cuya semántica es la siguiente:

- $M, [d_0, d_1] \Vdash \phi C \varphi \Leftrightarrow \exists d_2 \in D, d_0 \leq d_2 \leq d_1$  tal que  $M, [d_0, d_2] \Vdash \phi$  y  $M, [d_2, d_1] \Vdash \varphi$ ;
- $M, [d_0, d_1] \Vdash \phi D \varphi \Leftrightarrow \exists d_2 \in D, d_2 \leq d_0$  tal que  $M, [d_2, d_0] \Vdash \phi$  y  $M, [d_2, d_1] \Vdash \varphi$ ;
- $M, [d_0, d_1] \Vdash \phi T \varphi \Leftrightarrow \exists d_2 \in D, d_2 \geq d_1$  tal que  $M, [d_1, d_2] \Vdash \phi$  y  $M, [d_0, d_2] \Vdash \varphi$ .

La lógica HS es un subconjunto de la lógica CDT ya que es posible definir sus operadores a partir de las fórmulas de CDT. De la indecidibilidad de HS se deriva inmediatamente la indecidibilidad de CDT sobre la mayoría de las clases de ordenes lineales.

Varios fragmentos de HS han sido estudiados restringiendo el número de modalidades temporales permitidas. En [BMG<sup>+</sup>08] se puede ver una clasificación, desde el punto de vista de la decidibilidad, de varios fragmentos de HS.

### 5.3.2. La Lógica PNL

De especial interés para esta tesis es el fragmento de HS que utiliza sólo las modalidades correspondientes a las relaciones *meets* y *met by* del álgebra de intervalos de Allen. Esta lógica es conocida como *Propositional Neighborhood Logic* (PNL [GMS03]).

La lógica PNL admite varias formulaciones dependiendo de si permite intervalos singulares o sólo estrictos. En el primer caso la lógica (denotada por  $\text{PNL}^+$ ) utiliza los operadores modales  $\diamond_l$  (*meets*) y  $\diamond_r$  (*met by*) cuya semántica es:

- $M^+, [d_0, d_1] \Vdash \diamond_l \phi \Leftrightarrow \exists d_2 \in D$  tal que  $d_1 \leq d_2$  y  $M^+, [d_1, d_2] \Vdash \phi$ ;
- $M^+, [d_0, d_1] \Vdash \diamond_r \phi \Leftrightarrow \exists d_2 \in D$  tal que  $d_2 \leq d_0$  y  $M^+, [d_2, d_0] \Vdash \phi$ .

En el caso estricto ( $\text{PNL}^-$ ) los operadores modales se denotan por  $\langle A \rangle$  (*met by*) y  $\langle \bar{A} \rangle$  (*meets*) y su semántica es la siguiente:

- $M^-, [d_0, d_1] \Vdash \langle A \rangle \phi \Leftrightarrow \exists d_2 \in D$  tal que  $d_1 < d_2$  y  $M^-, [d_1, d_2] \Vdash \phi$ ;
- $M^-, [d_0, d_1] \Vdash \langle \bar{A} \rangle \phi \Leftrightarrow \exists d_2 \in D$  tal que  $d_2 < d_0$  y  $M^-, [d_2, d_0] \Vdash \phi$ .

La formulación más expresiva de PNL se denomina  $\text{PNL}^{\pi+}$ , que es similar a  $\text{PNL}^+$  pero añadiendo la constante  $\pi$  cuya semántica es:

$$M^+, [d_0, d_1] \Vdash \pi \Leftrightarrow d_0 = d_1.$$

Como se muestra en [GMS03], la lógica PNL es suficientemente expresiva para definir propiedades temporales interesantes como el operador *diferencia*, la modalidad *universal*, y por tanto permite simular *nominales*. Además, en [GMS03] se formula un procedimiento de semi-decisión basado en un método de árbol semántico para el problema de la validez. Posteriormente, en [BMS07] se analiza la decidibilidad de la lógica interpretada sobre estructuras de intervalos en  $\mathbb{Z}$  y se propone un método óptimo de decisión basado en árboles semánticos. En [BGMS07] se demuestra la decidibilidad de la lógica  $\text{PNL}^{\pi+}$  sobre todas las clases de estructuras basadas en ordenes lineales, finitos e infinitos mediante una reducción del problema de la satisfacibilidad para el fragmento de dos variables de la lógica de primer orden sobre estas clases de estructuras. De esta reducción se obtiene que el problema de la satisfacibilidad de PNL es NEXPTIME-completo.

### 5.3.3. La Lógica RL

A continuación vamos a formalizar mediante un lenguaje modal la lógica asociada al álgebra de rectángulos. Para ello, en primer lugar vamos a extender la definición de

estructuras de intervalos a estructuras de rectángulos. Luego mostraremos la sintáxis y la semántica de la lógica y estudiaremos el problema de la satisfacibilidad/validez de las fórmulas.

Dados dos conjuntos totalmente ordenados (órdenes totales)  $\mathbb{H} = \langle H, < \rangle$  (horizontal) y  $\mathbb{V} = \langle V, < \rangle$  (vertical), llamaremos *marco espacial* a una estructura del tipo  $\mathbb{F} = \mathbb{H} \times \mathbb{V}$ . Un *rectángulo* en  $\mathbb{F}$  viene definido por cuatro puntos  $\langle (h, v), (h', v') \rangle$  tal que  $h, h' \in H$ ,  $v, v' \in V$  y  $h < h'$ ,  $v < v'$ . Al conjunto de todos los rectángulos sobre  $\mathbb{F}$  lo denotaremos con  $\mathbb{O}(\mathbb{F})$ . Llamaremos *marco rectangular* o *estructura rectangular* al par  $\langle \mathbb{F}, \mathbb{O}(\mathbb{F}) \rangle$ .

Un marco rectangular puede verse como el producto cartesiano de dos estructuras de intervalos. De igual modo que las estructuras de intervalos, hablamos de *marcos espaciales lineales, discretos densos, ilimitados superiormente, Dedekind completos*,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  o  $\mathbb{R}$  cuando  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{V}$  son (al mismo tiempo) de alguno de estos tipos. Adviértase que todos los marcos espaciales son lineales por la propia definición.

El lenguaje proposicional de la *Lógica de Rectángulos* (RL, *Rectangle Logic*) consiste en el conjunto  $\mathcal{AP}$  de variables proposicionales, cualquier conjunto completo de operadores clásicos (como  $\wedge$  y  $\neg$ ), y un conjunto de 168 operadores modales unarios  $\diamond_{(r_h, r_v)}$ , donde el par  $(r_h, r_v) \in \mathcal{B}_{ia} \times \mathcal{B}_{ia} \setminus (e, e)$  (donde  $\mathcal{B}_{ia}$  es el conjunto  $\{e, b, bi, m, mi, o, oi, s, si, d, di, f, fi\}$  de las 13 relaciones básicas del álgebra de intervalos). Cada operador modal se corresponde con una relación atómica  $(r_h, r_v)$  del álgebra de rectángulos. Las fórmulas se definen mediante la siguiente gramática abstracta:

$$\phi ::= p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid \diamond_{(r_h, r_v)}\phi.$$

Denotaremos con  $\square_{(r_h, r_v)}$  a la modalidad universal dual de  $\diamond_{(r_h, r_v)}$ . La semántica de RL viene dada en términos de *modelos rectangulares*  $M = \langle \mathbb{F}, \mathbb{O}(\mathbb{F}), \mathcal{V} \rangle$ , donde  $\langle \mathbb{F}, \mathbb{O}(\mathbb{F}) \rangle$  es un marco rectangular y la función de evaluación  $\mathcal{V} : \mathbb{O}(\mathbb{F}) \mapsto 2^{\mathcal{AP}}$  asigna a cada rectángulo  $\langle (h, v), (h', v') \rangle$  el conjunto de variables proposicionales  $\mathcal{V}(\langle (h, v), (h', v') \rangle)$  que son verdaderas en él. La verdad de una fórmula sobre un rectángulo  $\langle (h, v), (h', v') \rangle$  en un modelo  $M$  se define por inducción en las fórmulas del siguiente modo:

- $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash p$  si y sólo si  $p \in \mathcal{V}(\langle (h, v), (h', v') \rangle)$ , para toda  $p \in \mathcal{AP}$ ;
- $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \neg\phi$  si y sólo si no se cumple que  $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \phi$ ;
- $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \phi \wedge \varphi$  si y sólo si  $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \phi$  y  $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \varphi$ ;
- $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \diamond_{(r_h, r_v)}\phi$  si y sólo si existe un rectángulo  $\langle (h'', v''), (h''', v''') \rangle$  tal que  $\langle (h, v), (h', v') \rangle (r_h, r_v) \langle (h'', v''), (h''', v''') \rangle$ , y  $M, \langle (h'', v''), (h''', v''') \rangle \Vdash \phi$ .

Por ejemplo, la semántica para los operadores modales  $\Diamond_{(b,e)}$ ,  $\Diamond_{(m,m)}$ ,  $\Diamond_{(m,e)}$  y  $\Diamond_{(e,m)}$  sería:

- $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \Diamond_{(b,e)}\phi$  si y sólo si existe  $h'', h''' \in \mathbb{H}$  tal que  $h' < h'' < h'''$  y  $M, \langle (h'', v), (h''', v') \rangle \Vdash \phi$ ;
- $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \Diamond_{(m,m)}\phi$  si y sólo si existe  $h'' \in \mathbb{H}$  y  $v'' \in \mathbb{V}$  tal que  $h' < h'', v' < v''$  y  $M, \langle (h', v'), (h'', v'') \rangle \Vdash \phi$ ;
- $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \Diamond_{(m,e)}\phi$  si y sólo si existe  $h'' \in \mathbb{H}$  tal que  $h' < h''$  y  $M, \langle (h', v), (h'', v') \rangle \Vdash \phi$ ;
- $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \Diamond_{(e,m)}\phi$  si y sólo si existe  $v'' \in \mathbb{V}$  tal que  $v' < v''$  y  $M, \langle (h, v'), (h', v'') \rangle \Vdash \phi$ .

A pesar de que no conocemos estudios previos sobre una lógica de este tipo, se puede intuir que RL es indecidible, ni siquiera enumerable, por lo menos si se interpreta sobre la misma clase de marcos de los hiper-rectángulos de la lógica modal de relaciones topológicas de Lutz y Wolter [LW06]. De forma simplificada, es posible expresar mediante una traducción directa todas las relaciones de RCC8 sobre rectángulos utilizando las 169 relaciones del álgebra de rectángulos. Esto significa que la lógica modal de relaciones topológicas formado por todos los rectángulos de un espacio euclídeo sería un fragmento de RL y por lo tanto el problema de la satisfacibilidad de RL sería al menos tan difícil como el problema de la satisfacibilidad de dicha lógica de relaciones topológicas.

Otra forma más directa de demostrar la indecidibilidad de RL consiste en utilizar una reducción del *problema del dominó sobre el plano*  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ( *$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  domino problem*, también conocido por  *$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  tiling problem*). La reducción del problema del dominó es una técnica muy utilizada para demostrar la indecidibilidad de muchas lógicas multidimensionales. Por ejemplo, como dijimos en la Sección 5.2.2, el problema de la satisfacibilidad de las fórmulas de la lógica de compás [MR99] se ha demostrado mediante esta técnica, pero utilizando una variante del problema del dominó en el plano  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

El problema del dominó en  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  se define del siguiente modo:

**Definición 5.1** (Problema del Dominó sobre  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ). *Dado un conjunto  $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_k\}$  finito de tipos de fichas (rectangulares y del mismo tamaño), el problema del dominó consiste en decidir si es posible cubrir completamente el plano  $\mathcal{O} = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}\}$  con copias repetidas de los tipos de fichas. Para cada tipo de ficha  $t_i \in \mathcal{T}$ , sean  $derecha(t_i)$ ,  $izquierda(t_i)$ ,  $arriba(t_i)$  y  $abajo(t_i)$  los colores correspondientes a los lados de  $t_i$ . Se dice que  $\mathcal{T}$  cubre el plano  $\mathcal{O}$  si existe una función  $f : \mathcal{O} \mapsto \mathcal{T}$  tal que*

$$derecha(f(n, m)) = izquierda(f(n + 1, m))$$

y

$$\text{arriba}(f(n, m)) = \text{abajo}(f(n, m + 1)).$$

**Teorema 5.1** ([Ber66]). *El problema del dominó sobre  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  es co-RE-completo, y por lo tanto indecidible.*

Para codificar el problema del dominó en RL vamos a hacer uso de las variables proposicionales  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_k$ . La variable  $\mathbf{u}$  se utiliza para marcar cuales son las celdas donde es posible colocar las fichas  $\mathbf{t}_i$ .

En primer lugar definimos la *modalidad universal* del siguiente modo:

$$\Box_{all}\phi = \phi \wedge \left( \bigwedge_{r \in \mathcal{B}_{ia} \times \mathcal{B}_{ia} \setminus (e,e)} \Box_r \phi \right).$$

Consideremos las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} B_1 &= \mathbf{u} \wedge \Box_{all}(\mathbf{u} \rightarrow (\Diamond_{(m,e)}\mathbf{u} \wedge \Diamond_{(e,m)}\mathbf{u})); \\ B_2 &= \Box_{all}(\mathbf{u} \rightarrow \bigwedge_{r \in \mathcal{B}_{ia} \times \mathcal{B}_{ia} \setminus \{b,m,e,mi,bi\} \times \{b,m,e,mi,bi\}} \Box_r \neg \mathbf{u}); \\ B_3 &= \Box_{all}(\mathbf{u} \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^k \mathbf{t}_i); \\ B_4 &= \Box_{all}(\mathbf{u} \rightarrow \bigwedge_{i,j=1, i \neq j}^k \neg(\mathbf{t}_i \wedge \mathbf{t}_j)); \\ B_5 &= \Box_{all}(\mathbf{u} \rightarrow \bigvee_{derecha(t_i)=izquierda(t_j)} (\mathbf{t}_i \wedge \Diamond_{(m,e)}\mathbf{t}_j)); \\ B_6 &= \Box_{all}(\mathbf{u} \rightarrow \bigvee_{arriba(t_i)=abajo(t_j)} (\mathbf{t}_i \wedge \Diamond_{(e,m)}\mathbf{t}_j)). \end{aligned}$$

Las fórmulas  $B_1$  y  $B_2$  discretizan el plano  $\mathbb{H} \times \mathbb{V}$  y establecen una disposición concreta de las celdas  $\mathbf{u}$ , que deben estar colocadas adyacentes unas a otras. La fórmula  $B_2$  descarta aquellas celdas que no nos sirven. Las fórmulas  $B_3$  y  $B_4$  codifican las fichas, estableciendo que las fichas deben coincidir con una celda y que dos fichas distintas no pueden ocupar una misma celda. Por último las fórmulas  $B_5$  y  $B_6$  codifican las condiciones que deben cumplir los lados de las fichas.

**Lema 5.1.** *Sea  $\Phi_{\mathcal{T}} = B_1 \wedge B_2 \wedge B_3 \wedge B_4 \wedge B_5 \wedge B_6$ . Dado un conjunto finito de fichas  $\mathcal{T}$ , la fórmula  $\Phi_{\mathcal{T}}$  es satisfacible si y sólo si  $\mathcal{T}$  puede cubrir  $\mathcal{O}$ .*

**Teorema 5.2.** *El problema de la validez de las fórmulas de RL en la clase de todos los marcos espaciales es RE-completo.*

### Demostración.

Por un lado, el problema de la satisfacibilidad es co-RE-duro como consecuencia del Lema 5.1 y del Teorema 5.1. Por otro lado, el problema de la satisfacibilidad es recursivamente enumerable ya que como se indica en [MR99] los marcos espaciales se puede definir

de forma finita en lógica de primer orden, y por lo tanto, podemos utilizar la traducción estándar de la lógica modal a la lógica de primer-orden [BvB06]. Por lo tanto, el problema de la satisfacibilidad es co-RE-completo, y el problema complementario de la validez es RE-completo.  $\square$

### 5.3.4. Fragmentos Decidibles de RL

La indecidibilidad de RL nos lleva a plantearnos la necesidad de explorar fragmentos más sencillos, con un poder expresivo parecido y computacionalmente más eficientes. Una forma de actuar en este sentido es imponer fuertes restricciones sintácticas y/o semánticas sobre la lógica (del mismo modo que se ha hecho con las lógicas modales de intervalos [Mon05]). Algunas de estas estrategias (que se podrían aplicar conjuntamente o independientemente) son:

1. Restringir los operadores modales a un subconjunto reducido y suficientemente expresivo.
2. Restringir las clases de las estructuras rectangulares sobre las que se interpreta RL. Por ejemplo, sobre el producto cartesiano de cualquier par de conjuntos totalmente ordenados, densos o discretos.
3. Utilizar restricciones semánticas de *localidad*, es decir, restringir la relación entre el valor de verdad de una fórmula en un rectángulo y sus valores de verdad sobre sus sub-rectángulos. Por ejemplo, se puede restringir una variable proposicional de tal forma que sea verdadera en un rectángulo si y sólo si es verdadera sobre todos los sub-rectángulos en su interior.
4. Combinar lógicas de intervalos (con buenas propiedades de decidibilidad) consigo mismas mediante técnicas de combinación de lógicas que preserven dicha decidibilidad [FG96].

El trabajo realizado en el capítulo siguiente se centra en los puntos 1, 2 y 4 que acabamos de describir. Introduciremos una nueva lógica modal de rectángulos que consta de tan sólo cuatro modalidades, pero que posee el suficiente poder expresivo para representar, bajo ciertas condiciones, todas las relaciones del álgebra de rectángulos.



# Capítulo 6

## La Lógica SpPNL

En este capítulo presentamos SpPNL (*Spatial Propositional Neighbourhood Logic*), una nueva lógica modal espacial para el razonamiento con rectángulos o regiones aproximadas por rectángulos. SpPNL puede considerarse como la extensión bidimensional de la lógica de intervalos PNL (ver Sección 5.3.1).

Este capítulo se estructura como sigue:

- En la Sección 6.1 se define el lenguaje de la lógica SpPNL, su sintaxis y su semántica.
- En la Sección 6.2 se enuncia un teorema de representación para los marcos rectangulares de SpPNL.
- Una vez presentada la lógica SpPNL, en la Sección 6.3 se muestra su poder expresivo mediante ejemplos de propiedades interesantes que se pueden definir en el lenguaje y ejemplos de aplicaciones en el dominio geográfico. Además, veremos como resolver el problema de la consistencia de una red de restricciones del álgebra de rectángulos utilizando la lógica SpPNL.
- En la Sección 6.4 se demuestra que el problema de la satisfacibilidad de las fórmulas de SpPNL es indecidible.
- En la Sección 6.5 se presenta un método de semidecisión basado en un árbol semántico para el problema de la validez de SpPNL.
- Para finalizar este capítulo, en la Sección 6.6 se estudia un fragmento decidible de SpPNL resultante de aplicar una técnica de temporalización sobre la lógica PNL.

## 6.1. Sintaxis y Semántica

El lenguaje de SpPNL está formado por el conjunto de variables proposicionales  $\mathcal{AP}$ , las conectivas lógicas  $\neg$  y  $\wedge$ , y las modalidades  $\langle E \rangle$ ,  $\langle W \rangle$ ,  $\langle N \rangle$ ,  $\langle S \rangle$ . El resto de conectivas lógicas, así como las constantes  $\top$  y  $\perp$ , se definen de la forma habitual. Las *fórmulas* bien formadas de SpPNL, denotadas por  $\phi, \psi, \dots$ , se definen recursivamente como se expresa a continuación (donde  $p \in \mathcal{AP}$ ):

$$\phi ::= p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid \langle E \rangle\phi \mid \langle W \rangle\phi \mid \langle N \rangle\phi \mid \langle S \rangle\phi.$$

Dados dos conjuntos totalmente ordenados  $\mathbb{H} = \langle H, < \rangle$  y  $\mathbb{V} = \langle V, < \rangle$ , llamábamlos *marco rectangular* a la estructura  $\langle \mathbb{F}, \mathbb{O}(\mathbb{F}) \rangle$  donde  $\mathbb{F} = (\mathbb{H} \times \mathbb{V})$  es un marco espacial y  $\mathbb{O}(\mathbb{F})$  es el conjunto de todos los *objetos espaciales* (rectángulos), es decir,  $\mathbb{O}(\mathbb{F}) = \{ \langle (h, v), (h', v') \rangle \mid h < h', v < v', h, h' \in \mathbb{H}, v, v' \in \mathbb{V} \}$ . La semántica de SpPNL viene dada en términos de *modelos espaciales* del tipo  $M = \langle \mathbb{F}, \mathbb{O}(\mathbb{F}), \mathcal{V} \rangle$  donde  $\mathcal{V} : \mathbb{O}(\mathbb{F}) \mapsto 2^{\mathcal{AP}}$  es una *función de asignación espacial*. La relación de *verdad* de una fórmula  $\phi$  de SpPNL en un rectángulo  $\langle (h, v), (h', v') \rangle$  de un modelo  $M$  se define recursivamente como se indica a continuación:

- $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash p$  si y sólo si  $p \in \mathcal{V}(\langle (h, v), (h', v') \rangle)$ , para todo  $p \in \mathcal{AP}$ ;
- $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \neg\phi$  si y sólo si no se cumple que  $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \phi$ ;
- $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \phi \wedge \psi$  si y sólo si  $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \phi$  y  $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \psi$ ;
- $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \langle E \rangle\phi$  si y sólo si existe un  $h'' \in \mathbb{H}$  tal que  $h' < h''$ , y  $M, \langle (h', v), (h'', v') \rangle \Vdash \phi$ ;
- $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \langle W \rangle\phi$  si y sólo si existe un  $h'' \in \mathbb{H}$  tal que  $h'' < h$ , y  $M, \langle (h'', v), (h, v') \rangle \Vdash \phi$ ;
- $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \langle N \rangle\phi$  si y sólo si existe un  $v'' \in \mathbb{V}$  tal que  $v' < v''$ , y  $M, \langle (h, v'), (h', v'') \rangle \Vdash \phi$ ;
- $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \langle S \rangle\phi$  si y sólo si existe un  $v'' \in \mathbb{V}$  tal que  $v'' < v$ , y  $M, \langle (h, v''), (h', v) \rangle \Vdash \phi$ .

Como es habitual, denotamos por  $[X]$  al operador dual de la modalidad  $\langle X \rangle$ , donde  $\langle X \rangle \in \{ \langle E \rangle, \langle W \rangle, \langle N \rangle, \langle S \rangle \}$ , y por  $M \Vdash \phi$  para indicar que  $\phi$  es una fórmula *válida* en  $M$ . La

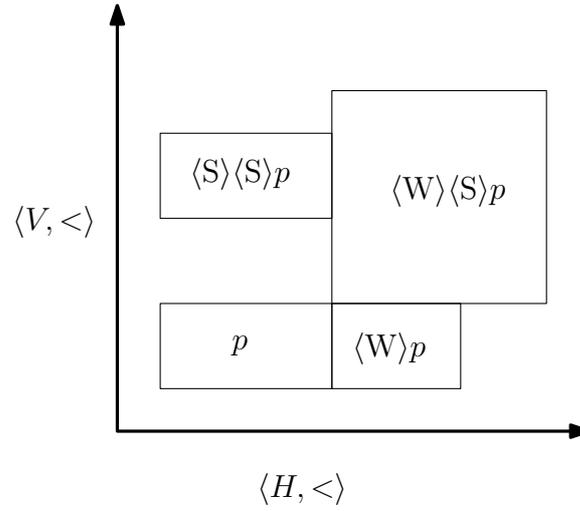


Figura 6.1: Ejemplo de fórmulas verdaderas en un modelo de SpPNL.

Figura 6.1 muestra un ejemplo de un modelo espacial de SpPNL. Intuitivamente, las modalidades permiten desplazarnos (verticalmente u horizontalmente) desde un rectángulo de referencia a otros rectángulos adyacentes compartiendo siempre uno de sus lados.

A continuación se dan algunos ejemplos de fórmulas válidas sencillas que nos permitirán hacernos una idea aproximada de la expresividad de SpPNL:

1.  $p \rightarrow [E]\langle W \rangle p$  (es decir, si  $p$  es verdadero en el rectángulo actual, entonces sin importar a qué rectángulo adyacente nos movamos al este del rectángulo actual, siempre somos capaces de regresar a  $p$ );
2.  $(\langle W \rangle \langle W \rangle \top \wedge \langle E \rangle \langle W \rangle p) \rightarrow p \vee \langle W \rangle \langle E \rangle \langle E \rangle p \vee \langle W \rangle \langle W \rangle \langle E \rangle p$  (es decir, el dominio horizontal es un orden lineal);
3.  $\langle N \rangle \langle E \rangle p \rightarrow \langle E \rangle \langle N \rangle p$  (es decir, las relaciones  $N$  y  $E$  son conmutativas).

## 6.2. Teorema de Representación

En esta sección abordamos el problema de encontrar una representación correcta y completa en lógica de primer orden para los marcos rectangulares. Como se pudo ver en el capítulo anterior, en la literatura sobre razonamiento espacial con lógicas modales, se ha prestado mayor atención a algunas teorías como el cálculo de conexión de regiones. Sin embargo, por alguna razón, no se han estudiado hasta la fecha teoremas de representación para marcos espaciales (basados en relaciones direccionales). Algunos resultados parecidos en el dominio espacial los podemos encontrar en [LW06], y en [BCdC98].

**Definición 6.1.** Un marco rectangular abstracto (MRA) es una tripleta  $\langle U, E, N \rangle$ , donde  $U$  es un conjunto no vacío, y  $E, N \subseteq U \times U$ .

Para nosotros, los marcos rectangulares abstractos son estructuras de primer orden formadas a partir de un universo no vacío  $U$  y dos relaciones binarias  $E$  (*este*) y  $N$  (*norte*). El principal problema es definir las condiciones adecuadas en primer orden sobre  $E$  y  $N$  de manera que un marco rectangular abstracto sea isomorfo a un marco rectangular (concreto) tal y como se definió en la Sección 6.1. Los elementos de  $U$  se llamarán *objetos* (abstractos). Intuitivamente,  $E$  (resp.,  $N$ ) se corresponde con la relación  $(mi, e)$  (resp.,  $(e, mi)$ ) del álgebra de rectángulos. Como se observa en [BCdC98], estas dos relaciones son suficientes para expresar cualquier otra relación del álgebra de rectángulos.

**Definición 6.2.** Sea  $MRA = \langle U, E, N \rangle$  un marco rectangular abstracto. Entonces, la relación  $W \subseteq U \times U$  se define como:  $\forall x, y (xWy \leftrightarrow yEx)$ , y la relación  $S \subseteq U \times U$  se define como:  $\forall x, y (xSy \leftrightarrow yNx)$ .

Para cada secuencia  $S_1, \dots, S_k \in \{E, W, N, S\}$ , denotamos a la composición de las relaciones  $S_1, \dots, S_k$  por  $S_1 \dots S_k$ . Ahora, sean  $R_1 = EW \cup EEW \cup EWW$ ,  $R_2 = SN \cup SNN \cup SSN$ , y considérense las siguientes condiciones en lógica de primer orden:

- Dos objetos iguales tienen los mismos extremos:

$$A1) \quad \forall x, y (\exists z (xEz \wedge zWy) \rightarrow \forall z (xEz \rightarrow zWy));$$

$$A2) \quad \forall x, y (\exists z (xWz \wedge zEy) \rightarrow \forall z (xWz \rightarrow zEy));$$

$$A3) \quad \forall x, y (\exists z (xNz \wedge zSy) \rightarrow \forall z (xNz \rightarrow zSy));$$

$$A4) \quad \forall x, y (\exists z (xSz \wedge zNy) \rightarrow \forall z (xSz \rightarrow zNy));$$

- Los marcos rectangulares abstractos son planos:

$$B1) \quad EW \subseteq WEE \cup EEW \cup E \text{ donde } E \text{ es la relación de igualdad, i.e. } \forall x, y, z [xEy \wedge xEz \rightarrow y = z \vee \exists w (\forall k (zEk \rightarrow yEw \wedge wEk) \wedge \forall k (kWw \rightarrow kWz \wedge wWy)) \vee \exists w (\forall k (yEk \rightarrow zEw \wedge wEk) \wedge \forall k (kWw \rightarrow kWz \wedge wWz))];$$

$$B2) \quad \forall x, y, z [xWy \wedge xWz \rightarrow y = z \vee \exists w (\forall k (zWk \rightarrow yWw \wedge wWk) \wedge \forall k (kEw \rightarrow kEz \wedge wEy)) \vee \exists w (\forall k (yWk \rightarrow zWw \wedge wWk) \wedge \forall k (kEw \rightarrow kEy \wedge wEz))];$$

$$B3) \quad \forall x, y, z [xNy \wedge xNz \rightarrow y = z \vee \exists w (\forall k (zNk \rightarrow yNw \wedge wNk) \wedge \forall k (kSw \rightarrow kSz \wedge wSy)) \vee \exists w (\forall k (yNk \rightarrow zNw \wedge wNk) \wedge \forall k (kSw \rightarrow kSy \wedge wSz))];$$

$$B4) \quad \forall x, y, z [xSy \wedge xSz \rightarrow y = z \vee \exists w (\forall k (zSk \rightarrow ySw \wedge wSk) \wedge \forall k (kNw \rightarrow kNz \wedge wNy)) \vee \exists w (\forall k (ySk \rightarrow zSw \wedge wSk) \wedge \forall k (kNw \rightarrow kNy \wedge wNz))];$$

- Las relaciones son pseudo-transitivas:

- C1)  $EEE \subseteq EE$ , i.e.  $\forall x, y, z, w(xEy \wedge yEz \wedge zEw \rightarrow \exists k(xEk \wedge kEw))$ ;  
 C2)  $WWW \subseteq WW$ , i.e.  $\forall x, y, z, w(xWy \wedge yWz \wedge zWw \rightarrow \exists k(xWk \wedge kWw))$ ;  
 C3)  $NNN \subseteq NN$ , i.e.  $\forall x, y, z, w(xNy \wedge yNz \wedge zNw \rightarrow \exists k(xNk \wedge kNw))$ ;  
 C4)  $SSS \subseteq SS$ , i.e.  $\forall x, y, z, w(xSy \wedge ySz \wedge zSw \rightarrow \exists k(xSk \wedge kSw))$ ;

- Los objetos abstractos tienen una área no vacía:

- D1)  $\forall x, y, z, w(xEy \wedge yWz \wedge zWw \rightarrow x \neq w)$ ;  
 D2)  $\forall x, y, z, w(xNy \wedge ySz \wedge zSw \rightarrow x \neq w)$ ;  
 D3)  $\forall x, y, z, w(xWy \wedge yEz \wedge zEw \rightarrow x \neq w)$ ;  
 D4)  $\forall x, y, z, w(xSy \wedge yNz \wedge zNw \rightarrow x \neq w)$ ;

- Los marcos rectangulares abstractos son normales:

- E1)  $\forall x, y(\forall z(zEx \leftrightarrow zEy) \wedge \forall z(zWx \leftrightarrow zWy) \wedge \forall z(zNx \leftrightarrow zNy) \wedge \forall z(zSx \leftrightarrow zSy)) \rightarrow x = y$ ;

- Los marcos rectangulares abstractos son estándar (no tienen ‘agujeros’):

- F1)  $\forall x, y, z(xEy \wedge yNz \rightarrow \exists k(xNk \wedge kEz))$ ;  
 F2)  $\forall x, y, z(xWy \wedge ySz \rightarrow \exists k(xWk \wedge kSz))$ ;

- Los marcos rectangulares abstractos son conectados:

- G1)  $EW(R_2) \cup EEW(R_2) \cup EWW(R_2)$  y  $WE(R_2) \cup WEE(R_2) \cup WWE(R_2)$  son la relación universal en  $U$ ;  
 G2)  $SN(R_1) \cup SNN(R_1) \cup SSN(R_1)$  y  $NS(R_1) \cup NSS(R_1) \cup NNS(R_1)$  son la relación universal en  $U$ .

**Teorema 6.1** (Teorema de Representación). *Todo marco rectangular abstracto que cumpla las condiciones A-G es isomorfo a un marco rectangular (concreto).*

### Demostración.

Sea  $\langle U, E, N \rangle$  cualquier MRA que cumpla todas las condiciones anteriores. Construimos un marco rectangular subyacente basado en los puntos de  $\mathbb{F} = (\mathbb{H} \times \mathbb{V})$  y el conjunto de todos los rectángulos en dicho marco espacial.

En primer lugar, tenemos que definir los puntos extremos de los objetos abstractos. Sea  $u$  un objeto abstracto cualquiera para el universo  $U$ . Identificamos las coordenadas horizontales mínimas como sigue::

$$hmin(u) = \{x \in U \mid xWEu\},$$

y las coordenadas verticales mínimas como:

$$vmin(u) = \{x \in U \mid xSNu\}.$$

Del mismo modo, podemos definir las funciones  $hmax(u)$  y  $vmax(u)$ . Tenemos que relacionar de algún modo las coordenadas horizontales y verticales. Para hacerlo, primero vemos que las relaciones  $EW$ ,  $WE$ ,  $NS$ , y  $SW$  son relaciones de equivalencia en  $U$  (por las condiciones  $A$ ). Esto quiere decir que los conjuntos  $P_{hmin} = \{[u]_{hmin(u)} \mid u \in U\}$ ,  $P_{hmax} = \{[u]_{hmax(u)} \mid u \in U\}$ , y sus homólogos verticales son particiones de  $U$ . Es fácil observar que las funciones  $\lambda_h$  y  $\lambda_v$ , definidas como:

$$\lambda([u]_{hmax(u)}) = [x]_{hmin(x)}$$

donde  $uEx$ , y

$$\lambda([u]_{vmax(u)}) = [x]_{vmin(x)}$$

(donde  $uNx$ ), son isomorfismos. De esta manera fijamos nuestra atención en el conjunto de coordenadas mínimas (tanto en horizontal como en vertical). Definimos ahora los conjuntos  $H = P_{hmin}$  (y denotamos a sus elementos con  $h, h', \dots$ ) y  $V = P_{vmin}$  ( $v, v', \dots$ ), y, por cada uno de ellos, también definimos la relación  $<$  como sigue:

$$h < h' \leftrightarrow hWEEh',$$

y

$$v < v' \leftrightarrow vSNNv'.$$

Las relaciones  $<$  son órdenes totales estricto. Restringimos nuestra atención a la relación  $<$  definida en el conjunto  $H$ , ya que el razonamiento realizado es completamente análogo para  $V$ . Para mostrar que  $<$  ordena totalmente a  $H$  tenemos que demostrar que:

1.  $<$  es irreflexiva. Supongamos que  $h < h$  para algún  $h \in H$ . Esto significa que existe algún  $u \in U$  tal que  $[u]_{hmin(u)}WEE[u]_{hmin(u)}$ , es decir,  $uWEEu$ , lo cual se contradice con la condición D.
2.  $<$  es transitiva. Supongamos que  $h < h'$  y  $h' < h''$  para algún  $h, h', h'' \in H$ . Esto quiere decir que algún  $u, v, w \in U$  se cumple que  $[u]_{hmin[u]}WEE[v]_{hmin[v]}$ , y que  $[v]_{hmin[v]}WEE[w]_{hmin[w]}$ , es decir,  $uWEEv$  y  $vWEEw$ . Por las condiciones A, tenemos que  $EWE \subseteq E$ , y, por tanto, se cumple que  $uWEEw$ . Por las condiciones C, resulta que  $uWEEw$ , es decir,  $[u]_{hmin(u)}WEE[w]_{hmin(w)}$ , y, por último,  $h < h''$ .
3.  $<$  es lineal. Supongamos que  $h < h'$  y que  $h < h''$  para algún  $h, h', h'' \in H$ . Esto

quiere decir que para algún  $u, v, w \in U$  se cumple que  $[u]_{hmin[u]}WEE[v]_{hmin[v]}$ , y que  $[u]_{hmin[u]}WEE[w]_{hmin[w]}$ , es decir,  $uWEEv$  y  $uWEEw$ . Ahora, por las condiciones B, para algún  $t \in U$  debe ser el caso en el que  $uWt$  y que existen  $t', t'' \in U$  con  $tEt', tEt'', t'Ev$ , y  $t''Ew$ . Por las condiciones B, tenemos tres posibilidades: (i)  $t' = t''$ , que implica, por las condiciones A, que  $u = w$ , y, por consiguiente, que  $hmin(v) = hmin(w)$ , es decir,  $h' = h''$ ; (ii) existe algún objeto abstracto  $z$  tal que  $t'Et$  y ese  $z$  para cada objeto abstracto  $k$ ,  $zEk \leftrightarrow t''Ek$ , es decir,  $zEw$ , lo cual implica que  $vEt', t'Et$ , y  $zEw$ , es decir  $vWEEw$  o, en otras palabras,  $hmin(v) < hmin(w)$  por definición; (iii) similar a (ii), pero intercambiando los roles de  $t'$  y  $t''$ .

4.  $<$  es total. Directamente de las condiciones G.

Por último, sea  $\mathbb{H} = \langle H, < \rangle$  y  $\mathbb{V} = \langle V, < \rangle$ , y sea  $\mathbb{O}(\mathbb{F}) = \{ \langle (h, v), (h', v') \rangle \mid h < h', v < v', h, h' \in \mathbb{H}, v, v' \in \mathbb{V} \}$ . Tenemos que demostrar que  $\mathbb{O}(\mathbb{F})$  es isomorfo a  $U$ . Considérese la siguiente función  $\mu : U \mapsto \mathbb{O}(\mathbb{F})$  definida como

$$\mu(u) = \langle ([u]_{hmin(u)}, [u]_{vmin(u)}), (\lambda([u]_{hmax(u)}), \lambda([u]_{vmax(u)})) \rangle.$$

Claramente  $[u]_{hmin(u)} < [u]_{hmax(u)}$ , y  $[u]_{hmin(u)} < [u]_{hmax(u)}$ , lo que significa que  $\langle ([u]_{hmin(u)}, [u]_{vmin(u)}), (\lambda([u]_{hmax(u)}), \lambda([u]_{vmax(u)})) \rangle$  es un rectángulo bien definido en  $\mathbb{O}(\mathbb{F})$ . Tenemos que demostrar que  $\mu$  es un isomorfismo.

1.  $\mu$  es inyectiva. Sea  $\mu(u) = \mu(v)$ . Entonces  $\langle ([u]_{hmin(u)}, [u]_{vmin(u)}), (\lambda([u]_{hmax(u)}), \lambda([u]_{vmax(u)})) \rangle$  debe igual a  $\langle ([v]_{hmin(v)}, [v]_{vmin(v)}), (\lambda([v]_{hmax(v)}), \lambda([v]_{vmax(v)})) \rangle$  (componente a componente). Por definición, para todo  $t, t'$  tal que  $uEt$  y  $vEt'$  (resp.,  $W, N, S$ ), tenemos que  $[t]_{hmin[t]} = [t']_{hmin[t']}$ . Por las condiciones A, tenemos que  $u$  y  $v$  ‘ven’ los mismos objetos abstractos en cada una de las cuatro direcciones, y, por las condiciones E,  $u = v$ .
2.  $\mu$  es suprayectiva. Sea  $h, h' \in H$ ,  $v, v' \in V$ , y sea  $\langle (h, v), (h', v') \rangle \in \mathbb{O}(\mathbb{F})$ , y tenemos que demostrar que existe algún  $u \in U$  tal que  $\mu(u) = \langle (h, v), (h', v') \rangle$ . Si  $\langle (h, v), (h', v') \rangle \in \mathbb{O}(\mathbb{F})$ , entonces  $h < h'$  y  $v < v'$ , y existe  $t, s, w, z \in U$  tal que,  $[t]_{hmin(t)} = h, [s]_{hmin(s)} = h', [w]_{vmin(w)} = v, [z]_{vmin(z)} = v'$ . Por definición, tenemos que  $tWEEs$  y  $wSNNz$ , lo que implica la existencia de algún  $t', w' \in U$  tal que  $tWEt', t'Es, wSNw',$  y  $w'Nz$ . Ahora, de la existencia de  $t', w'$ , podemos demostrar que es posible ir desde  $t'$  a  $w'$  (y en el sentido contrario) por medio de elementos de  $U$  (exploando las condiciones G, es decir, el conexionismo del marco rectangular abstracto), y deducir la existencia de cierto objeto  $u \in U$  tal que  $[u]_{hmin(u)} = h, [u]_{hmax(u)} = h'$ ,

$[u]_{vmin(u)} = v$ ,  $[v]_{vmax(u)} = v'$  (por las condiciones F), que es exactamente el objeto abstracto que estamos buscando.

3.  $\mu$  respeta las relaciones. Es inmediato por las definiciones.

□

### 6.3. Poder Expresivo y Posibles Aplicaciones

En esta sección daremos ejemplos sencillos que nos sirvan para mostrar el poder expresiva de SpPNL. Antes de pasar a ejemplos más prácticos consideremos las siguientes expresiones que nos serán de utilidad:

$$\begin{aligned} hor(\phi) &= [W][W][E]\phi \wedge [W][E][E]\phi \wedge [E][E][W]\phi \wedge [E][W][W]\phi, \\ ver(\phi) &= [S][S][N]\phi \wedge [S][N][N]\phi \wedge [N][N][S]\phi \wedge [N][S][S]\phi \end{aligned}$$

El operador  $hor(\phi)$  ( $ver(\phi)$ ) establece que la fórmula  $\phi$  se satisface en todo rectángulo cuya coordenada horizontal (vertical) sea la misma que la del rectángulo actual. Gracias a estos operadores en SpPNL es posible definir el operador *diferencia* del siguiente modo:

$$[\neq](\phi) = hor(\phi \wedge ver(\phi)),$$

y por tanto, podemos simular la *modalidad universal*, la *modalidad existencial*:

$$G(\phi) = \phi \wedge [\neq]\phi, \quad E(\phi) = \neg G(\neg\phi),$$

y los *nominales*:

$$n(p) = p \wedge [\neq](\neg p),$$

donde  $G(\phi)$  significa que  $\phi$  se satisface en todo rectángulo y  $n(p)$  significa que  $p$  no se satisface en ningún otro rectángulo que no sea el actual.

#### 6.3.1. Ejemplos en el Dominio Geográfico

Jugando con los cuatro operadores modales de SpPNL podemos definir otras relaciones cardinales naturales tales como *sureste* o *noroeste*. Por ejemplo, podemos definir el operador modal *sureste* como:

$$\langle SE \rangle \phi = \langle E \rangle \langle S \rangle \phi \vee \langle E \rangle \langle S \rangle \langle S \rangle \phi \vee \langle E \rangle \langle E \rangle \langle S \rangle \phi \vee \langle E \rangle \langle E \rangle \langle S \rangle \langle S \rangle \phi.$$

Podemos observar que la definición anterior incluye a cualquier región al sureste de la región actual, sin importar si sus *MBB* se tocan o no (en cualquiera de los dos ejes). Además, en SpPNL es posible expresar 2 de las 8 relaciones topológicas de RCC8 (las relaciones *desconectado* e *igual*) en el espacio topológico de todos los rectángulos.

Como otro ejemplo sencillo, podemos traducir a SpPNL la siguiente frase del lenguaje natural tomada prestada del contexto geográfico: *supongamos que al sureste de la región actual existe una región que contiene agua (w), al noroeste de la cual no hay ningún árbol (t). Podemos deducir que existe al menos una región al este de la actual (con ningún lado en común con ella) que no tiene árboles.* Esta afirmación puede expresarse mediante la siguiente fórmula válida:

$$\langle S \rangle \langle E \rangle (w \wedge \langle E \rangle \top \wedge \neg \langle N \rangle \langle E \rangle t) \rightarrow \langle E \rangle \langle E \rangle \neg t.$$

Por último, el siguiente ejemplo muestra como expresar propiedades de distancia (métricas) en SpPNL. Supongamos que queremos realizar una tarea de razonamiento sobre un plano de una ciudad con el objetivo de comprobar que se cumplen ciertas condiciones. Aunque SpPNL no tiene la capacidad de expresar propiedades métricas, podemos asumir que para la mayoría de aplicaciones en el dominio geográfico es posible establecer un tipo de límites sobre los modelos. Partiendo de esta suposición, podemos simular una matriz sobre la cual existe una noción de unidad espacial (Figura 6.2). Hay que destacar que este tipo de división del espacio, en unidades rectangulares (normalmente cuadradas), es muy utilizada en los *Sistemas de Información Geográfica* para la representación de datos espaciales, donde reciben el nombre de estructura o representación *raster* [WD04].

Sea  $u_{i,j}$  la representación de una *unidad espacial*. Queremos que nuestro modelo quede encajado dentro de dichas unidades. Para ello, hacemos uso de los nominales. Supongamos, en el contexto de nuestro ejemplo, que necesitamos sólo  $k_x$  unidades en la dimensión horizontal y únicamente  $k_y$  unidades en la vertical. Consideremos el siguiente conjunto de fórmulas:

$$\bigwedge_{i=1, j=1}^{i=k_x, j=k_y} G(u_{i,j} \rightarrow u),$$

$$n(p_1) \wedge \langle E \rangle (n(p_2) \wedge \langle E \rangle (n(p_3) \wedge \dots)),$$

$u_{1,ky}$		$u_{i,ky}$			$u_{kx,ky}$
$u_{1,j}$		$u_{i,j}$			$u_{kx,j}$
$u_{1,2}$					
$p_1$	$p_2$	$p_i$			$p_{kx}$
$u_{1,1}$	$u_{2,1}$	$u_{i,1}$			$u_{kx,1}$

Figura 6.2: Matriz de unidades espaciales.

$$\bigwedge_{i=1}^{i=k_x} G(n(p_i) \rightarrow (n(u_{i,1}) \wedge \langle N \rangle (n(u_{i,2}) \wedge \langle N \rangle (\dots) \dots))),$$

$$\bigwedge_{i=1, j=1}^{i=k_x, j=k_y} G(u_{i,j} \rightarrow \langle E \rangle u_{i+1,j}).$$

Para que este marco de trabajo sea útil, tenemos que asumir que toda letra proposicional con la que queramos trabajar se sitúa únicamente sobre múltiplos de nuestras unidades:

$$\bigwedge_{p \in \mathcal{AP} \setminus \{u, u_{i,j}, p_i\}} G(p \rightarrow (\langle E \rangle \langle S \rangle u \wedge \langle N \rangle \langle E \rangle u \wedge \langle W \rangle \langle N \rangle u \wedge \langle S \rangle \langle W \rangle u)).$$

Con esta configuración espacial, podemos razonar no sólo sobre las propiedades lógicas de los rectángulos, sino también, hasta cierto punto, sobre las distancias relativas entre objetos siempre que sea en términos de las unidades establecidas. Por ejemplo, consideremos la siguiente afirmación espacial del lenguaje natural: *todo colegio tiene al menos un punto de acceso público*. Podemos abstraer la sentencia anterior del siguiente modo: *si un área está etiquetada con ‘Colegio’, entonces existe al menos un único área, localizado en el mismo borde y a no más de una unidad de distancia de una esquina, y está etiquetado con ‘Punto de acceso’*. Formalmente, en SPPNL, esta afirmación se escribiría como:

$$G(\text{Colegio} \rightarrow \text{NE-}EsquinaPuntoAcc \vee \text{SE-}EsquinaPuntoAcc \vee \\ \text{SW-}EsquinaPuntoAcc \vee \text{NW-}EsquinaPuntoAcc),$$

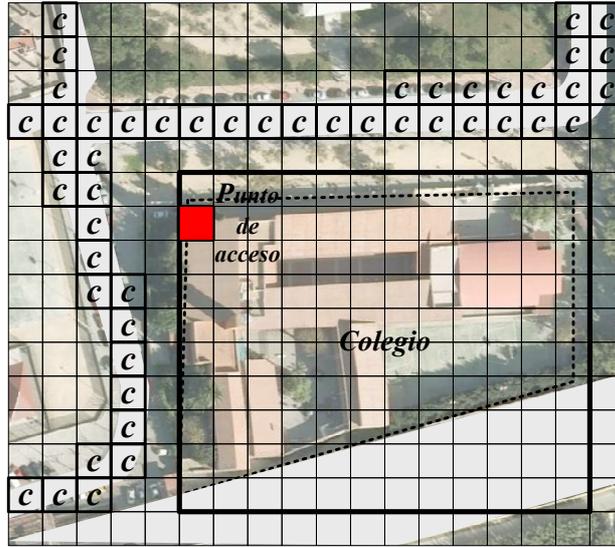


Figura 6.3: Ejemplo de aplicación de SpPNL.

donde

$$NE-EsquinaPuntoAcc = \langle N \rangle \langle E \rangle (u \wedge \langle W \rangle (u \wedge \langle S \rangle ((u \wedge (PuntoAcc \vee \langle S \rangle (u \wedge PuntoAcc)))))) \vee \langle S \rangle (u \wedge \langle W \rangle ((u \wedge (PuntoAcc \vee \langle W \rangle (u \wedge PuntoAcc))))),$$

y de forma similar para  $X-EsquinaPuntoAcc$ , con  $X \in \{SE, SW, NW\}$ .

Consideremos ahora el siguiente requerimiento de seguridad: *desde un punto de acceso no debe haber menos de una unidad de distancia a la siguiente calle*. Esta sentencia se puede abstraer como: *entre cualquier par de unidades de área, etiquetadas respectivamente con 'Punto de Acceso' y 'Calle', debe haber al menos un área unidad que no esté etiquetado con 'Calle'*. Utilizando la siguiente expresión

$$1UnidadDist(q) = \neg \langle E \rangle (q' \vee \langle N \rangle q' \vee \langle S \rangle q') \wedge \neg \langle N \rangle (q' \vee \langle W \rangle q') \wedge \neg \langle W \rangle (q' \vee \langle S \rangle q') \wedge \neg \langle S \rangle q',$$

donde  $q' = q \wedge u$ , podemos formalizar el requerimiento como se indica a continuación:

$$G(PuntoAcc \rightarrow 1UnidadDist(Calle)).$$

En la Figura 6.3 se puede ver una posible representación gráfica que satisface las fórmulas y restricciones anteriores. Por falta de espacio se ha utilizado la variable proposicional  $c$  para marcar las zonas consideradas como *Calle*, es decir,  $G(c \rightarrow Calle)$ .

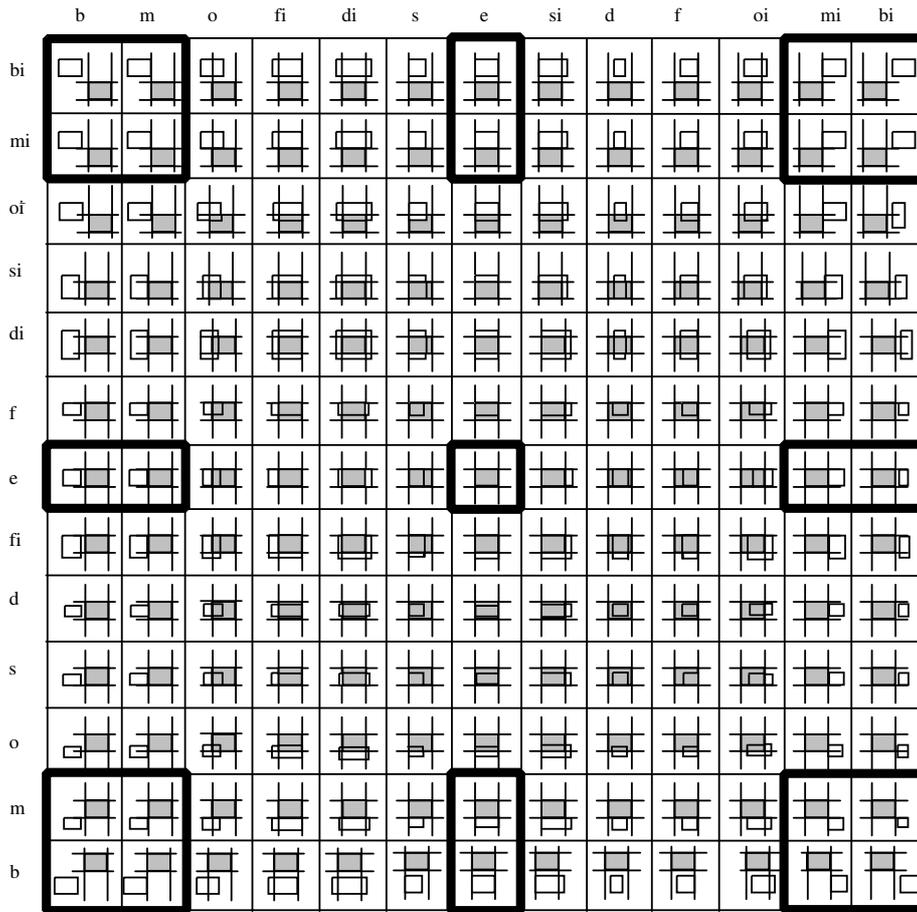


Figura 6.4: Las 25 relaciones básicas del RA que pueden expresarse directamente en SpPNL.

### 6.3.2. Comparativa con el Álgebra de Rectángulos

En esta sección utilizaremos la lógica SpPNL para resolver el problema de la satisfacción de una red de restricciones del álgebra de rectángulos (ver la Sección 4.1). En el lenguaje de SpPNL sólo es posible expresar directamente 25 de las 169 relaciones básicas del RA (ver la Figura 6.4).

Sea  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  una relación de RA, donde cada  $r_i$  es una relación básica de RA. Denotábamos por  $\mathcal{B}_{ra}$  al conjunto de relaciones básicas del RA. Así pues, toda relación de RA pertenece al conjunto  $2^{\mathcal{B}_{ra}}$ , lo cual significa que hay  $2^{169}$  relaciones posibles.

**Definición 6.3.** Sea  $\mathbb{O}(\mathbb{F})$  el conjunto de todos los rectángulos definidos en un marco espacial  $\mathbb{F} = (\mathbb{H} \times \mathbb{V})$ , donde  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{V}$  son conjuntos totalmente ordenados. Llamaremos restricción rectangular a la expresión  $(O_i R O_j)$ , donde  $O_i, O_j \in \mathbb{O}(\mathbb{F})$  y  $R$  es una relación de RA. Una red de restricciones rectangulares  $\mathfrak{R}$  es un par  $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$  donde  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{O}(\mathbb{F})$  y  $\mathcal{C}$  es un conjunto de restricciones rectangulares entre elementos de  $\mathcal{D}$ .

Dada una red de restricciones rectangulares  $\mathfrak{N}$ , el principal problema es saber si es consistente o no. Una red de restricciones rectangulares es consistente si y sólo si la información espacial representada por  $\mathfrak{N}$  es coherente.

**Definición 6.4.** *Una red de restricciones rectangulares  $(\mathfrak{D}, \mathfrak{C})$  es consistente si y sólo si existe una instancia concreta de todo el conjunto  $\mathfrak{D}$  que respete todas las restricciones en  $\mathfrak{C}$ .*

A continuación mostraremos como es posible comprobar la consistencia de una red de restricciones rectangulares  $\mathfrak{N}$  comprobando la satisfacibilidad de la correspondiente fórmula  $\phi(N)$  en SpPNL. Para ello, primero mostraremos como es posible expresar una relación de RA (básica o no básica) en SpPNL. Utilizaremos la simulación de nominales introducida al principio de la Sección 6.3 para traducir relaciones básicas en fórmulas de SpPNL. En general, considérese una restricción rectangular  $(O_i R O_j)$ . Supongamos que el conjunto de variables proposicionales  $\mathcal{AP}'$  contiene dos letras proposicionales  $p(O_i)$  y  $p(O_j)$ . Ahora, queremos escribir una fórmula  $\phi_R(O_i, O_j)$  tal que, para cualquier modelo espacial  $M = \langle \mathbb{F}, \mathbb{O}(\mathbb{F}), \mathcal{V} \rangle$ , tenemos que  $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \phi_R(O_i, O_j)$  si y sólo si, dándose el caso en el que  $p(O_i) \in \mathcal{V}(\langle (h, v), (h', v') \rangle)$ , entonces  $p(O_j) \in \mathcal{V}(\langle (h'', v''), (h''', v''') \rangle)$  para algún rectángulo  $\langle (h'', v''), (h''', v''') \rangle$  tal que  $\langle (h, v), (h', v') \rangle R \langle (h'', v''), (h''', v''') \rangle$ .

**Definición 6.5.** *Dada una restricción rectangular  $(O_i R O_j)$ , decimos que la fórmula  $\phi_R(O_i, O_j)$ , expresada en SpPNL, satisface  $(O_i R O_j)$  si y sólo si  $\phi_R(O_i, O_j)$  satisface la propiedad anterior.*

Para empezar consideraremos primero las relaciones básicas. Serán necesarias 169 fórmulas distintas para traducir todas las relaciones básicas. Podemos dividir dichas relaciones en tres grupos como se indica a continuación.

**Relaciones básicas directas.** Son las 25 relaciones básicas que se pueden expresar directamente en SpPNL. Por ejemplo, la restricción  $(O_1 (e, e) O_2)$  puede expresarse mediante la fórmula  $p(O_1) \rightarrow p(O_2)$ . Otro ejemplo sería la restricción  $(O_1 (b, b) O_2)$ , que puede expresarse con la fórmula  $p(O_1) \rightarrow \langle E \rangle \langle E \rangle \langle N \rangle \langle N \rangle p(O_2)$ .

**Lema 6.1.** *Para toda restricción rectangular  $(O_i r O_j)$  donde  $r$  es una relación básica directa de RA, existe una fórmula  $\phi_r(O_i, O_j)$  en SpPNL que satisface  $(O_i r O_j)$ .*

**Relaciones básicas parcialmente indirectas.** Una relación básica parcialmente indirecta  $r = (r_i, r_j)$  es una relación básica en la que exactamente una de sus componentes puede expresarse directamente en SpPNL. Centrándonos en un sólo eje, hay 5 relaciones de Allen que se pueden expresar en SpPNL, que son  $\{e, m, b, mi, bi\}$ . Esto quiere decir que hay 80 relaciones básicas parcialmente indirectas: si  $r = (r_i, r_j)$  es una relación parcialmente indirecta, entonces  $r_i$  puede tomarse de un conjunto de 5 relaciones de Allen, y

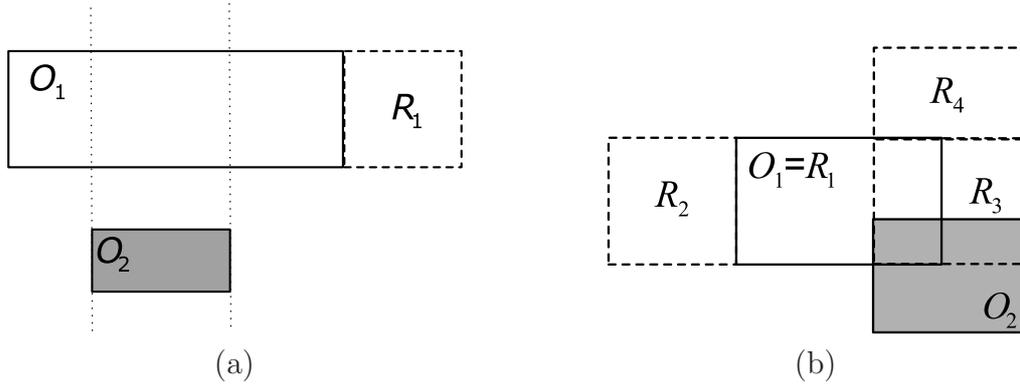


Figura 6.5: Ejemplos de relaciones básicas no directas entre rectángulos. Restricción  $O_1 (di, bi) O_2$  (a), y restricción  $O_1 (oi) O_2$  (b).

$r_j$  del conjunto que queda de 8 relaciones de Allen, o al contrario. Por ejemplo, la relación  $(di, bi)$  es parcialmente indirecta. Resulta que, si  $(O_i r O_j)$  es una restricción rectangular formada por una relación parcialmente indirecta, haciendo uso de como mucho dos (simulaciones de) nominales es posible escribir una fórmula  $\phi_r(O_i, O_j)$  en SpPNL que satisface  $r$ .

Considere por ejemplo la restricción  $O_1 (di, bi) O_2$  representada en la Figura 6.5-(a). La variable proposicional denotada por  $R_1$  representa un nominal que se puede utilizar para expresar la relación  $(di, bi)$ . Considérese la fórmula  $\phi_{(di, bi)}(O_1, O_2) = p(O_1) \rightarrow \langle E \rangle n(p_{R_1}) \wedge \langle W \rangle \langle E \rangle \langle E \rangle (\langle E \rangle \langle E \rangle n(p_{R_1}) \wedge \langle S \rangle \langle S \rangle (p(O_2)))$ , donde  $p(O_1)$ ,  $p(O_2)$  son variables proposicionales que representan objetos, y  $p_{R_1}$  es una variable proposicional utilizada para simular un nominal.

**Proposición 6.1.** *La fórmula  $\phi_{(di, bi)}(O_1, O_2)$  satisface la restricción  $O_1 (di, bi) O_2$ .*

### Demostración.

Supongamos que existe un modelo espacial  $M$  tal que  $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \phi_{(di, bi)}(O_1, O_2)$ . Esto quiere decir que  $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash p(O_1) \rightarrow \langle E \rangle n(p_{R_1}) \wedge \langle W \rangle \langle E \rangle \langle E \rangle (\langle E \rangle \langle E \rangle n(p_{R_1}) \wedge \langle S \rangle \langle S \rangle (p(O_2)))$ . Suponga ahora que  $p(O_1) \in V(\langle (h, v), (h', v') \rangle)$ . En este caso, tenemos que en algún objeto  $\langle (h', v), (\hat{h}, v') \rangle$  tal que  $h' < \hat{h}$  se satisface  $p_{R_1}$ , y no se satisface en ninguna otra parte. Así pues, como en el objeto  $\langle (h, v), (h', v') \rangle$  se satisface  $\langle W \rangle \langle E \rangle \langle E \rangle (\langle E \rangle \langle E \rangle n(p_{R_1}) \wedge \langle S \rangle \langle S \rangle (p(O_2)))$ , la única forma posible de poner  $p(O_2)$  es justo sobre un objeto  $\langle (h'', v''), (h''', v''') \rangle$  tal que  $h < h''$ ,  $h''' < h'$ , y  $v' < v$ . Por lo tanto,  $\langle (h'', v''), (h''', v''') \rangle$  cumple la relación  $(di, bi)$  con respecto a  $\langle (h, v), (h', v') \rangle$ .  $\square$

El siguiente lema requeriría una demostración similar para cada uno de los 80 casos distintos.

**Lema 6.2.** *Para cada relación básica parcialmente indirecta  $r$  existe una fórmula  $\phi_r(O_i, O_j)$  en SpPNL que satisface la restricción rectangular  $(O_i r O_j)$ .*

**Relaciones básicas indirectas.** Una relación básica indirecta  $r = (r_i, r_j)$  es una relación básica de RA tal que ninguna de sus componentes puede ser expresada directamente en SpPNL. Como hemos visto antes, 8 de las 13 relaciones de Allen (implicadas en las proyecciones de dos objetos sobre el mismo eje) no pueden ser expresadas directamente en SpPNL. Dichas relaciones pertenecen al conjunto  $\mathcal{B}_{ia} \setminus \{e, m, b, mi, bi\}$ , donde  $\mathcal{B}_{ia}$  es el conjunto de todas las relaciones de Allen. Esto quiere decir que hay 64 relaciones básicas indirectas: si  $r = (r_i, r_j)$  es una relación básica indirecta, entonces  $r_i$  y  $r_j$  pueden tomarse de un conjunto de 8 relaciones de Allen. Por ejemplo, la relación  $(o, oi)$  es indirecta. Resulta que si  $r$  es una relación básica indirecta, haciendo uso de como mucho cuatro (simulaciones de) nominales, es posible escribir una fórmula  $\phi_r(O_i, O_j)$  en SpPNL que satisface  $(O_i r O_j)$ .

Consideremos por ejemplo la restricción  $O_1 (o, oi) O_2$ , representada gráficamente en la Figura 6.5-(b). Las variables proposicionales  $R_1, R_2, R_3$  y  $R_4$  representan letras proposicionales que pueden utilizarse como simulaciones de nominales para conseguir expresar la relación  $(o, oi)$ . Considérese la fórmula  $\phi_{(o,oi)}(O_1, O_2) = p(O_1) \rightarrow n(p_{R_1}) \wedge \langle W \rangle n(p_{R_2}) \wedge \langle E \rangle \langle E \rangle \langle W \rangle ([W] \neg p_{R_1} \wedge [W] [W] \neg p_{R_1} \wedge \langle W \rangle \langle W \rangle p_{R_2} \wedge (n(p_{R_3}) \wedge \langle N \rangle n(p_{R_4}) \wedge \langle S \rangle \langle S \rangle \langle N \rangle (p(O_2) \wedge [N] \neg p_{R_3} \wedge [N] [N] \neg p_{R_3} \wedge \langle N \rangle \langle N \rangle p_{R_4}))$ .

**Proposición 6.2.** *La fórmula  $\phi_{(o,oi)}(O_1, O_2)$  satisface la restricción rectangular  $O_1 (o, oi) O_2$ .*

### Demostración.

Supongamos que existe un modelo espacial  $M$  tal que  $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \models \phi_{(o,oi)}(O_1, O_2)$ , y  $M, \langle (h, v), (h', v') \rangle \models p(O_1)$ . Esto quiere decir que el mismo rectángulo  $\langle (h, v), (h', v') \rangle$  hace verdadero a  $p_{R_1}$ , y que  $p_{R_1}$  es falso en cualquier otro lugar. Además, por  $\langle W \rangle n(p_{R_2})$ , tenemos que en algún rectángulo  $\langle (h'', v), (h, v') \rangle$  con  $h'' < h$  la letra proposicional  $p_{R_2}$  es verdadera, y no lo es en ninguna otra parte. Ahora, la única forma de poner  $p_{R_3}$  es en algún rectángulo  $\langle (\bar{h}, \bar{v}), (\bar{h}', \bar{v}') \rangle$  tal que su proyección en el eje  $x$ ,  $[\bar{h}, \bar{h}']$ , se superpone al intervalo  $[h, h']$ . De esta forma,  $p_{R_3}$  es verdadera en  $\langle (\bar{h}, \bar{v}), (\bar{h}', \bar{v}') \rangle$  pero no en ninguna otra parte, y  $p_{R_4}$  es verdadera en algún rectángulo  $\langle (\bar{h}, v'), (\bar{h}', v'') \rangle$ , con  $v' < v''$ , y en ningún otro lugar. Usando la misma estrategia que antes,  $p(O_2)$  debe ponerse en algún rectángulo  $\langle (\bar{h}, \hat{v}), (\bar{h}', \hat{v}') \rangle$  tal que su proyección en el eje  $y$   $[\hat{v}, \hat{v}']$  tenga la relación *overlaps* con  $[v, v']$ .  $\square$

De nuevo, examinando los diferentes 64 casos es posible probar el siguiente lema.

**Lema 6.3.** *Para cada relación básica indirecta  $r$ , existe una fórmula  $\phi_r(O_i, O_j)$  en SpPNL que satisface  $O_i r O_j$ .*

Ahora consideremos una relación disyuntiva  $R = \{r_1, \dots, r_m\}$ . Dicha relación se interpreta como una disyunción lógica. Así pues la restricción rectangular  $(O_i R O_j)$  se cumple

si y sólo si se cumple  $\bigvee_{k=1}^m ((O_i \ r_k \ O_j))$ . Por lo tanto, obtenemos los siguientes resultados.

**Lema 6.4.** *Dada una restricción rectangular del tipo  $(O_i \ R \ O_j)$ , donde  $R = \{r_1, \dots, r_m\}$ , la fórmula  $\phi_R(O_i, O_j) = \bigvee_{k=1}^m (\phi_{r_k}(O_i, O_j))$  en SpPNL satisface  $(O_i \ R \ O_j)$ .*

Por último, nos queda por demostrar el resultado principal, es decir, que para toda red de restricciones rectangulares existe una fórmula en SpPNL que es satisfacible si y sólo si  $\mathfrak{N}$  es consistente. Considérese una red de restricciones rectangulares cualquiera  $\mathfrak{N} = (\mathfrak{C}, \mathfrak{V})$ , donde  $\mathfrak{V} = \{O_1, \dots, O_n\}$  y  $\mathfrak{C} = \{O_{k_1} \ R_k \ O_{k_2}\}$ ,  $1 \leq k_1, k_2 \leq n$ ,  $1 \leq k \leq c$  donde  $c = |\mathfrak{C}|$ . Para una restricción dada del tipo  $(O_{k_1} \ R_k \ O_{k_2})$ , donde  $R_k = \{r_1, \dots, r_m\}$ , abusando un poco de notación, denotaremos por  $\phi_{R_k}(O_{k_1}, O_{k_2}, \mathfrak{R}_k)$  a la fórmula en SpPNL que satisface  $R_k$ , donde  $\mathfrak{R}_k$  es el conjunto de todas las variables proposicionales  $p_{R_i}$  utilizadas para simular nominales en  $\phi_{R_k}(O_{k_1}, O_{k_2})$ . Considérese la siguiente fórmula:

$$\phi(\mathfrak{N}) = \bigwedge_{i=1}^n (E(n(p(O_i)))) \wedge \bigwedge_{k=1}^c (G(\phi_{R_k}(O_{k_1}, O_{k_2}, \mathfrak{R}_k))),$$

donde para cada  $i$ ,  $p(O_i)$  es una letra proposicional y para todo  $1 \leq s, t \leq c$ , si  $s \neq t$  entonces  $\mathfrak{R}_s \cap \mathfrak{R}_t = \emptyset$ .

**Teorema 6.2.** *Sea  $\mathfrak{N} = (\mathfrak{V}, \mathfrak{C})$  una red de restricciones rectangulares. Entonces  $\mathfrak{N}$  es consistente si y sólo si la fórmula  $\phi(\mathfrak{N})$  en SpPNL es satisfacible.*

## 6.4. Indecidibilidad

En esta sección demostramos que el problema de la satisfacibilidad de las fórmulas SpPNL es indecidible. Para tal fin, demostramos que el problema de la satisfacibilidad de la lógica de compás (introducida en la Sección 5.2.2), que resulta ser indecidible [MR99], puede reducirse polinomialmente al problema de la satisfacibilidad de la lógica SpPNL. Como sabemos, tanto la lógica de compás como SpPNL se interpretan sobre marcos espaciales del tipo  $\mathbb{F} = \mathbb{H} \times \mathbb{V}$  donde  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{V}$  son conjuntos totalmente ordenados. En el contexto de la siguiente demostración, tanto para SpPNL como para la lógica de compás no importa si el marco espacial se construye sobre el producto cartesiano de dos conjuntos idénticos o no. Por simplicidad, en el resto de la sección, trabajaremos sobre la hipótesis de que las dos lógicas se interpretan sobre el marco espacial  $\mathbb{F} = \mathbb{H} \times \mathbb{V}$ , con  $\mathbb{H} = \mathbb{V}$ . Utilizaremos las letras  $f, g, \dots$  para denotar a las fórmulas de la lógica de compás de manera que podamos diferenciarlas de las fórmulas de la lógica SpPNL.

**Teorema 6.3** (Indecidibilidad de la Lógica de Compás [MR99]). *El problema de la satisfacibilidad de la lógica de compás es co-RE-completo.*

Considérese la siguiente traducción  $\tau$  de las fórmulas de la lógica de compás a las fórmulas de SpPNL:

- $\tau(p) = p$ ;
- $\tau(\neg f) = \neg\tau(f)$ ;
- $\tau(f \wedge g) = \tau(f) \wedge \tau(g)$ ;
- $\tau(\diamond f) = \langle N \rangle \tau(f)$ ;
- $\tau(\diamond f) = \langle E \rangle \tau(f)$ ;
- $\tau(\diamond f) = [N] \langle S \rangle \langle S \rangle \tau(f)$ ;
- $\tau(\diamond f) = [E] \langle W \rangle \langle W \rangle \tau(f)$ .

Ahora demostramos que para cualquier fórmula  $f$  de la lógica de compás se cumple que  $f$  es satisfacible si y sólo si la fórmula  $\tau(f)$  de SpPNL es satisfacible. Consideramos una clase particular de modelos de SpPNL. Dado un conjunto finito  $\mathcal{AP}$  de variables proposicionales y cualquier modelo  $M = \langle \mathbb{F}, \mathbb{O}(\mathbb{F}), \mathcal{V} \rangle$  de SpPNL entonces decimos que  $M$  es *upright local* (con respecto a  $\mathcal{AP}$ ) si, para toda letra proposicional  $p \in \mathcal{AP}$  y todo rectángulo  $\langle (h', v'), (h, v) \rangle$ , tenemos que  $p \in \mathcal{V}(\langle (h', v'), (h, v) \rangle)$  si y sólo si  $p \in \mathcal{V}(\langle (h'', v''), (h, v) \rangle)$  para todo  $h'' < h$  y  $v'' < v$ . Esta clase de modelos de SpPNL se caracterizan por una evaluación uniforme de las letras proposicionales de  $\mathcal{AP}$  sobre todos los objetos que tienen la misma esquina superior derecha. Esta restricción de localidad se puede definir en el lenguaje de SpPNL mediante la siguiente fórmula:

$$\Lambda(\mathcal{AP}) = \bigwedge_{p \in \mathcal{AP}} G((p \leftrightarrow [N][E][S][W]p) \wedge (\neg p \leftrightarrow [N][E][S][W]\neg p))$$

donde  $G$  es el operador universal ya definido anteriormente en la Sección 6.3. El tamaño de  $\Lambda(\mathcal{AP})$  es polinomial en orden de  $|\mathcal{AP}|$ .

**Lema 6.5.** *Dado un modelo  $M$  de SpPNL y un conjunto finito de variables proposicionales  $\mathcal{AP}$ ,  $M \models \Lambda(\mathcal{AP})$  si y sólo si  $M$  es upright local con respecto a  $\mathcal{AP}$ .*

**Demostración.**

( $\Rightarrow$ ) Por contradicción, supongamos que  $M \models \Lambda(\mathcal{AP})$  y que  $M$  no es *upright local* con respecto a  $\mathcal{AP}$ . Si  $M$  no es *upright local* entonces existen dos rectángulos  $\langle (h', v'), (h, v) \rangle$  y  $\langle (h'', v''), (h, v) \rangle$  para algún  $h'' < h, v'' < v$  y  $h'' \neq h', v'' \neq v'$  tales que  $p \in \langle (h', v'), (h, v) \rangle$  y  $\neg p \in \langle (h'', v''), (h, v) \rangle$ . Como  $M \models \Lambda(\mathcal{AP})$  y  $p \in \mathcal{AP}$ , por la relación de verdad definida

sobre SpPNL, tenemos que  $M, \langle (h', v'), (h, v) \rangle \Vdash \Lambda(\mathcal{AP})$  y por tanto  $p \in \langle (h''', v'''), (h, v) \rangle$  para todo rectángulo con  $h''' < h, v''' < v$ . Si hacemos  $h''' = h''$  y  $v''' = v''$  tenemos que  $p \wedge \neg p \in \langle (h''', v'''), (h, v) \rangle$  lo cual no es posible.

( $\Leftarrow$ ) De nuevo, por contradicción, supongamos que  $M$  es *upright local* y que  $M \not\Vdash \Lambda(\mathcal{AP})$ . Si  $M \not\Vdash \Lambda(\mathcal{AP})$  entonces existe un rectángulo  $\langle (h', v'), (h, v) \rangle$  en el que, para algún  $p \in \mathcal{AP}$ , no se satisface  $\varphi_1 = (p \leftrightarrow [N][E][S][W]p)$  o no se satisface  $\varphi_2 = (\neg p \leftrightarrow [N][E][S][W]\neg p)$ . Si no se satisface  $\varphi_1$  entonces se satisface  $\neg\varphi_1 = (p \leftrightarrow \langle N \rangle \langle E \rangle \langle S \rangle \langle W \rangle \neg p)$ , y por la semántica de SpPNL se tiene que si  $p \in \mathcal{V}(\langle (h', v'), (h, v) \rangle)$  entonces existe un rectángulo  $\langle (h'', v''), (h, v) \rangle$  con  $h'' < h', v'' < v'$  tal que  $p \notin \mathcal{V}(\langle (h'', v''), (h, v) \rangle)$ , lo cual no es posible por la hipótesis de que  $M$  es *upright local*. Lo mismo sucede si consideramos que no se satisface  $\varphi_2$ .  $\square$

Sea  $\mathcal{AP}|_f$  el conjunto de todas las variables proposicionales que aparecen en  $f$ . Utilizando una técnica similar a la que podemos encontrar en [BMG06], es posible demostrar que  $\tau(f)$  es satisfacible sobre los modelos *upright local* de SpPNL si y sólo si  $f$  es satisfacible. Para ello hay que proporcionar una traducción adecuada entre los modelos de la lógica de compás y los modelos *upright local* de SpPNL, y viceversa.

**Lema 6.6.** *Sea  $f$  una fórmula cualquiera de la lógica de compás, entonces  $f$  es satisfacible si y sólo si  $\tau(f) \wedge \Lambda(\mathcal{AP}|_f)$  es satisfacible en la clase de todos los modelos *upright local* de SpPNL.*

### Demostración.

En primer lugar, consideremos la siguiente traducción de los modelos  $M$  de la lógica de compás a los modelos *upright local* de SpPNL: sea  $M = \langle \mathbb{F}, \nu \rangle$  un modelo de la lógica de compás donde  $\mathbb{F}$  es un marco espacial y  $\nu : \mathbb{F} \mapsto 2^{\mathcal{AP}}$  es una función de evaluación, entonces  $\tau(M)$  se define como  $\tau(M) = \langle \mathbb{F}, \mathbb{O}(\mathbb{F}), \mathcal{V} \rangle$  donde  $\mathbb{O}(\mathbb{F}) = \{ \langle (h, v), (h', v') \rangle \mid h < h', v < v' \wedge (h, v), (h', v') \in \mathbb{F} \}$  y  $\mathcal{V} : \mathbb{O}(\mathbb{F}) \mapsto 2^{\mathcal{AP}}$  se define como  $p \in \mathcal{V}(\langle (h, v), (h', v') \rangle)$  para todo  $(h, v) \in \mathbb{F}$  tal que  $h < h', v < v'$ , si y sólo si  $p \in \nu(\langle (h', v') \rangle)$ , para todo  $p \in \mathcal{AP}$ .

Procedamos con la demostración por inducción sobre las fórmulas  $f$  de la lógica de compás.

- Caso base.  $p$  es satisfacible en  $M$  si y sólo si existe un punto  $(h', v')$  para el que  $p \in \nu(\langle (h', v') \rangle)$ . Por otro lado,  $\tau(p) \wedge \Lambda(p)$  es satisfacible en  $\tau(M)$  si y sólo si existe  $\langle (h, v), (h', v') \rangle$  tal que  $\tau(M), \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash p$  y  $\tau(M), \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \Lambda(p)$ .

Por la traducción  $\tau(M)$ ,  $p \in \nu(\langle (h', v') \rangle)$  si y sólo si  $p \in \mathcal{V}(\langle (h, v), (h', v') \rangle)$  para todo  $(h, v)$  con  $h < h'$  y  $v < v'$ , y por tanto  $\tau(M), \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash p$ , y por el Lema 6.5,  $\tau(M), \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \Lambda(p)$  si y sólo si  $\tau(M)$  es *upright local*. Por lo tanto, concluimos que  $p$  es satisfacible en  $M$  si y sólo si  $\tau(p) \wedge \Lambda(p)$  es satisfacible en  $\tau(M)$ .

- Supongamos ahora que  $f$  es satisfacible para algún modelo  $M$  si y sólo si  $\tau(f) \wedge \Lambda(\mathcal{AP}|_f)$  es satisfacible para  $\tau(M)$  (hipótesis inductiva), es decir, supongamos que  $M, (h', v') \Vdash f$  si y sólo si  $\tau(M), \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \tau(f) \wedge \Lambda(\mathcal{AP}|_f)$ . Los casos de  $\neg f$  y  $f \wedge g$  son triviales. Veamos a continuación los casos para los operadores modales.
- $(\diamond f)$ .  $\diamond f$  es satisfacible para algún modelo  $M$  si y sólo si existe  $(h', v')$  tal que  $M, (h', v') \Vdash \diamond f$  y por tanto existe  $v'' > v'$  tal que  $M, (h', v'') \Vdash f$ .

Por otro lado,  $\tau(\diamond f) \wedge \Lambda(\mathcal{AP}|_f)$  es satisfacible en  $\tau(M)$  si y sólo si existe  $\langle (h, v), (h', v') \rangle$  tal que  $\tau(M), \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \langle N \rangle \tau(f) \wedge \Lambda(\mathcal{AP}|_f)$ , si y sólo si existe  $v'' > v'$  tal que  $\tau(M), \langle (h, v'), (h', v'') \rangle \Vdash \tau(f) \wedge \Lambda(\mathcal{AP}|_f)$ .

Por la hipótesis inductiva  $\diamond f$  es satisfacible en  $M$  y  $(h', v')$  si y sólo si  $\tau(\diamond f) \wedge \Lambda(\mathcal{AP}|_f)$  es satisfacible en  $\tau(M)$  y  $\langle (h, v), (h', v') \rangle$ .

- $(\diamond f)$ .  $\diamond f$  es satisfacible para algún modelo  $M$  si y sólo si existe  $(h', v')$  tal que  $M, (h', v') \Vdash \diamond f$  y por tanto existe  $v'' < v'$  tal que  $M, (h', v'') \Vdash f$ .

Por otro lado,  $\tau(\diamond f) \wedge \Lambda(\mathcal{AP}|_f)$  es satisfacible en  $\tau(M)$  si y sólo si existe  $\langle (h, v), (h', v') \rangle$  tal que  $\tau(M), \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash [N] \langle S \rangle \langle S \rangle \tau(f) \wedge \Lambda(\mathcal{AP}|_f)$ , si y sólo si

$$\forall v''' > v' : \tau(M), \langle (h, v'), (h', v''') \rangle \Vdash \langle S \rangle \langle S \rangle \tau(f) \wedge \Lambda(\mathcal{AP}|_f) \Leftrightarrow$$

$$\exists v'' < v' : \tau(M), \langle (h, v''), (h', v') \rangle \Vdash \langle S \rangle \tau(f) \wedge \Lambda(\mathcal{AP}|_f) \Leftrightarrow$$

$$\exists v^* < v'' < v' : \tau(M), \langle (h, v^*), (h', v'') \rangle \Vdash \tau(f) \wedge \Lambda(\mathcal{AP}|_f).$$

Por la hipótesis inductiva  $\diamond f$  es satisfacible en  $M$  y  $(h', v')$  si y sólo si  $\tau(\diamond f) \wedge \Lambda(\mathcal{AP}|_f)$  es satisfacible en  $\tau(M)$  y  $\langle (h, v), (h', v') \rangle$ .

- $(\diamond f, \diamond f)$ . De forma similar a  $\diamond f$  y  $\diamond f$ .

□

**Teorema 6.4.** *El problema de la satisfacibilidad de SpPNL sobre la clase de todos los marcos rectangulares no es decidible.*

### Demostración.

Por reducción al absurdo, supongamos que el problema de la satisfacibilidad de SpPNL es decidible, entonces por el Lema 6.6 el problema de la satisfacibilidad de la lógica de compás también lo es, lo que nos lleva a una contradicción con el Teorema 6.3. □

Adicionalmente, podemos afirmar que el problema de la validez de las fórmulas de SpPNL sobre marcos rectangulares es RE-completo. Por la reducción anterior del problema de la satisfacibilidad de la lógica de compás, el problema de la satisfacibilidad de

SpPNL es al menos co-RE-duro, y por lo tanto el problema complementario de la validez es RE-duro. La pertenencia a RE se puede obtener de dos formas. Por un lado, como consecuencia de los teoremas de corrección y completitud del método de deducción basado árboles semánticos propuesto en la Sección 6.5. Por otro lado, observando que la clase de marcos espaciales (y por lo tanto la de los marcos rectangulares) se puede definir en lógica de primer orden mediante una traducción estándar [MR99].

## 6.5. Deducción basada en un Árbol Semántico

En esta sección proponemos un método de deducción terminante, correcto y completo basado en un árbol semántico para el problema de la validez, y por lo tanto de la no satisfacibilidad, de las fórmulas de la lógica SpPNL. Es decir, dada una fórmula  $\phi \in SpPNL$  como entrada, si el método termina y devuelve ‘Falso’ entonces  $\phi$  no es satisfacible (y por lo tanto  $\neg\phi$  es válida). En otro caso, no podemos decir nada sobre la satisfacibilidad de  $\phi$  (validez de  $\neg\phi$ ) ya que, como se demostró en la sección anterior, se trata de un problema semi-decidible.

Dentro de la lógica modal, el método de árbol semántico que aquí presentamos se clasifica dentro de los llamados *métodos explícitos* (ver [DGHP99]), es decir, aquellos en los que la relación de accesibilidad se representa explícitamente mediante algún mecanismo de etiquetado de fórmulas. Este método comparte muchas características con los propuestos en [GMS03] y [GMSS05] para lógicas modales de intervalos.

### 6.5.1. El Método

Empezaremos dando la definición de algunos conceptos básicos sobre árboles semánticos:

**Definición 6.6** (Árbol Finito). *Un árbol finito es un grafo dirigido conexo y finito en el que cada nodo, excepto uno (la raíz), tiene exactamente un arco de entrada.*

**Definición 6.7** (Sucesor). *Un sucesor de un nodo  $n$  es otro nodo  $n'$  tal que existe un arco desde  $n$  a  $n'$ .*

**Definición 6.8** (Hoja). *Una hoja es un nodo que no tiene sucesores.*

**Definición 6.9** (Camino, Rama). *Un camino es una secuencia de nodos  $n_0, \dots, n_k$  tales que, para cada  $i = 0, \dots, k - 1$ ,  $n_{i+1}$  es un sucesor de  $n_i$ . Una rama es un camino desde la raíz hasta una hoja.*

**Definición 6.10** (Altura de un Nodo). *La altura de un nodo  $n$  es la longitud máxima (número de arcos) de un camino desde  $n$  a una hoja. Si  $n, n'$  pertenecen a la misma rama y la altura de  $n$  es menor que (resp. menor o igual que) la altura de  $n'$ , se denota con  $n \prec n'$  (resp.  $n \preceq n'$ ).*

**Definición 6.11** (Fórmula Etiquetada, Decoración de un Nodo). *Si  $\mathbb{C}_h = \langle C_h, < \rangle$  y  $\mathbb{C}_v = \langle C_v, < \rangle$  son dos conjuntos finitos totalmente ordenados, una fórmula etiquetada, con etiqueta en  $\mathbb{C} = (\mathbb{C}_h \times \mathbb{C}_v)$ , es un par  $(\phi, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle)$ , donde  $\phi \in SpPNL$  y  $\langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ . Para un nodo  $n$  en un árbol  $\mathcal{T}$ , su decoración  $\nu(n)$  es una tripleta  $((\phi, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle), \mathbb{C}, u_n)$ , donde  $(\phi, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle)$  es una fórmula etiquetada, con etiqueta en  $\mathbb{C}$ , y  $u_n$  es una función de bandera local que asocia los valores 0 o 1 con cada rama  $B$  en  $\mathcal{T}$  que contiene a  $n$ .*

El valor 0 de la función de bandera local para un nodo  $n$  con respecto a una rama  $B$  significa que  $n$  puede expandirse en  $B$ .

**Definición 6.12** (Árbol Decorado). *Un árbol decorado es un árbol en el que cada nodo tiene una decoración  $\nu(n)$ .*

Para cada árbol decorado, utilizamos también una *función global de bandera*  $u$  que actúa sobre los pares (nodo, rama hasta ese nodo), y que se define como  $u(n, B) = u_n(B)$ . Para cada rama  $B$  en un árbol decorado, denotamos por  $\mathbb{C}_B$  al marco espacial que pertenece a la decoración del nodo hoja de  $B$  (y, de forma similar, nos referimos a  $\mathbb{C}_{h_B}$  y  $\mathbb{C}_{v_B}$ ), y para todo nodo  $n$  en un árbol decorado, denotamos por  $\Phi(n)$  a la fórmula perteneciente a su decoración. Si  $B$  es una rama, entonces  $B \cdot n$  es el resultado de la expansión de  $B$  con el nodo  $n$ . De forma similar,  $B \cdot n_1 \mid \dots \mid n_k$  es el resultado de la expansión de  $B$  con  $k$  nodos sucesores inmediatos (dando lugar a  $k$  ramas que extienden a  $B$ ).

**Definición 6.13** (Regla de Expansión). *Dado un árbol decorado  $\mathcal{T}$ , una rama  $B$  perteneciente a  $\mathcal{T}$ , y un nodo  $n \in B$  tal que  $\nu(n) = ((\phi, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle), \mathbb{C}, u)$ , con  $u(n, B) = 0$ , la regla de expansión para  $B$  y  $n$  se define como a continuación se indica (en todos los casos,  $u(n', B') = 0$  para todos los nuevos pares  $(n', B')$  de nodos y ramas):*

1. Si  $\phi = \neg\neg\psi$ , entonces expandir la rama a  $B \cdot n_0$ , con  $\nu(n_0) = ((\psi, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle), \mathbb{C}_B, u)$ ;
2. Si  $\phi = \psi \wedge \theta$ , entonces expandir la rama a  $B \cdot n_0 \cdot n_1$ , con  $\nu(n_0) = ((\psi, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle), \mathbb{C}_B, u)$  y  $\nu(n_1) = ((\theta, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle), \mathbb{C}_B, u)$ ;
3. Si  $\phi = \neg(\psi \wedge \theta)$ , entonces expandir la rama a  $B \cdot n_0 \mid n_1$ , con  $\nu(n_0) = ((\neg\psi, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle), \mathbb{C}_B, u)$  y  $\nu(n_1) = ((\neg\theta, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle), \mathbb{C}_B, u)$ ;

4. Si  $\phi = [E]\psi$  y existe  $h_o \in \mathbb{C}_{h_B}$ , tal que  $h_k < h_o$  y ese  $h_o$  no se ha utilizado aún para expandir el nodo  $n$  en  $B$ , entonces tomar el menor  $h_o$  y expandir la rama a  $B \cdot n_0$ , con  $\nu(n_0) = ((\psi, \langle (h_k, v_j), (h_o, v_l) \rangle), \mathbb{C}_B, u)$ ;
5. Si  $\phi = [W]\psi$  y existe  $h_o \in \mathbb{C}_{h_B}$ , tal que  $h_o < h_i$  y ese  $h_o$  no se ha utilizado aún para expandir el nodo  $n$  en  $B$ , entonces tomar el mayor  $h_o$  y expandir la rama a  $B \cdot n_0$ , con  $\nu(n_0) = ((\psi, \langle (h_o, v_j), (h_i, v_l) \rangle), \mathbb{C}_B, u)$ ;
6. Si  $\phi = [N]\psi$  y existe  $v_o \in \mathbb{C}_{v_B}$ , tal que  $v_l < v_o$  y ese  $v_o$  no se ha utilizado aún para expandir el nodo  $n$  en  $B$ , entonces tomar el menor  $v_o$  y expandir la rama a  $B \cdot n_0$ , con  $\nu(n_0) = ((\psi, \langle (h_i, v_l), (h_k, v_o) \rangle), \mathbb{C}_B, u)$ ;
7. Si  $\phi = [S]\psi$  y existe  $v_o \in \mathbb{C}_{h_B}$ , tal que  $v_o < v_j$  y ese  $v_o$  no se ha utilizado aún para expandir el nodo  $n$  en  $B$ , entonces tomar el mayor  $v_o$  y expandir la rama a  $B \cdot n_0$ , con  $\nu(n_0) = ((\psi, \langle (h_i, v_o), (h_k, v_j) \rangle), \mathbb{C}_B, u)$ ;
8. Si  $\phi = \langle E \rangle \psi$ , entonces, si  $h_{k+m}$  es el último elemento de  $\mathbb{C}_{h_B}$ , expandir la rama a  $B \cdot n_{k+1} | \dots | n_{k+m} | n'_{k+1} | \dots | n'_{k+m+1}$ , donde:
  - a) para todo  $h_z \in \mathbb{C}_{h_B}$  tal que  $h_k < h_z$ , ( $k < z \leq k+m$ ),  $\nu(n_z) = ((\psi, \langle (h_k, v_j), (h_z, v_l) \rangle), \mathbb{C}_B, u)$ ;
  - b) para todo  $k \leq z \leq k+m$ , sea  $\mathbb{C}'_{h_B}$  el orden lineal obtenido al insertar un nuevo elemento  $h_w$  justo después de  $h_z$ , y  $\nu(n'_z) = ((\psi, \langle (h_k, v_j), (h_w, v_l) \rangle), \mathbb{C}'_{h_B}, u)$ ;
9. Si  $\phi = \langle W \rangle \psi$ , entonces, si  $h_0$  es el primer elemento de  $\mathbb{C}_{h_B}$ , expandir la rama a  $B \cdot n_0 | \dots | n_{i-1} | n'_0 | \dots | n'_i$ , donde:
  - a) para todo  $h_z \in \mathbb{C}_{h_B}$  tal que  $h_z < h_i$ , ( $0 \leq z < i$ ),  $\nu(n_z) = ((\psi, \langle (h_z, v_j), (h_i, v_l) \rangle), \mathbb{C}_B, u)$ ;
  - b) para todo  $0 \leq z \leq i$ , sea  $\mathbb{C}'_{h_B}$  el orden lineal obtenido de insertar un nuevo elemento  $h_w$  justo antes de  $h_z$ , y  $\nu(n'_z) = ((\psi, \langle (h_w, v_j), (h_i, v_l) \rangle), \mathbb{C}'_{h_B}, u)$ ;
10. Si  $\phi = \langle N \rangle \psi$ , entonces, si  $v_{l+m}$  es el último elemento de  $\mathbb{C}_{v_B}$ , expandir la rama a  $B \cdot n_{l+1} | \dots | n_{l+m} | n'_{l+1} | \dots | n'_{l+m+1}$ , donde:
  - a) para todo  $v_z \in \mathbb{C}_{v_B}$  tal que  $v_l < v_z$ , ( $l < z \leq l+m$ ),  $\nu(n_z) = ((\psi, \langle (h_i, v_l), (h_k, v_z) \rangle), \mathbb{C}_B, u)$ ;
  - b) para todo  $l \leq z \leq l+m$ , sea  $\mathbb{C}'_{v_B}$  el orden lineal obtenido de insertar un nuevo elemento  $v_w$  justo después de  $v_z$ , y  $\nu(n'_z) = ((\psi, \langle (h_i, v_l), (h_k, v_w) \rangle), \mathbb{C}'_{v_B}, u)$ ;

11. Si  $\phi = \langle S \rangle \psi$ , entonces, si  $v_0$  es el primer elemento de  $\mathbb{C}_{v_B}$ , expandir la rama a  $B \cdot n_0 | \dots | n_{j-1} | n'_0 | \dots | n'_j$ , donde:

- a) para todo  $v_z \in \mathbb{C}_{v_B}$  tal que  $v_z < v_j$ , ( $0 \leq z < j$ ),  $\nu(v_z) = ((\psi, \langle (h_i, v_z), (h_k, v_j) \rangle), \mathbb{C}_B, u)$ ;
- b) para todo  $0 \leq z \leq j$ , sea  $\mathbb{C}'_{h_B}$  el orden lineal obtenido al insertar un nuevo elemento  $v_w$  justo antes de  $v_z$ , y  $\nu(n'_z) = ((\psi, \langle (h_i, v_w), (h_k, v_j) \rangle), \mathbb{C}'_{h_B}, u)$ ;

Por último, para todo nodo  $m (\neq n)$  en  $B$  y para toda rama  $B'$  que extiende a  $B$ , sea  $u(m, B') = u(m, B)$ , y para toda rama  $B'$  que extiende a  $B$ ,  $u(n, B') = 1$ , a menos que  $\phi = [X]\psi$  (en tal caso  $u(n, B') = 0$ ).

A continuación, definimos los conceptos de ramas abiertas y cerradas. Decimos que un nodo  $n$  en un árbol decorado  $\mathcal{T}$  está *disponible en un rama  $B$*  si y sólo si  $u(n, B) = 0$ . La regla de expansión es *aplicable* a un nodo  $n$  en una rama  $B$  si el nodo está disponible en  $B$  y la aplicación de la regla genera al menos un nodo sucesor con una nueva fórmula etiquetada. Es segunda condición es necesaria para evitar bucles a la hora de aplicar la regla sobre las modalidades universales.

**Definición 6.14** (Rama Cerrada y Abierta). *Una rama  $B$  es cerrada si y sólo si existen dos nodos  $n, n' \in B$  tales que  $\nu(n) = ((\phi, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle), \mathbb{C}, u)$  y  $\nu(n') = ((-\phi, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle), \mathbb{C}, u)$  para alguna fórmula  $\phi$ . En caso contrario se dice que es abierta.*

**Definición 6.15** (Estrategia de Expansión). *Definimos la estrategia de expansión para una rama  $B$  en un árbol decorado  $\mathcal{T}$ , como se indica a continuación:*

- (i) *Aplicar la regla de expansión a la rama  $B$  si y sólo si está abierta, y*
- (ii) *si  $B$  está abierta, aplicar la regla de expansión al primer nodo disponible que nos encontremos desde la raíz a la hoja de  $B$  para el que la regla de expansión es aplicable (si es que existe).*

Un *árbol semántico inicial* para una fórmula  $\phi \in \text{SpPNL}$  es el árbol decorado  $\mathcal{T}$  con sólo un nodo raíz tal que  $\nu(\text{raíz}) = ((\phi, \langle (h_0, v_0), (h_1, v_1) \rangle), \mathbb{C}, 0)$ , donde  $C_h = \{h_0, h_1\}$  ( $h_0 < h_1$ ),  $C_v = \{v_0, v_1\}$  ( $v_0 < v_1$ ). Por último, definimos un *árbol semántico* para SpPNL de la siguiente manera.

**Definición 6.16.** *Un árbol semántico para una fórmula  $\phi \in \text{SpPNL}$  es cualquier árbol decorado finito isomorfo a un árbol decorado finito  $\mathcal{T}$  obtenido al expandir el árbol semántico inicial para  $\phi$  por medio de la aplicación sucesiva de la estrategia de expansión sobre las ramas existentes.*

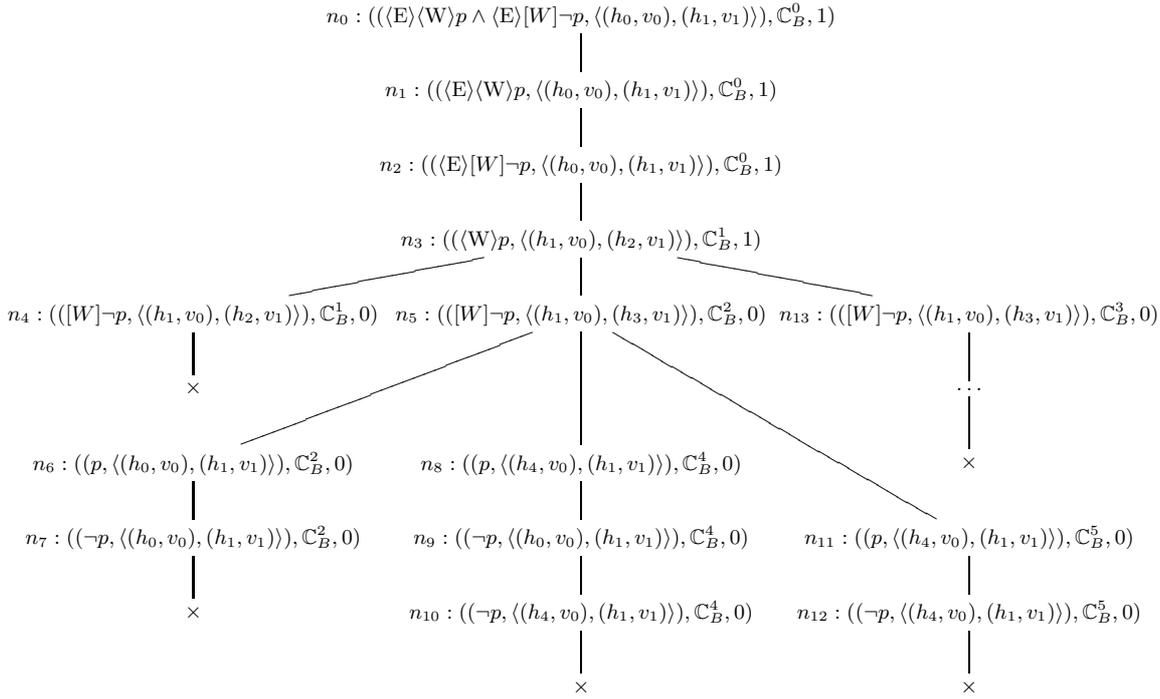


Figura 6.6: Un árbol semántico cerrado para la fórmula  $\langle E \rangle \langle W \rangle p \wedge \langle E \rangle [W] \neg p$ .

Del mismo modo que ocurre en la lógica clásica, un árbol semántico para SpPNL está *cerrado* si y sólo si cada una de sus ramas está cerrada, en otro caso está *abierto*.

**Ejemplo 6.1.** La Figura 6.6 muestra un ejemplo de un árbol semántico para la fórmula  $\langle E \rangle \langle W \rangle p \wedge \langle E \rangle [W] \neg p$ . Como se puede ver, el árbol resultante tiene todas sus ramas cerradas. En la Tabla 6.1 se describen los marcos espaciales utilizados en la resolución del árbol semántico.

### 6.5.2. Corrección y Completitud

**Definición 6.17.** Dado un conjunto  $S$  de fórmulas etiquetadas con etiquetas en  $\mathbb{C}$ , se dice que  $S$  es satisfacible en  $\mathbb{C}$  si existe un modelo espacial  $M = \langle \mathbb{F}, \mathbb{O}(\mathbb{F}), \mathcal{V} \rangle$ , tal que  $\mathbb{F}$  es una extensión de  $\mathbb{C}$  y  $M, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle \Vdash \psi$  para toda  $(\psi, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle) \in S$ .

Si  $S$  contiene tan sólo una fórmula etiquetada, la idea de satisfacibilidad de una fórmula (etiquetada) en  $\mathbb{C}$  es equivalente al concepto de satisfacibilidad dado en la Sección 6.1

**Teorema 6.5** (Corrección). Si  $\phi \in SpPNL$  y un árbol semántico  $\mathcal{T}$  para  $\phi$  es cerrado, entonces  $\phi$  no es satisfacible.

**Demostración.**

Lo demostraremos por inducción sobre la altura  $h$  de un nodo  $n$  en el árbol semántico

$i$	$\mathbb{C}_{h_B}^i$	$\mathbb{C}_{v_B}^i$
0	$\{h_0, h_1\}(h_0 < h_1)$	$\{v_0, v_1\}(v_0 < v_1)$
1	$\{h_0, h_1, h_2\}(h_0 < h_1 < h_2)$	$\{v_0, v_1\}(v_0 < v_1)$
2	$\{h_0, h_1, h_2, h_3\}(h_0 < h_1 < h_3 < h_2)$	$\{v_0, v_1\}(v_0 < v_1)$
3	$\{h_0, h_1, h_2, h_3\}(h_0 < h_1 < h_2 < h_3)$	$\{v_0, v_1\}(v_0 < v_1)$
4	$\{h_0, h_1, h_2, h_3, h_4\}(h_4 < h_0 < h_1 < h_3 < h_2)$	$\{v_0, v_1\}(v_0 < v_1)$
5	$\{h_0, h_1, h_2, h_3, h_4\}(h_0 < h_4 < h_1 < h_3 < h_2)$	$\{v_0, v_1\}(v_0 < v_1)$

Tabla 6.1: Marcos espaciales para el árbol semántico de la Figura 6.6.

$\mathcal{T}$  en el que si toda rama que incluya a  $n$  es cerrada, entonces el conjunto  $S(n)$  de todas las fórmulas etiquetadas en las decoraciones de los nodos entre  $n$  y la raíz no es satisfacible en  $\mathbb{C}$ , donde  $\mathbb{C}$  es el marco espacial de la decoración de  $n$ . Si  $h = 0$ , entonces  $n$  es una hoja y la única rama  $B$  que contiene a  $n$  está cerrada. Esto quiere decir que  $S(n)$  contiene a las fórmulas etiquetadas  $(\psi, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle)$  y  $(\neg\psi, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle)$  para alguna fórmula  $\psi$ . Tómese cualquier modelo  $M = \langle \mathbb{F}, \mathbb{O}(\mathbb{F}), \mathcal{V} \rangle$ , tal que  $\mathbb{F}$  es una extensión de  $\mathbb{C}$ . Como sabemos  $M, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle \Vdash \psi$  si y sólo si  $M, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle \not\Vdash \neg\psi$ . Por eso,  $S(n)$  no es satisfacible en  $\mathbb{C}$ . Por el contrario, supóngase  $h > 0$ . Entonces o  $n$  ha sido generado como uno de los sucesores, pero sin ser el último, cuando se ha aplicado la regla de expansión de  $\wedge$ , o la regla de expansión ha sido aplicada a alguna fórmula etiquetada  $(\psi, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle) \in S(n) - \{\Phi(n)\}$  para extender la rama en  $n$ . Trataremos este último caso ya que el primero se puede resolver del mismo modo. Sea  $\mathbb{C}$  la estructura espacial de la decoración de  $n$ . Podemos observar que toda rama que pasa por cualquier sucesor de  $n$  tiene que ser cerrada, por tanto la hipótesis inductiva se aplica a todos los sucesores de  $n$ . Consideramos los posibles casos de aplicación de la regla de expansión en  $n$ , ocupándonos sólo de los más interesantes:

- Sea  $\psi = \xi_0 \wedge \xi_1$ . Entonces existen dos nodos  $n_0, n_1 \in B$  tales que  $\nu(n_0) = ((\xi_0, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle), \mathbb{C}, u)$ ,  $\nu(n_1) = ((\xi_1, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle), \mathbb{C}, u)$ , y, sin pérdida de generalidad,  $n_0$  es el sucesor de  $n$  y  $n_1$  es el sucesor de  $n_0$ . Ya que toda rama que contiene a  $n$  está cerrada, entonces cada rama que contiene a  $n_1$  está cerrada también. Por la hipótesis inductiva,  $S(n_1)$  no es satisfacible en  $\mathbb{C}$  ya que  $n_1 \prec n$ . Debido a que todo modelo en  $\mathbb{C}$  que satisface a  $S(n)$  tiene que, particularmente, satisfacer a  $(\xi_0 \wedge \xi_1, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle)$ , y de ahí  $(\xi_0, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle)$  y  $(\xi_1, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle)$ , se sigue que  $S(n)$ ,  $S(n_0)$ , y  $S(n_1)$  son equi-satisfacibles en  $\mathbb{C}$ . Por lo tanto,  $S(n)$  no es satisfacible en  $\mathbb{C}$ .
- Sea  $\psi = [N]\xi$ . Supongamos por contradicción que  $S(n)$  es satisfacible en  $\mathbb{C}$ . Entonces, debido a que  $([N]\psi, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle) \in S(n)$ , existe un modelo  $M = \langle \mathbb{F}, \mathbb{O}(\mathbb{F}), \mathcal{V} \rangle$  tal que  $\mathbb{F}$  es una extensión de  $\mathbb{C}$  y  $M, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle \Vdash [N]\xi$ . Por lo tanto,

para todo  $v_m \in \mathbb{C}_v$  tal que  $v_l < v_m$ , tenemos que  $M, \langle (h_i, v_l), (h_k, v_m) \rangle \Vdash \xi$ . Por construcción, el sucesor inmediato de  $n$  es  $n_1$  tal que, para un elemento  $v_o$  con  $v_l < v_o$ ,  $(\xi, \langle (h_i, v_l), (h_k, v_m) \rangle)$  pertenece al adorno de  $n_1$ . Por hipótesis inductiva, ya que  $n_1 \prec n$ ,  $S(n_1)$  no es satisfacible en  $\mathbb{C}$ . Por lo tanto, dicho modelo  $M$  no puede existir y  $S(n)$  no es satisfacible en  $\mathbb{C}$ .

- Sea  $\psi = \langle N \rangle \xi$ . Si asumimos por contradicción que  $S(n)$  es satisfacible en  $\mathbb{C}$ , existe un modelo  $M = \langle \mathbb{F}, \mathbb{O}(\mathbb{F}), \mathcal{V} \rangle$  tal que  $\mathbb{F}$  es una extensión de  $\mathbb{C}$  y  $M, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle \Vdash \theta$  para todo  $(\theta, \langle (h_i, v_j), (h_k, v_l) \rangle) \in S(n)$ . En particular,  $M, \langle (h_i, v_l), (h_k, v_m) \rangle \Vdash \xi$  para algún  $v_m$  tal que  $v_l < v_m$ . Considérense dos casos:

1. Si  $v_m \in \mathbb{C}_v$ , entonces  $v_m = v_o$  para algún  $v_l < v_o$ . Pero entre los sucesores de  $n$  existe un nodo  $n_o$  donde  $\nu(n_o) = ((\xi, \langle (h_i, v_l), (h_k, v_o) \rangle), \mathbb{C}, u)$ , y ya que  $n_o \prec n$ , por hipótesis inductiva  $S(n_o) = S(n) \cup \{(\xi_o, \langle (h_i, v_l), (h_k, v_o) \rangle)\}$  no es satisfacible en  $\mathbb{C}$ , lo cual es una contradicción, y  $S(n)$  no es satisfacible en  $\mathbb{C}$ .
2. Si  $v_m \notin \mathbb{C}_v$ , entonces existe un  $o$  tal que  $l < o$  y  $v_l < v_o$ . Por eso, existe un sucesor  $n_o$  de  $n$  tal que  $\nu(n_o) = ((\xi, \langle (h_i, v_l), (h_k, v_o) \rangle), \mathbb{C}_v \cup \{v_o\}, u)$ , y ya que  $n_o \prec n$ , por hipótesis inductiva  $S(n_o) = S(n) \cup \{(\xi, \langle (h_i, v_l), (h_k, v_o) \rangle)\}$  no es satisfacible en  $\mathbb{C}'$  (obtenido de añadir  $v_o$  a  $\mathbb{C}_v$ ) lo cual, de nuevo, es una contradicción, y  $S(n)$  no es satisfacible en  $\mathbb{C}$ .

- El resto de casos se tratan de forma parecida.

□

**Definición 6.18.** Si  $\mathcal{T}_0$  es el árbol semántico inicial de una fórmula  $\phi$  de SpPNL, el árbol semántico límite  $\overline{\mathcal{T}}$  de  $\phi$  es el árbol decorado (posiblemente infinito) obtenido del siguiente modo. Primero, para todo  $i$ ,  $\mathcal{T}_{i+1}$  es el árbol semántico obtenido por la aplicación simultánea de la estrategia de expansión en cada rama de  $\mathcal{T}_i$ . Después, ignoramos todas las banderas de los adornos de los nodos en cada  $\mathcal{T}_i$ . De este modo, obtenemos una serie de inclusiones de árboles decorados:  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \subseteq \dots$ , y definimos  $\overline{\mathcal{T}} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{T}_i$ .

Adviertase que la serie de inclusiones anterior debe estabilizarse en algún  $\mathcal{T}_i$  si éste se cierra, o si la regla de expansión no es aplicable en ninguna de sus ramas. Si  $\overline{\mathcal{T}}$  es un árbol semántico límite, asociamos con cada rama  $B$  en  $\overline{\mathcal{T}}$  el marco espacial  $\mathbb{C}_B = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{C}_{B_i}$ , donde, para todo  $i$ ,  $\mathbb{C}_{B_i}$  es el marco espacial de la decoración de la hoja de la sub-rama  $B_i$  de  $B$  en  $\mathcal{T}_i$ . Las definiciones de ramas cerradas y abiertas se aplican de forma inmediata a  $\overline{\mathcal{T}}$ .

**Definición 6.19.** *Una rama en un árbol semántico (límite) es saturada si no existen nodos en dicha rama a los que se pueda aplicar la regla de expansión. Un árbol semántico (límite) es saturado si toda rama abierta es saturada.*

A continuación veremos que el conjunto de todas las fórmulas etiquetadas en una rama abierta de un árbol semántico límite tiene las propiedades de saturación de un conjunto de Hintikka de lógica de primer orden.

**Lema 6.7** (Lema de saturación). *Todo árbol semántico límite es saturado.*

### Demostración.

Dado un nodo  $n$  en un árbol semántico límite  $\overline{T}$ , denotamos por  $k(n)$  a la distancia (número de arcos) entre  $n$  y la raíz de  $\overline{T}$ . Dada una rama  $B$  en  $\overline{T}$ , demostraremos por inducción en  $k(n)$  que después de cada paso de la expansión de dicha rama donde la regla de expansión es aplicable a  $n$  (porque  $n$  acaba de ser introducida, o porque un nuevo punto ha sido introducido en el marco espacio de  $B$ ), dicha regla es aplicada posteriormente en  $B$  para ese nodo. Supóngase que la hipótesis inductiva se cumple para todos los nodos con distancia a la raíz menor que 1. Sea  $k(n) = l$  y la regla de expansión es aplicable para  $n$ . Si no existen nodos entre la raíz (inclusive) y  $n$  (exclusive) a los que se puede aplicar la regla de expansión en ese momento, la siguiente aplicación de la regla de expansión en  $B$  es en  $n$ . De otra manera, considérese el nodo  $n^*$  más cercano a  $n$  entre la raíz y  $n$  al que se le puede aplicar la regla de expansión o será aplicable en  $B$  poco después al menos una vez (tal nodo existe porque sólo hay un número finito de nodos entre  $n$  y la raíz). Ya que  $k(n^*) < k(n)$ , por la hipótesis inductiva la regla de expansión ha sido aplicada subsecuentemente a  $n^*$ . Entonces la próxima aplicación de la regla de expansión en  $B$  tiene que haber sido en  $n$  lo cual completa la inducción. Ahora, asumiendo que una rama en un árbol semántico límite no es saturada, considérese el nodo  $n$  más cercano a la raíz en dicha rama en el que la regla de expansión es aplicable. Si  $\Phi(n)$  no es una modalidad universal, entonces la regla de expansión se vuelve aplicable en  $n$  en el paso en el que  $n$  es introducida, y por la afirmación anterior, la regla ha sido aplicada subsecuentemente, momento en el cual el nodo se ha vuelto no disponible, lo cual contradice el supuesto. Supóngase que  $\Phi(n) = [N]\psi$ . Entonces una aplicación de la regla en  $B$  crearía un sucesor con la etiqueta  $(\psi, \langle (h_i, v_i), (h_k, v_m) \rangle)$  en  $B$ . Pero  $v_j, v_l, v_m$  ya han sido introducidos en algún paso (finito) de la construcción de  $B$  y en el primer paso cuando los tres, así como  $n$ , han aparecido en la rama, la regla de expansión se ha vuelto aplicable en  $n$ , por lo que ha sido aplicada subsecuentemente en  $B$  y dicha aplicación debe haber introducido la etiqueta  $(\psi, \langle (h_i, v_i), (h_k, v_m) \rangle)$ , lo cual, se contradice, de nuevo, con la suposición. Lo mismo ocurre con el resto de modalidades universales.  $\square$

Como corolario del resultado anterior, tenemos que si  $\phi$  es una fórmula de SpPNL y

$\bar{T}$  es el árbol semántico límite de  $\phi$ , entonces para toda rama abierta  $B$  en  $\bar{T}$ , se cumplen las siguientes propiedades de cierre:

- (i) para un nodo  $n \in B$  tal que  $\nu(n) = ((\neg\neg\psi, \langle(h_i, v_j), (h_k, v_l)\rangle), \mathbb{C}, u)$ , existe un nodo  $n_0 \in B$  tal que  $\nu(n_0) = ((\psi, \langle(h_i, v_j), (h_k, v_l)\rangle), \mathbb{C}, u_0)$ ;
- (ii) para un nodo  $n \in B$  tal que  $\nu(n) = ((\psi_0 \wedge \psi_1, \langle(h_i, v_j), (h_k, v_l)\rangle), \mathbb{C}, u)$ , existe un nodo  $n_0 \in B$  tal que  $\nu(n_0) = ((\psi_0, \langle(h_i, v_j), (h_k, v_l)\rangle), \mathbb{C}, u_0)$  y un nodo  $n_1 \in B$  tal que  $\nu(n_1) = ((\psi_1, \langle(h_i, v_j), (h_k, v_l)\rangle), \mathbb{C}, u_1)$ ;
- (iii) para un nodo  $n \in B$  tal que  $\nu(n) = ((\neg(\psi_0 \wedge \psi_1), \langle(h_i, v_j), (h_k, v_l)\rangle), \mathbb{C}, u)$ , existe un nodo  $n_0 \in B$  tal que  $\nu(n_0) = ((\neg\psi_0, \langle(h_i, v_j), (h_k, v_l)\rangle), \mathbb{C}, u_0)$  o un nodo  $n_1 \in B$  tal que  $\nu(n_1) = ((\neg\psi_1, \langle(h_i, v_j), (h_k, v_l)\rangle), \mathbb{C}, u_1)$ ;
- (iv) para un nodo  $n \in B$  tal que  $\nu(n) = ((\langle N \rangle\psi, \langle(h_i, v_j), (h_k, v_l)\rangle), \mathbb{C}, u)$ , entonces, para algún  $v_m \in \mathbb{C}_v$  tal que  $v_l < v_m$  existe un nodo  $n_0 \in B$  tal que  $\nu(n_0) = ((\psi, \langle(h_i, v_l), (h_k, v_m)\rangle), \mathbb{C}', u')$  (y de forma similar para el resto de modalidades existenciales);
- (v) para un nodo  $n \in B$  tal que  $\nu(n) = ([N]\psi, \langle(h_i, v_j), (h_k, v_l)\rangle), \mathbb{C}, u)$ , entonces para todo  $v_m \in \mathbb{C}_v$  tal que  $v_l < v_m$  existe un nodo  $n_0 \in B$  tal que  $\nu(n_0) = ((\psi, \langle(h_i, v_l), (h_k, v_m)\rangle), \mathbb{C}', u')$  (y de forma similar para el resto de modalidades universales).

**Lema 6.8.** *Si el árbol semántico límite para una fórmula  $\phi \in SpPNL$  es cerrado, entonces algún árbol semántico finito para  $\phi$  es cerrado.*

### Demostración.

Supongamos que el árbol semántico límite para  $\phi$  es cerrado. Entonces cada rama se cierra en algún paso finito de la construcción y entonces permanece finito. Debido a que la regla de expansión siempre produce un número de sucesores finito, todo árbol semántico finito tiene un número finito de ramas, y por lo tanto también lo tendrá el árbol semántico límite. Entonces, por el lema de König, el árbol semántico límite, al ser un árbol con un número finito de ramas en cada ramificación y con un número finito de hojas al final de cada rama, y además sus ramas son finitas, entonces debe ser finito, por lo que su construcción se estabiliza en algún paso. Llegado a este punto obtenemos como resultado un árbol semántico cerrado construido para  $\phi$ .  $\square$

**Teorema 6.6** (Compleitud). *Sea  $\phi \in SpPNL$  una fórmula válida. Entonces existe un árbol semántico cerrado para  $\neg\phi$ .*

**Demostración.**

Demostraremos que el árbol límite  $\overline{T}$  para  $\neg\phi$  es cerrado utilizando el lema anterior. Por contraposición, supongamos que  $\overline{T}$  tiene una rama abierta  $B$ . Sea  $\mathbb{C}_B$  el marco espacial asociado con  $B$  y sea  $S(B)$  el conjunto de todas las fórmulas etiquetadas en  $B$ . Consideremos el modelo espacial que parte de él, donde para todo objeto  $\langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle$  y  $p \in \mathcal{AP}$ ,  $p \in \mathcal{V}(\langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle)$  si y sólo si  $(p, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle) \in \Phi(B)$ . Demostramos por inducción en  $\psi$  que, para todo  $(\psi, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle) \in S(B)$ ,  $M, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle \Vdash \psi$ :

- Sea  $\psi = p$  o  $\psi = \neg p$  donde  $p \in \mathcal{AP}$ . Por definición si  $(\neg p, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle) \in S(B)$  entonces  $(p, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle) \notin S(B)$  ya que  $B$  está abierta;
- Sea  $\psi = \neg\neg\xi$ . Entonces por las consecuencias del lema de saturación,  $(\xi, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle) \in S(B)$ , y por hipótesis inductiva  $M, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle \Vdash \xi$ . Por lo tanto  $M, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle \Vdash \psi$ ;
- Sea  $\psi = \xi_0 \wedge \xi_1$ . Entonces por el lema de saturación,  $(\xi_0, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle) \in S(B)$  y  $(\xi_1, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle) \in S(B)$ . Por hipótesis inductiva,  $M, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle \Vdash \xi_0$  y  $M, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle \Vdash \xi_1$ , por tanto  $M, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle \Vdash \psi$ ;
- Sea  $\psi = \neg(\xi_0 \wedge \xi_1)$ . Entonces por el lema de saturación,  $(\neg\xi_0, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle) \in S(B)$  o  $(\neg\xi_1, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle) \in S(B)$ . Por hipótesis inductiva  $M, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle \Vdash \neg\xi_0$  o  $M, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle \Vdash \neg\xi_1$ , por tanto  $M, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle \Vdash \psi$ ;
- Sea  $\psi = \langle N \rangle \xi$ . Entonces por el lema de saturación,  $(\xi, \langle\langle h_i, v_l \rangle, \langle h_k, v_m \rangle\rangle) \in S(B)$  y para algún  $v_m \in \mathbb{C}_{v_B}$  tal que  $v_l < v_m$ . Así, por hipótesis inductiva,  $M, \langle\langle h_i, v_l \rangle, \langle h_k, v_m \rangle\rangle \Vdash \xi$ , y por tanto  $M, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle \Vdash \psi$  (y de forma similar para el resto de modalidades existenciales);
- Sea  $\psi = [N] \xi$ . Entonces por el lema de saturación, para todo  $v_m \in \mathbb{C}_{v_B}$  tal que  $v_l < v_m$ ,  $(\xi, \langle\langle h_i, v_l \rangle, \langle h_k, v_m \rangle\rangle) \in S(B)$ . Por esta razón, para cualquier  $v_m$ , por hipótesis inductiva  $M, \langle\langle h_i, v_l \rangle, \langle h_k, v_m \rangle\rangle \Vdash \xi$ . Por tanto,  $M, \langle\langle h_i, v_j \rangle, \langle h_k, v_l \rangle\rangle \Vdash \psi$ .

Esto completa la inducción. En concreto, obtenemos que  $\neg\phi$  se satisface en  $M$ , lo cual se contradice con la suposición de que  $\phi$  es válida.  $\square$

**Ejemplo 6.2.** Sea  $\phi = \langle E \rangle \langle W \rangle p \rightarrow [E] \langle W \rangle p$  una fórmula de  $SpPNL$ . Para comprobar si  $\phi$  es una fórmula válida podemos obtener el árbol semántico para  $\neg\phi = \langle E \rangle \langle W \rangle p \wedge \langle E \rangle [W] \neg p$ . Como vimos en el Ejemplo 6.1 el árbol semántico para  $\neg\phi$  es cerrado, por lo que podemos concluir que  $\neg\phi$  no es satisficible y por lo tanto que  $\phi$  es válida.

## 6.6. Una Subclase Decidible: SpPNL<sub>t</sub>

En las secciones anteriores se ha visto que SpPNL, a pesar de su sencillez, es una lógica muy expresiva. Sin embargo el problema de comprobar si una fórmula es satisfacible es un problema no decidible. En esta sección nos planteamos dar respuesta a la siguiente cuestión:

¿Es posible encontrar alguna subclase de la lógica SpPNL cuyo problema de satisfacibilidad/validez sea decidible?

### 6.6.1. Temporalización de la Lógica PNL

En esta sección aprovecharemos los resultados de decidibilidad de la lógica PNL (introducida en la Sección 5.3.1) para obtener una lógica espacial basándonos en una técnica de composición de lógicas temporales. Para tal fin, a partir de ahora, cuando hablemos de PNL nos referiremos a su formulación más estricta (PNL<sup>-</sup>), es decir, aquella en la que únicamente se permiten intervalos estrictos.

La técnica de *temporalización* [FG92, FG96] es la forma más simple de combinar dos lógicas (temporales). En el caso de lógicas temporales basadas en puntos sobre flujos de tiempo lineales, la utilización de dicha técnica permite trasladar algunos resultados positivos, como la completitud y la decidibilidad, de dos lógicas (temporales) a la lógica combinada. Que sepamos, no existe en la literatura ningún intento de temporalizar lógicas temporales basadas en intervalos. Ya que queremos combinar la lógica PNL consigo misma, denotaremos por  $\langle A \rangle_h$  y  $\langle \bar{A} \rangle_h$  a los operadores modales de PNL en el dominio ‘horizontal’, y por  $\langle A \rangle_v$  y  $\langle \bar{A} \rangle_v$  a aquellos utilizados en el dominio ‘vertical’. Uno de nuestros objetivos es demostrar que la lógica combinada resultante PNL(PNL) es una subclase (estricta) de la lógica SpPNL. Así pues, la denotaremos como SpPNL<sub>t</sub> (donde *t* indica que se ha utilizado la técnica de temporalización). Las fórmulas de SpPNL<sub>t</sub> se denotarán con  $\phi, \psi \dots$  (ya que, como veremos, se tratan también de fórmulas de SpPNL), y son generadas por la siguiente sintaxis abstracta:

$$\phi ::= f \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid \langle A \rangle_h \phi \mid \langle \bar{A} \rangle_h \phi,$$

donde *f* es una fórmula habitual de PNL tal que para toda ocurrencia de los operadores modales  $\langle A \rangle$  y  $\langle \bar{A} \rangle$  se han reemplazado por  $\langle A \rangle_v$  y  $\langle \bar{A} \rangle_v$ , respectivamente. Intuitivamente, una fórmula de SpPNL<sub>t</sub> es una fórmula de PNL donde, en lugar de letras proposicionales, utilizamos fórmulas de PNL. Por medio del operador modal más externo nos movemos, por así decirlo, horizontalmente en un dominio lineal, mientras que con los operadores modales más internos nos movemos verticalmente. El método de temporalización permite

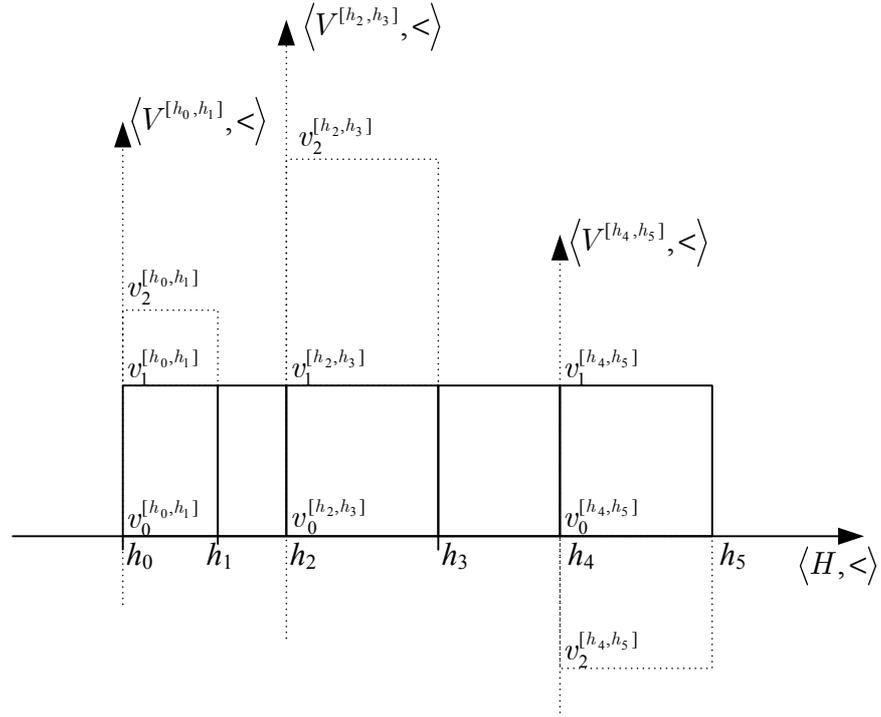


Figura 6.7: Ejemplo de modelo resultante de la temporalización de PNL.

a las dos lógicas interactuar de una forma muy restringida, es decir, primero nos movemos utilizando un lógica, y luego la otra. En cuanto a la semántica, consideramos un conjunto totalmente ordenado  $\mathbb{H} = \langle H, < \rangle$  tal que, para todo intervalo  $[h_i, h_j]$  ( $h_i < h_j$ ) del conjunto  $\mathbb{I}(\mathbb{H})$  se define una *función de evaluación parcial*  $\nu : \mathbb{I}(\mathbb{H}) \mapsto \mathfrak{M}$  (donde denotamos por  $\mathfrak{M}$  al conjunto infinito de todos los modelos posibles de PNL) como el modelo de PNL  $\nu([h_i, h_j]) = \langle \mathbb{V}^{[h_i, h_j]}, \mathbb{I}(\mathbb{V}^{[h_i, h_j]}), \mathcal{V}^{[h_i, h_j]} \rangle$ , donde  $\mathbb{V}^{[h_i, h_j]} = \langle V^{[h_i, h_j]}, < \rangle$  es un conjunto totalmente ordenado, en el que identificamos un punto  $v_0^{[h_i, h_j]}$ . Por lo tanto, un modelo de  $\text{SpPNL}_t$  es una tupla  $M = \langle \mathbb{H}, \mathbb{I}(\mathbb{H}), \nu \rangle$ . La Figura 6.7 muestra un ejemplo de como sería un modelo de  $\text{SpPNL}_t$ .

Dado un modelo  $M$  de  $\text{SpPNL}_t$ , un intervalo  $[h_i, h_j]$  de dicho modelo, y una fórmula  $\phi$  de  $\text{SpPNL}_t$ , la relación de *verdad* se define como sigue:

1.  $M, [h_i, h_j] \Vdash f$ , donde  $f$  es una fórmula de PNL, si y sólo si para algún  $v_k$  tal que  $v_k$  pertenece al dominio de  $\nu([h_i, h_j])$  y  $v_0 < v_k$ , el modelo de PNL  $N = \nu([h_i, h_j])$  es tal que  $N, [v_0^{[h_i, h_j]}, v_k^{[h_i, h_j]}] \Vdash f$ ;
2.  $M, [h_i, h_j] \Vdash \neg\psi$  si y sólo si no es el caso en el que  $M, [h_i, h_j] \Vdash \psi$ ;
3.  $M, [h_i, h_j] \Vdash \phi \wedge \psi$  si y sólo si  $M, [h_i, h_j] \Vdash \phi$  y  $M, [h_i, h_j] \Vdash \psi$ ;
4.  $M, [h_i, h_j] \Vdash \langle A \rangle_h \psi$  sí y sólo si existe  $h_k$  tal que  $h_j < h_k$  y  $M, [h_j, h_k] \Vdash \psi$ ;

5.  $M, [h_i, h_j] \Vdash \langle \bar{A} \rangle_h \psi$  si y sólo si existe  $h_k$  tal que  $h_k < h_i$  y  $M, [h_i, h_j] \Vdash \psi$ .

**Ejemplo 6.3.** La siguiente fórmula es una fórmula de  $SpPNL_t$ :

$$p \wedge \langle A \rangle_h (q \vee [A]_v \neg p),$$

mientras que la siguiente no lo es:

$$\langle A \rangle_v \langle A \rangle_h (p \wedge \langle A \rangle_h \langle A \rangle_v q).$$

### 6.6.2. $SpPNL_t$ como un Fragmento de $SpPNL$

En esta sección demostraremos que  $SpPNL_t$  es un fragmento propio de  $SpPNL$ . Por simplicidad nos restringiremos a *marcos espaciales numerables*, es decir, aquellos marcos espaciales definidos sobre conjuntos numerables y totalmente ordenados.

**Teorema 6.7.** *Sobre marcos numerables, se cumple que  $SpPNL_t \subset SpPNL$ .*

#### Demostración.

En primer lugar obsérvese que la relación  $SpPNL \subset SpPNL_t$  no es posible, ya que la gramática abstracta de  $SpPNL_t$  ni siquiera nos permite construir algunas fórmulas válidas de  $SpPNL$ . Por tanto, tenemos que al menos  $SpPNL_t \neq SpPNL$ . Para demostrar el resto del teorema, necesitamos una traducción  $\xi$  que preserve la satisfacibilidad tanto para los modelos como para las fórmulas. Sea  $M = \langle \mathbb{H}, \mathbb{I}(\mathbb{H}), \nu \rangle$  un modelo cualquiera de  $SpPNL_t$ , y definamos al modelo  $\xi(M) = \langle \mathbb{F}, \mathbb{O}(\mathbb{F}), \mathcal{V} \rangle$  de  $SpPNL$  como sigue: (i)  $\mathbb{F} = \mathbb{H} \times \mathbb{V}$ , donde  $\mathbb{V}$  es un conjunto numerable, totalmente ordenado, isomorfo a  $\mathbb{V}^{[h^*, h^{*'}]}$ , siendo  $\mathbb{V}^{[h^*, h^{*'}]}$  un conjunto de las componentes verticales de  $M$  de máxima cardinalidad; (ii)  $\mathcal{V}$  se define de tal modo que para cada letra proposicional  $p$ ,  $p \in \mathcal{V}(\langle (h, v_i), (h', v_j) \rangle)$  si y sólo si  $p \in \mathcal{V}^{[h, h']}([v_i, v_j])$  donde  $[v_i, v_j] \in \mathbb{I}(\mathbb{V})$  ( $v_i$  y  $v_j$  son el  $i$ -ésimo y  $j$ -ésimo elementos de  $\mathbb{V}$ ) y  $\mathbb{V}$  es el dominio lineal de  $\nu([h, h'])$ . La traducción  $\xi$  se puede extender a fórmulas como se indica a continuación, dónde  $\psi$  y  $\tau$  son fórmulas de  $SpPNL_t$ :

- $\xi(p) = p$ ;
- $\xi(\neg\psi) = \neg\xi(\psi)$ ;
- $\xi(\psi \wedge \tau) = \xi(\psi) \wedge \xi(\tau)$ ;
- $\xi(\langle A \rangle_h \psi) = \langle E \rangle \xi(\psi)$ ;
- $\xi(\langle \bar{A} \rangle_h \psi) = \langle W \rangle \xi(\psi)$ ;

- $\xi(\langle A \rangle_v \psi) = \langle N \rangle \psi$ ;
- $\xi(\langle \bar{A} \rangle_v \psi) = \langle S \rangle \psi$ .

y por tanto, para toda fórmula  $\phi$  de  $SpPNL_t$ ,  $\phi$  es satisfacible si y sólo si  $\xi(\phi)$  es satisfacible. En concreto, es posible demostrar por doble inducción que, si  $M = \langle \mathbb{H}, \mathbb{I}(\mathbb{H}), \nu \rangle$  es un modelo de  $SpPNL_t$ , entonces  $M, [h, h'] \Vdash \phi$  si y sólo si existe un objeto  $\langle (h, v)(h', v') \rangle$  tal que  $\xi(M), \langle (h, v), (h', v') \rangle \Vdash \xi(\phi)$ .  $\square$

### 6.6.3. Decidibilidad y Poder Expresivo de $SpPNL_t$

En esta sección, veremos que el problema de la satisfacibilidad para  $SpPNL_t$  es decidable. Para ello, utilizaremos los resultados de decidibilidad de PNL.

**Teorema 6.8** ([BGMS07, BMS07]). *El problema de la satisfacibilidad de PNL interpretada en la clase de todos los conjuntos totalmente ordenados es NEXPTIME-completo.*

Tomando prestada la terminología de [FG92], definimos las fórmulas monolíticas de  $SpPNL_t$  como se indica a continuación.

**Definición 6.20.** *Sea  $\phi \in SpPNL_t$ . Cualquier sub-fórmula  $\psi$  de  $\phi$  se dice que es monolítica si y sólo si es una fórmula proposicional clásica, o es una fórmula de  $SpPNL_t$  tal que el operador más exterior pertenece a  $\{\langle A \rangle_v, \langle \bar{A} \rangle_v, [A]_v, [\bar{A}]_v\}$ .*

Por ejemplo,  $p \wedge \langle A \rangle_v p$  y  $\langle A \rangle_v (p \vee q)$  son fórmulas monolíticas, mientras que  $\langle A \rangle_h \langle A \rangle_v p$  no lo es. Claramente, las fórmulas monolíticas son fórmulas estándar de PNL.

**Teorema 6.9.** *El problema de la satisfacibilidad de las fórmulas de  $SpPNL_t$  interpretado en la clase de todos los marcos espaciales (respectivamente, marcos espaciales numerables) es NEXPTIME-completo.*

#### Demostración.

En primer lugar demostraremos que el problema de la satisfacibilidad de las fórmulas de  $SpPNL_t$  pertenece a la clase NEXPTIME. La idea es que las fórmulas monolíticas se pueden ‘simular’ mediante letras proposicionales tomadas del vocabulario  $\mathcal{AP}'$  de tal forma que  $\mathcal{AP}' \cap \mathcal{AP} = \emptyset$ . Queremos reemplazar las fórmulas monolíticas con letras proposicionales, y luego comprobar la satisfacibilidad de la fórmula de PNL resultante. Considérese la siguiente traducción  $\gamma$  de las fórmulas de  $SpPNL_t$  a las fórmulas de PNL. Sea  $\phi$  una fórmula de  $SpPNL_t$  y, de la complejidad de  $\phi$ , defínase,  $\gamma(f) = p'$ , donde  $p' \in \mathcal{AP}'$  es una variable proposicional nueva, y  $f$  es una fórmula monolítica maximal (en el sentido de que no existe otra fórmula monolítica  $g$  tal que  $f$  es una sub-fórmula de  $g$ ),

y, luego, extiéndase  $\gamma$  a fórmulas tan sólo substituyendo cada ocurrencia de  $\langle A \rangle_h$  (resp.,  $\langle \bar{A} \rangle_h$ ) con  $\langle A \rangle$  (resp.,  $\langle \bar{A} \rangle$ ). En primer lugar demostraremos que, para toda fórmula  $\phi$  de  $\text{SpPNL}_t$ ,  $\phi$  es satisfacible si y sólo si cierta fórmula  $\gamma^*(\phi)$  de PNL es satisfacible. Luego, utilizaremos el resultado de decidibilidad de PNL. Para toda fórmula  $\phi$  de  $\text{SpPNL}_t$ , la fórmula  $\gamma(\phi)$  ya es una fórmula de PNL, pero, claramente, no es equisatisfacible a  $\phi$ , por lo que tenemos que modificarla. El problema es que en  $\gamma(\phi)$  las letras proposicionales que reemplazan a las fórmulas monolíticas son todas distintas. Tenemos que identificar aquellas fórmulas monolíticas que tienen el mismo significado (es decir, los mismos modelos), y formalizar dicha restricción en el lenguaje de PNL. Sea  $\mathcal{F}$  el conjunto de todas las fórmulas monolíticas maximales en  $\phi$ . Para cada par  $f, g \in \mathcal{F}$  (es decir,  $f, g \in \text{PNL}$ ), tenemos que  $f, g$  son equisatisfacibles si y sólo si la fórmula  $f \leftrightarrow g$  es satisfacible en PNL, lo cual es decidible (por el Teorema 6.8). Denotemos con  $[All]$  al operador universal en PNL, y sea  $f_1, f_2, \dots, f_k$  el conjunto de todas las fórmulas del tipo  $f \leftrightarrow g$  descritas más arriba. Tenemos que  $\gamma^*(\phi)$  es  $\gamma(\phi) \wedge \bigwedge_{i=1}^k [All]f_i$ . Claramente, se puede deducir fácilmente un algoritmo de decisión correcto, completo y finito.

Por último, es fácil comprobar que el problema de la satisfacibilidad de  $\text{SpPNL}_t$  es NEXPTIME-duro ya que cláramente tenemos que  $\text{PNL} \subset \text{SpPNL}_t$ .  $\square$

Para terminar considérese el siguiente ejemplo de sentencia en lenguaje natural tomada prestada del dominio geográfico: *Si al norte de la región actual existe una región (cuya anchura es la misma que la de la región actual) que cumple la propiedad  $p_1$ , y al sur de la región actual no hay ninguna región que cumple la propiedad  $p_2$ , entonces al este de la región actual debe existir una región que cumple la propiedad  $p_3$*

Ahora, somos capaces de formalizar dicha sentencia en la lógica  $\text{SpPNL}_t$  como se indica a continuación:

- *Si al norte de la región actual existe una región que cumple la propiedad  $p_1$ :  $\langle A \rangle_v p_1 \vee \langle A \rangle_v \langle A \rangle_v p_1$ ;*
- *(Si) al sur de la región actual no existe ninguna región que cumple la propiedad  $p_2$ :  $\neg \langle \bar{A} \rangle_v p_2$ ;*
- *Entonces al este de la región actual debe existir una región que cumple la propiedad  $p_3$ :  $\langle A \rangle_h p_3$ ,*

con lo que podemos concluir en la fórmula:

$$(\langle A \rangle_v p_1 \vee \langle A \rangle_v \langle A \rangle_v p_1) \wedge \neg \langle \bar{A} \rangle_v p_2 \rightarrow \langle A \rangle_h p_3.$$

**Parte III**

**Conclusiones, Apéndices y  
Bibliografía**



# Capítulo 7

## Conclusiones y Trabajos Futuros

El objetivo general del trabajo presentado en esta memoria de tesis ha sido mejorar y proponer nuevas técnicas para el Razonamiento Espacial Cualitativo con direcciones cardinales entre regiones rectangulares o que pueden ser aproximadas por rectángulos. Para ello, se han utilizado dos formalismos bien conocidos en Inteligencia Artificial: los problemas de satisfacción de restricciones y las lógicas modales.

### Principales Aportaciones y Conclusiones

Desde el punto de vista del razonamiento basado en restricciones se han estudiado varios problemas abiertos relacionados con el modelo de relaciones cardinales (modelo DC) [GE97, Goy00, SK04, SK05] y las principales aportaciones son las siguientes:

- El primer problema estudiado ha sido el de la consistencia de una red de restricciones básicas en el dominio más general de regiones. Hemos propuesto una mejora del algoritmo original de Skiadopoulos y Koubarakis [SK05] que reduce la complejidad de  $O(n^5)$  a  $O(n^4)$ . El algoritmo mejorado no sólo sirve como algoritmo de decisión para el problema de la consistencia sino que además puede obtener una solución para la red, cosa que no hacía el algoritmo original. También hemos discutido las ventajas de nuestro algoritmo frente a otro algoritmo más eficiente propuesto recientemente por Zhang *et al.* [ZLLY08], en cuanto a la flexibilidad para obtener una solución y las posibilidades de ampliación del modelo para aumentar la expresividad mediante integración con restricciones cuantitativas.
- Dado que el problema general de la consistencia en DC es NP-completo y sólo se conocen algoritmos polinomiales para redes con relaciones básicas, lo cual supone una limitación importante, hemos considerado conveniente estudiar un caso particular del modelo DC, que llamamos DCR. El álgebra de restricciones de este modelo

contiene 36 relaciones básicas, que son las que se satisfacen entre regiones rectangulares, frente a las 512 posibles del modelo DC. Hemos analizado la conexión entre relaciones del álgebra de rectángulos y relaciones de DCR, lo que nos ha permitido establecer un método para traducir convenientemente relaciones de un tipo a otro.

- Basándonos en las propiedades de convexidad del álgebra de rectángulos hemos establecido una propiedad similar para las relaciones de DCR. Hemos probado que las relaciones que cumplen la propiedad de ser convexas, junto a las operaciones del álgebra, constituyen una subclase tratable que contiene a las 36 relaciones básicas de DCR y a 364 relaciones disyuntivas más. Esta subclase convexa de DCR es el primer conjunto tratable identificado que incluye relaciones cardinales disyuntivas.
- Respecto a la tratabilidad de la subclase convexa, hemos demostrado que una adaptación del algoritmo clásico de camino-consistencia sirve para decidir la consistencia y obtener la red mínima equivalente a una red de restricciones del fragmento tratable en orden polinomial cúbico. Se han propuesto otros métodos eficientes para los problemas de la consistencia, obtener una solución (orden cuadrático y cúbico) y obtener la red mínima (orden cúbico), mediante un proceso de traducción al álgebra de rectángulos, álgebra de intervalos y álgebra de puntos.
- Se ha demostrado que el problema de decidir la consistencia de una red de relaciones cualesquiera en DCR sigue siendo NP-completo, por lo que hemos propuesto un algoritmo basado en backtracking para el problema de la consistencia. Dicho algoritmo aprovecha la tratabilidad de la subclase convexa y el método de camino-consistencia para reducir el espacio de búsqueda.
- Los resultados alcanzados nos llevan a la conclusión de que el modelo DCR es un formalismo para razonamiento espacial que supone un buen compromiso entre simplicidad, expresividad y eficiencia, lo que lo hace adecuado para ser utilizado en diversos dominios de aplicación donde sea aceptable representar objetos mediante rectángulos y restricciones entre objetos mediante relaciones de dirección de tipo cardinal o análogas.

Desde el punto de vista de la lógica modal las aportaciones y conclusiones han sido las siguientes:

- Se ha comprobado la conveniencia de utilizar las lógicas proposicionales modales para razonar con relaciones espaciales. Del estudio del estado del arte en lógicas espaciales se concluye que, desde el punto de vista lógico, se ha prestado mayor atención a las lógicas con relaciones topológicas y que el poco trabajo existente sobre lógicas de

---

direcciones cardinales utiliza los puntos como entidades espaciales básicas. Partiendo de esta observación, y estableciendo un paralelismo con el razonamiento basado en restricciones, se ha formalizado una *lógica modal de rectángulos* (lógica RL) basada en las relaciones del álgebra de rectángulos. Se ha demostrado su indecidibilidad y se han propuesto estrategias para encontrar fragmentos decidibles.

- Se ha estudiado SpPNL, un fragmento de la lógica modal de rectángulos que utiliza sólo 4 operadores modales y que puede verse como la extensión bidimensional de la lógica temporal PNL. Mediante una reducción del problema de la validez de la lógica de compás, se ha demostrado que el problema de la validez de SpPNL es RE-completo. Además, se ha formalizado un teorema de representación de marcos espaciales para esta lógica y se ha propuesto un método de deducción terminante, correcto y completo basado en árboles semánticos para el problema de la validez.
- Se ha comprobado el poder expresivo de SpPNL y su capacidad para ser aplicada en tareas de razonamiento espacial con direcciones cardinales. Además, se ha demostrado que la lógica SpPNL, a pesar de su sencillez, es suficientemente expresiva para resolver una red de restricciones del álgebra de rectángulos.
- Por último, mediante una técnica de temporalización, se ha combinado la lógica modal de intervalos PNL consigo misma para obtener un fragmento de SpPNL. Se ha comprobado que la lógica resultante, llamada SpPNL<sub>t</sub>, aunque es menos expresiva que SpPNL, conserva las propiedades de decidibilidad de PNL (el problema de la satisfacibilidad es NEXPTIME-completo). Por lo que sabemos, nunca se ha utilizado la técnica de temporalización (o cualquier otra de combinación de lógicas) con lógicas basadas en intervalos.

Otro de los objetivos perseguidos en esta tesis ha sido el de resaltar la conexión existente entre el Razonamiento Espacial Cualitativo y el Razonamiento Temporal Cualitativo. Los modelos de razonamiento espacial con relaciones direccionales que hemos visto en esta tesis se basan en las proyecciones de las entidades espaciales sobre un eje ortogonal bidimensional. Cuando estas entidades son puntos o son regiones aproximadas por rectángulos entonces las proyecciones en cada eje se pueden considerar instantes o intervalos temporales. Por tanto, podemos recurrir a técnicas del razonamiento temporal para resolver los problemas asociados a los modelos espaciales que se basan en el producto cartesiano de estas estructuras temporales.

En la Tabla 7 se muestra de forma esquemática la relación existente entre los distintos modelos basados en proyecciones vistos en esta tesis y sus modelos correspondientes en el dominio temporal. Los símbolos  $\subset$ ,  $\mapsto$  y  $\rightrightarrows$  representan las distintos tipos de relaciones entre los modelos:  $M_1 \subset M_2$  indica que el modelo  $M_1$  es una subclase o submodelo de

	<b>Espacial</b>	<b>Temporal</b>
<b>Restricciones</b>	<b>Puntos</b>	
	Álgebra de relaciones cardinales [Fra96, Lig98a]	$\Leftarrow$ PA [VK86]
	<b>Regiones</b>	$\uparrow^*$
	RA [Gue89, BCdC98]	$\Leftarrow$ IA [All83]
	$\uparrow$	
	Modelo DCR (Capítulo 4)	
	$\cap$	
	Modelo DC (Capítulo 3)	
<b>Lógica Modal</b>	<b>Puntos</b>	
	Lógica de Compás [MR99]	$\mapsto$ HS [HS91]
	Lógica de Conos [MPS09]	$\cap$
	<b>Regiones</b>	
	SpPNL <sub>t</sub> (Sección 6.6)	$\Leftarrow$ PNL [GMS03]
	$\cap$	
SpPNL (Capítulo 6)		
$\cap$		
RL (Sección 5.3.3)		

\* Subclases *pointsable* y *continuous endpoint* del álgebra de intervalos.

Tabla 7.1: Modelos de razonamiento espacial basados en proyecciones.

$M_2, M_1 \mapsto M_2$  indica que  $M_1$  se puede traducir al modelo  $M_2$  y  $M_1 \rightleftarrows M_2$  indica que  $M_2$  es una extensión bidimensional del modelo  $M_1$ .

## Trabajos Futuros

Proponemos ahora una serie de cuestiones y posibles trabajos futuros relacionados con la tesis presentada.

- Uno de los problemas de este modelo es que el álgebra de restricciones no tiene algunas propiedades deseables para el razonamiento con relaciones cardinales [Fra96]. En particular está el hecho de que no se puede representar la posición relativa exacta entre dos regiones a no ser que para cada relación se especifique también su inversa, pues la inversa de una relación básica es una relación disyuntiva. Sería conveniente estudiar si el problema de la consistencia en redes en las que se permita al menos la relación universal como relación disyuntiva sigue siendo polinomial. De esta forma se podría tratar con información incompleta, cuando se desconoce la relación entre dos regiones o cuando se conoce la relación entre una región primaria y otra de referencia pero se desconoce o no interesa especificar la relación inversa, cuando las regiones se intercambian. Si esto no fuera posible, porque el problema resulte ser *NP*-completo, una posibilidad es obtener un modelo donde las relaciones tengan un significado más preciso, que expresen de forma más exacta la posición entre dos

---

regiones.

- Otro problema del modelo DC es que no se puede decidir la consistencia de una red de restricciones básicas mediante un algoritmo de camino-consistencia, por lo que parece necesario que los algoritmos sean específicos y de tipo constructivo. La cuestión es si es posible encontrar un algoritmo para decidir la consistencia de una red de restricciones básicas basado en técnicas más comunes de CSPs basados en álgebras de relaciones (otros niveles de consistencia, comprobación de propiedades que aseguren la consistencia, etc.). De esta manera sería más sencillo establecer si existe alguna subclase tratable con relaciones disyuntivas que incluya a todas las relaciones básicas del modelo DC y aplicar técnicas ya conocidas para diversos problemas de razonamiento.
- Para el modelo DCR hemos identificado la subclase tratable de relaciones rectangulares convexas. ¿Es esta la subclase maximal? ¿Puede haber varias clases tratables maximales? Para esta última cuestión, aunque no hemos dado una demostración formal, hemos propuesto un resultado parcial y varios ejemplos que demuestran que al añadir relaciones no convexas dan lugar a subclases no tratables. Esta cuestión permanece abierta, lo mismo que permanece abierta la cuestión de determinar si la clase de relaciones fuertemente preconvexas del álgebra de intervalos es maximal.
- La integración de relaciones cardinales entre regiones y relaciones métricas no ha sido estudiada previamente y puede resultar de interés para lenguajes de consultas a bases de datos espaciales, recuperación de imágenes, sistemas de información geográfica con coordenadas proyectadas, etc. Como ya se comentó al final del Capítulo 3 (Sección 3.4.3), el modelo DC puede extenderse para que tenga en cuenta también restricciones cuantitativas entre los extremos proyectados de las regiones. En el caso de restricciones cardinales básicas, el algoritmo DIS-BCSOL podría adaptarse fácilmente para este fin.

En relación a las lógicas RL y SpPNL:

- El lenguaje de la lógica RL se ha definido con 168 operadores modales asociados al álgebra de rectángulos. Del mismo modo que en la lógica de intervalos HS es posible expresar las 13 relaciones de Allen a partir de los operadores *begins* y *ends* [Ven90], ¿es posible encontrar un conjunto más reducido de operadores para RL que puedan expresar las 169 relaciones entre rectángulos?
- Formalizar un sistema axiomático correcto y completo para la lógica SpPNL del mismo modo que se ha hecho para la lógica temporal PNL [GMS03], e implementar y evaluar el método de árbol semántico.

- Identificar más fragmentos decidibles de RL y SpPNL aplicando alguna de las estrategias descritas en la Sección 5.3.4. Un resultado reciente en este sentido lo podemos encontrar en [BMSS09], donde se ha publicado un fragmento decidible de SpPNL en el que sólo se admiten los operadores modales  $\langle N \rangle$  y  $\langle E \rangle$ , pero con una semántica más relajada. La idea es poder tener en un futuro una clasificación completa de los fragmentos decidibles e indecidibles de RL en la misma línea que el trabajo realizado en [BMG<sup>+</sup>08] con los fragmentos de la lógica HS.

Por último, en esta tesis sólo se han investigado los modelos propuestos desde un punto de vista teórico. Interesaría pues, aplicarlos algún dominio real como los Sistemas de Información Geográfica, las bases de datos espaciales o en el campo de la robótica.

## Publicaciones Relacionadas

En relación con la producción científica, esta tesis está avalada por el siguiente conjunto de publicaciones. Los resultados relacionados con el modelo DC han sido publicados en los congresos ECAI2006 [NS06] (modelo DCR) y IJCAI2007 [NMS07] (algoritmo de consistencia del modelo DC). Los resultados relacionados con la lógica SpPNL se han publicado en los congresos TIME2006 [MS06b] (presentación de SpPNL), CMPI2006 [MS06a] (comparativa con el álgebra de rectángulos), IJCAI2007 [MNS07b] (método de árbol semántico), EUROCAST2007 [MNS07c] (lógica SpPNL<sub>t</sub>) y en la revista *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* [MNS07a].

# Apéndice A

## Conjuntos de Relaciones Cardinales

### A.1. Conjunto de Relaciones Cardinales Básicas en el Dominio de Regiones Conectadas

A continuación se listan las 218 relaciones cardinales posibles entre regiones conectadas:

<i>S</i>	<i>SW</i>	<i>W</i>	<i>NW</i>
<i>N</i>	<i>NE</i>	<i>E</i>	<i>SE</i>
<i>B</i>	<i>S:SW</i>	<i>SW:W</i>	<i>W:NW</i>
<i>NW:N</i>	<i>N:NE</i>	<i>NE:E</i>	<i>E:SE</i>
<i>S:SE</i>	<i>B:S</i>	<i>B:W</i>	<i>B:N</i>
<i>B:E</i>	<i>S:SW:W</i>	<i>SW:W:NW</i>	<i>W:NW:N</i>
<i>NW:N:NE</i>	<i>N:NE:E</i>	<i>NE:E:SE</i>	<i>S:E:SE</i>
<i>S:SW:SE</i>	<i>B:S:SW</i>	<i>B:W:NW</i>	<i>B:N:NE</i>
<i>B:E:SE</i>	<i>B:SW:W</i>	<i>B:NW:N</i>	<i>B:NE:E</i>
<i>B:S:SE</i>	<i>B:S:W</i>	<i>B:W:N</i>	<i>B:N:E</i>
<i>B:S:E</i>	<i>B:S:N</i>	<i>B:W:E</i>	<i>S:SW:W:NW</i>
<i>SW:W:NW:N</i>	<i>W:NW:N:NE</i>	<i>NW:N:NE:E</i>	<i>N:NE:E:SE</i>
<i>S:NE:E:SE</i>	<i>S:SW:E:SE</i>	<i>S:SW:W:SE</i>	<i>B:S:N:NE</i>
<i>B:W:E:SE</i>	<i>B:S:SW:N</i>	<i>B:W:NW:E</i>	<i>B:S:NW:N</i>
<i>B:W:NE:E</i>	<i>B:S:N:SE</i>	<i>B:SW:W:E</i>	<i>B:S:SW:W</i>
<i>B:W:NW:N</i>	<i>B:N:NE:E</i>	<i>B:S:E:SE</i>	<i>B:S:SW:SE</i>
<i>B:SW:W:NW</i>	<i>B:NW:N:NE</i>	<i>B:NE:E:SE</i>	<i>B:S:W:E</i>
<i>B:S:W:N</i>	<i>B:W:N:E</i>	<i>B:S:N:E</i>	<i>B:S:W:NW</i>
<i>B:W:N:NE</i>	<i>B:N:E:SE</i>	<i>B:S:SW:E</i>	<i>B:S:NE:E</i>
<i>B:S:W:SE</i>	<i>B:SW:W:N</i>	<i>B:NW:N:E</i>	<i>S:SW:W:NW:N</i>
<i>SW:W:NW:N:NE</i>	<i>W:NW:N:NE:E</i>	<i>NW:N:NE:E:SE</i>	<i>S:N:NE:E:SE</i>
<i>S:SW:NE:E:SE</i>	<i>S:SW:W:E:SE</i>	<i>S:SW:W:NW:SE</i>	<i>B:S:SW:W:SE</i>
<i>B:SW:W:NW:N</i>	<i>B:NW:N:NE:E</i>	<i>B:S:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:NW</i>
<i>B:W:NW:N:NE</i>	<i>B:N:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:N</i>
<i>B:W:NW:N:E</i>	<i>B:S:N:NE:E</i>	<i>B:S:W:E:SE</i>	<i>B:S:W:NW:N</i>
<i>B:W:N:NE:E</i>	<i>B:S:N:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:E</i>	<i>B:S:SW:NW:N</i>
<i>B:W:NW:NE:E</i>	<i>B:S:N:NE:SE</i>	<i>B:SW:W:E:SE</i>	<i>B:S:W:NW:SE</i>
<i>B:SW:W:N:NE</i>	<i>B:NW:N:E:SE</i>	<i>B:S:SW:NE:E</i>	<i>B:S:SW:N:NE</i>
<i>B:W:NW:E:SE</i>	<i>B:S:NW:N:SE</i>	<i>B:SW:W:NE:E</i>	<i>B:S:NW:N:NE</i>
<i>B:W:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:N:SE</i>	<i>B:SW:W:NW:E</i>	<i>B:S:W:N:E</i>
<i>B:S:W:N:SE</i>	<i>B:SW:W:N:E</i>	<i>B:S:NW:N:E</i>	<i>B:S:W:NE:E</i>
<i>B:S:W:NW:E</i>	<i>B:S:W:N:NE</i>	<i>B:W:N:E:SE</i>	<i>B:S:SW:N:E</i>
<i>S:SW:W:NW:N:NE</i>	<i>SW:W:NW:N:NE:E</i>	<i>W:NW:N:NE:E:SE</i>	<i>S:NW:N:NE:E:SE</i>
<i>S:SW:N:NE:E:SE</i>	<i>S:SW:W:NE:E:SE</i>	<i>S:SW:W:NW:E:SE</i>	<i>S:SW:W:NW:N:SE</i>
<i>B:S:SW:W:NW:N</i>	<i>B:W:NW:N:NE:E</i>	<i>B:S:N:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:E:SE</i>
<i>B:SW:W:NW:N:NE</i>	<i>B:NW:N:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:NW:SE</i>
<i>B:SW:W:NW:N:E</i>	<i>B:S:NW:N:NE:E</i>	<i>B:S:W:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:N:SE</i>
<i>B:S:SW:W:NW:E</i>	<i>B:S:W:NW:N:NE</i>	<i>B:W:N:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:N:E:SE</i>
<i>B:S:W:NW:N:E</i>	<i>B:S:W:N:NE:E</i>	<i>B:S:W:N:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:N:E</i>
<i>B:SW:W:N:NE:E</i>	<i>B:S:NW:N:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:NE:E</i>	<i>B:S:W:NW:N:SE</i>
<i>B:S:SW:W:N:NE</i>	<i>B:W:NW:N:E:SE</i>	<i>B:S:SW:N:NE:E</i>	<i>B:S:W:NW:E:SE</i>
<i>B:SW:W:N:E:SE</i>	<i>B:S:SW:NW:N:E</i>	<i>B:S:W:NW:NE:E</i>	<i>B:S:W:N:NE:SE</i>
<i>B:SW:W:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:NW:N:SE</i>	<i>B:SW:W:NW:NE:E</i>	<i>B:S:NW:N:NE:SE</i>

<i>B:SW:W:NW:E:SE</i>	<i>B:S:SW:NW:N:NE</i>	<i>B:W:NW:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:N:NE:SE</i>
<i>S:SW:W:NW:N:NE:E</i>	<i>SW:W:NW:N:NE:E:SE</i>	<i>S:W:NW:N:NE:E:SE</i>	<i>S:SW:NW:N:NE:E:SE</i>
<i>S:SW:W:N:NE:E:SE</i>	<i>S:SW:W:NW:NE:E:SE</i>	<i>S:SW:W:NW:N:E:SE</i>	<i>S:SW:W:NW:N:NE:SE</i>
<i>B:SW:W:NW:N:NE:E</i>	<i>B:S:NW:N:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:NW:N:SE</i>
<i>B:S:W:NW:N:NE:E</i>	<i>B:S:W:N:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:N:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:NW:N:E</i>
<i>B:W:NW:N:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:N:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:NW:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:NW:N:NE</i>
<i>B:S:SW:W:N:NE:SE</i>	<i>B:SW:W:NW:N:E:SE</i>	<i>B:S:SW:NW:N:NE:E</i>	<i>B:S:W:NW:NE:E:SE</i>
<i>B:SW:W:N:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:NW:N:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:NW:NE:E</i>	<i>B:S:W:NW:N:NE:SE</i>
<i>B:S:SW:W:N:NE:E</i>	<i>B:S:W:NW:N:E:SE</i>	<i>B:SW:W:NW:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:NW:N:NE:SE</i>
<i>B:S:SW:W:N:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:NW:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:NW:N:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:NW:N:NE:SE</i>
<i>B:S:SW:W:NW:N:NE:E</i>	<i>B:SW:W:NW:N:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:NW:N:E:SE</i>	<i>B:S:SW:W:NW:N:NE:SE</i>
<i>S:SW:W:NW:N:NE:E:SE</i>	<i>B:SW:W:NW:N:NE:E:SE</i>	<i>B:S:W:NW:N:NE:E:SE</i>	<i>B:S:SW:NW:N:NE:E:SE</i>

## A.2. Conjunto de Relaciones Cardinales Rectangulares Convexas

En la siguiente tabla se enumera el conjunto formado por las 400 relaciones cardinales rectangulares convexas generado por el algoritmo *GENERA C-DCR* de la Figura 4.7.

Relación DCR	Intervalos $\mathcal{K}$ -retículo
{ <i>B</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K3</i> ]
{ <i>S</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K1</i> ]
{ <i>N</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K6</i> ]
{ <i>B:S</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K2</i> ]
{ <i>B:N</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K5</i> ]
{ <i>B:S:N</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K4</i> ]
{ <i>N, B:N</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K5, K6</i> ]
{ <i>B, B:N</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K3, K5</i> ]
{ <i>B, B:S</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K2, K3</i> ]
{ <i>S, B:S</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K1, K2</i> ]
{ <i>B:N, B:S:N</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K4, K5</i> ]
{ <i>B:S, B:S:N</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K2, K4</i> ]
{ <i>B, N, B:N</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K3, K5, K6</i> ]
{ <i>N, B:N, B:S:N</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K4, K5, K6</i> ]
{ <i>B, S, B:S</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K1, K2, K3</i> ]
{ <i>S, B:S, B:S:N</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K1, K2, K4</i> ]
{ <i>B, B:S, B:N, B:S:N</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K2, K3, K4, K5</i> ]
{ <i>B, N, B:S, B:N, B:S:N</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K2, K3, K4, K5, K6</i> ]
{ <i>B, S, B:S, B:N, B:S:N</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K1, K2, K3, K4, K5</i> ]
{ <i>B, S, N, B:S, B:N, B:S:N</i> }	[ <i>K3</i> ] × [ <i>K1, K2, K3, K4, K5, K6</i> ]
{ <i>W</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K3</i> ]
{ <i>SW</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K1</i> ]
{ <i>NW</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K6</i> ]
{ <i>SW:W</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K2</i> ]
{ <i>W:NW</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K5</i> ]
{ <i>SW:W:NW</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K4</i> ]
{ <i>NW, W:NW</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K5, K6</i> ]
{ <i>W, W:NW</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K3, K5</i> ]
{ <i>W, SW:W</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K2, K3</i> ]
{ <i>SW, SW:W</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K1, K2</i> ]
{ <i>W:NW, SW:W:NW</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K4, K5</i> ]
{ <i>SW:W, SW:W:NW</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K2, K4</i> ]
{ <i>W, NW, W:NW</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K3, K5, K6</i> ]
{ <i>NW, W:NW, SW:W:NW</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K4, K5, K6</i> ]
{ <i>W, SW, SW:W</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K1, K2, K3</i> ]
{ <i>SW, SW:W, SW:W:NW</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K1, K2, K4</i> ]
{ <i>W, SW:W, W:NW, SW:W:NW</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K2, K3, K4, K5</i> ]
{ <i>W, NW, SW:W, W:NW, SW:W:NW</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K2, K3, K4, K5, K6</i> ]
{ <i>W, SW, SW:W, W:NW, SW:W:NW</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K1, K2, K3, K4, K5</i> ]
{ <i>W, SW, NW, SW:W, W:NW, SW:W:NW</i> }	[ <i>K1</i> ] × [ <i>K1, K2, K3, K4, K5, K6</i> ]
{ <i>E</i> }	[ <i>K6</i> ] × [ <i>K3</i> ]
{ <i>SE</i> }	[ <i>K6</i> ] × [ <i>K1</i> ]
{ <i>NE</i> }	[ <i>K6</i> ] × [ <i>K6</i> ]
{ <i>E:SE</i> }	[ <i>K6</i> ] × [ <i>K2</i> ]
{ <i>NE:E</i> }	[ <i>K6</i> ] × [ <i>K5</i> ]
{ <i>NE:E:SE</i> }	[ <i>K6</i> ] × [ <i>K4</i> ]
{ <i>NE, NE:E</i> }	[ <i>K6</i> ] × [ <i>K5, K6</i> ]

Relación DCR	Intervalos $\mathcal{K}$ -retículo
{E, NE:E}	[K6] × [K3, K5]
{E, E:SE}	[K6] × [K2, K3]
{SE, E:SE}	[K6] × [K1, K2]
{NE:E, NE:E:SE}	[K6] × [K4, K5]
{E:SE, NE:E:SE}	[K6] × [K2, K4]
{E, NE, NE:E}	[K6] × [K3, K5, K6]
{NE, NE:E, NE:E:SE}	[K6] × [K4, K5, K6]
{E, SE, E:SE}	[K6] × [K1, K2, K3]
{SE, E:SE, NE:E:SE}	[K6] × [K1, K2, K4]
{E, E:SE, NE:E, NE:E:SE}	[K6] × [K2, K3, K4, K5]
{E, NE, E:SE, NE:E, NE:E:SE}	[K6] × [K2, K3, K4, K5, K6]
{E, SE, E:SE, NE:E, NE:E:SE}	[K6] × [K1, K2, K3, K4, K5]
{E, SE, NE, E:SE, NE:E, NE:E:SE}	[K6] × [K1, K2, K3, K4, K5, K6]
{B:W}	[K2] × [K3]
{S:SW}	[K2] × [K1]
{NW:N}	[K2] × [K6]
{B:S:SW:W}	[K2] × [K2]
{B:W:NW:N}	[K2] × [K5]
{B:S:SW:W:NW:N}	[K2] × [K4]
{NW:N, B:W:NW:N}	[K2] × [K5, K6]
{B:W, B:W:NW:N}	[K2] × [K3, K5]
{B:W, B:S:SW:W}	[K2] × [K2, K3]
{S:SW, B:S:SW:W}	[K2] × [K1, K2]
{B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N}	[K2] × [K4, K5]
{B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N}	[K2] × [K2, K4]
{B:W, NW:N, B:W:NW:N}	[K2] × [K3, K5, K6]
{NW:N, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N}	[K2] × [K4, K5, K6]
{B:W, S:SW, B:S:SW:W}	[K2] × [K1, K2, K3]
{S:SW, B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N}	[K2] × [K1, K2, K4]
{B:W, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N}	[K2] × [K2, K3, K4, K5]
{B:W, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N}	[K2] × [K2, K3, K4, K5, K6]
{B:W, S:SW, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N}	[K2] × [K1, K2, K3, K4, K5]
{B:W, S:SW, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N}	[K2] × [K1, K2, K3, K4, K5, K6]
{B:E}	[K5] × [K3]
{S:SE}	[K5] × [K1]
{N:NE}	[K5] × [K6]
{B:S:E:SE}	[K5] × [K2]
{B:N:NE:E}	[K5] × [K5]
{B:S:N:NE:E:SE}	[K5] × [K4]
{N:NE, B:N:NE:E}	[K5] × [K5, K6]
{B:E, B:N:NE:E}	[K5] × [K3, K5]
{B:E, B:S:E:SE}	[K5] × [K2, K3]
{S:SE, B:S:E:SE}	[K5] × [K1, K2]
{B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K5] × [K4, K5]
{B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE}	[K5] × [K2, K4]
{B:E, N:NE, B:N:NE:E}	[K5] × [K3, K5, K6]
{N:NE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K5] × [K4, K5, K6]
{B:E, S:SE, B:S:E:SE}	[K5] × [K1, K2, K3]
{S:SE, B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE}	[K5] × [K1, K2, K4]
{B:E, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K5] × [K2, K3, K4, K5]
{B:E, N:NE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K5] × [K1, K2, K3, K4, K5]
{B:E, S:SE, N:NE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K5] × [K1, K2, K3, K4, K5, K6]
{B:W:E}	[K4] × [K3]
{S:SW:E}	[K4] × [K1]
{NW:N:NE}	[K4] × [K6]
{B:S:SW:W:E:SE}	[K4] × [K2]
{B:W:NW:N:NE:E}	[K4] × [K5]
{B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K4] × [K4]
{NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E}	[K4] × [K5, K6]
{B:W:E, B:W:NW:N:NE:E}	[K4] × [K3, K5]
{B:W:E, B:S:SW:W:E:SE}	[K4] × [K2, K3]
{S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE}	[K4] × [K1, K2]
{B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K4] × [K4, K5]
{B:S:SW:W:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K4] × [K2, K4]
{B:W:E, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E}	[K4] × [K3, K5, K6]
{NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K4] × [K4, K5, K6]
{B:W:E, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE}	[K4] × [K1, K2, K3]
{S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K4] × [K1, K2, K4]
{B:W:E, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K4] × [K2, K3, K4, K5]
{B:W:E, NW:N:NE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K4] × [K2, K3, K4, K5, K6]
{B:W:E, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K4] × [K1, K2, K3, K4, K5]
{B:W:E, S:SW:SE, NW:N:NE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K4] × [K1, K2, K3, K4, K5, K6]
{E, B:E}	[K5, K6] × [K3]
{SE, S:SE}	[K5, K6] × [K1]

Relación DCR	Intervalos $\mathcal{K}$ -retículo
{NE, N:NE}	[K5, K6] × [K6]
{E:SE, B:S:E:SE}	[K5, K6] × [K2]
{NE:E, B:N:NE:E}	[K5, K6] × [K5]
{NE:E:SE, B:S:N:NE:E:SE}	[K5, K6] × [K4]
{NE, NE:E, N:NE, B:N:NE:E}	[K5, K6] × [K5, K6]
{E, NE:E, B:E, B:N:NE:E}	[K5, K6] × [K3, K5]
{E, E:SE, B:E, B:S:E:SE}	[K5, K6] × [K2, K3]
{SE, E:SE, S:SE, B:S:E:SE}	[K5, K6] × [K1, K2]
{NE:E, NE:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K5, K6] × [K4, K5]
{E:SE, NE:E:SE, B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE}	[K5, K6] × [K2, K4]
{E, NE, NE:E, B:E, N:NE, B:N:NE:E}	[K5, K6] × [K3, K5, K6]
{NE, NE:E, NE:E:SE, N:NE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K5, K6] × [K4, K5, K6]
{E, SE, E:SE, B:E, S:SE, B:S:E:SE}	[K5, K6] × [K1, K2, K3]
{SE, E:SE, NE:E:SE, S:SE, B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE}	[K5, K6] × [K1, K2, K4]
{E, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:E, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K5, K6] × [K2, K3, K4, K5]
{E, NE, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:E, N:NE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K5, K6] × [K2, K3, K4, K5, K6]
{E, SE, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:E, S:SE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K5, K6] × [K1, K2, K3, K4, K5]
{E, SE, NE, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:E, S:SE, N:NE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K5, K6] ×
{B, B:E}	[K1, K2, K3, K4, K5, K6]
{S, S:SE}	[K3, K5] × [K3]
{N, N:NE}	[K3, K5] × [K1]
{B:S, B:S:E:SE}	[K3, K5] × [K6]
{B:N, B:N:NE:E}	[K3, K5] × [K2]
{B:S:N, B:S:N:NE:E:SE}	[K3, K5] × [K5]
{N, B:N, N:NE, B:N:NE:E}	[K3, K5] × [K4]
{B, B:N, B:E, B:N:NE:E}	[K3, K5] × [K5, K6]
{B, B:S, B:E, B:S:E:SE}	[K3, K5] × [K3, K5]
{S, B:S, S:SE, B:S:E:SE}	[K3, K5] × [K2, K3]
{B:N, B:S:N, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K3, K5] × [K1, K2]
{B:S, B:S:N, B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE}	[K3, K5] × [K4, K5]
{B, N, B:N, B:E, N:NE, B:N:NE:E}	[K3, K5] × [K2, K4]
{N, B:N, B:S:N, N:NE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K3, K5] × [K3, K5, K6]
{B, S, B:S, B:E, S:SE, B:S:E:SE}	[K3, K5] × [K4, K5, K6]
{S, B:S, B:S:N, S:SE, B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE}	[K3, K5] × [K1, K2, K3]
{B, B:S, B:N, B:S:N, B:E, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K3, K5] × [K1, K2, K4]
{B, N, B:S, B:N, B:S:N, B:E, N:NE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K3, K5] × [K2, K3, K4, K5, K6]
{B, S, B:S, B:N, B:S:N, B:E, S:SE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K3, K5] × [K1, K2, K3, K4, K5]
{B, S, N, B:S, B:N, B:S:N, B:E, S:SE, N:NE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K3, K5] ×
	[K1, K2, K3, K4, K5, K6]
{B, B:W}	[K2, K3] × [K3]
{S, S:SW}	[K2, K3] × [K1]
{N, NW:N}	[K2, K3] × [K6]
{B:S, B:S:SW:W}	[K2, K3] × [K2]
{B:N, B:W:NW:N}	[K2, K3] × [K5]
{B:S:N, B:S:SW:W:NW:N}	[K2, K3] × [K4]
{N, B:N, NW:N, B:W:NW:N}	[K2, K3] × [K5, K6]
{B, B:N, B:W, B:W:NW:N}	[K2, K3] × [K3, K5]
{B, B:S, B:W, B:S:SW:W}	[K2, K3] × [K2, K3]
{S, B:S, S:SW, B:S:SW:W}	[K2, K3] × [K1, K2]
{B:N, B:S:N, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N}	[K2, K3] × [K4, K5]
{B:S, B:S:N, B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N}	[K2, K3] × [K2, K4]
{B, N, B:N, B:W, NW:N, B:W:NW:N}	[K2, K3] × [K3, K5, K6]
{N, B:N, B:S:N, NW:N, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N}	[K2, K3] × [K4, K5, K6]
{B, S, B:S, B:W, S:SW, B:S:SW:W}	[K2, K3] × [K1, K2, K3]
{S, B:S, B:S:N, S:SW, B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N}	[K2, K3] × [K1, K2, K4]
{B, B:S, B:N, B:S:N, B:W, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N}	[K2, K3] × [K2, K3, K4, K5]
{B, N, B:S, B:N, B:S:N, B:W, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N}	[K2, K3] × [K2, K3, K4, K5, K6]
{B, S, B:S, B:N, B:S:N, B:W, S:SW, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N}	[K2, K3] × [K1, K2, K3, K4, K5]
{B, S, N, B:S, B:N, B:S:N, B:W, S:SW, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N}	[K2, K3] ×
	[K1, K2, K3, K4, K5, K6]
{W, B:W}	[K1, K2] × [K3]
{SW, S:SW}	[K1, K2] × [K1]
{NW, NW:N}	[K1, K2] × [K6]
{SW:W, B:S:SW:W}	[K1, K2] × [K2]
{W:NW, B:W:NW:N}	[K1, K2] × [K5]
{SW:W:NW, B:S:SW:W:NW:N}	[K1, K2] × [K4]
{NW, W:NW, NW:N, B:W:NW:N}	[K1, K2] × [K5, K6]
{W, W:NW, B:W, B:W:NW:N}	[K1, K2] × [K3, K5]
{W, SW:W, B:W, B:S:SW:W}	[K1, K2] × [K2, K3]
{SW, SW:W, S:SW, B:S:SW:W}	[K1, K2] × [K1, K2]
{W:NW, SW:W:NW, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N}	[K1, K2] × [K4, K5]
{SW:W, SW:W:NW, B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N}	[K1, K2] × [K2, K4]
{W, NW, W:NW, B:W, NW:N, B:W:NW:N}	[K1, K2] × [K3, K5, K6]
{NW, W:NW, SW:W:NW, NW:N, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N}	[K1, K2] × [K4, K5, K6]
{W, SW, SW:W, B:W, S:SW, B:S:SW:W}	[K1, K2] × [K1, K2, K3]
{SW, SW:W, SW:W:NW, S:SW, B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N}	[K1, K2] × [K1, K2, K4]

Relación DCR	Intervalos $\mathcal{K}$ -retículo
{W, SW:W, W:NW, SW:W:NW, B:W, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N}	[K1, K2] × [K2, K3, K4, K5]
{W, NW, SW:W, W:NW, SW:W:NW, B:W, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N}	[K1, K2] × [K2, K3, K4, K5, K6]
{W, SW, SW:W, W:NW, SW:W:NW, B:W, S:SW, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N}	[K1, K2] × [K1, K2, K3, K4, K5]
{W, SW, NW, SW:W, W:NW, SW:W:NW, B:W, S:SW, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N}	[K1, K2] × [K1, K2, K3, K4, K5, K6]
{B:E, B:W:E}	[K4, K5] × [K3]
{S:SE, S:SW:SE}	[K4, K5] × [K1]
{N:NE, NW:N:NE}	[K4, K5] × [K6]
{B:S:E:SE, B:S:SW:W:E:SE}	[K4, K5] × [K2]
{B:N:NE:E, B:W:NW:N:NE:E}	[K4, K5] × [K5]
{B:S:N:NE:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K4, K5] × [K4]
{N:NE, B:N:NE:E, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E}	[K4, K5] × [K5, K6]
{B:E, B:N:NE:E, B:W:E, B:W:NW:N:NE:E}	[K4, K5] × [K3, K5]
{B:E, B:S:E:SE, B:W:E, B:S:SW:W:E:SE}	[K4, K5] × [K2, K3]
{S:SE, B:S:E:SE, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE}	[K4, K5] × [K1, K2]
{B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K4, K5] × [K4, K5]
{B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K4, K5] × [K2, K4]
{B:E, N:NE, B:N:NE:E, B:W:E, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E}	[K4, K5] × [K3, K5, K6]
{N:NE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K4, K5] × [K4, K5, K6]
{B:E, S:SE, B:S:E:SE, B:W:E, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE}	[K4, K5] × [K1, K2, K3]
{S:SE, B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K4, K5] × [K1, K2, K4]
{B:E, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K4, K5] × [K2, K3, K4, K5]
{B:E, N:NE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, NW:N:NE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K4, K5] × [K2, K3, K4, K5, K6]
{B:E, S:SE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, NW:N:NE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K4, K5] × [K1, K2, K3, K4, K5]
{B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K4, K5] × [K1, K2, K3, K4, K5, K6]
{B:W, B:W:E}	[K2, K4] × [K3]
{S:SW, S:SW:SE}	[K2, K4] × [K1]
{NW:N, NW:N:NE}	[K2, K4] × [K6]
{B:S:SW:W, B:S:SW:W:E:SE}	[K2, K4] × [K2]
{B:W:NW:N, B:W:NW:N:NE:E}	[K2, K4] × [K5]
{B:S:SW:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K4] × [K4]
{NW:N, B:W:NW:N, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E}	[K2, K4] × [K5, K6]
{B:W, B:W:NW:N, B:W:E, B:W:NW:N:NE:E}	[K2, K4] × [K3, K5]
{B:W, B:S:SW:W, B:W:E, B:S:SW:W:E:SE}	[K2, K4] × [K2, K3]
{S:SW, B:S:SW:W, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE}	[K2, K4] × [K1, K2]
{B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K4] × [K4, K5]
{B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N, B:S:SW:W:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K4] × [K2, K4]
{B:W, NW:N, B:W:NW:N, B:W:E, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E}	[K2, K4] × [K3, K5, K6]
{NW:N, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K4] × [K4, K5, K6]
{B:W, S:SW, B:S:SW:W, B:W:E, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE}	[K2, K4] × [K1, K2, K3]
{S:SW, B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K4] × [K1, K2, K4]
{B:W, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:W:E, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K4] × [K2, K3, K4, K5]
{B:W, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:W:E, NW:N:NE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K4] × [K2, K3, K4, K5, K6]
{B:W, S:SW, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:W:E, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K4] × [K1, K2, K3, K4, K5]
{B:W, S:SW, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:W:E, S:SW:SE, NW:N:NE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K4] × [K1, K2, K3, K4, K5, K6]
{B, E, B:E}	[K3, K5, K6] × [K3]
{S, SE, S:SE}	[K3, K5, K6] × [K1]
{N, NE, N:NE}	[K3, K5, K6] × [K6]
{B:S, E:SE, B:S:E:SE}	[K3, K5, K6] × [K2]
{B:N, NE:E, B:N:NE:E}	[K3, K5, K6] × [K5]
{B:S:N, NE:E:SE, B:S:N:NE:E:SE}	[K3, K5, K6] × [K4]
{N, B:N, NE, NE:E, N:NE, B:N:NE:E}	[K3, K5, K6] × [K5, K6]
{B, B:N, E, NE:E, B:E, B:N:NE:E}	[K3, K5, K6] × [K3, K5]
{B, B:S, E, E:SE, B:E, B:S:E:SE}	[K3, K5, K6] × [K2, K3]
{S, B:S, SE, E:SE, S:SE, B:S:E:SE}	[K3, K5, K6] × [K1, K2]
{B:N, B:S:N, NE:E, NE:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K3, K5, K6] × [K4, K5]
{B:S, B:S:N, E:SE, NE:E:SE, B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE}	[K3, K5, K6] × [K2, K4]
{B, N, B:N, E, NE, NE:E, B:E, N:NE, B:N:NE:E}	[K3, K5, K6] × [K3, K5, K6]
{N, B:N, B:S:N, NE, NE:E, NE:E:SE, N:NE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K3, K5, K6] × [K4, K5, K6]
{B, S, B:S, E, SE, E:SE, B:E, S:SE, B:S:E:SE}	[K3, K5, K6] × [K1, K2, K3]
{S, B:S, B:S:N, SE, E:SE, NE:E:SE, S:SE, B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE}	[K3, K5, K6] × [K1, K2, K4]
{B, B:S, B:N, B:S:N, E, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:E, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE}	[K3, K5, K6] × [K2, K3, K4, K5]

Relación DCR	Intervalos $\mathcal{K}$ -retículo
$\{B, N, B:S, B:N, B:S:N, E, NE, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:E, N:NE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE\}$	$[K3, K5, K6] \times [K2, K3, K4, K5, K6]$
$\{B, S, B:S, B:N, B:S:N, E, SE, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:E, S:SE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE\}$	$[K3, K5, K6] \times [K1, K2, K3, K4, K5]$
$\{B, S, N, B:S, B:N, B:S:N, E, SE, NE, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:E, S:SE, N:NE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE\}$	$[K3, K5, K6] \times [K1, K2, K3, K4, K5, K6]$
$\{E, B:E, B:W:E\}$	$[K4, K5, K6] \times [K3]$
$\{SE, S:SE, S:SW:SE\}$	$[K4, K5, K6] \times [K1]$
$\{NE, N:NE, NW:N:NE\}$	$[K4, K5, K6] \times [K6]$
$\{E:SE, B:S:E:SE, B:S:SW:W:E:SE\}$	$[K4, K5, K6] \times [K2]$
$\{NE:E, B:N:NE:E, B:W:NW:N:NE:E\}$	$[K4, K5, K6] \times [K5]$
$\{NE:E:SE, B:S:N:NE:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K4, K5, K6] \times [K4]$
$\{NE, NE:E, N:NE, B:N:NE:E, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E\}$	$[K4, K5, K6] \times [K5, K6]$
$\{E, NE:E, B:E, B:N:NE:E, B:W:E, B:W:NW:N:NE:E\}$	$[K4, K5, K6] \times [K3, K5]$
$\{E, E:SE, B:E, B:S:E:SE, B:W:E, B:S:SW:W:E:SE\}$	$[K4, K5, K6] \times [K2, K3]$
$\{SE, E:SE, S:SE, B:S:E:SE, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE\}$	$[K4, K5, K6] \times [K1, K2]$
$\{NE:E, NE:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K4, K5, K6] \times [K4, K5]$
$\{E:SE, NE:E:SE, B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K4, K5, K6] \times [K2, K4]$
$\{E, NE, NE:E, B:E, N:NE, B:N:NE:E, B:W:E, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E\}$	$[K4, K5, K6] \times [K3, K5, K6]$
$\{NE, NE:E, NE:E:SE, N:NE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K4, K5, K6] \times [K4, K5, K6]$
$\{E, SE, E:SE, B:E, S:SE, B:S:E:SE, B:W:E, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE\}$	$[K4, K5, K6] \times [K1, K2, K3]$
$\{SE, E:SE, NE:E:SE, S:SE, B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K4, K5, K6] \times [K1, K2, K4]$
$\{E, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:E, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K4, K5, K6] \times [K2, K3, K4, K5]$
$\{E, NE, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:E, N:NE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, NW:N:NE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K4, K5, K6] \times [K2, K3, K4, K5, K6]$
$\{E, SE, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:E, S:SE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE\}$	$[K4, K5, K6] \times [K1, K2, K3]$
$\{E, SE, NE, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:E, S:SE, N:NE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, S:SW:SE, NW:N:NE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K4, K5, K6] \times [K1, K2, K3, K4, K5, K6]$
$\{B, W, B:W\}$	$[K1, K2, K3] \times [K3]$
$\{S, SW, S:SW\}$	$[K1, K2, K3] \times [K1]$
$\{N, NW, NW:N\}$	$[K1, K2, K3] \times [K6]$
$\{B:S, SW:W, B:S:SW:W\}$	$[K1, K2, K3] \times [K2]$
$\{B:N, W:NW, B:W:NW:N\}$	$[K1, K2, K3] \times [K5]$
$\{B:S:N, SW:W:NW, B:S:SW:W:NW:N\}$	$[K1, K2, K3] \times [K4]$
$\{N, B:N, NW, W:NW, NW:N, B:W:NW:N\}$	$[K1, K2, K3] \times [K5, K6]$
$\{B, B:N, W, W:NW, B:W, B:W:NW:N\}$	$[K1, K2, K3] \times [K3, K5]$
$\{B, B:S, W, SW:W, B:W, B:S:SW:W\}$	$[K1, K2, K3] \times [K2, K3]$
$\{S, B:S, SW, SW:W, S:SW, B:S:SW:W\}$	$[K1, K2, K3] \times [K1, K2]$
$\{B:N, B:S:N, W:NW, SW:W:NW, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N\}$	$[K1, K2, K3] \times [K4, K5]$
$\{B:S, B:S:N, SW:W, SW:W:NW, B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N\}$	$[K1, K2, K3] \times [K2, K4]$
$\{B, N, B:N, W, NW, W:NW, B:W, NW:N, B:W:NW:N\}$	$[K1, K2, K3] \times [K3, K5, K6]$
$\{N, B:N, B:S:N, NW, W:NW, SW:W:NW, NW:N, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N\}$	$[K1, K2, K3] \times [K4, K5, K6]$
$\{B, S, B:S, W, SW, SW:W, B:W, S:SW, B:S:SW:W\}$	$[K1, K2, K3] \times [K1, K2, K3]$
$\{S, B:S, B:S:N, SW, SW:W, SW:W:NW, S:SW, B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N\}$	$[K1, K2, K3] \times [K1, K2, K4]$
$\{B, B:S, B:N, B:S:N, W, SW:W, W:NW, SW:W:NW, B:W, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N\}$	$[K1, K2, K3] \times [K2, K3, K4, K5]$
$\{B, N, B:S, B:N, B:S:N, W, NW, SW:W, W:NW, SW:W:NW, B:W, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N\}$	$[K1, K2, K3] \times [K2, K3, K4, K5, K6]$
$\{B, S, B:S, B:N, B:S:N, W, SW, SW:W, W:NW, SW:W:NW, B:W, S:SW, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N\}$	$[K1, K2, K3] \times [K1, K2, K3]$
$\{B, S, N, B:S, B:N, B:S:N, W, SW, NW, SW:W, W:NW, SW:W:NW, B:W, S:SW, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N\}$	$[K1, K2, K3] \times [K1, K2, K4]$
$\{W, B:W, B:W:E\}$	$[K1, K2, K4] \times [K3]$
$\{SW, S:SW, S:SW:SE\}$	$[K1, K2, K4] \times [K1]$
$\{NW, NW:N, NW:N:NE\}$	$[K1, K2, K4] \times [K6]$
$\{SW:W, B:S:SW:W, B:S:SW:W:E:SE\}$	$[K1, K2, K4] \times [K2]$
$\{W:NW, B:W:NW:N, B:W:NW:N:NE:E\}$	$[K1, K2, K4] \times [K5]$
$\{SW:W:NW, B:S:SW:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K4] \times [K4]$
$\{NW, W:NW, NW:N, B:W:NW:N, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E\}$	$[K1, K2, K4] \times [K5, K6]$
$\{W, W:NW, B:W, B:W:NW:N, B:W:E, B:W:NW:N:NE:E\}$	$[K1, K2, K4] \times [K3, K5]$
$\{W, SW:W, B:W, B:S:SW:W, B:W:E, B:S:SW:W:E:SE\}$	$[K1, K2, K4] \times [K2, K3]$
$\{SW, SW:W, S:SW, B:S:SW:W, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE\}$	$[K1, K2, K4] \times [K1, K2]$
$\{W:NW, SW:W:NW, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K4] \times [K4, K5]$
$\{SW:W, SW:W:NW, B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N, B:S:SW:W:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K4] \times [K2, K4]$
$\{W, NW, W:NW, B:W, NW:N, B:W:NW:N, B:W:E, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E\}$	$[K1, K2, K4] \times [K3, K5, K6]$
$\{NW, W:NW, SW:W:NW, NW:N, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K4] \times [K4, K5, K6]$
$\{W, SW, SW:W, B:W, S:SW, B:S:SW:W, B:W:E, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE\}$	$[K1, K2, K4] \times [K1, K2, K3]$

Relación DCR	Intervalos $\mathcal{K}$ -retículo
{SW, SW:W, SW:W:NW, S:SW, B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K1, K2, K4] × [K1, K2, K4]
{W, SW:W, W:NW, SW:W:NW, B:W, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:W:E, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K1, K2, K4] × [K2, K3, K4, K5]
{W, NW, SW:W, W:NW, SW:W:NW, B:W, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:W:E, NW:N:NE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K1, K2, K4] × [K2, K3, K4, K5, K6]
{W, SW, SW:W, W:NW, SW:W:NW, B:W, S:SW, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:W:E, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K1, K2, K4] × [K1, K2, K3, K4, K5]
{W, SW, NW, SW:W, W:NW, SW:W:NW, B:W, S:SW, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:W:E, S:SW:SE, NW:N:NE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K1, K2, K4] × [K1, K2, K3, K4, K5, K6]
{B, B:W, B:E, B:W:E}	[K2, K3, K4, K5] × [K3]
{S, S:SW, S:SE, S:SW:SE}	[K2, K3, K4, K5] × [K1]
{N, NW:N, N:NE, NW:N:NE}	[K2, K3, K4, K5] × [K6]
{B:S, B:S:SW:W, B:S:E:SE, B:S:SW:W:E:SE}	[K2, K3, K4, K5] × [K2]
{B:N, B:W:NW:N, B:N:NE:E, B:W:NW:N:NE:E}	[K2, K3, K4, K5] × [K5]
{B:S:N, B:S:SW:W:NW:N, B:S:N:NE:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K3, K4, K5] × [K4]
{N, B:N, NW:N, B:W:NW:N, N:NE, B:N:NE:E, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E}	[K2, K3, K4, K5] × [K5, K6]
{B, B:N, B:W, B:W:NW:N, B:E, B:N:NE:E, B:W:E, B:W:NW:N:NE:E}	[K2, K3, K4, K5] × [K3, K5]
{B, B:S, B:W, B:S:SW:W, B:E, B:S:E:SE, B:W:E, B:S:SW:W:E:SE}	[K2, K3, K4, K5] × [K2, K3]
{S, B:S, S:SW, B:S:SW:W, S:SE, B:S:E:SE, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE}	[K2, K3, K4, K5] × [K1, K2]
{B:N, B:S:N, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K3, K4, K5] × [K4, K5]
{B:S, B:S:N, B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N, B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K3, K4, K5] × [K2, K4]
{B, N, B:N, B:W, NW:N, B:W:NW:N, B:E, N:NE, B:N:NE:E, B:W:E, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E}	[K2, K3, K4, K5] × [K3, K5, K6]
{N, B:N, B:S:N, NW:N, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, N:NE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K3, K4, K5] × [K4, K5, K6]
{B, S, B:S, B:W, S:SW, B:S:SW:W, B:E, S:SE, B:S:E:SE, B:W:E, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE}	[K2, K3, K4, K5] × [K1, K2, K3]
{S, B:S, B:S:N, S:SW, B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N, S:SE, B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K3, K4, K5] × [K1, K2, K4]
{B, B:S, B:N, B:S:N, B:W, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:E, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K3, K4, K5] × [K2, K3, K4, K5]
{B, N, B:S, B:N, B:S:N, B:W, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:E, N:NE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, NW:N:NE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K3, K4, K5] × [K2, K3, K4, K5, K6]
{B, S, B:S, B:N, B:S:N, B:W, S:SW, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:E, S:SE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K3, K4, K5] × [K1, K2, K3, K4, K5]
{B, S, N, B:S, B:N, B:S:N, B:W, S:SW, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:E, S:SE, N:NE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, S:SW:SE, NW:N:NE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K3, K4, K5] × [K1, K2, K3, K4, K5, K6]
{B, E, B:W, B:E, B:W:E}	[K2, K3, K4, K5, K6] × [K3]
{S, SE, S:SW, S:SE, S:SW:SE}	[K2, K3, K4, K5, K6] × [K1]
{N, NE, NW:N, N:NE, NW:N:NE}	[K2, K3, K4, K5, K6] × [K6]
{B:S, E:SE, B:S:SW:W, B:S:E:SE, B:S:SW:W:E:SE}	[K2, K3, K4, K5, K6] × [K2]
{B:N, NE:E, B:W:NW:N, B:N:NE:E, B:W:NW:N:NE:E}	[K2, K3, K4, K5, K6] × [K5]
{B:S:N, NE:E:SE, B:S:SW:W:NW:N, B:S:N:NE:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K3, K4, K5, K6] × [K4]
{N, B:N, NE, NE:E, NW:N, B:W:NW:N, N:NE, B:N:NE:E, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E}	[K2, K3, K4, K5, K6] × [K5, K6]
{B, B:N, E, NE:E, B:W, B:W:NW:N, B:E, B:N:NE:E, B:W:E, B:W:NW:N:NE:E}	[K2, K3, K4, K5, K6] × [K3, K5]
{B, B:S, E, E:SE, B:W, B:S:SW:W, B:E, B:S:E:SE, B:W:E, B:S:SW:W:E:SE}	[K2, K3, K4, K5, K6] × [K2, K3]
{S, B:S, SE, E:SE, S:SW, B:S:SW:W, S:SE, B:S:E:SE, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE}	[K2, K3, K4, K5, K6] × [K1, K2]
{B:N, B:S:N, NE:E, NE:E:SE, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K3, K4, K5, K6] × [K4, K5]
{B:S, B:S:N, E:SE, NE:E:SE, B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N, B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K3, K4, K5, K6] × [K2, K4]
{B, N, B:N, E, NE, NE:E, B:W, NW:N, B:W:NW:N, B:E, N:NE, B:N:NE:E, B:W:E, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E}	[K2, K3, K4, K5, K6] × [K3, K5, K6]
{N, B:N, B:S:N, NE, NE:E, NE:E:SE, NW:N, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, N:NE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K3, K4, K5, K6] × [K4, K5, K6]
{B, S, B:S, E, SE, E:SE, B:W, S:SW, B:S:SW:W, B:E, S:SE, B:S:E:SE, B:W:E, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE}	[K2, K3, K4, K5, K6] × [K1, K2, K3]
{S, B:S, B:S:N, SE, E:SE, NE:E:SE, S:SW, B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N, S:SE, B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K3, K4, K5, K6] × [K1, K2, K4]
{B, B:S, B:N, B:S:N, E, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:W, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:E, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K3, K4, K5, K6] × [K2, K3, K4, K5]
{B, N, B:S, B:N, B:S:N, E, NE, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:W, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:E, N:NE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, NW:N:NE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E:SE}	[K2, K3, K4, K5, K6] × [K2, K3, K4, K5, K6]

Relación DCR	Intervalos $\mathcal{K}$ -retículo
$\{B, S, B:S, B:N, B:S:N, E, SE, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:W, S:SW, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:E, S:SE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K2, K3, K4, K5, K6] \times [K1, K2, K3, K4, K5]$
$\{B, S, N, B:S, B:N, B:S:N, E, SE, NE, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:W, S:SW, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:E, S:SE, N:NE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, S:SW:SE, NW:N:NE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K2, K3, K4, K5, K6] \times [K1, K2, K3, K4, K5, K6]$
$\{B, W, B:W, B:E, B:W:E\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K3]$
$\{S, SW, S:SW, S:SE, S:SW:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K1]$
$\{N, NW, NW:N, N:NE, NW:N:NE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K6]$
$\{B:S, SW:W, B:S:SW:W, B:S:E:SE, B:S:SW:W:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K2]$
$\{B:N, W:NW, B:W:NW:N, B:N:NE:E, B:W:NW:N:NE:E\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K5]$
$\{B:S:N, SW:W:NW, B:S:SW:W:NW:N, B:S:N:NE:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K4]$
$\{N, B:N, NW, W:NW, NW:N, B:W:NW:N, N:NE, B:N:NE:E, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K5, K6]$
$\{B, B:N, W, W:NW, B:W, B:W:NW:N, B:E, B:N:NE:E, B:W:E, B:W:NW:N:NE:E\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K3, K5]$
$\{B, B:S, W, SW:W, B:W, B:S:SW:W, B:E, B:S:E:SE, B:W:E, B:S:SW:W:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K2, K3]$
$\{S, B:S, SW, SW:W, S:SW, B:S:SW:W, S:SE, B:S:E:SE, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K1, K2]$
$\{B:N, B:S:N, W:NW, SW:W:NW, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K4, K5]$
$\{B:S, B:S:N, SW:W, SW:W:NW, B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N, B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K2, K4]$
$\{B, N, B:N, W, NW, W:NW, B:W, NW:N, B:W:NW:N, B:E, N:NE, B:N:NE:E, B:W:E, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K3, K5, K6]$
$\{N, B:N, B:S:N, NW, W:NW, SW:W:NW, NW:N, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, N:NE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K4, K5, K6]$
$\{B, S, B:S, W, SW, SW:W, B:W, S:SW, B:S:SW:W, B:E, S:SE, B:S:E:SE, B:W:E, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K1, K2, K3]$
$\{S, B:S, B:S:N, SW, SW:W, SW:W:NW, S:SW, B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N, S:SE, B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K1, K2, K4]$
$\{B, B:S, B:N, B:S:N, W, SW:W, W:NW, SW:W:NW, B:W, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:E, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K2, K3, K4, K5]$
$\{B, N, B:S, B:N, B:S:N, W, NW, SW:W, W:NW, SW:W:NW, B:W, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:E, N:NE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, NW:N:NE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K2, K3, K4, K5, K6]$
$\{B, S, B:S, B:N, B:S:N, W, SW, SW:W, W:NW, SW:W:NW, B:W, S:SW, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:E, S:SE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K1, K2, K3, K4, K5]$
$\{B, S, N, B:S, B:N, B:S:N, W, SW, NW, SW:W, W:NW, SW:W:NW, B:W, S:SW, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:E, S:SE, N:NE, B:W:E, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, S:SW:SE, NW:N:NE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5] \times [K1, K2, K3, K4, K5, K6]$
$\{B, W, E, B:W, B:E, B:W:E\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5, K6] \times [K3]$
$\{S, SW, SE, S:SW, S:SE, S:SW:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5, K6] \times [K1]$
$\{N, NW, NE, NW:N, N:NE, NW:N:NE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5, K6] \times [K6]$
$\{B:S, SW:W, E:SE, B:S:SW:W, B:S:E:SE, B:S:SW:W:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5, K6] \times [K2]$
$\{B:N, W:NW, NE:E, B:W:NW:N, B:N:NE:E, B:W:NW:N:NE:E\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5, K6] \times [K5]$
$\{B:S:N, SW:W:NW, NE:E:SE, B:S:SW:W:NW:N, B:S:N:NE:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5, K6] \times [K4]$
$\{N, B:N, NW, W:NW, NE, NE:E, NW:N, B:W:NW:N, N:NE, B:N:NE:E, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5, K6] \times [K5, K6]$
$\{B, B:N, W, W:NW, E, NE:E, B:W, B:W:NW:N, B:E, B:N:NE:E, B:W:E, B:W:NW:N:NE:E\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5, K6] \times [K3, K5]$
$\{B, B:S, W, SW:W, E, E:SE, B:W, B:S:SW:W, B:E, B:S:E:SE, B:W:E, B:S:SW:W:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5, K6] \times [K2, K3]$
$\{S, B:S, SW, SW:W, SE, E:SE, S:SW, B:S:SW:W, S:SE, B:S:E:SE, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5, K6] \times [K1, K2]$
$\{B:N, B:S:N, W:NW, SW:W:NW, NE:E, NE:E:SE, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5, K6] \times [K4, K5]$
$\{B:S, B:S:N, SW:W, SW:W:NW, E:SE, NE:E:SE, B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N, B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5, K6] \times [K2, K4]$
$\{B, N, B:N, W, NW, W:NW, E, NE, B:W, NW:N, B:W:NW:N, B:E, N:NE, B:N:NE:E, B:W:E, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5, K6] \times [K3, K5, K6]$
$\{N, B:N, B:S:N, NW, W:NW, SW:W:NW, NE, NE:E, NE:E:SE, NW:N, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, N:NE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, NW:N:NE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5, K6] \times [K4, K5, K6]$
$\{B, S, B:S, W, SW, SW:W, E, SE, E:SE, B:W, S:SW, B:S:SW:W, B:E, S:SE, B:S:E:SE, B:W:E, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5, K6] \times [K1, K2, K3]$
$\{S, B:S, B:S:N, SW, SW:W, SE, E:SE, NE:E:SE, S:SW, B:S:SW:W, B:S:SW:W:NW:N, S:SE, B:S:E:SE, B:S:N:NE:E:SE, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5, K6] \times [K1, K2, K4]$
$\{B, B:S, B:N, B:S:N, W, SW:W, W:NW, SW:W:NW, E, E:SE, NE:E:SE, B:W, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:E, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5, K6] \times [K2, K3, K4, K5, K6]$
$\{B, B:S, B:N, B:S:N, W, SW:W, W:NW, SW:W:NW, E, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:W, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:E, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE\}$	$[K1, K2, K3, K4, K5, K6] \times [K2, K3, K4, K5]$

Relación DCR	Intervalos $\mathcal{K}$ -retículo
<p>{<i>B, N, B:S, B:N, B:S:N, W, NW, SW:W, W:NW, SW:W:NW, E, NE, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:W, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:E, N:NE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, NW:N:NE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE</i>}</p>	<p>[<i>K1, K2, K3, K4, K5, K6</i>] ×  [<i>K2, K3, K4, K5, K6</i>]</p>
<p>{<i>B, S, B:S, B:N, B:S:N, W, SW, SW:W, W:NW, SW:W:NW, E, SE, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:W, S:SW, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:E, S:SE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, S:SW:SE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE</i>}</p>	<p>[<i>K1, K2, K3, K4, K5, K6</i>] ×  [<i>K1, K2, K3, K4, K5</i>]</p>
<p>{<i>B, S, N, B:S, B:N, B:S:N, W, SW, NW, SW:W, W:NW, SW:W:NW, E, SE, NE, E:SE, NE:E, NE:E:SE, B:W, S:SW, NW:N, B:S:SW:W, B:W:NW:N, B:S:SW:W:NW:N, B:E, S:SE, N:NE, B:S:E:SE, B:N:NE:E, B:S:N:NE:E:SE, B:W:E, S:SW:SE, NW:N:NE, B:S:SW:W:E:SE, B:W:NW:N:NE:E, B:S:SW:W:NW:N:NE:E:SE</i>}</p>	<p>[<i>K1, K2, K3, K4, K5, K6</i>] ×  [<i>K1, K2, K3, K4, K5, K6</i>]</p>



# Apéndice B

## Diseño e Implementación del Modelo DC

En este apéndice se presenta una propuesta de diseño e implementación de una librería software para razonamiento espacial con direcciones cardinales basado en restricciones. Esta librería implementa el modelo DC y los algoritmos descritos en los Capítulos 4 y 3. Además, esta librería implementa varios de los modelos de razonamiento espacial y temporal del Capítulo 2 ya que son necesarios para implementar el modelo DC.

En el diseño se ha utilizado el paradigma de la programación orientada a objetos y para la implementación se ha empleado el lenguaje de programación Java en su versión 5.0.

### B.1. Descripción de la Librería

En esta sección utilizamos la notación UML para la descripción de los componentes de la librería. La librería se organiza en cuatro paquetes principales (ver Figura B.1):

1. **Paquete *csp***. Contiene las clases para implementar un red de restricciones y para definir álgebras de relaciones de forma abstracta. Además incluye la implementación del algoritmo de camino-consistencia descrito en la Figura 2.1 del Capítulo 2.
2. **Paquete *temporal***. Este paquete se divide a su vez en tres paquetes:
  - a) **Paquete *point***. Implementa todo lo relacionado con el álgebra de puntos. Incluye una implementación del algoritmo CSPAN [vB92] que utiliza el algoritmo de Tarjan [Tar72] para detectar las componentes fuertemente conexas en una red de restricciones.

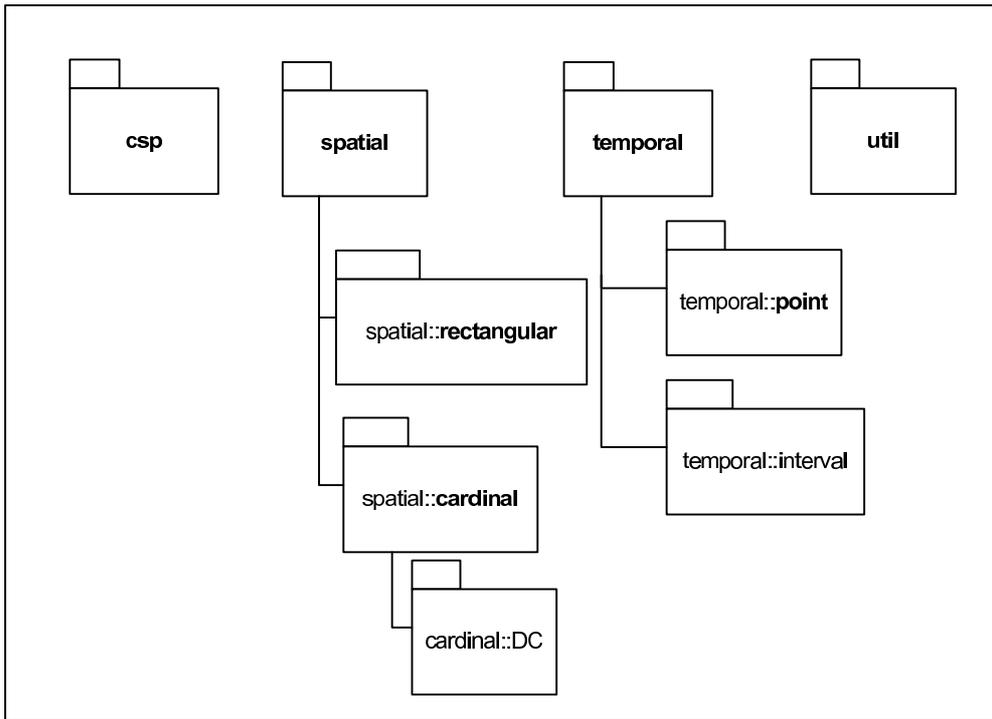


Figura B.1: Paquetes de la librería para razonamiento espacial basado en restricciones.

b) **Paquete *interval***. Implementa todo lo relacionado con el álgebra de intervalos: relaciones, tabla de transitividad, retículo, etc.

3. **Paquete *spatial***. Este paquete se divide a su vez en los siguientes paquetes:

a) **Paquete *rectangular***. Implementa todo lo relacionado con el álgebra de rectángulos. Este paquete hace uso del paquete *interval*.

b) **Paquete *cardinal***. Que consta únicamente del **paquete *DC*** con la implementación del modelo DC así como de la subclase DCR de relaciones cardinales rectangulares. Incluye además los algoritmos de consistencia DIS-BCON (Sección 3.2) y DIS-BCSOL (Sección 3.3) y el algoritmo para generar todas las relaciones de la subclase de relaciones cardinales rectangulares convexas.

4. **Paquete *util***. Contiene utilidades software con interfaz gráfica que utilizan los algoritmos de los paquetes anteriores. Estas utilidades se describen en la siguiente sección.

En la Figura B.2 se muestra un diagrama UML de las principales clases de la librería. Como se puede ver, el software se ha diseñado para que se puede extender fácilmente con otros álgebras de relaciones que utilicen el algoritmo PC como técnica para decidir la consistencia de una red de restricciones.

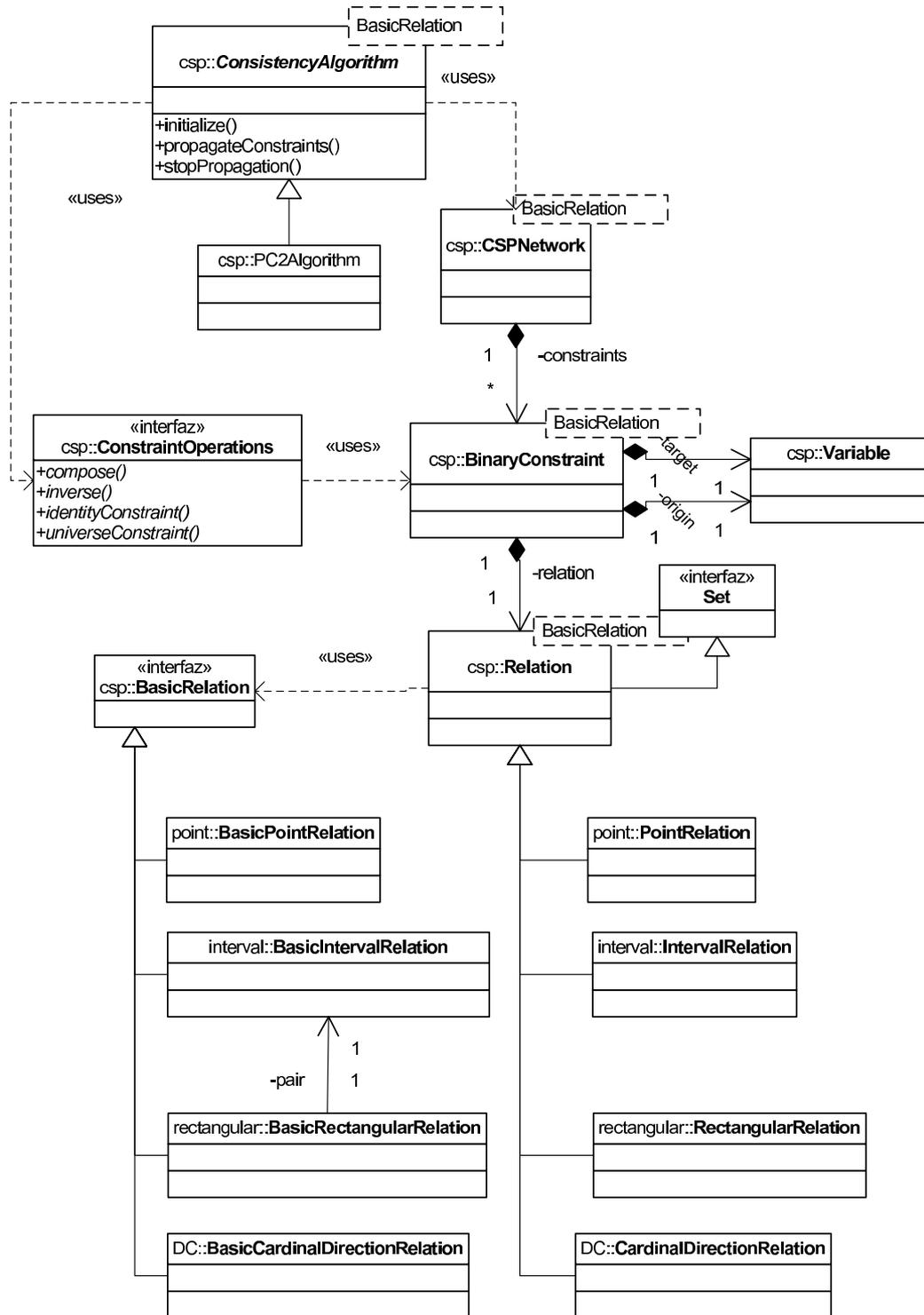


Figura B.2: Clases principales de la librería para razonamiento espacial basado en restricciones.

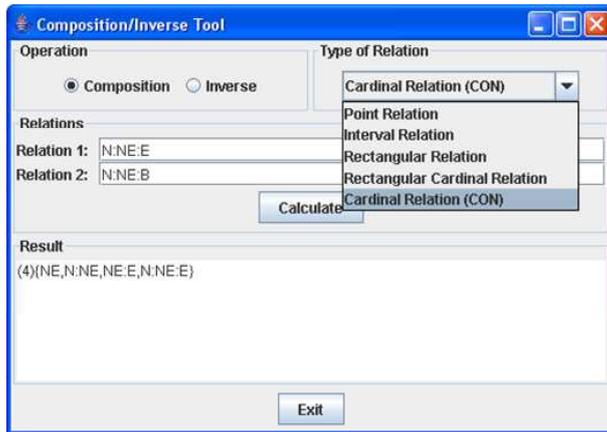


Figura B.3: Herramienta *Composition/Inverse Tool*.

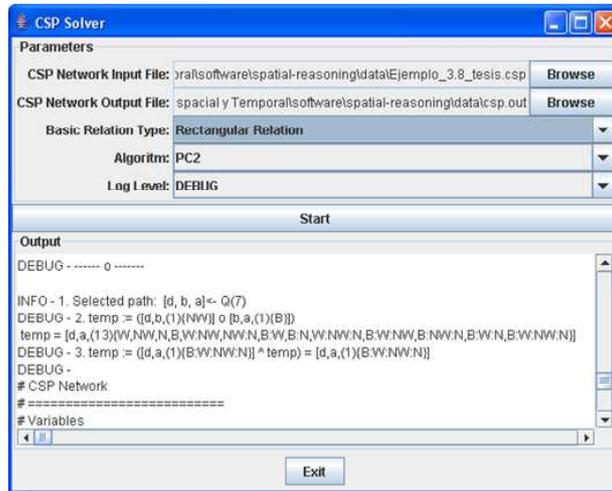


Figura B.4: Herramienta *CSP Solver*.

## B.2. Herramientas y Utilidades

*Composition/Inverse Tool* Se trata de una aplicación visual para calcular las operaciones de composición e inversa de varios tipos de álgebras de relaciones. La Figura B.3 muestra una captura de pantalla.

La forma de usarla es sencilla: en primer lugar se selecciona el tipo de operación que se desea calcular (composición o inversa), luego se selección el tipo de relación (de puntos, intervalos, rectangular, cardinal o cardinal rectangular) y por último se introducen las relaciones para las que se quieren calcular las operaciones. La sintaxis correcta para introducir las relaciones se describe en la Sección B.3.

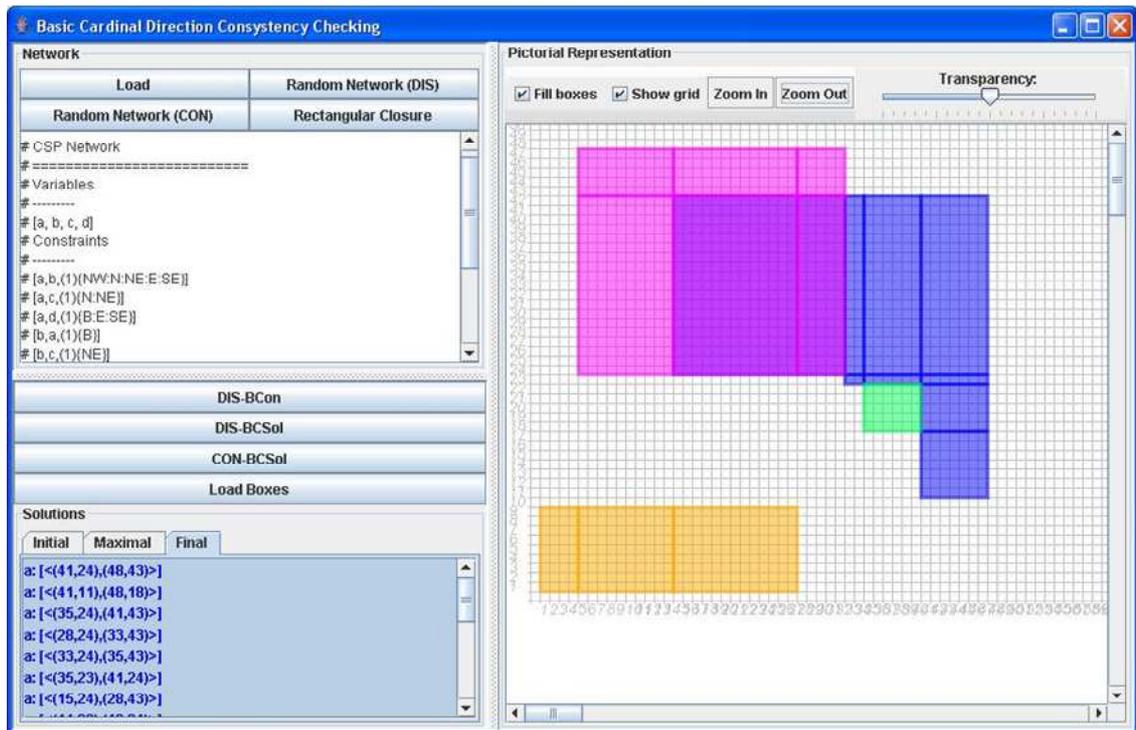


Figura B.5: Herramienta *Basic Cardinal Direction Consistency Tool*.

**CSP Solver** La herramienta *CSP Solver* es una aplicación para comprobar la consistencia sobre redes de restricciones de varios tipos de relaciones utilizando algoritmos de propagación como camino-consistencia. La Figura B.4 muestra la ventana principal de la herramienta. Los parámetros de entrada son el fichero que contiene la red de restricciones que se quiere resolver, el tipo de relaciones que contiene la red (de puntos, intervalos, rectángulos o cardinales) y el tipo de algoritmo de propagación de restricciones que se va a utilizar (PC2 o 4-Consistencia). Como salida, el programa genera un fichero con la red resultante de aplicar la propagación de restricciones (si no se han encontrado inconsistencias).

**Basic Cardinal Direction Consistency Tool** Esta herramienta (ver la Figura B.5) nos permite trabajar con los algoritmos de consistencia DIS-BCON y DIS-BCSOL sobre redes de restricciones con relaciones cardinales básicas. Además, nos permite presentar de forma visual las soluciones de las variables de región involucradas.

La herramienta nos permite generar aleatoriamente una red de restricciones con relaciones cardinales básicas, o nos permite leerla desde un fichero. Podemos elegir entre el algoritmo DIS-BCON o el algoritmo DIS-BCSOL para decidir la consistencia de la red. Una vez ejecutado el algoritmo es posible visualizar las soluciones iniciales, maximales y

finales de forma sencilla. La Figura B.5 muestra la ejecución del algoritmo DIS-BCSOL para la red de restricciones del 3.8

### B.3. Sintaxis de los ficheros de restricciones

A continuación describimos el formato de los ficheros de entrada para las herramientas anteriores. Básicamente, en cada línea se introduce una restricción distinta, pudiendo dejar líneas en blanco e introducir comentarios utilizando el símbolo # al principio de la línea. Los comentarios son ignorados.

La sintaxis BNF para las restricciones es la siguiente:

```
<RESTRICCIÓN> ::= <VARIABLE1>_<VARIABLE2>=<RELACIÓN>
<RELACIÓN> ::= <PAR> | <IAR> | <RAR> | <DC>
```

donde <VARIABLE1> y <VARIABLE2> pueden ser cualquier cadena alfanumérica que empiece por una letra y <RELACIÓN> es una cadena que representa la relación. Según el tipo de relación tendrá un formato u otro:

- **Relación del álgebra de puntos.** La sintaxis BNF es la siguiente:

```
<PAR> ::= [ '{' ] <BPAR> ( , <BPAR> ) * [ '}' ]
<BPAR> ::= '<' | '>' | '='
```

Ejemplos:

```
a_b = <,>
b_c = {<,>}
a_c = {<,>,>}
```

- **Relación del álgebra de intervalos.** La sintaxis BNF es la siguiente:

```
<IAR> ::= [ '{' ] <BIAR> ( , <BIAR> ) * [ '}' ]
<BIAR> ::= e|s|si|f|fi|o|oi|m|mi|d|di|b|bi
```

Ejemplos:

```
a_b = e,f,oi
b_c = {mi,di,b}
a_c = {oi,m}
```

- **Relación del álgebra de rectángulos.** Las relaciones rectangulares se pueden expresar de 3 formas distintas: mediante disyunción de relaciones rectangulares básicas, mediante el producto cartesiano de dos relaciones de intervalos o mediante relaciones cardinales rectangulares. En este último caso se realiza una traducción entre la relación cardinal (si es rectangular) a una relación del álgebra de rectángulos. La sintaxis BNF es la siguiente:

```

<RAR> ::= [<BRAR> | <BDC>] (, [<BRAR> | <BDC>])* | <IAR> 'x' <IAR>
<BRAR> ::= '('<BIAR>:<BIAR>')'

```

Ver el siguiente punto para la definición de la sintaxis de <BDC>.

Ejemplos:

```

a_b = (b:m), (s:f)
b_c = {b,f,d}x{di,fi}
a_c = NE:N,N:B:S, (s:f)

```

- **Relación del Modelo DC.** La sintaxis BNF es la siguiente:

```

<CR> ::= <BDC> (<BDC>)* | U
<BCR> ::= <DIR>(<DIR>)*
<DIR> ::= N | S | E | W | NE | NW | SE | SW | B

```

El símbolo U se utiliza para indicar que la relación cardinal universal, es decir, la formada por la disyunción de las 218 relaciones cardinales del modelo DC.

Ejemplos:

```

a_b = N:B:W
b_c = U
a_c = N:B:NE,SE:S:SW,B:E:SE:S

```



# Bibliografía

- [AEG94] A. I. Abdelmoty y B. El-Geresy. An intersection-based formalism for representing orientation relations in a geographic database. En *GIS '94: Proceedings of the Second ACM International Workshop On Advances In Geographic Information Systems*, páginas 44–51, 1994.
- [AEG95] A.I. Abdelmoty y B.A. El-Geresy. A general method for spatial reasoning in spatial databases. En *CIKM '95: Proceedings of the fourth international conference on Information and knowledge management*, páginas 312–317, New York, NY, USA, 1995. ACM.
- [Aie02] M. Aiello. Document image analysis via model checking. *AI\*IA Notizie*, 1:200–2, 2002.
- [All83] J.F. Allen. Maintaining knowledge about temporal intervals. *Communications of the ACM*, 26(11):832–843, 1983.
- [APHvB07] M. Aiello, I. Pratt-Hartmann, y J. van Benthem, editores. *Handbook of Spatial Logics*. Springer, 2007.
- [Apt03] K.R. Apt. *Principles of Constraint Programming*. Cambridge University Press, 2003.
- [AvB02] M. Aiello y J. van Benthem. A modal walk through space. *Journal of Applied Non-Classical Logic*, 12(3-4):319–363, 2002.
- [BCdC98] P. Balbiani, J.F. Condotta, y L.F. del Cerro. A model for reasoning about bi-dimensional temporal relations. En *KR '98: Proceedings of the Sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, páginas 124–130, 1998.
- [BCdC99] P. Balbiani, J.F. Condotta, y L.F. del Cerro. A new tractable subclass of the rectangle algebra. En *IJCAI '99: Proceedings of the Sixteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, páginas 442–447, 1999.
- [BCdC02] P. Balbiani, J.F. Condotta, y L.F. del Cerro. Tractability results in the block algebra. *Journal of Logic and Computation*, 12(5):885–909, 2002.

- [BCI97] B. Bennett, A.G. Cohn, y A. Isli. A logical approach to incorporating qualitative spatial reasoning into gis (extended abstract). En *COSIT '97: Proceedings of the International Conference on Spatial Information Theory*, páginas 503–504, London, UK, 1997. Springer-Verlag.
- [BCWZ02] B. Bennett, A.G. Cohn, F. Wolter, y M. Zakharyashev. Multi-dimensional modal logic as a framework for spatio-temporal reasoning. *Applied Intelligence*, 17(3):239–251, 2002.
- [Ben94] B. Bennett. Spatial reasoning with propositional logics. En Jon Doyle, Erik Sandewall, y Pietro Torasso, editores, *KR'94: Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, páginas 51–62. Morgan Kaufmann, San Francisco, California, 1994.
- [Ben96] B. Bennett. Modal logics for qualitative spatial reasoning. *Journal of the Interest Group in Pure and Applied Logic (IGPL)*, 4(1):23–45, 1996.
- [Ber66] R. Berger. The undecidability of the domino problem. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 66:1966, 1966.
- [BGMS07] D. Bresolin, V. Goranko, A. Montanari, y G. Sciavicco. On decidability and expressiveness of propositional interval neighborhood logics. En *LFCSS '07: Proceedings of the International Symposium on Logical Foundations of Computer Science*, páginas 84–99, Berlin, Heidelberg, 2007. Springer-Verlag.
- [BMG06] D. Bresolin, A. Montanari, y G. Sciavicco. An optimal decision procedure for right propositional neighborhood logic. *Journal of Automated Reasoning*, 4(3):305–330, 2006.
- [BMG<sup>+</sup>08] D. Bresolin, D. Monica, V. Goranko, Angelo Montanari, y G. Sciavicco. Decidable and undecidable fragments of halpern and shoham's interval temporal logic: Towards a complete classification. En *LPAR '08: Proceedings of the 15th International Conference on Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning*, páginas 590–604, Berlin, Heidelberg, 2008. Springer-Verlag.
- [BMS07] D. Bresolin, A. Montanari, y P. Sala. An optimal tableau-based decision algorithm for propositional neighborhood logic. En *STACS '07: Proceedings of the International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, páginas 549–560, 2007.
- [BMSS09] D. Bresolin, A. Montanari, P. Sala, y G. Sciavicco. A tableau-based system for spatial reasoning about directional relations. En *TABLEAUX '09: Proceedings of the 18th International Conference on Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods*, volumen 5607 de *Lecture Notes in Computer Science (subseries in Artificial Intelligence)*, páginas 123–137. Springer, 2009.

- [BvB06] P. Blackburn y J. van Benthem. *Handbook of Modal Logic*, capítulo Modal Logic: A Semantic Perspective, páginas 1–84. Elsevier North-Holland, 2006.
- [CF04] S. Cicerone y P. Di Felice. Cardinal directions between spatial objects: the pairwise-consistency problem. *Information Sciences*, 164(1–4):165–188, 2004.
- [CFH97] E. Clementini, P. Di Felice, y D. Hernández. Qualitative representation of positional information. *Artificial Intelligence*, 95(2):317–356, 1997.
- [CH01] A.G. Cohn y S.M. Hazarika. Qualitative spatial representation and reasoning: An overview. *Fundamenta Informaticae*, 46(1-2):1–29, 2001.
- [Con00] J.F. Condotta. The augmented interval and rectangle networks. En *KR '00: Proceedings of the Seventh International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, páginas 571–579, 2000.
- [CP05] P. Chandra y A.K. Pujari. Minimality and convexity properties in spatial csps. En *ICTAI '05: Proceedings of the 17th IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence*, páginas 589–593, Washington, DC, USA, 2005. IEEE Computer Society.
- [Dec03] R. Dechter. *Constraint Processing*. Morgan Kaufmann, 2003.
- [DGHP99] M. D’Agostino, D.M. Gabbay, R. Hähnle, y J. Posegga, editores. *Handbook of Tableau Methods*. Springer, 1999.
- [DMP91] R. Dechter, I. Meiri, y J. Pearl. Temporal constraint networks. *Artificial Intelligence*, 49(1-3):61–95, 1991.
- [DWM99] I. Düntsch, H. Wang, y S. McCloskey. Relations algebras in qualitative spatial reasoning. *Fundamenta Informaticae*, 39(3):229–248, 1999.
- [EF91] M.J. Egenhofer y R. Franzosa. Point set topological relations. *International Journal of Geographical Information Systems*, 5:161–174, 1991.
- [EGA01] B. El-Geresy y A.I. Abdelmoty. Qualitative representations in large spatial databases. *Database Engineering and Applications Symposium, International*, 0:0068, 2001.
- [Ege91] M.J. Egenhofer. Reasoning about binary topological relations. En *SSD '91: Proceedings of the Second International Symposium on Advances in Spatial Databases*, páginas 143–160, London, UK, 1991. Springer-Verlag.
- [Ege94] M.J. Egenhofer. Pre-processing queries with spatial constraints. *Remote Sensing*, 60:783–790, 1994.
- [EM95] M. J. Egenhofer y D. M. Mark. Naive geography. En *COSIT '95: Proceedings of the International Conference of Spatial Information Theory*, páginas 1–15, 1995.

- [ET98a] M. T. Escrig y F. Toledo. *Qualitative Spatial Reasoning: Theory and Practice — Application to Robot Navigation*. IOS Press, 1998.
- [ET98b] M.T. Escrig y F. Toledo. The use of clp(fd) extended with chrs for qualitative spatial reasoning and qualitative robot navigation. En *APPIA-GULP-PRODE '98: Proceedings of the Joint Conference on Declarative Programming*, páginas 365–378, 1998.
- [FCH99] J. Fernyhough, A.G. Cohn, y D.C. Hogg. Constructing qualitative event models automatically from video input. *Image and Vision Computing*, 18:81–103, 1999.
- [FG92] M. Finger y D. Gabbay. Adding a temporal dimension to a logic system. *Journal of Logic, Language and Information*, 1(3):203–233, 1992.
- [FG96] M. Finger y D. Gabbay. Combining temporal logic systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37(2):204–232, 1996.
- [FM91] H. Fujihara y A. Mukerjee. Qualitative reasoning about document structures. Technical Report TR 91-010, Computer Science Department, Texas and M University, 1991.
- [For97] K.D. Forbus. Qualitative reasoning. En *The Computer Science and Engineering Handbook*, páginas 715–733. CRC Press, 1997.
- [Fra96] A.U. Frank. Qualitative spatial reasoning: Cardinal directions as an example. *International Journal of Geographical Information Science*, 10(3):269–290, 1996.
- [GB06] W. Gatterbauer y P. Bohunsky. Table extraction using spatial reasoning on the css2 visual box model. En *AAAI '06: Proceedings of the Twenty-First National Conference on Artificial Intelligence*, 2006.
- [GE97] R. Goyal y M. Egenhofer. The direction-relation matrix: A representation of direction relations for extended spatial objects. En *UCGIS '97: Proceedings of the 1997 UCGIS Annual Assembly and Summer Retreat*, 1997.
- [GMS03] V. Goranko, A. Montanari, y G. Sciavicco. Propositional interval neighborhood temporal logics. *Journal of Universal Computer Science*, 9(9):1137–1167, 2003.
- [GMS04] V. Goranko, A. Montanari, y G. Sciavicco. A road map of interval temporal logics and duration calculi. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 14(1–2):9–54, 2004.
- [GMSS05] V. Goranko, A. Montanari, G. Sciavicco, y P. Sala. A general tableau method for propositional interval temporal logics: theory and implementation. *Journal of Applied Logic*, 2005. to appear.

- [GN02] A. Gerevini y B. Nebel. Qualitative spatio-temporal reasoning with rcc-8 and allen's interval calculus: Computational complexity. En *ECAI '03: Proceedings of the 15th European Conference on Artificial Intelligence, Lyon, France, July 2002*, páginas 312–316. IOS Press, 2002.
- [Goy00] R. Goyal. *Similarity assessment for cardinal directions between extended spatial objects*. PhD thesis, University of Maine, Dept. of Spatial Information Science and Engineering, 2000.
- [GPP95] M. Grigni, D. Papadias, y C.H. Papadimitriou. Topological inference. En *IJCAI '95: Proceedings of the 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, páginas 901–907, 1995.
- [GR02] A. Gerevini y J. Renz. Combining topological and size information for spatial reasoning. *Artificial Intelligence*, 137(1-2):1–42, 2002.
- [GS93] M.C. Golumbic y R. Shamir. Complexity and algorithms for reasoning about time: A graph-theoretic approach. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 40(5):1108–1133, 1993.
- [Gue89] H. Guesgen. Spatial reasoning based on Allen's temporal logic. Technical Report ICSI TR89-049, International Computer Science Institute, 1989.
- [Her93] D. Hernández. Maintaining qualitative spatial knowledge. En *COSIT '93: Proceedings of the Conference on Spatial Information Theory*, páginas 36–53, 1993.
- [Her94] D. Hernandez. *Qualitative Representation of Spatial Knowledge*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1994.
- [HS91] J. Halpern y Y. Shoham. A propositional modal logic of time intervals. *Journal of the ACM*, 38(4):935–962, 1991.
- [KL91] H.A. Kautz y P.B. Ladkin. Integrating metric and qualitative temporal reasoning. En *AAAI '91: Proceedings of the Ninth National Conference on Artificial Intelligence*, páginas 241–246, 1991.
- [KM03] J. Kong y K. Mang. Graph-based consistency checking in spatial information systems. En *HCC '03: Proceedings of the 2003 IEEE Symposium on Human Centric Computing Languages and Environments*, páginas 153–160, Washington, DC, USA, 2003. IEEE Computer Society.
- [KPHWZ08] R. Kontchakov, I. Pratt-Hartmann, F. Wolter, y M. Zakharyashev. On the computational complexity of spatial logics with connectedness constraints. En *LPAR '08: Proceedings of the 15th International Conference on Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning*, páginas 574–589, Berlin, Heidelberg, 2008. Springer-Verlag.

- [Kri59] S. A. Kripke. A completeness theorem in modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, 24:1–15, 1959.
- [Kui78] B. Kuipers. Modeling spatial knowledge. *Cognitive Science*, 2:129–153, 1978.
- [Lev96] S.C. Levinson. Frames of reference and Molyneux’s question: Cross-linguistic evidence. En P. Bloom, M. Peterson, L. Nadel, y M. Garrett, editores, *Language and Space*, páginas 109–169. The MIT Press, Cambridge, MA, 1996.
- [Li07] S. Li. Combining topological and directional information for spatial reasoning. En *IJCAI ’07: Proceedings of the 20th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, páginas 435–440, 2007.
- [Lig91] G. Ligozat. On generalized interval calculi. En *AAAI ’91: Proceedings of the Ninth National Conference on Artificial Intelligence*, páginas 234–240, Anaheim, CA, 1991.
- [Lig94] G Ligozat. Tractable relations in temporal reasoning: Pre-convex relations. En R Rodríguez, editor, *ECAI ’94: Proceedings of ECAI’94 Workshop on Spatial and Temporal Reasoning*, 1994.
- [Lig98a] G. Ligozat. Reasoning about cardinal directions. *Journal of Visual Languages and Computing*, 9(1):23–44, 1998.
- [Lig98b] Gérard Ligozat. ‘corner’ relations in allen’s algebra. *Constraints*, 3(2-3):165–177, 1998.
- [LM94] P.B. Ladkin y R.D. Maddux. On binary constraint problems. *Journal of the ACM*, 41:435–469, 1994.
- [LR97] P.B. Ladkin y A. Reinefeld. Fast algebraic methods for interval constraint problems. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 19(3-4):383–411, 1997.
- [LR04] G. Ligozat y J. Renz. What is a qualitative calculus? a general framework. En *PRICAI 2004: Proceedings of the 8th Pacific Rim International Conference on Artificial Intelligence*, volumen 3157 de *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 53–64. Springer, 2004.
- [LW06] C. Lutz y F. Wolter. Modal logics of topological relations. *Logical Methods in Computer Science*, 2(2), 2006.
- [LWJW05] Y. Liu, X. Wang, X. Jin, y L. Wu. On internal cardinal direction relations. En *COSIT ’05: Proceedings of the Conference On Spatial Information Theory*, páginas 283–299, 2005.

- [Mac77] A. Mackworth. Consistency in networks of relations. *Artificial Intelligence*, 8(1):99–118, 1977. Reprinted in *Readings in Artificial Intelligence*, B. L. Webber and N. J. Nilsson (eds.), Tioga Publ. Col., Palo Alto, CA, pp. 69-78, 1981. [This paper was honoured in *Artificial Intelligence* 59, 1-2, 1993 as one of the fifty most cited papers in the history of Artificial Intelligence.].
- [Mei96] I. Meiri. Combining qualitative and quantitative constraints in temporal reasoning. *Artificial Intelligence*, 87(1-2):343–385, 1996.
- [MJ90] A. Mukerjee y G. Joe. A qualitative model for space. En *AAAI '90: Proceedings of the Eighth National Conference on Artificial Intelligence*, páginas 721–727, 1990.
- [MNS07a] A. Morales, I. Navarrete, y G. Sciavicco. A new modal logic for reasoning about space: spatial propositional neighborhood logic. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 51(1):1–25, 2007.
- [MNS07b] A. Morales, I. Navarrete, y G. Sciavicco. Proof methods for spatial propositional neighborhood logic. En H.W. Guesguen, G. Ligozat, y R.V. Rodríguez, editoras, *IJCAI '07: Proceedings of the IJCAI'07 Workshop on Spatial and Temporal Reasoning*, páginas 80–89, 2007.
- [MNS07c] A. Morales, I. Navarrete, y G. Sciavicco. Using temporal logic for spatial reasoning: Temporalized propositional neighborhood logic. En *EUROCAST '07: Proceedings of the 11th International Conference on Computer Aided Systems Theory, Las Palmas de Gran Canaria, Spain, February 12-16, 2007, Revised Selected Papers*, volumen 4739 de *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 313–320. Springer, 2007.
- [Mon74] U. Montanari. Networks of constraints: fundamental properties and applications to picture processing. *Information Science*, 7:95–132, 1974.
- [Mon05] A. Montanari. Propositional interval temporal logics: Some promising paths. En *TIME '05: Proceedings of the International Symposium on Temporal Representation and Reasoning*, páginas 201–203, 2005.
- [MPS09] A. Montanari, G. Puppis, y P. Sala. A decidable spatial logic with cone-shaped cardinal directions. En *CSL '09: Proceedings of the 18th Annual Conference on Computer Science Logic*, páginas 394–408, 2009.
- [MR99] M. Marx y M. Reynolds. Undecidability of compass logic. *Journal of Logic and Computation*, 9(6):897–914, 1999.
- [MS06a] A. Morales y G. Sciavicco. Una comparativa entre el algebra de rectangulos y la logica SpPNL (*in Spanish*). En *CMPI '06: Proceedings of the Conference 'Campus Multidisciplinar en Perception e Inteligencia'*, páginas 576–587, 2006.

- [MS06b] A. Morales y G. Sciavicco. Using temporal logic for spatial reasoning: Spatial propositional neighborhood logic. En *TIME '06: Proceedings of the 13th International Symposium on Temporal Representation and Reasoning, 15-17 June 2006, Budapest, Hungary*, páginas 50–60, 2006.
- [MT44] J.C.C. McKinsey y A. Tarski. The Algebra of Topology. *Annals of Mathematics*, 45 (1):141–191, 1944.
- [NB95] B. Nebel y H.J. Bürckert. Reasoning about temporal relations: a maximal tractable subclass of Allen’s interval algebra. *Journal of the ACM*, 42(1):43–66, 1995.
- [NMS07] I. Navarrete, A. Morales, y G. Sciavicco. Consistency checking of basic cardinal constraints over connected regions. En *IJCAI '07, Proceedings of the 20th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, páginas 495–500, 2007.
- [NS02] B. Nebel y A. Scivos. Formal properties of constraint calculi for qualitative spatial reasoning. *KI*, 16(4):14–18, 2002.
- [NS06] I. Navarrete y G. Sciavicco. Spatial reasoning with rectangular cardinal direction relations. En *ECAI '06: Proceedings of the ECAI-06 Workshop on Spatial and Temporal Reasoning*, páginas 1–10, Riva del Garda (Italy), 2006.
- [NSM03] I. Navarrete, A. Sattar, y R. Marín. Deciding consistency of a point-duration network with metric constraints. En *TIME '03: Proceedings of the 10th International Symposium on Temporal Representation and Reasoning*, páginas 147–154. IEEE Computer Society, 2003.
- [NSWM02] I. Navarrete, A. Sattar, R. Wetprasit, y R. Marin. On point-duration networks for temporal reasoning. *Artificial Intelligence*, 140(1-2):39–70, 2002.
- [Nut99] W. Nutt. On the translation of qualitative spatial reasoning problems into modal logics. En *KI '99: Proceedings of the 23rd Annual German Conference on Artificial Intelligence*, páginas 113–124. Springer-Verlag, 1999.
- [PSTE95] D. Papadias, T. Sellis, Y. Theodoridis, y M.J. Egenhofer. Topological relations in the world of minimum bounding rectangles: a study with R-trees. En *SIGMOD '95: Proceedings of the International Conference on Management of Data, San Jose, California*, páginas 92–103, 1995.
- [PT97] D. Papadias y Y. Theodoridis. Spatial relations, minimum bounding rectangles, and spatial data structures. *International Journal of Geographical Information Science*, 11(2):111–138, 1997.
- [RCC92] D.A. Randell, Z. Cui, y A. Cohn. A spatial logic based on regions and connection. En B. Nebel, C. Rich, y W. Swartout, editores, *KR '92: Proceedings of the*

*Third International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, páginas 165–176, San Mateo, California, 1992. Morgan Kaufmann.

- [Ren99] J. Renz. Maximal tractable fragments of the region connection calculus: A complete analysis. En *IJCAI '99: Proceedings of the 16th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, páginas 448–454. Morgan Kaufmann, 1999.
- [Ren02] J. Renz. *Qualitative spatial reasoning with topological information*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 2002.
- [RL05] J. Renz y G. Ligozat. Weak composition for qualitative spatial and temporal reasoning. En Peter van Beek, editor, *CP '05: Proceedings of the 11th International Conference of Principles and Practice of Constraint Programming*, volumen 3709 de *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 534–548. Springer, 2005.
- [RM04] J. Renz y D. Mitra. Qualitative direction calculi with arbitrary granularity. En *PRICAI '04: Proceedings of the 8th Pacific Rim International Conference on Artificial Intelligence*, páginas 65–74. Springer, 2004.
- [RN01] J. Renz y B. Nebel. Efficient methods for qualitative spatial reasoning. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 15:289–318, 2001.
- [RN07] J. Renz y B. Nebel. Qualitative spatial reasoning using constraint calculi. En *Handbook of Spatial Logics*, páginas 161–215. Springer, 2007.
- [SA04] M.Y. Santos y L.A. Amaral. Mining geo-referenced data with qualitative spatial reasoning strategies. *Computers and Graphics*, 28(3):371 – 379, 2004.
- [SGA06] C.P.L. Schultz, H.W. Guesgen, y R. Amor. Computer-human interaction issues when integrating qualitative spatial reasoning into geographic information systems. En *CHINZ '06: Proceedings of the 7th ACM SIGCHI New Zealand chapter's international conference on Computer-human interaction*, páginas 43–51, New York, NY, USA, 2006. ACM.
- [Sha96] J. Sharma. *Integrated Spatial Reasoning in Geographic Information Systems: Combining Topology and Direction*. PhD thesis, University of Maine, 1996.
- [SK04] S. Skiadopoulos y M. Koubarakis. Composing cardinal direction relations. *Artificial Intelligence*, 152(2):143–171, 2004.
- [SK05] S. Skiadopoulos y M. Koubarakis. On the consistency of cardinal directions constraints. *Artificial Intelligence*, 163(1):91–135, 2005.
- [SL04] H. Sun y W. Li. Integrated qualitative spatial reasoning. En *ICCI '04: Proceedings of the International Conference on Computational Intelligence*, páginas 341–344, 2004.

- [SS07] S. Skiadopoulos y N. Sarkas. A family of directional relation models for extended objects. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 19(8):1116–1130, 2007. Member-Sellis, Timos and Member-Koubarakis, Manolis.
- [SSS03] M. Schaefer, E. Sedgwick, y D. Stefankovic. Recognizing string graphs in np. *Journal of Computer and System Sciences*, 67(2):365 – 380, 2003. Special Issue on STOC 2002.
- [Tar56] A. Tarski. Sentential calculus and topology. En *Logic, Semantics, Metamathematics*, capítulo 17. Oxford Clarendon Press, 1956. trans. J. H. Woodger.
- [Tar72] R. Tarjan. Depth-first search and linear graph algorithms. *SIAM Journal on Computing*, 1(2):146–160, 1972.
- [Tsa93] C. Tsang. *Foundations of Constraint Satisfaction*. Academic Press, New York, 1993.
- [vB92] P. van Beek. Reasoning about qualitative temporal information. *Artificial Intelligence*, 58:728–734, 1992.
- [vBB07] J. van Benthem y G. Bezhanishvili. Modal logics of space. En *Handbook of Spatial Logics*, páginas 217–298. Springer, 2007.
- [vBC90] P. van Beek y R. Cohen. Exact and approximate reasoning about temporal relations. *Computational Intelligence*, 6(3):132–147, 1990.
- [Ven90] Y. Venema. Expressiveness and completeness of an interval tense logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 31(4):529–547, 1990.
- [Ven91] Y. Venema. A modal logic for chopping intervals. *Journal of Logic and Computation*, 1(4):453–476, 1991.
- [Vil94] L. Vila. A survey on temporal reasoning in artificial intelligence. *AI Communications*, 7(1):4–28, 1994.
- [VK86] M.B. Vilain y H. Kautz. Constraint propagation algorithms for temporal reasoning. En *AAAI '86: Proceedings of the 5th National Conference of the American Association for Artificial Intelligence*, páginas 377–382. AAAI Press, 1986.
- [VKvB90] M. Vilain, H. Kautz, y P. van Beek. Constraint propagation algorithms for temporal reasoning: a revised report. En *Readings in qualitative reasoning about physical systems*, páginas 373–381. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 1990.
- [WD04] M. Worboys y M. Duckham. *GIS: A Computing Perspective*. CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 2<sup>a</sup> edición, 2004.

- [WdK91] B.C. Williams y J. de Kleer. Qualitative reasoning about physical systems: a return to roots. *Artificial Intelligence*, 51(1-3):1–9, 1991.
- [ZF96] K. Zimmermann y C. Freksa. Qualitative spatial reasoning using orientation, distance, and path knowledge. *Applied Intelligence*, 6(1):49–58, 1996.
- [ZLLY08] X. Zhang, W. Liu, S. Li, y M. Ying. Reasoning with cardinal directions: An efficient algorithm. En *AAAI '08: Proceedings of the Twenty-Second National Conference on Artificial Intelligence*, páginas 387–392, 2008.