

Medición indirecta de distancias y los significados de las nociones trigonométricas del profesorado de matemáticas en formación inicial

Gerardo CRUZ-MÁRQUEZ
Gisela MONTIEL-ESPINOSA

Datos de contacto:

Gerardo Cruz-Márquez
Cinvestav, México
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Gisela Montiel-Espinosa
Cinvestav, México
gmontiele@cinvestav.mx

Recibido: 16/03/2023
Aceptado: 09/10/2023

RESUMEN

El conocimiento del contenido es un aspecto crítico de la formación del profesorado de matemáticas. Uno de los fenómenos reportados en este campo son los limitados usos y significados que subyacen a la trigonometría escolar. Ante esta problemática, en el presente estudio nos propusimos un objetivo dual: diseñar e implementar una situación de medición indirecta de distancias orientada a provocar la confrontación y resignificación de las nociones trigonométricas por parte de un grupo de profesores de matemáticas en formación inicial; y confrontar la base epistemológica retomada como fundamento para dicho instrumento de intervención con la evidencia empírica. Llevamos a cabo el estudio a través de un ciclo de investigación basada en el diseño y haciendo uso de algunas de las herramientas de la teoría socioepistemológica. Como parte de los resultados damos evidencia de dos momentos de confrontación y de resignificación experimentados por los participantes –asociados al significado lineal y aritmético de las nociones trigonométricas–, así como de la viabilidad de la hipótesis epistemológica de partida, y de algunos fenómenos didácticos adicionales.

PALABRAS CLAVE: trigonometría; profesor de matemáticas en formación inicial; resignificación; uso situado; significado lineal y aritmético; trabajo geométrico.

Indirect measurement of distances and pre-service mathematics teachers' meanings of trigonometric notions

ABSTRACT

Content knowledge is a critical aspect of a mathematics teacher's education. One of the phenomena reported in this regard is the limited uses and meanings of trigonometric notions underlying school trigonometry. Faced with this problem, in this study we proposed a dual objective: to design and implement a situation of indirect measurement of distances oriented to elicit the confrontation and re-signification of trigonometric notions by a group of pre-service mathematics teachers; and to confront the epistemological proposal taken as a basis for the intervention instrument with empirical evidence. We carried out the study through a cycle of research design and making use of several of the socio-epistemological theory's tools. As part of the results, we provide evidence of: two moments of confrontation and re-signification experienced by the participants –associated with the linear and arithmetic meaning of trigonometric notions–; the viability of the starting epistemological hypothesis; and, some additional didactic phenomena.

KEYWORDS: trigonometry; pre-service mathematics teacher; re-signification; situated use; linear and arithmetic meaning; geometric work.

Introducción

En la literatura especializada en Matemática Educativa, el conocimiento del contenido matemático es ampliamente reconocido como uno de los atributos críticos en la formación del profesorado de matemáticas de educación secundaria y media superior¹. No obstante, gran parte de estos estudios también coinciden en lo problemático, fragmentado o inadecuado que es dicho conocimiento (v. g. Liljedahl et al., 2009; Ponte & Chapman, 2006; Tsamir, 2007).

Los estudios específicos en el área de trigonometría no son la excepción. En las últimas décadas, se han reportado diversos fenómenos acerca del conocimiento trigonométrico del profesorado de matemáticas. Entre estos: bajos niveles de comprensión y manejo memorístico de las nociones trigonométricas –razón, función y serie– (v. g. Araya et al., 2007), indistinción de dichas nociones (v. g. Montiel & Jácome, 2014), compleja e indiscutida introducción del círculo unitario (v. g. Brito & Barbosa, 2004; Moore et al., 2016), y el uso exclusivo como herramientas técnicas de las nociones trigonométricas.

Respecto a este último, Montiel y Jácome (2014), en un estudio llevado a cabo con profesores de matemáticas del nivel medio superior en servicio, reconocen que el uso

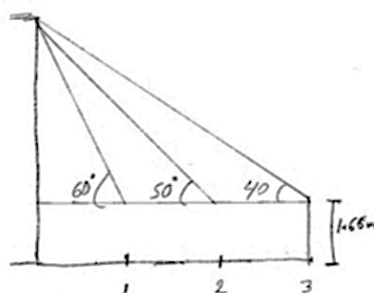
¹ Utilizamos la nomenclatura de niveles educativos usual en México: educación secundaria (12-15 años) y media superior (15-18 años).

exclusivo como herramientas técnicas para el cálculo de un valor faltante deviene en una marcada *disociación entre la trigonometría escolar y la geometría*, la admisión de un significado lineal y la promoción de un significado aritmético para las nociones trigonométricas.

El *significado lineal* refiere al tratamiento lineal que la trigonometría escolar admite para la relación ángulo-distancia en el triángulo, consecuencia de no analizar explícitamente la naturaleza de esta (Figura 1). Mientras que el *significado aritmético* hace alusión a la concepción de la razón trigonométrica como solo un proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados del triángulo, producto de la centración que la trigonometría escolar tiene sobre el dominio aritmético de dichas nociones.

Figura 1

Bosquejo de uno de los participantes del estudio, que refleja una concepción lineal entre el ángulo de elevación y el lado adyacente a este



Nota. Adaptada de Significados trigonométricos en el profesor (p. 1194), por G. Montiel y G. Jácome, 2014, *Bolema. Boletim de Educação Matemática*, 28(50).

Si bien el uso como herramienta técnica convierte a las nociones trigonométricas en instrumentos esenciales para muchos espacios escolares y campos de aplicación (Montiel, 2011), no asegura una comprensión robusta de estas (Weber, 2005), además de producir –como hemos visto– significados limitados y conflictivos respecto a las nociones trigonométricas. Así, un profesor puede lograr un desempeño matemáticamente correcto ante las tareas típicamente escolares relativas a las razones trigonométricas y de igual forma manifestar el significado lineal y aritmético asociado a estas; puede resolver ejercicios trigonométricos mas no desarrollar un pensamiento trigonométrico ante el manejo del triángulo, sus elementos y las relaciones entre estos (Montiel & Jácome, 2014).

Ante esta problemática, como menciona Cavey y Berenson (2005), uno de los principales retos de la formación inicial actualmente es preparar al profesorado de matemáticas para que enseñe de una forma que nunca se le ha enseñado. Lo que –según las autoras– “implica necesariamente la tarea de *desafiar y ampliar* las ideas de los futuros profesores sobre las *matemáticas escolares* (las matemáticas que enseñarán)” (p. 172; traducción propia, énfasis añadido) y no solo del cómo lo harán.

Convenimos en esta idea. Desde nuestra visión, el hablar de construcción de significados ausentes en el discurso escolar implica cambiar no solo la forma en cómo

se enseña, sino también el qué se enseña en la clase de matemáticas; esto representa un cambio a nivel epistemológico que debe hacerse y estudiarse con detalle y profundidad. La investigación aquí reportada apunta precisamente en esa dirección.

Más específicamente, llevamos a cabo una investigación de diseño con dos objetivos, uno de orientación pragmática: construir e implementar una situación de aprendizaje dedicada a provocar la confrontación y resignificación de las nociones trigonométricas por parte de un grupo de profesores de matemáticas en formación inicial; y otro de orientación teórica: confrontar la hipótesis epistemológica que fundamenta el instrumento de intervención con la evidencia empírica.

Elementos teóricos

Uso situado y resignificación de las nociones trigonométricas

Con el fin de aportar a la construcción de significados más robustos y cercanos a los que le son propios al conocimiento trigonométrico, que el profesorado puede experimentar para después favorecer en su práctica profesional, adoptamos la perspectiva teórica desde la que se identificaron los usos y significados limitados que se admiten y promueven en la trigonometría escolar: la teoría socioepistemológica – también denominada socioepistemología–.

Las investigaciones que marcan el inicio de esta teoría se dan a final de la década de los noventa, dentro del periodo que se denominó “el giro a lo social” en la investigación en Matemática Educativa (Lerman, 2000). La dimensión social que integró la socioepistemología al estudio del sistema didáctico se caracterizó por cambiar el foco de atención “de los objetos a las prácticas”. Así, para esta teoría el significado (matemático) no es un atributo de los objetos matemáticos formales *per se*, sino un emergente social derivado de su *uso situado* (Cantoral et al., 2015a; Cantoral et al., 2014).

El uso situado refiere a las formas en que es empleada una noción matemática en un contexto específico (Cabañas-Sánchez & Cantoral, 2012). Estos usos se reconocen *funcionales* porque dan respuesta a demandas matemáticas de las tareas de individuos en sus entornos (Torres-Corrales & Montiel-Espinosa, 2021; Tuyub & Buendía, 2017), pudiendo ser estos contextos escolares o no.

El uso situado de una noción matemática se explica a través de las *prácticas* y el *contexto* que lo enmarca. Por un lado, para dar cuenta del desarrollo de prácticas, la teoría propone la coordinación de acciones, actividades y prácticas socialmente compartidas, reguladas por prácticas de referencia y prácticas sociales (Cantoral, 2020).

Dada la naturaleza experimental de la investigación que aquí se reporta, utilizamos exclusivamente la *progresión pragmática de la anidación de prácticas* –sus tres niveles inferiores– (Figura 2), por permitirnos describir, con base el análisis de la actividad matemática evidenciada por el sujeto –del dato observable–, los usos que hacen de las nociones matemáticas, así como de los procesos de confrontación y resignificación que atraviesan.

Figura 2

Progresión pragmática de la anidación de prácticas



Nota. Adaptada de *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento* (p. 334), por R. Cantoral, 2013, Gedisa.

La lectura ascendente de esta fracción del modelo parte de las *acciones* objetivas e intencionadas del sujeto ante el medio. Con objetivas nos referimos a que estas acciones –sean físicas, verbales o mentales– se evidencian necesariamente a través de comportamientos observables: el actuar, expresiones orales o escritas, gestos, etcétera. Mientras que con intencionadas aludimos a que partimos del hecho de que dichas acciones no son instintivas o inconscientes, sino que tienen un propósito, una justificación racional vinculada a los conocimientos del sujeto y a la tarea matemática en cuestión –aunque esta no siempre sea expresa–.

El sujeto al que nos referimos puede ser un individuo o un colectivo, contemporáneo o histórico (Cantoral, 2020). Y con medio o contexto aludimos a las condiciones materiales y simbólicas determinantes para la actividad matemática del sujeto, que puede incluir desde instrumentos físicos como un compás hasta elementos abstractos como el lenguaje.

En el segundo nivel de la progresión pragmática de la anidación de prácticas se ubican las *actividades*, caracterizadas aquí como organizaciones de acciones útiles para atender la tarea en cuestión, bajo las condiciones contextuales dadas. Finalmente, la organización de actividades constituye *prácticas socialmente compartidas*, en cuanto sistemas de acción que el sujeto lleva a cabo de manera deliberada e iterada al atender un tipo de tarea.

Por otro lado, como se ha dicho y queda en evidencia en las caracterizaciones previas, el contexto juega un papel determinante en la explicación del proceso de significación –de construcción de significado– de las nociones matemáticas a través de su uso situado. En efecto, la socioepistemología adopta la postura de que el sujeto actúa y piensa tanto en función como en relación con el contexto. Para dar cuenta de ello, las investigaciones realizadas desde esta perspectiva teórica suelen describir el contexto de la actividad matemática del sujeto en diversos niveles coordinados, que se estructuran y nombran de acuerdo con cada objeto de estudio (v. g. López-Acosta & Montiel-Espinosa, 2022; Torres-Corrales & Montiel-Espinosa, 2021).

Pese a sus naturales matices, el propósito de estas descripciones jerarquizadas del contexto es el mismo: evidenciar cómo distintas variables culturales y sociales influyen al conocimiento puesto en uso; enfatizando el *contexto de la situación específica*, que refiere a la actividad matemática concreta que determina la tarea dentro de la cual

emerge un saber (López-Acosta & Montiel-Espinosa, 2022).

En suma, de acuerdo con la teoría socioepistemológica, el sujeto construye significados acerca de las nociones matemáticas a través del uso situado del conocimiento matemático –descrito por anidaciones de prácticas contextualizadas–. De forma constante, estos significados se ponen en funcionamiento en tareas y contextos inéditos para el sujeto, lo que le exige la adquisición de nuevas prácticas y/o la adaptación de las prácticas previas, y –consecuentemente– la confrontación y enriquecimiento de sus significados iniciales. Esta continua dinámica de significación se ha denominado en la socioepistemología como *resignificación*.

Recientes investigaciones han mostrado que los procesos de resignificación de las nociones trigonométricas son procesos largos y complejos. Por ejemplo, Scholz (2020), en un estudio sobre el desarrollo del pensamiento trigonométrico con estudiantes de educación media superior en México, concluye que el significado lineal asociado a la relación ángulo-distancia aparece en múltiples tareas de las situaciones-problema trabajadas, pese a que el diseño mismo favorece su confrontación.

En consecuencia, para efectos de esta investigación, optamos por utilizar los términos *momento de confrontación* y *momento de resignificación*. Con el primero nos referimos a instantes específicos en los cuales los significados de los participantes respecto a las nociones trigonométricas entran en conflicto y/o se muestran insuficientes para resolver una tarea concreta. Mientras que con el segundo aludimos a cuando, consecuencia de la actividad matemática propuesta, los significados de los participantes acerca de las nociones trigonométricas comienzan a modificarse y/o enriquecerse, de tal suerte que permiten atender la tarea con la que sus significados se vieron confrontados inicialmente.

El cambio epistemológico para lo trigonométrico

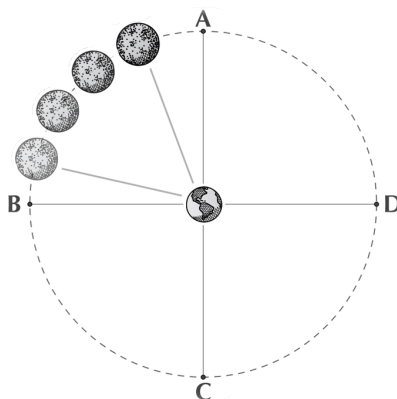
Para promover la resignificación de las nociones trigonométricas por parte del profesorado de matemáticas en formación inicial, requerimos de una base epistemológica alternativa, de usos de la matemática distintos a los que habitan la escuela, que le son propios a las nociones trigonométricas en espacios funcionales y que se han diluido, transformado o perdido en su introducción al sistema escolar (Montiel & Buendía, 2013). Retomamos esta base del estudio histórico-epistemológico realizado por Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa (2022).

El análisis de distintos aspectos de la historia de las matemáticas y de su utilización en la intervención didáctica en general (v. g. Barbin et al., 2020) y en la formación inicial del profesorado de matemáticas en particular (v. g. Guacaneme et al., 2019) constituyen áreas sólidas y prometedoras en la disciplina. En el caso del estudio que se retoma, a través del análisis de la tabla trigonométrica contenida en los preliminares matemáticos del *Almagesto* de Ptolomeo, los autores plantean –a manera de hipótesis epistemológica– que la medición indirecta de distancias en el contexto del círculo permite, mediante el trabajo geométrico sobre nociones como el círculo, el triángulo rectángulo y la proporcionalidad, acercar la geometría a la trigonometría escolar, así como confrontar el significado lineal y aritmético asociado a las nociones trigonométricas.

La *medición indirecta de distancias* es, de acuerdo con Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa (2022), el uso primigenio de las nociones trigonométricas, entendidas como la explicación sistemática y cuantitativa de la relación matemática existente entre un ángulo y las distancias que este subtiende. Este uso alude al tipo de tareas que requiere el cálculo de la distancia entre dos puntos de un círculo conociendo el ángulo central que los separa; situación que enfrentó Ptolomeo al construir su explicación de los movimientos planetarios –bajo la cosmovisión aristotélica del universo– (Figura 3).

Figura 3

Problemática astronómica de la época de Ptolomeo



Nota. Retomada de *De Sirio a Ptolomeo: una problematización de las nociones trigonométricas* (p. 106), de G. Cruz-Márquez, 2018, [Tesis de Maestría].

El *trabajo geométrico*, por su parte, refiere a la sinergia de usos que Ptolomeo da a las nociones y procedimientos geométricos, especialmente la proporcionalidad, el círculo y el triángulo rectángulo –sus elementos, relaciones y propiedades–, al construir su tabla trigonométrica: 1) como herramientas de construcción, 2) como herramientas teóricas y 3) como herramientas aritmético-algebraicas.

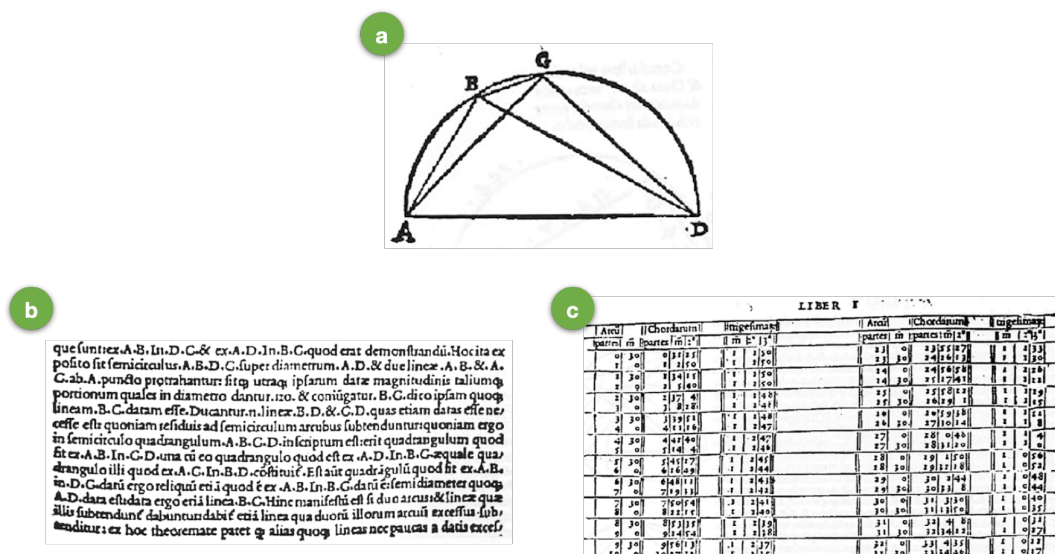
El primero de estos usos remite a cuando Ptolomeo declara y/o agrega los objetos geométricos que van a intervenir en una proposición (Figura 4a), el segundo a cuando formula y prueba relaciones geométricas existentes entre los objetos declarados y contruidos anteriormente (Figura 4b), y el tercero a cuando utiliza implicaciones aritméticas y/o algebraicas de las relaciones geométricas construidas para agregar nuevos pares ángulo-cuerda a su tabla (Figura 4c).

Un elemento adicional que retomamos del estudio histórico para la construcción de nuestra situación de aprendizaje son los tres *momentos de trabajo* requeridos por Ptolomeo para construir su tabla trigonométrica: 1) el establecimiento de seis primeras cuerdas, 2) la construcción de cuatro métodos geométricos y 3) una aproximación para las cuerdas ‘pares’. En las primeras cuerdas Ptolomeo identifica los seis primeros pares ángulo-cuerda de su tabla, las cuerdas subtensas por ángulos centrales de 180° , 120° , 90° , 72° , 60° y 36° . En los métodos geométricos el autor propone, prueba y hace uso de cuatro métodos que constituyen un puente entre los seis pares que ya conoce y los que requiere para ampliar su tabla. Finalmente, en las

cuerdas 'pares' Ptolomeo aproxima las cuerdas subtensas por ángulos centrales de 1° y 0.5° , que le son necesarias para completar su tabla.

Figura 4

Trabajo geométrico en cuanto sinergia de usos de las nociones geométricas



Nota. Retomada de Medición indirecta de distancias y el trabajo geométrico en la construcción de las nociones trigonométricas (p. 100), de G. Cruz-Márquez y G. Montiel-Espinosa, 2022, *Acta Scientiae*, 24(4). Originales en Saiz (2003).

Elementos metodológicos

Como adelantamos, la presente investigación sigue la estructura general de un ciclo de investigación basada en el diseño: preparación, experimentación y análisis retrospectivo (Cobb & Gravemeijer, 2008).

Este tipo de investigación permite “analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza” (Molina et al., 2011, p. 76). En este sentido, combina dos propósitos: el diseño e implementación de situaciones de aprendizaje, y el desarrollo de explicaciones teóricas empíricamente fundamentadas, relativas a un área específica de aprendizaje (Cobb et al., 2003; Molina et al., 2011).

Estas características son congruentes con los objetivos generales de nuestro estudio: construir e implementar una situación de aprendizaje dedicada a provocar la confrontación y resignificación de las nociones trigonométricas, y confrontar la hipótesis epistemológica que fundamenta el instrumento de intervención con la evidencia empírica.

A continuación, reseñamos de forma breve las tres etapas de la investigación.

Preparación

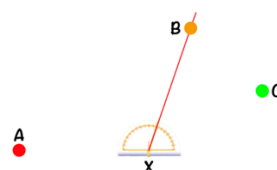
Conforme con el estudio histórico retomado, la situación-problema solicitaba a los participantes obtener la distancia entre objetos cuya medición directa resultaba impráctica o imposible con las condiciones y herramientas disponibles. Además, ofrecía un punto de observación desde el cual se aseguraba la equidistancia de esos objetos, ya que ello vuelve al ángulo de separación entre los mismos una herramienta valiosa para la solución.

Así, colocamos en el suelo del lugar en el que se realizó la experimentación un punto marcado como X y –a una distancia de 3 metros de ese punto– tres objetos, etiquetados como A, B y C (Figura 5).

Figura 5

Situación-problema de medición indirecta de distancias

Situación Problema. A tres metros del punto en el suelo etiquetado como X, se encuentran tres objetos, marcados como A, B y C, ¿cuál es la distancia entre los objetos A y B y entre B y C?



El propósito de la situación de aprendizaje fue entonces calcular las distancias entre los objetos A y B y entre los objetos B y C, con base en el ángulo ‘central’ –con vértice en el punto X– que los separa. La situación de aprendizaje² constó de tres bloques de tareas: la situación-problema, el trabajo geométrico y la vuelta a la situación-problema.

En el bloque 1 se presentó a los profesores participantes la situación-problema de medición indirecta de distancias y se les solicitó que: 1) aproximaran los ángulos AXB y BXC, contando con un set de instrumentos geométricos (regla, compás, transportador y escuadras), un puntero láser, una calculadora, lápices y papel; 2) resolvieran la situación-problema de forma libre, utilizando todas las estrategias y herramientas matemáticas de las que dispusieran; y 3) construyeran un modelo a escala de la situación-problema propuesta.

El bloque 2 se planteó a partir de los resultados del estudio histórico. Se compuso de cuatro tareas en las que se esperaba que los participantes: 1) calcularan tres primeros pares ángulo-distancia, cuando los ángulos centrales miden 180° , 90° y 60° –un homólogo al primer momento de trabajo identificado en el estudio histórico–; 2) compararan los casos particulares calculados anteriormente; y 3) construyeran dos métodos geométricos útiles para calcular la distancia entre los objetos en escenarios más complejos –un homólogo al segundo momento de trabajo identificado–.

Por último, en el bloque 3, se presentó una única tarea. Esta pretendía retomar la situación-problema y resolverla con base en los pares ángulo-distancia calculados y los

² Con el afán de ser concisos y de mantener abiertos los datos y recursos de la investigación, dispusimos la situación de aprendizaje diseñada en una base de datos que reúne los archivos complementarios del estudio: <https://doi.org/10.7910/DVN/J07537>

métodos geométricos construidos en el bloque anterior.

Experimentación

Trabajamos con ocho profesores en formación inicial –cuatro hombres y cuatro mujeres– del segundo año del Profesorado en Matemáticas que oferta la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM), en Tegucigalpa, Honduras. Todos ellos recién comenzaban la asignatura de “Trigonometría y Geometría Analítica” y participaron de forma voluntaria.

La situación de aprendizaje diseñada se presentó como un trabajo extraclase, constó de una sesión presencial de tres horas, de la cual se tomaron registros en video, audio, fotografía y las respuestas escritas (guiones de trabajo) de los participantes – esta última como fuente de información principal–.

Dos observaciones son necesarias acerca de la implementación. La primera es que las tres horas asignadas fueron insuficientes para completar la situación de aprendizaje, quedando sin atender el bloque 3 y parte de la tarea 4 del bloque 2. La segunda es que, pese a contar con ocho participantes, –al no haber restricción al respecto– dos profesoras decidieron trabajar juntas, por lo que solo se reportan 7 guiones de trabajo³.

Análisis

Parte del objetivo del artículo es provocar y describir los momentos de confrontación y resignificación de las nociones trigonométricas que atraviesan los profesores en formación inicial participantes al trabajar la situación de aprendizaje diseñada.

Para esto requerimos, desde la perspectiva teórica asumida, poner atención al uso que –en términos de *acciones* y *actividades*– hacen los profesores en formación inicial de las nociones y procedimientos matemáticos. Así, al analizar las respuestas de los participantes a cada una de las tareas de la situación de aprendizaje nos preguntamos –para el nivel de *acciones*– *qué hacen* los participantes y *cómo lo hacen*; y, siguiendo la progresión de prácticas expuesta, para entender la organización de estas acciones –en *actividades*– nos preguntamos *para qué lo hacen*. A modo de ejemplo, y por cuestión de espacio, mostramos solo la síntesis grupal del análisis de las respuestas de los participantes al inciso A de la actividad 1 del bloque 2 (Tabla 1).

Una observación pertinente es que, en investigaciones empíricas de este tipo, al analizar la actividad matemática de los participantes, es usual que la descripción del nivel de *actividad* –asociado al *para qué lo hacen*– coincida con la intencionalidad de la tarea en cuestión; esto es, lo que se le pide hacer al sujeto suele justificar u organizar sus *acciones* –como sucede en el ejemplo anterior–. Sin embargo, siempre hay matices de la interacción entre diseño e involucrados –participantes e investigador, en este caso– que resultan relevantes para caracterizar el nivel de prácticas alcanzado o la

³ También dispusimos los guiones de trabajo de los participantes en la base de datos del estudio: <https://doi.org/10.7910/DVN/I07537>

práctica misma.

Tabla 1

Ejemplo: síntesis grupal del análisis realizado – Actividad 1A, bloque 2

Actividad 1A

Bloque Segundo de Actividades

Actividad 1.

- Considerando la situación problema, ¿cuál sería la distancia entre los objetos A y B, si el ángulo AXB fuera 180° ?

Intencionalidad

Pretende la construcción de un primer par ángulo-cuerda para la situación problema (crd $180^\circ = 6m$).

Respuestas

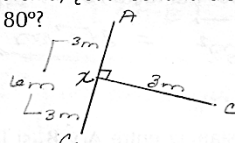
Todos los participantes (7/7: P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7) llegan a la conclusión de que, en la situación problema, cuando el ángulo con vértice en X que separa a dos objetos A y B mide 180° , la distancia entre dichos objetos es 6m.

Otras observaciones

Tres de ellos (3/7: P2, P3, P6. Se muestra P6) complementan su respuesta con figuras; estas aluden a que cuando el ángulo central es 180° los lados de este son colineales:

- Considerando la situación problema, ¿cuál sería la distancia entre los objetos A y B, si el ángulo AXB fuera 180° ?

cuando $\neq 180^\circ$
 $d = 6m$



Análisis

Qué hacen: establecen un par ángulo-cuerda.

Cómo lo hacen: introducen una construcción geométrica que representa el caso y utilizan una propiedad 'básica' de esta (la colinealidad de los lados de dos ángulos suplementarios consecutivos) como argumento de un proceder aritmético ($3m + 3m = 6m$).

Para qué lo hacen: construir un primer par ángulo-cuerda para la situación-problema (crd $180^\circ = 6m$).

Resultados

Dado el objetivo de este artículo, dividimos esta sección en cuatro apartados: en el primero hablamos de los momentos de confrontación que identificamos producto del análisis de la actividad matemática de los profesores en formación inicial, en el segundo acerca del trabajo geométrico que promovió la situación de aprendizaje diseñada, en el tercero de los momentos de resignificación que atravesaron los participantes, y

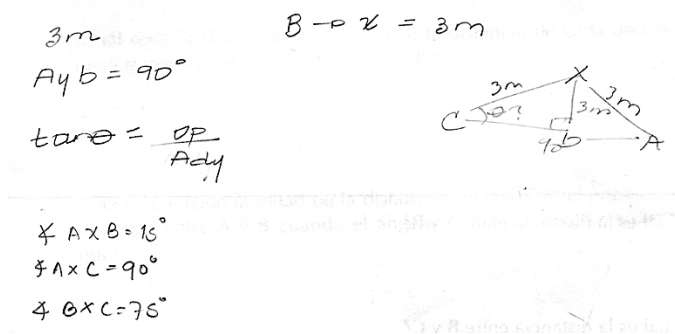
finalmente aludimos a otros fenómenos que –aunque no eran el centro de este estudio– se entrevén en los resultados obtenidos.

Momentos de confrontación

A través del análisis de la actividad matemática de los profesores en formación inicial identificamos dos momentos de confrontación. El primero es relativo al significado aritmético asociado a las razones trigonométricas. Así, durante la actividad 2 del bloque 1, ninguno de los profesores en formación inicial calculó las distancias requeridas ni desarrolló una estrategia clara para obtenerlas; no obstante, dos de los participantes relacionaron explícitamente el cálculo de la razón tangente a la situación-problema (Figura 6).

Figura 6

Actividad 2 del bloque 1, participante 6



Al cuestionarles sobre el uso de dicha noción, uno de los participantes explicita que la ausencia de ángulos rectos –y por ende de triángulos rectángulos– les impide utilizarla para resolver la situación-problema planteada.

Entendemos este hecho como un momento de confrontación con el significado aritmético asociado a las razones trigonométricas dado que, si comprendemos dichas nociones como solo un proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados del triángulo rectángulo, para utilizarlas requerimos de un triángulo rectángulo explícito del cual se nos den al menos dos magnitudes –entre ellas un lado– y se nos pida que encontremos una tercera magnitud –lado o ángulo–.

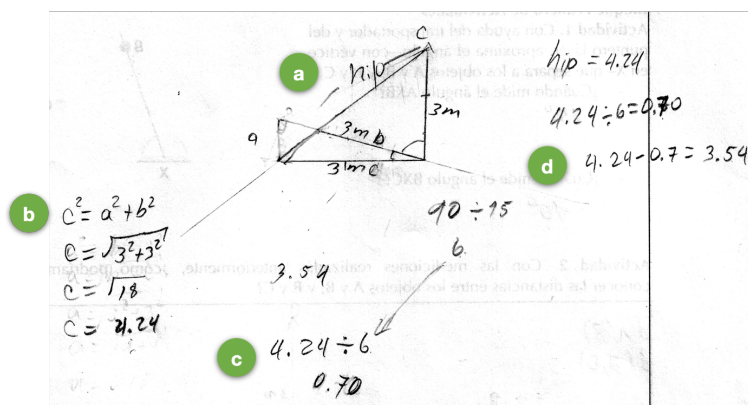
Sin embargo, no hay triángulos con estas características en la configuración inicial de la situación-problema, se requieren procesos de reconfiguración geométrica y de deducción de magnitudes con base en propiedades geométricas para producir dichas condiciones. Por lo cual, el análisis de la actividad matemática evidencia el significado aritmético en el profesorado en formación inicial y la insuficiencia de este para resolver situaciones de medición indirecta de distancias como la propuesta.

El segundo momento de confrontación identificado es relativo al significado lineal asociado a la relación ángulo-distancia en el triángulo. Así, en la actividad 3 del bloque 1, tres participantes modelaron la situación-problema utilizando triángulos

rectángulos. Estos participantes, además, plantearon –de manera conjunta– una estrategia de resolución de la situación-problema con base en dicho modelo (Figura 7).

Figura 7

Actividad 3 del bloque 1, participante 3



Podemos sintetizar la estrategia construida por los participantes de la siguiente manera: primero, modelan la situación-problema con un triángulo rectángulo (Figura 7a); luego, parten de la hipótesis de que si el ángulo AXC (cuya medida es aprox. 90°) ‘es seis veces mayor’ que el ángulo AXB (cuya medida es aprox. 15°), entonces, la distancia entre los objetos A y C ‘también debería ser seis veces mayor’ que la distancia entre A y B; así, calculando la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo construido (Figura 7b) y dividiéndola entre seis, calculan la distancia entre los objetos A y B (Figura 7c); finalmente, calculan los cinco sextos de la longitud de la hipotenusa, que representa –de acuerdo con su hipótesis– la distancia entre los objetos B y C (Figura 7d).

Entendemos este hecho como un momento de confrontación con el significado lineal dado que la estrategia expuesta por los participantes se basa en el uso del triángulo rectángulo para modelar la situación-problema –obviando la equidistancia de los objetos– y en la consideración de que la naturaleza de la relación ángulo-distancia en el triángulo es lineal. En consecuencia, el análisis de la actividad matemática de los participantes también evidencia el significado lineal en el profesorado en formación inicial y la insuficiencia de este para resolver situaciones de medición indirecta de distancias como la propuesta.

Trabajo geométrico

El análisis de la actividad matemática evidenció momentos de trabajo geométrico en casi todas las actividades del segundo bloque. En las actividades 1, 2 y 3 de bloque 2, por ejemplo, todos los participantes calcularon la distancia que habría entre dos objetos –bajo las condiciones de la situación-problema– si el ángulo central que los separara fuera 180° , 90° y 60° , respectivamente. Algunos de ellos incluyeron bosquejos

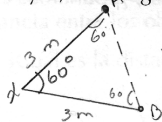
(Figura 8a) y justificaciones geométricas explícitas (Figura 8b) en sus respuestas.

Figura 8

Actividad 3 del bloque 2, participantes 2 y 5

a

- Considerando la situación problema, ¿cuál sería la distancia entre los objetos A y B, si el ángulo AXB fuera 60°?



$d(A, B) = ?$
 $= 3 \text{ m}$

b

- Considerando la situación problema, ¿cuál sería la distancia entre los objetos A y B, si el ángulo AXB fuera 60°?

3 m porque es un triángulo equilateral

Mientras que, en la actividad 4 de este mismo bloque, todos los participantes utilizaron una estrategia geométrica –construida y socializada inicialmente por dos de ellos– para calcular la distancia entre dos objetos cuando el ángulo central que los separa es 45°, partiendo del caso de 90° (Figura 9).

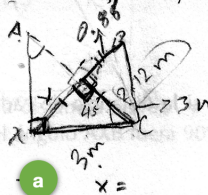
Figura 9

Actividad 4 del bloque 2, participante 3

En la situación problema, si el ángulo AXC fuera 90° y el objeto B estuviera entre los objetos A y C, es decir, el ángulo AXB fuera 45°, ¿podríamos calcular la distancia entre los objetos B y C? ¿cómo?

c

$C = \sqrt{(0.88)^2 + (2.72)^2}$
 $C = \sqrt{0.7 + 4.49}$
 $C = 2.27 \text{ m}$



a

$x =$

b

$a = \sqrt{b^2 - c^2}$
 $a = \sqrt{3^2 - (2.72)^2}$
 $a = \sqrt{9 - 4.49}$
 $a = 2.72 \text{ m}$

$c^2 = a^2 + b^2$
 $b^2 = c^2 - a^2$
 $3 - 2.72$

Podemos sintetizar este método geométrico así: primero, los participantes calculan la distancia entre los objetos A y C (cuyo ángulo central es aprox. 90°), a través del teorema de Pitágoras; luego, parten de que el segmento XB divide al triángulo anterior en dos triángulos rectángulos congruentes (Figura 9a), para dividir por dos la longitud de la hipotenusa del triángulo inicial y calcular, con ayuda del teorema de Pitágoras, la distancia entre X y el punto de intersección entre la hipotenusa y el segmento XB (Figura 9b); por último, conociendo las distancias entre C y el punto de intersección, y entre B y el punto de intersección, calculan la distancia que separa a los objetos B y C (Figura 9c), esto es, la distancia entre dos objetos cuando el ángulo central que los separa es 45°.

Estos ejemplos constatan que la situación de aprendizaje de medición indirecta de

distancias construida promueve que los participantes usen distintas nociones matemáticas, en particular el triángulo rectángulo y la semejanza, para introducir y modificar construcciones geométricas, establecer relaciones entre ellas y realizar cálculos con base en las implicaciones aritmético-algebraicas de dichas relaciones. En otras palabras, el análisis de la actividad matemática evidencia que la situación de aprendizaje fomenta el trabajo geométrico sobre nociones como el triángulo rectángulo y la semejanza para calcular pares ángulo-distancia iniciales, construir métodos geométricos y –con base en los primeros– calcular otros pares ángulo-distancia más complejos.

Al ser un propósito de diseño de la situación de aprendizaje, tanto los momentos de confrontación como la promoción del trabajo geométrico de los profesores era previsible, una cuestión más relevante es: ¿estos produjeron los momentos de resignificación de las nociones trigonométricas de los que habla nuestra hipótesis epistemológica?

Momentos de resignificación

Mediante el análisis de la actividad matemática de los profesores en formación inicial identificamos dos momentos de resignificación –relacionados con los momentos de confrontación aludidos–. El primero de ellos es relativo al significado aritmético asociado a las nociones trigonométricas. Así, como mencionamos en la sección anterior, durante la actividad 2 del bloque 1, ninguno de los participantes resolvió la situación-problema; no obstante, en la actividad 4 del bloque 2, los participantes construyeron un método geométrico que les permitió, conociendo la distancia entre los objetos cuando el ángulo central es 90° –bajo las condiciones de la situación-problema–, calcular la distancia entre los objetos cuando el ángulo central es la mitad, 45° .

La discusión posterior se centró en si es posible utilizar este mismo método en la situación-problema original. Así, algunos participantes dedicaron el tramo final de la implementación a tratar de adaptar este método a la situación-problema inicial y otros –cuatro de ellos– observaron que podían utilizarlo tal cual se había planteado, pero de forma sucesiva, para, partiendo de la distancia entre dos objetos cuando el ángulo central que los separa es 60° , calcular la distancia entre dos objetos cuando el ángulo central es 15° –que era uno de los casos de la situación-problema inicial– (Figura 10).

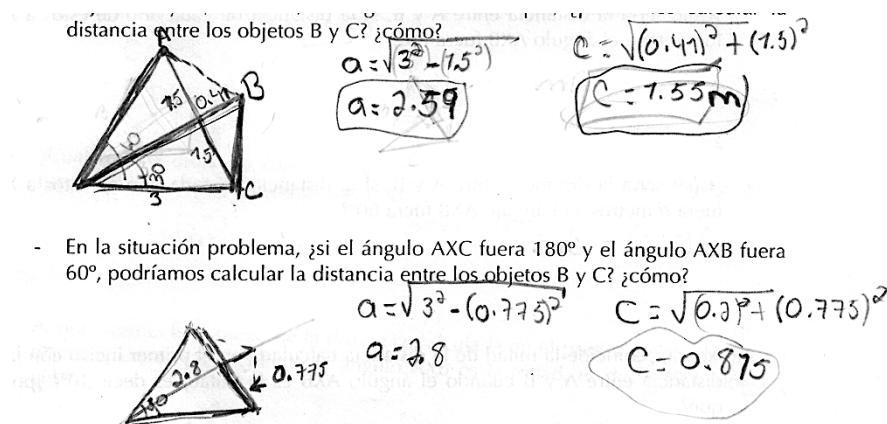
Esto constituye un momento de resignificación pues los profesores en formación inicial se apoyaron en la construcción geométrica, el establecimiento de relaciones y el cálculo aritmético-algebraico para establecer un puente entre los pares ángulo-distancia que conocían y los que no, esto es, se valieron del trabajo geométrico sobre nociones como el triángulo rectángulo y la semejanza para atender parcialmente la situación-problema –tarea para la que sus significados iniciales se mostraron insuficientes–.

El segundo de los momentos de confrontación identificado es relativo al significado lineal asociado a la relación ángulo-distancia en el triángulo. Así, como advertimos más arriba, en la actividad 3 del bloque 1, tres participantes modelaron la situación-problema utilizando el triángulo rectángulo y plantearon una estrategia de resolución

de la situación-problema con base en una concepción lineal de la relación ángulo-distancia.

Figura 10

Actividad 4 del bloque 2, participante 4



Sin embargo, la socialización de este método y la comparación explícita de pares ángulo-distancia permitió a los participantes percatarse de que la relación ángulo-distancia puesta en juego no era lineal. De tal suerte que, como hemos mencionado, hacia el final de la implementación, los participantes plantearon un método geométrico útil para resolver parcialmente la situación-problema. Nótese, por ejemplo, que el participante 3 que inicialmente propuso el método 'proporcional' de resolución (Figura 7) posteriormente colabora en la construcción del método geométrico de resolución (Figura 9).

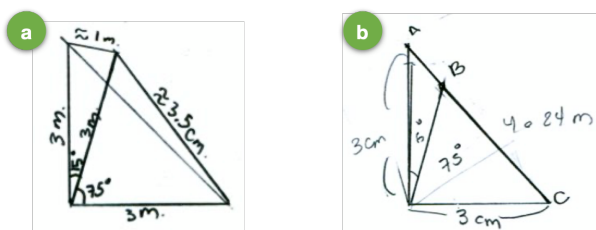
Esto constituye un momento de resignificación pues, en el marco de la situación de aprendizaje, los profesores en formación inicial se percataron de que la relación ángulo-distancia puesta en juego no era lineal y construyeron un método geométrico útil para resolver parcialmente la situación-problema -tarea para la que sus significados iniciales se mostraron insuficientes-.

Otros fenómenos

Aunque excede los objetivos declarados para el estudio, hemos observado también algunos otros fenómenos durante la etapa de experimentación. Entre estos destacamos: la dificultad de los participantes al trabajar con instrumentos geométricos, particularmente con el transportador; el uso irregular de la notación y lenguaje geométrico; el uso del teorema de Pitágoras en triángulos no rectángulos; el uso de diagramas y bosquejos en lugar de construcciones geométricas, incluso cuando estas últimas se solicitaban de forma expresa; y la dependencia a la explicitud del triángulo rectángulo (Figura 11).

Figura 11

Actividad 3 del bloque 1, participantes 1 y 2



Discusión

El primer aporte de este estudio fue constatar la presencia del significado lineal y aritmético –reportados por Montiel y Jácome (2014) en profesores en servicio– en la formación inicial docente. Este resultado es consistente con la bibliografía previa; en esta, producto del estudio de planes y programas, libros de texto y otros planos educativos, se ha reportado que la instrucción trigonométrica que reciben los profesores de matemáticas se centra en el dominio aritmético-algebraico de las nociones trigonométricas y no incluye espacios de análisis de la naturaleza no-proporcional de la relación ángulo-distancia, condiciones propicias para que estos significados se desarrollen (v. g. Cantoral et al., 2015b).

En este sentido, coincidimos con Montiel y Jácome (2014) cuando afirman que: no podemos declarar que el profesor no domina los conceptos o tiene concepciones erróneas, sino que hay significados de lo trigonométrico que subyacen a su quehacer [...]; porque subyacen también a la Trigonometría escolar y en consecuencia a todo aquello que la transmite con intencionalidad didáctica. (p. 1214)

Así, más que señalar al estudiantado y profesorado, nuestra postura trasladó la atención a la cuestión: ¿cómo ampliamos los usos y significados de las nociones trigonométricas que habitan la escuela? Como vimos, Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa (2022), desde una visión centrada en los usos de la matemática y a través de un estudio de corte histórico-epistemológico, hipotetizan que la medición indirecta de distancias en el contexto del círculo permite, mediante el trabajo geométrico sobre nociones como el círculo, el triángulo rectángulo y la proporcionalidad, acercar la geometría a la trigonometría escolar, así como confrontar y resignificar las nociones trigonométricas.

De ahí que el segundo aporte de nuestro estudio fue proponer una situación de aprendizaje concreta –con base en dicha hipótesis epistemológica– y dar evidencia empírica de que esta es útil para i) acercar la geometría a la trigonometría escolar, así como para ii) confrontar y enriquecer los significados de las nociones trigonométricas del profesorado de matemáticas en formación inicial.

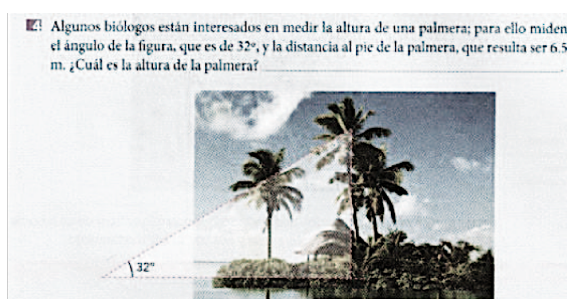
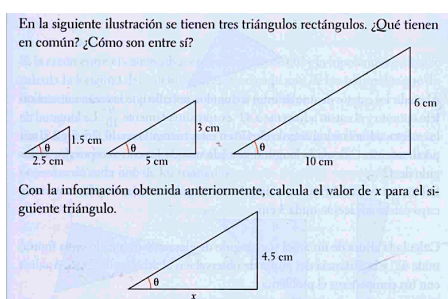
Con relación al primero de estos puntos, diversos estudios en Matemática Educativa coinciden en la utilidad y pertinencia de acercar las nociones y procedimientos geométricos a la enseñanza y aprendizaje de las nociones trigonométricas (v. g. Jácome, 2011; Navarro & Villalva, 2009; Patricio et al., 2005). No

obstante, el debate parece girar en torno a cómo hacerlo y qué nociones y procedimientos geométricos son pertinentes a este proceso.

De acuerdo con la evidencia empírica mostrada, la situación de aprendizaje propuesta promueve la construcción y reconfiguración geométrica, el planteamiento y discusión de relaciones geométricas, y el cálculo aritmético-algebraico con base en dichas relaciones (v. g. Figura 9 y Figura 10). Esto contrasta con las tareas habituales en el aula de trigonometría (Figura 12), en las que se reduce el trabajo del educando a elegir la 'fórmula trigonométrica' adecuada, sustituir los valores dados y realizar los procedimientos aritméticos pertinentes para calcular el dato que resuelve el problema (Brito & Barbosa, 2004; Díaz et al., 2010; Mesa & Herbst, 2011; Weber, 2005).

Figura 12

Tarea trigonométrica habitual y problema de aplicación



Nota. Adaptadas de El rol del discurso matemático escolar en la construcción de significados trigonométricos (pp. 1776-1777), de G. Montiel, 2014, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Originales en Briseño et al. (2008) y Filloy et al. (2009), respectivamente.

En este sentido, este estudio provee evidencia empírica inicial de que la medición indirecta de distancias constituye un uso alternativo –al uso como herramienta técnica– propicio para acercar a las nociones y procedimientos geométricos a la trigonometría escolar. Y que la semejanza y el triángulo rectángulo –sus elementos, propiedades y relaciones–, y el trabajo geométrico son opciones viables respecto a qué geometría acercar a la construcción de las nociones trigonométricas y a cómo hacerlo, respectivamente.

En cuanto al segundo punto, los momentos de confrontación y resignificación evidenciados, consideramos que dos elementos –adicionales al trabajo geométrico promovido por la situación de aprendizaje– resultaron trascendentales para que dichos momentos se dieran: la falta explícita de triángulos rectángulos en la configuración geométrica inicial y el análisis de la relación no-proporcional de la relación ángulo-distancia.

El primero resultó fundamental para confrontar el significado aritmético asociado a las nociones trigonométricas pues, como vimos, al no haber triángulos rectángulos explícitos en la situación-problema planteada, la aplicación inmediata de la 'fórmula trigonométrica' no es posible, lo que obliga a los participantes a tener que realizar construcciones y reconfiguraciones geométricas e involucrar otras nociones y procedimientos matemáticos. Mientras que el análisis de la naturaleza de la relación

ángulo-distancia, mediante la comparación explícita de pares ángulo-distancia, fue fundamental para confrontar el significado lineal asociado a dicha relación en la trigonometría escolar.

Somos conscientes de que algunos de estos elementos han sido considerados –con sus naturales matices– en otras propuestas de la disciplina. El trabajo de Gomes (2013), por ejemplo, integra la historia a la introducción de la trigonometría y –de forma similar a Maroni (2013)– declara a la geometría como ‘fundamental’ para dicho fin. Estas propuestas incluso incorporan actividad geométrica no habitual en las clases de trigonometría, la construcción y análisis de las alturas del triángulo y el cálculo de pares ángulo-cuerda, por ejemplo.

Más aún, en ambas propuestas se incluyen actividades que permitirían el estudio de la naturaleza no-proporcional de la relación ángulo-distancia o la relación ángulo-razón trigonométrica. En la propuesta de Gomes (2013), por ejemplo, al trabajar sobre polígonos inscritos en la circunferencia, se pregunta a los estudiantes “¿qué sucede con el tamaño de la cuerda a medida que crece el ángulo central?”. No obstante, estas preguntas no parecen jugar un rol central en las propuestas, en cuanto no se suceden de otras que permitan el estudio explícito de la naturaleza de las relaciones puestas en juego y la confrontación del significado lineal asociado a estas.

Por último, respecto a los fenómenos didácticos identificados, cabe mencionar que la mayoría de estos han sido reportados en estudios previos. Por ejemplo, trabajos como los de Jones y Tzekaki (2016) e Iglesias y Ortiz (2019) ya señalan las imprecisiones en el uso del lenguaje por parte del profesorado de matemáticas en formación inicial al trabajar con distintas nociones geométricas.

Conclusiones

Con relación a la componente pragmática de nuestro objetivo, este primer ciclo de investigación nos permitió advertir algunos cambios pertinentes al diseño de la situación de aprendizaje, así como a su implementación. Entre los primeros, destacamos la necesidad de poner mayor atención y de acompañar las tareas destinadas a discutir sobre la naturaleza de la relación ángulo-distancia (por ejemplo, si no es lineal, ¿de qué naturaleza es esta relación?). Respecto a los segundos, subrayamos la importancia de ampliar el tiempo dedicado a la experimentación, así como la pertinencia de incluir el análisis de las fuentes de audio y video para un estudio más detallado de la actividad matemática de los profesores participantes.

Por otro lado, acerca de nuestro objetivo teórico, a través del análisis de la actividad matemática se dio evidencia empírica inicial de la viabilidad de la hipótesis epistemológica de partida, esto es, que la medición indirecta de distancias en el contexto del círculo permite, mediante el trabajo geométrico sobre nociones como el triángulo rectángulo y la semejanza, confrontar y enriquecer los significados que los profesores de matemáticas en formación inicial han construido respecto a las nociones trigonométricas –extendiendo el trabajo de Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa (2022).

También se dio evidencia de la presencia del significado lineal y aritmético en la formación inicial docente –ampliando el trabajo de Montiel y Jácome (2014)–. Al mismo tiempo que se robusteció la comprensión del fenómeno gracias al registro y

descripción de la actividad matemática –en término de *acciones y actividades*– de los participantes al atender la situación de aprendizaje; la observación de la trascendencia de la falta explícita de triángulos rectángulos y del análisis de la naturaleza de la relación ángulo-distancia para favorecer los momentos de confrontación y resignificación aludidos; y el reconocimiento de fenómenos didácticos adicionales.

Estos resultados son importantes para el área pues, además de la admisión de los conocimientos matemáticos como un atributo crítico y la necesidad de desafiar y ampliar los mismos, la literatura coincide en que, al trabajar con profesores de matemáticas en formación inicial, “lo que están aprendiendo es también cómo están aprendiendo” (Liljedahl et al., 2009, p. 29; traducción propia).

Así, desde nuestra perspectiva, solo trabajado con el profesorado de matemáticas en la construcción de significados más robustos, a través de situaciones de aprendizaje diseñadas con base en usos alternativos –funcionales– del conocimiento, estaremos en condiciones de favorecer la resignificación de las nociones matemáticas también en el estudiantado.

Con esto en mente, y como limitaciones y prospectivas de este estudio, señalamos la necesidad de llevar a cabo investigaciones dispuestas teórica y metodológicamente para analizar con mayor profundidad y detalle los procesos de confrontación y resignificación que experimenta el profesorado de matemáticas. Estudios que incluyan el uso de marcos teóricos específicos sobre los conocimientos del profesorado, la grabación y análisis del discurso, o ciclos más largos y numerosos de investigación basada en el diseño, por ejemplo, serían provechosos para estudiar el efecto de los momentos de confrontación y resignificación en la persistencia del significado lineal y aritmético, en la práctica docente, en las creencias del profesorado respecto a la matemática y su enseñanza, entre otros.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener ningún conflicto de intereses.

Contribuciones de los autores

Conceptualización, G.C.M. y G.M.E.; metodología, G.C.M. y G.M.E.; diseño inicial de la situación de aprendizaje, G.C.M.; validación del diseño, G.C.M. y G.M.E.; producción de datos, G.C.M.; análisis inicial de los datos, G.C.M.; refinamiento y validación del análisis, G.C.M. y G.M.E.; redacción del borrador inicial, G.C.M.; revisión y edición, G.C.M. y G.M.E.

Referencias

- Araya, A., Monge, A. y Morales, C. (2007). Comprensión de las razones trigonométricas: Niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, 7(2), 1-31. <https://www.doi.org/10.15517/AIE.V7I2.9274>
- Barbin, É., Guillemette, D. y Tzanakis, C. (2020). History of Mathematics and Education. En Lerman, S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_69

- Brito, A. y Barbosa, B. (2004). Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental. *Horizontes, Bragança Paulista*, 22(1), 65-70.
- Cabañas-Sánchez, G. y Cantoral, R. (2012). El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25 (1031-1040). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Gedisa.
- Cantoral, R. (2020). Socioepistemology in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100041
- Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015a). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), 5-17. <https://www.doi.org/10.12802/relime.13.1810>
- Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015b). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (8), 9-28. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.123>
- Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116. Recuperado de <https://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/149>
- Cavey, L. O. y Berenson, S. B. (2005). Learning to teach high school mathematics: Patterns of growth in understanding right triangle trigonometry during lesson plan study. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(2), 171-190. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.03.001>
- Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to Support and Understand Learning Processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of Design Research Methods in Education, Innovations in Science, Technology, Engineering, and Mathematics Learning and Teaching*. Routledge. <https://www.routledgehandbooks.com/doi/10.4324/9781315759593.ch4>
- Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiment in Educational Research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13. <https://doi.org/10.3102/0013189X032001009>
- Cruz-Márquez, G. (2018). *De Sirio a Ptolomeo: una problematización de las nociones trigonométricas* [Tesis de Maestría no publicada]. Cinvestav. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.18095.64166>
- Cruz-Márquez, G. y Montiel-Espinosa, G. (2022). Medición indirecta de distancias y el trabajo geométrico en la construcción de las nociones trigonométricas. *Acta Scientiae*, 24(4), 81-108. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6911>
- Díaz, M., Salgado, G. y Díaz, V. (2010). La transición: grados→radianes→reales. Un obstáculo didáctico. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 74, 29-37.

- Gomes, S. C. (2013). Ensino de trigonometria numa abordagem histórica: um produto educacional. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 27(46), 563-577. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000300015>
- Guacaneme, E., Torres, L. y Arboleda, L. (2019). Estrategias curriculares de formación en Historia de las Matemáticas en licenciaturas en Matemáticas en Colombia. *Revista Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, 46, 57-80. <https://doi.org/10.17227/ted.num46-10540>
- Iglesias, M. y Ortiz, J. (2019). La demostración en geometría desde una perspectiva didáctica. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (55), 159-183. Recuperado de <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/297>
- Jácome, G. (2011). *Estudio socioepistemológico a las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Un acercamiento a los significados construidos por el profesor* [Tesis de Maestría no publicada]. CICATA.
- Jones, K. y Tzekaki, M. (2016). Research on the Teaching and Learning of Geometry. En A. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 109-149). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_4
- Lerman, S. (2000). The Social Turn in Mathematics Education Research. En J. Boaler (Org.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (19-44). Ablex.
- Liljedahl, P. et al. (2009). Components of Mathematics Teacher Training. En R. Even y D. L. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. New ICMI Study Series, vol 11* (25-33). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8_4
- López-Acosta, L. A. y Montiel Espinosa, G. (2022). Emergencia de las ecuaciones paramétricas en Viète y Descartes: elementos para repensar la actividad analítica-algebraica. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, 17(3), 539-559. <https://doi.org/10.14483/23464712.17062>
- Maroni, M. (2013). Sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software GeoGebra. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 27(46), 631-644. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000300019>
- Mesa, V. y Herbst, P. (2011). Designing representations of trigonometry instruction to study the rationality of community college teaching. *ZDM Mathematics Education*, 43(1), 41-52. <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0300-7>
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435>
- Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico*. Ediciones Díaz de Santos.
- Montiel, G. (2014). El rol del discurso matemático escolar en la construcción de significados trigonométricos. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (1771-1779)*. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- Montiel, G. y Buendía, G. (2013). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones* (61-88). Lectorum.
- Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significados trigonométricos en el profesor. *Boletim de Educação Matemática*, 28(50), 1193-1216. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a10>
- Moore, K. C., LaForest, K. R. y Kim, H. J. (2016). Putting the unit in pre-service secondary teachers' unit circle. *Educational Studies in Mathematics*, 92, 221-24. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9671-6>
- Navarro, P. y Villalva, M. (2009). Un estudio sobre la desarticulación entre la semejanza y la trigonometría en el bachillerato. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22 (287-296). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Patricio, H., García, C. y Arrieta, J. (2005). Las prácticas de hacer semejanzas en los triángulos y la emergencia de las razones trigonométricas. En J. Lezama, M. Sánchez y J. G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (619-624). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (461-494). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087901127_017
- Scholz Marbán, O. A. (2020). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico, en el tránsito de lo geométrico a lo variacional* [Tesis de Doctorado no publicada]. Cinvestav. <https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/3902>
- Torres-Corrales, D. C. y Montiel-Espinosa, G. (2021). Resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer año de Ingeniería. *Educación matemática*, 33(3), 202-232. <https://doi.org/10.24844/em3303.08>
- Tsamir, P. (2007). When intuition beats logic: prospective teachers' awareness of their same sides – same angles solutions. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 255-279. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9053-1>
- Tuyub S., I. y Buendía A., G. (2017). La resignificación de las gráficas lineales. Ejemplos desde una comunidad de ingeniería. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 909-917.
- Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(3), 91-112. <https://doi.org/10.1007/BF03217423>

