Métodos Matemáticos de la Física V, Curso 2022-2023

28 de abril de 2024

1. Conceptos previos: Conjuntos, topología y medida

1.1. Conjuntos

Definición 1. *Dado un conjunto X, llamamos **colección** de subconjuntos del mismo a un conjunto cuyos elementos son subconjuntos de X.*

Ejemplo 1. *En la recta real $X = \mathbb{R}$, tenemos que $1 \in X$, $\{1\} \subset X$, y $\{1\} \in \tau$, donde τ es la colección $\tau = \{\{1\}\}$ que tan solo tiene un elemento.*

Definición 2. *Dados dos conjuntos A y B, se define la unión de los mismos $A \cup B$ de la siguiente forma. $x \in A \cup B$ si y solo si $x \in A$ ó $x \in B$ ó x pertenece a ambos.*

Definición 3. *Dados dos conjuntos A y B, se define la intersección de los mismos $A \cap B$ de la siguiente forma. $x \in A \cap B$ si y solo si $x \in A$ y $x \in B$.*

Definición 4. *Dados dos conjuntos A y B, se dice que A es subconjunto de B ó que A está contenido en B, y se denote $A \subset B$, si todo elemento de A pertenece a B.*

Definición 5. *Sean A y B dos conjuntos. Se define el complemento de A en B $B - A$ como el conjunto de todos los elementos de B que no pertenecen a A.*

Proposición 1. *(Leyes de Morgan). Sean A, B y C tres conjuntos. Entonces $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$ y $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$.*

Definición 6. *Sea $\mathcal{A}$ una colección no vacía de conjuntos. Llamamos **función índice** para $\mathcal{A}$ a una función sobreyectiva $f : J \to \mathcal{A}$, donde J es un conjunto, llamado conjunto índice. Al par ordenado $(\mathcal{A}, J)$ se le llama **familia indexada de conjuntos**. Dado $\alpha \in J$, llamamos A_α al conjunto $f(\alpha)$. A la familia la denotaremos de la siguiente forma:*

$$(\mathcal{A}, J) \equiv \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}.$$

Relaciones entre conjuntos Una relación sobre un conjunto A es un subconjunto C del producto cartesiano $A \times A$.

Respecto a la notación, utilizaremos indistintamente $(x, y) \in C$ o xCy.

Relación de equivalencia Una relación de equivalencia en un conjunto A es una relación C sobre A que cumple:
(1) xCx para todo $x \in A$ (reflexiva).
(2) xCy implica que yCx para todo $x, y \in A$ (simétrica).
(3) Si xCy e yCz con $x, y, z \in A$, entonces xCz (transitiva).
Solemos denotar con una tilde ($\sim$) a las relaciones de equivalencia. Así escribimos $x \sim y$ en lugar de xCy.

Un concepto importante es el de clases de equivalencia. Dada una relación de equivalencia $\sim$ sobre un conjunto A y un elemento $x \in A$, llamamos clase de equivalencia determinada por x al subconjunto $E \subset A$ de la forma

$$E = \{y \in A : y \sim x\}.$$

Es sencillo demostrar el siguiente lema:

Lema 1. *Dos clases de equivalencia E y E' son iguales o disjuntas.*

Demostración. Sean $x, x' \in A$, y $E = \{y \in A : y \sim x\}$, $E' = \{y \in A : y \sim x'\}$. Supongamos primero que $x = x'$. Entonces, claramente, $E = E'$. Ahora supongamos que $x \neq x'$, y que $E \cap E' \neq \emptyset$. Tomemos $y \in E \cap E'$. Entonces, $y \sim x$ y también $y \sim x'$. Por simetría (la propiedad 2), tenemos que $x \sim y$ y, por tanto, $x \sim x'$ por la propiedad transitiva. Esto implica que todo elemento $w \in E$ cumple $w \sim x'$, aplicando de nuevo transitividad. Por tanto $E \subset E'$. Por simetría, tenemos que también $E' \subset E$, y por tanto $E = E'$. La otra parte del lema es trivial: si $E \cap E' = \emptyset$, entonces E y E' son disjuntos. □

Dada una relación de equivalencia sobre un conjunto A, llamemos $\mathcal{E}$ a la colección de todas las clases de equivalencia determinadas por esta relación. El Lema precedente nos dice que los elementos de $\mathcal{E}$ son disjuntos. Además, la unión de todos los elementos de $\mathcal{E}$ es todo A, ya que todo elemento $x \in A$ pertenece a una clase de equivalencia (ya que $x \sim x$ para todo x). La colección $\mathcal{E}$ es un ejemplo de partición, que definimos ahora.

Definición 7. *Una partición de un conjunto A es una colección de subconjuntos disjuntos no vacíos de A cuya unión es A.*

Relación de orden Una relación C sobre un conjunto A se denomina relación de orden si cumple:
(1) No hay ningún $x \in A$ tal que xCx (no reflexiva).
(2) Para todo $x, y \in A$ con $x \neq y$ se tiene xCy o yCx (comparativa).
(3) Si xCy e yCz, entonces xCz (transitiva).
En el caso de las relaciones de orden, éstas suelen denotarse con un símbolo "$<$". Así, (1) nos dice que $x < x$ no ocurre, (2) si $x \neq y$ entonces o $x < y$ o $y < x$, y (3) si $x < y$ e $y < z$ tenemos $x < z$. Nótese la naturalidad de la definición.

Definición 8. *Sea X un conjunto, $<$ una relación de orden sobre el mismo, y $a, b \in X$ dos elementos, con $a < b$. Definimos la siguiente notación:*

$$(a, b) = \{x \in X : a < x < b\},$$

y llamamos a los conjuntos del tipo (a, b) intervalos abiertos en X.

Vamos a caracterizar el ínfimo y el supremo de un conjunto acotado de números reales de una forma alternativa, que será útil más adelante:

Teorema 1. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ no-vacío. Una cota superior $b \in \mathbb{R}$ es el supremo de A si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $b - \epsilon < x$. Análogamente, una cota inferior $a \in \mathbb{R}$ es el ínfimo de A si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $x < a + \epsilon$.*

Teorema 2. *(propiedad Arquimedeana de los números reales). Para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \epsilon$.*

Teorema 3. *(densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$). Para cada par de números reales $a < b$ existe un $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$.*

Definición 9. *Se dice que un conjunto A es finito si y solo si existe una biyección $f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Definición 10. *Se dice que un conjunto es infinito si no es finito.*

Definición 11. *Se dice que un conjunto A es numerable si es finito ó existe una biyección $f : A \to \mathbb{N}$.*

Definición 12. *Se dice que un conjunto A es no-numerable si no es numerable.*

1.2. Espacios topológicos

Definición 13. *Dado un conjunto X y una colección τ de subconjuntos de X, se dice que τ es una topología si cumple:*

- *(i) $\emptyset$, $X \in \tau$.*

- *(ii) La unión arbitraria de elementos de τ está en τ.*
- *(iii) La intersección de dos elementos cualesquiera de τ está en τ.*

Definición 14. *Dado un conjunto X y una topología τ sobre X, al par ordenado (X, τ) se le llama espacio topológico.*

Definición 15. *Dado un espacio topológico (X, τ), llamamos conjunto abierto a todo $U \in \tau$.*

Definición 16. *Dado un conjunto X, y una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X, decimos que $\mathcal{B}$ es una base topológica para una topología sobre X si cumple:*

- *(i) Si $x \in X$ $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.*
- *(ii) Si $x \in B_1 \cap B_2$, con $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces $\exists B_3 \subset B_1 \cap B_2$ tal que $x \in B_3$.*

Proposición 2. *Dado un conjunto X, si $\mathcal{B}$ es una base topológica, entonces la siguiente colección τ de subconjuntos de X es una topología (llamada topología generada por $\mathcal{B}$):*
Un subconjunto $U \subset X$ es un abierto (esto es, $U \in \tau$) si para cada $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$, o bien $U = \emptyset$.

Demostración. Primero hemos de demostrar la propiedad (i) de una topología. El conjunto vacío pertenece a τ por definición. Para ver que $X \in \tau$, tomemos $U = X$, y $x \in U = X$. De la propiedad (i) de las bases, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$, y como $B \subset U = X$, tenemos que X es abierto.
Ahora demostramos que las uniones arbitrarias de abiertos son abiertos. Tomemos una familia indexada $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de elementos de τ, y probemos que $U = \cup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \tau$. Para ello, tomemos $x \in U$. Entonces existe $\alpha \in J$ tal que $x \in U_\alpha$, y como $U_\alpha \in \tau$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U_\alpha$. Como $U_\alpha \subset U$, tenemos que $x \in B \subset U$ y por tanto U es abierto.
Por último probemos que la intersección de dos abiertos es otro abierto. Sean $U_1, U_2 \in \tau$, y sea $x \in U_1 \cap U_2$. Elegimos $B_1 \subset U_1$ y $B_2 \subset U_2$, con $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Por tanto, $B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$. Supongamos que $x \in B_1 \cap B_2$, entonces por la propiedad (ii) de las bases, existe $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ tal que $x \in B_1 \cap B_2$. Tenemos $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$, y por tanto $U_1 \cap U_2$ es abierto. □

En muchos textos se da el siguiente lema como definición de base. Es equivalente a la definición anterior:

Lema 2. *Sea X un conjunto, y $\mathcal{B}$ una base para una topología τ sobre X. Entonces τ viene dada por la colección de todas las uniones de elementos de $\mathcal{B}$.*

Demostración. Llamemos τ' a la colección de todas las uniones de elementos de $\mathcal{B}$. Para probar $\tau = \tau'$, demostramos que $\tau \subset \tau'$ y que $\tau' \subset \tau$.
(a) Un elemento B de la base también es un elemento de τ, ya que si $U = B$ entonces para cada $x \in B$ tenemos que $x \in B \subset B$. Como τ es una topología, la unión arbitraria de elementos de B es un abierto, y por tanto $\tau' \subset \tau$.
(b) Sea $U \in \tau$, entonces si $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$. Tomemos para cada x un elemento $B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_x \subset U$. Por definición, $U = \{x : x \in U\}$, y como cada B_x es un subconjunto de U, $U = \cup_{x \in U} B_x$, es decir, todo abierto U viene dado por la unión de elementos de $\mathcal{B}$, y tenemos $\tau \subset \tau'$. □

En el siguiente lema se ve una forma de obtener una base topológica dada una topología:

Lema 3. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $\mathcal{C}$ una colección de conjuntos abiertos de (X, τ) tal que para cada abierto $U \subset X$ y cada $x \in U$ existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset U$. Entonces $\mathcal{C}$ es una base para la topología τ.*

Demostración. Aquí debemos probar dos cosas. Primero, que $\mathcal{C}$ es base para alguna topología τ'. Segundo, que $\tau' = \tau$.
(a-1) Sean $U = X$, y $x \in X$. Entonces por definición de $\mathcal{C}$, para cada $x \in U$ existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$, y por tanto $\mathcal{C}$ cumple la propiedad (i) de base.
(a-2) Sean $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, y $x \in C_1 \cap C_2$. Como por definición de $\mathcal{C}$ tenemos que C_1 y C_2 son abiertos de τ, entonces $U = C_1 \cap C_2$ es abierto de τ. Por definición de $\mathcal{C}$, existe $C_3 \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C_3 \subset U = C_1 \cap C_2$,

y por tanto $\mathcal{C}$ cumple la propiedad (ii) de base. Esto prueba que $\mathcal{C}$ es base para alguna topología τ'.
(b-1) Probemos ahora que $\tau \subset \tau'$. Sean $U \in \tau$ y $x \in U$, entonces por hipótesis $\exists C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset U$. Esto no es más que la definición de la topología τ' generada por la base $\mathcal{C}$, y por tanto $\tau \subset \tau'$.
(b-2) Probemos que $\tau' \subset \tau$. Sea $U \in \tau'$. Entonces por el lema de las uniones de elementos de la base, U es unión de elementos $\{C_\alpha\}_{\alpha \in J}$, $C_\alpha \in \mathcal{C}$. Como por hipótesis C_α es abierto de τ, tenemos que U es abierto de τ, y por tanto $\tau' \subset \tau$. $\square$

Tras todas estas definiciones formales, estudiemos brevemente la topología usual de $\mathbb{R}$.

Definición 17. *Sea $\mathcal{B}$ la colección de intervalos abiertos en la recta real, $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. A la topología generada por $\mathcal{B}$ la llamamos topología estándar o topología usual de $\mathbb{R}$.*

Fíjate que hablamos de topología generada por la colección de intervalos abiertos. Para poder hablar de topología hay que probar que $\mathcal{B}$ es una base. Lo hacemos ahora:
(i) Primero probamos que si $x \in \mathbb{R}$, entonces existe un intervalo abierto (a, b) tal que $x \in (a, b)$. Para ello, basta tomar, por ejemplo, $a = x - 1$ y $b = x + 1$, y por tanto $x \in (x - 1, x + 1)$.
(ii) Ahora probamos que si $x \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$, entonces existe $(a_3, b_3) \subset (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ tal que $x \in (a_3, b_3)$. Suponemos que la intersección es no-vacía. Veamos los casos. Si $(a_1, b_1) \subset (a_2, b_2)$ (o viceversa, es análogo), entonces $a_3 = a_1$ y $b_3 = b_1$, que es un intervalo abierto. Si $a_2 < b_1$ y $b_2 > b_1$ (o viceversa, es análogo), entonces $a_3 = a_2$ y $b_3 = b_1$, y tenemos de nuevo un intervalo abierto. Ya no hay más casos no-vacíos, y por tanto $\mathcal{B}$ es base para la topología usual de $\mathbb{R}$.$\square$

Definición 18. *Una subbase $\mathcal{S}$ para una topología en X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es igual a X. La topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ se define como la colección τ de todas las uniones* **de** *intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.*

Por supuesto, hay que probar que τ es una topología sobre X. Como los elementos de τ son uniones de intersecciones de elementos de $\mathcal{S}$, basta probar que la colección $\mathcal{B}$ de intersecciones finitas de elementos de S es una base topológica, en cuyo caso $\mathcal{S}$ es una topología por el Lema de las uniones de los elementos de una base. Probamos que se cumplen las dos propiedades de base:
(i) Sea $x \in X$, hemos de probar que existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$. Como X es igual a la unión de todos los elementos de $\mathcal{S}$, entonces x pertenece a algún conjunto S de $\mathcal{S}$, que es una intersección finita, y por tanto x pertenece a $B \subset \mathcal{B}$.
(ii) Tomemos dos elementos arbitrarios de $\mathcal{B}$, dados por $B_1 = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_m$ y $B_2 = S'_1 \cap S'_2 \cap \ldots S'_n$. Su intersección $B_1 \cap B_2$ también es una intersección finita de elementos de $\mathcal{S}$, y por tanto está en $\mathcal{B}$ (hemos usado que $B_3 = B_1 \cap B_2 \subset B_2 \cap B_2$).$\square$

1.3. La topología del orden

Estudiamos ahora una topología particular muy relevante, la llamada topología del orden.

Definición 19. *Sea X un conjunto con una relación de orden $<$, y supongamos que X tiene más de un elemento. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los conjuntos de los siguientes tipos:*
(1) Todos los intervalos abiertos (a, b) en X.
(2) Todos los intervalos de la forma $[a_0, b)$, donde a_0 es el menor elemento de X, si lo hubiera.
(3) Todos los intervalos de la forma $(a, b_0]$, donde b_0 es el mayor elemento de X, si lo hubiera.
Si no existe a_0 (b_0) entonces se excluyen los elementos del tipo (2) ((3)).
La colección $\mathcal{B}$ es una base topológica, y la topología generada por ella se denomina topología del orden.

Demostremos que $\mathcal{B}$ es una base topológica de una topología τ.

1.4. La topología producto

Introducimos ahora otra topología sobre el producto cartesiano de dos conjuntos X e Y, llamada topología producto.

Definición 20. *Dados dos espacios topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y), llamamos topología producto sobre $X \times Y$ a la topología que tiene como base a la colección $\mathcal{B}$ de todos los subconjuntos de la forma $U \times V$, donde $U \in \tau_X$ y $V \in \tau_Y$.*

Probemos que $\mathcal{B}$ es base para una topología sobre $X \times Y$. La primera condición de base se satisface automáticamente, ya que $X \in \tau_X$ e $Y \in \tau_Y$, y por tanto $X \times Y \in \mathcal{B}$. Para la segunda propiedad de base, tomemos $x \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$, con $U_1, U_2 \in \tau_X$ y $V_1, V_2 \in \tau_Y$. La intersección

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2), \tag{1}$$

y como $U = U_1 \cap U_2 \in \tau_X$ y $V = V_1 \cap V_2 \in \tau_Y$, tenemos que $U \times V$ es un elemento de $\mathcal{B}$, (por tanto $x \in B_3 = U \times V = B_1 \cap B_2 \subset B_1 \cap B_2$).$\square$

Teorema 4. *Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dos espacios topológicos, y sean $\mathcal{B}_X$ y $\mathcal{B}_Y$ bases topológicas para τ_X y τ_Y, respectivamente. Entonces, se tiene que*

$$D = \{B_X \times B_Y : B_X \in \mathcal{B}_X, B_Y \in \mathcal{B}_Y\}$$

es una base para la topología producto sobre $X \times Y$.

Demostración. Para probar el teorema, usaremos el lema sobre la obtención de una base topológica dada la topología. La topología dada en este caso es la topología producto $(\mathcal{T})$ sobre $X \times Y$ (i.e. $(X \times Y, \mathcal{T})$ es el espacio topológico a considerar). Tomemos un abierto $W \in \mathcal{T}$. Por definición de topología producto (generada por la base dada en la definición), existe un elemento de la base $U \times V \in \mathcal{B}$ tal que $(x, y) \in U \times V \subset W$ (véase proposición para obtener topología a partir de base). Como $U \in \tau_X$ $(V \in \tau_Y)$, entonces por la proposición referida arriba existe $B_X \in \mathcal{B}_X$ $(B_Y \in \mathcal{B}_Y)$ tal que $x \in B_X \subset U$ $(y \in B_Y \subset V)$, y por tanto $(x, y) \in B_X \times B_Y \subset U \times V \subset W$. Esto implica que D es una base para la topología producto. $\square$

Ahora expresamos la topología producto en términos de una subbase. Primero necesitamos definir las siguientes funciones:

Definición 21. *Sea $\pi_1 : X \times Y \to X$ definida por*

$$\pi_1(x, y) = x,$$

y sea $\pi_2 : X \times Y \to Y$ definida por

$$\pi_2(x, y) = y. \tag{2}$$

Las funciones π_1 y π_2 se denominan ***proyecciones*** *de $X \times Y$ en su primera y segunda componente, respectivamente.*

Proposición 3. *Las proyecciones son funciones sobreyectivas.*

Demostración: Trivial.

Dado un abierto U de X, el conjunto (preimagen) $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$, y dado un abierto V de Y, el conjunto (preimagen) $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$. Por tanto, la intersección de ambos conjuntos $\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V) = (U \times Y) \cap (X \times V) = (U \cap X) \times (V \cap Y) = U \times V$, que es un abierto de $X \times Y$ en la topología producto. Este hecho nos lleva a proponer el siguiente teorema:

Teorema 5. *Dados dos espacios topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y), la colección*

$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) : U \in \tau_X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) : V \in \tau_Y\}$$

es una subbase para la topología producto $\mathcal{T}$ sobre $X \times Y$.

Demostración. Lo primero que debemos probar es que $\mathcal{S}$ es una subbase para alguna topología τ sobre el producto cartesiano de X e Y. Una vez hecho esto, debemos probar que $\tau = \mathcal{T}$, probando que tanto $\tau \subset \mathcal{T}$ como $\mathcal{T} \subset \tau$.
(a) $\mathcal{S}$ es una subbase: como $X \in \tau_X$, tenemos que $\pi_1^{-1}(X) = X \times Y$, y por tanto la unión de elementos de $\mathcal{S}$ es $X \times Y$, trivialmente, y se tiene que $\mathcal{S}$ es una subbase.

(b-1) Los elementos de la topología τ son uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$. Tomemos $U \in \tau_X$, y el elemento de la subbase $\pi_1^{-1}(U) = U \times X$, que es un abierto de $\mathcal{T}$, y análogamente un abierto $V \in \tau_Y$ y su elemento de la subbase correspondiente, $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$, que también es abierto de $\mathcal{T}$. Las intersecciones finitas de estos conjuntos son abiertos en $\mathcal{T}$, y las uniones de estas intersecciones también, por definición de topología. Por tanto, $\tau \subset \mathcal{T}$.
(b-2) Tomemos un abierto $U \times V$ de $\mathcal{T}$. Entonces, dado el resultado anterior al enunciado del teorema, $U \times V$ es una intersección finita de elementos de τ, y por tanto $\mathcal{T} \subset \tau$. □

1.5. La topología subespacio

Nos concentramos ahora en otro ejemplo importante de topología, la llamada topología subespacio, que definirá la noción de subespacio topológico.

Definición 22. *Sea (X, τ) un espacio topológico, e $Y \subset X$. La colección*

$$\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$$

se llama topología subespacio.

Proposición 4. *La topología subespacio τ_Y es una topología (al espacio topológico (Y, τ_Y) lo llamamos subespacio topológico de (X, τ)).*

Demostración. Aquí la demostración es bastante directa, ya que utilizamos la definición de topología.
(i) $\emptyset, X \in \tau_Y$: Como $\emptyset \in \tau$, tenemos que $Y \cap \emptyset = \emptyset \in \tau_Y$. Como $X \in \tau$, $Y \cap X = Y \in \tau_Y$.
(ii) Sean $U, V \in \tau$, y tomamos $(Y \cap U) \cap (Y \cap V) = Y \cap (U \cap V)$. Como τ es una topología, $U \cap V \in \tau$, y por tanto $Y \cap (U \cap V) \in \tau_Y$.
(iii) La prueba para las uniones arbitrarias es tan trivial como para las intersecciones. □

Ahora probamos el siguiente resultado para obtener una base de la topología subespacio:

Lema 4. *Sea (X, τ) un espacio topológico, y $\mathcal{B}$ una base topológica para τ. Sea $Y \subset X$, entonces la siguiente colección:*

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$$

es una base para la topología subespacio τ_Y de Y.

Demostración. Para demostrar el Lema, usaremos (1) la definición de la topología generada por una base y (2) el Lema para la obtención de bases dada la topología.
Sea U un abierto en X, e $y \in U \cap Y$. Por (1), y como $y \in U$, existe un elemento B de la base de la topología τ de X tal que $y \in B \subset U$. Como $y \in Y$, esto implica que $y \in B \cap Y \subset U \cap Y$. Por (2), tenemos que $B \cap Y$ es un elemento de una base para τ_Y, y por tanto la colección $\mathcal{B}_Y$ es una base para τ_Y. □

Otro resultado importante:

Lema 5. *Sea (Y, τ_Y) un subespacio topológico de (X, τ). Si $U \in \tau_Y$ e $Y \in \tau$, entonces $U \in \tau$.*

Demostración. Como U es abierto de Y, existe un conjunto V, abierto de X, tal que $U = V \cap Y$. Como Y es abierto de X, entonces $V \cap Y$ es abierto de X, y por tanto $U \in \tau$. □

Ahora redactamos un teorema que relaciona la topología subespacio con la topología producto:

Teorema 6. *Sea (A, τ_A) un subespacio topológico de (X, τ_X), y (B, τ_B) un subespacio topológico de (Y, τ_Y). Entonces, la topología producto de $A \times B$ coincide con la topología subespacio heredada de $X \times Y$.*

Demostración. Para probar el teorema, definamos la topología producto de $A \times B$ como $\mathcal{T}$, y la topología subespacio de $A \times B$ como $\mathcal{T}'$, y hemos de demostrar, como siempre, que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.
(a) Tomemos un elemento B de la base $\mathcal{B}$ de la topología producto $\mathcal{T}$. Este se puede escribir, por

definición, como $B = U_A \times U_B$, donde $U_A \in \tau_A$ y $U_B \in \tau_B$. Como $U_A = U_X \cap A$ y $U_B = U_Y \cap B$, donde ... , tenemos que

$$B = (U_X \cap A) \times (U_Y \cap B) = (U_X \times U_Y) \cap (A \times B).$$

$U_X \times U_Y$ es, por definición, elemento de la base de la topología producto de $X \times Y$. Por el lema para obtener una base de la topología subespacio, tenemos que B es elemento de base (llamemos a la base $\mathcal{B}'$) de la topología subespacio, y por tanto $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$.
(b) Partiendo de un elemento de la base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{T}'$, de la forma $(U_X \times U_Y) \cap (A \times B)$, se tiene de forma análoga que $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$. □

1.6. Conjuntos cerrados en una topología y puntos de acumulación

Aquí definimos los conjuntos cerrados, y establecemos una serie de conceptos que necesitamos para poder estudiar sucesiones y límites.

Definición 23. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que $A \subset X$ es cerrado si su complemento $X - A$ es abierto.*

Las propiedades elementales de los conjuntos cerrados se resumen en el siguiente:

Teorema 7. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Se cumple:*
(i) $\emptyset, X$ son cerrados.
(ii) La unión de dos conjuntos cerrados es cerrado.
(iii) La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrado.

Demostración. (i) $\emptyset = X - X$, y X es abierto, por tanto $\emptyset$ es cerrado. $X = X - \emptyset$, y $\emptyset$ es abierto, por tanto X es cerrado.
(ii) Sean A, B cerrados, y $U = A \cup B$. Sea $V = X - U$. Tenemos

$$V = X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B).$$

Como $X - A$ y $X - B$ son abiertos, tenemos que V es abierto, y por tanto U es cerrado.
(iii) Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de cerrados. Llamemos $U = \cap_{\alpha \in J} A_\alpha$ y $V = X - U$. Tenemos, por la ley de DeMorgan,

$$V = X - \cap_{\alpha \in J} A_\alpha = \cup_{\alpha \in J}(X - A_\alpha).$$

Como $X - A_\alpha$ es abierto, tenemos que V es abierto, y por tanto U es cerrado. □

Demostramos a continuación un teorema acerca de los conjuntos cerrados en un subespacio topológico:

Teorema 8. *Sea (Y, τ_Y) subespacio topológico de (X, τ). Entonces $A \subset Y$ es cerrado en Y si y sólo si es igual a la intersección de un cerrado de X con Y (i.e., si se puede escribir como $A = C \cap Y$, donde C es algún cerrado de X).*

Demostración. Vamos a ver una prueba extremadamente sencilla. Tomemos $C \subset X$ cerrado en X, y tomemos el conjunto $A' = C \cap Y$. Como C es cerrado, es el complemento de un abierto U' de X, esto es, $C = X - U'$ Por definición:

$$A' = \{x \in X : x \in C \& x \in Y\} = \{x \in Y : x \in C\} = \{x \in Y : x \notin U'\}.$$

Ahora tomemos un cerrado $A \subset Y$ de Y. Por definición, hay un abierto $U \subset X$ de X tal que $A = Y - (U \cap Y)$, que claramente se puede formalizar como:

$$A = \{x \in Y : x \notin U\}.$$

Por tanto, hemos probado que si A es un conjunto cerrado en Y, entonces se puede escribir como la intersección de un cerrado (ponga $U' = U$) en X con Y. (hemos probado $\Longrightarrow$]).
Para probar la implicación contraria ($\Longleftarrow$]), supongamos que $A = C \cap Y$, con C cerradp de X, y sea U abierto de X tal que $C = X - U$. Entonces (véase arriba), tenemos que

$$A = \{x \in Y : x \notin (U \cap Y)\} = Y - (U \cap Y).$$

Como $U \cap Y$ es un abierto de Y, A es cerrado en Y. □

El siguiente teorema se prueba muy fácilmente y es análogo a un teorema para conjuntos abiertos que ya hemos visto:

Teorema 9. *Sea (Y, τ_Y) subespacio topológico de (X, τ). Si A es cerrado de Y, e Y es cerrado de X, entonces A es cerrado de X.*

Ahora introducimos los conceptos de interior y cierre de un subconjunto en un espacio topológico.

Definición 24. *Sea (X, τ) espacio topológico, y sea $A \subset X$. Llamamos interior de A (escrito $\mathring{A}$), al subconjunto de X dado por la unión de todos los abiertos de X contenidos en A.*

Definición 25. *Sea (X, τ) espacio topológico, y sea $A \subset X$. Llamamos cierre de A (escrito $\bar{A}$), al subconjunto de X dado por la intersección de todos los cerrados de X que contienen a A.*

Proposición 5. *El cierre y el interior de un subconjunto $A \subset X$ de un espacio topológico satisfacen:*

$$\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$$

Demostración. La primera inclusión es trivial. Como $\mathring{A}$ es una unión de subconjuntos contenidos en A, $\mathring{A} \subset A$, por definición. La segunda inclusión es muy sencilla de probar. Como $\bar{A}$ es la intersección de todos los subconjuntos de X que contienen a A, éste también lo contiene. □

Proposición 6. *Si A es abierto entonces $A = \mathring{A}$, y si A es cerrado entonces $A = \bar{A}$.*

Demostración: Trivial.

Ahora veamos un teorema acerca del cierre de un conjunto en un subespacio topológico:ç

Teorema 10. *Sea (X, τ) un espacio topológico, e (Y, τ_Y) un subespacio topológico de X. Sea $A \subset Y$, y llamemos $\bar{A}$ al cierre de A en X. Entonces, el cierre de A en Y viene dado por $\bar{A} \cap Y$.*

Demostración. Recordemos que la topología subespacio τ_Y viene dada por $\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$.
Ahora llamemos $B \subset Y$ al cierre de A en Y. Probamos primero que $B \subset \bar{A} \cap Y$. Como $\bar{A}$ es cerrado, $\bar{A} \cap Y$ es cerrado en la topología τ_Y (véase un teorema anterior). Como $A \subset Y$, tenemos que $A \subset \bar{A} \cap Y$, ya que $A \subset \bar{A}$. Por definicióp n de cierre, B es la intersección de todos los cerrados de Y que contienen a A, y por tanto $B \subset \bar{A} \cap Y$.
Ahora probamos que $\bar{A} \cap Y \subset B$. Como B es cerrado, entonces existe C cerrado en X tal que $B = C \cap Y$ (véase un teorema anterior). Por definición de cierre, $A \subset B$, y por tanto C es un cerrado de X que contiene a A. Dado que $\bar{A}$ es la intersección de todos los cerrados de X que contienen a A, tenemos que $\bar{A} \subset C$, y por tanto $\bar{A} \cap Y \subset C \cap Y = B$. □

Introducimos una nomenclatura muy conveniente ahora. Decimos que un conjunto A interseca a otro conjunto B si $A \cap B \neq \emptyset$. Con esta nomenclatura, enunciamos el siguiente teorema:

Teorema 11. *Sea $A \subset X$, con (X, τ) un espacio topológico.*
(a) Entonces $x \in \bar{A}$ si y sólo si todo abierto $U \subset X$ que contiene a x interseca a A.
(b) Si la topología τ de X viene generada por una base, entonces $x \in \bar{A}$ si y sólo si todo elemento de la base que contiene a x interseca a A.

Demostración. Para demostrar el punto (a), vamos a demostrar la afirmación (a) demostrando su equivalente negado. Su negación lee:
$x \notin \bar{A}$ si y sólo si existe un abierto $U_0 \subset X$ que contiene a x y no interseca a A.
(a-1). Probamos $\Longrightarrow$]. Sea $x \notin \bar{A}$. Entonces $x \in X - \bar{A}$, y $U_0 = X - \bar{A}$ es abierto de X ya que $\bar{A}$ es cerrado. Como $A \subset \bar{A}$, entonces $X - A \subset U_0$, y por tanto U_0 no interseca a A.
(a-2). Probamos $\Longleftarrow$]. Sea $U_0 \subset X$ un abierto que contiene a x y no interseca a A. Entonces $X - U_0$ es un cerrado de X que contiene a A, y por tanto $\bar{A} \subset X - U_0$, y como $x \notin X - U_0 \implies x \notin \bar{A}$.
Ahora probamos (b):
(b-1) Ya hemos probado (a), por lo tanto tenemos que si todo abierto que contiene a x interseca a A, entonces $x \in \bar{A}$. Como los elementos de la base son abiertos, queda probado $\Longleftarrow$].
(b-2) $\Longrightarrow$] es trivial, ya que todo abierto que contiene a x contiene un elemento de la base que contiene a x. □

Definición 26. *Sea (X,τ) un espacio topológico, $x \in X$, y U un abierto de X que contiene a x, entonces decimos que U es un entorno abierto de x.*

Definición 27. *Sea (X,τ) un espacio topológico, y sea $A \subset X$. Decimos que $x \in X$ es un punto de acumulación de A si todo entorno abierto de x interseca a A en algún punto de A distinto de x. De forma equivalente, dado el teorema anterior, podemos decir que $x \in X$ es un punto de acumulación de A si $x \in \overline{A - \{x\}}$.*

Ahora enunciamos un teorema que nos ayuda a relacionar el cierre y los puntos de acumulación de un conjunto.

Teorema 12. *Sea (X,τ) un espacio topológico, y sea $A \subset X$. Si escribimos $A' \subset X$ como el conjunto de todos los puntos de acumulación de A, entonces*

$$\bar{A} = A \cup A'$$

Demostración. Para la prueba, vamos a utilizar la definición formal de punto de acumulación $x \in A'$ si $x \in \overline{A - \{x\}}$. Tomemos el caso $x \in A'$. Entonces todo entorno abierto de x interseca a A en un punto distinto de x, y por tanto, por el teorema anterior, $x \in \bar{A}$. Por tanto $A' \subset \bar{A}$. Para $x \notin A'$ pero $x \in A$, como $A \subset \bar{A}$, tenemos que $A \cup A' \subset \bar{A}$. Ya hemos probado una inclusión, y probamos ahora la recíproca. Sea $x \in \bar{A}$. Si $x \in A$, entonces evidentemente $x \in A \cup A'$. Si $x \notin A$, usamos que todo entorno abierto de x interseca a A, y como $x \notin A$, necesariamente todo entorno abierto de x interseca a A en puntos distintos de x, y por tanto $x \in A'$. Por tanto, $\bar{A} \subset A \cup A'$. □

Ahora probamos una consecuencia muy importante del teorema:

Corolario 1. *Sea A un subconjunto de un espacio topológico (X,τ). Entonces A es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación (A cerrado si y sólo si $A' \subset A$).*

Demostración. Como A es cerrado, tenemos que $A = \bar{A}$. Por el teorema anterior, $\bar{A} = A \cup A'$ y por tanto A es cerrado si y solo si $A' \subset A$. □

Nuestro siguiente punto en estos preliminares sobre topología es la introducción de los espacios Hausdorff. Estos son de vital importancia para asegurar que el límite de una sucesión sea único. Primero definimos convergencia de una sucesión en un espacio topológico (X,τ). Sea x_n una sucesión de elementos de X. Decimos que x_n converge a $x \in X$, y escribimos $x_n \to x$, si para cada entorno abierto U de x existe un número natural N tal que para todo $n \geq N$ $x_n \in U$.

Definición 28. *Un espacio topológico (X,τ) se dice que es un espacio Hausdorff si para cada par x_1, x_2 de puntos de X existen respectivos entornos abiertos U_1 y U_2 que son disjuntos.*

Esto nos permite demostrar el siguiente teorema, cuyo caso partícular en la recta real con la topología usual es bien conocido:

Teorema 13. *Sea (X,τ) un espacio topológico Hausdorff. Entonces todo subconjunto de X con un número finito de elementos es cerrado.*

Demostración. Para demostrar el teorema, es suficiente demostrar que dado $x_0 \in X$, el subconjunto $\{x_0\}$ es cerrado. Usaremos el hecho de que $\{x_0\}$ es cerrado si y sólo si $\{x_0\} = \overline{\{x_0\}}$. Sea $x \in X$ con $x \neq x_0$. Como (X,τ) es Hausdorff, existen entornos abiertos U y U_0 de x y x_0 tales que $U \cap U_0 = \emptyset$. Como U_0 contiene a x_0, y $U \cap U_0 = \emptyset$, entonces U no interseca a $\{x_0\}$. Por tanto x no puede ser un punto de acumulación de $\{x_0\}$, y por tanto $x \notin \overline{\{x_0\}}$. Es decir, si $x \in X$ con $x \neq x_0$, entonces $x \notin \overline{\{x_0\}}$, con lo cual $\{x_0\} = \overline{\{x_0\}}$, y $\{x_0\}$ es cerrado. □

Definición 29. *Un espacio topológico (X,τ) se dice que cumple el axioma T_1 si todo subconjunto finito del mismo es cerrado.*

Teorema 14. *Sea (X,τ) un espacio topológico que cumple el axioma T_1. Entonces un punto $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subset X$ si y sólo si todo entorno abierto de x contiene un número infinito de puntos de A.*

Demostración. Para demostrar que un cierto conjunto tiene infinitos puntos, lo razonable es demostrar que NO tiene un número finito de puntos.
(1) $\Longrightarrow$]. Sea $x \in X$ un punto de acumulación de A. Entonces todo entorno abierto de x interseca a A en puntos distintos de x. Supongamos que U es un entorno abierto de x que interseca a A en un número finito de puntos $C = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset A$, con $x_i \neq x$, y por tanto interseca a $A - \{x\}$ en los puntos del conjunto C. Como (X, τ) es T_1, C es un conjunto cerrado, y por tanto $X - C$ es abierto. Entonces

$$U \cap (X - C) \tag{3}$$

es un entorno abierto de x que no interseca $A - \{x\}$, y por tanto x no es un punto de acumulación de A. Esto prueba la implicación por reducción al absurdo.
(2) $\Longleftarrow$]: Si todo entorno abierto de x interseca a A en infinitos puntos, entonces con total seguridad interseca a A en puntos distintos de x, y por tanto x es un punto de acumulación de A. □

Una propiedad importante de los espacios topológicos Hausdorff, que no cumple necesariamente un espacio T_1 es la siguiente (convergencia a un límite único):

Teorema 15. *Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff. Entonces toda sucesión de puntos de X converge a lo sumo a un único punto de X.*

Demostración. Sea x_n una sucesión de puntos de X que converge a $x \in X$. Sea $y \in X$, con $y \neq x$. Como (X, τ) es Hausdorff, entonces existen respectivos entornos abiertos U y V de x e y disjuntos. Como existe un natural N tal que $x_n \in U$ para $n \geq N$, entonces $x_n \notin V$ para $n \geq N$. Por tanto, x_n no converge a y, con lo que el límite, si existe, es único. □

Para acabar de hablar de espacios topológicos Hausdorff, enunciamos el siguiente teorema:

Teorema 16. *(a) Todo conjunto ordenado con la topología del orden es Hausdorff. (b) El producto cartesiano de dos espacios Hausdorff es Hausdorff en la topología producto. (c) Un subespacio topológico de un espacio Hausdorff es Hausdorff.*

Demostración. RELLENAR □

1.7. Funciones continuas

Una de las aplicaciones más importantes en topología básica son las funciones continuas. La definición en la recta real es bien conocida ($\epsilon - \delta$). Aquí definimos funciones continuas entre espacios topológicos generales.

Definición 30. *Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dos espacios topológicos, y sea $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es continua (relativa a las topologías τ_X y τ_Y) si para todo abierto $V \subset Y$ se tiene que el conjunto $f^{-1}(V)$ es abierto en X.*

Hay varias formas de definir continuidad, que son equivalentes a la definición que hemos dado. Esto se enuncia de la siguiente forma:

Teorema 17. *Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dos espacios topológicos, y $f : X \to Y$ una función. Son equivalentes:*
(1) f es continua.
(2) Para cada $A \subset X$, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
(3) Para todo cerrado $B \subset Y$, $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.
(4) Para cada $x \in X$ y cada entorno abierto V de $f(x)$, existe un entorno abierto U de x tal que $f(U) \subset V$.

Demostración. Para demostrar la equivalencia de todas las afirmaciones, probamos (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (1), así como (1) $\Longleftrightarrow$ (4).

(1) $\Longrightarrow$ (2)]: Sea f continua, y sean $A \subset X$ y $x \in \bar{A}$. Probamos que $f(x) \in \overline{f(A)}$. Tenemos que todo entorno abierto de x interseca a A. Como f es continua, dado un entorno abierto V de $f(x)$, $f^{-1}(V)$ es abierto de X y, por definición, contiene a x. Esto es, $U = f^{-1}(V)$ es un entorno abierto de

x que interseca a A. Sea $y \in U \cap A$. Tenemos que V interseca a $f(A)$ en el punto $f(y)$, y por tanto $f(x) \in \overline{f(A)}$.

(2) $\Longrightarrow$ (3)]: Por hipótesis, para cada $A \subset X$ se tiene $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. Sea $B \subset Y$ un subconjunto cerrado en la topología τ_Y. Como B es cerrado, se tiene que $B = \bar{B}$. Sea $A \subset X$, con $A = f^{-1}(B)$. Probamos que A es cerrado, es decir, que $A = \bar{A}$. Por definición, se tiene que $f(A) \subset B$. Sea $x \in \bar{A}$, entonces $f(x) \in f(\bar{A})$, y por hipótesis, y usando que B es cerrado, $f(x) \in f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \subset B$. Por tanto, si $x \in \bar{A}$, se tiene que $f(x) \in B$, que es equivalente a decir que si $x \in \bar{A}$, entonces $x \in f^{-1}(B) = A$. Por tanto, $\bar{A} \subset A$, y como $A \subset \bar{A}$, tenemos que $\bar{A} = A$, es decir, $f^{-1}(B)$ es cerrado.

(3) $\Longrightarrow$ (1)]: Esta prueba es bastante estándar. Tenemos que probar que, dado (3), entonces para cada abierto $V \subset Y$ se tiene que $U = f^{-1}(V)$ es abierto en la topología de X. Sea $V \subset Y$ abierto, por tanto $B = Y - V$ es cerrado. Se tiene que $f^{-1}(B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(V) = X - f^{-1}(V)$. Como $f^{-1}(B)$ es cerrado, entonces $f^{-1}(V)$ es abierto (por definición de cerrado como complemento).

(1) $\Longrightarrow$ (4)]: Sea f continua, y sean $x \in X$ y V un entorno abierto de $f(x)$. Entonces, $U = f^{-1}(V)$ es abierto y contiene a x, es decir, U es un entorno abierto de x. Como $U = f^{-1}(V)$, entonces $f(U) = f[f^{-1}(V)] \subset V$.

(4) $\Longrightarrow$ (1)]: Sea $V \subset Y$ un abierto, y sea $x \in f^{-1}(V)$. Entonces $f(x) \in V$, y por hipótesis existe U_x entorno abierto de x con $f(U_x) \subset V$. Entonces, $U_x \subset f^{-1}(V)$, y por tanto $f^{-1}(V)$ se puede escribir como unión de abiertos U_x, y por tanto $f^{-1}(V)$ es abierto. □

Definición 31. *Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dos espacios topológicos, y $f : X \to Y$ una función biyectiva, y $f^{-1} : Y \to X$ su inversa. Se dice que f es un homeomorfismo entre X e Y si f y f^{-1} son continuas.*

El concepto de homeomorfismo es extremadamente importante. Dos espacios topológicos homeomorfos (es decir, dos espacios topológicos entre los cuales existe un homeomorfismo) tienen las mismas propiedades topológicas, ya que un homeomorfismo lleva abiertos de un espacio a abiertos del otro y viceversa, como enunciamos en la siguiente proposición (equivalente a la definición anterior):

Proposición 7. *Sea $f : X \to Y$ una función biyectiva entre dos espacios topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y). f es un homeomorfismo si dado $U \subset X$, $f(U) \subset Y$ es abierto si y solo si U es abierto.*

Demostración. $f^{-1} : Y \to X$ es continua si y solo si para todo abierto U de X se tiene que $[f^{-1}]^{-1}(U)$ es abierto de Y. Como f es biyectiva, entonces $[f^{-1}]^{-1}(U) = U$, que es abierto. □

Ahora vamos a ver una defición que nos permite construir homeomorfismos a partir de funciones continuas inyectivas:

Definición 32. *Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dos espacios topológicos, y sea $f : X \to Y$ una función continua inyectiva. Sea $Z = f(X) \subset Y$, y (Z, τ_Z) el correspondiente subespacio topológico de Y. Entonces si la biyección $g : X \to Z$, definida como $g(x) = f(x)$ para $x \in X$, es un homeomorfismo, llamamos a $f : X \to Y$ un empotramiento topológico de X en Y.*

El siguiente teorema es fundamental y coincide con la noción de continuidad en los reales. La prueba no tiene mayor dificultad:

Teorema 18. *Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) y (Z, τ_Z) espacios topológicos. Entonces:*

(a) Si $f : X \to Y$ es tal que $f(X) = \{y_0\}$, con $y_0 \in Y$, entonces f es continua.

(b) Si (A, τ_A) es un subespacio topológico de (X, τ_X), entonces la función inclusión $j : A \to X$ tal que $j(a) = a$ para $a \in A$ es continua.

(c) Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son continuas, entonces $g \circ f : X \to Z$ es continua.

(d) Si $f : X \to Y$ es continua y (A, τ_A) es subespacio topológico de (X, τ_X), entonces $f|_A : A \to X$ es continua.

También son continuas las funciones continuas a trozos de la siguiente manera:

Teorema 19. *Sea (X, τ) un espacio topológico, y sean $A \subset X$ y $B \subset X$ tales que $X = A \cup B$ dos subconjuntos cerrados. Sean $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ funciones continuas. Si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$, entonces la función $h : X \to Y$, definida por $h(x) = f(x)$ si $x \in A$ and $h(x) = g(x)$ si $x \in B$ es continua.*

Demostración. Sea $C \subset Y$ un conjunto cerrado. Se tiene trivialmente que $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$. Como f y g son continuas, entonces $f^{-1}(C)$ y $g^{-1}(C)$ son subconjuntos cerrados de A y B, respectivamente, y por tanto cerrados de X, y por tanto $h^{-1}(C)$ es cerrado al ser unión de cerrados. Por tanto, h es continua. □

También se tiene el siguiente teorema:

Teorema 20. *Sean (A, τ_A), (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos, y sea $f : A \to X \times Y$ definida por $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$. Entonces f es continua si y solo si $f_1 : A \to X$ y $f_2 : A \to Y$ son continuas.*

Demostración. Consideremos las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ sobre la primera y segunda coordenada, respectivamente. Ambas son funciones continuas, ya que si $U \in \tau_X$ y $V \in \tau_Y$, se tiene $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$, que es abierto en la topología producto, y $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$, que también es abierto en la topología producto. También tenemos que para $a \in A$, $f_1(a) = \pi_1(f(a))$, y $f_2(a) = \pi_2(f(a))$.

$\Longrightarrow$]: Si f es continua, tenemos que f_1 y f_2 son continuas al ser composiciones de functiones continuas (π_i con f).

$\Longleftarrow$]: Sean f_1 y f_2 continuas. Entonces para cada abierto U de X se tiene $B = f_1^{-1}(U) \subset A$ es abierto de A, y para cada abierto V de Y se tiene $B' = f_2^{-1}(V) \subset A$ es abierto de A. Un elemento de la base topológica de $X \times Y$ viene dado por $U \times V$. Tenemos que $a \in f^{-1}(U \times V)$ si y solo si $f(a) \in U \times V$, es decir, si y solo si $f_1(a) \in U$ y $f_2(a) \in V$. Por tanto, $f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$. Como $f_1^{-1}(U)$ $f_2^{-1}(V)$ son abiertos de A, su intersección también es un abierto de A, y por tanto f es continua. □

1.8. Topología métrica

Ahora estudiamos la topología que nos va a interesar en un espacio de Hilbert, y en particular en Física Cuántica, ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, así como series y transformadas de Fourier. Esta es la topología generada por la métrica. El concepto de métrica se ha visto anteriormente en primer curso. Lo repetimos:

Definición 33. *Sea X un conjunto. Una métrica sobre el conjunto X es una función*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

que satisface las siguientes propiedades:
(1) Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$, y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$. (la métrica es semi-positiva)
(2) Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$. (simetría)
(3) Para $x, y, z \in X$, se tiene $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (desigualdad triangular).

Definición 34. *Dado un conjunto X y una métrica d sobre éste, definimos la bola abierta centrada en $x \in X$ y de radio $r > 0$ al conjunto*

$$B_d(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Antes de ver como se construye la topología por medio de la base de bolas abiertas, probamos el siguiente Lema:

Lema 6. *Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $x \in X$ un punto de éste, y $\epsilon > 0$. Entonces si $y \in B_d(x, \epsilon)$, $\exists \delta > 0$ tal que $B_d(y, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$.*

Demostración. Sea $\delta = \epsilon - d(x, y)$. Sea $z \in B_d(y, \delta)$. Entonces se tiene que $d(y, z) < \epsilon - d(x, y)$, por lo que $d(x, y) + d(y, z) < \epsilon$. Usando la desigualdad triangular, esto es, $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$, y por tanto $d(x, z) < \epsilon$. Esto es, si $z \in B_d(y, \delta)$ entonces $z \in B_d(x, \epsilon)$. □

Proposición 8. *Sea d una métrica sobre un conjunto X. Entonces la colección*

$$\mathcal{B} = \{B_d(x, r) : x \in X, r > 0\}$$

es base topológica de una topología τ_d (y la llamamos topología métrica o topología inducida por la métrica d).

Demostración. Probamos las dos condiciones de base. Para probar (i), tenemos $x \in X$. Como para todo $\epsilon > 0$ se tiene que $d(x,x) = 0 < \epsilon$, $x \in B_d(x,\epsilon)$, y por tanto existe un elemento de la base al cual pertenece x. Para probar la condición (ii) de base, usaremos el Lema 6. Sean B_1 y B_2 dos miembros de $\mathcal{B}$, y sea $y \in B_1 \cap B_2$. Entonces, por el Lema 6 existen dos números positivos δ_1 y δ_2 tales que $B_d(y,\delta_1) \subset B_1$ y $B_d(y,\delta_2) \subset B_2$. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces $B_d(y,\delta) \subset B_1 \cap B_2$, y queda demostrado. □

Con esto, podemos redefinir lo que es un conjunto abierto en la topología métrica:

Definición 35. *Sea (X,d) con d una métrica, y τ la topología generada por la métrica. Entonces $U \in \tau$ si y solo si para todo $y \in U$ existe $\delta > 0$ tal que $B_d(y,\delta) \subset U$.*

Definición 36. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Se dice que éste es metrizable si existe una métrica d que induce la topología τ del espacio. Un espacio métrico es un espacio topológico metrizable junto con una métrica específica d que genera su topología. Denotamos al espacio métrica con la terna (X,τ,d), y cuando no surge confusión, simplemente como (X,d), asumiendo que la topología es aquélla generada por la métrica d.*

Definición 37. *Sea (X,d) un espacio métrico, y sea $A \subset X$. Se dice que A es acotado si existe una constante $M \geq 0$ tal que para todo $x, y \in A$ se tiene $d(x,y) \leq M$. Si A es acotado y no-vacío, definimos su diámetro como $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$.*

Ahora vamos a demostrar que $\mathbb{R}^n$ con la topología usual es metrizable. Para ello, definimos dos métricas: la usual o Euclídea, y la métrica cuadrada. Ambas generan la misma topología (la usual) para $\mathbb{R}^n$.

Definición 38. *Dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, con $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, definimos su norma euclídea como*

$$||\mathbf{x}|| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Definimos, dados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$, la métrica Euclídea $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||.$$

También definimos la métrica cuadrada $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por la ecuación

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \ldots, n\},$$

donde $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

Proposición 9. *La métrica cuadrada ρ es una métrica.*

Demostración. Vamos a probar que ρ cumple los axiomas de métrica, dados en la definición 33. Los puntos (1) y (2) son sencillos. Por definición, el valor absoluto $|x_1 - y_1| \geq 0$, y el máximo de un conjunto de valores absolutos es mayor que cualquiera de ellos, en particular dados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$, $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq |x_1 - y_1| \geq 0$, y por tanto $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0$. Ahora, si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ se tiene trivialmente que su distancia es cero. Y si $x_m \neq y_m$ para algún $m \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $|x_m - y_m| > 0$ y por tanto $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) > 0$ si $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, lo que deja probado el punto (1). El punto (2) es absolutamente trivial.

Para probar el tercer axioma, es decir, la desigualdad triangular, hay que trabajar un poco más. Sean $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ y $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ tres puntos de $\mathbb{R}^n$. Utilizamos aquí la desigualdad triangular para el valor absoluto (que es trivial de demostrar). Es decir, si x_m, y_m y z_m son números reales, se tiene que

$$d(x_m, z_m) \leq d(x_m, y_m) + d(y_m, z_m),$$

donde $d(x_m, z_m) = |x_m - z_m|$. Por una parte, se tiene que si m es el entero entre 1 y n para el cual $\rho(\mathbf{x},\mathbf{z}) = d(x_m, z_m)$, usando la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$ tenemos que

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{z}) \leq d(x_m, y_m) + d(y_m, z_m).$$

Claramente, $d(x_m, y_m) \leq \rho(\mathbf{x},\mathbf{y})$, así como $d(y_m, z_m) \leq \rho(\mathbf{y}\mathbf{z})$, por lo que

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{z}) \leq d(x_m, y_m) + d(y_m, z_m) \leq \rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

□

Proposición 10. *La métrica Euclídea d es una métrica.*

Demostración. $\square$

Ahora vamos a probar que ρ y d inducen la misma topología. Para ello necesitaremos una definición y dos lemas.

Definición 39. *Sea X un conjunto y sean τ y τ' dos topologías sobre el mismo. Se dice que τ' es más fina que τ cuando $\tau \subset \tau'$.*

Lema 7. *Sea X un conjunto y τ, τ' dos topologías sobre el mismo, generadas por las respectivas bases topológicas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$. Entonces son equivalentes:*
(1) τ' es más fina que τ.
(2) Para cada $x \in X$ y cada elemento $B \in \mathcal{B}$ que contiene a x, existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$.

Demostración. (2) $\implies$ (1)]: Queremos probar que si $U \in \tau$, entonces $U \in \tau'$. Como U es abierto de τ, entonces para cada $x \in X$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$. Como por hipótesis (2) tenemos que existe B' que contiene a x tal que $B' \subset B$, se tiene que $x \in B' \subset U$ y por tanto U es un abierto de τ'.

(1) $\implies$ (2)]: Como τ' es más fina que τ, se tiene por hipótesis (1) que si $U \in \tau$, entonces $U \in \tau'$. Sea $x \in X$, y $x \in B \in \mathcal{B}$. B es abierto de τ, y por hipótesis B es abierto de τ'. Por tanto, se tiene que para cada $x \in X$ y $B \in \mathcal{B}$ que contiene a x existe un abierto de τ', $U' = B$, que contiene a x. Por definición de base topológica, existe $B' \in \mathcal{B}'$ que contiene a x tal que $B' \subset U = B$, es decir, $x \in B' \subset B$. $\square$

Lema 8. *Sean d y d' dos métricas sobre el conjunto X, y sean τ y τ' las topologías inducidas por d y d', respectivamente. Entonces τ' es más fina que τ si y solo si para cada $x \in X$ y cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$.*

Demostración. Utilizaremos el lema inmediatamente anterior para probar este.

$\implies$]: Sea $\tau \subset \tau'$. Entonces todo abierto de τ por el lema anterior, para cada $x \in X$ y cada $\epsilon > 0$ existe una bola abierta $B_{d'}(y, \delta')$, con $y \in X$ y $\delta' > 0$, en la métrica d', tal que $x \in B_{d'}(y, \delta') \subset B_d(x, \epsilon)$. Como $B_{d'}(y, \delta')$ es un abierto de τ', por la definición 35 se tiene que existe $\delta > 0$ tal que $B_{d'}(x, \delta) \subset B_{d'}(y, \delta')$. Finalmente tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$.

$\impliedby$]: Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$, así como $\delta > 0$ tal que $B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$. El resto de la prueba es sencilla, usando el lema anterior. $\square$

Teorema 21. *Las métricas Euclídea (d) y cuadrada (ρ) sobre $\mathbb{R}^n$ inducen idénticas topologías. La topología τ inducida por ambas coincide con la topología producto sobre $\mathbb{R}^n$ inducida por la topología usual de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Para demostrar este teorema, probamos primero que la topología τ_ρ inducida por ρ y la topología τ_d inducida por d son idénticas, esto es, que τ_ρ es más fina que τ_d y que τ_d es más fina que τ_ρ.

La prueba es intuitivamente sencilla, si consideramos visualmente el primer caso no trivial de $\mathbb{R}^2$ (el plano). Una bola en la métrica cuadrada es un cuadrado (sin bordes). Claramente, en el interior de cada cuadrado podemos dibujar un círculo abierto centrado en cualquiera de sus puntos que queda dentro del cuadrado. Recíprocamente, en cada bola de la métrica Euclídea (un círculo sin bordes), podemos dibujar un cuadrado abierto centrado en cualquiera de sus puntos que queda dentro del mismo. Dado el lema anterior, claramente $\tau_d \subset \tau_\rho$ y $\tau_\rho \subset \tau_d$, y por tanto las topologías inducidas son idénticas.

Matemáticamente, y en el caso general de $\mathbb{R}^n$, la prueba no es difícil. Para ello, tomemos una bola en la métrica cuadrada, dado $\epsilon > 0$, y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon\}.$$

La distancia Euclídea cumple, para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$, que $[d(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^2 = (x_1 - y_1)^2 + \ldots (x_n - y_n)^2$. Si denotamos por m el entero entre 1 y n tal que $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_m - y_m|$, entonces claramente $[d(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^2 \leq n|x_m - y_m|^2$, y por tanto $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq n^{1/2}\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Ahora, sea $\delta = \epsilon/n^{1/2}$. Se tiene que si $\mathbf{y} \in B_\rho(\mathbf{x}, \delta)$, entonces $\mathbf{y} \in B_d(\mathbf{x}, \epsilon)$. Es decir, $B_\rho(\mathbf{x}, \delta) \subset B_d(\mathbf{x}, \epsilon)$. Por el lema anterior, tenemos que ρ es más fina que d.

Ahora probamos que d es más fina que ρ. Para ello, tomemos de nuevo m tal que $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_m - y_m|$, es decirm ,$[\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^2 = (x_m - y_m)^2$. Claramente, como $[d(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^2 = [\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^2 + \sum_{i \neq m}(x_i - y_i)^2$, tenemos que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Por tanto, si para $\epsilon > 0$ se tiene $\mathbf{y} \in B_d(\mathbf{x}, \epsilon)$, entonces $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon$ y por tanto $\mathbf{y} \in B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon)$. Es decir, d es más fina que ρ, y hemos probado que $\tau_\rho = \tau_d$.

Nos queda por probar que la topología producto τ_{p} coincide con τ_ρ ó τ_d. Lo más sencillo es probar que $\tau_\rho = \tau_{\text{p}}$. Recordemos que en la topología producto, generada por la topología usual de $\mathbb{R}$, viene dada en términos de bases topológicas por productos cartesianos de intervalos abiertos en $\mathbb{R}$, es decir, (hiper)rectángulos de $\mathbb{R}^n$. Tomemos un elemento de la base producto, dado por $B_p = (a_1, b_1) \times \ldots (a_n, b_n)$, y definamos $x_i = (b_i - a_i)/2$ (el punto medio de cada intervalo abierto). Entonces, claramente $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in B_p$. Si, además, definimos $\epsilon = \max\{|x_i - a_i| : i = 1, \ldots, n\}$, se tiene que $B_p \subset B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon)$. Eso se puede hacer para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, y por tanto para cada $\mathbf{x}$ y cada elemento B_p de la base producto existe un elemento de la base generada por ρ que contiene a B_p. Por el lema 7 se tiene que τ_p es más fina que τ_ρ. El recíproco es trivial de probar.

□

Ahora continuamos con propiedades de los espacios métricos relacionados con funciones continuas. Antes de esto, vamos a probar que todo espacio métrico es Hausdorff, y que los subespacios topológicos de un espacio métrico son espacios métricos cuya métrica viene dada por la restricción de la métrica al subespacio en cuestión.

Proposición 11. *Todo espacio métrico (X, d) es Hausdorff.*

Demostración. Sea τ la topología generada por la métrica d. Sean x, $y \in X$, con $x \neq y$. Debemos encontrar sendos entornos abiertos U_x y U_y de x e y que son disjuntos. Sea $\epsilon = d(x, y)/2$. Entonces $U_x = B_d(x, \epsilon)$ y $U_y = B_d(y, \epsilon)$ son entornos abiertos de x e y, respectivamente. Además, son disjuntos, ya que si $z \in B_d(x, \epsilon)$, se tiene por la desigualdad triangular que $2\epsilon = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \epsilon + d(z, y)$, que implica que $d(z, y) > \epsilon$, y por tanto z no pertenece a la bola $B_d(y, \epsilon)$, es decir, $U_x \cap U_y = \emptyset$. □

Proposición 12. *Sea (X, d) un espacio métrico, y sea (A, τ_A) un subespacio topológico del mismo. Entonces $d|_{A\times A} : A \times A \to \mathbb{R}$ es una métrica para A e induce la topología subespacio τ_A.*

Demostración. Claramente, los axiomas (1), (2) y (3) de métrica se cumplen para su restricción a un subconjunto cualquiera. Es decir, $d|_{A\times A}$ es una métrica.

Ahora demostramos que induce la topología subespacio τ_A. A la topología inducida por la restricción de la métrica la denotamos $\tau_{d'}$, mientras que a la topología inducida por la métrica en X la llamamos τ_d.

$\tau_A \subset \tau_{d'}$]: Sea $U_A \in \tau_A$. Entonces, se puede escribir como $U_A = U \cap A$, donde $U \in \tau_d$. Como U es abierto en la topología métrica sobre X, para cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $B_d(x, \delta) \subset U$. En particular, esto es cierto para $x = a \in A$. Por tanto, existe $\delta > 0$ tal que $B_d(a, \delta) \subset U_A$. Ahora bien, $B_{d'}(a, \delta) = B_d(a, \delta) \cap A$ si $a \in A$, y por tanto hemos probado que $B_{d'}(a, \delta) \subset U_A$, es decir, $U_A \in \tau_{d'}$.

$\tau_{d'} \subset \tau_A$]: Sea $U_{d'}$ abierto de $\tau_{d'}$. Usamos de nuevo el argumento de que para $a \in A$ existe δ tal que $B_{d'}(a, \delta) = B_d(a, \delta) \cap A \subset U_{d'}$, y $B_d(a, \delta)$ es abierto de X, se tiene que $U_{d'} \in \tau_A$. □

Teorema 22. *Sea $f : X \to Y$, con X e Y metrizables, con métricas d_X y d_Y, respectivamente. Entonces f es continua si y solo si dados $x \in X$ y $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:*

$$d_X(x, y) < \epsilon \implies d_Y(f(x), f(y)) < \delta,$$

para cada $y \in X$.

Demostración. $\Longrightarrow$]: Sea f continua. Dados $x \in X$ y $\epsilon > 0$, consideremos la bola $B_{d_Y}(f(x), \epsilon)$. Como f es continua, se tiene que $U = f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon))$ es un abierto de X. Claramente, $x \in U$, y por tanto existe $\delta > 0$ tal que $B_{d_X}(x, \delta) \subset U$. Es decir, $f(B_{d_X}(x, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(x), \epsilon)$. Ahora sea $y \in B_{d_X}(x, \delta)$, es decir, $d_X(x, y) < \delta$, y tenemos que $f(y) \in B_{d_Y}(f(x), \epsilon)$, es decir, $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$.

$\Longleftarrow$]: Supongamos la condición $\epsilon - \delta$, y probemos que f es continua. Esto es equivalente a decir que dado $\epsilon > 0$ y $x \in X$, se tiene que $f(B_{d_X}(x, \epsilon)) \subset B_{d_Y}(f(x), \delta)$. Idénticamente, se tiene que $B_{d_X}(x, \epsilon) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \delta))$. El resto de la prueba es trivial, usando la definición de continuidad por entornos abiertos.

□

Ahora demostramos dos resultados importante en espacios metrizables relacionado con la convergencia.

Lema 9. *Sea (X,τ) un espacio topológico, y sea $A \subset X$. Si existe una sucesión de puntos de A que converge a $x \in X$, entonces $x \in \bar{A}$. El recíproco es cierto si X es metrizable.*

Demostración. Probemos $\implies$], que no requiere de metrizabilidad. Sea x_n una sucesión, con $x_n \in A$, que converge a un punto $x \in X$. Recordemos la definición de convergencia en una topología, esto es, $x_n \to x$ si para cada entorno abierto de x existe N natural tal que para cada $n > N$ que contiene a x_n. Supongamos que $x \notin \bar{A}$, es decir, $x \in X - \bar{A}$. Como $\bar{A}$ es cerrado, $X - \bar{A}$ es abierto y contiene a x. Esto es, $X - \bar{A}$ es un entorno abierto de x. Dado que $x_n \in A$, existe un entorno abierto de x que no incluye a ningún x_n, y por tanto, x_n no converge a x, lo que contradice que $x \in X - \bar{A}$. Por tanto, $x \in \bar{A}$.

Ahora probamos $\impliedby$] para X metrizable. Vamos a utilizar el Teorema 11. Sea $x \in \bar{A}$, y sea d la métrica que induce la topología τ. Entonces cada bola abierta $B_d(y,\epsilon)$ que contiene a x, con $y \in X$ y $\epsilon > 0$ interseca a A. Es decir, todo entorno abierto de x contiene al menos un punto de A. Para cada n natural, elegimos $\epsilon = \epsilon_n$, con $\epsilon_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Sea $x_n \in B_d(y,\epsilon_n) \cap A$ para cada n. Entonces se tiene que $x_n \to x$. □

Teorema 23. *Sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) dos espacios topológicos, y sea $f : X \to Y$. Si f es continua, entonces para toda sucesión convergente $x_n \to x \in X$, la sucesión $f(x_n)$ converge a $f(x)$. El recíproco es cierto si X es metrizable.*

Nota: para el recíproco basta con que X sea metrizable. No es necesario que Y lo sea.

Demostración. Probamos primero $\implies$], que no necesita la metrizabilidad de X. Utilizamos la definición de continuidad por entornos abiertos. Es decir, el punto (4) del teorema 17, que repetimos: f es continua si y solo si para cada $x \in X$ y cada entorno abierto V de $f(x)$, existe un entorno abierto U de x tal que $f(U) \subset V$. Como $x_n \to x$, existe N natural tal que todo entorno abierto de x contiene a x_n para $n > N$. Sea V un entorno abierto de $f(x)$, entonces para $n > N$ existe un entorno abierto U de x tal que $f(U) \subset V$. Ahora bien, $x_n \in U$ para $n > N$, por lo que $f(x_n) \in V$, con lo cual $f(x_n) \to f(x)$.

Ahora probamos $\impliedby$] cuando X es metrizable. Suponemos que para toda sucesión convergente $x_n \to x$, tenemos que $f(x_n) \to f(x)$, y probamos que f es continua. Utilizaremos el Lema anterior, por lo que demostraremos (véase Teorema 17) que para $A \subset X$, se tiene $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. Sea $x \in \bar{A}$. Por el Lema anterior, existe una sucesión x_n de elementos de A que converge a x. Por hipótesis, se tiene que $f(x_n)$ converge a $f(x)$. Como $x_n \in A$, entonces $f(x_n) \in f(A)$. Por el lema anterior, se tiene que $f(x) \in \overline{f(A)}$, lo que implica que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. □

Definición 40. *Sean (X,τ) un espacio topológico, e (Y,d) un espacio métrico. Sea $f_n : X \to Y$ una sucesión de funciones. Se dice que la sucesión f_n converge uniformemente a la función $f : X \to Y$ si y solo si dado $\epsilon > 0$, existe un número natural N tal que*

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

para todo $n > N$ y para todo $x \in X$.

Claramente, la convergencia uniforme no solo depende de la topología de Y sino también de su métrica. Enunciamos el siguiente teorema acerca de sucesiones uniformemente convergentes, llamado el teorema del límite uniforme:

Teorema 24. *Sean (X,τ) un espacio topológico, e (Y,d) un espacio métrico. Sea $f_n : X \to Y$ una sucesión de funciones continuas. Si la sucesión f_n converge uniformemente a la función $f : X \to Y$, entonces f es continua.*

Demostración. Sea V un abierto de Y, y sea $x_0 \in f^{-1}(V)$. Queremos probar que existe un entorno abierto U de x_0 tal que $f(U) \subset V$, y por tanto f es continua por el Teorema 17.

Definamos $f(x_0) = y_0$. Tomemos un $\epsilon > 0$ tal que $B_d(y_0,\epsilon) \subset V$. Como f_n converge uniformemente a f, se tiene que existe un N natural tal que para todo $n > N$ y para todo $x \in X$ se cumple que $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon/3$ (nótese que la elección de $\epsilon/3$ en lugar de ϵ es perfectamente válida, pero será muy conveniente a continuación).

Usamos ahora la continuidad de f_N (Teorema 17), de tal forma que podemos encontrar (y elegir) un entorno abierto U de x_0 tal que $f_N(U) \subset B_d(f_N(x_0), \epsilon/3)$.

Ahora, si $x \in U$, se tiene que (i) $d(f(x), f_N(x)) < \epsilon/3$, (ii) $d(f_N(x), f_N(x_0)) < \epsilon/3$ y (iii) $d(f_N(x_0), f(x_0)) < \epsilon/3$. Sumando los resultados (i), (ii) y (iii), se tiene que:

$$d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f(x_0)) < \epsilon,$$

Usando la desigualdad triangular dos veces:

$$d(f(x), f(x_0)) < d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f(x_0)) < d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f(x_0)),$$

inmediatamente vemos que

$$d(f(x), f(x_0)) < \epsilon,$$

con lo cual $f(U) \subset B_d(y_0, \epsilon)$, y por tanto f es continua. □

1.9. Compacidad

El concepto de compacidad es tremendamente importante en muchas áreas de la física matemática. En particular, muchos de los resultados sobre compacidad son necesarios para establecer la integral de Lebesgue, así como en la teoría de operadores en Mecánica Cuántica. Además, la compacidad es una propiedad topológica, es decir, preservada bajo homeomorfismos.

Comenzamos con la definición de espacio topológico compacto, así como la noción previa de recubrimiento y recubrimiento abierto.

Definición 41. *Sea X un conjunto, y $\mathcal{F}$ una colección o familia de subconjuntos de X. Se dice que $\mathcal{F}$ es un recubrimiento de X, o que recubre a X si la unión de todos los elementos de $\mathcal{F}$ es igual a X.*

Para simplificar la notación, escribiremos $\cup\mathcal{F}$ para referirnos a la unión de todos los elementos de $\mathcal{F}$, es decir

$$\cup\mathcal{F} \equiv \{\cup F : F \in \mathcal{F}\}$$

Definición 42. *Sea (X, τ) un espacio topológico, y $\mathcal{F}$ un recubrimiento de X. Se dice que $\mathcal{F}$ es un recubrimiento abierto de X si todos los elementos de $\mathcal{F}$ son abiertos en la topología τ.*

Definición 43. *Un espacio topológico (X, τ) es compacto si todo recubrimiento abierto $\mathcal{F}$ del mismo contiene una subcolección (o subfamilia) finita que también recubre a X.*

Definición 44. *Sea (X, τ) un espacio topológico, e (Y, τ_Y) un subespacio topológico del mismo. Una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X se dice que recubre a Y si la unión de todos sus elementos contiene a Y.*

Vamos a demostrar algunos resultados acerca de la compacidad de subespacios topológicos.

Lema 10. *Sea (Y, τ_Y) un subespacio topológico del espacio topológico (X, τ). Entonces Y es compacto si y solo si todo recubrimiento de Y por abiertos de X contiene una subcolección finita que recubre a Y.*

Demostración. $\Longrightarrow$]: Sea (Y, τ_Y) compacto. Sea $\mathcal{F}_X$ un recubrimiento de Y por abiertos de X. Tenemos que $Y \subset \cup\mathcal{F}_X$. Por definición de la topología subespacio τ_Y, la colección $\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}_X \cap Y$ es de abiertos de Y, y claramente $\cup\mathcal{F}_Y = Y$. Como Y es compacto, $\mathcal{F}_Y$ tiene un subrecubrimiento abierto, que podemos llamar $\mathcal{F}'_Y = \{F_1, \ldots, F_n\}$, con n un natural. Cada $F_i = U_i \cap Y$, con U_i abierto de X contenido en $\mathcal{F}_X$, y se tiene que $\{U_1, \ldots, U_n\}$ es una colección finita de abiertos de X que recubre a Y.

$\Longleftarrow$]: La prueba del recíproco es muy similar a la anterior y es trivial. □

Teorema 25. *Todo subespacio cerrado de un espacio topológico compacto es compacto.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio topológico compacto, e (Y, τ_Y) un subespacio topológico cerrado del mismo. Sea $\mathcal{F}_X$ un recubrimiento de Y por abiertos de X. Como Y es cerrado, se tiene que $X - Y$ es abierto en la topología de X. Por tanto, $\mathcal{F}'_X = \mathcal{F}_X \cup (X - Y)$ es un recubrimiento abierto de X. Como X es compacto, $\mathcal{F}'_X$ tiene un subrecubrimiento abierto finito, que llamamos $\mathcal{F}''_X = \{F_1, \ldots, F_n, X - Y\}$. Claramente, $\mathcal{F}''_X$ es un recubrimiento de Y por abiertos de X, y por tanto, usando el Lema 10, Y es compacto. □

Lema 11. *Si (Y, τ) es un subespacio compacto del espacio topológico Hausdorff (X, τ), y $x_0 \notin Y$, entonces existen dos abiertos disjuntos U y V de X que contienen a x_0 e Y, respectivamente.*

Demostración. Para cada $x \in Y$, elegimos un entorno abierto (en la topología de X) de x_0 y un entorno abierto (en la topología de X) de x que son disjuntos, y los llamamos U_x y V_x, respectivamente. Como, trivialmente, $Y \subset \cup_{x \in Y} V_x$, $\mathcal{F} = \{V_x : x \in Y$ es un recubrimiento de Y por abiertos de X. Como Y es compacto, existe un recubrimiento finito de Y por abiertos de X, al que llamamos $\mathcal{F}' = \{V_{x_1}, \ldots, _{x_n}\}$. Entonces, el abierto:

$$U = \cap_{j=1}^{n} U_{x_i}$$

es un entorno abierto de x_0 disjunto de Y. □

Teorema 26. *Todo subespacio compacto de un espacio topológico Hausdorff es cerrado.*

Demostración. Dado el lema anterior, la prueba es sencillísima. Vamos a probar que $X - Y$ es abierto, y por tanto Y es cerrado. Sea $x_0 \in X - Y$. Por el lema anterior, se tiene que existe un entorno abierto de x_0 que no interseca a Y, y por tanto x_0 no es un punto de acumulación de Y. Es decir, $x_0 \notin Y$ y $x_0 \notin Y'$, por lo que $x_0 \notin \bar{Y}$. Lo que hemos probado es que si $x_0 \in X - Y$, entonces $x_0 \in X - \bar{Y}$, o lo que es lo mismo $X - Y \subset X - \bar{Y}$. Por teoría elemental de conjuntos, como $Y \subset \bar{Y}$, se tiene que $X - \bar{Y} \subset X - Y$, y por tanto $X - Y = X - \bar{Y}$. Como $\bar{Y}$ es cerrado, $X - \bar{Y}$ es abierto y por tanto $X - Y$ es abierto. □

Teorema 27. *El espacio topológico imagen de un espacio topológico compacto bajo una función continua es compacto. Equivalentemente, podemos decirlo de la siguiente manera:*
Sea (X, τ) un espacio topológico compacto, e (Y, τ') un espacio topológico. Si $f : X \to Y$ es continua y sobreyectiva, entonces (Y, τ') es compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{F}_Y$ un recubrimiento abierto de Y. Como f es continua, si $F \in \mathcal{F}_Y$, se tiene que $U = f^{-1}(F)$ es abierto de X. Entonces, al ser f sobreyectiva, la colección $\mathcal{F}_X = \{f^{-1}(F) : F \in \mathcal{F}_Y\}$ es un recubrimiento abierto de X. Al ser X compacto, existe una subfamilia finita de $\mathcal{F}_X$, que llamamos $\mathcal{F}'_X = \{f^{-1}(F_1), \ldots, f^{-1}(F_n) : F_i \in \mathcal{F}_Y\}$, que recubre a X. Como f es sobreyectiva, $f(f^{-1}(F_i)) = F_i$, y por tanto $\{F_1, \ldots, F_n\}$ recubre a Y. □

Esto nos permite probar el siguiente teorema, que es importante ya que se refiere a homeomorfismos:

Teorema 28. *Sea (X, τ) un espacio topológico compacto, e (Y, τ') un espacio topológico Hausdorff. Si $f : X \to Y$ es biyectiva y continua, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Para probar que f es un homeomorfismo, solo necesitamos probar que $f^{-1} : Y \to X$ es continua (véase definición de homeomorfismo), ya que f es biyectiva y continua. Por el Teorema 27, se tiene que Y es compacto. Como Y es compacto, también es cerrado (véase Teorema 26). Probar que una función $g : Y \to X$ es continua es equivalente a probar que $g^{-1}(C)$ es cerrado en Y para C cerrado de X (véase Teorema 17). Si $g = f^{-1}$, como f es biyectiva, tenemos $(f^{-1})^{-1} = f$. Sea $C \subset X$ un subconjunto cerrado, y por tanto compacto (véase Teorema 25). Entonces $f(C)$ es un subconjunto compacto de Y. Como Y es Hausdorff, tenemos que $f(C)$ es cerrado (por el Teorema 26), y por lo tanto f es un homeomorfismo.

□

Una propiedad muy interesante de los espacios compactos viene dada por la siguiente proposición (llamada propiedad de Bolzano-Weierstrass):

Proposición 13. *Sea (X, τ) un espacio topológico compacto. Entonces todo subconjunto infinito del mismo tiene un punto de acumulación.*

Demostración. Sea $A \subset X$ un subconjunto sin puntos de acumulación. Demostramos que entonces A es un subconjunto finito. Sea $x \in X$. Como A no tiene puntos de acumulación, existe U_x entorno abierto de x que no interseca a A en puntos distintos de x. En particular, tenemos que $U_x \cap A = \emptyset$ si $x \notin A$, y $U_x \cap A = \{x\}$, si $x \in A$. La siguiente colección $\mathcal{F} = \{U_x : x \in X\}$ es un recubrimiento abierto de X. Al ser X compacto, existe un subrecubrimiento abierto finito, que llamamos $\mathcal{F}' = \{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$. Como $X \subset \cap \mathcal{F}'$, y $\mathcal{F}'$ es finito, contiene un número finito de puntos de A (concretamente $x_1, \ldots, x_n$), se tiene que A es un conjunto finito. □

Pasamos ahora a estudiar compacidad en el espacio Euclídeo, es decir, en $(\mathbb{R}^n, \tau)$, donde τ es la topología usual de $\mathbb{R}^n$ inducida por la métrica Euclídea $d(x, y) = ||x - y||$.

Teorema 29. *Sea (C, τ_C) subespacio topológico compacto de $(\mathbb{R}^n, \tau)$, donde τ es la topología usual de $\mathbb{R}^n$. Entonces C es cerrado y acotado.*

Demostración. C es cerrado ya que $\mathbb{R}^n$ es Hausdorff. Para probar que es acotado, nos damos cuenta de que todo recubrimiento de C por abiertos de $\mathbb{R}^n$ tiene un subrecubrimiento finito. Elegimos el siguiente recubrimiento de C por abiertos de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = \{B_d(0, n) : n \in \mathbb{Z}_+\}$. Al tener un subrecubrimiento finito $\mathcal{F}'$, existe $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que toda bola de centro en el origen tiene radio entero menor o igual a N. Por tanto, $C \subset B_d(0, N)$ para algún N lo que equivale a que C está acotado. □

Teorema 30. *Teorema de Heine-Borel: Todo intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ es compacto en la topología usual de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Esta prueba es ligeramente más difícil (o larga) que la mayoría hasta ahora y se puede consultar en cualquier libro de texto. □

2. La medida de Lebesgue

Ahora necesitamos introducir conceptos nuevos en integración. La integral de Riemann que todos conocéis de Bachillerato tiene severos problemas cuando se intentan tomar límites bajo el signo integral. Para remediar esto, se define una integral, conocida como integral de Lebesgue, que coincide con la integral de Riemann siempre y cuando la integral de Riemann existe, pero que permite integrar funciones mucho más generales y que tiene unas propiedades de convergencia y límites bajo el signo integral mucho mejores. La integral de Lebesgue es totalmente esencial para la Mecánica Cuántica, ya que los sistemas físicos son representados por estados que pertenecen a clases de equivalencia en espacios de Hilbert L^2, también llamados de cuadrado integrable *de Lebesgue* (de ahí la L en L^2). También es totalmente esencial para las series de Fourier, la transformada de Fourier, así como el espacio dual de L^2 que nos permite definir distribuciones como la delta de Dirac.

2.1. Resumen de medida e integración

En está sección se encuentran las notas de los temas explicados en clase. Para más detalles, véase más abajo, donde se construye la medida de Lebesgue desde la medida exterior.

Definición 45. *Sea Ω un conjunto, y sea Σ una colección de subconjuntos del mismo. Se dice que Σ es un σ-álgebra si satisface:*
1) $\Omega \in \Sigma$.
2) Si $A_j \in \Sigma$ para $j \in \mathbb{N}$, entonces $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Sigma$ (el σ-álgebra es cerrado con respecto a uniones numerables).
3) Si $A \in \Sigma$, entonces $\Omega - A \in \Sigma$ (el σ-álgebra es cerrado con respecto a complementos.

Proposición 14. *Sea Ω un conjunto y Σ un σ-álgebra sobre el mismo. Entonces la intersección numerable de elementos de Σ está en Σ, y el vacío está en Σ.*

Demostración. Ambas afirmaciones se comprueban fácilmente usando las propiedades del Σ-álgebra y las leyes de DeMorgan. □

Definición 46. *Sea Ω un conjunto, y Σ un σ-álgebra sobre el mismo. Se dice que $A \subset \Omega$ es medible si $\Omega \in \Sigma$.*

Definición 47. *Sea Ω un conjunto, y Σ un σ-álgebra sobre el mismo. Una función $\mu : \Sigma \to \mathbb{R} \cup \infty$ se dice que es una medida si cumple:*
1) $\mu(\emptyset) = 0$.
2) Si $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una colección numerable de elementos de Σ disjuntos dos a dos ($A_j \cap A_k = \emptyset$ para $j \neq k$), entonces

$$\mu(\cup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Esta propiedad se llama σ-aditividad.

Proposición 15. *Si $\{A_j\}_{j=1}^n$ es una colección finita de elementos del σ-álgebra, entonces*

$$\mu(\cup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j).$$

Demostración. Consideremos la colección $\{B_j\}_{j=1}^\infty$ de medibles, con $B_j = A_j$ para $1 \leq j \leq n$, y $B_j = \emptyset$ para $j > n$. Usando la σ-aditividad de la medida y que $\mu(\emptyset) = 0$, la prueba es inmediata. □

Proposición 16. *Si $A \subset B$, con A y B medibles, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

Demostración. Usando teoría elemental de conjuntos, tenemos que $B = A \cup (B - A)$, y $A \cap (B - A) = \emptyset$, por lo que si $B - A$ es medible, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A)$, donde la desigualdad viene del hecho de que la medida es semipositiva. Probamos que $B - A$ es medible. Si el conjunto completo es Ω, escribimos $B - A = B \cap (\Omega - A)$. Fíjate que $B - A$ es el conjunto cuyos elementos están en $B \subset \Omega$ pero no en A. Mientras que $B \cap (\Omega - A)$ es el conjunto cuyos elementos están en B y en Ω pero no en A, por lo que ambos conjuntos son idénticos. □

Definición 48. *Sea Ω un conjunto, Σ un σ-álgebra sobre el mismo, y μ una medida sobre Σ. Al triple (Ω, Σ, μ) se le llama espacio de medida.*

Ahora formalizamos brevemente el concepto de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. En particular, vamos a definir $\overline{\mathbb{R}}_+ \equiv [0, \infty]$ como el conjunto $[0, \infty)$, añadiéndole el símbolo "∞", que representa cualquier sucesión divergente. Además, usamos las siguientes reglas aritméticas (conmutativas), con $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$: (i) $a + \infty = \infty$, (ii) $a \cdot \infty = \infty$ si $a > 0$, (iii) $0 \cdot \infty = 0$. Con respecto al orden, definimos $a < \infty$ para $a \in [0, \infty)$. También definimos la topología usual de $[0, \infty]$ como aquélla cuya base está formada por todos los elementos de la siguientes formas ($\epsilon > 0$): (i) $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ con $\epsilon \leq a$, si $0 < a < \infty$, (ii) $[0, \epsilon)$, (iii) $(a, \infty]$. Dada la definición de la topología en $[0, \infty]$ mediante su base, podemos afirmar que

Proposición 17. *Toda sucesión x_n de elementos de $[0, \infty]$ creciente converge a un único límite en $[0, \infty]$. El límite de x_n es ∞ si la sucesión es no-acotada.*

La prueba es trivial.

Definición 49. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Se dice que es un espacio de probabilidad si $\mu(\Omega) = 1$, y la medida es una medida de probabilidad. Si $\mu(\Omega) < \infty$, se dice que es un espacio finito y la medida una medida finita.*

Definición 50. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Si Ω se puede escribir como unión numerable de elementos de Σ, no necesariamente disjuntos, y cada uno de estos tiene medida finita, se dice que μ es una medida σ-finita.*

Definición 51. *Sea $(\Omega, \Sigma, \mu, \tau)$ un espacio topológico de medida con topología τ. A la colección $\mathcal{B}(\Omega)$ definida como la intersección de todos los σ-álgebras que contienen a τ se le denomina σ-álgebra de Borel sobre Ω, y a sus elementos conjuntos de Borel o Borelianos.*

Evidentemente, el σ-álgebra de Borel sobre un espacio topológico de medida contiene a todos los conjuntos cerrados, ya que contiene por definición a todos los abiertos, y un σ-álgebra es cerrado por complementos.

Definición 52. *Sea $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu_L, \tau_u)$ el espacio topológico de medida $\mathbb{R}^n$, con el σ-álgebra de Borel, la topología usual de $\mathbb{R}^n$, y μ_L una medida. Esta se define mediante la siguiente regularidad exterior"para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:*

$$\mu_L(A) = \text{ínf}\{\mu_\mathrm{L}(\mathrm{B}) : \mathrm{A} \subset \mathrm{B},\ \mathrm{B} \in \tau_\mathrm{u}\},$$

donde $\mu_L(B)$ viene dado por el volumen en n-dimensiones si B es un elemento de la base topológica usual de $\mathbb{R}^n$ en la topología producto (es decir, intervalos abiertos (a, b) en $\mathbb{R}$ tienen medida $b - a$, hipercubos abiertos en $\mathbb{R}^n$ tienen medida dada por sus hipervolúmenes). La medida μ_L se llama medida de Lebesgue.

Definición 53. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. A cualquier extensión μ^* de μ a todos los subconjuntos de Ω, satisfaciendo la propiedad de σ-subaditividad siguiente*

$$\mu^*(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j),$$

así como $\mu^*(A) \geq 0$ para todos A_j, A de Ω, se le denomina medida exterior.

La medida exterior de Lebesgue viene dada por la expresión en la definición de medida de Lebesgue, pero para todo A no necesariamente de Borel.

Proposición 18. *La medida de Lebesgue de un intervalo cualquiera en $\mathbb{R}$ viene dada por su longitud, y la medida de Lebesgue de cualquier hipercubo en $\mathbb{R}^n$ viene dado por su volumen. Si el intervalo ó hipercubo es no-acotado, entonces su medida de Lebesgue es infinita.*

Ahora demostramos una proposición importante:

Proposición 19. *Sea $(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu)$ el espacio de medida usual de $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue μ y el σ-álgebra de Borel Σ. Si $A \in \Sigma$ es numerable, entonces $\mu(A) = 0$.*

Demostración. Utilizamos la medida exterior y la σ-aditividad. Como A es numerable, entonces es unión numerable disjunta de conjuntos finitos y, más concretamente, unión numerable disjunta de conjuntos que solo contienen un elemento cada uno. Esto es $A = \cup_{j=1}^{\infty}\{x_j\}$, con $x_j \in \mathbb{R}^n$ para todo $j \in \mathbb{N}$. La medida de un conjunto de un solo punto (o finito, análogamente) es nula, ya que podemos tomar entornos abiertos de x_j cúbicos que, por definición, cubren a $\{x_j\}$. Dado $\epsilon > 0$, y $x_j = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, un entorno abierto se puede elegir de la forma $U_\epsilon = (y_1 - \epsilon, y_1 + \epsilon) \times \ldots \times (y_n - \epsilon, y_n + \epsilon)$. La medida de Lebesgue del mismo es su volumen, es decir

$$\mu(U_\epsilon) = (2\epsilon)^n.$$

Como el ínfimo de $(2\epsilon)^n$ para $\epsilon > 0$ es 0, entonces la medida de $\{x_j\}$ es nula. Ahora usamos σ-aditividad:

$$\mu(\cup_{j=1}^{\infty}\{x_j\}) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \mu(\{x_j\}) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} 0 = 0.$$

□

Ahora definimos funciones medibles, lo cual es un concepto fundamental para establecer la integral de Lebesgue.

Definición 54. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, $E \in \Sigma$ y $f : E \to \mathbb{R}^n$ una función. Se dice que f es medible si para cada $c \in \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(\{c\}) = \{x \in E : f(x) = c\}$ es medible, es decir, si $f^{-1}(\{c\}) \in \Sigma$.*

La siguiente proposición es muy útil para estudiar la medibilidad de funciones reales con la medida de Lebesgue.

Proposición 20. *Sea $(\mathbb{R}, \Sigma, \mu)$ el espacio de medida real con la medida de Lebesgue y Σ el σ-álgebra de Borel, $E \in \Sigma$ y $f : E \to \mathbb{R}$ una función. Entonces son equivalentes:*
1) f es medible.
2) Para cada $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((c, \infty))$ es medible.
3) Para cada $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([c, \infty))$ es medible.
4) Para cada $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((-\infty, c))$ es medible.
5) Para cada $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((-\infty, c])$ es medible.

Ahora definimos un tipo de función que, aunque parezca trivial, es de vital importancia en la integral de Lebesgue.

Definición 55. *Seea Ω un conjunto, y sea $A \subset \Omega$. Se denomina función característica de A a la función $\chi : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ y $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.*

Ahora demostramos que la función característica de A es medible si A es medible.

Lema 12. *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida, y sea* $A \subset \Omega$. *Entonces* $\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}$ *es medible si y solo si* A *es medible.*

Demostración. Sea $c \neq 0, 1$, y $f \equiv \chi_A$. Entonces $f^{-1}(\{c\}) = \{x \in \Omega : \chi_A(x) = c\} = \emptyset$, y el vacío es medible. Para $c = 0$, $f^{-1}(\{0\}) = \Omega - A$. Si A es medible, entonces $\Omega - A$ es medible, y $\Omega - A$ no es medible en caso contrario. Para $c = 1$, $f^{-1}(\{1\}) = A$, que es medible si y solo si A es medible. Por tanto, χ_A es medible si y solo si A es medible. □

Las funciones reales o complejas medibles se comportan de manera adecuada cuando las sumamos, multiplicamos o dividimos:

Proposición 21. *Sean* f, g *funciones vectoriales reales (o complejas) medibles en un medible* E. *Entonces* $f + g$ *y* fg *son medibles. Si* f *y* g *son reales o complejas,* f/g *es medible en* $E - g^{-1}(\{0\})$.

Ahora definimos las funciones simples, que toman un número finito de valores.

Definición 56. *Sea* $f : E \to \mathbb{R}^n$ *una función, con dominio* E *medible. Se dice que* f *es simple si* $f(E) = \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$, *es decir, si toma un número finito de valores* $r_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, k$.

Si para la función simple definida arriba ahora definimos $A_j = f^{-1}(\{r_j\})$, claramente podemos escribir, para $x \in E$,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} r_j \chi_{A_j}(x).$$

Estamos ya en posición de definir nuestra primera integral de Lebesgue.

Definición 57. *Sea* $E \subset \mathbb{R}^n$ *medible, y sea* $f : E \to \mathbb{R}^n$ *una función simple medible de la forma:*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} r_j \chi_{A_j}(x).$$

Entonces definimos su integral de Lebesgue como

$$\int_E f = \sum_{j=1}^{k} r_j \mu(A_j),$$

donde μ *es la medida de Lebesgue.*

Fíjate en que si la medida de un A_j es nula, entonces ese término no contribuye a la integral. Además, dada la aritmética (véase más arriba) de $[0, \infty]$, podríamos permitir a la función simple ser no-acotada en un conjunto de medida nula. Como $0 \cdot \infty = 0$, si $r_j = \infty$ para algún j y $\mu(A_j) = 0$, entonces ese término no contribuye a la integral. Podemos enunciar este resultado para las funciones simples como:

Proposición 22. *Sea* f *una función simple medible en* E, *y sea* $E_0 \subset E$ *medible tal que* $\mu(E_0) = 0$. *Entonces*

$$\int_E f = \int_{E - E_0} f.$$

Cuando una propiedad se cumple en todos los puntos de un medible E excepto en un subconjunto del mismo con medida nula, se dice entonces que la propiedad se cumple en casi todo punto, y lo abreviaremos como ¨c.t.p.”.

Lema 13. *(de la Aproximación Simple). Sea* $f : E \to \mathbb{R}$ *una función medible sobre* E. *Si* f *es acotada en* E, *entonces para cada* $\epsilon > 0$ *existen funciones simples* $\varphi_\epsilon : E \to \mathbb{R}$ *y* $\psi_\epsilon : E \to \mathbb{R}$ *con las siguientes propiedades:*

$$\varphi_\epsilon \leq f \leq \psi_\epsilon,$$

y

$$0 \leq \psi_\epsilon - \varphi_\epsilon < \epsilon$$

Demostración. Como f es acotada, podemos definir un intervalo abierto y acotado, (c,d), tal que $f(E) \subset (c,d)$. Definimos asimismo una partición del intervalo compacto $[c,d]$:

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = d,$$

dado un $\epsilon > 0$ tal que $y_k - y_{k-1} < \epsilon$. Definimos $I_k = [y_{k-1}, y_k)$, para $1 \leq k \leq n$, y las siguientes funciones simples

$$\varphi_\epsilon(x) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\chi_{E_k},$$

y

$$\psi_\epsilon(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k\chi_{E_k},$$

donde hemos definido $E_k = f^{-1}(I_k)$. Nótese que son simples porque E_k es medible para todo k.

Sea ahora $x \in E$. Como $f(E) \subset (c,d)$, existe un $1 \leq k \leq n$ único tal que $y_{k-1} \leq f(x) < y_k$ y, por tanto,

$$\varphi_\epsilon(x) \leq f(x) < \psi_\epsilon(x).$$

Pero $y_k - y_{k-1} = \psi_\epsilon(x) - \varphi_\epsilon(x) < \epsilon$, y queda probado el lema. □

Ahora enunciamos el siguiente teorema, cuya demostración dejamos.

Teorema 31. *Sea $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ una función sobre un medible E. Entonces f es medible si y solo si existe una sucesión φ_n de funciones simples en E que converge puntualmente a f en E y que cumple*

$$|\varphi_n| \leq |f|$$

en E para todo n. Si f es no-negativa, entonces podemos elegir φ_n creciente.

Ahora definimos la integral de Lebesgue para funciones acotadas sobre conjuntos de medida finita.

Definición 58. *Sea una función $f : E \to \mathbb{R}$ acotada sobre E medible y de medida finita. Definimos las integrales inferior y superior de Lebesgue, respectivamente, como*

$$\underline{\int_E} f = \sup\left\{\int_E \varphi : \varphi \text{ simple}, \varphi \leq f\right\}$$

y

$$\overline{\int_E} f = \inf\left\{\int_E \psi : \psi \text{ simple}, \psi \geq f\right\}$$

Definición 59. *Sea una función $f : E \to \mathbb{R}$ acotada sobre E medible y de medida finita. Se dice que f es integrable Lebesgue sobre E si $\underline{\int_E} f = \overline{\int_E} f$. A este valor común se le denomina integral de Lebesgue de f sobre E, y se denota $\int_E f$.*

El siguiente teorema es, evidentemente, de vital importancia para la consistencia de la integral de Lebesgue:

Teorema 32. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Si f es integrable Riemann sobre $[a,b]$, entonces f es integrable Lebesgue sobre $[a,b]$ y*

$$\int_{[a,b]} f = R\int_a^b f.$$

Demostración. Toda función escalón es simple. □

Teorema 33. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ acotada y medible sobre un medible E de medida finita. Entonces f es integrable Lebesgue sobre E.*

Demostración. Vamos a aplicar el Lema de la Aproximación Simple (Lema 17).

Como f es medible y acotada, entonces para cada $\epsilon > 0$ existen funciones simples que son cota inferior y superior, respectivamente, para f, y que difieren a lo sumo en una cantidad ϵ. Sea $n \in \mathbb{N}$. Elegimos $\epsilon = 1/n$, y a las funciones simples cota inferior y superior (las aproximaciones simples) para f las denotamos φ_n y ψ_n, respectivamente. Entonces, en E tenemos

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n,$$

y $0 \leq \psi_n - \varphi_n \leq 1/n$. Por la monotonicidad de la integral de Lebesgue de funciones simples, tenemos que

$$0 \leq \inf \left\{ \int_E \psi : \psi \text{ simple}, \psi \geq f \right\} - \sup \left\{ \int_E \varphi : \varphi \text{ simple}, \varphi \leq f \right\} \leq \int_E \psi_n - \int_E \varphi_n \leq m(E)/n.$$

Como el segundo término es independiente de n, podemos tomar límites, y al ser $m(E) < \infty$, tenemos que las integrales inferior y superior de Lebesgue son iguales y, por tanto, f es integrable Lebesgue sobre E. $\square$

2.2. Medida exterior de Lebesgue

Antes de comenzar, definimos la semirrecta real extendida $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, que denotamos equivalentemente con $[0, \infty]$ (nótese el corchete cerrado en infinito). Esto se hace para permitir medidas que son infinitas. De forma natural, querremos medir un intervalo por su longitud. Es decir, si m es una función de variable conjunto de $\mathbb{R}$ a $[0, \infty]$, su longitud viene dada por la diferencia entre los límites superior e inferior del intervalo. Si $I = (a, \infty)$, con $a \in \mathbb{R}$, por ejemplo, queremos que su medida sea infinita, ya que su longitud lo es.

Definición 60. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Definimos su longitud $\ell(I)$ como si I es no-acotado, y como la diferencia entre sus puntos límite si es acotado.*

Definición 61. *Sea $A \subset \mathbb{R}$, y sea $\mathcal{A}$ la colección de recubrimientos abiertos numerables de A por intervalos, es decir, los elementos de $\mathcal{A}$ son colecciones de la forma $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, tales que $A \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k$. Definimos la medida exterior de A, $m^*(A)$, de la siguiente forma:*

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

Claramente, se tiene que $m^*(\emptyset) = 0$. Además, la medida exterior es monótona, es decir:

Proposición 23. *Sean A, $B \subset \mathbb{R}$, y sea $A \subset B$. Entonces $m^*(A) \leq m^*(B)$.*

La prueba es trivial.

También se tiene que un conjunto numerable tiene medida exterior nula:

Proposición 24. *Sea $C \subset \mathbb{R}$ un conjunto numerable. Entonces, $m^*(C) = 0$.*

Demostración. Como C es numerable, se puede representar como $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, donde $c_k \in \mathbb{R}\ \forall k$. Elegimos $\epsilon_k > 0$ para cada k. Entonces, la colección de intervalos abiertos de la forma

$$I_k = (c_k - \epsilon_k, c_k + \epsilon_k)$$

es un recubrimiento abierto de C. Por definición de la medida exterior como ínfimo, se tiene que

$$m^*(C) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\epsilon_k.$$

Elegimos $\epsilon_k = \epsilon/2^k$, con $\epsilon > 0$, y se tiene que $m^*(C) \leq \epsilon$. Esto es cierto para todo $\epsilon > 0$, y por tanto se tiene para $\epsilon = 0$, es decir, $m^*(C) \leq 0$. Como $m^*(C) \geq 0$ por definición, $m^*(C) = 0$. $\square$

Proposición 25. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Entonces $m^*(I) = \ell(I)$.*

Demostración. Hemos de probar la proposición para todos los tipos de intervalo. Empezamos con los intervalos compactos $[a, b]$. Dado $\epsilon > 0$, tenemos que $[a, b] \subset (a - \epsilon, b + \epsilon)$. Por definición de m^* como ínfimo, se tiene que $m^*([a, b]) \leq \ell(a - \epsilon, b + \epsilon)$, es decir, $m^*([a, b]) \leq b - a + 2\epsilon$. Esto es cierto para todo $\epsilon > 0$, y por tanto $m^*([a, b]) \leq b - a$. Ahora debemos demostrar que $m^*([a, b]) \geq b - a$. Como $[a, b]$ es compacto, todo recubrimiento de $[a, b]$ por abiertos de $\mathbb{R}$ contiene un subrecubrimiento finito de abiertos de $\mathbb{R}$. Esto en particular es cierto para recubrimientos por intervalos abiertos. Sea n un número natural tal que una colección de intervalos abiertos $\mathcal{I} = \{I_k\}_{k=1}^n$ cubra a $[a, b]$. Como $\mathcal{I}$ cubre $[a, b]$, entonces a pertenece a algún intervalo abierto de $\mathcal{I}$, y lo denotamos $I_1 = (a_1, b_1)$. Claramente, $a_1 < a < b_1$. Si $b_1 \geq b$, entonces $\ell(I_1) = b_1 - a_1 > b - a$, y por tanto $\sum_{k=1}^n \ell(I_k) \geq b - a$, y queda demostrado que $m^*([a, b]) \geq b - a$ en este caso. En caso contrario, $b_1 \in [a, b)$. Como $b_1 \notin (a_1, b_1)$, entonces debe pertenecer a otro intervalo abierto de la colección $\mathcal{I}$, que denotamos $I_2 = (a_2, b_2)$, es decir, $a_2 < b_1 < b_2$. Si $b_2 \geq b$, entonces $\ell(I_2) = b_2 - a_2$, y tenemos

$$\sum_{k=1}^n \ell(I_k) \geq \ell(I_1) + \ell(I_2) = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) = b_2 - (a_2 - b_1) - a_1 > b_2 - a_1 > b - a.$$

Como la colección $\mathcal{I}$ es finita, podemos continuar este proceso hasta que termine, digamos en el natural $N \leq n$. De esta forma, obtenemos una subcolección $\mathcal{I}' = \{(a_k, b_k)\}_k = 1^N$ de $\mathcal{I}$ para la cual $a_1 < a$, y $a_{k+1} < b_k$ para $1 \leq k \leq N - 1$, así como $b_N > b$, que es la condición de terminación (véase más arriba). Por tanto:

$$\sum_{k=1}^n \ell(I_k) \geq \sum_{k=1}^N \ell((a_k, b_k)) = (b_N - a_N) + \ldots + (b_1 - a_1) = b_N - (a_N - b_{N-1}) - \ldots - (a_2 - b_1) - a_1 > b_N - a_1 > b - a.$$

Sea ahora I un intervalo acotado cualquiera. Existen dos intervalos compactos J_1 y J_2 tales que $J_1 \subset I \subset J_2$, tales que dado $\epsilon > 0$ $\ell(I) - \epsilon < \ell(J_1)$ y $\ell(J_2) < \ell(I) + \epsilon$. Utilizando lo que ya hemos probado, es decir, que $m^*(J_i) = \ell(J_i)$, así como la monotonicidad de la medida exterior, tenemos que

$$\ell(I) - \epsilon \leq m^*(I) \leq \ell(I) + \epsilon.$$

Como esto es válido para todo $\epsilon > 0$, $m^*(I) = \ell(I)$.

Por último, consideremos un intervalo no acotado. Entonces, para cada n natural existe un intervalo cerrado $J \subset I$ con $\ell(J) = n$. Por monotonicidad de m^*, tenemos que $m^*(I) \geq n$ para todo n. Como $m^*(I)$ es independiente de n, tenemos que $m^*(I) = \infty$. □

Proposición 26. *La medida exterior es invariante por traslaciones, es decir, si $A \subset \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, tenemos que*

$$m^*(A + y) = m^*(A),$$

donde $A + y = \{x \in \mathbb{R} : x - y \in A\}$.

Demostración. Sea $\mathcal{I} = \{I_k\}_{k=1}^\infty$ un recubrimiento de A por intervalos abiertos de $\mathbb{R}$. Claramente, $\mathcal{I}$ cubre a A si y solo si $\mathcal{I} + y$ cubre a $A + y$. Todos los intervalos tienen la misma longitud al ser trasladados, y por tanto $m^*(A + y) = m^*(A)$. □

Proposición 27. *La medida exterior es numerablemente subaditiva, es decir, si $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ es una colección numerable cualquiera de subconjuntos de $\mathbb{R}$, disjuntos o no, entonces se cumple que:*

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty m^*(E_k).$$

Demostración. Si para algún k se tiene que $m^*(E_k) = \infty$, entonces el resultado queda probado. Por tanto, suponemos que todos los conjuntos E_k tienen $m^*(E_k)$ finita. En este caso, para cada k podemos encontrar un recubrimiento numerable de E_k por intervalos abiertos acotados de $\mathbb{R}$, que llamamos $\{I_i(k)\}_{i=1}^\infty$. Es decir, $E_k \subset \cup_{i=1}^\infty I_i(k)$, con (usando el Teorema 1) $\sum_{i=1}^\infty \ell(I_i(k)) < m^*(E_k) + \epsilon_k$, dado $\epsilon_k > 0$. Como también tenemos que $\cup_{k=1}^\infty E_k \subset \cup_{k,i} I_i(k)$, usando la definición de medida exterior:

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty \ell(I_i(k)) < \sum_{k=1}^\infty (m^*(E_k) + \epsilon_k).$$

Elegimos $\epsilon_k = \epsilon/2^k$, con $\epsilon > 0$ de tal forma que

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) + \epsilon/2.$$

Como esto es cierto para cada $\epsilon > 0$, queda demostrada la proposición. □

2.3. El σ-álgebra de funciones medibles de Lebesgue

Aquí vamos a obtener una serie de propiedades muy útiles de la medida exterior, siguiendo la llamada Çonstrucción de Caratheodory". Comenzamos con la definición de conjunto medible. Para simplificar la notación, el complemento de un subconjunto A de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} - A$, se denotará A^C.

Definición 62. *Un subconjunto E de $\mathbb{R}$ se dice que es medible si para todo $A \subset \mathbb{R}$ se tiene*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C).$$

Cuando vayamos a investigar si un conjunto es medible, en realidad nos basta con probar la desigualdad:

Proposición 28. *Un subconjunto E de $\mathbb{R}$ es medible si para todo $A \subset \mathbb{R}$ se tiene*

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C).$$

Demostración. Como $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^C)$, por subaditividad numerable de m^*, se tiene que $m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$, sea E medible o no. Por tanto, para probar que E es medible, basta probar que la desigualdad de la proposición. □

Proposición 29. *Sea $E \subset \mathbb{R}$. Entonces si $m^*(E) = 0$, E es medible.*

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto cualquiera. Tenemos que $A \cap E \subset E$, y $A \cap E^C \subset A$. Por la monotonicidad de la medida exterior, se tiene que

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \leq m^*(E) + m^*(A) = m^*(A),$$

lo cual prueba el resultado. □

Proposición 30. *La unión de una colección finita de conjuntos medibles es medible.*

Demostración. Sea $\{E_k\}_{k=1}^n$ una colección finita de medibles E_k. Usamos que, para $A \subset \mathbb{R}$ arbitrario,

$$A \cap \bigcup_{k=1}^{n} E_k = \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap E_k).$$

El complemento de la unión es igual a la intersección de complementos, es decir $\left(\cup_{k=1}^n E_k\right)^C = \cap_{k=1}^n E_k^C$. En realidad, al ser n finito, basta probarlo para dos conjuntos medibles E_1 y E_2. Entonces, como E_1 es medible,

$$m^*(A) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^C).$$

Y como E_2 es medible,

$$m^*(A \cap E_1^C) = m^*((A \cap E_1^C) \cap E_2) + m^*((A \cap E_1^C) \cap E_2^C).$$

Por tanto,

$$m^*(A) = m^*(A \cap E_1) + m^*((A \cap E_1^C) \cap E_2) + m^*((A \cap E_1^C) \cap E_2^C).$$

Vamos a transformar intersecciones en uniones. Tenemos $E_1^C \cap E_2^C = (E_1 \cup E_2)^C$. Ahora, $A \cap (E_1 \cup E_2) = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^C \cap E_2)$, como se puede comprobar fácilmente. Tenemos

$$m^*(A) = m^*(A \cap E_1) + m^*((A \cap E_1^C) \cap E_2) + m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^C).$$

Por la monotonicidad de la medida exterior, se tiene que $m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) \leq m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^C \cap E_2)$, y por tanto

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^C),$$

por lo que $E_1 \cup E_2$ es medible. □

Proposición 31. *Sea $A \subset \mathbb{R}$, y $\{E_k\}_{k=1}^n$ una colección finita de subconjuntos de $\mathbb{R}$ disjuntos dos a dos, medibles. Entonces se cumple que*

$$m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right]\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k).$$

Demostración. Aquí es conveniente usar directamente el principio de inducción. El resultado es trivialmente válido para $n = 1$. Asumimos esto es cierto para n, y lo probamos para $n + 1$. Entonces

$$A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n+1} E_k\right] \cap E_{n+1} = A \cap E_{n+1},$$

al ser todos los E_k disjuntos. También

$$A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n+1} E_k\right] \cap E_{n+1}^C = A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right]$$

Como E_{n+1} es medibles, tenemos que

$$m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n+1} E_k\right]\right) = m^*(A \cap E_{n+1}) + m^*(A \cap (\cup_{k=1}^n E_k)).$$

Usando la hipótesis de inducción(for n), tenemos que

$$m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n+1} E_k\right]\right) = m^*(A \cap E_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k),$$

y queda demostrado. □

Definición 63. *Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ se dice que es un álgebra si cumple: (i) $\mathbb{R} - A \in \mathcal{A}$ si $A \in \mathcal{A}$, y (ii) para $A_1, \dots A_n \in \mathcal{A}$ entonces $\cup_{k=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.*

Lema 14. *La unión de una colección numerable de conjuntos medibles también es la unión de otra colección numerable de conjuntos medibles disjuntos dos a dos.*

Demostración. Sea $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ una colección numerable de conjuntos medibles de $\mathbb{R}$. Definimos otra colección de la siguiente forma: $E_1' = E_1$, y $E_k' = E_k - \cup_{i=1}^{k-1} E_k$ para $k > 1$. Claramente, $\cup_{k=1}^\infty E_k' = \cup_{k=1}^\infty E_k$. Además, $E_k' \cap E_{k'}' = \emptyset$ para todo $k \neq k'$. Como los conjuntos medibles forman un álgebra, se tiene que $\{E_k'\}_{k=1}^\infty$ es una colección de disjuntos medibles cuya unión es $\cup_k E_k$. (esto se ve fácilmente para el complemento ya que si $A - B = \{x \in A : x \notin B\} = A \cap (\mathbb{R} - B)$. Entonces si A y B pertenecen a un álgebra, $\mathbb{R} - B$ pertenece al álgebra, y su intersección con A, es decir, $A - B$, también pertenece al álgebra. □

Proposición 32. *La unión numerable de conjuntos medibles es medible.*

Demostración. Sea E la unión de una colección numerable de conjuntos medibles. Esta colección, que llamamos $\{E_k\}_{k=1}^\infty$, puede ser elegida disjunta, como demostramos en el Lema 14. Llamamos $F_n = \cup_{k=1}^n E_k$. Claramente, F_n es medible ya que es unión finita de medibles. También tenemos que $E^C \subset F_n^C$, ya que $F_n \subset E$. Por tanto, dado un conjunto cualquiera $A \subset \mathbb{R}$, tenemos que

$$m^*(A) = m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F_n^C) \geq m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap E^C).$$

Por la Proposición 31, tenemos:

$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap E).$$

En la relación anterior, el miembro de la izquierda es independiente de n, y por tanto, tomando $\lim_{n\to\infty}$ en ambos miembros, tenemos que

$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap E^C).$$

Como la medida exterior es numerablemente subaditiva, tenemos que $m(A \cap E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A \cap E_k)$ y por tanto:

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C),$$

es decir, E es medible. □

Definición 64. *Una colección Σ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ se dice que es un σ-álgebra si cumple (i) $\mathbb{R} \in \Sigma$, (ii) si $A \in \Sigma$ entonces $A^C \in \Sigma$, y (iii) si $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$, entonces $\cup_{k=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.*

Dada la Proposición 32, y las propiedades que hemos visto de la medida, se tiene el siguiente

Teorema 34. *La colección $\mathcal{M}$ de todos los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$ es un σ-álgebra.*

Ahora probamos una importante proposición, no sin antes probar el siguiente lema que facilita la demostración:

Lema 15. *Sea Σ un σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que contiene los intervalos de la forma (a, ∞), con $a \in \mathbb{R}$. Entonces, Σ contiene todos los intervalos.*

Demostración. Como Σ es σ-álgebra, entonces si $(a, \infty) \in \Sigma$, tenemos que $\mathbb{R} - (a, \infty) = (-\infty, a] \in \Sigma$. Es decir, los intervalos de la forma $(-\infty, a]$ están en el σ-álgebra. Idénticamente, los intervalos de la forma $(a, b]$ son del σ-álgebra, ya que $(a, b] = (-\infty, b] \cap (a, \infty)$. Ahora probamos que los intervalos compactos también están en el σ-álgebra. Para ello, vamos a demostrar que:

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - 1/n, b].$$

Sea $x \in [a, b]$, es decir $x \leq b$ y $x \geq a$. Como $x \geq a > a - 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in (a - 1/n, b]$ para cada n, y por tanto $x \in \cap_n (a - 1/n, b]$. Para probar el recíproco, tomemos $x \in \cap_n (a - 1/n, b]$, y supongamos que $x \notin [a, b]$ (utilizaremos reducción al absurdo). Entonces, dado $\epsilon > 0$, podemos escribir $x = a - \epsilon$. Por la propiedad Arquimedeana de los reales, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \epsilon$, por lo que $x = a - \epsilon < a - 1/n$, es decir, $x \notin (a - 1/n, b]$ para algún n, y por tanto $x \notin \cap_n (a - 1/n, b]$, lo cual contradice la hipótesis. Por tanto, acabamos de probar que los intervalos compactos están en el σ-álgebra. Ahora, $[a, b] - (a, b] = \{a\}$, y por tanto los conjuntos de puntos aislados del tipo $\{a\}$ están en el σ-álgebra, por lo que $(a, b) = (a, b] - \{b\}$, $[a, b) = [a, b] - \{b\}$, así como $(-\infty, b) = (-\infty, b] - \{b\}$ y $[a, \infty) = \mathbb{R} - (-\infty, a)$ están en el σ-álgebra. Es decir, todos los intervalos están en el σ-álgebra. □

Con este lema, estamos en posición para probar la siguiente:

Proposición 33. *Todo intervalo en $\mathbb{R}$ es medible.*

Demostración. Dado el Lema anterior, solo tenemos que probar que para cada (a, ∞), con $a \in \mathbb{R}$, éste es medible. Si $a = \infty$, entonces tenemos $(a, \infty) = \mathbb{R}$ que es medible por definición de σ-álgebra sobre $\mathbb{R}$. Sea $A \subset \mathbb{R}$ arbitrario. Si $a \in A$, sea $A' = A - \{a\}$, y tenemos que

$$m^*(A) \geq m^*(A'),$$

ya que $A' \subset A$. Pero $m^*(A) \leq m^*(A \cap A') + m^*(A \cap A'^C) = m^*(A') + m^*(\{a\})$. Como $m^*(\{a\}) = 0$, ya que $\{a\}$ es un conjunto numerable (finito, de hecho), tenemos que $m^*(A) = m^*(A')$. Por tanto, podemos suponer que $a \notin A$ ya que se puede sustituir A por A', y la medida exterior no cambia.

Dados $A_1 = A \cap (-\infty, a)$ y $A_2 = A \cap (a, \infty)$, debemos probar que

$$m^*(A) \geq m^*(A_1) + m^*(A_2).$$

La definición de medida exterior como ínfimo implica que para verificar la relación de arriba nos basta probar que para cualquier $\{I_k\}_k$ es una colección de intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ que cubre a A, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \geq m^*(A_1) + m^*(A_2).$$

Dado uno de estos recubrimientos, para cada k definimos $I'_k = I_k \cap (-\infty, a)$ e $I''_k = I_k \cap (a, \infty)$. La intersección de intervalos es un intervalo (ó el vacío), por lo que

$$\ell(I_k) = \ell(I'_k) + \ell(I''_k).$$

Como $\{I'_k\}_k$ cubre a A_1 y $\{I''_k\}_k$ cubre a A_2, entonces por definición de medida exterior tenemos que

$$m^*(A_1) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I'_k)$$

y

$$m^*(A_2) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I''_k).$$

Es decir, $m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k)$. $\square$

Ahora vamos a ver qué conjuntos son los que forman parte.

Proposición 34. *Todo abierto de $\mathbb{R}$ y todo cerrado de $\mathbb{R}$ están en el σ-álgebra de funciones medibles.*

Demostración. Como un σ-álgebra, si contiene un conjunto, contiene su complemento, entonces basta probar que todo abierto es del σ-álgebra. Para probar esto, basta con probar que todo conjunto abierto de $\mathbb{R}$ se puede expresar como unión numerable de intervalos abiertos. Claramente, como los intervalos abiertos son las bolas de $\mathbb{R}$, todo abierto es unión de intervalos abiertos. Solo hemos de probar que la unión puede ser numerable. Para demostrar esto, sea $U \subset \mathbb{R}$ abierto, y sea $x \in U$. Entonces $\exists \epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$ (véase ??). Esto es equivalente a que existe $y > x$ tal que $(x, y) \subset U$, y existe $z < x$ tal que $(z, x) \subset U$. Definimos, para cada $x \in U$, $a_x = \inf\{z \in \mathbb{R} : (z, x) \subset U\}$ así como $b_x = \sup\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \subset U\}$. Llamemos $I_x = (a_x, b_x)$ para cada $x \in U$, y probemos que $I_x \subset U$, con $a_x \notin U$ y $b_x \notin U$. Para ello, sea $b_x \in U$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $(b_x - \epsilon, b_x + \epsilon) \subset U$. Pero entonces $(x, b_x + \epsilon) \subset U$, por lo que b_x no es el supremo definido arriba. Por tanto, $b_x \notin U$. La prueba para a_x es idéntica. Ahora, por definición, y con estas condiciones, $I_x \subset U$, y la colección $\{I_x\}_{x \in U\}}$ es disjunta. Claramente, $U = \cup_{x \in U} I_x$. Usando la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, podemos expresar U como unión numerable de intervalos abiertos. Es decir, todo abierto de $\mathbb{R}$ está en el σ-álgebra de conjuntos medibles. Como el σ-álgebra contiene los complementos de todo conjunto, los cerrados también pertenecen a éste. $\square$

Definición 65. *Se denomina conjunto de Borel a todo conjunto que pertenece a la siguiente colección: la intersección de todos los σ-álgebras de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que contienen a los abiertos.*

Definición 66. *Un conjunto de números reales se denomina conjunto G_δ si se puede escribir como la intersección numerable de conjuntos abiertos. Un conjunto de reales se llama conjunto F_σ si se puede obtener como unión numerable de conjuntos cerrados.*

Con esto, ya tenemos el siguiente:

Teorema 35. *La colección $\mathcal{M}$ de conjuntos medibles de Lebesgue es un σ-álgebra que contiene el σ-álgebra de conjuntos de Borel, cada intervalo, cada abierto, cada cerrado, cada conjunto G_δ y cada conjunto F_σ.*

Proposición 35. *Si $A\mathbb{R}$ es medible, entonces $A + y$, $y \in \mathbb{R}$ es medible.*

La prueba es trivial.

Definición 67. *La restricción de la medida exterior m^* al σ-álgebra $\mathcal{M}$ de conjuntos medibles de $\mathbb{R}$ se denomina medida de Lebesgue. Se denota m, y si $E \subset \mathbb{R}$ es medible, entonces $m(E) = m^*(E)$.*

Ahora tenemos la siguiente proposición, que es muy importante.

Proposición 36. *La medida de Lebesgue es numerablemente aditiva, es decir, si $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una colección numerable de conjuntos medibles disjuntos de $\mathbb{R}$, entonces $\cup_{k=1}^{\infty} E_k$ es medible y*

$$m\left(\cup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k).$$

Demostración. Por la proposición 32, $\cup_{k=1}^{\infty} E_k$ es un conjunto medible. Por la proposición 27, la medida exterior, y por tanto la medida, es numerablemente subaditiva, por lo que

$$m(\cup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k).$$

Por tanto, nos queda probar la desigualdad $\geq$. En la proposición 31, tomamos $A = \mathbb{R}$, con lo que para n finito, se tiene

$$m(\cup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} m(E_k).$$

Claramente, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\cup_{k=1}^{n} E_k \subset \cup_{k=1}^{\infty} E_k$, y al ser la medida monótona, $m(\cup_{k=1}^{n} E_k) \leq m(\cup_{k=1}^{\infty} E_k)$. Por tanto,

$$m(\cup_{k=1}^{\infty} E_k) \geq \sum_{k=1}^{n} m(E_k).$$

Como el miembro de la izquierda es independiente de n, la desigualdad es cierta para todo n, y podemos tomar límites, es decir

$$m(\cup_{k=1}^{\infty} E_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k).$$

□

Ahora probamos un teorema que también es muy importante, para el cual necesitamos la llamada propiedad de excisión de la medida:

Proposición 37. *(Propiedad de excisión de la medida). Sean $A, B \in \mathcal{M}$, con $B \subset A$. Entonces*

$$m(A - B) = m(A) - m(B).$$

Demostración. Como B es medible, tenemos que

$$m(A) = m(A \cap B) + m(A \cap B^C).$$

Claramente, $A \cap B = B$, y $A \cap B = A \cap (\mathbb{R} - B) = A - B$, y la proposición queda probada. □

Teorema 36. *(Continuidad de la medida). La medida de Lebesgue, definida sobre el σ-álgebra de conjuntos medibles de Lebesgue, satisface las siguientes propiedades:*
(i) Si $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una colección ascendente (e.e., $A_n \subset A_{n+1}$ para cada n) de conjuntos medibles de $\mathbb{R}$, entonces

$$m(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

(ii) Si $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una colección descendente (e.e., $B_{n+1} \subset B_n$ para cada n) de conjuntos medibles de $\mathbb{R}$, y $m(B_1) < \infty$ entonces

$$m(\cap_{k=1}^{\infty} B_k) = \lim_{n\to\infty} m(B_n).$$

Demostración. Probamos el punto (i), y dejamos el punto (ii) para los problemas. Sea $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una colección ascendente de medibles. Vamos a obtener una colección disjunta de medibles a partir de los mismos. Definimos para ello $A_0 = \emptyset$, y para $k \geq 1$, definimos $C_k = A_k - A_{k-1}$. Como A_k es medible para todo $k \geq 0$ (el vacío es medible de medida nula), y la colección de conjuntos medibles es un σ-álgebra, entonces C_k es medible para todo $k \geq 1$. Como la colección $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ es ascendente, la colección $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$ es disjunta y, además, $\cup_{k=1}^{\infty} C_k = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$. Por tanto,

$$m(\cup_{k=1}^{\infty} C_k) = m(\cup_{k=1}^{\infty} A_k).$$

Ahora, al ser $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$ disjunta, podemos aplicar la aditividad numerable de la medida de Lebesgue, esto es

$$m(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(C_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k - A_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m(A_k - A_{k-1}).$$

Ahora aplicamos la proposición 37 (la propiedad de excisión). Como $A_{k-1} \subset A_k$, $m(A_k - A_{k-1}) = m(A_k) - m(A_{k-1})$, y nos queda

$$m(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} (m(A_n) - m(A_0)) = \lim_{n\to\infty} m(A_n),$$

donde hemos usado que $A_0 = \emptyset$. □

La siguiente definición es muy importante ya que aparece constantemente en la teoría de espacios de Hilbert y en la integral de Lebesgue.

Definición 68. *Se dice que una propiedad de un conjunto E medible se cumple en casi todo punto, que abreviamos como c.t.p., si se cumple para todo $x \in E - E_0$, donde E_0 es medible y $m(E_0) = 0$.*

Lema 16. *(Lema de Borel-Cantelli). Sea $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ una colección numerable de conjuntos medibles tal que $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$. Entonces casi todo punto $x \in \mathbb{R}$ pertenece a a lo sumo un número finito de E_k's.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, por la subaditividad numerable de la medida, tenemos que

$$m(\cup_{k=n}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} m(E_k) < \infty.$$

Ahora, definiendo $B_n = \cup_{k=n}^{\infty} E_k$, claramente $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una colección descendiente. Por tanto, usando la continuidad de la medida,

$$m(\cap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} m(B_n) = \lim_{n\to\infty} m(\cup_{k=n}^{\infty} E_k) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} m(E_k) = 0.$$

Por lo tanto, $x \in \mathbb{R}$ pertenece a lo sumo a un número finito de E_k's excepto en un conjunto de medida nula, es decir, c.t.p. □

3. Funciones medibles de Lebesgue

Ahora estudiamos el concepto de función medible, que nos pone en posición de aprender a hacer integrales de Lebesgue.

Comenzamos con la siguiente proposición

Proposición 38. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$, donde $E \subset \mathbb{R}$ es medible. Entonces son equivalentes:*
(i) Para cada $c \in \mathbb{R}$, el conjunto $f^{-1}((c, \infty))$ es medible.
(ii) Para cada $c \in \mathbb{R}$, el conjunto $f^{-1}([c, \infty))$ es medible.
(iii) Para cada $c \in \mathbb{R}$, el conjunto $f^{-1}((-\infty, c))$ es medible.
(iv) Para cada $c \in \mathbb{R}$, el conjunto $f^{-1}((-\infty, c])$ es medible.
(Arriba, hemos simplificado la notación en el sentido de que hemos definido $f^{-1}(A) \equiv f^{-1}(A) \cap E$).

Se tiene, a partir de aquí, el siguiente

Corolario 2. *Si cualquiera de los puntos de la proposición anterior se cumplen, entonces el conjunto $f^{-1}(\{c\})$ es medible.*

Demostración. Vamos a probar la proposición, y dejamos la prueba del corolario para los problemas. Como $f^{-1}((c, \infty)) = E - f^{-1}((-\infty, c])$, y $f^{-1}([c, \infty)) = E - f^{-1}((-\infty, c))$, tenemos que $(i) \iff (iv)$ así como $(ii) \iff (iii)$. Por tanto, solo tenemos que probar $(i) \iff (ii)$.

Sea (i) cierto. Esto es, dado $c \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) > c\}$ es medible. Podemos escribir:

$$\{x \in E : f(x) \geq c\} = \cap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) > c - 1/n\}.$$

Como la intersección numerable de medibles es medible, entonces $(i) \implies (ii)$.

Sea (ii) cierto. Entonces escribimos

$$\{x \in E : f(x) > c\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{x \in E : f(x) \geq c + 1/n\}.$$

Como la unión numerable de medibles es medible, entonces $(ii) \implies (i)$ y la prueba concluye. □

Definición 69. *Una función $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ sobre un conjunto medible E se dice que es una función medible si satisface cualquiera de los cuatro puntos en la proposición 38.*

Proposición 39. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ sobre un dominio E medible. La función f es medible si y solo si para cada abierto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$, se tiene que $f^{-1}(\mathcal{O})$ es medible.*

Demostración. $\Longleftarrow$]: Supongamos que para cada $\mathcal{O}$ abierto de $\mathbb{R}$, y $f^{-1}(\mathcal{O})$ medible. Para cualquier $c \in \mathbb{R}$, (c, ∞) es abierto, y por tanto $f^{-1}((c, \infty))$ es medible, lo cual implica que f es medible.

$\Longrightarrow$] : Sea f medible, y sea $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ un abierto. Entonces (véase la prueba de la proposición 34), $\mathcal{O}$ se puede escribir como unión numerable de intervalos abiertos acotados. Llamamos a esta colección $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$. Entonces, $I_k = (a_k, b_k)$, que se puede expresar como $I_k = (-\infty, b_k) \cap (a_k, \infty)$. Como f es medible, $f^{-1}((a_k, \infty))$ y $f^{-1}((-\infty, b_k))$ son medibles. Entonces se tiene que

$$f^{-1}(\mathcal{O}) = f^{-1}\left(\cup_{k=1}^{\infty}((-\infty, b_k) \cap (a_k, \infty))\right) = \cup_{k=1}^{\infty}\left(f^{-1}((-\infty, b_k)) \cap f^{-1}((a_k, \infty))\right),$$

con lo cual $f^{-1}(\mathcal{O})$ es claramente medible. □

Corolario 3. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ continua sobre su dominio medible $E \subset \mathbb{R}$. Entonces f es medible.*

Demostración. Como f es continua, entonces para todo abierto $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}(\mathcal{O})$ es abierto. Todo abierto es medible, que implica que $f^{-1}(\mathcal{O})$ es medible, y por tanto f es medible. □

Proposición 40. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Si f es monótona, entonces f es medible.*

Demostración. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ monótona. Por simplicidad, supongamos que es estrictamente creciente, es decir, si $x_1 \in I$ y $x_2 \in I$, y $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Supongamos que $I = (a, b)$, es decir, un intervalo abierto. Dado $c \in \mathbb{R}$, analizamos el conjunto $S_f(c) = \{x \in I : f(x) > c\}$. Como f es creciente, si $c \leq \lim_{x \to a^+} f(x)$, entonces $S_f(c) = (a, b)$, que es medible. Si $c \geq \lim_{x \to b^-} f(x)$, entonces $S_f(c) = \emptyset$, que también es medible. Nos queda el caso intermedio, es decir, $c \in f((a, b))$. Pero en este caso, en lugar de usar el conjunto $S_f(c)$, podemos analizar el conjunto $S'_f(c) = \{x \in (a, b) : f(x) = c\}$. Como f es estrictamente creciente, el conjunto $S'_f(c)$ contiene un elemento ó ninguno, es decir, o es finito o vacío, y ambos tipos de conjuntos son medibles. □

Proposición 41. *Sea $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$. Se tiene:*
(i) Si f es medible sobre E y $f = g$ c.t.p. en E, entonces g es medible sobre E.
(ii) Sea $D \subset E$ medible. Entonces f es medible sobre E si y solo si $f|_D$ y $f|_{E-D}$ son medibles.

Demostración. La demostración es muy sencillita.

(i) Tenemos que para cada $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{c\}) = \{x \in E : f(x) = c\}$ es medible. Podemos escribir

$$g^{-1}(\{c\}) = \{x \in E : g(x) = c\} = \{x \in E - E_0 : f(x) = c\} = \{x \in E : f(x) = c\} \cap (E - E_0).$$

Como $f^{-1}(\{c\})$ es medible, y $E - E_0$ es medible, entonces $g^{-1}(\{c\})$ es medible, y por tanto g es medible.

(ii) $\Longleftarrow$]: Sean $f|_D$ y $f|_{E-D}$ medibles. Entonces escribimos

$$f^{-1}(\{c\}) = \{x \in D : f(x) = c\} \cup \{x \in E - D : f(x) = c\},$$

que es unión de medibles y por tanto f es medible.

$\Longrightarrow$]: Sea f medible. Entonces $\{x \in D : f(x) = c\} = f^{-1}(\{c\}) \cap D$ es medible, y por tanto $f|_D$ medible. La prueba para $E - D$ procede idénticamente. □

Teorema 37. *Sean f y g funciones medibles sobre E que son finitas c.t.p. en E. Entonces (ii) $\alpha f + \beta g$ es medible en E $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y (ii) fg es medible en E.*

Demostración. (i). Comencemos probando que $f+g$ es medible. Para ello, para cada c real debemos probar que el conjunto $S_{f+g}(c) = \{x \in E : f(x)+g(x) > c\}$ es medible. Como f y g son finitas c.t.p. en E, supongamos que f es finita en $E - E_f$ y g es finita en $E - E_g$, con $m(E_f) = m(E_g) = 0$. Por tanto, $f+g$ es finita en $E - (E_f \cup E_g)$. Dada la proposición inmediatamente anterior, podemos simplemente eliminar $E_f \cup E_g$ y suponer que $f+g$ es finita en todo E.

Ahora, sea $x \in S_{f+g}(c)$, entonces $f(x) > c - g(x)$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) > q > c - g(x)$. Por tanto

$$S_{f+g}(c) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in E : g(x) > c - q\} \cap \{x \in E : f(x) > q\}.$$

Como f y g son medibles, entoncees $f+g$ es medible, ya que $\mathbb{Q}$ es numerable.

Ahora, $\alpha f + \beta g$, con $\beta \neq 0$ es medible si y solo si $\alpha f + g$ es medible, obviamente. Tenemos también que αf es medible y, como $f+g$ es medible si f y g son medibles, entonces $\alpha f + \beta g$ es medible.

(ii) Consideramos la función $(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg$. Por tanto, el producto fg se puede escribir como

$$fg = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right].$$

Como la suma de funciones medibles es medible (apartado (i)), basta probar que el cuadrado de una función medible es medible. Consideramos entonces f medible, y

$$S_{f^2}(c) = \{x \in E : (f(x))^2 > c\}.$$

Si $c < 0$, entonces $S_{f^2}(c)$ es medible. Si $c \geq 0$, entonces

$$S_{f^2}(c) = \{x \in E : f(x) > \sqrt{c}\} \cup \{x \in E : f(x) < -\sqrt{c}\}.$$

Como f es medible, tenemos que f^2 es medible. □

Proposición 42. *Sea $g : E \to \mathbb{R}$ una función medible en E, y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $f \circ g : E \to \mathbb{R}$ es medible en E.*

Demostración. Como f es continua, para cada abierto $U \subset \mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto de $\mathbb{R}$. Como $(f \circ g)^{-1}(U) = g^{-1}(f^{-1}(U))$, por la proposición 39, y g siendo medible, tenemos que $f \circ g$ es medible. □

Corolario 4. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible en E. Entonces $|f|$ es medible en E.*

La prueba es trivial.

Ahora vamos a pasar a estudiar las propiedades de sucesiones de funciones medibles y sus límites. Primero, definimos varias nociones de convergencia en los reales.

Definición 70. *Sean $f_n : E \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones con dominio común E, $f : E \to \mathbb{R}$ una función, y $A \subset E$. Se dice que:*
(i) f_n converge a f puntualmente en A si

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x),\ \forall x \in A.$$

(ii) f_n converge a f puntualmente c.t.p. en A si converge a f puntualmente en $A - B$, donde $m(B) = 0$.
(iii) f_n converge a f uniformemente en A si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n - f| < \epsilon$ para $n \geq N$ en A.

Proposición 43. *Sea $f_n : E \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles en E que converge putualmente c.t.p. en E a la función $f : E \to \mathbb{R}$. Entonces, f es medible en E.*

Demostración. De nuevo, podemos asumir que $f_n \to f$ puntualmente en E en lugar de c.t.p. en E.

Tenemos que f_j es medible para todo j. Entonces $x \in f_j^{-1}((-\infty, c))$, que es un conjunto medible, si y solo si $f_j(x) < c$. Entonces, como $f_n \to f$ puntualmente en E, tenemos que $x \in f^{-1}((-\infty, c))$ si y solo si existen números naturales n y k tales que $f_j(x) < c - 1/n$ para todo $j \geq k$. Esta afirmación la probamos ahora:

$\Longleftarrow$]: Tenemos $f_j(x) < c - 1/n$. Pero como el miembro de la derecha es independiente de j, podemos tomar el límite $j \to \infty$, y nos queda

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x) < c - 1/n < c.$$

$\Longrightarrow$]: Supongamos que $f(x) < c$, y probamos por reducción al absurdo. Es decir, supongamos que para todo n y todo k $f_j(x) \geq c - 1/n$. Entonces tomando el límite, $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x) \geq c - 1/n$. Como el miembro de la izquierda es independiente de n, tenemos que tomando el límite $n \to \infty$, $f(x) \geq c$, lo cual contradice la hipótesis.

Es claro que:

$$\{x \in E : f(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\bigcap_{j=k}^{\infty} \{x \in E : f_j(x) < c - 1/n\} \right].$$

Como es unión numerable de intersección numerable de conjuntos medibles, tenemos que f es medible. $\square$

Definición 71. *Sea $A \subset \mathbb{R}$. Se define la función característica de A como $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\chi_A(x) = 1$ si $\in A$ y $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.*

Definición 72. *Una función $\varphi : E \to \mathbb{R}$ sobre un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$ se dice que es simple si es medible y solo toma un número finito de valores. Es decir, φ es simple si es medible y $\varphi(E)$ es un conjunto finito.*

Definición 73. *Sea $\varphi : E \to \mathbb{R}$ una función simple, y sea $\varphi(E) = \{c_1, \ldots, c_n\}$. Llamamos representación canónica de la función simple en x a la siguiente expresión*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i},$$

donde $E_i = \{x \in E : \varphi(x) = c_i\}$.

Ahora probamos una serie de resultados que permiten aproximar funciones medibles por funciones simples.

Lema 17. *(de la Aproximación Simple). Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible sobre E. Si f es acotada en E, entonces para cada $\epsilon > 0$ existen funciones simples $\varphi_\epsilon : E \to \mathbb{R}$ y $\psi_\epsilon : E \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:*

$$\varphi_\epsilon \leq f \leq \psi_\epsilon,$$

y

$$0 \leq \psi_\epsilon - \varphi_\epsilon < \epsilon$$

Demostración. Como f es acotada, podemos definir un intervalo abierto y acotado, (c, d), tal que $f(E) \subset (c, d)$. Definimos asimismo una partición del intervalo compacto $[c, d]$:

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = d,$$

dado un $\epsilon > 0$ tal que $y_k - y_{k-1} < \epsilon$. Definimos $I_k = [y_{k-1}, y_k)$, para $1 \leq k \leq n$, y las siguientes funciones simples

$$\varphi_\epsilon(x) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \chi_{E_k},$$

y

$$\psi_\epsilon(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \chi_{E_k},$$

donde hemos definido $E_k = f^{-1}(I_k)$. Nótese que son simples porque E_k es medible para todo k.

Sea ahora $x \in E$. Como $f(E) \subset (c, d)$, existe un $1 \leq k \leq n$ único tal que $y_{k-1} \leq f(x) < y_k$ y, por tanto,

$$\varphi_\epsilon(x) \leq f(x) < \psi_\epsilon(x).$$

Pero $y_k - y_{k-1} = \psi_\epsilon(x) - \varphi_\epsilon(x) < \epsilon$, y queda probado el lema. $\square$

Ahora enunciamos el siguiente teorema, cuya demostración dejamos.

Teorema 38. *Sea $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ una función sobre un medible E. Entonces f es medible si y solo si existe una sucesión φ_n de funciones simples en E que converge puntualmente a f en E y que cumple*

$$|\varphi_n| \leq |f|$$

en E para todo n. Si f es no-negativa, entonces podemos elegir φ_n creciente.

4. La integral de Lebesgue

Ya estamos en disposición de definir la integral de Lebesgue y obtener sus propiedades más importantes. Antes de eso, repasamos las propiedades de la integral de Riemann.

4.1. Integral de Riemann

En toda esta sección referente a la integral de Riemann, que todos conocéis, consideramos una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, así como particiones arbitrarias (finitas) del intervalo compacto $[a, b]$, de la forma

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\},$$

donde $x_i < x_{i-1}$ para $0 \leq i \leq n$, con $x_0 = a$ y $x_n = b$.

Definición 74. *Las sumas inferior (L) y superior (U) de Darboux para f con respecto a la partición P, respectivamente, se definen como*

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

y

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

donde $m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} < x < x_i\}$ y $M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} < x < x_i\}$.

Definición 75. *Llamamos integrales inferior y superior de Riemann de f sobre $[a, b]$, respectivamente, a*

$$R\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}$$

y

$$R\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}$$

Definición 76. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada es integrable Riemann si y solo si sus integrales superior e inferior de Riemann son iguales. A este valor común se le llama integral de Riemann de f sobre $[a, b]$.*

Definición 77. *Una función $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada se denomina función escalón (o escalonada) si existe una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ de $[a, b]$, y existen números reales $c_1, \ldots, c_n$ tales que para $1 \leq i \leq n$, se tiene que $\psi(x) = c_i$ para $x_{i-1} < x < x_i$.*

Claramente, para una función escalón se tiene que $L(\psi, P) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) = U(\psi, P)$. Por tanto, una función escalón es integrable Riemann y su integral es

$$R\int_a^b \psi = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Por tanto, tenemos la siguiente definición equivalente para las integrales inferior y superior de Riemann:

Proposición 44. *Sea S el conjunto de funciones escalón en $[a,b]$. Se tiene en $[a,b]$:*

$$R\underline{\int_a^b} f = \sup\{R\int_a^b \varphi : \varphi \in S, \varphi \leq f\}$$

y

$$R\overline{\int_a^b} f = \inf\{R\int_a^b \psi : \psi \in S, \psi \geq f\}$$

4.2. La integral de Lebesgue de una función medible y acotada sobre un conjunto de medida finita

Comenzamos definiendo la integral de Lebesgue para una clase particular de funciones medibles. Estas son las funciones simples, que como ya vimos anteriormente pueden aproximar arbitrariamente bien funciones medibles acotadas generales.

Definición 78. *Sea $\psi : E \to \mathbb{R}$ una función simple sobre el conjunto medible E, que toma n valores distintos $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Definimos $E_i = \{x \in E : \psi(x) = a_i\}$, y definimos la integral de Lebesgue de ψ como*

$$\int_E \psi = \sum_{i=1}^{n} a_i m(E_i).$$

Ahora enunciamos un Lema que se debe utilizar para probar la proposición inmediatamente posterior. La prueba es extremadamente sencilla y se deja para los ejercicios.

Lema 18. *Sea $\{E_i\}_{i=1}^n$ una colección finita disjunta de subconjuntos medibles de E, con E medible y de medida finita. Para $1 \leq i \leq n$, definimos $a_i \in \mathbb{R}$. Entonces:*
Si $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ en E, entonces $\int_E \phi = \sum_{i=1}^n a_i m(E_i)$.

También dejamos para los ejercicios la prueba de la siguiente proposición:

Proposición 45. *(Linealidad y monotonicidad de la integral). Sea φ y ψ funciones simples sobre un conjunto medible E de medida finita. Entonces para cualesquiera reales α y β:*

$$\int_E (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_E \varphi + \beta \int_E \psi$$

Además, si $\varphi \leq \psi$ en E, entonces se tiene

$$\int_E \varphi \leq \int_E \psi.$$

Definición 79. *Sea una función $f : E \to \mathbb{R}$ acotada sobre E medible y de medida finita. Definimos las integrales inferior y superior de Lebesgue, respectivamente, como*

$$\underline{\int_E} f = \sup\left\{\int_E \varphi : \varphi \text{ simple}, \varphi \leq f\right\}$$

y

$$\overline{\int_E} f = \inf\left\{\int_E \psi : \psi \text{ simple}, \psi \geq f\right\}$$

Definición 80. *Sea una función $f : E \to \mathbb{R}$ acotada sobre E medible y de medida finita. Se dice que f es integrable Lebesgue sobre E si $\underline{\int_E} f = \overline{\int_E} f$. A este valor común se le denomina integral de Lebesgue de f sobre E, y se denota $\int_E f$.*

El siguiente teorema es, evidentemente, de vital importancia para la consistencia de la integral de Lebesgue:

Teorema 39. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Si f es integrable Riemann sobre $[a,b]$, entonces f es integrable Lebesgue sobre $[a,b]$ y*

$$\int_{[a,b]} f = R\int_a^b f.$$

Demostración. Toda función escalón es simple. □

Teorema 40. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ acotada y medible sobre un medible E de medida finita. Entonces f es integrable Lebesgue sobre E.*

Demostración. Vamos a aplicar el Lema de la Aproximación Simple (Lema 17).

Como f es medible y acotada, entonces para cada $\epsilon > 0$ existen funciones simples que son cota inferior y superior, respectivamente, para f, y que difieren a lo sumo en una cantidad ϵ. Sea $n \in \mathbb{N}$. Elegimos $\epsilon = 1/n$, y a las funciones simples cota inferior y superior (las aproximaciones simples) para f las denotamos φ_n y ψ_n, respectivamente. Entonces, en E tenemos

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n,$$

y $0 \leq \psi_n - \varphi_n \leq 1/n$. Por la monotonicidad de la integral de Lebesgue de funciones simples, tenemos que

$$0 \leq \inf \left\{ \int_E \psi : \psi \text{ simple}, \psi \geq f \right\} - \sup \left\{ \int_E \varphi : \varphi \text{ simple}, \varphi \leq f \right\} \leq \int_E \psi_n - \int_E \varphi_n \leq m(E)/n.$$

Como el segundo término es independiente de n, podemos tomar límites, y al ser $m(E) < \infty$, tenemos que las integrales inferior y superior de Lebesgue son iguales y, por tanto, f es integrable Lebesgue sobre E. □

Proposición 46. *Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ acotadas y medibles sobre el medible E de medida finita. Entonces $\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $f \leq g$ sobre E, se tiene $\int_E f \leq \int_E g$.*

Dejamos la demostración de esta proposición para los problemas.

Corolario 5. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ acotada y medible sobre un medible E de medida finita. Sean $A, B \subset E$ medibles y disjuntos. Entonces $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$.*

Demostración. Usamos la siguiente propiedad elemental. Si $E_1 \subset E$ es medible, entonces $\int_{E_1} f = \int_E f \chi_{E_1}$. Como, si $A \cap B = \emptyset$, $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$, entonces $\int_{A \cup B} f = \int_E f \chi_{A \cup B}$ y la prueba termina trivialemnte. □

Corolario 6. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ acotada y medible sobre el medible E de medida finita. Entonces*

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|.$$

Demostración. En E, tenemos que $-|f| \leq f \leq |f|$. Como $|f|$ es medible si f es medible, y $f \leq |f|$, por la monotonicidad de la integral de Lebesgue, se tiene que

$$-\int_E |f| \leq \int_E f \leq \int_E |f|.$$

Entonces, se tiene que $| \int_E f| \leq \int_E |f|$. □

Ahora pasamos a estudiar los primeros resultados sobre límites de integrales de Lebesgue de sucesiones de funciones.

Proposición 47. *Sea $f_n : E \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones acotadas medibles sobre un conjunto medible E de medida finita no-nula. Entonces:*
Si $f_n \to f$ uniformemente en $E \implies \lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$.

Demostración. Usando un resultado bien conocido para las sucesiones de números reales, como $f_n \to f$ uniformemente y f_n es acotada, entonces f es acotada. Por tanto, f es medible y acotada. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f - f_n| < \epsilon/m(E)$ en E para todo $n \geq N$. Entonces:

$$\left| \int_E f - \int_E f_n \right| = \left| \int_E (f - f_n) \right| \leq \int_E |f - f_n| < m(E)(\epsilon/m(E)) < \epsilon.$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \int_E (f_n - f) = 0$, y por linealidad la prueba termina. □

Para el siguiente resultado importante necesitamos el llamado Teorema de Egoroff, que enunciamos y demostramos a continuación, no sin antes probar el siguiente Lema que será necesario.

Lema 19. *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto de medida finita. Sea f_n una sucesión de funciones medibles en E que converge puntualmente a $f : E \to \mathbb{R}$. Entonces para cada $\eta > 0$ y $\delta > 0$ existe un subconjunto medible $A \subset E$ y un $N \in \mathbb{N}$ tales que:*
$|f_n - f| < \eta$ en A para todo $n \geq N$ y $m(E - A) < \delta$.

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$ como la sucesión f_n es de medibles y $f_n \to f$ en E puntualmente, se tiene que $|f - f_k|$ es medible. Por tanto, dado $\eta > 0$, el conjunto $\{x \in E : |f - f_k| < \eta\}$ es medible. Como la intersección numerable de medibles es medible,

$$E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in E : |f - f_k| < \eta\} = \{x \in E : |f - f_k| < \eta \; \forall k \geq n\}$$

es medible. Obviamente, para todo n se tiene que $E_n \subset E_{n+1}$, y la colección $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es ascendente de medibles. Como $f_n \to f$ puntualmente en E, tenemos que $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Por la continuidad de la medida,

$$m(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \to \infty} m(E_n).$$

Al tener E medida finita, elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que $m(E_N) > m(E) - \delta$ para un $\delta > 0$. Llamamos $A = E_N$, y como $A \subset E$, $m(E - A) = m(E) - m(A)$, por lo que como $m(E) - m(A) < \delta$, se tiene que $m(E - A) < \delta$. □

Teorema 41. *(Egoroff). Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto de medida finita. Sea f_n una sucesión de funciones medibles en E que converge puntualmente a $f : E \to \mathbb{R}$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto cerrado $F \subset E$ tal que:*
$f_n \to f$ uniformemente en F y $m(E - F) < \epsilon$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n \subset E$ medible, y $N(n) \in \mathbb{N}$ satisfaciendo el Lema inmediatamente anterior con $\delta = \epsilon/2^{n+1}$ ($\epsilon > 0$) y $\eta = 1/n$. Es decir, tenemos que $m(E - A_n) < \epsilon/2^{n+1}$ y $|f_k - f| < \eta$ en A_n para todo $k \geq N(n)$.

Sea ahora $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Aplicando las leyes de Morgan, $E - A = E - \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty}(E - A_n)$. Entonces, como $A_n \subset E$ para todo n, aplicando la aditividad numerable, tenemos que:

$$m(E - A) = \sum_{n=1}^{\infty} [m(E - A_n)] < \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} (1/2^{n+1}) = \epsilon/2.$$

Ahora, elegimos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que (propiedad arquimedeana) $1/n_0 < \epsilon$. Entonces $|f_k - f| < 1/n_0$ en A_{n_0} para todo $k \geq N(n_0)$. Pero $A \subset A_{n_0}$ y $1/n_0 < \epsilon$ por lo que $|f_k - f| < \epsilon$ en A para $k \geq N(n_0)$. Por tanto, f_k converge uniformemente a f en A y $m(E - A) < \epsilon/2$. Ahora bien, no es difícil demostrar que un conjunto A es medible si y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe un cerrado $F \subset A$ con $m^*(A - F) < \epsilon$. Tomando $\epsilon/2$ en lugar de ϵ, tenemos, usando la aditividad de la medida, que $m(E - F) = m((E - A) \cup (A - F)) = m(E - A) + m(A - F) < \epsilon$. □

Ahora podemos finalmente probar el siguiente, y muy importante, teorema:

Teorema 42. *(de la convergencia acotada). Sea f_n una sucesión de funciones medibles en un medible E. Sea f_n uniformemente acotada, es decir, $\exists M \geq 0$ tal que $|f_n| \leq M$ en E para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, si $f_n \to f$ puntualmente en E, se tiene que $\lim_{n \to \infty} \int_E f_n = \int_E f$.*

Demostración. Como f_n es medible, su límite es medible , es decir f es medible. Como f_n es acotada uniformemente, su límite también es acotado uniformemente con la misma cota, $|f| \leq M$ en E. Sea $A \subset E$ medible, y $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\int_E f_n - \int_E f = \int_E (f_n - f) = \int_A (f_n - f) + \int_{E-A} f_n + \int_{E-A} (-f).$$

Entonces, por el Corolario 6 y la monotonicidad de la medida, se tiene que:

$$\left| \int_E f_n - \int_E f \right| \leq \int_A |f_n - f| + \int_{E-A} |f_n| + \int_{E-A} |f| \leq \int_A |f_n - f| + 2Mm(E - A).$$

Usamos el teorema de Egoroff, y elegimos $m(E-A) < \epsilon/4M$, $\epsilon > 0$. Como f_n converge uniformemente a f en A (por el teorema de Egoroff), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n - f| < \epsilon/(2m(E))$ para $n \geq N$. Entonces, para $n \geq N$, tenemos que

$$\left| \int_E f_n - \int_E f \right| < \epsilon m(A)/(2m(E)) + \epsilon/2.$$

Como $m(A) \leq m(E)$ tenemos que

$$\left| \int_E f_n - \int_E f \right| < \epsilon,$$

y por tanto $\int_E f_n$ converge puntualmente a $\int_E f$. □

4.3. La integral de Lebesgue de una función medible no-negativa

Ahora podemos generalizar la integral de Lebesgue a funciones más generales. Para comenzar, estudiamos funciones medibles no-negativas, que son ligeramente más sencillas que las generales, pero a partir de las cuales se construyen estas últimas. En esta sección se estudian varios resultados fundamentales: El Lema de Fatou y el Teorema de la Convergencia Monótona. El resto de resultados son esencialmente idénticos a los ya estudiados pero con hipótesis distintas. Se dejan estas pruebas para los problemas.

Definición 81. *Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Se dice que f se anula fuera de un conjunto de medida finita si existe $E_0 \subset E$ con $m(E_0) < \infty$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in E - E_0$. Se dice entonces que f tiene soporte finito.*

Definición 82. *Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible sobre un medible E. Llamamos soporte de la función al conjunto* $\text{supp}(f) = \{x \in E : f(x) \neq 0\}$.

Como ya sabemos integrar funciones acotadas y medibles, de soporte finito, damos la definición más general de integral:

Definición 83. *Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función no-negativa en E medible. Definimos la integral de f sobre E de la siguiente manera:*
$\int_E f = \sup \left\{ \int_E h : h \text{ es acotada, medible, de soporte finito y } 0 \leq h \leq f \text{ en } E \right\}$.

Lema 20. *(desigualdad de Chebyshev): Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible no-negativa en E. Entonces, para cada $\lambda > 0$:*

$$m\left(\{x \in E : f(x) \geq \lambda\}\right) \leq \frac{1}{\lambda} \int_E f.$$

5. Espacios de Hilbert y operadores lineales

Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial normado sobre un cuerpo y completo cuya norma deriva del producto escalar. Comenzamos definiendo cada uno de los términos.

Definición 84. *Sea $\mathbb{X}$ un conjunto, y sean $+$ y $\times$ dos operaciones binarias $+ : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ y $\times : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$. Se dice que la terna $(\mathbb{X}, +, \times)$ es un cuerpo si cumple:*
(i) Si $a, b \in \mathbb{X}$, entonces $a + b \in \mathbb{X}$ y $a \times b \in \mathbb{X}$. (Cierre)
(ii) Si $a, b, c \in \mathbb{X}$, entonces $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$. (Asociatividad)
(iii) Si $a, b \in \mathbb{X}$, entonces $a + b = b + a$ y $a \times b = b \times a$. (Conmutatividad)
(iv-1) Existe $0 \in \mathbb{X}$ tal que $0 + a = a$ para todo $a \in \mathbb{X}$. (Elemento neutro de la suma)
(iv-2) Exite $1 \in \mathbb{X}$ tal que $1 \times a = a$ y $1 \neq 0$, para todo $a \in \mathbb{X}$. (Elemento neutro del producto)
(v-1) Para cada $a \in \mathbb{X}$ existe un elemento $-a \in \mathbb{X}$ tal que $-a + a = 0$. (Elemento opuesto)
(v-2) Para cada $a \in \mathbb{X} - \{0\}$ existe un elemento $a^{-1} \in \mathbb{X}$ tal que $a \times a^{-1} = 1$. (Elemento inverso)
(vi) Si $a, b, c \in \mathbb{X}$, entonces $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$. (Distributividad de la adición respecto del producto)

Definición 85. *Sea G un conjunto, y sea $\cdot : G \times G \to G$ una operación binaria. Entonces se dice que $(G, \cdot)$ es un grupo si satisface:*
(i) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ para todo $a, b, c \in G$.
(ii) Existe $e \in G$ tal que $a \cdot e = a$ para todo $a \in G$.
(iii) Para cada $a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = e$.

Definición 86. *Sea L un conjunto, $(\mathbb{X}, +, \times)$ un cuerpo, y sean $+ : L \times L \to L$ y $\cdot \mathbb{X} \times L \to L$ dos funciones (se sobreentiende que $+$ en el cuerpo y $+$ en el espacio vectorial son operaciones diferentes). Se dice que $(L, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{X}$ si se cumple que para todos $x, y \in L$, $\alpha, \beta \in \mathbb{X}$:*
(i) $(L, +)$ *es un grupo.*
(ii) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$.
(iii) $\beta \cdot (\alpha \cdot x) = (\beta \times \alpha) \cdot x$.
(iv) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.
(v) $1 \cdot x = x$.

Ahora definimos subespacios vectoriales.

Definición 87. *Sea $(L, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{X}$, y sea $M \subset L$. Se dice que $(M, +, \cdot)$ es subespacio vectorial de $(L, +, \cdot)$ si la imagen de $+|_{M \times M}$ está contenida en M y para todo $\alpha \in \mathbb{X}$ y todo $x \in M$ se tiene que $\alpha \cdot x \in M$.*

Para abreviar notación, llamaremos al espacio vectorial $(L, +, \cdot)$ sobre el cuerpo $\mathbb{X}$ simplemente L de ahora en adelante.

Definición 88. *Sea $A \subset L$ un subconjunto arbitrario no-vacío del espacio vectorial L. Se dice que A es un conjunto linealmente independiente si para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:*
$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$, *con* $x_j \in A$ *y* $\alpha_j \in \mathbb{X}$ $(1 \leq j \leq n) \implies \lambda_j = 0$ $(1 \leq j \leq n)$.

Definición 89. *Se dice que un subconjunto $B \subset L$ de un espacio vectorial L es una base del espacio vectorial si B es linealmente independiente y no existe ningún otro subconjunto linealmente independiente de L que contenga a B propiamente.*

Definición 90. *Sea L un espacio vectorial. Se llama dimensión de L, y se denota* $\dim(L)$, *al cardinal de las bases del espacio vectorial.*

Definición 91. *Sean L_1 y L_2 dos espacios vectoriales, y sean $A \subset L_1$ y $B \subset L_2$. Sea $\hat{O} : A \to B$ una función. Se dice que $\hat{O}$ es un operador lineal (o simplemente operador) si cumple:*
(i) Para $x, y \in A$, $\hat{O}(x + y) = \hat{O}(x) + \hat{O}(y)$.
(ii) Para $x \in A$ y $\alpha \in \mathbb{X}$, $\hat{O}(\alpha x) = \alpha \hat{O}(x)$.

Definición 92. *Sean L_1 y L_2 dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, y sean $A \subset L_1$ y $B \subset L_2$. Sea $\hat{O} : A \to B$ una función. Se dice que $\hat{O}$ es un operador antilineal si cumple:*
(i) Para $x, y \in A$, $\hat{O}(x + y) = \hat{O}(x) + \hat{O}(y)$.
(ii) Para $x \in A$ y $\alpha \in \mathbb{X}$, $\hat{O}(\alpha x) = \alpha^* \hat{O}(x)$, donde α^* es el complejo conjugado de α.

Proposición 48. *Dado el operador lineal $\hat{O} : A \to B$, donde $A \subset L_1$ y $B \subset L_2$, son equivalentes:*
(i) $\hat{O}^{-1} : B \to A$ es un operador lineal.
(ii) $\hat{O} : A \to B$ es inyectivo.
(iii) $\hat{O}(x) = 0 \implies x = 0$.

Demostración. Vamos a probar (ii) $\iff$ (iii), así como (i) $\iff$ (ii). Comencemos con (ii) $\implies$ (iii). Como $\hat{O}$ es inyectivo, y como $\hat{O}(0) = 0$, si $x \in A$ y $x \neq 0$ tenemos que $\hat{O}(x) \neq 0$. Ahora probamos (iii) $\implies$ (ii). Supongamos que $\hat{O}(x) = 0 \implies x = 0$. Probamos por reducción al absurdo. Sea $\hat{O}$ no inyectivo. Entonces existen $x, y \in A$ tales que $\hat{O}(x) = \hat{O}(y)$. Como $\hat{O}$ es lineal, esto es equivalente a que existe $z = x - y \in A$, con $z \neq 0$, tal que $\hat{O}(z) = 0$, lo que contradice la hipótesis de partida.

Ahora probamos (i) $\iff$ (ii). Comenzamos con (i) $\implies$ (ii). De nuevo, utilizamos la reducción al absurdo. Sea $\hat{O}^{-1}$ operador lineal, y supongamos que $\hat{O}$ no es inyectivo. Entonces existe $z \in B$ tal que $\hat{O}^{-1}(\{z\}) = \{x \in A : \hat{O}(x) = z\}$ contiene más de un elemento. Es decir, $\hat{O}^{-1}$ no es una función (es multivaluada), y por tanto no es un operador lineal. Ahora probamos (ii) $\implies$ (i). Como $\hat{O}$ es inyectivo, y B es un subespacio vectorial de L_2 (pruébelo), si $x_1, x_2 \in A$ y $x = x_1 + x_2$, definimos $z_1 = \hat{O}(x_1)$ y $z_2 = \hat{O}(x_2)$, y entonces $\hat{O}^{-1}(z_1 + z_2) = x_1 + x_2 = \hat{O}^{-1}(z_1) + \hat{O}^{-1}(z_2)$, y por tanto $\hat{O}^{-1}$ es lineal. □

Ahora definimos un concepto fundamental en espacios vectoriales.

Definición 93. *Sean $(L_1, +_1, \times_1)$ y $(L_2, +_2, \times_2)$ dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{X}$. Se dice que L_1 y L_2 son isomorfos, y se escribe $L_1 \approx L_2$ si existe un operador lineal $\hat{O} : L_1 \to L_2$ biyectivo, al que llamamos isomorfismo.*

Construimos ahora un tipo importante de operador lineal llamado proyector.

Definición 94. *Sea L un espacio vectorial, y M_1 y M_2 dos subespacios vectoriales del mismo tales que $L = M_1 \oplus M_2$. Para cada $x \in L$ con la descomposición única $x = x_1 + x_2$, con $x_1 \in M_1$ y $x_2 \in M_2$. Al operador lineal $P_{M_1} : L \to L$ tal que $P(x) = x_1$ se le denomina proyector de L sobre M_1 en la dirección de M_2.*

Definición 95. *Un operador lineal $\hat{O} : L \to L$ sobre un espacio vectorial L se dice que es idempotente si $\hat{O}^2 : L \to L \equiv \hat{O} \circ \hat{O} : L \to L$ cumple que $\hat{O}^2 = \hat{O}$.*

Claramente se tiene que:

Proposición 49. *Los proyectores son operadores lineales idempotentes.*

Proposición 50. *Sea $P : L \to L$ un operador lineal idempotente sobre el espacio vectorial L. Entonces existen un par de subespacios vectoriales M_1 y M_2 de L tales que $P : L \to L$ es un proyector sobre M_1 en la dirección de M_2.*

Demostración. Para cada $x \in L$, tenemos que $P(x)$ es invariante bajo aplicaciones sucesivas de P. Llamamos $M_1 = P(L)$. El siguiente operador lineal $(1 - P) : L \to L$ también es idempotente, ya que $(1 - P)^2 = 1 - P - P + P^2 = 1 - P$. A la imagen de $(1 - P)$ la llamamos M_2 $(= (1 - P)(L))$. Entonces, claramente, dado $x \in L$ no-nulo podemos escribir $x = [P + (1 - P)](x) = P(x) + (1 - P)(x)$. Definiendo $x_1 = P(x)$ y $x_2 = (1 - P)(x)$, tenemos $x = x_1 + x_2$, con $x_1 \in M_1$ y $x_2 \in M_2$. Ahora debemos probar que la descomposición es única. Para ello, probamos que si $x_2 \in M_2$ entonces $x_2 \notin M_1$ (o lo que es lo mismo, $M_1 \cap M_2 = \{0\}$). Sea $x_2 \in M_2$ no-nulo. Entonces existe $x \in L$ no-nulo tal que $x_2 = (1 - P)(x)$. Ahora, $P(x_2) = P(1 - P)(x) = (P - P^2)(x) = 0$, es decir, $x_2 \notin P(L) = M_1$. □

5.1. Norma sobre un espacio vectorial

Las normas sobre espacios vectoriales nos permiten formalizar la noción de longitud de un vector en espacios abstractos.

Definición 96. *Sea L un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ o el cuerpo $\mathbb{C}$, y sea $||\cdot|| : L \to \mathbb{R}$ una función que cumple:*
(i) $||x|| \geq 0 \forall x \in L$.
(ii) Si $||x|| = 0 \implies x = 0$.
(iii) $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ó* $\mathbb{C}$*) y* $\forall x \in L$.
(iv) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(desigualdad triangular).*

6. Problemas

1. Sea $\mathbb{F}_2 = \{a, b\}$ un conjunto con dos elementos. Definimos la suma y el producto (ambos conmutativos) $+ : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ y $\times : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ de la siguiente manera: $a + a = b + b = a$ y $a + b = b$; $a \times a = a \times b = a$ y $b \times b = b$. Demuestre que $(\mathbb{F}_2, +)$ y $(\mathbb{F}_2, \times)$ son grupos. Demuestre que $(\mathbb{F}_2, +, \times)$ es un cuerpo.

2. Dado el resultado del problema 1, demuestre que $(\mathbb{F}_2, +, \times)$ es un espacio vectorial sobre sí mismo como cuerpo.

3. Encuentre una representación real monodimensional del grupo $(\mathbb{F}_2, +)$ (véase problema 1). Es decir, encuentre $a, b \in \mathbb{R}$ y una operación binaria conmutativa $\cdot : \{a, b\} \times \{a, b\} \to \{a, b\}$ tales que $a \cdot a = b \cdot b = a$ y $a \cdot b = b$.

4. Demuestre que $\text{span}\{1, \cos(x)\} = \{f : [0, 2\pi) \to \mathbb{C} | f(x) = \alpha + \beta \cos(x),\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$ con la suma y producto por escalares y la adición usual de $\mathbb{C}$ para los valores de las funciones, es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números complejos.

5. Considere el espacio vectorial $C(\mathbb{R})$ de las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Encuentre un proyector $S : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ cuya imagen sea el conjunto de funciones continuas simétricas, es decir $S(C(\mathbb{R})) = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$. Encuentre un proyector A sobre las funciones continuas antisimétricas ($f(-x) = -f(x)$). Demuestre que $C(\mathbb{R})$ se puede escribir como suma directa de las imágenes de S y A.

6. Demuestre que el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y las operaciones usuales, y el espacio vectorial $\mathbb{C}$ sobre el mismo cuerpo y las operaciones usuales, son isomorfos.

7. Demuestre que si $n \neq m$, entonces los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales no son isomorfos. (ayuda: establezca que una biyección entre ambos, si existiera, no podría ser lineal)

8. Dado el espacio vectorial $C^\infty(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ de funciones continuas e infinitamente diferenciables, demuestre que $\hat{ip} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\hat{ip}(f(x)) = f'(x)$ es un operador lineal.

9. Dado $n \in \mathbb{N}$, demuestre que el conjunto de polinomios reales de variable real de grado menor o igual a n, con las operaciones usuales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, es un espacio vectorial. Encuentre una base.

10. Demuestre que el conjunto de las funciones enteras complejas de variable compleja, con las operaciones usuales sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, es un espacio vectorial. Demuestre que la dimensión del espacio vectorial resultante es infinita.

11. Sea $C[0,1]$ sobre $\mathbb{C}$ el espacio vectorial de funciones $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continuas en el compacto $[0,1]$. Considere el operador $\hat{O} : C[0,1] \to C[0,1]$ tal que $\hat{O}(f(x)) = f^*(x)$. Demuestre que $\hat{O}$ es antilineal y que $\hat{O}^2 = 1$.

12. Sean L, L' espacios vectoriales, y $M \subset L$ un subespacio vectorial de L. Si $\hat{O} : M \to L'$ es un operador lineal, demuestre que $M' = \hat{O}(M)$ es un subespacio vectorial de L'

13. Sea $L = \{f \in C^\infty[-\pi, \pi] : f(x + 2\pi) = f(x)\}$ el conjunto de funciones complejas continuas e infinitamente diferenciables de variable real en el compacto $[-\pi, \pi]$. Demuestre que L, con las operaciones usuales sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial. Demuestre que si $f(x) = \exp(inx)$, con $n \in \mathbb{Z}$, entonces $f \in L$.

14. Sean $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, con $n < m$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales. Demuestre que existe un subespacio vectorial $S \subset \mathbb{R}^m$ tal que $\mathbb{R}^n$ es isomorfo a S (ayuda: encuéntrelo explícitamente).

15. Sea $\emptyset \neq D \subset X$, donde (X, d) es un espacio métrico. Pruebe que $x \in \overline{D}$ si y solo si $d(x, D) = 0$, donde $d(x, D) = \inf\{d(x, y) : y \in D\}$.

16. Sea X un conjunto y $A \subset X$. Se define la colección

$$\tau = \{O \subset X : A \subset O\} \cup \{\emptyset\}.$$

(a) Pruebe que τ es una topología.
(b) Pruebe que $\mathcal{B} = \{\{x\} \cup A : x \in X\}$ es base topológica de τ.
(c) Si $B \subset X$, calcule el interior y los puntos de acumulación de B.

17. Considere la siguiente colección de subconjuntos de $\mathbb{N}$:
$\tau = \{U \subset \mathbb{N} : \text{si } n \in U \text{ y } d \text{ divide a } n, \text{ entonces } d \in U\}$.
(a) Pruebe que τ es una topología para $\mathbb{N}$.
(b) Pruebe que $f : (\mathbb{N}, \tau) \to (\mathbb{N}, \tau)$ es continua si y solo si verifica que si m divide a n, entonces $f(m)$ divide a $f(n)$.

18. Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos, y sea $f : X \to Y$. Definimos la siguiente métrica $d_f : X \to \mathbb{R}_+$,

$$d_f(x, y) = d(x, y) + d'(f(x), f(y)).$$

Pruebe que d y d_f definen o inducen la misma topología sobre X si y solo si f es continua.

19. Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff, y sea $C \subset X$. Pruebe que si $x \in C$, entonces para todo entorno abierto U de x se tiene que $U \cap C$ es infinito.

20. Sea $X = \{a, b\}$. Obtenga todas las topologías posibles sobre X.

21. Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea AX. Sponga que para cada $x \in A$ existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset A$. Demuestre que $A \in \tau$.

22. Sea X un conjunto, y sea $\tau = \{U \subset X : X - U$ es numerable ó es todo $X\}$. Pruebe que τ es una topología sobre X.

23. Sea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de topologías sobre un conjunto X.
(a) Pruebe que $\cap_{\alpha \in J} \tau_\alpha$ es una topología.
(b) ¿Es $\cup_{\alpha \in J} \tau_\alpha$ una topología?.

24. Pruebe que si $\mathcal{A}$ es una base para una topología τ sobre un conjunto X, entonces la topología generada por $\mathcal{A}$ es igual a la intersección de todas las topologías que contienen a $\mathcal{A}$.

25. Demuestre que $\mathcal{B} = \{(a, b) : a < b\ ,\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ es base topológica para la topología usual de $\mathbb{R}$.

26. Sea (X, τ) espacio topológico, y sea (Y, τ_Y) subespacio topológico de X. Si $A \subset Y$, pruebe que la topología que A hereda como subespacio de (Y, τ_Y) es idéntica a la topología que hereda como subespacio de (X, τ).

27. Sean (X, τ) e (Y, τ') dos espacios topológicos, y $f : X \to$ una función entre ellos. Se dice que f es una función abierta si para cada $U \in \tau$ se tiene que $f(U) \in \tau'$. Demuestre que $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ son funciones abiertas.

28. Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de otro conjunto X, con $\emptyset, X \in \mathcal{C}$, y tal que las uniones finitas e intersecciones arbitrarias de elementos de $\mathcal{C}$ están en $\mathcal{C}$. Demuestre que $\tau = \{X - C : C \in \mathcal{C}\}$ es una topología.

29. Sean (X, τ) un espacio topológico e (Y, τ_Y) un subespacio topológico del mismo. Demuestre que si $A \subset Y$ es cerrado de Y e Y es cerrado de X entonces A es cerrado de X.

30. Sean (X, τ) e (Y, τ') dos espacios topológicos. Demuestre que si A es cerrado de X y B es cerrado de Y, entonces $(A, B) \subset X \times Y$ es cerrado de $X \times Y$ con la topología producto.

31. Sean $A, B, A_\alpha \subset X$. Pruebe:
(a) Si $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.
(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(c) $\bigcup_{\alpha \in J} \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha}$

32. Sean $A, B, A_\alpha \subset X$. Pruebe la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
(a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
(b) $\overline{\cap_\alpha A_\alpha} = \cap_\alpha \overline{A_\alpha}$.
(c) $\overline{A - B} = \overline{A} - \overline{B}$.

33. Sobre un conjunto X se define la topología del complemento finito como $\tau = \{U \subset X : X - U$ es finito ó todo $X\}$. Considere la topología del complemento finito sobre $\mathbb{R}$, y la sucesión $x_n = 1/n$. ¿A qué converge x_n?

34. Se dice que un espacio topológico (X, τ) satisface el axioma T_1 si todo subconjunto finito de X es cerrado. Pruebe que el axioma T_1 es equivalente a la condición de que para cada par de puntos de X, cada uno tiene un entorno abierto que no contiene al otro.

35. Sean (X, τ) e (Y, τ') dos espacios topológicos, y $f : X \to Y$ continua. Si x es un punto de acumulación de $A \subset X$, ¿es necesariamente cierto que $f(x)$ es un punto de acumulación de $f(A)$?

36. Sean (X, τ) y (X, τ') dos espacios topológicos con el mismo conjunto X y topologías distintas $\tau \neq \tau'$. Sea

$$1 : X \to X$$

la función identidad, es decir $1(x) = x$ para todo $x \in X$.
(a) Pruebe que 1 es continua si y solo si $\tau' \subset \tau$.
(b) Pruebe que 1 es un homeomorfismo si y solo si $\tau = \tau'$.

37. Sean (X, τ) e (Y, τ') dos espacios topológicos, y sea $(X \times Y, \tau_p)$ es espacio topológico producto. Dados $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, demuestre que $f : X \to X \times Y$, con $f(x) = (x, y_0)$ y $g : Y \to X \times Y$, con $g(y) = (x_0, y)$ son empotramientos topológicos.

38. Sea (X, τ) un espacio topológico y considere $\mathbb{R}$ con su topología usual. Sea $A \subset X$. Demuestre que $f : X \to \mathbb{R}$, con $f(x) = d(x, A)$ es continua.

39. Encuentre un homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to (0, 1)$.

40. Sean (X, τ) e (Y, τ') un espacio topológico cualquiera y un espacio topológico Hausdorff, respectivamente, y sea $A \subset X$. Sea $f : A \to Y$ continua. Pruebe que si f puede ser extendida a una función $g : \bar{A} \to Y$ continua, entonces g viene determinada de manera única por f.

41. Demuestre que el subespacio $(a, b) \subset \mathbb{R}$ es homeomorfo a $(0, 1)$, y que el subespacio $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es homeomorfo a $[0, 1]$.

42. Sea (X, τ) un espacio topológico, y sean $A, B \subset X$ dos cerrados disjuntos, y considere $\mathbb{R}$ con su topología usual. Demuestre que existe $f : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(A) = \{1\}$, $f(B) = \{-1\}$ y para $x \notin A \cup B$, se tiene que $-1 < f(x) < 1$. (ayuda: utilice las funciones $d(x, A)$ y $d(x, B)$, definidas en el primer problema de topología).

43. Usando las propiedades de la medida de Lebesgue, pruebe que el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ no es numerable.

44. Sea A el conjunto de números irracionales en el intervalo $[0, 1]$. Pruebe que $\mu(A) = 1$, donde μ es la medida de Lebesgue.

45. En $\mathbb{R}$, con el σ-álgebra de Borel y la medida de Lebesgue, pruebe que si $\mu(A) = 0$, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(B)$ para A y B conjuntos medibles.

46. Pruebe que si $E \subset \mathbb{R}$ tiene medida exterior positiva, entonces existe un subconjunto acotado de E que también tiene medida exterior positiva.

47. Pruebe que si $E \subset \mathbb{R}$ tiene medida finita, y dado $\epsilon > 0$, entonces E se puede expresar como unión disjunta de un número finito de conjuntos medibles, cuyas medidas respectivas son, a lo sumo, ϵ.

48. Pruebe que si E_1 y E_2 son medibles, entonces $\mu(E_1 \cup E_2) + \mu(E_1 \cap E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$.

50. Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas sobre el compacto $[a, b]$. Pruebe que si $f = g$ c.t.p. en $[a, b]$, entonces de hecho $f = g$ en $[a, b]$.

51. Sea $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}$ medible, y sea f continua en $D - D_0$, donde D_0 es un conjunto finito. ¿Es f necesariamente una función medible?

Nota: Los problemas siguientes (52–57) están pensados para hacerse consecutivamente.

52. Sea $\Omega = \{a, b, c\}$. Obtenga todos los posibles σ-álgebras sobre Ω.

53. Sea $\Omega = \{a, b, c\}$. Tome un Σ que sea σ-álgebra sobre Ω distinto del trivial (recuerde: $\Sigma_{\text{trivial}} = \{\Omega, \emptyset\}$). Demuestre que Σ es una topología para Ω.

54. (Véase problema anterior) Sea $\Omega = \{a, b, c\}$. Tome un Σ que sea σ-álgebra sobre Ω distinto del trivial. Sabemos que Σ es una topología. Construya la colección de conjuntos de Borel dada la topología Σ y construya el σ-álgebra de Borel correspondiente.

55. Sea $\Omega = \{a, b, c\}$. Tome un σ-álgebra no-trivial y obtenga una medida μ sobre el mismo.

56. (Véase problema anterior) Dado el problema anterior, obtenga una extensión de μ, que llamamos μ^* al dominio de todos los subconjuntos de Ω, de tal manera que μ^* sea una medida exterior, es decir, $\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$ para todo $A, B \subset \Omega$.

57. (Véase problema anterior). Dada una medida exterior μ^* sobre un σ-álgebra no-trivial sobre $\Omega = \{a, b, c\}$, demuestre que los conjuntos medibles satisfacen el criterio de Carathéodory.

58. (a) Desarrolle $f(x) = x$ en serie de Fourier en el intervalo $[-\pi, \pi]$.
(b) Demuestre que la serie resultante no converge puntualmente a $f(x)$ en el punto $x = \pi$. (esto se debe a que la extensión periódica de f fuera de $[-\pi, \pi]$ no es continua)
(c) Demuestre que el desarrollo de Fourier es convergente fuertemente en $L^2([-\pi, \pi])$.
(d) Utilice la identidad de Parseval para demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

59. (a) Desarrolle $f(x) = |x|$ en serie de Fourier en el intervalo $[-\pi, \pi]$.
(b) Demuestre que el desarrollo de Fourier es convergente fuertemente en $L^2[-\pi, \pi]$.
(c) Utilice la identidad de Parseval para demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

60. (a) Desarrolle $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ ($\operatorname{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$ y $\operatorname{sgn}(x) = -1$ si $x \leq 0$ c.t.p.) en serie de Fourier en el intervalo $[-\pi, \pi]$.
(b) Demuestre que el desarrollo de Fourier es convergente fuertemente en $L^2[-\pi, \pi]$.
(c) Utilice la identidad de Parseval para demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

61. La delta de Dirac no es una función propiamente dicha, ni actúa sobre elementos de $L^2([a,b])$. Por definición, la actuación de la delta de Dirac como funcional lineal sobre una función $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ bien definida en $x=0$ viene dada por

$$\langle \delta, f\rangle = \int_a^b dx \delta(x) f(x) = f(0).$$

(a) Desarrolle formalmente la delta de Dirac $\delta(x)$ en serie de Fourier en el intervalo $[-\pi,\pi]$.
(b) Tal y como se ha hecho en el apartado anterior, la serie de Fourier viene dada formalmente por

$$\delta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Considere la sucesión de sumas parciales:

$$\delta_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}.$$

(b-1). Demuestre que δ_N es de $L^2([-\pi,\pi])$ para todo N.
(b-2). Demuestre que δ_N no converge en la topología fuerte de $L^2([-\pi,\pi])$.
(b-3). Demuestre que δ_N converge, como sucesión de funcionales lineales, en la topología débil (no de $L^2([-\pi,\pi])$, pero de otro espacio que no vamos a nombrar, y que es irrelevante y análogo en lo que respecta a la topología débil).

62. La delta de Dirac se puede definir como el límite en la topología débil de cualquier sucesión $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de funciones continuas que satisfaga

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \text{ si } x \neq 0,$$

así como

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) Encuentre una sucesión de funciones que satisfaga las dos condiciones anteriores. (ayuda: una Gaussiana o una transformada de Fourier truncada).
(b) Escoja una función no-constante $f(x)$ tal que $f(0)\neq 0$, y calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) f(x),$$

así como

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) f(x),$$

y compruebe que, en efecto, $f_n(x) \rightharpoonup \delta(x)$.

63. Calcule, formalmente, la transformada de Fourier de la delta de Dirac.

64. Sea δ_a la delta de Dirac desplazada una cantidad $a\in\mathbb{R}$, definida como

$$\langle \delta_a, f\rangle = f(a).$$

Realice un cambio de variables para demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-a) f(x) = \langle \delta_a, f\rangle.$$

65. Sea $f(x)$ una función con ceros en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, diferenciable en todos ellos.
a) Demuestre que

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}.$$

b) Utilice la expresión anterior para la función $f(x) = x^2 - 1$.
c) Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(f(x)) f(x).$$

66. (a) Dado $\epsilon > 0$, obtenga la transformada de Fourier de la función compleja de variable real

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{x^2 - x_0^2 + i\epsilon},$$

donde i es la unidad imaginaria y $x_0 \in \mathbb{R}$ es una constante.
(b) Demuestre que el límite en la topología débil $\text{lím}_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(x)$ no existe, ya que los límites superior e inferior no coinciden.
(c) Calcule el siguiente límite en la topología débil

$$\text{lím}_{\epsilon \to 0^+} \text{Re}\left[f_\epsilon(x)\right].$$

A éste límite débil (un funcional lineal) se le conoce como ”Valor Principal”.

67. Sea $\hat{T} : H \to H$ un operador lineal autoadjunto en un espacio de Hilbert H.
(a) Demuestre que si $\psi \in H$ satisface

$$\hat{T}\psi = \lambda\psi,$$

entonces $\lambda \in \mathbb{R}$. (los autovalores de un operador autoadjunto son reales)
(b) Demuestre que dos autovectores (los ψ que cumplen la ecuación anterior) correspondientes a distintos autovalores son ortogonales. (bajo condiciones muy generales, forman una base ortogonal)

68. Sea $\hat{U} : H \to H$ un operador lineal unitario. Demuestre que sus autovalores tienen módulo unidad (véase ejercicio anterior).

69. Sea $\hat{K} : D \subset L^2([-\pi, \pi]) \to L^2([-\pi, \pi])$, donde el dominio D es un subconjunto del espacio de funciones complejas continuas y diferenciables de variable real (pasando por alto las formalidades de clases de equivalencia en L^2). La acción de $\hat{K}$ sobre $f \in D$ viene dada por

$$(\hat{K}f)(x) = -if'(x).$$

(a) Obtenga todos los posibles autovectores de $\hat{K}$ sin tener en cuenta condiciones de contorno.
(b) Extraiga las condiciones que deben cumplir los autovalores/autovectores para que $\hat{K}$ sea autoadjunto (véase el ejercicio 67.)
(c) Haga lo propio para $\hat{K}^2$ sobre funciones continuas doblemente diferenciables.

70. Sea $\hat{T} : H \to H$ un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert H. Se define el operador

$$e^{i\hat{T}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \hat{T}^n.$$

La convergencia fuerte (en la norma de operadores, que es irrelevante para nosotros) de esta serie está garantizada por un teorema fundamental (teorema espectral). Dado esto, demuestre que $e^{i\hat{T}}$ es un operador unitario.

71. Sean $\hat{A} : H \to H$ y $\hat{A}^\dagger : H \to H$ un operador lineal y su adjunto con dominio en todo el espacio de Hilbert H. Estos operadores cumplen

$$\hat{A}^\dagger \hat{A} + \hat{A}\hat{A}^\dagger = 1$$
$$(\hat{A}^\dagger)^2 = \hat{A}^2 = 0.$$

(a) Demuestre que $\hat{A}^\dagger \hat{A}$ es autoadjunto.
(b) Demuestre directamente que $e^{i\hat{A}^\dagger \hat{A}}$ es unitario (véase problema inmediatamente anterior).
(Nota: operadores que satisfacen estas condiciones se llaman operadores de creación y aniquilación fermiónicos)

72. La delta de Dirac $\delta(x-a)$, con $a \in \mathbb{R}$ se puede definir como una medida, de la siguiente manera. Dados el conjunto $\mathbb{R}$ y el σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, la medida de la delta de Dirac en el punto a se define como $\mu(A) = 1$ si $a \in A$ y $\mu(A) = 0$ si $a \notin A$, para $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible.
(a) Demuestre que μ es una medida.
(b) Demuestre que $\mathbb{R}$ tiene medida finita.
(c) Discuta si $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ es un espacio de probabilidad.
(d) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Defina la integral de Dirac sobre un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ medible y de medida finita de forma análoga a la integral de Lebesgue, es decir: Primero, definimos la integral de una función simple $\varphi : E \to \mathbb{R}$, con $\varphi(E) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ como

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i),$$

donde $E_i = \{x \in E : \varphi(x) = a_i\}$. Segundo, defina sus integrales inferior y superior como

$$\underline{\int_E} f = \sup \left\{ \int_E \varphi : \varphi \text{ simple}, \varphi \leq f \right\}$$

y

$$\overline{\int_E} f = \inf \left\{ \int_E \psi : \psi \text{ simple}, \psi \geq f \right\}.$$

La integral de Dirac $\int_E f$ existe si las integrales inferior y superior coinciden.
Demuestre que la integral de Dirac en el punto a de f viene dada por

$$\int_E f = f(a),$$

si $a \in E$, y se anula si $a \notin E$. (Ayuda: Pruebe primero que la integral de Dirac sobre E de cualquier función simple $\varphi(x)$ es igual a $\varphi(a)$ si $a \in E$ y que se anula en caso contrario)

74. Demuestre que la siguiente función

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

es de $L^2(\mathbb{R})$ sin hacer explícitamente la integral.

75. Encuentre un vector $(\ldots, \alpha_{-n}, \alpha_{-n+1}, \ldots, \alpha_0, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|$ sea divergente.

76. Considere el funcional $F : L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ dado por la expresión

$$F[f] = \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x).$$

Discuta si es lineal y, en caso de que lo sea, discuta si es continuo.

77. Considere el funcional $F : L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ dado por la expresión

$$F[f] = \int_0^1 dx[f(x)]^2.$$

Discuta si es lineal y, en caso de que lo sea, discuta si es continuo.

78. Considere el funcional $F : L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ dado por la expresión

$$F[f] = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x).$$

Discuta si es lineal y, en caso de que lo sea, discuta si es continuo.

79. Sea $D \subset L^2[-\pi, \pi]$ el conjunto de polinomios $P(x)$ definidos en $[-\pi, \pi]$. Encuentre, si existe, un funcional lineal continuo $F : L^2[-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ tal que $F(P) = 1\ \forall P \in D$. En caso de que no exista, demuéstrelo.

80. Sea $D \subset L^2[-\pi, \pi]$ el conjunto de polinomios $P(x)$ definidos en $[-\pi, \pi]$. Encuentre, si existe, un funcional lineal continuo $F : L^2[-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ tal que $F(P) = 0\ \forall P \in D$. En caso de que no exista, demuéstrelo.

81. Demuestre que los funcionales $F_n : L^2([-\pi, \pi]) \to \mathbb{C}$ definidos de la siguiente manera

$$F_n[f] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin(nx) f(x),$$

son lineales y continuos para todo $n \in \mathbb{N}$.

82. Demuestre que si $f \in L^2([-\pi, \pi])$, entonces el vector $(\ldots, \alpha_{-n}, \alpha_{-n+1}, \ldots, \alpha_0, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots)$, donde las componentes vienen dadas por

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-inx} f(x),$$

para $n \in \mathbb{Z}$, es de $\ell^2(\mathbb{Z})$.

83. Considere $f(x) = e^{-x^2/2}$ y $g(x) = i(2x^2 - 1)e^{-x^2/2}$, donde i es la unidad imaginaria.
(a) Demuestre que f y g están en $L^2(\mathbb{R})$.
(b) Calcule los productos escalares $\langle g, f \rangle$ y $\langle f, g \rangle$.

84. Considere $f(x) = e^{-x^2/2}$ y $g(x) = xe^{-x^2/2}$.
(a) Demuestre que f y g están en $L^2(\mathbb{R})$.
(b) Calcule el producto escalar $\langle g, f \rangle$.

85. Utilizando la siguiente función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 - x^2}}$$

definida en $(-\pi, \pi)$, demuestre que $L^1([-\pi, \pi]) \not\subset L^2([-\pi, \pi])$.

86. Utilizando la siguiente función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 - x^2}}$$

definida en $(-\pi, \pi)$, demuestre que $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$.

87. Sea $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal arbitraria de $L^2(E)$, con $E \subset \mathbb{R}$ medible.
(a) Demuestre que la sucesión $\psi_n \rightharpoonup 0$.
(b) Como ejemplo del apartado (a), tome la base ortonormal de $L^2([-\pi,\pi])$ cuyos elementos son

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},\ n \in \mathbb{Z},$$

y escoja una función cualquiera $f \in L^2([-\pi,\pi])$ y demuestre explícitamente que

$$\lim_{n\to\pm\infty} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{inx} f(x) = 0.$$

(c) Demuestre que ψ_n dada en el apartado (b) no converge fuertemente al vector 0 de $L^2([-\pi,\pi])$.

88. Resuelva la ecuación

$$\partial_t u + \partial_x u = 0,$$

con condición inicial $u(1,x) = x/(1+x^2)$.

89. Resuelva la ecuación

$$\partial_t u + 2\partial_x u = 0,$$

con condición inicial $u(0,x) = e^{-x^2}$.

90. Resuelva la ecuación

$$\partial_t u + 2\partial_x u = \sin x,$$

con condición inicial $u(0,x) = \sin x$.

91. Sea c una constante real. Suponga que $u(t,x)$ es solución del problema de valores iniciales dado por la ecuación

$$\partial_t u + c\partial_x u = 0,$$

con $u(0,x) = f(x)$. Pruebe que $v(t,x) = u(t - t_0, x)$ es solución del problema de valores iniciales dado por la ecuación

$$\partial_t v + c\partial_x v = 0,$$

con $v(t_0, x) = f(x)$.

92. Considere el problema de valores iniciales dado por la ecuación

$$\partial_t u + c\partial_x u + au = 0,$$

con $a > 0$ y condición inicial $u(0,x) = f(x)$. Demuestre que si f es acotada, es decir existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M\ \forall x \in \mathbb{R}$, entonces la solución satisface $u(t,x) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

93. Sea $F(t,x)$ una función de clase C^1 en t y x. Obtenga una fórmula para la solución general de la ecuación

$$\partial_t u(t,x) = F(t,x).$$

94. (Véase el problema anterior). Resuelva la ecuación

$$\partial_t u + c\partial_x u = F(t,x).$$

95. Resuelva el problema de valores iniciales dado por la ecuación

$$\partial_t u + \frac{1}{x^2+1}\partial_x u = 0,$$

con

$$u(0,x) = \frac{1}{1+(x+3)^2}.$$

96. Resuelva el problema de valores iniciales dado por la ecuación

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u,$$

con

$$u(0, x) = e^{-x^2},$$
$$\partial_t u(0, x) = \sin x.$$

97. Sea $u(t, x)$ solución del problema de valores iniciales con ecuación

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u,$$

con

$$u(0, x) = f(x),$$
$$\partial_t u(0, x) = g(x).$$

Pruebe que la solución al problema con valores iniciales $u(t_0, x) = f(x)$ y $\partial_t u(t_0, x) = g(x)$ viene dada por $u(t - t_0, x)$.

98. Sea $u(t, x)$ una solución clásica arbitraria de la ecuación de ondas

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0.$$

Se define la energía asociada a la amplitud u de la onda como

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} \left[(\partial_t u)^2 + c^2 (\partial_x u)^2 \right].$$

Supongamos que existen $C(t) > 0$ y $\alpha > 1/2$ tales que

$$|\partial_t u(t, x)| \leq \frac{C(t)}{|x|^\alpha},$$

y

$$|\partial_x u(t, x)| \leq \frac{C(t)}{|x|^\alpha},$$

para cada t fijo y para $|x|$ suficientemente grande (es decir, existe $R > 0$ tal que las condiciones se cumplen para $|x| > R$).
Demuestre la conservación de la energía, es decir, pruebe que $E(t)$ es finita e independiente del tiempo ($dE/dt = 0$).

99. Desarrolle $f(x) = \sin^2 x$ en serie de Fourier en $[-\pi : \pi]$.

100. Resuelva la ecuación del calor

$$\partial_t u = \partial_x^2 u,$$

para $x \in (-\pi, \pi)$, con condición inicial $u(0, x) = f(x) \in L^2([-\pi, \pi])$, y con condiciones de contorno

$$u(t, -\pi) = 0,$$

y

$$\partial_x u(t, \pi) = 0.$$

101. Considere la ecuación del calor

$$\partial_t u = \partial_x^2 u,$$

(a) Demuestre que $v = \partial_t u$ también resuelve la ecuación del calor.
(b) Si la condición inicial para u es $u(0, x) = f(x)$, obtenga la condición inicial heredada por $v = \partial_t u$ como solución de la ecuación del calor.

102. Ecuentre todas las soluciones separables de la ecuación de ondas

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u,$$

en $[-\pi, \pi]$ con condiciones de contorno $u(t, -\pi) = 0 = \partial_x u(t, \pi)$.

103. Considere la ecuación de ondas

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u,$$

(a) Demuestre que $v = \partial_t u$ también resuelve la ecuación de ondas.
(b) Si las condiciones iniciales para u son $u(0, x) = f(x)$, $\partial_t u(0, x) = g(x)$, obtenga la condición inicial heredada por $v = \partial_t u$ como solución de la ecuación de ondas.

104. Considere la ecuación de Laplace en dos dimensiones

$$\nabla^2 u = 0,$$

en el cuadrado de área unidad, $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Obtenga las condiciones de contorno de Dirichlet que debe cumplir $u(x, y) = 1 + xy$ para que sea solución de la ecuación de Laplace en su dominio.

105. Considere la ecuación de Laplace

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0,$$

en el siguiente dominio

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Escribimos la frontera como $\partial\Omega = \partial\Omega_+ \cup \partial\Omega_-$, donde

$$\partial\Omega_+ = \{(x, y) \in \partial\Omega : y > 0\},$$

y

$$\partial\Omega_- = \{(x, y) \in \partial\Omega : y \leq 0\}.$$

Resuelva la ecuación de Laplace con las siguientes condiciones de contorno: $u = 1$ en $\partial\Omega_+$ y $u = -1$ en $\partial\Omega_-$.

106. Considere la ecuación de Laplace

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0,$$

en el siguiente dominio

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\}.$$

Resuélvala con las siguientes condiciones de contorno, $u = y^3$ si $x^2 + y^2 = 1$ e $y > 0$, así como $u(x, 0) = 0$ para $x \in (-1, 1)$.