

LA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO EN LOS TEXTOS DE REY PASTOR Y PUIG ADAM

Josefa Dólera Almaida¹
Encarna Sánchez Jiménez²

RESUMEN

La sucesión de regímenes políticos en España en el siglo XX trajo cambios en la legislación educativa y en los fines atribuidos a la educación. Estudiamos cómo afectaron a las propuestas para enseñar matemáticas en el bachillerato, a través de la resolución de ecuaciones con una incógnita. Los manuales de Puig Adam y Rey Pastor son un referente de la renovación pedagógica. Analizamos qué transposición didáctica se hace y la influencia del modelo epistemológico de la matemática que la motiva.

Palabras-clave: Rey Pastor. Puig Adam. enseñanza secundaria. Ecuaciones. Teoría antropológica de lo didáctico.

ABSTRACT

The succession of various political regimes in Spain during the twentieth century brought about changes in legislation and in the aims of education. We study how these changes affected the proposals to teach mathematics in secondary school, choosing as a topic the resolution of equations with one unknown. Textbooks of Puig Adam and Rey Pastor are a reference for pedagogical renewal. We analyze what didactic transposition was made and the influence of the epistemological model of mathematics.

Keywords: Rey Pastor. Puig Adam. Secondary school. Equations. Anthropological theory of the didactic.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo estudiamos las propuestas elaboradas conjuntamente por Julio Rey Pastor y Pedro Puig Adam para abordar la enseñanza del álgebra elemental, concretamente las ecuaciones, en el bachillerato en la década previa a la Segunda República española, durante ese periodo y tras instaurarse en el país la dictadura franquista. Forma parte de una

¹ Profesora asociada del Área de conocimiento «Didáctica de las Matemáticas», Universidad de Murcia (UMU) / ISEN Centro Universitario (Cartagena), Murcia, España. Realiza, bajo la dirección de Encarna Sánchez Jiménez, el doctorado en Educación. E-mail: j.doleraalmaida@um.es

² Profesora titular de Universidad de Murcia (UMU), Murcia, España, del Área de conocimiento «Didáctica de las Matemáticas». E-mail: esanchez@um.es

investigación más amplia, que culminará en una tesis doctoral, acerca de la enseñanza de la matemática en la educación secundaria española en los dos primeros tercios del siglo XX.

Se trata de un estudio histórico, que se enmarca concretamente en la Historia de la educación matemática, un campo interdisciplinar y por ello, siguiendo la línea de varios trabajos en este mismo campo (Carrillo, 2005; Sánchez-Jiménez, 2015; Sánchez-Jiménez y Carrillo, 2018; Sánchez-Jiménez et al., 2020), usamos también los útiles que proporciona la didáctica de la matemática y, en particular, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

Hemos elegido para nuestro estudio un intervalo de tiempo en el que, a pesar de no ser muy extenso, se produjeron importantes cambios políticos y legislativos, que afectaron a todas las facetas de la vida en España y que resultó especialmente significativo para la educación. Nos planteamos un estudio diacrónico, intentando detectar si los cambios que se produjeron en la *noosfera* durante las décadas consideradas tuvieron una auténtica repercusión en la manera en la que se introducía el álgebra en la segunda enseñanza.

El tópico elegido son las ecuaciones y el propósito es describir qué enseñanza se proponía en relación con este objeto matemático, nos interesamos por el análisis de dichas propuestas, y también por aquellos factores que podían motivarlas o explicarlas, en particular, la pedagogía y la epistemología de la matemática subyacentes, y su posible evolución a lo largo del periodo considerado.

MARCO TEÓRICO. ALGUNAS HERRAMIENTAS METODOLÓGICAS

Adoptamos el enfoque antropológico (Chevallard, 2002), según el cual los fenómenos didácticos han de estudiarse considerando que todo proceso de estudio tiene lugar en una institución y la dimensión institucional ha de formar parte del análisis didáctico. En nuestro caso la institución a la que van dirigidas las propuestas que estudiaremos es la enseñanza secundaria española entre los años veinte y los años cincuenta del pasado siglo. Usaremos herramientas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, TAD (Chevallard, 1999) para identificar elementos de las prácticas matemáticas en relación con la resolución de ecuaciones en el nivel del que nos ocupamos.

La TAD postula que toda actividad encaminada a crear, enseñar o aprender matemáticas puede modelarse mediante la noción de *praxeología* (Bosh y Gascón, 2014), que contempla tanto la práctica (praxis) como el discurso razonado que permite comprenderla y justificarla (logos). La praxis comprende los tipos de *tareas* (T) y las *técnicas* (θ) para abordarlas, mientras que el logos abarca un primer nivel de justificación de la técnica, la *tecnología* (θ), y un nivel de justificación superior, la *teoría* (Θ). Estos cuatro componentes se tienen para las praxeologías matemáticas y para las didácticas. En el primer caso hablamos de tareas o de técnicas matemáticas y cuando se trata de interpretar la actividad didáctica, de tareas o de técnicas didácticas.

Junto a la dimensión praxeológica del análisis se presta atención a la dimensión *ecológica*, que considera el modelo pedagógico dominante en una época en cierta institución, la epistemología – en particular de la matemática – compartida por el profesorado en esa institución o el marco social y legislativo, entre otros. Todo ello determina unas condiciones que restringen ciertas propuestas de enseñanza, o algunos de sus elementos, y quizá promueven otros. Precisamente durante el periodo que investigamos tuvieron lugar cambios políticos trascendentales que repercutieron en el ámbito educativo.

Se trata de estudiar las propuestas, pero el análisis quedaría incompleto si no se tuviera en cuenta la influencia de la *noosfera*. Las fuentes primarias para nuestra investigación son, pues, documentos legislativos (leyes y planes de estudio), artículos, conferencias y, en general, escritos de autores de manuales y de algunos responsables de la formación práctica de los profesores de bachillerato, que nos informan de las influencias de niveles superiores al disciplinar, como el pedagógico o el social (Chevallard, 2002).

Además, los textos escritos para bachillerato son una fuente primaria fundamental, pues, como advierte Antonio Viñao (2012):

Los libros de texto han desempeñado –y siguen desempeñando– un papel clave en la fijación de los contenidos del código disciplinar de cada materia. Es en ellos donde se halla, junto a otros aspectos, el núcleo base, los contenidos y los enfoques fundamentales de cualquier materia o disciplina.

(Viñao, 2012, p. 113).

Puesto que adoptamos un enfoque institucional, los libros de texto son un material importante, en tanto que nos permiten conocer qué transposición didáctica se ha hecho de

los programas o cuestionarios (Chaachoua; Comiti, 2010) con relación a la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

LOS PLANES DE ESTUDIO DEL BACHILLERATO EN EL SIGLO XX

Durante el siglo XX hasta 1960 (año de la muerte de Puig Adam) encontramos un elevado número de planes de estudios, íntimamente ligados a la ideología política de quienes promulgaban las leyes en cada momento.

El plan de estudios de bachillerato de 1903 (Utande, 1964) consistió en una mera simplificación del de 1901 y no afectó de forma notoria a las asignaturas de matemáticas, que se seguían impartiendo durante los cuatro primeros cursos (Cuadro 01³).

PLAN DE ESTUDIOS DE 1903	
CURSO	ASIGNATURA
1.o	Nociones y ejercicios de Aritmética y Geometría
2.o	Aritmética
3.o	Geometría
4.o	Álgebra y Trigonometría
5.o	
6.o	

Cuadro 01 – Asignaturas de matemáticas en el Plan de 1903.

Fuente: Elaboración propia.

El llamado “Plan Callejo” (Real Decreto de 23 de Agosto de 1926) entra en vigor durante la dictadura del general Primo de Rivera y estructura el bachillerato en dos ciclos, de tres años de duración cada uno. El primero, *bachillerato elemental*, pretendía dotar a los españoles de cultura general y se exigía para ciertas oposiciones y carreras no universitarias; mientras que el *bachillerato universitario*, continuación del anterior, estaba destinado a aquellos que deseaban cursar estudios universitarios y permitía al alumnado elegir entre estudios de carácter humanístico o científico (sección de Letras o sección de Ciencias).

³ No se dispone de programas para las asignaturas.

En cuanto a secuenciación de las materias no se sigue la tendencia de otros países europeos, donde la mayor parte de las materias se desarrollan en todos los cursos y se estipulan en orden creciente de complejidad (Díaz de la Guardia, 1998).

Cabe destacar que esta reforma fue muy criticada por muchos sectores, entre ellos los profesores, por cuanto les afectaba; algunos de los factores que propiciaron el descontento del profesorado de enseñanza secundaria fueron la modificación del sistema de exámenes, que establecía una separación entre la función docente y evaluadora, y la imposición del *texto único*, frente a la libertad para que cada profesor que lo deseara pudiera editar y recomendar su propio texto (Cuesta, 2013).

A continuación (Cuadro 02), se muestran las asignaturas de matemáticas establecidas en este plan de estudios y los contenidos algebraicos⁴ impartidos en cada curso (solo hemos incluido en este cuadro y en los siguientes los contenidos relativos a las ecuaciones de grado uno y dos y los sistemas de dos ecuaciones lineales).

Cuadro 02 – Asignaturas de matemáticas en el Plan de 1926.

PLAN DE ESTUDIOS DE 1926		
1.o Bach. elemental	Elementos de Aritmética	
2.o Bach. elemental	Elementos de Geometría	
3.o Bach. elemental		
1.o Bach. universitario	Nociones de Álgebra y Trigonometría	Funciones racionales. Ecuaciones de primer grado: Definición y clasificaciones. Transformación de ecuaciones. Ídem fraccionarias. Resolución de ecuaciones de primer grado. Problemas de primer grado con una incógnita. Sistemas de ecuaciones. Ecuaciones de segundo grado.
2.o Bach. universitario Ciencias	Aritmética y Álgebra	Expresiones algebraicas. Fracciones algebraicas. Ecuaciones algebraicas: Definiciones y clasificación. Transformación de una ecuación en otra equivalente. Resolución analítica de la ecuación de primer grado con una incógnita. Sistemas de ecuaciones lineales [...]. Problemas diofánticos de primer grado. Representación gráfica de la función lineal de una variable. Ecuación de segundo grado con una incógnita.
3.o Bach. Universitario Ciencias	Geometría y Trigonometría	

Fuente: Elaboración propia.

⁴ Ante la falta de Cuestionarios, hemos considerado las obras *Nociones de Álgebra y Trigonometría*, de Rey Pastor y Puig Adam (1928), y *Aritmética y Álgebra*, de Luis Adalid Costa y Manuel Calderón Giménez (1929), premiada en un concurso de obras de texto para los Institutos de segunda enseñanza y declarada como texto oficial por la Comisión calificadoradora por la Real Orden de 7 de octubre de 1929 (Villalain, 1997).

El 14 de abril de 1931 se proclama la II República en España. A partir de ese momento, se formulan distintas reformas de la Segunda enseñanza: el Decreto de 7 de agosto de 1931, por el que se retoma el plan de estudios de 1903 con algunas modificaciones, y la Orden de 13 de julio de 1932 (Utande, 1964), que culminarían con la entrada en vigor, en 1934, de un nuevo plan de estudios estructurado en dos ciclos, con una duración total de siete años (Decreto de 29 de Agosto de 1934). El primer ciclo comprendía los tres primeros años y el segundo los cuatro restantes. Al finalizar el quinto año era posible obtener un “certificado de estudios elementales”, que permitía el ingreso a las Escuelas Normales.

Las variaciones que la implantación de este nuevo bachillerato origina sobre las asignaturas y los contenidos de álgebra relativos a las ecuaciones (Orden de 28 de Septiembre de 1934) pueden apreciarse en el Cuadro 03.

Cuadro 03 – Asignaturas de matemáticas en el Plan de 1934.

PLAN DE ESTUDIOS DE 1934		
CURSO	ASIGNATURA	CONTENIDOS DE ÁLGEBRA
1.o	Matemáticas	
2.o	Matemáticas	
3.o	Matemáticas	Identidades y ecuaciones. Resolución de ecuaciones sencillas de primer grado.
4.o	Matemáticas	Empleo de las ecuaciones de primer grado para la resolución de problemas de Aritmética concreta.
5.o	Matemáticas	Polinomios [...] Práctica de operaciones con fracciones algebraicas. Equivalencia y transformación de ecuaciones. Resolución y discusión de la ecuación de primer grado con una incógnita. Marcha metódica en la resolución de problemas e interpretación de los resultados. Ecuación de primer grado con dos incógnitas. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas [...]. Problemas de Aritmética concreta que se resuelven mediante sistemas de ecuaciones lineales. Resolución y discusión de la ecuación de segundo grado con una incógnita. Relaciones entre los coeficientes y las raíces. Ecuaciones bicuadradas. Resolución gráfica de la función $y = x^2$. Resolución gráfica de la ecuación de segundo grado.
6.o	Matemáticas	
7.o	Matemáticas	

Fuente: Elaboración propia.

Tras el golpe de estado de 1936, el gobierno franquista se propone entre sus objetivos prioritarios acabar con el legado republicano. Con esta finalidad, comienza a eliminar aspectos considerados fundamentales en el antiguo modelo del bachillerato, como la coeducación o el laicismo, y se inicia contra el profesorado una purga (depuración docente) en la que aquellos profesores sospechosos de ser afines a las ideologías republicanas eran duramente represaliados. Además, numerosas obras (catalogadas como peligrosas) son destruidas y algunas publicaciones censuradas (Viñao, 2002, 2014).

En 1938, con la Ley de Reforma de la segunda enseñanza (Ley de 20 de Septiembre de 1938), entra en vigor un plan que estructura el bachillerato en tres ciclos: el primero, formado por los tres primeros cursos, constituye una enseñanza elemental; el segundo comprende los cinco primeros cursos y permite el acceso a determinados Centros o Escuelas; y, por último, la realización de los siete cursos y la superación del examen de Estado daba acceso a los estudios universitarios.

Otro factor destacable de este nuevo bachillerato es la inclusión de asignaturas de contenido ideológico (religión o educación patriótica) en su programa. Respecto a los libros de texto, únicamente los títulos aprobados por el Ministerio de Educación Nacional pueden ser utilizados como obras didácticas en los centros educativos.

Las asignaturas de matemáticas que implanta esta nueva reforma del bachillerato (Orden de 14 de Abril de 1939) y los contenidos sobre ecuaciones en cada una de ellas se desglosan en el Cuadro 04.

Cuadro 04 – Asignaturas de matemáticas en el Plan de 1938.

PLAN DE ESTUDIOS DE 1938		
CURSO	ASIGNATURA	CONTENIDOS DE ÁLGEBRA
1.o	Aritmética y Geometría	
2.o	Aritmética y Geometría	
3.o	Aritmética, Geometría y elementos de Álgebra	Adición, sustracción, multiplicación y división de monomios y polinomios. Ecuaciones y problemas simples de primer grado con una incógnita. Discusión. Ecuaciones y problemas simples de segundo grado con una incógnita. Discusión. Ecuaciones bicuadradas.
4.o	Ampliación de Álgebra y Geometría	División de un polinomio entero en x por $(x-a)$. Fracciones algebraicas. Formas simbólicas derivadas de

		las fracciones. Equivalencia y transformaciones de ecuaciones. Sistemas de ecuaciones.
5.0	Álgebra y elementos de Trigonometría	
6.0	Álgebra y nociones de Geometría analítica	
7.0	Nociones de Álgebra Superior	

Fuente: Elaboración propia.

En 1953 la Ley de Ordenación de Enseñanza Media (Ley de 26 de Febrero de 1953) pone fin a la vigencia del plan de 1938; acorta un año la duración del bachillerato, reduce el contenido de los cuestionarios, para que los estudiantes puedan centrarse en los aspectos fundamentales, y se propone desahogar el trabajo escolar y evitar el abuso del método cíclico en algunas materias (Decreto de 12 de Junio de 1953). El bachillerato queda, de esta forma, estructurado en dos grados de cuatro y dos años. Además, se establece la obligatoriedad de superar un curso preuniversitario para ingresar en la universidad. A continuación, se exponen los contenidos algebraicos que nos interesan, para cada asignatura (Cuadro 05).

Cuadro 05 – Asignaturas de matemáticas en el Plan de 1953.

PLAN DE ESTUDIOS DE 1953		
1.0 Bach. elemental	Matemáticas	
2.0 Bach. elemental	Matemáticas	
3.0 Bach. elemental	Matemáticas	Expresiones algebraicas: operaciones con monomios y polinomios. Fracciones algebraicas. Ecuaciones: su equivalencia. Ecuaciones de primer grado. Sistemas de ecuaciones: sus equivalencias. Representación gráfica de funciones de primer grado. Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
4.0 Bach. elemental	Matemáticas	Ecuación de segundo grado. Estudio de las funciones $y = ax^2 + bx + c$ Representación gráfica.
5.0 Bach. superior. Ciencias	Matemáticas	División de un polinomio entero en x por $(x-a)$. Sistemas de dos o tres ecuaciones lineales determinados, indeterminados e imposibles.
6.0 Bach. superior. Ciencias	Matemáticas	Estudio completo de la ecuación de segundo grado.
Preuniversitario		

Fuente: Elaboración propia.

El bachillerato sufriría otra reforma en 1957, aunque la implantación progresiva del plan hizo que los contenidos del cuarto curso de 1953 perduraran hasta el curso académico 1959-1960 (Utande, 1964).

PEDRO PUIG ADAM Y JULIO REY PASTOR

Pedro Puig Adam (1900-1960) era doctor en matemáticas e ingeniero. Compagina la cátedra de Matemáticas del instituto de San Isidro, que obtiene en 1926, con una plaza de profesor en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Madrid. Desde 1955 es miembro de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza Matemática, lo que motiva que se celebre en Madrid en 1957 la XI Reunión de la Comisión Internacional para el estudio y mejoramiento de la Enseñanza Matemática (Rodríguez, 1960, en Puig Adam, 1960). Es autor de numerosos trabajos sobre matemáticas, publicados en revistas de carácter pedagógico y científico (*Gaceta Matemática*, *Revista de Segunda Enseñanza*, *Revista Matemática Hispano-Americana*, *Enseñanza Media*, *Revista de Educación Nacional*, etc.).

Julio Rey Pastor (1888-1962), catedrático de la Universidad Central de Madrid, es propuesto por la *Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas* (JAE) en 1915 para liderar el *Laboratorio y Seminario Matemático*, creado por este organismo. Fue el promotor, y director en los primeros años, de la *Revista Matemática Hispano-Americana*, que ocupó el vacío originado por la desaparecida *Revista de la Sociedad Matemática Española*. A pesar de que sus periodos en España eran reducidos, por sus viajes a Argentina a partir de 1917, el matemático español nunca se desvinculó de esta prestigiosa institución.

Ambos profesores escribieron conjuntamente varias colecciones de manuales escolares para bachillerato, que hemos utilizado en este trabajo.

Los libros de texto seleccionados son obras representativas de la matemática que se estudiaba en los institutos de segunda enseñanza, sobre todo por el sector del profesorado más renovador. Podemos afirmar que son libros que influyeron notablemente en el profesorado de matemáticas, por varias razones. La primera es el gran número de ediciones o de tiradas de los libros; por ejemplo, del libro *Matemáticas: tercer curso* hay

constancia de, al menos, once ediciones (Base de datos MANES). Del mismo modo, la mayoría de sus obras se reeditaron, incluso cuando los planes –y el régimen político– ya habían cambiado, entre ellas algunas de las más conocidas: *Elementos de Aritmética*, en 1927, y *Elementos de Geometría*, en 1928, de la Colección Elemental Intuitiva. Es este también el caso del libro *Nociones de Álgebra y Trigonometría* (Rey Pastor y Puig Adam, 1928), uno de los que utilizamos en el apartado siguiente, dirigido al primer curso del bachillerato universitario del plan de estudios de 1926, que se reeditó estando en vigor el plan republicano y que iba por su sexta tirada en 1946 en pleno época franquista, cuando sus autores ya habían publicado libros para todos los cursos del plan de 1938 (y se siguió publicando después). Su reedición supuso que a veces se publicara con títulos diferentes o que se añadieran contenidos, por lo general situados en nuevos capítulos al final del libro, para adaptarlo a los cuestionarios vigentes.

Más aún, las obras para bachillerato de Rey Pastor y Puig Adam eran una referencia para otros profesores, autores también de libros. Y en algunos casos, más que eso:

La insistencia con que se nos plagia nos obliga a declarar que nuestras primeras publicaciones, lo mismo de carácter intuitivo que racional, y de las cuales hemos ido sacando los materiales necesarios para las sucesivas adaptaciones a los diversos planes de Bachillerato, datan de los años 1927 al 31. Ahora bien: el que nosotros repitamos nuestros razonamientos y nuestros ejemplos no autoriza a los demás a hacer lo propio [...].

(Rey Pastor y Puig Adam, 1945b, p. II).

LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO EN LOS LIBROS DE TEXTO

Con el fin de disponer de un sistema de referencia desde el que analizar cómo se plantea en los libros de texto la enseñanza del objeto matemático ecuación, explicitamos el modelo epistemológico de referencia (MER) a partir del que interpretar el modelo epistemológico dominante o la manera en la que se concibe la enseñanza en este ámbito de la matemática en el periodo considerado. Y ese modelo epistemológico de referencia se describe en términos de praxeologías u organizaciones matemáticas (Gascón, 2014).

El MER que presentamos está realizado a partir del que proponen Briant y Bronner (2017), a partir de los trabajos de Hamid Chaachoua. Consideramos un tipo de tarea T: Resolver una ecuación de primer grado. A partir de T, se diferencian dos subtipos

de tareas, T1: Resolver una ecuación de primer grado de la forma $P=k$ ($k \in \mathbb{R}$); y T2: Resolver una ecuación de primer grado de la forma $P=Q$, donde P y Q son polinomios de grado 1.

Las técnicas posibles pueden ser a su vez descritas como una sucesión de tipos de tareas –o subtareas–. Aquí presentamos las dos técnicas básicas para realizar estas tareas, adaptación de las que proponen Briant y Bronner (2017), de las que hemos suprimido una tarea, concretamente la de reducir los dos miembros una vez desarrollados (antes de dejar en un miembro los términos literales y en el otro los términos independientes), por considerar que no es necesaria y que tampoco se observa en los libros que manejamos. (Hay que advertir que estas praxeologías forman parte de un MER que figura en el trabajo citado, en el que se consideran tipos de ecuaciones en las que ningún miembro de dos o más términos viene expresado en forma de fracción).

La primera de ellas (τ_1) consiste en realizar ordenadamente estas tareas: desarrollar, cuando haya paréntesis, los dos miembros; sumar a ambos miembros los opuestos de cada término con parte literal que haya en el segundo miembro (en el caso de una tarea de tipo T2) y los opuestos de los términos independientes del primer miembro, cuando sea necesario; reducir, los dos miembros si es necesario; dividir por el coeficiente principal de la ecuación resultante los dos miembros, si el coeficiente principal es distinto de 1; calcular el resultado de la división (si se va a expresar en forma decimal).

La segunda técnica (τ_2) para resolver una ecuación de primer grado se diferencia de la anterior en la segunda y la cuarta de las tareas que la componen. La segunda tarea consiste en transponer los términos con parte literal al primer miembro y los términos independientes al segundo; la cuarta ahora consiste en transponer al segundo miembro el coeficiente principal de la ecuación ya reducida, si es distinto de 1.

Ambas técnicas se justifican mediante la equivalencia de dos expresiones algebraicas al factorizar y al desarrollar o reducir términos, y por otro elemento tecnológico clave: si se suman términos a ambos miembros de una ecuación o se multiplican ambos por un mismo número, se obtiene una ecuación equivalente, o sea, con el mismo conjunto de soluciones. Es decir, τ_1 y τ_2 comparten los elementos tecnológicos; además, τ_1 puede evolucionar hacia τ_2 , hasta el punto de que esta última sea vista como la evolución natural de la primera. Por ello, y aunque podríamos hablar, en términos de la TAD, de una *praxeología local* (Bosch y Gascón, 2014), Briant y Bronner las consideran

dos praxeologías que pueden coexistir, incluso sin que siempre se vea de modo consciente τ_2 como una rutinización de τ_1 .

Partimos entonces de dos praxeologías de referencia, la relativa a la *resolución por transposición* y la relativa a la *resolución mediante operador* (suma de opuestos, producto por inversos), para analizar las propuestas de Puig Adam y Rey Pastor acerca de la enseñanza de las ecuaciones en el bachillerato.

En todas sus obras cuidan la caracterización del objeto *ecuación*, insistiendo en su diferencia con una *igualdad* algebraica, para lo que comprueban varios valores que no son soluciones (sin restringirse a ecuaciones de primer grado ni de una sola incógnita), clasifican las ecuaciones en enteras, fraccionarias e irracionales, estudian las soluciones en el caso de la ecuación $ax=b$, y ponen énfasis en la noción de *equivalencia* de ecuaciones, antes de abordar el modo de resolver una ecuación.

Así es como describen Rey Pastor y Puig Adam en sus libros la técnica de resolución de una ecuación, que presentan institucionalizada y dividida en cuatro pasos que son a la vez tareas. La tomamos de uno de esos libros:

REGLA: Para resolver una ecuación entera de primer grado con una incógnita:

- 1.o) Se desarrollan las expresiones de ambos miembros, suprimiendo los paréntesis que contengan.
- 2.o) Se transponen al primer miembro todos los términos que contengan x , y al segundo, los independientes.
- 3.o) Se reducen ambos miembros a forma monomía.
- 4.o) Si la incógnita en el primer miembro tiene el coeficiente 1, la única raíz es el número que figura en el segundo miembro. Si la incógnita tiene coeficiente distinto de 1 y de 0, se divide por él y resulta una sola raíz.

(Rey Pastor y Puig Adam, 1928, p. 80; Rey Pastor y Puig Adam, 1945a/1941, p. 102; Rey Pastor y Puig Adam, 1945b/1942, p. 85).

En la segunda tarea de las que componen la técnica propuesta por estos autores se observa un gesto que, de hecho, se repite en todos los libros a lo largo de ese periodo: transponer los términos con parte literal precisamente al primer miembro y los independientes al segundo. Usando el MER descrito, podemos observar que la tarea segunda pertenece a la praxeología de referencia denominada de la transposición, mientras que la última es propia de la primera praxeología. Esto muestra que, efectivamente, la técnica consistente en sumar el opuesto para cancelar términos se acaba rutinizando y es entonces cuando da paso a la transposición, que es la técnica que finalmente se institucionaliza.

Podemos hablar así de un fenómeno didáctico consistente en que una técnica tiene, respecto de otra, una función *tecnológica*. La técnica de resolución mediante operador está antes y la función que tiene asignada es la de servir para *justificar*, y también para *descubrir* otra técnica, la de la transposición, que se considera más eficiente y es la que finalmente se institucionaliza y se propone automatizar.

No obstante, se observa que este fenómeno no se da en el caso del producto. Para la suma enuncia el teorema “Si a cada miembro de una ecuación se le suma un mismo número, resulta otra ecuación equivalente” (Rey Pastor y Puig Adam, 1928, p.70), que extiende, mediante otro teorema (ambos con la correspondiente demostración), a la suma de expresiones enteras; a continuación enuncia otro similar para la resta, como corolario y, por último, formula la que llama “Regla de trasposición de términos”, como sigue: “REGLA.– Un término se puede pasar de un miembro a otro, cambiándole el signo, y resulta otra ecuación equivalente” (p. 73). Para el producto, en cambio, solo enuncia el teorema para la multiplicación –y, como corolario, la división– por un número distinto de cero (solo se ocupa de ecuaciones “enteras”), seguido del apartado “Trasposición de factores o divisores”. En este apartado, la técnica es:

Así como los términos, es decir, los sumandos, *se pasan de un miembro a otro* restando, los factores se trasponen dividiendo, como indica este ejemplo:

$$2x - 4 = 1$$

Como en el primer miembro se observa el factor 2, *si dividimos por él ambos miembros* resulta la ecuación equivalente:

$$x - 2 = \frac{1}{2}$$

(Rey Pastor y Puig Adam, 1928, p. 74-75. El destacado es nuestro).

Esto mismo se detecta en las obras escritas para el plan de estudios de 1938. Vemos cómo aquí usan un elemento de la praxeología por operador, en lugar de transponer. Incluso el lenguaje no deja lugar a dudas, pues mientras los sumandos “se pasan de un miembro a otro”, con el factor, aunque emplean el verbo “trasponer”, la última de las tareas que componen la técnica de resolución se describe así: “dividimos por él ambos miembros”. Y esto mismo se repite en el resto de los libros que escribieron para los diferentes planes de estudios.

El análisis praxeológico estaría incompleto sin considerar las *variables didácticas* (Brousseau, 2007) asociadas a las tareas de resolución de ecuaciones lineales. En particular, nos fijamos en la variable *conjunto numérico* al que pertenecen los coeficientes.

Observamos que, si bien en los ejemplos primeros los coeficientes son enteros, enseguida aparecen ejemplos y ejercicios con coeficientes fraccionarios y decimales, lo que no incluyen son ecuaciones con coeficientes irracionales (solo cuando clasifican las ecuaciones en enteras, fraccionarias e irracionales aparece un ejemplo de ecuación entera con coeficientes irracionales: $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = \sqrt{5}$ (Rey Pastor y Puig Adam, 1928, p. 69; Rey Pastor y Puig Adam, 1945A/1941, p. 90; Rey Pastor y Puig Adam, 1945b/1942, p. 81). La inclusión de coeficientes no enteros no requiere variar la técnica propuesta, en todo caso puede hacer menos sencilla la realización de alguna de las tareas que la componen; estos ejemplos se tratan igual que los enteros, sin hacer ninguna diferencia, ni llamada de atención u observación alguna. Quizá por eso la primera de las tareas de la técnica de resolución que proponen, “se desarrollan las expresiones de ambos miembros, suprimiendo los paréntesis que contengan”, no se refiere a la necesidad de multiplicar por un mismo número ambos miembros de la ecuación, para obtener otra ecuación equivalente sin denominadores. Antes que ejemplos en los que uno o los dos miembros de la ecuación sea una fracción, se prefieren los términos fraccionarios o con coeficientes fraccionarios. Apenas hemos hallado algunas excepciones. En el libro de tercer curso para el plan de estudios de 1934 (Rey Pastor y Puig Adam, 193?, p. 150), aparece la ecuación:

$$\frac{5x+1}{4} = 3 + 4x$$

En este caso para ajustarse a la regla dada en el libro, tendrían que dividir los dos términos del binomio por 4 y luego transponer, pero lo que hace es empezar por multiplicar por 4 ambos miembros de la ecuación. Otro tanto sucede en el texto de tercer curso del plan de 1939; ponen un único ejemplo de ecuación con denominador 2 en un miembro y 3 en el otro (Rey Pastor y Puig Adam, 1945B/1942, p. 84), precisamente para explicar que al multiplicar por un mismo número ambos miembros de una ecuación se obtiene una equivalente a ella. En ambos libros introducen también ecuaciones con denominadores numéricos en los ejercicios propuestos, aunque apenas en alguno de ellos, igual que en el texto que escribieron para el cuarto curso del plan de 1926 (Rey Pastor y Puig Adam, 1928, p. 82).

En realidad esto requeriría una adaptación de la técnica para resolver la ecuación, en este caso añadir una tarea, antes de las cuatro descritas, a la técnica que propone:

multiplicar, si es necesario, ambos miembros por un mismo número; así se ampliaría el *alcance* de la técnica (Chevallard, 1999), para permitir resolver ecuaciones de este tipo. No obstante, es algo de lo que los autores no parecen percatarse al formular la regla general para resolver una ecuación lineal, probablemente porque estos ejemplos aparecen en sus libros de manera anecdótica y no creen necesario considerarlos para institucionalizar técnicas generales. En cambio, hallamos textos anteriores que sí contemplan este caso y la regla que proponen para resolver las ecuaciones comienza con la tarea “1.a Quitar denominadores” (Suárez Somonte, 1912, p. 99), y sigue con las tareas que componen la praxeología estudiada.

Hay que señalar que la técnica descrita para la resolución de ecuaciones es la única que vemos en los libros, con una sola excepción. El texto elaborado para el tercer curso del plan de 1934 (Rey Pastor y Puig Adam, 193?), en el que el álgebra solo comprende la última lección incluida en la parte de Aritmética, es el único en el que se diferencian, al tratar la resolución de ecuaciones de primer grado, los dos tipos de tareas T1 y T2. Primero aborda la resolución de tareas del tipo T1, en este caso con técnicas aritméticas:

Al definir las operaciones inversas y al calcular sus resultados, no hemos hecho otra cosa que resolver algunas ecuaciones sencillas. Así, por ejemplo, en la ecuación antes escrita

$$x + 7 = 10$$

la incógnita x es un sumando de una suma de valor 10 y cuyo otro sumando vale 7; luego en virtud de la definición de diferencia,

$$x = 10 - 7 = 3$$

(Rey Pastor y Puig Adam, 193?, p. 147).

Lo mismo para la ecuación “ $6x = -24$ ” (p. 148). Y después justifica la regla para transponer números que, a continuación, extiende a cualquier término para ecuaciones del tipo $P(x)=Q(x)$, cuya resolución corresponde a una tarea del tipo T2.

En el libro escrito en 1928 (plan 1926) las ecuaciones se introducen, y antes las expresiones algebraicas, sin contexto alguno y sin intentar vincularlas a ningún problema aritmético previo. Los mismos autores comentan, en lo que sería un breve prólogo, que la obra no responde a su criterio de cómo debe enseñarse, sino a la intención de ofrecer un texto adaptado al cuestionario recientemente aprobado:

Con mucho menos tiempo que el necesario para dar normalmente a luz un libro [...] aparece, un tanto atropelladamente, la primera parte de este cursillo [...] ajustado al cuestionario oficial.

[...] pero conste que hemos de volver sobre el tema con más sosiego (si para ello hubiera lugar), pues quisiéramos acoplar este librito al carácter de nuestros *Elementos de Aritmética* y *Elementos de Geometría*, incluyéndolo así en la *Colección elemental intuitiva*, que tan favorable acogida ha tenido entre el público [...].

(Rey Pastor y Puig Adam, 1928, p. 5).

Cuando, con la proclamación de la II República en 1931, se deroga el decreto anterior y se establece lo que en realidad es una vuelta al plan de estudios de 1903, Rey Pastor y Puig Adam publican su obra *Lecciones de Aritmética*, para el segundo curso de bachillerato, en la que las ecuaciones son introducidas como parte del tema del descuento comercial, aprovechando las expresiones con las que se había ya trabajado, en particular:

valor efectivo + descuento = valor nominal

$$\frac{36000 \cdot x}{25 \cdot 4,5} + x = 5400$$

(Rey Pastor y Puig Adam, 1932, p. 63).

Sus autores lo explican así en el prólogo: “¿Cuántas ecuaciones hemos visto resueltas en las Aritméticas corrientes, sin mentar la palabra ecuación, de uso escrupulosamente prohibido hasta el Álgebra?” (Rey Pastor y Puig Adam, 1932, p. 6). Una de las normas metodológicas por las que aboga José Augusto Sánchez Pérez, profesor de matemáticas del Instituto-Escuela, es “hacer observar en todos los problemas de Aritmética y Geometría, aun en los más sencillos, que una vez resuelto el problema se ha logrado averiguar una cantidad que se desconocía”, y aprovechar para introducir así las ecuaciones, como en otros países (Sánchez Pérez, 1924, p. 41). Aunque en realidad Rey Pastor y Puig Adam solo recurren a esta ecuación (y otras del mismo apartado) para definir el propio concepto de ecuación y de equivalencia de ecuaciones y deducir, apelando al recuerdo de las manipulaciones realizadas antes, las propiedades que justifican las reglas de transposición (equivalencia de ecuaciones al sumar o restar un mismo número a los dos miembros o multiplicarlos o dividirlos por un mismo número); después explican esas reglas recurriendo al recurso de la balanza de platillos.

Este mismo recurso lo usan en el libro de tercer curso que escriben en 1942, de acuerdo con el plan de 1938. Y en la lección que sigue, antes de explicarlo a partir de un

ejemplo, que usan como ejemplo genérico, ya sin recurrir a nada concreto, recuerdan: “El procedimiento empleado en la lección anterior para resolver el problema de la balanza es igualmente aplicable a toda otra ecuación de primer grado en la que figure una sola incógnita” (Rey Pastor y Puig Adam, 1945b/1942, p. 83).

En la obra *Didáctica Matemática* Eurística, que consta de varias lecciones experimentales para mostrar al profesorado cómo llevar a cabo el método eurístico, propone el uso de balanzas para explicar la resolución de ecuaciones, tal y como él mismo declara haber hecho en el instituto de San Isidro, aunque reconoce como limitación del modelo de la balanza la de tener que restringirse a coeficientes positivos: por ello aclara: “mientras he manejado las balanzas, he evitado usar el concepto de *transposición o paso* de un término a otro, para no sugerir la posible confusión de transponer pesas u objetos de un platillo a otro” (Puig Adam, 1956, p. 57). Además está la limitación de conseguir objetos de igual peso, cuando se trata de experimentar con balanzas reales. Por ello, finalmente recomienda:

Una vez obtenida por vía concreta y espontánea la validez de ciertas transformaciones, y traducidas éstas en esquemas operatorios, conviene desprenderse pronto de tal adherencia concreta para poder actuar imaginativamente y generalizar sin las trabas de tal situación.

(Puig Adam, 1960, p. 347).

LA DIMENSIÓN ECOLÓGICA

Desde la perspectiva que hemos adoptado, asumimos que las decisiones didácticas no pueden ser interpretadas ni comprendidas si no es en el contexto educativo, político, etc., en el que se desarrolla la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y que delimita la forma en la que puede tener lugar ese estudio en cierta institución, en este caso, la segunda enseñanza en España entre los años veinte y cincuenta del siglo pasado (Chevallard, 2002). Las propuestas de Rey Pastor y Puig Adam hay que interpretarlas en relación con los cambios que en aquellos momentos se produjeron en los niveles pedagógico, escolar y social en nuestro país a lo largo de los años en las que fueron formuladas.

Sus libros de matemáticas para bachillerato son, en realidad, adaptaciones y reediciones de las que hicieron en los años previos al periodo republicano. Y la orientación

que Puig Adam siguió defendiendo que debía tener la enseñanza de la matemática en el bachillerato, reflejada en numerosos artículos y conferencias hasta sus últimos años (Puig Adam, 1960), no cambió a lo largo de su vida. Conocer, pues, cómo era esta orientación y cuál era el origen de la epistemología de estos profesores y de su modelo pedagógico, requiere que nos refiramos a los años veinte y principio de los años treinta del siglo XX.

En esos momentos la enseñanza de la matemática en España estaba recibiendo un fuerte impulso renovador que afectaba a todos los niveles de enseñanza gracias, en buena medida, a una serie de instituciones que hicieron suya la ideología escolanovista extendida en el ámbito internacional (Sánchez-Jiménez, 2015). Entre estas instituciones, cercanas a la Institución Libre de Enseñanza, estaban la Junta para Ampliación de Estudios, el Laboratorio Matemático y el Instituto-Escuela de Madrid, estos últimos dependientes de ella.

Muestra del afán renovador de la época es la creación por la JAE del Instituto-Escuela en Madrid, en 1918, como un centro de ensayo y reforma, además de con la función de que en él completaran su formación pedagógica los futuros profesores de bachillerato. Los profesores de secundaria del Instituto, nombrados por la JAE, contaban con un asesor, elegido por ella. Precisamente esta labor, en matemáticas, se le encomendó a Rey Pastor, que dirigió la Sección Matemática del instituto hasta 1920. En el Instituto se impartían todos los niveles de enseñanza no obligatoria. José Augusto Sánchez Pérez, se refiere así a la relación entre ellos: “Escuela, Instituto y Universidad pueden, pues, distribuirse el trabajo de tal modo que no se note el paso de uno a otro, porque el enlace debe ser perfecto” (1921, p. 10). Y añade: “El Bachillerato debe ser una continuación de la Escuela”. Reivindica que el bachillerato tenga carácter intuitivo en los primeros grados, aunque en los dos últimos cursos “es donde la enseñanza debe perder por completo el carácter intuitivo, procurando el rigor lógico” (p. 22), para preparar al alumno para el ingreso en estudios superiores.

La preocupación por la vertiente educativa y científico cultural de la enseñanza secundaria es una constante en este centro y, en general, en aquellas personas con más inquietudes pedagógicas. Y es compartida por el director del Laboratorio Matemático:

Durante mucho tiempo se ha considerado la segunda enseñanza como preparatoria para la Universidad, hoy se propende mas bien a la formación de hombres cultos, con esa cultura general tan difícil de definir en términos precisos, que se compone de las antiguas humanidades y de esas modernas humanidades que se llaman ciencias exactas y naturales.

[...]

Ya no se considera en casi ningún país como enseñanza informativa, sino formativa.

(Rey Pastor, 1931, p. 203).

Además en esos momentos en España se intenta aprender de otros países, para mejorar la situación interna, y Rey Pastor insiste en que “la reforma, ya efectuada en casi todo el mundo, se refiere a la materia y al método” (Rey Pastor, 1931, p. 208).

La constante es reivindicar la intuición como norma en los primeros cursos del bachillerato, una segunda enseñanza “*marcadamente* intuitiva” en los primeros grados, aunque

No debe dejarse ninguna ocasión propicia para iniciar al alumno en los razonamientos deductivos (aun reivindicándolos con carácter concreto), atendiendo así a su completa formación matemática, y preparando el terreno para las abstracciones superiores.

(Puig Adam, 1929, p. 130).

Para el grado siguiente, a partir de los trece años, Puig Adam demanda una enseñanza “*preponderantemente racional*”, aunque con abundancia de ejemplos intuitivos, de modo que el tránsito de una a otra sea gradual (p. 130), es decir, una “evolución paulatina, siempre más atinada que la presentación ex abrupto del método racional en un tercer curso, como se hacía, por ejemplo, en los programas del año 34” (Puig Adam, 1960, p. 141-142). Critica los programas del año 34 y ensalza los del 26, correspondientes al periodo de la dictadura de Primo de Rivera:

Me refiero, por ejemplo, a la modalidad característica de los métodos intuitivos introducidos en el Bachillerato español hacia 1926 y 27, operando con un concepto de intuición más cercano al de la auténtica actividad descubridora y generadora del pensar matemático que al sentido que a esta palabra se suele dar en la pedagogía tradicional. [...] Intuición que busca el acceso directo e inmediato a la verdad, apoyando los razonamientos en oportuno pedestal concreto.

(Puig Adam, 1960, p. 141).

Pero en realidad, los cuestionarios que desarrollan los programas de la reforma de 1934, lo que dicen es:

Los cursos intuitivos no deben reducirse a una mera exposición de recetas para resolver ejercicios prácticos, sino que se hará razonar al alumno en todo momento, siempre dentro de los límites que imponga su desarrollo

mental. La dosificación de la intensidad y grado de abstracción de las materias estudiadas [...] ha de ser confiada a los Profesores.

(Orden de 28 de Septiembre de 1934, p. 571).

Rey Pastor y Puig Adam habían comenzado a escribir libros para bachillerato durante el tiempo de vigencia del plan de 1926, y la República lo deroga para volver a uno ya superado, y con carácter provisional:

Hace ya algún tiempo que los planes de enseñanza están hechos también de retales, que varían a cada curso. ¿Se puede, pues, perdonar el pecado de un libro de carácter interino como el plan y con sus mismos defectos originarios?

Esperamos del público indulgente la absolución, y de las altas esferas académicas un plan de Bachillerato que, aun cuando tarde en fraguar, tenga luego la firmeza necesaria para resistir los incesantes cambios de la política.

(Rey Pastor y Puig Adam, 1932, p. 6).

Hay que tener en cuenta que las palabras de Pedro Puig Adam alabando los programas del 26 y criticando los del 34 fueron pronunciadas en la conferencia *Sobre la Enseñanza Eurística de la Matemática*, dada el 28 de diciembre de 1957 ante la Federación de Amigos de la Enseñanza, en plena época de la Dictadura (se dio en la sede de la Delegación Nacional de Sindicatos, organismo franquista), y eso podría explicar algunas de las apreciaciones que hace en público: “España no ha ido a la zaga en esta saludable evolución de métodos. Casi me atrevería a afirmar que en algunos períodos hemos ido en vanguardia, ignorándolo nosotros mismos” (Puig Adam, 1960, p. 141). Porque en el prólogo del libro que publica con Rey Pastor para el tercer curso de bachillerato del plan de 1939, al que no hace ninguna crítica, leemos:

Confesamos que esta adaptación ha sido la que nos ha presentado mayor número de problemas pedagógicos, y de aquí que salga con posterioridad a las obras de 4.º, 5.º y 6.º ¿Cómo hacer comprender, en efecto, las ecuaciones de segundo grado y las bicuadradas a criaturas a quienes hace pocos años se les exigió, en el ingreso, el simple conocimiento de las cuatro operaciones aritméticas?”

(Puig Adam, 1945B/1942, p. III).

En el fondo, lo que subyace es la forma de concebir la matemática y la finalidad que se atribuye a la enseñanza secundaria. Según Gascón (2001) el modelo docente está muy influido por el modelo epistemológico de la matemática, así como por el modelo pedagógico que prevalece en la institución.

REFLEXIONES FINALES

En los textos de Rey Pastor y Puig Adam el álgebra se presenta como un “método general que pudiera aplicarse a todos los problemas aritméticos” (Rey Pastor y Puig Adam, 1945b/1942, p. 77); pero enseguida se asocian álgebra y ecuaciones: “el Álgebra es la ciencia que estudia la resolución de ecuaciones” (p. 80). En su época Rey Pastor fue el matemático español más influyente y Puig Adam la figura más relevante de entre los profesores preocupados por la renovación de la enseñanza de la matemática en la etapa secundaria en España. Estudiar el tratamiento que daban estos autores a las ecuaciones, en particular, a la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, permite hacerse una idea, hasta cierto punto, de cómo conciben la enseñanza del álgebra elemental.

Los únicos cambios que hemos detectado de unos manuales a otros, en las propuestas para iniciar la enseñanza de las ecuaciones e introducir las técnicas de resolución, son precisamente el recurso a problemas previos, de aritmética comercial, a la balanza o a operaciones aritméticas en las que hay que averiguar un número, conocido el resultado al multiplicarlo por un factor y sumarle o restarle otro número. Por lo demás, el tratamiento riguroso (no nos referimos a que sea formalista, sino a la ‘finura’ matemática que se observa), la exposición razonada, con un razonamiento adaptado al nivel (por ejemplo, recurriendo a validar propiedades mediante *ejemplos genéricos*), el modo en el que favorecen la función de *descubrimiento*, acorde con la enseñanza eurística que proclaman, permanece inalterable a lo largo de las colecciones de libros que publicaron para la enseñanza media.

Los cambios tan trascendentales que ocurrieron en España durante el siglo XX, no ya de gobierno, sino de régimen político, y las consiguientes modificaciones de los planes de estudio del bachillerato, en función de los fines que le eran asignados a esta etapa educativa, no tuvieron un reflejo notable en las propuestas para la enseñanza de las ecuaciones. Por un lado, el álgebra tiene un carácter más abstracto que la geometría o la

aritmética elementales, en las que la introducción de métodos intuitivos por parte de estas mismas personas es más evidente; y su estudio comienza unos años después, cuando el bachillerato se pretende que vaya teniendo una orientación más racional. Por otro lado, está la propia epistemología predominante en la institución bachillerato en España desde comienzo del siglo XX hasta los años sesenta y la manera en la que las ideas pedagógicas imperantes se filtraban y eran asumidas por los profesores de la segunda enseñanza.

Pero, sobre todo, se pone de manifiesto la influencia de la epistemología propia de estos profesores sobre su práctica, reflejada en los libros que escriben. Los cambios a nivel legislativo, social, e incluso pedagógico se traducen en cambios en la matemática enseñada, solo en la medida en la que logren cambiar la epistemología de los profesores respecto de esta disciplina o de alguna de sus partes.

REFERENCIAS

Adalid Costa, L.; Calderón Giménez, M. (1929). *Aritmética y Álgebra*. Barcelona: Joaquín Horta.

Base de datos MANES. Disponible en: <http://www.centromanes.org> Acceso en: 30 de nov. 2019.

Bosch, M.; Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In: Bikner-Ahsbals, A.; Prediger, S. (Eds.). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematical Education*. Switzerland: Springer International Publishing, p. 67-83.

Briant, N.; Bronner, A. (2017). La prise en compte des nombres idécimaux pour le traitement du concept d'équation; une variable oubliée. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 37, n. 1, p. 101-143.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Traductora: Dilma Fregona. Buenos Aires: Libros el Zorzal.

Carrillo, D. (2005). *La Metodología de la Aritmética en los comienzos de los Escuelas Normales (1838-1868) y sus antecedentes*. Tesis doctoral. Universidad de Murcia, Murcia.

Chaachoua, H.; Comiti, C. (2010). L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. In: Bronner, Alain; Larguier, Mirène; Artaud, Michèle; Bosch, Marianna; Chevillard, Yves; Cirade, Gisèle Y Ladage, Caroline (Eds.). *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. Montpellier: IUFM de l'Académie de Montpellier, p. 771-789.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 19, n. 2, p. 221–266.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude: 3. Ecologie et régulation. In: Dorier, Jean-Luc; Artaud, Michel; Artigue, Michel; Berthelot, René Berthelot; Floris, Ruhul (Coord.). *Actes de la XIe École d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble: La pensée sauvage, 2002, p. 41–56. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53. Acceso en: 30 nov. 2019.

Cuesta, R. (2013). La segunda Enseñanza en España. De bachillerato tradicional-elitista al tecnocrático de masas. *Conferencia pronunciada en Congreso internacional euroberoamericano sobre la formación del profesorado de educación secundaria*. Madrid, 16 jul. 2013. Disponible en: <http://www.nebraskaria.es/wp-content/uploads/2016/09/La-segunda-Ense%C3%B1anza-en-Espa%C3%B1a-3013.pdf>. Acceso en: 30 nov. 2019.

Decreto de 29 de Agosto de 1934. Gaceta de Madrid, 242, 1934, p. 1871–1874.

Decreto de 12 de Junio de 1953. Boletín Oficial del Estado, 183, p. 4010-40012.

Díaz de la Guardia, E. (1988). *Evolución y desarrollo de la Enseñanza Media en España 1875-1930: un conflicto político-pedagógico*. Madrid: Secretaría General Técnica. Centro de Publicaciones. Ministerio de Educación y Ciencia.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 4, n. 2, p. 129-159. Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33540202>. Acceso en: 30 nov. 2019.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación matemática*, Vol. 26, n. 1, p. 99-123. Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854006>. Acceso en: 30 nov. 2019.

Ley de 20 de Septiembre de 1938. Boletín Oficial del Estado, 85, 1938, p. 1385-1395.

Ley de 26 de Febrero de 1953. Boletín Oficial del Estado, 58, 1953, p. 1119-1130.

Orden de 28 de Septiembre de 1934. Gaceta de Madrid, 294, 1934, p. 567-571.

Orden de 14 de Abril de 1939. Boletín Oficial del Estado, 128 (Suplemento), 1939, p. 1-36.

Puig Adam, P. (1929). Notas sobre Pedagogía Matemática. *Revista Matemática Hispano-Americana*, 4(2), p. 129–131.

Puig Adam, P. (1956). *Didáctica Matemática Eurística*. Madrid: Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.

Puig Adam, P. (1960). *La Matemática y su Enseñanza actual*. Madrid: Secretaría General Técnica. Centro de Publicaciones. Ministerio de Educación Nacional.

Real Decreto de 23 de Agosto de 1926. Gaceta de Madrid, 240, 1926, p. 1237–1239.

Rey Pastor, J. (1931). Valor educativo de la enseñanza de la matemática. *La Escuela Moderna*, 476, p. 203–214.

Rey Pastor, J.; Puig Adam, P. (1928). *Nociones de Álgebra y Trigonometría*. Primera parte. Madrid: Gráfica Universal.

Rey Pastor, J.; Puig Adam, P. (1932). *Lecciones de Aritmética*. Colección Elemental Intuitiva. Madrid: Imp. de A. Marzo.

Rey Pastor, J.; Puig Adam, P. (193?). *Matemáticas: 3.er curso*. Tomo I – Aritmética. Madrid: Unión Poligráfica.

Rey Pastor, J.; Puig Adam, P. (1945a). *Matemáticas 4.o curso*. Madrid: Afrodisio Aguado. (Primera edición 1941).

Rey Pastor, J.; Puig Adam, P. (1945b). *Matemáticas 3.er curso*. Madrid: Afrodisio Aguado, (Primera edición 1942).

Sánchez Pérez, J. A. (1921). Notas de Metodología Matemática. In: Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Congreso de Salamanca. Tomo III. Ciencias Matemáticas. Madrid: Talleres Poligráficos, p. 5-22.

Sánchez Pérez, J. A. (1924). Notas de Metodología Matemática. In: *Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Congreso de Oporto. Tomo III. Ciencias Matemáticas*. Madrid: Jiménez y Molina Imp., p. 39-54.

Sánchez-Jiménez, E. (2015). *Las Escuelas Normales y la renovación de la enseñanza de las matemáticas (1909-1936)*. Tesis doctoral. Universidad de Murcia, Murcia. Disponible en: <http://hdl.handle.net/10201/47449>. Acceso en: 30 nov. 2019.

Sánchez-Jiménez, E.; Carrillo, D. (2018). La Aritmética en las Escuelas Normales españolas en la II República y los años previos. *Paradigma*, Vol. XXXIX, n. 1, p. 31 – 55.

Sánchez-Jiménez, E.; Carrillo, D.; Chevallard, Y.; Bosch, M. (2020). The Second Spanish Republic and the project method: A view from the ATD. In: Bosch, Marianna; Chevallard, Yves; García, Francisco Javier; Monaghan, John (Eds.) *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A comprehensive Casebook*. New York: Routledge, p. 101-117.

Suárez Somonte, I. (1912). *Álgebra y Trigonometría*. Madrid: Estab. tipográfico de Jaime Ratés.

Utande, M. (1964). *Planes de Estudio de Enseñanza Media (1787-1963)*. Madrid: Publicaciones de la Dirección General de Enseñanza Media. Ministerio de Educación Nacional.

Villalain, J. L. (1997). *Manuales escolares en España. Tomo I: Legislación (1812-1939)*. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Viñao, A. (2002). La historia de la educación en el siglo XX. Una mirada desde España. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, v. 7, n. 15, p. 223-256, 2002. Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14001503>. Acceso en: 30 nov. 2019.

Viñao, A. (2012). Historia de las disciplinas, profesionalización docente y formación de profesores: el caso español. *Pro-Posições*, v. 23, n. 3 (69), p. 103-118, 2012. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1590/S0103-73072012000300007>. Acceso en: 30 nov. 2019.

Viñao, A. (2014). La educación en el franquismo (1936-1975). *Educar em Revista*, n. 51, p. 19-35.