ARITMETICA OBLIGATORIA. REFLEXIONES DE LA HISTORIA AL AULA

JOAQUIN GIMENEZ

RESUMEN

En este artículo se justifican algunas reflexiones sobre el papel de la aritmética en la escuela Obligatoria, desde un análisis que recorre la historia en tres períodos. Las aportaciones didácticas (desde una perspectiva básicamente intercultural). Tienen como objetivo el tratamiento de situaciones de aprendizaje que se relacionan con la propia historia de la Aritmética.

ABSTRACT

In the article, we justify some reflections about the role of arithmetics for compulsory school. The analysis divide the history in three periods. The aim of the didactical observations (from an intercultural perspective) is the treatement of teaching-learning situations relating to the historical development.

PALABRAS CLAVE

Aritmética, Cálculo, Historia, Situaciones de aprendizaje, Educación obligatoria, Interculturalismo.

KEYWORDS

Arithmetics, Computation, History, Teaching-learning situations, Compulsory school, Interculturalism.

Numeración y cálculo van unidos, forman un todo: los cambios, avances y retrocesos que experimente una de sus partes provoca automáticamente un cambio, avance o retroceso en la otra.

B. Gómez (1988)

1. INTRODUCCION

El problema de la aritmética que debiera introducirse en la Reforma Curricular se ha enfocado últimamente desde la perspectiva del análisis interno de la propia Reforma: Nuevos objetivos de enseñanza-aprendizaje, nuevas perspectivas, nuevo mundo. En lo que sigue, reanalizaremos el papel de la Aritmética en la escuela obligatoria, así como algunos anhelos desde la propia historia. Reviviendo y justificando para la Didáctica algunas páginas que para mi han sido nuevas, desde una perspectiva intercultural, en la construcción de un estudiante -ser humano- más internacional. Estas reflexiones no van a hacer, pues, una lectura sobre el papel general de los conceptos aritméticos y su aprendizaje desde una perspectiva de desarrollo de conocimiento. Para ello recomendamos la lectura de "Números y operaciones" (Castro y otros 1988) en lo que respecta a los primeros niveles. Tampoco se va a hacer una reflexión específica sobre los números enteros o decimales, ni se pretende una elaboración epistemológica que hacen otros autores. Pretendemos sobre todo indicar algunos aspectos que deben ser tenidos en cuenta en el aula haciendo renacer la historia en la clase.

Ante todo, debemos afirmar que el cálculo asociado al conteo es tan antiguo como el trabajo con cifras; es decir, el uso de los números naturales así como no hemos de despreciar que los análisis pormenorizados de este hecho son muy novedosos (Iffrah 1989; Guitel 1981; Ascher et al. 1981). Pero no deberíamos olvidar que ese sentido que nace de lo etimológico (cálculo=piedrecita) ha invadido casi en exclusiva el planteamiento escolar, interpretando que el estudio de los números sería el más comprendido si volvía a los orígenes manipulativos. Con esa visión -que se queda en la forma- se ha perdido un fondo, es el cálculo como "forma de contar" que abarca no solo el elemento manipulativo: las representaciones (puntos de referencia que amplian la idea de lo manipulativo), los algoritmos y la divisibilidad (elementos conceptuales), reglas (las técnicas, destrezas y habilidades) y "teoremas" (descubrimientos, elaboración de conjeturas y procesos de razonamiento). Aún así, acabaremos reivindicando lo manipulativo, dentro de una perspectiva exigente y globalizadora.

El cálculo aritmético ha encontrado barreras en su largo viaje. Como una curva de Gauss ha tenido un gran momento de esplendor en el siglo XIII con la influencia árabe. Pero, aún descubiertas sus limitaciones, reaparece en el intento de respuesta ante problemas teóricos abiertos y con la llamada matemática discreta (quizás la "nueva aritmética") con la criptografía, los problemas de minimización y explotación máxima en la economía, el análisis numérico, los problemas de iteración, etc. propios del siglo XX. ¿Por qué reducir entonces la aritmética a reglas escolares?

El cálculo y la aritmética no han resuelto todos los problemas planteados y -aún así- se ha ido extendiendo a otros campos: la trigonometría, las probabilidades, etc. convertiéndose en un elemento imprescindible en el momento de elaborar cualquier currículo. A continuación viajaremos rápidamente por etapas y lugares clave de la historia del cálculo aritmético para así extraer algunas implicaciones que nos permitan interpretar algunas tendencias actuales de enseñanza-aprendizaje de esta "parte" de las matemáticas.

2. ADAGIO SUPERSONICO POR ALGUN PASADO POCO RECONOCIDO

Desde el tercer milenio antes de nuestra era, el cálculo y la aritmética han sido un inseparables de los números. El camino ha sido lento, evolutivo y siempre marcado por influencias entre culturas que no siempre hemos apreciado.

Los descubrimientos arqueológicos de Plimton en el siglo pasado, descifrando algunas tablas babilónicas, y los hallazgos de Eisenlohr sobre el Papirus de Rhind de la época egipcia abren las puertas a una reflexión reciente sobre la ciencia conocida por estas antiguas culturas del Próximo Oriente, en cuanto los rastros dejados por la escritura. Por otra parte, los trabajos de S. Morley y otros nos han acercado a las culturas precolombinas, asumiendo la misma coincidencia cálculo-números en ambas. La apertura al conocimiento de la ciencia oriental (Smith 1923) de parte de los investigadores occidentales no se aleja de esos mismos comentarios. En efecto, en la época feudal de la civilización china (2700 a C) se manifiestan preocupaciones análogas a las más conocidas ya por las culturas mediterráneas.

Concretamente conocemos muchos descubrimientos por la existencia del matemático Ch'ang Ts'ang (213 a JC) y sus escritos recopilados posteriormente.

(a) Análisis sobre el zodiaco y el calendario. Cuestiones de divisibilidad elemental.

(b) Numerales asociados a elementos naturales: cielo (7), mar (6), fuego (5), trueno (4), viento (3), agua (2), montaña (1), tierra (0).

(c) Conocimiento del juego de los cuadrados màgicos, observaciones pitagóricas, etc.

(d) Reglas de medida de trapecios, triángulos, aproximaciones del círculo. Cálculo de cereales.

(e) Conocimiento de modelos de regla de tres, cubos, cuadrados y volúmenes.

Si hablamos de las culturas de Asia Menor, diversos autores han mostrado como en las épocas babilónica y la civilización sumeria se encontraban en manos de los escribas los elementos numéricos (contables) y los sacerdotes asumían estudios más teóricos. De estas relaciones surgen diversos trabajos de importancia como:

(a) Una intuición posicional como sistema de numeración

(b) Un sistema metrológico muy adaptado a ese sistema (de 60 en 60).

(c) Un conjunto de "resoluciones" a problemas cotidianos: impuestos, intercambios, calendario, problemas de herencias, etc.

(d) Resolución de "problemas como ecuaciones de 2° grado", conocimiento de propiedades como el "cuadrado de la suma", etc.

(e) Vinculación de la idea de fracción al sistema de numeración.

(f) Conocimiento de propiedades del cálculo de fracciones vinculado a los cereales.

El proceso de adquisición de los sistemas de numeración posicional es lento. En efecto las inscripciones hindús de Nana Ghat (II aC) y Nasik (IIdC) descubiertas a finales del siglo XIX nos recuerdan los siglos que deberán transcurrir hasta que se imponga el sistema. En otro lugar del mundo, la cultura egipcia, al mejorar los sistemas de escritura, y- como nadie duda ahora- por causa de los desbordamientos del Nilo, muestra evoluciones en muchos cálculos:

(a) Algoritmos de adición de fracciones, vinculados a repartos.

(b) Desarrollo de los sistemas métricos e inicio a las proporciones.

(c) Representaciones de cantidades elevadas

(d) Mejora del cálculo de fenómenos naturales: astronomia, agricultura, etc.

Un momento culminante de esas evoluciones, es el trabajo de síntesis de la primera época griega. Aritmética y Geometria se interrelacionan claramente, y son la fuente de nuevas metodologías basadas en formas teóricas. Para medir la longitud de un objeto aplicamos (concepto entonces geométrico) una unidad, y calculamos (aritmética) cuántas veces lo contiene. De ahí la necesidad de fraccionar la unidad, o establecer un proceso de commensurabilidad (desarrollo de las fracciones).

3. ALGUNAS IMPLICACIONES CURRICULARES

¿Cómo leer lo fundamental y significativo para nuestro proceso de Reforma para la escuela obligatoria, de lo dicho hasta ahora? Pongamos algunos ejemplos de aspectos que deberían ser tomados en consideración.

A) *Reconocer la lentitud del proceso de adquisición aritmética* en todos los ámbitos. Así como con los números naturales se admite una incorporación progresiva de mayores órdenes de magnitud, el trabajo con fracciones debe organizar y parcializar su aprendizaje (Giménez 1994). Incorporando también un viaje cultural que permita ir del quipus a los dedos, de los palmos a la yupana, del soroban japonés a las chapitas y de los cauris a los ábacos, de Africa a América, de Asia a Europa.

B) *Introducir el valor cultural y reflexivo de sistemas de numeración distintos al decimal y trabajar con códigos en general.* Ello pasa de ser una moda a una necesidad en el mundo comunicativo en que vivimos. Además ello implica ampliar la visión de los números como códigos de representación de realidades y valorar el uso y significado de muchos códigos no numéricos. Por ejemplo, las representaciones con letras en matrículas, planos y representaciones numéricas en contextos no numéricos: platos combinados, prefijos de números telefónicos, etc.

C) *Enfatizar los procesos de aproximación y los problemas de iteración*, no considerándolo como una moda actual... Estaba ahí ya entre los cambios importantes de la época griega. La adaptación posible sería el reconocimiento de un tratamiento progresivo del cálculo mental que incluya estos aspectos, el trabajo sobre visualización de realidades y medidas constatando aproximaciones...

A niveles más altos, no olvidar procesos como las aproximaciones de raíces de Teón de Esmirna, tratar π con un valor aproximado obtenido empíricamente...

D) *Analizar los sistemas de numeración como un código de representación* en su uso cotidiano. Pues no es un contenido anecdótico, sino que indica un proceso de inculturación de la matemática: asumir lo descubierto por otras ciencias (como la arqueología) durante nuestro siglo. Quizás el enfoque no deba ser -como en el pasado- contar eso a los estudiantes, sino proponer situaciones en las que los propios estudiantes se sientan comprometidos: Buscando información, planeando "un día matemático por el Egipto Antiguo", elaborando un Proyecto de Trabajo sobre métodos usados en el entorno escolar... Las relaciones pasado-presente son importantes en lo que respecta al valor del sistema decimal, que se usa actualmente como un código más entre otros: contadores del gas, colores usados para reconocer las resistencias en electrónica, códigos de matriculas,...

E) *Lo inconcebible de basar el aprendizaje en métodos sólo algorítmicos sin planteamiento de problemas.* Ello se agudiza cuando los algoritmos tratan de explicarse después de haberlos dado. El estudiante no entiende nada. El aprendizaje no es significativo.

El objetivo quizás menos comprendido, pero no por ello menos importante. Las reglas al servicio del problema que las origina. Un ejemplo claro: reconocer la fracción como medida en un proceso de comparación de medidas. El palmo de José (20 cm) y de su padre (24 cm) pueden compararse por repetición y buscar en qué momento coinciden. O bien por diferencias sucesivas, viendo de expresar cada trocito que sobra como parte (Centeno 1989). De ahí puede darse significado a los dos procesos. Si se "muestra" uno de ellos como privilegiado, o se da la regla (se divide 20/24 y ya tienes la relación buscada).

4. PATRONES Y GENERALIZACIONES. ALLEGRO PITAGORICO Y DEDUCCION

Se da un paso de gigante en la historia cuando se proyecta el problema de las medidas que no admiten un proceso finito de commensurabilidad y se confirma un sentido de *proporción* que amplia la idea de las fracciones egipcias como partes de la unidad. Junto a estos, los resultados importantes de esa "segunda época griega", podríamos decir que se resumen en lo siguiente:

(a) Analizar propiedades aritméticas con naturales por medio de descripciones a partir de modelos geométricos: números primos, cuadrados, etc.

(b) Cálculos de aproximaciones (acotamientos) de raíces e irracionales.

(c) El nacimiento del análisis de la medida. Aproximación asociada.

(d) Técnicas generales de cálculo de fracciones.

(e) Técnicas de cálculo de volúmenes de cuerpos (cilindro, esfera).

(f) Planteo del problema de los irracionales.

(g) Mejora de las aplicaciones de las proporciones a cálculos astronómicos.

(h) Nacimiento de la trigonometria esférica y cálculos correspondientes.

En otras civilizaciones como la china, surgen descubrimientos similares. Las dataciones dan a los siglos X a XIV el punto más álgido que parece deducirse de la influencia griega. El siglo III parece influenciado por Diofanto y tiene como elemento característico el desarrollo de problemas pitagóricos. El Thien yuan shu (método de las potencias y coeficientes radiantes) parece indicar que se trataba de iniciar un desarrollo algebraico propio. Los elementos principales de esta época constatados son:

(a) Interés creciente por la astronomia ecuatorial y calendario. Desarrollo de molinos hidráulicos y otros elementos científicos.

(b) Desarrollo de cartas geográficas y trabajos de náutica .

(c) Conocimiento del cálculo algebraico y divisibilidad.

(d) Conocimiento de problemas pitagóricos (ternas, potencias, etc).

Con la impresión de los libros clásicos de Confucio (953 d JC) cinco siglos antes de Gutemberg disponemos de documentos importantes que revelan la fuerza del binomio cálculo-números hasta la Edad Media en el oriente lejano. A partir de Euclides, la Aritmética se transformará en Teoría de Números (Aleksandrov y cols., 1976). Sus conceptos se corresponden con relaciones cuantitativas de las colecciones de objetos. Los métodos deductivos van a revolucionar la ciencia.

5. ENFASIS EN PROCESOS GENERALES

Cuando se trata de reconocer trabajos asociados a estos elementos de la historia, no podemos olvidar lo siguiente:

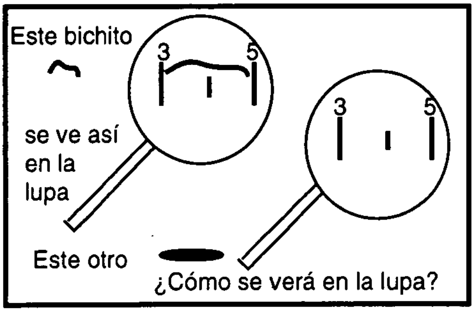
A) *El trabajo de reconocer patrones numéricos.* Desde aquellos que surgen en códigos no simbólicos, pasando por el descubrimiento de series numéricas, o incluso el tratamiento de formas gráficas de representación numérica. Ello tiene un gran valor actual pues reconocemos (volviendo a lo griego) que lo figurativo de las cantidades fue la base del reconocimiento de patrones y reglas generales. Desde una perspectiva más actual, también ayudamos a la visualización e imaginación espacial, no sólo como conjugación de sistemas de representación sino como posibilidad de reconocimiento de estructuras numéricas (Castro 1994).

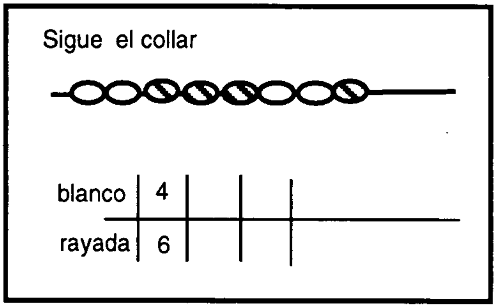
Reconocer códigos simbólicos no convencionales se convierte pues, en algo importante en el desarrollo aritmético de los números.

B) *Fomento necesario de la actividad de generalización* que promueva una inducción que podríamos llamar pre-algebraica. De ahí el trabajo de reflexión sobre propiedades como: impar+impar = par, si un número acaba en 2 no puede ser producto de otro número por sí mismo, la suma de números consecutivos igual al producto del primero por el último tantas veces como la mitad del número de términos, etc. La matemática discreta y la combinatoria, basan sus procedimientos en nexos gráficos que permiten procesos importantes como: fomentar la generalización, comunicar esos resultados, reconocer, conjeturar... inducir y predecir. Ese progresivo acento en los procesos de generalización y elaboración de deducciones no está a menudo presente en la aritmética escolar en la Educación Primaria por la identificación tradicional de la capacidad en desarrollar este tipo de procesos sólo con edades superiores a los 11 años. Ello se contradice con el hecho de que por otra parte se han "justificado" modelos algorítmicos (como el de la propia multiplicación) con observaciones propias de una etapa formal.

C) El reconocimiento de *distintos significados de las fracciones y decimales,* que dan sentidos diversos a la aritmética fraccionaria (Centeno 1989). En efecto, la aritmética fraccionaria considera los elementos de medida y no sólo la partición de la unidad. Con ello debe dotarse de significado a las operaciones con fracciones desde esa perspectiva, asociando el común denominador a la idea de medida común entre dos medidas dadas que permite su comparación y su adición o sustracción. Un trozo que indica un cuarto más otro que indica dos tercios debe ser comprendido ante todo como la suma de dos pedazos que deben ser comparados con una medida común, un tercer trozo que indica el doceavo. Aún más, investigaciones recientes nos muestran que debe reconocerse que la partición de la unidad (equivalencia por subdivisión) no otorga un significado completo a las situaciones (Filloy et al. 1987, Giménez 1994b).

D) *Un énfasis sobre la idea de proporción desde fases tempranas.* El exceso de celo en el trabajo con fracciones, ha olvidado trabajar en los primeros ciclos de Primaria con proporciones simples como dobles, cuartos, mitades, y tres cuartos para describir situaciones. Trabajar esas proporciones en situaciones de observación de longitudes: ampliación, reducción, efecto con la lupa,etc. El trabajo de Freudenthal (1983) y sus seguidores son fundamentales para reconocer la fracción como relación.





Situaciones de proporción en trabajos de Freudenthal, Streefland y Van Heuvel.

E) Consideración de *la importancia de ir presentando el continuo*, juzgado por algunos de "muy difícil". En efecto, el exceso de formalización de los años 70, ha dado paso a un currículo utilitario que puede hacer olvidar que el problema de la completación está estrechamente vinculado al de la medida y las aproximaciones deben ayudar a reconocer ese proceso fundamental en la historia de la aritmética al álgebra.

6. DE LAS ARITMETICAS MERCANTILES AL SIGLO XX... MA NON TROPPO

Con las influencias de los árabes, se ponen de manifiesto las reglas del álgebra elemental (= transposición y eliminación), resolución de problemas de fracciones contínuas, y se nos transmite la numeración hindú que llega a Europa. Con ello la gran aportación de esta cultura en los siglos VIII a XI, indica el reconocimiento de descubrimientos griegos. Crecen también en aquel momento los descubrimientos sobre la numeración:Omar Hayyam y otros (s. XI- XII) muestran con rigor que a un cociente de magnitudes se le puede llamar número. Y es el momento del preludio de la incorporación de los sistemas de numeración. Además, durante el Renacimiento se culminan los descubrimientos sobre métodos y técnicas de cálculo y se desarrollan concretamente:

(a) Técnicas de resolución de ecuaciones de segundo y tercer grado

(b) Propiedades numéricas vinculadas a la divisibilidad.

(c) Pasos previos simbólicos al lenguaje algebraico con letras.

Durante el siglo XVI, con la influencia de la física y sus observaciones, nace la idea de variable y la representación funcional de los fenómenos. A finales del siglo se concentra la introducción de los decimales con Stevin (en 1585), y las fórmulas comienzan a encontrar su lugar como expresiones algebraicas, vinculadas al signo igual. Inmediatamente se suceden otros descubrimientos:

(a) Estudio de propiedades numéricas: Fermat (1601-1665).

(b) Desarrollo de la simbologia algebraica: Vieta.

(c) Relación de tipo analítico: Descartes (1596-1650).

(d) Aparece la idea de logaritmo (Neper 1614).

(e) Desarrollo del cálculo infinitesimal (Cavalieri, Roberval, Kepler, etc).

(f) Nace el cálculo de probabilidades (Pascal 1623-1662).

Durante el siglo XVIII, Newton y Leibnitz revolucionarían muchas cosas. A partir de entonces la historia se sucede rápidamente y el proceso de análisis no afecta ya directamente al currículum escolar básico. Con la teoría de grupos, la aritmética pierde su poder. Los problemas de Teoría de Números, herederos de la aritmética son ya complejos así como los modelos utilizados.Se alejan pues de las realidades concretas.

Con todo, nace una "institución escolar", y con ella, una aritmética para enseñarse, y se produce la distancia -como siempre pasará- respecto a las aportaciones de la ciencia referente. En efecto, las aritméticas de las escuelas militares y mercantiles, inciden en la inclusión de técnicas y procesos exhaustivos que olvidan sobretodo el propio avance metodológico de la ciencia. El hecho es evidente y las razones no vamos a analizarlas. Lo cierto es que en nuestros días, la evolución en la reflexión sobre la historia de la Ciencia, junto a nuevas visiones de lo que representa la adquisición de conocimiento, nos hacen incidir en la necesidad de no olvidar los problemas de la historia y usar dichos elementos tanto en el aprendizaje (Collette 1985) como en la reflexión sobre el mismo. En efecto, la Aritmética de inicios del siglo XX proporciona las bases para la nueva lógica y es también a partir de las discusiones sobre los fundamentos de la Aritmética como se dan las bases para las nuevas reflexiones epistemológicas que -a su vez- soportan la Didáctica actual.

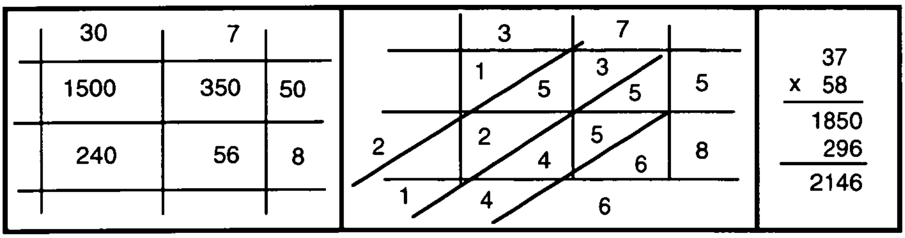
7. ARITMETICA Y FORMACION INTEGRAL

Entre las consecuencias de un trabajo que tome en consideración las aportaciones de este período final, resaltaríamos como fundamental lo siguiente:

- Ante todo y más que nunca, *reconocer el valor social de lo aritmético y sus nuevas competencias:* diversidad de métodos, capacidad de interpretar informaciones, competencia de cálculo aproximado y mental mínima para enfrentarse a situaciones cotidianas de compra-venta, lectura de índices económicos,... estimando resultados posibles. Observar con ello la aritmética en su capacidad de desarrollo comunicativo, utilizando códigos, efectuando salidas, promoviendo situaciones de tipo discreto entre otras.

- *Reconocer el valor de relacionar representaciones significativas de los elementos aritméticos (números y cálculo).* Si bien no es preciso convencer a los profesores del valor del uso del ábaco, las regletas de colores y otros materiales, no es menos cierto que dejan de usarse porque se desconoce cómo rentabilizar su uso frente al modelo tradicional de papel y lápiz. Algo parecido ocurre con la calculadora y con el cálculo mental. Creemos que en los profesores existe aún la creencia generalizada que sólo el cálculo escrito es efectivo, y cualquier otra forma "distrae"y hace perder tiempo de ese aspecto fundamental.

- *Fomentar una labor de descubrimiento de reglas y técnicas mediante situaciones geométricas (u otras).* En el tratamiento escolar, se pierde de vista que el valor de los algoritmos de parte de Frisius, Fibonacci y otros autores italianos de los siglos XII y XIII, no sólo son elementos prácticos que deben aprenderse por su importancia, sino que se basan en propiedades que deben ser reconocidas. Se olvida a menudo que los descubrimientos de técnicas del cálculo pre-algebraico elemental están basadas fundamentalmente en situaciones de tipo geométrico. Un ejemplo ilustrativo de lo que se puede hacer en ese sentido sería reutilizar un método de multiplicación como el de la reja. En ese método se puede haber visualizado mediante la forma cartesiana del producto el poder de la distributividad.



Método de la reja entre la distributividad y el pre-diseño tradicional.

- *Convencerse de que el aprendizaje aritmético no puede desprenderse de tener que preguntarse por algo.* Si bien D'Alembert (1717-1783) definió el cálculo como la *realización de operaciones que actúan sobre un conjunto de datos de una pregunta para obtener el resultado*, ese es el atrevimiento de la matemática cuantitativa (Taton 1947). En una visión más moderna, la aritmética no debe plantear preguntas sólo algorítmicas en la búsqueda de resultados numéricos, sino que debe llegar a plantearse enunciados abstractos en el interior de la propia aritmética: con un desarrollo y descubrimiento de propiedades. Pero parece que no será significativo si no parte de situaciones reales (Gofree y Trefers, 1985) o mediante producciones de los propios estudiantes.

- *No desprender el cálculo y el trabajo aritmético en general, de enunciados vinculados a situaciones reales.* La propia sistematización de la aritmética comercial, parte de situaciones vividas del contexto habitual. La resolución de problemas aritméticos es un problema que no puede ser abordado aquí pero debe ser tenido en cuenta (Castro y cols., 1988).

- Finalmente, empaparse de la reflexión didáctica, implica preocuparse por un continuado enfoque racionalizador que, sin perder de vista lo real, fomente la capacidad de interrogarse siempre. Esta actitud se vincula al uso progresivo del lenguaje adecuado para expresar relaciones aritméticas, enfatizando lo comunicativo por lo que tiene de exigencia formal. Todo ello partiendo del lenguaje verbal habitual coloquial.

8. LA HISTORIA DE LA ARITMETICA EN EL AULA

Con todo lo dicho no se excluye el propio tratamiento de la realidad histórica de la aritmética en el aula, que la propia Reforma trata de reivindicar. Entre muchas posibilidades de trabajo comunmente reconocidas, citemos que en una primera fase se ha introducido el tratamiento general mediante problemas (Hogben 1966). Con posterioridad se dan presentaciones más cortas en forma de "puzzles", en donde se presentan juegos como los cuadrados mágicos, estrellas numéricas, etc. En otro momento, se proponen historias (luego en forma de cómics) de hechos interesantes como la del ajedrez (Perelman 1975), o se analizan problemas famosos como el de los camellos (popularizado por Melho y Tahan, 1972).

La inclusión del trabajo sobre números y modelos (Castro y otros, 1988) puede realizarse mediante el análisis de propiedades, leyes numéricas y generalizaciones (Giménez 1986, a y b). El trabajo sobre series numéricas es apreciado en cuanto fomenta el trabajo de conjeturas y demostraciones (Hernán 1982). O incluso pueden reconocerse esquemas de trabajo surgidos de la historia, como es el caso de las estrategias de cálculo mental (Gómez 1994).

Para fomentar el uso de la historia desde los niveles elementales, disponemos cada vez más de multitud de materiales. Así, recomendamos no perder de vista documentos básicos interesantes como: HISTORIA DE LAS MATEMATICAS i VIAJE GRAFICO POR EL MUNDO DE LAS MATEMATICAS 1 y 2 (Meavilla, Canteras 1985).

Pueden utilizarse elementos motivadores con números naturales: reviviendo la historia escenificándola UN DIA A L'ESCOLA PITAGORICA (C. Alsina, D. Barba 1980); haciendo un viaje por la matemática (D. Gavaldà 1983) ; celebrando un encuentro con los mayas con la idea de reinterpretar nuestro sistema de numeración y el suyo (Giménez 1985); promoviendo una "visita inesperada" (Giménez 1984), el día del número, etc. Pueden utilizarse también talleres innovadores con el uso situaciones provocadoras (Segarra 1987), problemas sobre situaciones discretas (Sierra 1989), o juegos (Ferrero 1991; Hernán y Carrillo 1988). También trabajando con calculadoras (Canals 1987; Fielker 1988; Udina 1989), o regresando a los problemas (Corbalán y Gairín 1986).

Uniendo las bibliografías de los trabajos anteriores se encuentran referencias más que suficientes sobre el estado de la cuestión en lengua castellana.

9. OBSERVACIONES FINALES

Aún tenemos preguntas cruciales como las siguientes: ¿Podemos reducir el cálculo a una comprensión conceptual del significado de los números y operaciones, como en otro momento se redujo a algoritmos y técnicas ? ¿Debe existir un desenganche del cálculo respecto a la numeración como sistema conceptual? ¿Hasta qué punto debe hacerse un trabajo sobre mejorar habilidades y técnicas en "reconocer órden de magnitud, aproximación, estimación, etc" y en qué sentido deben introducirse los esquemas conceptuales asociados? ¿Sólo debemos referirnos a cálculo, aproximaciones, etc. cuando hablamos de números naturales ? ¿Qué papel debemos otorgar a los nuevos medios instrumentales tales como calculadoras y ordenadores?

Dado que no hemos podido responder a todas esas cuestiones, afirmamos rotundamente que el cálculo y la aritmética escolar debe dejar de lado dualismos vacíos que no presentan profundidad (calculadora, ¿si o no?, algoritmos de las operaciones, ¿si o no? y otros) y debe proponerse cambiar las actitudes que han favorecido poco el progreso científico. A continuación mostraremos algunas situaciones de las que consideramos que deben cambiar:

A) *Deben superarse preocupaciones tecnicistas.* Los bajos resultados en pruebas de cálculo se muestran aún como algo desanimante y que deja en mala posición al profesorado. Como ejemplo, muchos padres desean que sus hijos dominen las tablas de multiplicar en segundo y se quejan si eso no ocurre. Se produce una exigencia social externa. Por otra parte, la ausencia de pruebas externas hace que entre las críticas que recibe el profesorado de Primaria se aumenten las que afectan al nivel de cálculo de sus alumnos. Pero con ello no se enfrenta el problema. Nos parece que se olvida que el objetivo es que al término de la Formación Primaria se tenga un dominio del cálculo aproximado de manera que permita estimar cocientes aproximados, resultados imposibles de operaciones, y se sepa cuándo aplicar una operación a una situación dada. Con todo ello, a veces se olvidan técnicas como las del trabajo de cálculo mental, pensando que debe ponerse el acento en los conceptos y estructuras.

B) *Eliminar la independencia de campos numéricos (naturales, fracciones, enteros...)* que consideran habitualmente lecciones separadas *y promover trabajos interrelacionados* entre lo aritmético y otros aspectos de las Matemáticas. Se considera que los temas de la aritmética son independientes. Aún no nos hemos convencido de la importancia de trabajar desde jóvenes los procesos de generalización hacia el álgebra. No se insiste suficientemente en el cálculo con medidas y enunciados. Se sigue insistiendo en situaciones de "paso de una medida a otra". Junto a ello, considerar las interrelaciones entre representaciones diversas que llevan consigo un mismo problema desde diversos enfoques. El cálculo debe aplicarse a la observación de gráficas. Se pregunta quién tiene más adeptos, quién menos... pero no se pide ¿cuáles de las respuestas sumadas abarcan la mitad del total? La aritmética no debe olvidar la línea numérica como forma de representación no sólo de números, sino también para "visualizar" operaciones y relaciones (Giménez, Girondo 1993). Significar procesos como el del paso al continuo con situaciones probabilisticas simples, mediante ruletas y experiencias puede ser otro buen ejemplo.

C) Debe dedicarse *menos tiempo al esfuerzo repetitivo de procesos ya dominados* (Cockroft 1985), sin profundizar algunos nuevos, pensando que lo anterior no está suficientemente asumido. Observemos el ejemplo siguiente. Muchos profesores consideran que introducir la multiplicación con un número que falta (como una ecuación) es una complicación más. "No se les puede plantear qué número multiplicado por 3 da 24 cuando estás multiplicando, ¡eso es dividir! ¡No debe hacerse hasta que no se domine la multiplicación! " Ante eso, debe incidirse en el uso cotidiano de la calculadora y usar tablas y recursos de forma que se integren métodos adecuados. Así, se provocan los problemas de multiplicación y división "a la vez", puesto que están realmente relacionados.

D) Un *mayor uso de un trabajo interdisciplinar* que no debe reducirse a motivaciones y uso de procedimientos comunes. El cálculo y la aritmética no deben olvidar las relaciones con la música, las relaciones de las proporciones con el arte, las vinculaciones de las representaciones y tablas numéricas en el descubrimiento de propiedades que surgen de la geografia, los fenómenos físicos y expresiones vinculadas al análisis de procesos medio-ambientales, de consumo, etc.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ALSINA, C. y BARBA, D. (1980): Un dia a l'escola pitagórica. *Perspectiva escolar, 12.* Barcelona.

ALEKSANDROV, LAURENTIEV y KOLMOGOROV (1976): *Las matemáticas, su contenido, métodos y su significado.* Alizanza ed., Madrid. vol. 1.

ASCHER, M.R. (1981): *Code of the Quipu.* Ann Arbor ed., Michigan.

CANALS, M.A. (1987): La calculadora i l'escola. *Perspectiva Escolar, 112,* Barna. pp. 9 -15.

CASTRO, E. et al. (1988): *Numeros y operaciones.* Sintesis, Madrid.

CASTRO, E. (1994): Visualización de secuencias numéricas. En *UNO, revista de didáctica de las matemáticas. 1,* pg. 75-84, Barcelona.

CENTENO , J. (1989): *Números Decimales.* Sintesis, Madrid.

COCKROFT (1985): *Las matemáticas si cuentan.* MEC, Madrid.

COLLETTE (1985): *Histoire des mathématiques pour les collegues.* Cedic, Paris.

CORBALAN, J. y GAIRIN, J.M. (1986) *Problemas a mí 1 y 2.* Edinumen, Zaragoza.

DICKSON, et al (1990): *El aprendizaje de las matemáticas.* Ed. Labor, MEC.

DIENES, Z.P. (1971): *La construcción de las matemáticas.* Vicens Vives, Barcelona.

FERRERO, L. (1991): *El juego y la matemática.* Madrid.

FIELKER, D.S. (1988): *Usando las calculadoras con niños de 10 años. Implicaciones sobre el curriculum de matemáticas en la enseñanza primaria.* Generalitat Valenciana, Conselleria de Cultura, Valencia.

FILLOY, E. et al (1987) *Algunos significados atribuidos a las fracciones. El modelo egipcio.* Cinvestav Mexico.

FREUDENTHAL, H. (1983): *Didactical phaenomenology of mathematical structures.* Reidel Dordrecht.

GAVALDA, D (1983:) *Breu viatge al món de la matemàtica.* Ed. Fundació La Caixa, Barcelona.

GIMENEZ, J. (1984): Aprender geometría explicándola. En *Actas 4 JJAEM.* SCPM, Tenerife.

GIMENEZ, J. (1985): Els maies i els sistemes de numeració. A *Perspectiva Escolar.* Barcelona.

GIMENEZ, J. (1986a): Las fracciones egipcias. *Números.* Tenerife.

GIMENEZ, J. (1986b): El càlcul de la història a la classe. *Perspectiva Escolar, 112.* Barcelona.

GIMENEZ, J. y GIRONDO, LL. (1993): *Cálculo en la escuela.* Graó, Barcelona.

GIMENEZ, J. (1994a): Les fraccions com a concepte. *Biaix, 5.* Reus, pg. 7- 14.

GIMENEZ, J. (1994b): Del fraccionamiento a las fracciones. *UNO Revista de Didáctica de las matemáticas.* Ed Graó, Barcelona, pg 101-117.

GOFREE y TREFERS (1985): Rational analysus of realistic mathematics education The Wiskobas Program. *Poceedings PME IX.* Dordrecht, Holland.

GOMEZ, B. (1988): *Numeración y cálculo.* Sintesis, Madrid.

GOMEZ, B. (1994): *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: Un análisis en la formación de profesores.* Tesis inédita, Univ. Valencia.

GUITEL, G. (1981): *Histoire comparée des numérations écrites.* Flammarion, Paris.

HERNAN, P. y CARRILLO, M. (1988): *Recursos en el aula de matemáticas.* Ed. Sintesis, Madrid.

HOGBEN, L. (1966): *El universo de los números.* Destino, Barcelona.

IFRAH, G. (1989): *Historia universal de las cifras.* Alianza, Madrid.

KAMII, C. (1986): *El niño reinventa la aritmética.* Visor, Madrid.

MEAVILLA, V. y CANTERAS, J.A. (1985): *Viaje gráfico por el mundo de las matemáticas 1 y 2.* ICE Universidad de Zaragoza.

MELHO, J.C. y TAHAN, M. (1972): *El hombre que calculaba.* Ed Verón, Barcelona.

NESHER, P. (1986): Are mathematical understanding and algoritmic performance related? In *For the learning of mathematics, 6.*

PERELMAN, Y. (1975): *Matemática recreativa.* Mir, Moscú.

SEGARRA, LL. (1987): *Matemática recreativa.* Graó, Barcelona.

SIERRA et al. (1989): Divisibilidad. Síntesis. Madrid.

SMITH (1923): *History of Mathematics 1 i 2.* Reed. 1951 Ed Dover, New York.

TATON, E. (1947): *Le calcul mental.* PUF, Paris.

UDINA, F. (1989): *Aritmética y calculadoras.* Ed. Sintesis, Madrid.