EL EMPLEO DE MATERIALES EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA

FLORENCIO VILLARROYA BULLIDO

RESUMEN

En este artículo se presentan las ideas del autor sobre la utilización de los materiales concretos y su manipulación en la enseñanza de la geometría. Se apoya en autores anteriores: Van Hiele, Freudenthal, Bkouche, Brousseau, para argumentar a favor del empleo selectivo de materiales como geometría experimental, o de nivel más bajo, que permita cambiar de nivel, el fin del material concreto es "el acto de pensar del propio niño".

En la seguna parte se presenta un ejemplo de utilización concreta de un material PLOT, polígonos troquelados en cartón que se ensamblan para formar "embaldosados planos" o cuerpos en el espacio. En este ejemplo se muestra como, partiendo de materiales concretos y a través de su manipulación, el estudiante, de cualquier nivel, puede desarrollar sus capacidades de visualización geométrica, de abstracción, de racionalización, de generalización, de estructuración de materiales y objetos, concretos o no; es decir que se presenta además la geometría como fuente de inspiración o camino de entrada a otros "barrios" de las matemáticas, de forma que se vean éstas "cargadas de relaciones".

ABSTRACT

In this paper, the author present his ideas about the investment of de concrete materials and its manipulation to the geometry teaching. His argument is based in the formers authors: Van Hiele, Freudenthal, Bkouche, Brousseau, to argued in favour of the selective investment of the materials in the experimental geometry, or the bottom level, that allows to change of upper level, the aim of the concrete material is "the thinking action of the child".

In the second part, he presents one example to concret investment of one concrete material: PLOT, die-casting cardboard poligons that join to formed "plane paving" or spatial figures. In this examples, he shows as, starting with concrete materials and through its manipulation, the student, at whatever level, can develop his abstraction, rationalization, generalization, struturacion of concrete or not concrete materials and shapes abilities; i.e. a.so, he shows the geometry as inspiration source or the way to pass in the others mathematics "areas", in order to show this one "fraught with relations".

PALABRAS CLAVE

Didáctica de la Geometría, Elaboración de recursos.

KEYWORDS

Didactic of the Geometry, Resources elaboration.

1. INTRODUCCION

Hans Freudenthal (1973), citando a J.J. Sylvester decía:

"El estudio temprano de Euclides me hizo odiar la Geometría, lo que espero me sirva de disculpa si he escandalizado las opiniones de alguno de los presentes (y sé que hay quienes consideran a Euclides como lo más sagrado después de la Biblia y le confieren uno de los puestos más avanzados de la Constitución Británica) por el tono en que antes he aludido a él como un texto escolar; y aún, a pesar de esta repugnancia que ha llegado a ser segunda naturaleza en mí, siempre que profundicé lo suficiente en cualquier cuestión matemática, al final encontré y palpé un fondo geométrico".

Y un poco más adelante responde a la pregunta *"¿Qué es Geometría?"*, y refiriéndose al nivel escolar dice:

"Geometría es comprensión del espacio y, puesto que se trata de educación de niños, comprensión del espacio en que el niño vive, respira y se mueve, del espacio que el niño ha de aprender a conocer, explorar y conquistar, de cara a una vida mejor, a una respiración mejor, y a una mejor movilidad propia".

Un poco más allá:

"Lo importante es que las matemáticas estén estrechamente ligadas a la realidad cuando se aprenden. Ningún otro método puede garantizar, en general, una influencia duradera de las matemáticas en el estudiante. Los matemáticos no olvidamos nuestras matemáticas porque son nuestra principal ocupación. Lo que no tiene relación con nuestro mundo vital se desvanece de la memoria. Para la mayoría, las matemáticas no pueden ser una meta; los fragmentos de matemáticas aprendidos de forma deslabazada se olvidan y así terminan por no tener influencia alguna".

Y más adelante:

"La geometría solo puede tener sentido si explota su relación con el espacio vivenciado. Si el educador elude este deber, desperdicia una ocasión irrecuperable. La geometría es una de las mejores oportunidades que existen para aprender a matematizar la realidad. Es una ocasión única para hacer descubrimientos. Los descubrimientos realizados por uno mismo, con las propias manos y con los propios ojos, son más convincentes y sorprendentes. Hasta que de alguna forma se pueda prescindir de ellas, las figuras espaciales son una guía indispensable hacia la investigación y el descubrimiento".

Vemos que la manipulación dinámica de objetos es lo que permite hacer descubrimientos propios geométricos, y partiendo de esos objetos físicos construir mentalmente los objetos matemáticos correspondientes.

Podemos también añadir un fragmento de un texto del historiador y epistemólogo francés R. Bkouche (1982):

"La geometría antes de ser la construcción racional que conocemos, es un medio de aprehensión de nuestra relación con el espacio, o mejor dicho con los fenómenos espaciales, y son los problemas planteados por esta aprehensión los que conducen a construir (bien a través de la historia colectiva de la humanidad, o de la historia individual) el saber geométrico. Existe un conocimiento geométrico empírico (con toda la ambigüedad que lleva este término, ambigüedad que se trata menos de disipar que de tener en cuenta), que constituye la primera aprehensión de los fenómenos espaciales, y son las dificultades que se encuentran a través de esta geometría *primitiva* las que necesitan poner en marcha un saber más elaborado y racionalizaciones cada vez más sofisticadas. Y esta necesidad no es tanto la de finalidades tales como se saben definir hoy: puesta en marcha del método axiomático, del programa de Erlangen ... como de la comprehensión y el dominio paso a paso de los problemas que nos vamos encontrando".

La cita anterior, de una manera, más formalizada viene a expresar la misma idea: La enseñanza de la geometría debe de partir de materiales concretos que rodean a los niños y adolescentes, es decir de los cuerpos en el espacio. Por ello el "cubo" es la figura con la que empieza sus trabajos de geometría con niños Dina Van Hiele, y con el cubo, o en general con figuras en el espacio, es con quien propone Bkouche, el comienzo de la geometría.

Hoy el debate de la enseñanza de la geometría no está, por tanto, en la polémica geometría euclídea frente a "álgebra lineal" (el famoso "Abajo Euclides de Dieudonné"), sino que está en cómo hacer actividades geométricas, más que geometría, de manera que esas actividades geométricas sobre materiales concretos, permitan construir una estructura mental en la que las piezas vayan encajando unas con otras (lo que no quiere decir que tenga que ser en un sentido lineal, ni que a veces, muchas, haya que sustituir viejas piezas por otras nuevas, que incluso pueden hacer tambalearse la estructura construida hasta ese momento).

Si queremos hablar de materiales para construir la geometría, tendremos que tener en cuenta una variable didáctica estudiada en especial por Guy Brousseau (1987), que es el tamaño del espacio. Brevemente la describimos. El tamaño del espacio es una variable didáctica en el sentido de que toma diferentes valores que hacen que las construcciones mentales asociadas y las actividades manipulativas que se hagan dependan del valor que tome. Tres valores esenciales toma la variable Tamaño del espacio, que corresponden a tres nombres: Micro-Espacio, Meso-Espacio y Macro-Espacio. Si bien en los límites entre dos de ellos, pueden coexistir concepciones de ambos.

El Micro-Espacio corresponde al mundo de objetos pequeños, manipulables con las manos, encima de una mesa, objetos de tamaño desde visible, hasta la mitad de la estatura del que los manipula.

El Meso-Espacio o espacio medio corresponde a un tamaño de objetos entre el limite superior del micro-espacio y hasta 50 ó 100 veces la estatura del que actúa.

El Macro-Espacio corresponde a espacios mayores, más allá del tamaño de un campo de fútbol, podríamos decir.

Las concepciones mentales que van asociadas a cada uno de ellos son diferentes, puesto que las posibilidades de manipulación son diferentes. Por ejemplo, en el micro-espacio, los objetos se pueden coger, mover, medir todas las distancias que aparezcan, que serán de segmentos, pues el concepto de recta no existe, la medición de ángulos no tiene sentido, determinar que un cuadrilátero es un rectángulo se hará midiendo los lados y las diagonales. El actor puede estar sentado o desplazarse un poco. No es necesario conceptualizar los desplazamientos, puesto que son fáciles y baratos. Tampoco se necesitan sistemas de referencia.

En el meso-espacio, en general, los objetos no se pueden coger, es el actor el que se mueve alrededor de ellos, pero se mueve, en general, en dos dimensiones. Se necesita un sistema de referencia, respecto del cual se mueve el sujeto. La determinación de que un cuadrilátero es un rectángulo no es tan sencilla como en el micro-espacio. A veces es necesario medir ángulos, por ejemplo para determinar la altura de un edificio. Para actuar en él hay que crearse intelectualmente ciertas figuras no materiales, una idea de recta, ... Se necesita ya un cierto aprendizaje de la representación plana de los objetos, para trabajar intelectualmente sobre ellos.

En el macro-espacio, las posibilidades de desplazamiento del actor son escasas, en relación al tamaño del macro-espacio en que se mueve. La medición de ángulos se hace imprescindible, puesto que las distancias o son muy caras de medir o imposibles. Se necesitan sistemas de referencia. Hay que juntar micro-espacio o meso-espacios. La representación plana de los objetos y situaciones se hace imprescindible. Este tipo de macro-espacio, todavía se podría analizar más profundamente, pues no es lo mismo el macro-espacio rural que el marítimo, ni éstos que el astronómico.

Con este análisis breve del tamaño del espacio, podemos pensar que la mayoría de actividades que se pueden realizar en el aula corresponden al micro-espacio, pues habitualmente no se puede salir, al meso-espacio, ni al macro-espacio. Si además se trata de materiales concretos, éstos la mayoría de las veces corresponden al micro-espacio si queremos que sean manipulables y construibles. (No podremos pretender que los alumnos construyan una cisterna cilíndrica de 25 metros de altura, por ejemplo).

2. MATERIALES CONCRETOS

¿Qué materiales utilizar?

1. ¿Son fáciles de llevar cada día al aula? ¿los fabrican los propios alumnos, o son materiales comercializados?

2. ¿Cómo contribuyen los materiales a la construcción mental de los conceptos? ¿la favorecen, o la dificultan?

Con estas preguntas se pretende sugerir que si hablamos de materiales utilizables de manera cotidiana, es decir habitualmente, en las clases de geometría el material debe reunir algunas condiciones entre las siguientes, que pueden variar en función de la disponibilidad de aulas, pues no es lo mismo disponer de un aula para uso propio de un solo profesor (estoy pensando en los de primaria) que compartir el aula con otros profesores y otros cursos. Esta primera distinción hace que el material, si debe de ser transportado, lo sea fácilmente.

Los materiales deben ser limpios. Por tanto, debemos de huir de la utilización de pegamentos o de objetos de madera (se lavan mal, retienen gran cantidad de "restos").

Deben ser de precio barato, o de no ser así, poderse utilizar *n veces*, (n tendiendo a infinito).

El material debe ser rico en la creación de situaciones de clase, situaciones que además se deberán de enlazar unas con otras.

2.1. Algunos materiales que se pueden usar

A) Varillas de mecano

Construcción de triángulos, su rigidez, algunas propiedades, construcción de polígonos "móviles", planos y espaciales, que con la ayuda de gomillas, pueden servir para construir superficies regladas.

B) Folios y cartulinas

Trazado de perpendiculares y paralelas doblando, trazado de mediatrices, de bisectrices. Construcción de cuadriláteros cortando, un papel doblado en cuatro, construcciones simétricas, ... Cilindros, conos. Con las cartulinas se pueden recortar triángulos iguales, o cuadriláteros iguales, y estudiar si sirven como "embaldosado" del plano. Así aparecerán las líneas paralelas, en el primer caso, de un modo intuitivo.

C) Compás. Tijeras

Es bueno que los alumnos aprendan a usar los instrumentos geométricos y que hagan modelos con ellos, es importante que descubran el pétalo de rosa, es decir que llevando seis veces el radio, ... Acciones que tienen significado matemático implícito.

D) Cubos multilink

Construcción de diversos cuerpos "rectos" prismas, paralelepípedos, cubos, búsqueda de relaciones área/volumen.

E) Geoplano y gomillas, o tramas de puntos y pinturas de colores

El geoplano tiene el inconveniente de su volumen y transporte, tanto si es el centro como si es el alumno el que dispone de él, además, las figuras que se hacen resultan estáticas. Se utiliza para construir polígonos, distinguir regularidades, simetrías, cálculo de áreas, relaciones perímetro/área, equivalencia de áreas.

F) Espejos

Estudio de simetrías, caleidoscopios.

2.2. Algunos materiales que no se deben usar

En algunos libros conocidos (estoy pensando en "Matemáticas en la realidad de Emma Castelnuovo"), junto a actividades muy interesantes con materiales (relaciones área/perímetro, volumen superficie con cuadraditos y con cubitos, etc. o con varillas de mecano), se proponen construcciones materiales que desaconsejo. Veamos algún ejemplo. Un aparato que inscribe un cuadrado en otro cuadrado, no comercializado, no demasiado fácil de construir, ni de manipular, ni de transportar y además solo sirve para una actividad reducida, que se puede hoy día resolver más fácilmente con un ordenador.

Una lista más completa de materiales utilizables y no utilizables se puede ver en Alsina y otros (1991). Allí encontramos referencias de casi todos los materiales que se encuentran en el mercado o que se pueden construir más o menos. No se trata, por tanto, de repetirla. Me he limitado a citar aquellos materiales que me parecen más sencillos de manejar, de transportar y de conseguir, pues esta será la única manera de que la mayoría de los profesores incorporemos los materiales concretos al trabajo en el aula de la geometría de una manera normal y cotidiana. Por ello, pienso que es más ilustrativo mostrar con un ejemplo como se puede utilizar un material sencillo, relativamente barato, reutilizable y que permite, siguiendo de nuevo una idea de H. Freudenthal, que *"la materia que se enseñe esté 'cargada de relaciones'. Que los conceptos se vayan construyendo de manera vivenciada y fuertemente relacionados entre sí".*

Otra idea que defiendo es que la idea de que la manipulación de material concreto está bien para los primeros niveles, pero no más adelante, es completamente equivocada. Como se puede mostrar a continuación.

De manera que paso a desarrollarlo.

3. UN EJEMPLO: MATERIAL PLOT

El material Plot es conocido o debería ser conocido de todos nosotros. Desde hace algunos años, existen en el mercado diversas casas comercializadoras del mismo, aunque también es posible la "fabricación artesanal propia", pero ésta tiene más inconvenientes que ventajas ¿por qué?. Pues por la precisión de los materiales y por el tiempo que hay que dedicar a la elaboración de cada uno de los triángulos, o cuadrados, etc. para construir cada uno de los cuerpos.

3.1. Descripción del material

El material consiste en unas láminas de cartulina de colores (el color es fundamental en el trabajo espacial y geométrico) en las que se encuentran troquelados diferentes polígonos regulares (en el mercado existe una versión en la que hay triángulos, cuadrados, pentágonos y hexágonos en la misma lámina, y otras láminas, en las que aparecen otros dos polígonos regulares: octógono y decágono, junto con rectángulos, triángulos isósceles, etc, en otros países, se comercializan otras versiones), con una pestaña sobre cada lado que es la que permite, con gomillas adecuadas (de 3 cm de semiperímetro), enlazarlos entre sí para formar las figuras. El enlace se puede hacer dejando a la vista las aristas y las gomillas, u ocultándolas al interior, en cuyo caso es necesaria la utilización de un ganchillo (del nº 5 ó 6) para la colocación de las últimas.

El material se puede llevar cómodamente en una cartera, en la que también caben las gomillas, que se pueden guardar en cajitas de plástico pequeñas (una para cada grupo de alumnos trabajando), como por ejemplo las de diapositivas (más cuadradas) y los "ganchillos" en las cajas de diapositivas (con tres diapositivas a lo ancho (cajas alargadas). Creo que una de las razones por las que el material concreto se usa poco, no solo éste, sino todos en geometría, es por la dificultad de transporte al aula, mantenimiento, suciedad o despojos al acabar el trabajo etc. Por eso hago esta indicación sobre su transporte. Sobre los "despojos" simplemente señalar que nada del material mancha, pueden quedar "confetis" por el suelo, o alguna gomilla, que con un simple barrido se eliminan del aula.

3.2. Empleo del material

El material puede servir para actividades geométricas tanto en el plano como en el espacio. No obstante, para actividades en el plano hay otras posibilidades, citadas de pasada: folios, geoplanos, dibujos, etc, por lo que las actividades que siguen hacen referencia espacial a geometría del espacio.

En todos los materiales que se usen para el estudio de la geometría debe haber una fase inicial de toma de contacto con el material y de manipulación libre, es decir aprendizaje de cómo se conectan las piezas poligonales para formar cuerpos, enlazando las gomillas, aprendizaje del manejo del ganchillo para que las gomillas queden ocultas en el interior del cuerpo, y el efecto estético sea superior, y creación libre de algunos cuerpos que permita apreciar por un lado la belleza de las construcciones, por otro la imposibilidad de alguna de ellas, así como la existencia de unas figuras más raras que otras. (La terminología inicial que se utilice debe de ser la más próxima al lenguaje del alumnado).

Pero la fase inicial de juego libre hay que interrumpirla pronto, antes de que se agote sola, empezando a proponer actividades matemáticas. Actividades que manipulando con objetos reales permitirán o deberán permitir a la persona que actúa hacer sus propias representaciones mentales de los objetos geométricos correspondientes.

Vamos a describir algunas de esas actividades que se realizan con este material, y cómo unas actividades se van enlazando con otras, pasando además de cuestiones de geometría del espacio a cuestiones de geometría plana y al contrario.

La primera propuesta que se puede hacer, por supuesto después de que los alumnos reconocen las figuras utilizadas: triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular y hexágono regular, todos con el mismo lado, es *construir "figuras" en las que solo intervengan "pentágonos".*

Es ésta una propuesta cerrada, ya que la gran mayoría de alumnos construirán una figura con doce caras pentagonales. Algunos otros, quizá forzando el material, es decir "curvando" las caras intentará otras figuras. Aquí ya hay pues un primer momento de discusión con este material: su falta de rigidez origina problemas que algunos pensarán que si las caras utilizadas son de plástico rígido no se presentarían. Una actividad "numérica" asociada sería la de contar caras empleadas, gomillas utilizadas y "agujeros" que quedan en las "esquinas", la terminología, ya lo he dicho, lo más próxima a la de los alumnos.

La siguiente propuesta sería *Construir "figuras" en las que solo intervengan cuadrados.* De nuevo la gran mayoría de alumnos fabricará "cubos", nombre que seguramente ya conocerán. Quizá algunos intenten "Juntar cuatro cuadrados en una esquina a ver qué pasa". Puede ser el momento de sugerir *Construir "figuras" en las que solo intervengan hexágonos.* Si en el caso anterior -cuadrados- rápidamente descubren que con cuatro en una esquina no se puede "salir del plano", en el caso de los hexágonos, y debido al material, cuesta bastante más darse cuenta de que únicamente con hexágonos, que además solo se pueden juntar tres en una esquina, se obtiene una figura muy "larga", pero que tardará en cerrar. Puede entonces haber un momento de desinterés, "no hay tiempo para acabar la construcción", que debe de ser superado de alguna manera, quizá pasando a un estudio de "ángulos interiores del hexágono", es decir a una cuestión plana y más "teórica", que decida si la figura iniciada se podrá cerrar o será imposible hacerlo. Es decir, el trabajo con el material nos lleva al trabajo intelectual.

En tercer lugar, la propuesta es *Construir "figuras" en las que solo intervengan triángulos.* De todas las anteriores es la más abierta, puesto que el abanico de posibles construcciones se abre en diferentes direcciones: se pueden juntar tres, cuatro, cinco o incluso más triángulos en cada vértice, algunas figuras son más "pequeñas" (tienen pocas caras), otras son más "bonitas" (más regulares), otras son "raras" (algunos deltaedros), unas van siempre "hacia adentro", y otras van "unas veces hacia adentro y otras hacia afuera" (convexas y cóncavas, pensaremos los profesores). La amplitud de posibilidades lleva a *"definir criterios de clasificación de las figuras formadas únicamente por caras triangulares".* Será el grupo de alumnos el que de las primeras definiciones; por ejemplo, dirán que todos los vértices sean iguales, lo que les llevará rápidamente a las figuras con cuatro, ocho y veinte caras triangulares. En éstas, se pueden contar también las gomillas empleadas (las aristas que tienen) y las esquinas que hay.

Ahora hay que tomar decisiones: seguir con las caras triangulares o "recuperar" las dos figuras anteriores construidas: el de 12 caras pentagonales y el de 6 caras cuadradas, puesto que desde el punto de vista clasificatorio de vértices iguales, también lo satisfacen. Si proseguimos por aquí habremos llegado de manera constructiva a cinco figuras con caras poligonales "regulares", en el sentido de que en cada una de las figuras todos los elementos son iguales: sólo un tipo de caras, las aristas, por supuesto, gomillas juntan dos caras siempre, y las esquinas que podrán juntar al menos tres caras, y a lo más cinco. Tendremos un resultado general, es decir un teorema. Teorema "en acto", es decir un resultado obtenido por construcción y que no requiere, al menos de momento, una demostración. Es el teorema de la existencia de cinco poliedros regulares y solo cinco. Resultado antiguo, pero obtenido no por una exposición del profesor, sino de manera constructiva, es decir más convincente, aunque sea menos formal (en el sentido matemático).

Si volvemos al camino de las caras triangulares, nos vamos a encontrar con dos situaciones (y como en todo lo dicho hasta aquí en este ejemplo, y en lo que sigue, lo mejor sería disponen del material mientras se lee este artículo y practicarlo), son las que llamamos "hacia dentro y hacia afuera". Si en el aula se ha dejado tiempo para construcciones en grupo de estas figuras, no todos los grupos de alumnos habrán hecho todas, pero sí que habrán salido bastantes entre todos los grupos: Habrá de 10 caras seguro y le pondrán nombre fácilmente "Platillo volante" "Ovni" o algo parecido, quizá de 14, quizá de más de 20, ... Pero si el cuerpo tiene más de 20 caras será porque es "hacia afuera alguna vez", es un momento clave para ver que se pueden construir infinitas figuras con triángulos, si se permite "hacia afuera", es de nuevo un problema de clasificación y contar, pero como son "muchos", se abandona y se centra el problema de los hacia adentro. Lo que en terminología matemática son deltaedros convexos, pero no expuestos por parte del profesor, sino que se llega a ellos mediante construcción, manipulación de material, visualización del objeto.

Puede ser un buen momento para, una vez visto que hasta ahora solo aparecen cuerpos con un número *par* de caras triangulares, preguntar a la clase si podrían *construir un cuerpo con cinco o con siete caras triangulares*. Puede haber diversos intentos, claro que todos serán fallidos y entonces llegaremos a poder enunciar un teorema de no-existencia (de los más difíciles en matemáticas, según los matemáticos) que dirá: *"No existen figuras construidas con caras triangulares solo con un número impar de caras"*. Teorema del que se puede dar una demostración "mercantilista": ¿Cuántas gomillas necesitarías "comprar" para fabricar un cuerpo con cinco caras triangulares? ¿y con siete? ¿y con once?. La solución viene de la divisibilidad (¡pero por dos!). Cada cara necesita una gomilla en cada arista: si tengo cinco caras necesitaré quince, pero la mitad me sobran. Es decir, siete gomillas y media. Imposible. Pero además la importancia está en que este teorema es fácilmente generalizable al nº impar de caras, puesto que el mismo razonamiento sirve; es además un buen momento de aplicar los conocimientos de divisibilidad que se tengan o de introducirlos.

Contar. Se pueden contar los elementos de cada uno de los deltaedros construidos, de 4 caras, de 6, de 8, de 10, de 12, si lo hay, etc, y construir una tabla numérica de tres columnas, correspondientes a caras vértices y aristas, puesto que casi con seguridad no se habrán encontrado todos los deltaedros convexos hasta este momento. Parece que hay candidatos: Número par de caras entre 4 y 20, pero en el marco geométrico constructivo no se termina de resolver el problema, hay que pasar al marco numérico, a buscar las relaciones entre los números ya determinados de esa tabla y tratar de completarla numéricamente, para más adelante, con esos números de caras, vértices y aristas, construir, si es posible el cuerpo correspondiente.

Ahora hay que abordar la elección de los problemas a resolver con el material: pueden ser elegidos por el profesor y resueltos por los alumnos, o pueden ser también elegidos y resueltos por los propios alumnos, con lo cual su actividad matemática será mucho más enriquecedora. Se van planteando problemas geométricos en relación, además, muchas veces, con otros marcos matemáticos: numérico, algebraico, etc.

Las actividades también se pueden proponer centrándose en los cuerpos regulares, buscar relaciones entre ellos que pueden empezar siendo numéricas; por ejemplo, construir una tabla con los cinco cuerpos y su número de caras, vértices y aristas, nos puede sugerir relaciones entre ellos (por ejemplo el nº de caras del cubo coincide con el nº de aristas del tetraedro). ¿Habrá entre ambos alguna relación?, o el nº de aristas del cubo coincide con el nº de caras del dodecaedro, ¿habrá alguna relación entre ellos?

Todo el tipo de problemas de secciones, o muchos de ellos, se pueden abordar también, puesto que por las características del material se pueden fabricar cuerpos con caras de lado doble o triple del de las caras iniciales dadas. La línea de unión de dos triángulos puede servir también de línea de separación para cortar o truncar los cuerpos construidos, estudiando de ese modo relaciones de volumen, un poco más allá de la establecida con cubos "multilink".

Lo que es más importante es que los problemas se vayan encadenando unos a otros a través del material, que se necesiten en determinadas situaciones dar "pruebas" de los resultados que se obtienen, pruebas convincentes en el sentido matemático. Que los temas estén interconexionados, cuestión que deberíamos desarrollar más ampliamente, pero que es difícil de sintetizar aquí. Si al construir los "deltaedros" aparecen figuras en las que es difícil decidir si están o no en un plano dos triángulos, (lo que se construye en general es un tetraedro pegado a un octaedro, pero el que lo construye lo ignora) es necesaria una prueba, pero que no puede llegar en ese momento, que llegará cuando construyamos el tetraedro de lado dos, ya mencionado que permite ver, evidencia, que si se cortan sus cuatro puntas por las líneas marcadas en cada cara, la figura que queda en el "interior" es un octaedro, momento en el cual la cuestión anterior quedará resuelta. Si en este punto se observa la alternancia de las cuatro esquinas cortadas en cuatro caras del octaedro, es razonable querer colocar otras cuatro esquinas tetraédricas en las caras "visibles" del octaedro; aparece entonces una de las figuras más bellas que se pueden construir con este material: la *stella octángula*, como la llamó Kepler, que es una estrella de ocho puntas como su nombre latino indica, y que nos hace ver, evidencia de nuevo, que las cuatro esquinas de la stella determinan un cubo, con lo que vuelve a aparecer la relación entre cubo, tetraedro y octaedro de una manera más. Relación que nos permitirá determinar más adelante la relación entre los respectivos volúmenes de esos cuerpos regulares.

Como vemos, las construcciones nos llevan de unos problemas a otros, algunos difíciles de resolver (sobre todo si lo intentásemos analíticamente), pero en los que la construcción, exploración y visualización aminora esa dificultad. Las concepciones, los conceptos, se habrán ido construyendo de manera implícita en las mentes de los actores de las acciones. Llegará más tarde el momento de explicitarlos, lo que consolidará el acceso al nivel superior.

4. REPRESENTACION PLANA DE FIGURAS

Será bueno recordar aquí unas palabras de Emma Castelnuovo (1976):

"El dibujo de una figura geométrica no marca el principio de la Geometría, sino que corresponde a un estadio más desarrollado de la representación concreta. El origen de la Geometría no ha de buscarse en el dibujo, sino en las primitivas construcciones y en las primitivas técnicas".

Es decir, las fases necesarias del desarrollo de las actividades geométricas deben comenzar por la manipulación de materiales y objetos concretos, no solo por una presentación ostensiva de los objetos, continuar, sin dejar la fase anterior, por la representación de figuras espaciales, para proseguir, siempre iniciada con la manipulación concreta con la manipulación de conceptos elaborados a partir de las fases anteriores.

El aprendizaje de la representación presenta dos problemas: uno el de la construcción de la representación y otro el de la lectura de la representación, es decir la existencia de una teoría geométrica y de un código de lectura que se desarrollen simultáneamente. Disponer de cuerpos poliédricos construidos por uno mismo para ser representados puede ser un buen punto de arranque del tema de representación.

En el proceso habrá situaciones en que la evidencia se dé por sí sola; en otras, habrá que hacerla evidente a través de una demostración, puesto que la evidencia es la forma primera de acceso al saber.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ALSINA, C., y BURGUES, C. (1991): *Materiales para construir la Geometría.* Síntesis.
BKOUCHE, R. (1982): *De l'enseignement de la géométrie.* En Actas del Colloque International sur l'Enseignement de la géométrie, Universidad de Mons.
BROUSSEAU, G. (1987): "Didáctica de las Matemáticas y cuestiones de Enseñanza: Proposiciones para la Geometría". *Sciences de l'Education 1-2.*
CASTELNUOVO, E. y BARRA, M. (1976): *Matematica nella realtà.* Boringheri.
FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as an Educatiónal Task.* Dordrecht.
HERNAN, F. y CARRILLO, E. (1991): *Recursos en el aula de Matemáticas.* Síntesis.
VILLARROYA, F. (1987): Geometría: Construir y Explorar. En: *Aspectos Didácticos de Matemáticas 2.* I.C.E. Universidad de Zaragoza.