

La modelización matemática en la formación del profesorado: experiencias con los REI-FP para educación primaria

Berta BARQUERO

Datos de contacto:

Berta Barquero
Profesora Agregada
bbarquero@ub.edu

Recibido: 07/04/2023
Aceptado: 04/07/2023

RESUMEN

Este trabajo describe y analiza una propuesta de formación inicial del profesorado de primaria basada en los *Recorridos de Estudio e Investigación para la Formación del Profesorado* (REI-FP), presentados en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). Nos centramos en un estudio de caso de un curso de Didáctica de la Matemática II de último curso del Grado de educación primaria de la Universitat de Barcelona. Este curso se compone de distintos REI-FP, para ir abordando cuestiones de la profesión relativas la enseñanza de la modelización matemática. Escogemos, en particular, uno de los tres REI-FP denominado *La caja de la pastelera*. Los informes entregados a lo largo de las actividades formativas, así como una encuesta distribuida al profesorado en formación al finalizar la asignatura (con un total de 257 respuestas), nos permite describir y analizar, en primer lugar, las cuestiones profesionales abordadas y las actividades de formación específicas que se planean, así como la transferencia de las herramientas de análisis y diseño. En segundo lugar, el análisis de las encuestas nos permite complementar los resultados con la valoración y opinión, por parte de los participantes, sobre los distintos módulos y actividades del REI-FP, así como el uso y utilidad de las herramientas transferidas. El trabajo concluye resaltando las principales estrategias de formación empleadas lo largo del REI-FP, para avanzar en el cuestionamiento, análisis y diseño de actividades de modelización en la etapa educativa de primaria.

PALABRAS CLAVE: Modelización matemática; Formación inicial; Primaria; Teoría Antropológica de lo Didáctico; Recorridos de Estudio e Investigación.

Mathematical modelling in teacher education: experience with the SRP-TE in primary school education

ABSTRACT

This paper describes and analyses a proposal for primary school preservice teacher education based on the Study and Research Paths for Teacher Education (SRP-TE), emerged within the framework of the anthropological theory of the didactic (ATD). We focus on a case study of a course about Didactics of Mathematics II in the last year of the Education Degree on Primary school level, at the University of Barcelona. This course is composed of different SRP-TE, to address professional questions related to the teaching of mathematical modelling. We have chosen one of the three SRP-TE called *The cake box*. The reports submitted during the training activities, as well as a survey distributed to the trainee teachers at the end of the course (with a total of 257 responses) are taken as main empirical data. They allow us to describe and analyse, firstly, the professional questions addressed, and the specific training activities planned, as well as the transfer of analysis and design tools. Secondly, the analysis of the surveys allows us to complement the results with the participants' assessment and opinion on the different modules and activities of the SRP-TE, as well as the use and usefulness of the transferred tools. The paper concludes by highlighting the main training strategies implemented throughout the SRP-TE to progress in the questioning, analysis and design of modelling activities at primary school level.

KEYWORDS: Mathematical modelling; Preservice teacher education; Primary school; Anthropological Theory of the Didactic, Study and Research Paths.

Introducción

La investigación en educación matemática se ha caracterizado, en las últimas décadas, por la importante difusión de propuestas de educación basadas en la investigación (inquiry-based education) (Artigue & Blomhøj, 2013). En este trabajo nos centramos, más concretamente, en el ámbito de investigación conocido como “Aplicaciones y modelización” el cual ha cobrado un gran impulso en la comunidad internacional de investigación en educación matemática, acompañado de diversas reformas curriculares (Blum, 2002; 2015). Con la incorporación curricular de las competencias —muy presente en las distintas reformas curriculares en Europa— la competencia de *modelización matemática* desempeña un papel decisivo, contemplándose entre una de las competencias asociadas a la disciplina matemática. El caso del currículum en España no es una excepción y la modelización matemática se ha asociado fuertemente a la *resolución de problemas* como uno de los ejes centrales que se promueve y estructura las propuestas curriculares en el ámbito matemático.

Algunas de las herramientas, desarrolladas en la investigación educativa, se han difundido e integrado en recientes reformas curriculares. Más concretamente, algunas

de las versiones del denominado “ciclo de modelización” (Blum & Leiß, 2007; Borromeo Ferri, 2010) se consideran la base conceptual del programa PISA para promover la alfabetización matemática, como se explicita, por ejemplo, en las publicaciones de la OECD:

“La alfabetización matemática es la capacidad de un individuo para razonar matemáticamente y para formular, utilizar e interpretar las matemáticas con el fin de resolver problemas en diversos contextos del mundo real [...]. El ciclo de modelización (formular, usar, interpretar y evaluar) es un aspecto central de la concepción de PISA de la alfabetización matemática de los estudiantes [...]” (OECD, 2018, pp. 75-76).

A pesar de los esfuerzos por hacer de la modelización matemática una actividad bien establecida en los distintos niveles educativos, numerosas investigaciones ponen de relieve la existencia de fuertes limitaciones a la difusión generalizada de la matemática como herramienta de modelización (Burkhardt, 2006; Barquero et al., 2018). En esta línea, distintas investigaciones se han centrado en el papel del profesorado como actor decisivo para promover un cambio de paradigma más favorecedor para la enseñanza de la modelización, sobre todo cuando este cambio viene apoyado por la investigación educativa (Swan et al., 2013). En el desarrollo del ámbito de investigación en modelización, distintas investigaciones han puesto el foco en el papel del profesorado, sus creencias, dilemas u obstáculos cuando diseñan e implementan actividades de modelización (Kaiser et al., 2010; Blomhøj & Kjeldsen, 2006, entre otros), así como la formación específica que necesitan para poder afrontar su puesta en marcha en las aulas. En el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD, en adelante), en el que basamos este trabajo, el estudio de las condiciones y restricciones que favorecen o limitan el papel de la modelización se inscribe en una problemática más amplia de cambio de paradigma escolar considerando, de forma indisoluble y prioritaria, la formación del profesorado en esta transición entre paradigmas.

Marco teórico

Desde la perspectiva de la TAD, muchas de las restricciones para una enseñanza funcional de la matemática como herramienta de modelización, se derivan del paradigma pedagógico de *visita de las obras* (Chevallard, 2015) aún muy dominante en la actualidad. Este autor describe la necesidad de un cambio o transición entre paradigmas: del paradigma de *visitas las obras*, cuyo objetivo de enseñanza se describe a través del conjunto de obras y saberes que los docentes deben presentar a los estudiantes, al paradigma de *cuestionamiento del mundo*. En este último paradigma, los saberes a enseñar se asocian al estudio de cuestiones relevantes, donde las matemáticas se interpretan como una herramienta de modelización de sistemas extra-intra-matemáticos en los que emergen estas cuestiones (Barquero et al., 2011; García et al., 2006). En este nuevo paradigma, la visita de las obras no desaparece, pero queda supeditada a otro fin: el estudio de cuestiones y el papel de las matemáticas como herramientas de modelización de los sistemas donde dichas cuestiones emergen.

Un instrumento clave para estudiar esta transición entre paradigmas, aparece con

la propuesta de los *recorridos de estudio e investigación* (REI) (Bosch, 2018; Chevallard, 2015). Un REI parte de una cuestión abierta, llamada cuestión generatriz, que se debe investigar. Esta debe tener fuerte poder generador de cuestiones derivadas, el estudio de las cuales va a conducir a la construcción de nuevos saberes y herramientas matemáticas para la elaboración de respuestas. Los REI corresponden a dispositivos de enseñanza propios del paradigma de cuestionamiento del mundo. De forma inseparable al estudio de condiciones y restricciones para el diseño, implementación y difusión de la modelización matemática en las aulas (en particular, a través de los REI), se debe afrontar la necesidad de plantear la formación del profesorado en esta transición entre paradigmas.

Investigaciones recientes en el marco de la TAD plantean la necesidad de basar la formación y el desarrollo profesional del profesorado en el estudio de cuestiones problemáticas que surjan de la práctica profesional (Bosch & Gascón, 2009; Ruiz-Olarría, 2015). Con ello, se persigue que el proceso de formación permita vincular los nuevos conocimientos, fruto de la investigación educativa, con la realidad del aula y que aparezcan como herramientas para analizar y resolver cuestiones propias de la profesión, más que como un conjunto de técnicas y saberes más o menos dogmáticos. Al mismo tiempo, los conocimientos didácticos pueden utilizarse para cuestionar tanto los contenidos curriculares como sus formas de enseñanza, permitiendo así al profesorado en formación formular nuevas cuestiones sobre su *quehacer* docente.

Estas asunciones se materializan en una metodología de formación designada como los *recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado* (REI-FP en adelante) experimentada inicialmente en Sierra (2006) en el caso de la formación inicial del profesorado de infantil y primaria y desarrollada en Ruiz-Olarría (2015) para la formación inicial del profesorado de matemáticas de secundaria.

En este trabajo, utilizaremos la propuesta de los REI-FP como dispositivos de formación inicial del profesorado para abordar problemáticas relativas a la modelización matemática. Nuestro objetivo es ilustrar el tipo de formación impartida, cómo esta se estructura en torno a distintos REI-FP que componen el curso, así como las estrategias y dispositivos de análisis que los formadores y estudiantes elaboran para cuestionar, analizar y diseñar actividades de modelización. Las cuestiones de investigación que planteamos en este trabajo se pueden formular en los términos siguientes: *¿Qué cuestiones de la profesión y qué estrategias de formación se desarrollan en REI-FP sobre el diseño, implementación y análisis de actividades de modelización? En particular, ¿qué actividades se planean y qué herramientas de análisis y diseño se transfieren al profesorado en formación durante los REI-FP? ¿Cómo adoptan, usan y valoran estas herramientas el profesorado en formación?*

Los Recorridos de Estudio e Investigación para la formación del profesorado

En el presente trabajo, partimos de la estructura general de los REI-FP (como se propone en Ruiz-Olarría, 2015), que se estructura en cinco grandes módulos (ver Figura 1).

Figura 1

Estructura de un REI-FP (adaptado de Ruiz-Olarría (2015)).



El *módulo 0* se inicia introduciendo una cuestión abierta que proviene de la propia profesión docente y relativa a ciertos saberes matemáticos a ser enseñados —por ejemplo: *¿Por qué y cómo enseñar modelización en primaria? ¿Por qué enseñar estadística?*, entre otras muchas posibles. Se invita al profesorado en formación a que busquen respuestas disponibles a dicha cuestión en diferentes medios disponibles (libros, materiales escolares, currículum, artículos de investigación, etc.). Este primer módulo abre y cierra el REI-FP, abordando aspectos parciales en los módulos siguientes.

El *módulo 1* consiste en proponer que el profesorado viva una actividad matemática —por lo general, basada en la propuesta de un REI—, similar al que podría existir en el aula. El principal objetivo es que el profesorado en formación experimente en su propia piel una actividad matemática poco tradicional, que podría existir bajo ciertas condiciones escolares y con la que no esté del todo familiarizados. Además, se persigue construir un medio compartido, suficientemente rico, entre profesorado y formadores para analizar lo ocurrido (en módulos posteriores).

El *módulo 2* se centra en el análisis colectivo del REI que viene de ser experimentado. Es en este módulo cuando los formadores presentan herramientas específicas matemático-didácticas para el análisis del REI, tanto para el análisis matemático (*¿qué matemáticas están involucradas? ¿qué proceso de modelización se ve desarrollado?*), como para el análisis didáctico (*¿qué gestión del tiempo se ha realizado? ¿qué responsabilidades se han asumido? ¿a través de qué estrategias de enseñanza?*).

El *módulo 3* se focaliza en el diseño de una posible adaptación del REI

experimentado previamente, por parte del profesorado en formación. Este diseño adopta la forma de una “guía didáctica” lo más cercana posible a su práctica profesional. Por lo general, se pide que, para su elaboración, se incluya el análisis matemático *a priori* de la actividad (comentaremos, a continuación, algunas de las herramientas transferidas para dicho análisis) y análisis didáctico *a priori* (especificando los objetivos matemático-didácticos para el docente y para los estudiantes, detalles sobre la gestión del tiempo, del medio empírico y previsión del *topos* (roles y responsabilidades) de los estudiantes y del profesorado).

El *módulo 4* incluye la puesta en práctica en un centro escolar y el análisis *in vivo* de la experimentación. Los docentes deben implementar su propuesta, a partir de los diseños o análisis *a priori* elaborados previamente y desarrollar su análisis durante la propia implementación. Este módulo concluye con el análisis *a posteriori* de la implementación, que puede ser individual y/o grupal según cómo se hayan desarrollado las implementaciones. Este último módulo se dedica a compartir experiencias y reflexionar sobre las condiciones creadas y las limitaciones encontradas durante la implementación.

Las actividades específicas propuestas en cada módulo del REI-FP dependen de las cuestiones de la profesión que se aborden de partida y del contexto particular de formación del profesorado. Investigaciones previas en el ámbito de la TAD han diseñado y experimentado diferentes tipos de REI-FP, algunos contemplando todos los módulos, otros centrándose sólo en algunos de estos. Barquero et al. (2019) presentan una panorámica de diferentes REI-FP implementados en la formación inicial y continuada del profesorado de primaria, secundaria o universitario.

Este artículo se centra en la experiencia de un curso obligatorio de formación en didáctica de la matemática de último año del Grado de educación primaria de la Universitat de Barcelona. Con la selección de este caso, nos proponemos mostrar cómo los REI-FP han servido para estructurar una asignatura completa, que lleva implementándose desde el curso 2016-17 hasta la actualidad. A partir de ciertas cuestiones de la profesión y de las correspondientes cuestiones derivadas en los distintos módulos del REI-FP, mostraremos cómo las actividades planeadas nos han permitido transferir algunas herramientas provenientes de la investigación en didáctica de la matemática a la formación del profesorado. Algunas de las cuestiones abordadas durante los distintos módulos tratan sobre cómo analizar y describir los saberes matemáticos en distintas situaciones didácticas, en particular aquellas que involucran la modelización, cómo analizar la actividad matemática generada, cómo diseñar matemática y didácticamente situaciones, entre otras.

Diseño de un curso para la formación del profesorado de primaria

El curso de Didáctica de la Matemática II (DMII, en adelante) se imparte durante el primer semestre de 4^º año del grado de primaria (6 ECTS, con 4h semanales de

docencia). A diferencia de cursos anteriores, los cuales establecen un bloque de saberes matemáticos concretos a desarrollar (numeración, estadística, medidas, geometría), en el caso de la asignatura de DMII el foco es el estudio de herramientas para el análisis, diseño y evaluación de la actividad matemática. El plan docente del curso se compone de cuatro grandes bloques: los dos primeros dedicados a herramientas curriculares para el análisis, programación y evaluación de la matemática a nivel de primaria; el tercero centrado en la transferencia de herramientas, desde la investigación-innovación, para el análisis, gestión y diseño de actividades matemática; y, el cuarto, transversal a los bloques anteriores, sobre modelos de enseñanza y aprendizaje en un cambio de paradigma para la enseñanza de las matemáticas.

Cada año, esta asignatura la cursa una totalidad de 8 grupos de entre 40-55 estudiantes (6 en turno de mañana y 2 de tarde). Nos centramos en dos de estos grupos de la asignatura cuya formadora es la autora de este trabajo. Cada docente de la asignatura, dentro de la flexibilidad del plan docente, imparte el conjunto de actividades que mejor cubren los distintos bloques, teniendo en común la realización de dos pruebas individuales (60% de la calificación final de la asignatura) y la elaboración de un trabajo final de asignatura que trata del diseño de una secuencia de actividades o proyecto matemático o interdisciplinar para la etapa de primaria (20%). El restante 20% de la calificación se dedica a la entrega de informes referentes al conjunto de actividades prácticas que componen el curso.

En el caso de los grupos en los que aquí nos centramos, la asignatura se ha diseñado en base a tres REI-FP que componen la totalidad del curso. En la Tabla 1 se resumen cada una de las cuestiones profesionales de la que parte cada REI-FP, así como la duración total y los módulos que se desarrollan. El primer REI-FP, denominado *La moda no da la talla*, parte de la vivencia de un REI sobre qué tipo de relaciones se siguen para establecer el tallaje de camisetas. Dicha vivencia se usa para analizar qué tipología de saberes curriculares (matemáticos y extra-matemáticos) intervienen en esta actividad de modelización, qué conexiones se establece entre distintos bloques de contenidos (organización de datos sobre el tallaje de camisetas, construcción de modelos de proporcionalidad aritmética y geométrica, validación de los modelos con los datos reales, entre otros).

El segundo REI-FP parte de la cuestión sobre cómo introducir la inferencia estadística en primaria, cómo promover la dimensión experimental y el estudio de la variabilidad en el aula y cómo evaluarla. Se parte de la vivencia de un REI denominado *¿Qué se esconde dentro de la botella?* (REI adaptado de la propuesta por Brousseau et al., 2002) que trata sobre la formulación de hipótesis sobre cuál es el contenido oculto de una botella, solamente pudiendo registrar visualizaciones sobre los objetos que se esconden (por ejemplo, bolas de distintos colores), sin poder nunca acceder a su contenido real. Posteriormente a la vivencia de este REI, se propone al profesorado en formación una doble tarea. En primer lugar, analizar la tipología de saberes que intervienen (basándonos en el currículum y extendiendo las nociones y terminología

estadísticas más allá de la existente en los currículos). En segundo lugar, trabajar en el diseño de herramientas de evaluación para poder valorar los recorridos seguidos por los grupos de clase. Este análisis y evaluación se complementa presentando experiencias en el aula de primaria con el mismo REI (Granell & Barquero, 2019). Estas se presentan a partir de extractos de informes del alumnado de primaria o a través de filmaciones de las sesiones de clase.

Tabla 1

Relación de REI-FP que componen el curso

	Cuestión generatriz	REI previo	Módulos	Duración
1	¿Qué saberes se ven involucrados en una actividad de modelización en la búsqueda de relaciones aritméticas y geométricas?	Sí, en formación de profesorado: <i>La moda no da la talla.</i>	0-2	12h
2	¿Cómo introducir la estadística inferencial en primaria? ¿Cómo evaluar este tipo de actividades en el aula?	Sí, en primaria: <i>¿Qué se esconde dentro de la botella?</i>	0-2	12h
3	¿Cómo analizar, diseñar y gestionar la modelización matemática en primaria?	Sí, en primaria: <i>La caja de la pastelera</i>	0-3	18h

En último lugar, el curso termina con la implementación del tercer REI-FP que parte de la cuestión generatriz sobre: *¿cómo analizar, diseñar y gestionar la actividad de modelización en el aula de primaria?* Este REI-FP persigue articular los aspectos trabajados previamente (análisis, evaluación, entre otros) y combinarse con el desarrollo del trabajo final de la asignatura sobre el diseño de una propuesta didáctica (módulo 3, con la adaptación de algunos de los REI experimentados para el aula de primaria). Todo este trabajo, elaborado durante todo el curso, permite de hecho elaborar progresivamente una respuesta a la cuestión generatriz de este tercer REI-FP. Este último REI-FP persigue transferir al profesorado herramientas más específicas para el análisis y diseño matemático y didáctico de propuestas de modelización. Por ejemplo, la introducción de terminología específica sobre modelización, la transferencia y puesta en uso de los *mapas de cuestiones y respuestas* (Florensa et al., 2021; Winsløw et al., 2013), o la elaboración de guías didácticas con aspectos acordados sobre: la gestión de los momentos y tiempo didáctico (*cronogénesis*), cambios y gestión del contrato didáctico (*topogénesis*) y gestión del medio empírico (*mesogénesis*).

En este trabajo nos centramos más específicamente en este último REI-FP, que denominamos *La caja de la pastelera*, para abordar nuestras preguntas de

investigación. En la primera sección de los resultados, vamos a explicar brevemente en qué han consistido las actividades desarrolladas por el profesorado en formación. Para ello, partimos del análisis cualitativo de los informes elaborados por los estudiantes, tanto durante la vivencia del REI (módulo 1) como en su análisis (módulos 2). En la segunda sección, nos centramos en el análisis de los cuestionarios distribuidos al finalizar los cursos (del 2016-17 al 2019-20), con una totalidad de 257 respuestas. Con ello, nos proponíamos conocer la valoración tanto de la composición y dinámica del curso, como de su experiencia en los distintos módulos de los REI-FP.

Resultados

Resultados sobre la implementación del REI-FP

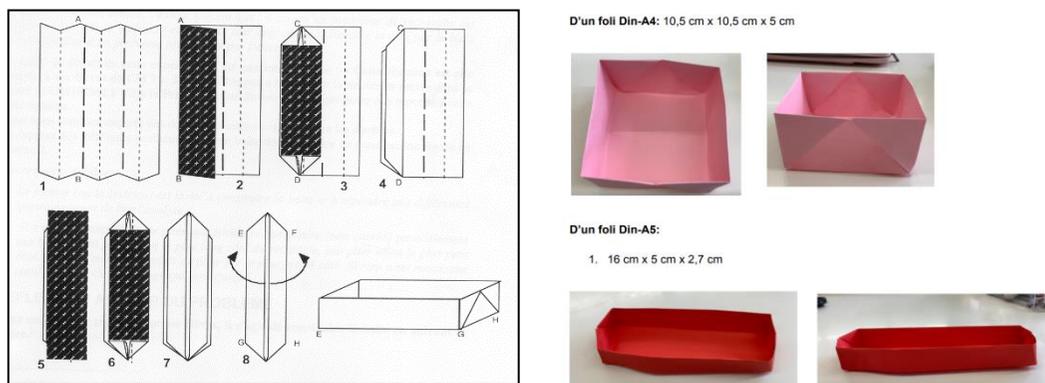
Módulo 0: Devolución de la cuestión profesional como punto de partida. Este REI-FP se inicia con la presentación, por parte de la formadora, de la cuestión sobre: *¿cómo analizar, diseñar y gestionar la actividad de modelización en el aula de primaria?* Se pide a los estudiantes que analicen qué primeras respuestas encuentran en medios disponibles como los currículos de primaria, libros de texto, material de otras asignaturas, entre otros posibles. Después de esta primera búsqueda, se inicia la vivencia (módulo 1), el análisis (módulo 2) y el diseño (módulo 3) a lo largo de los siguientes módulos de este REI-FP. El trabajo que se narra a continuación, junto con la elaboración del trabajo final de la asignatura sobre el diseño de una situación didáctica, persiguen elaborar progresivamente una respuesta, en cada paso más completa, a la cuestión profesional de partida.

Módulo 1: Vivencia del REI sobre *La caja de la pastelera*. Durante la implementación de este REI, los profesores en formación, bajo el rol de estudiantes, trabajan en grupos de 3-5 personas y se pide que, al finalizar cada sesión, entreguen grupalmente un informe del trabajo realizado. En este informe se deben especificar, con esta estructura: *¿qué cuestiones se han abordado? ¿qué modelos se proponen? ¿qué resultados se obtienen? ¿qué nuevas cuestiones se proponen para seguir?*

El primer módulo, se inicia con la presentación de la situación —situación adaptada de la propuesta por Chappaz y Michon (2003) y Ruiz-Higueras (2008)—donde una pastelera necesita ayuda para empaquetar sus pasteles y desea utilizar un tipo de caja concreto (ver Figura 2). El punto de partida de la actividad trata sobre *¿qué cajas tenemos que construir para ayudar a la pastelera? ¿cuál es la relación entre las dimensiones del material inicial (folios o cartulinas) y las dimensiones de la caja resultante?* A partir de estas cuestiones iniciales, la actividad se estructura en tres fases en función de aquellas variables (dimensiones folios, dimensiones cajas o dimensiones productos a empaquetar) que se asuman como dadas o como desconocidas.

Figura 2

Proceso de construcción de cajas (imagen derecha, Chappaz & Michon (2003, p. 32) y cajas obtenidas (imagen izquierda) según plegado sobre ancho o largo del folio



A continuación, resumimos el trabajo de modelización realizado explicando el sistema estudiado, ejemplos de cuestiones que alimentaron la actividad de modelización y la tipología de los modelos matemáticos que emergieron. Una descripción más detallada de los sistemas y modelos y de su evolución puede leerse en el trabajo previo (Barquero et al., 2022).

Fase 1: Se supone que las dimensiones del folio de partida (ancho y largo) vienen dadas. Esta primera fase se centra en indagar ¿cuáles son las dimensiones de las cajas resultantes a partir de estos folios? Los estudiantes empiezan considerando algunos casos e investigan cuestiones sobre, por ejemplo, ¿cuáles son las dimensiones de la caja que se obtiene a partir de un DIN-A4? Si tomamos un DIN-A5 (medio A4), ¿obtenemos una caja cuyas medidas son la mitad de la caja anterior?, entre otras cuestiones.

Esta fase se caracteriza por la riqueza del trabajo experimental que se desarrolla y de los modelos iniciales, manipulativos y de medida, con los que se trabaja. Estos primeros modelos (M1) se caracterizan por la construcción de cajas y la medición de las distintas longitudes de las cajas resultantes (ancho, largo y alto). Además, los estudiantes distinguen entre dos familias de cajas, aquellas construidas realizando el plegado sobre el largo o sobre el ancho del folio (ver Figura 2, lado izquierdo) y empiezan a formular las primeras hipótesis sobre posibles relaciones entre medidas folio-caja (por ejemplo, “considerar la mitad del folio, no lleva a obtener la mitad de la caja”, “a partir de folios cuadrados, no obtenemos cajas de base cuadrada”, “la altura difícilmente se puede escoger”, etc.).

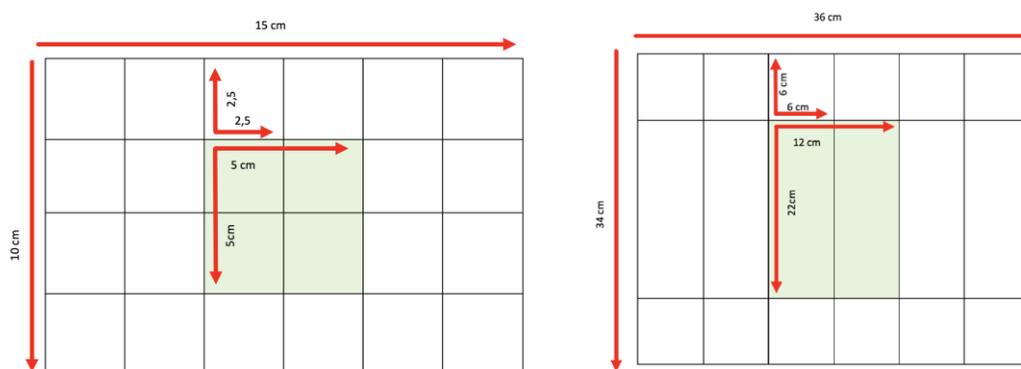
Fase 2: Suponemos ahora que buscamos cajas con ciertas dimensiones dadas. En esta segunda fase la formadora plantea la cuestión sobre cuáles deben ser las dimensiones iniciales del folio necesario para construir una caja con dimensiones dadas. Los estudiantes empiezan por considerar casos particulares de cajas y abordar cuestiones derivadas del tipo: ¿qué dimensiones de folio necesitamos para obtener una caja con dimensiones 6 cm x 13 cm x 5 cm?, ¿cómo obtenemos cajas con base cuadrada: 5 cm x 5 cm o 8 cm x 8 cm? ¿cómo podemos modificar el folio para obtener cajas con la

misma base, pero diferentes alturas?

Frente a estas cuestiones, muchos de los grupos suelen considerar modelos algorítmicos, expresados mediante “reglas de tres” (M2), que resultan erróneos. Las respuestas que M2 proporcionan pueden ser invalidadas, por los propios estudiantes, mediante la construcción misma de las cajas. A partir de aquí, los grupos suelen buscar otros modelos que, en muchas ocasiones, se derivan de analizar la caja desplegada (ver ejemplo en la Figura 3). El análisis geométrico de la caja les permite describir y formalizar las relaciones entre las distintas longitudes. Al finalizar esta fase, la mayoría de los grupos abandonan los modelos más iniciales (M1, M2) y pasan a considerar otra tipología de modelos. Los más habituales son los geométrico-numéricos, a partir del desplegado de la caja y la descripción numérica de las relaciones (M3, ver Figura 3 con fragmento de informe de un grupo de clase), o bien, describen las relaciones entre longitudes folio-caja pre-algebraicamente (M4, descripción narrativa de las relaciones entre longitudes caja-folio) o algebraicamente (M5, ver ejemplo en Figura 5) prescindiendo del objeto caja plegada o desplegada.

Figura 3

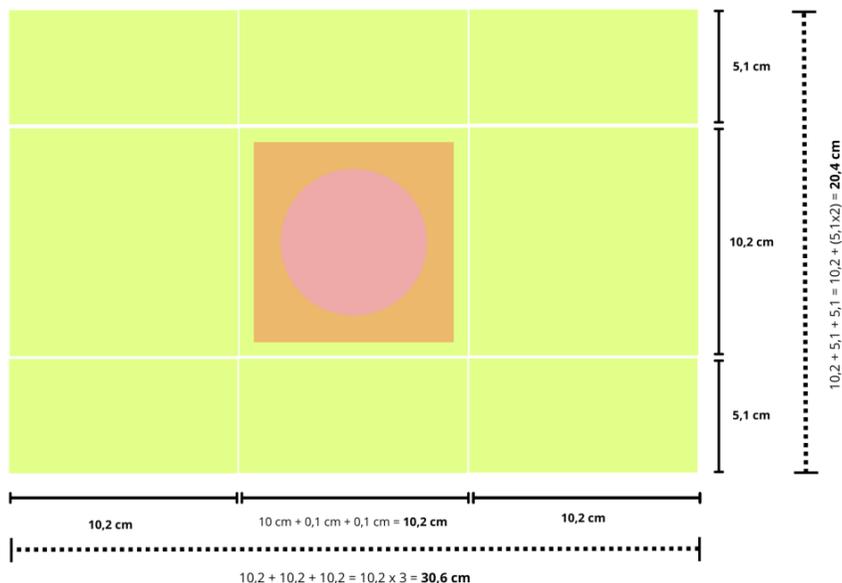
Fragmento de informe con la propuesta del modelo geométrico con desplegado de caja



Fase 3: Llegados a esta fase, se propone ahora responder a la demanda de la pastelera, que lleva a la formadora a entregar las medidas reales de diversos productos que se quieren empaquetar (pasteles, turrónes, etc.). Además, en esta fase, les pide que añadan una tapa a cada caja, construida con el mismo patrón, para empaquetar adecuadamente estos productos. En esta fase, no suele haber mucha evolución de los modelos usados (en caso de que el grupo esté usando modelos del tipo M3, M4 o M5). Esta fase se caracteriza principalmente por estudiar la validez y limitaciones de estos modelos. En la Figura 4 se muestra la propuesta de respuesta de un grupo, en el caso de un pastel redondo de 8 cm de diámetro, para el que proponen una caja de base cuadrada (10 cm x 10 cm) y una tapa de base cuadrada con 10.2 cm de lado. Se puede apreciar cómo, con el uso de modelos geométrico-numéricos (M3), concluyen sobre las dimensiones de los folios necesarios.

Figura 4

Fragmento de informe para deducir las dimensiones de la caja base y de su tapa para un pastel de 8 cm de diámetro



En la Figura 4 se muestra un ejemplo de respuesta elaborada por un grupo en el que los estudiantes utilizan modelos geométrico-numéricos (M3) para la construcción de la caja base y de la caja tapa. Como hemos comentado, en esta última fase, pueden convivir modelos de distinta tipología (M3, M4 o M5, entre otros posibles). Es habitual que algunos de los grupos acaben generalizando las relaciones folio-caja con modelos algebraicos, como las que propone el grupo que se muestra en la Figura 5. En este caso, se denomina x e y , el ancho y largo del folio; xb e yb las dos longitudes de la base de la caja y z su altura, con ello establecen las relaciones algebraicas que vinculan las dimensiones del folio con las de la caja, según las posibles dos orientaciones de los pliegues. Si los pliegues son paralelos al ancho del folio (traducción Figura 5, imagen derecha):

Entonces sabemos que: $xb = x/3$,

también observamos que la altura de la caja corresponde a $x/6$

Entonces sabemos que: $z = x/6$

Finalmente, observamos que el ancho de la caja es igual al ancho del folio menos dos veces la altura de la caja. Entonces: $xb = y - x/6 - x/6$

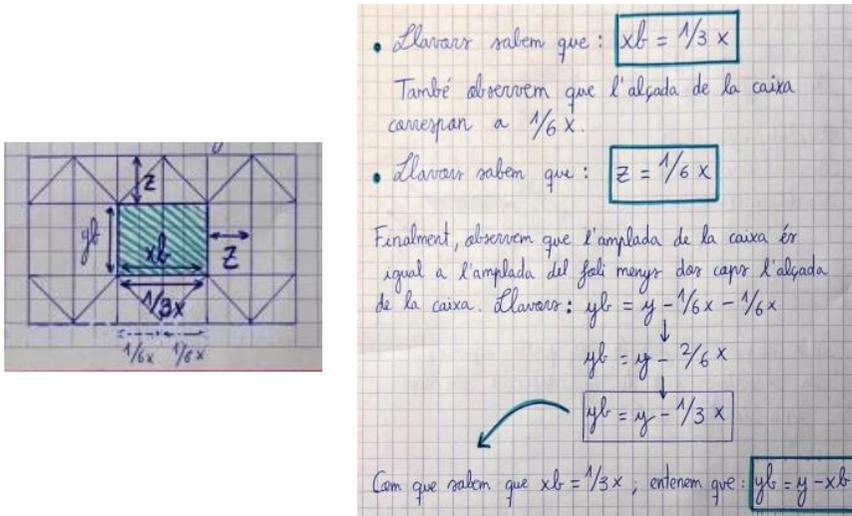
$$yb = y - 2x/6$$

$$yb = y - x/3$$

Como sabemos que $xb = x/3$, entendemos que: $yb = y - xb$

Figura 5

Fragmento del informe con el uso de modelo algebraico y la generalización de relaciones



Módulo 2: Análisis de la actividad de modelización. En este segundo módulo, se pide a los participantes que asuman un nuevo rol, el de *analistas matemáticos y didácticos*. Asumir este rol conlleva adentrarse en el análisis matemático y didáctico del proceso de modelización y recorrido que recién han experimentado, así como la gestión de aula por parte de la formadora y de los grupos de trabajo. El conjunto de informes que han elaborado por grupos, los debates en clase y las presentaciones de la formadora constituyen un medio suficientemente rico (es decir, con suficiente información y elementos compartidos para ser analizados) para emprender el análisis del REI vivido. Debemos notar, como hemos comentado previamente, que los informes eran solicitados con una estructura y elementos preestablecidos: cuestiones estudiadas, modelos creados, respuestas aportadas y propuesta de nuevas cuestiones. La formadora usaba también dichos elementos en sus presentaciones, para la gestión de las puestas en común en el aula y en sus presentaciones resumen del trabajo de los grupos.

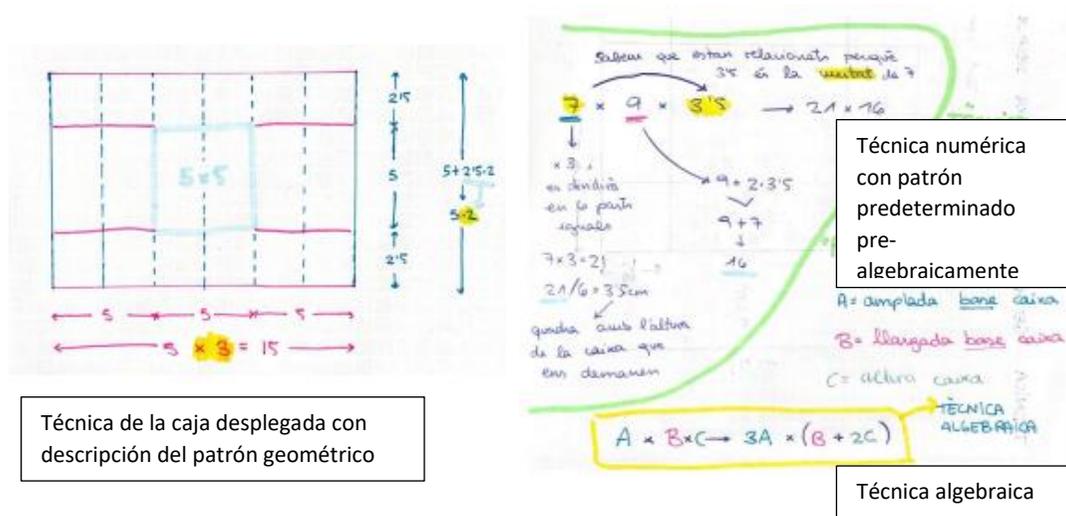
Para no reducir este análisis a un simple listado de contenidos abordados o a la corrección de respuestas, la formadora subraya la importancia de analizar la dinámica establecida por las cuestiones abordadas, los sistemas considerados, los modelos construidos y aquellos que pueden coexistir. Esto lleva a la formadora a proponer la elaboración de los *mapas de cuestiones y respuestas* (Winsløw et al., 2013; Florensa et al., 2021) como principal herramienta de análisis matemático-didáctico.

En Barquero et al. (2022) se encuentran algunos ejemplos de mapas de cuestiones-respuestas elaborados por los profesores en formación, con este mismo REI-FP sobre *La caja de la pastelera*. A partir de estos mapas, se puede apreciar cómo los estudiantes dotan de una terminología específica y explicitan ciertos modelos que pueden coexistir

en las distintas etapas de la actividad. La Figura 6 muestra como dos equipos de trabajo describen y nombran algunos de los modelos considerados: “técnica de caja desplegada” (descrito previamente como M3), “técnicas numéricas con discurso pre-algebraico” (descrito como M4) o “técnica algebraica” (descrito como M4).

Figura 6

Fragmento del análisis de la actividad con modelos nombrados por estudiantes (con traducción nombre asignada a las técnicas o modelos, por parte de los estudiantes)



Un resultado importante reside en el hecho de que los futuros profesores son capaces de centrarse en el proceso y analizarlo, en lugar de sólo centrarse en la corrección de las soluciones o respuestas. Lo importante aquí es que los futuros profesores consideren la actividad de modelización como un todo y puedan localizar los distintos modelos coexistentes, es decir, que pueden convivir dentro del proceso y que son necesarios para, justamente, hacerlos evolucionar. Así se tiene en cuenta aspectos relevantes de la actividad de modelización: estudio de las limitaciones de los modelos y de las técnicas asociadas, su desarrollo a otros modelos más complejos, por ejemplo, en el caso de la construcción de modelos geométricos o algebraicos como herramientas para superar limitaciones de modelos previos.

Módulo 3: Diseño de una propuesta didáctica. A este segundo módulo le sigue, como parte final de la asignatura, el *módulo 3* con el diseño de un REI para poder ser implementado en la etapa de primaria. Se ofrece a los estudiantes escoger algunas de las actividades de modelización desarrolladas durante el curso (ver Tabla 1) y preparar una adaptación con el correspondiente diseño matemático y didáctico. Las herramientas introducidas en el módulo 2, en un principio usadas como instrumentos de análisis, son ahora usadas para el diseño. Más concretamente, los mapas de cuestiones-respuestas y la elaboración de guías didácticas discutidas en primera

instancia en torno a la experimentación del REI sobre *La caja de la pastelera*, son ahora usados por los estudiantes para proponer sus propios diseños. Algunos de los grupos tienen la oportunidad de llevar a la práctica las propuestas, buscando ellos mismos las posibilidades de experimentación (y adentrarse así en el módulo 4). Algunos grupos mantienen contacto con las escuelas de prácticas, que les facilitan algunas sesiones, o escogen grupos de extraescolares o de clases particulares con los que suelen trabajar. A pesar de esto, no se exige su experimentación dado que la asignatura no tiene créditos asociados de prácticas en escuelas de primaria.

Resultados sobre valoración del curso y de los distintos módulos de los REI-FP

En relación con las encuestas del curso, respondidas por 257 docentes en formación, la Tabla 2 muestra la valoración de aquellos aspectos generales del curso. Se puede apreciar cómo se valora el contenido práctico del curso ($\bar{x} = 3.61, Me = 4$) versus el contenido teórico ($\bar{x} = 2.78, Me = 3$) con casi un punto de diferencia en la media obtenida. Bien es cierto que todas las actividades se realizan en grupo y así opinan que la cantidad de trabajo en grupo ha sido bastante elevada ($\bar{x} = 3.86, Me = 4$) respecto de la individual ($\bar{x} = 2.11, Me = 2$). A pesar de que este volumen de trabajo grupal y el ritmo del curso se consideren bastante elevados ($\bar{x} = 3.81, Me = 4$), se valora muy positivamente la utilidad del trabajo grupal ($\bar{x} = 4.49, Me = 5$, ver Tabla 4) así como la utilidad de las puestas en común entre grupo de clase ($\bar{x} = 4.05, Me = 4$, ver Tabla 4).

Tabla 2

Valoración de los aspectos generales del curso (Escala Likert 1—5)

	Media	Mediana	Desv
Duración del curso (1=muy corto, 5= largo)	2.98	3	.77
Contenido práctico (1=muy poco, 5=mucho)	3.61	4	.55
Contenido teórico (1=muy poco, 5=mucho)	2.78	3	.63
Dificultad (1=muy poca, 5=muy alta)	2.78	3	.66
Cantidad trabajo en grupo (1=muy poca, 5=mucho)	3.86	4	.53
Cantidad trabajo individual (1=muy poca, 5=mucho)	2.11	2	.83
Ritmo del curso (1=muy lento, 5=muy rápido)	3.81	4	.83

Sobre la estructura y actividades en los distintos módulos de los REI-FP (ver Tabla 3), se destaca la alta valoración sobre el interés, estructura y relación entre las distintas actividades y relación con bloques de la asignatura ($\bar{x} \approx 4.2, Me = 4$) y sobre la adopción de distintos roles, desde el rol de estudiante a analista o de analista a diseñador ($\bar{x} = 4.2, Me = 4$). Como destacan diversos estudiantes en la encuesta: *Resulta útil y muy poco frecuente ponerse en la piel de distintos “actores”, como el de estudiante, analista o docente, que te permite comprender la problemática desde distintos ángulos* [Encuestado 6]. El interés sobre las herramientas matemáticas y didácticas introducidas y trabajadas durante el curso es un aspecto también muy bien valorado ($\bar{x} = 4.44, Me = 4$) así como su utilidad ($\bar{x} = 4.57, Me = 5$). Vamos a

introducir más detalles a continuación, con las valoraciones sobre el módulo 2 con la introducción y uso de herramientas de análisis y diseño.

Tabla 3

Valoración estructura, roles e introducción herramientas (Likert 1=muy poco; 5 = mucho)

	Media	Mediana	Desv.
Interés y estructura de las actividades	4.23	4	.75
Relación bloques asignatura con REI-FP	4.20	4	.8
Interés en la adopción de distintos roles	4.20	4	.84
Interés en la introducción de nuevas herramientas	4.44	4	.6
Utilidad de nuevas herramientas	4.57	5	.56

Si nos adentramos en aspectos más concretos del Módulo 1 (ver Tabla 4), con la vivencia como *estudiantes* de los distintos REI y actividades de modelización asociadas, se destacan la poca experiencia que declaran tener con actividades de este tipo ($\bar{x} = 1.69, Me = 1$). Por ejemplo, algunos encuestados destacan que: *Hemos podido ver que existen otro tipo de matemáticas y el papel tan relevante que pueden tener en las aulas* [Encuestado 58]. No valoran como dificultoso el tener que asumir el rol de estudiante ($\bar{x} = 2.36, Me = 2$), posiblemente es el que más naturalmente han asumido en cursos anteriores, aunque sí destacan la relevancia y utilidad del trabajo en grupo en este tipo de actividades ($\bar{x} = 4.49, Me = 5$) y del trabajo colectivo con las puestas en común ($\bar{x} = 4.05, Me = 4$). Más concretamente, comentan que: *Ver como lo resolvían otros grupos fue en todo momento muy útil* [Encuestado 246]. [...] *comparar y contrastar otras formas de indagar las actividades ha sido interesante y útil ya que a veces nos olvidamos y pensamos que todos llegarán igual de rápido o con las mismas herramientas o al mismo fin que proponen los docentes* [Encuestado 172]. El que reconocen como un aspecto bastante dificultoso, en un inicio, es la estructura y la redacción de los informes grupales, que se usaban para seguir la evolución (o recorridos particulares) de los distintos grupos ($\bar{x} = 2.52, Me = 2$). Distintos encuestados comentan que toma un tiempo aprender a describir y escribir en matemáticas y sobre los elementos solicitados (cuestiones, modelos, respuestas, nuevas cuestiones), ya que nunca lo han realizado.

Tabla 4

Valoración sobre el Módulo 1: vivir un REI (Likert 1=muy poco; 5 = mucho)

	Media	Mediana	Desv.
Experiencia previa con actividades de modelización	1.69	1	.8
Dificultad en asumir el rol de estudiante	2.36	2	1.12
Utilidad del trabajo en grupo	4.49	5	.77
Utilidad de las puestas en común	4.05	4	.89
Estructura de los informes	2.52	2	1.14

Sobre el Módulo 2 correspondiente al análisis del REI vivido (ver Tabla 5), se destaca la dificultad añadida que les supone adoptar ahora el rol de *analistas* ($\bar{x} = 3.38, Me = 3$), en comparación al de estudiantes. Como hemos comentado previamente, una de las herramientas introducidas son los *mapas de cuestiones y respuestas* como herramienta de análisis matemático y didáctico, además de una terminología específica sobre los procesos de modelización. Como se puede apreciar con los resultados, a pesar de ser un nuevo instrumento transferido en el proceso de formación, no les resulta excesivamente difícil su elaboración ($\bar{x} = 2.57, Me = 3$), aunque sí muy útil, como herramienta de análisis ($\bar{x} = 4.28, Me = 5$) y de previsión y anticipación del trabajo matemático ($\bar{x} = 4.6, Me = 5$) la cual se convertirá, en módulos posteriores, en herramienta de diseño. Son interesante algunas de las aportaciones comentadas por los encuestados: *Los mapas de cuestiones y respuestas han sido un gran descubrimiento que usaré al largo de mi carrera, no sólo en matemáticas, sino en otras asignaturas ya que es una herramienta que permite hacer un seguimiento de contenidos muy abierta, basada en cuestiones que se pueden plantear y que permite un seguimiento y evaluación flexible y moldeable [...] [Encuestado 14]. [...] permite tener un "guion" de lo que puede suceder, permite visualizar posibles recorridos de los estudiantes que puede ser muy útil como docente [Encuestado 242]. "Crear el mapa de cuestiones y respuestas ha sido una novedad, y dificultoso por ello, y porque nunca parece ser definitivo, sino que es una herramienta en constante evolución o enriquecimiento, cuando analizáramos otros grupos o lanzáramos nuevas experimentaciones" [Encuestado 153].*

Tabla 5

Valoración sobre el Módulo 2: analizar un REI (Likert 1=muy poco; 5 = mucho)

	Media	Mediana	Desv.
Dificultad en asumir el rol de analista	3.38	3	0.9
Dificultad en la realización de mapas de cuestiones-respuestas	2.57	3	1.05
Uso del mapa de Q-R como herramienta de análisis	4.28	5	.85
Uso del mapa de Q-R como herramienta de anticipación	4.6	5	.75

Para terminar, en relación con las valoraciones del Módulo 3, donde el profesorado en formación trabaja en el (re)diseño de una actividad de modelización, aparecen de nuevo bien valorados el uso de los mapas de cuestiones y respuestas como herramienta de diseño ($\bar{x} = 4.71, Me = 5$, ver Tabla 6). Se destaca también cómo la elaboración de "Guías didácticas" les permite retomar diversos elementos matemático-didácticos tratados durante el curso ($\bar{x} = 4.16, Me = 4$). Como hemos comentado previamente, estas guías aparecen, complementando el análisis matemático aportado por mapas C-R, con aquellos elementos didácticos referentes a: los objetivos matemático-didácticos para el profesor y los estudiantes, la gestión del tiempo, el medio empírico y la previsión de los topes (roles y responsabilidades) de los estudiantes y del profesorado.

Como destacan algunos de los encuestados: *Todo ha terminado teniendo sentido, hemos podido entender el porqué de los temas trabajados y su conexión, especialmente*

en el diseño de nuestra propuesta [Encuestado 171]. Y más en su globalidad: *Creo que, de todas las asignaturas de matemáticas que he cursado en la carrera, esta es la que realmente me ha dado herramientas más valiosas para el desarrollo de mi profesión docente. No necesito tantos contenidos básicos como la suma, resta, fracciones o geometría, si no que quiero saber qué estrategias siguen y cómo darles sentido, cómo evaluarlas, cómo generarlas con buenas preguntas. Esto es lo que he obtenido en esta asignatura, en la que sin trabajar de forma tradicional las “matemáticas”, he aprendido más matemáticas que nunca* [Encuestado 20].

Tabla 6

Valoración sobre el Módulo 3: diseño de una REI (Likert 1=muy poco; 5 = mucho)

	Media	Mediana	Desv
Dificultad en asumir el rol diseñador-docente	3.14	3	1.05
Uso del mapa de Q-R como herramienta de diseño	4.71	5	.53
Puesta en uso de herramientas matemático-didácticas en la elaboración de las Guías didácticas	4.16	4	0.88

Discusión y conclusiones

Este artículo se ha centrado en la presentar y discutir la propuesta de los REI-FP para la formación inicial del profesorado, en un curso en particular, con un doble propósito. En primer lugar, ejemplificar qué tipología de cuestiones de la profesión y qué estrategias de formación se desarrollan en los REI-FP. En segundo lugar, qué herramientas de análisis y de diseño matemático-didáctico, provenientes de la investigación, son transferidas al profesorado en formación a lo largo del desarrollo de un REI-FP y cómo estas son valoradas por ellos.

De entre las diversas experiencias con el diseño e implementación de REI-FP (ver Barquero et al., 2022), hemos escogido el caso de la asignatura obligatoria de Didáctica de la Matemática II del Grado de educación primaria (4^a año, 6 ECTS) de la Universitat de Barcelona, cuyo plan docente ha permitido que esta fuera diseñada mediante distintos REI-FP para ir abordando parcialmente, aunque complementariamente, distintas problemáticas docentes relativas a la enseñanza y aprendizaje de la modelización. Nos hemos centrado en el último, y más completo, REI-FP sobre *La caja de la Pastelera*. A partir de este, hemos ilustrado en qué han consistido las actividades desarrolladas en sus distintos módulos. Este parte de la cuestión profesional sobre *¿cómo analizar, diseñar y gestionar la actividad de modelización en el aula de Primaria?* (módulo 0), incluyendo, de forma esencial, la vivencia del REI (módulo 1). Lo cual permite generar un medio compartido entre estudiantes y formadora para pasar entonces a la introducción y puesta en uso de ciertas herramientas de análisis (módulo 2), que se convierten posteriormente en herramientas de diseño (módulo 3).

Una primera de las estrategias clave de la formación ha consistido en pedir al profesorado en formación asumir distintos roles. Empezando por aquellos con los que están más habituados, el de *estudiantes* experimentando ciertas actividades de

modelización, convirtiéndose después en *analistas* con la introducción de ciertas herramientas para el análisis matemático y didáctico, hasta llegar al rol de *diseñadores* y de *docentes*. Este cambio de roles aparece una estrategia exitosa (ver Barquero et al. 2018) que permite al profesorado en formación tomar distintas posiciones desde las cuales aproximarse a la problemática didáctica abordada sobre la enseñanza de la modelización. Por ejemplo, como estudiante emergen cuestiones sobre ¿qué terminología usar sobre la modelización? ¿cómo redactar los informes solicitados describiendo el proceso de modelización seguido?; o, como analistas, aparecen cuestiones sobre ¿cómo analizar y cómo evaluar una actividad de modelización?

Esta primera estrategia no se podría explicar sin tomar en consideración una segunda estrategia cuyo propósito es la construcción de un *medio* suficientemente rico, compartido entre profesorado y formadores. Para ello, una clara especificidad del REI-FP reside en el hecho de incorporar tanto la vivencia de un REI como su análisis. No es estrategia menor el querer crear un medio, es decir, una realidad matemática y didáctica ante el cual las herramientas matemático-didácticas vayan tomando sentido y permitiendo abordar las cuestiones estudiadas. Una herramienta clave para este son los *mapas de cuestiones y respuestas* (CR). Lo que aparece claramente en el REI-FP sobre La caja de la pastelera es la variedad de *funciones* que tienen los mapas en manos del profesorado en formación. En primer lugar, los mapas se usan como herramientas de análisis del REI. Este paso es posible, gracias al *medio empírico* generado con la vivencia del REI (los informes elaborados, debates de clase, etc.) y permite a los estudiantes profundizar en el análisis del REI vivido. En segundo lugar, los mapas CR son usados para el análisis y evaluación de los recorridos particulares de otros grupos de trabajo o de experiencias en aulas de primaria. Por otro lado, los mapas se convierten en una herramienta de diseño, en el módulo 3, cuando se trabaja con la adaptación y rediseño de un REI. De este modo, a lo largo de las distintas fases, el REI-FP permite a los estudiantes construir progresivamente un conocimiento matemático y didáctico sobre la actividad de modelización, que no proporciona directamente el currículum, y que debería facilitarles el diseño, gestión y evaluación de este tipo de actividades.

Hemos completado la descripción de este caso de REI-FP, con la valoración realizada por el profesorado en formación. Los resultados comentados, nos han servido, y seguirán sirviendo, para mejorar las estrategias de formación comentadas previamente. Por ejemplo, en lo que se refiere a la selección de los REI-FP (y los REI) que componen la asignatura, su secuenciación y complementariedad, los roles solicitados y las tareas planteadas bajo cada rol, que permitan generar el medio adecuado para planear a la formación del profesorado en un paradigma lo máximo cercano al de *cuestionamiento del mundo* (Chevallard, 2015). Así como la selección y adaptación de herramientas (provenientes de la investigación y adaptadas a la formación del profesorado) que se transfieren al profesorado en formación y las tareas que permiten explotar su uso.

Dos de los puntos débiles que debemos subrayar es la dificultad, en un curso relativamente corto, de hacer un buen retorno a las cuestiones profesionales de partida de los REI-FP. Cada REI-FP permite empezar a elaborar respuestas parciales a estas cuestiones, que son amplias y *vivas* en la profesión. Se debe, por tanto, tomar conciencia

(profesorado y formadores) de que su estudio debe dilatarse más allá de la temporalidad del curso. Otro de los puntos débiles es la imposibilidad, en el contexto de la asignatura que tomamos como estudio de caso, de implementar de forma sistemática los diseños que son propuestos a nivel de primaria. Esto es debido a limitaciones sobre cómo esta asignatura está planeada y situada en el conjunto del Grado. En Barquero et al. (2018) se presenta diferentes experiencias con REI-FP, en el caso de formación continua del profesorado, en el que sí existe esta posibilidad, y el análisis de las condiciones y restricciones detectadas con su llevada a las aulas tienen gran relevancia. Aun así, estas investigaciones muestran como el buen desarrollo de los primeros módulos son cruciales y permiten llegar a las aulas con diseños y herramientas de análisis suficientemente robustos y contrastables. En este sentido, nuestra línea de investigación actual persigue poner en contacto la formación inicial y continua, basada en la propuesta REI-FP, que permita potenciar y difundir el diseño y análisis de REI para la enseñanza de la modelización.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido elaborado gracias al apoyo del Proyecto I+D+i PID2021-126717NB-C31 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Conflicto de intereses

La autora declara no tener ningún conflicto de intereses. Los financiadores no tuvieron ningún papel en el diseño del estudio; en la recopilación, análisis o interpretación de datos; en la redacción del manuscrito, o en la decisión de publicar los resultados.

Referencias

- Artigue, M. y Blomhøj, M. (2013). Conceptualising inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45(6), 797-810. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6>
- Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Los Recorridos de Estudio e Investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las Ciencias Experimentales, *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 29(3), 339-352. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n3.519>
- Barquero, B., Bosch, M. y Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 31-43. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-z>
- Barquero, B., Florensa, I. y Ruiz-Olarría, A. (2019). The education of school and university teachers within the paradigm of questioning the world. En M. Bosch et al. (Eds.), *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A Comprehensive Casebook* (Chapter 12). Routledge.
- Barquero, B., Bosch, M. y Florensa, I. (2022). Contribuciones de los recorridos de estudio e investigación en la universidad: el caso de la formación del profesorado. *AIEM*, 21, 87-106. <https://doi.org/10.35763/aiem21.4232>
- Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2002). An experiment on the teaching of

- statistics and probability. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 363–441. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(02\)00078-0](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00078-0)
- Blomhøj, M. y Kjeldsen, T.H. (2006) Teaching mathematical modelling through project work Experiences from an inservice course for upper secondary teachers. *ZDM Mathematics Education*, 38(2), 163–177. <https://doi.org/10.1007/BF02655887>
- Blum, W. (2002). ICMI study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1-2), 149–171. <https://doi.org/10.1023/A:1022435827400>
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? En S. J. Cho (Ed.), *The proceedings of the 12th ICME* (pp. 73–96). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9
- Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling. Education, engineering and economics* (pp. 222–231). Horwood. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
- Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 99–118. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8>
- Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89–113). SEIEM.
- Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: A model for inquiry. *Proceedings of the International Congress of Mathematics* (pp. 4001–4022). Rio de Janeiro, Vol. 3. https://doi.org/10.1142/9789813272880_0210
- Burkhardt, H. (2006). Modelling in mathematics classrooms: Reflections on past developments and the future. *ZDM Mathematics Education*, 38(2), 178–195. <https://doi.org/10.1007/BF02655888>
- Chappaz, J. y Michon, F. (2003). La boîte du pâtissier. *Grand N*, 72, 19–32.
- Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. En S. J. Cho (Ed.), *The proceedings of the 12th ICME* (pp. 173–187). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_13
- Florensa, I., Bosch, M. y Gascón, J. (2021). Question–answer maps as an epistemological tool in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 24(2), 203–225. <https://doi.org/10.1007/s10857-020-09454-4>
- García, F.J., Gascón, J., Ruiz-Higueras, L. y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 38(3), 226–246. <https://doi.org/10.1007/BF02652807>
- Granel, C. y Barquero, B. (2019). Experiència amb un recorregut d'estudi i investigació sobre la inferència estadística a l'educació primària. Què s'amaga dins l'ampolla? *Noubiaix*, 44, 54–69.
- Kaiser, G., Schwarz, B. y Tiedemann, S. (2010). Future teachers' professional knowledge on modeling. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 433–444). Springer.

- https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_37
- OECD (2018). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/b25efab8-en>
- Ruiz-Higueras, L. (2008). Modelización Matemática en la Escuela Primaria. La reconquista escolar de dominios de realidad. En M.M. Hervás (Ed.), *Competencia matemática e interpretación de la realidad* (pp. 87–119). Ministerio de Educación, Política Social y Deporte.
- Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Madrid (España).
- Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid (España).
- Swan, M., Pead, D., Doorman, M. y Mooldijk, A. (2013). Designing and using professional development resources for inquiry-based learning. *ZDM Mathematics Education*, 45(7), 945–957. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0520-8>
- Winsløw, C., Matheron, Y. y Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 267–284. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9453-3>