DOI. https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.2.99050 ISSN 0213-8646 | E-ISSN 2530-3791

Análisis didáctico en la formación de maestros basado en las herramientas del Enfoque ontosemiótico. El caso de lecciones de proporcionalidad

María BURGOS NAVARRO
María José CASTILLO
Juan D. GODINO

Datos de contacto:

María Burgos Navarro
Universidad de Granada
mariaburgos@ugr.es

María José Castillo
Universidad de Costa Rica
mariajosecastilloc.24@gmail.com

Juan D. Godino
Universidad de Granada
jdgodino@gmail.com

Recibido: 17/03/2023
Aceptado: 05/06/2023

RESUMEN

Una lección de un libro de texto muestra el proceso de instrucción planificado por el autor como medio para promover el aprendizaje de un contenido por parte de estudiantes potenciales. Valorar la idoneidad de una lección precisa de un análisis profundo que contemple la secuencia de prácticas operativas y discursivas que propone el autor para el desarrollo del contenido matemático, atender a cómo se gestionan los conocimientos previos requeridos e identificar elementos potencialmente conflictivos. En este trabajo se describen los resultados de una experiencia formativa con estudiantes del Grado de Educación Primaria destinada a desarrollar la competencia de análisis didáctico, empleando una lección de libro de texto sobre proporcionalidad. Se trata de que los estudiantes analicen las situaciones de enseñanza caracterizando los objetos y procesos como elementos constitutivos del contenido matemático (análisis ontosemiótico) a ser aprendido e identifiquen su papel en las posibles dificultades de aprendizaje (identificación de conflictos semióticos). El diseño, implementación y evaluación de la experiencia, están basados en la aplicación de herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Ontosemiótico. El análisis de contenido de los informes entregados por los estudiantes pone de manifiesto sus dificultades para identificar los objetos (fundamentalmente proposiciones y argumentos) que se requieren o emergen de las prácticas, a través de los respectivos procesos matemáticos. Así mismo, la identificación de conflictos, especialmente aquellos referentes a aspectos epistémicos y cognitivos específicos de la proporcionalidad o su tratamiento no es suficientemente adecuada.

PALABRAS CLAVE: Formación de docentes; análisis didáctico; libro de texto; análisis ontosemiótico; proporcionalidad.

Didactic analysis in teacher training based on the onto-semiotic approach tools. The case of proportionality textbook lessons on proportionality

ABSTRACT

A textbook lesson shows the instructional process planned by the author to promote the learning of content by potential students. Assessing the suitability of a lesson requires an in-depth analysis that considers the sequence of operative and discursive practices proposed by the author for developing the mathematical content, how the required prior knowledge is managed, and identifying potentially conflictive elements that the teacher must consider. This paper describes the results of a training experience with students for primary school teacher aimed at fostering the competence of didactical analysis, using a proportionality textbook lesson. The aim is for students to analyse teaching situations by characterising objects and processes as constituent elements of the mathematical content (onto-semiotic analysis) to be learned and to identify their role in possible learning difficulties (identification of semiotic conflicts). The design, implementation, and evaluation of the experience are based on the application of theoretical-methodological tools of the Onto-semiotic Approach. The content analysis of the reports produced by the students for teacher reveals their difficulties in identifying the objects (mainly propositions and arguments) that are required or emerge from the practices, through the respective mathematical processes. Accordingly, the identification of conflicts, especially those referring to specific epistemic and cognitive aspects of proportionality or their treatment is not sufficiently satisfactory.

KEYWORDS: Teacher training; didactical analysis; textbook; onto-semiotic analysis; proportionality.

Introducción

Desde diversas perspectivas de investigación en Educación Matemática se propone la reflexión sobre la práctica docente como una competencia clave para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza (Gellert et al., 2013; Seckel & Font, 2020). Se asume que el docente debe tener los conocimientos matemáticos y didácticos para describir, explicar y valorar de manera sistemática los procesos instruccionales, así como ser competente en la aplicación de estos conocimientos para la mejora de la práctica profesional (Giacomone et al., 2018; Pino-Fan et al., 2015).

Ante esta demanda, investigaciones previas (Breda et al., 2017; Font et al., 2010; Pochulu et al., 2016) proponen la aplicación de las herramientas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al., 2007), para desarrollar en el profesorado la competencia específica de análisis e intervención didáctica. Esta competencia supone, entre otras, la capacidad del docente para interpretar y analizar la actividad matemática puesta en juego al estudiar los contenidos matemáticos pretendidos o resolver problemas (competencia de análisis de significados), así como la competencia para la reflexión global sobre la práctica docente y su valoración crítica (competencia de análisis de la idoneidad didáctica) (Godino et al., 2017). En particular, la competencia para el análisis e intervención didáctica permite utilizar con criterio los materiales curriculares como guía para el diseño instruccional en un contexto determinado, valorando y efectuando las adaptaciones que solventen sus limitaciones (Yang & Liu, 2019).

Dentro de los materiales curriculares de uso preferente por el profesorado, continúa estando el libro de texto. Como sugieren Bel y Colomer (2018) “la importancia de este material didáctico no ha hecho más que aumentar en contextos como el europeo e iberoamericano, lo que a su vez ha llevado a una mayor preocupación por su estudio desde las esferas académicas” (p. 4). La influencia que poseen los libros de texto sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje ha motivado que desde la investigación en Educación Matemática se les consideren como objetos de estudios en sí mismos, y que se plantee analizar su calidad como un problema de investigación prioritario (Burgos et al., 2020; Fan et al., 2013; Wijaya et al., 2015).

Los docentes interpretan y actúan como mediadores de los contenidos incluidos en las lecciones de los textos que utilizan, por lo que deben disponer de los conocimientos y competencias necesarias para hacer un uso adecuado de estos recursos teniendo en cuenta las necesidades de sus estudiantes (Kim, 2007). Sin embargo, algunos docentes encuentran dificultades al analizar los libros de texto, no reconocen debilidades de contenido matemático o bien, cuando las identifican, realizan modificaciones inoportunas que alteran su sentido (Braga & Belver, 2016; Yang & Liu, 2019). Ante esta situación, es importante que los programas de formación de profesorado impulsen a cuestionar la calidad de los materiales en base a criterios de evaluación, e incluso, a adaptarlos a sus necesidades. El docente que decida usar un libro de texto debe ser capaz de analizarlos productivamente, adoptando una posición crítica (Braga & Belver, 2016). El análisis didáctico de la lección permite obtener conocimientos didáctico-matemáticos que orientan al profesorado en la toma de decisiones sobre la gestión del texto (Godino et al., 2017). Además, constituye un potente recurso con el que los formadores pueden implicar a los futuros docentes en los procesos de reflexión sobre la complejidad que caracteriza la realidad educativa (Braga & Belver, 2016).

En este artículo se describe el diseño e implementación de una experiencia con estudiantes del Grado de Educación Primaria, centrada en el desarrollo de la competencia de análisis e intervención didáctica por medio del análisis de lecciones de libros de texto. Analizar la calidad de los libros según su capacidad para ayudar al alumnado a lograr los objetivos de aprendizaje, supone un primer análisis profundo que contemple la secuencia de prácticas operativas, discursivas y normativas que propone el autor para el desarrollo del contenido matemático y cómo se contemplan y gestionan los conocimientos previos requeridos. Se trata de que los docentes en formación analicen las situaciones de enseñanza caracterizando los objetos y procesos como elementos constitutivos del contenido matemático (análisis ontosemiótico) a ser aprendido e identifiquen su papel en las posibles dificultades de aprendizaje (identificación de conflictos semióticos).

De modo específico, planteamos las siguientes cuestiones de investigación:

¿De qué forma identifican los docentes en formación las prácticas, objetos y procesos presentes en las distintas configuraciones didácticas de una lección de un libro de texto?

¿Cómo repercute este análisis en el reconocimiento de conflictos epistémicos y cognitivos potenciales presentes en el proceso instruccional planificado?

El contenido escogido para ejemplificar el método de análisis didáctico es la proporcionalidad. A pesar de su importancia tanto longitudinal como transversal a lo largo de toda la etapa educativa obligatoria, la proporcionalidad no suele recibir un tratamiento adecuado en los materiales (Ahl, 2016; Burgos et al., 2020; Shield & Dole, 2013). Así se observa en la mayoría de los textos de matemáticas de primaria, un uso indiscriminado y descontextualizado del algoritmo de la multiplicación en cruz, desprovisto de argumentos sobre las condiciones que permiten aplicar este procedimiento. Esto influye en que la enseñanza implementada en el aula aparezca sesgada hacia el aspecto algorítmico (Lamon, 2007), obstaculizando un adecuado razonamiento proporcional (Fernández & Llinares, 2012). Por tanto, adquiere especial importancia desarrollar en los docentes en formación la competencia para analizar críticamente las lecciones de libros de texto e identificar los elementos potencialmente conflictivos que requieran de una modificación de la trayectoria didáctica planificada en la lección, para lograr un adecuado razonamiento proporcional en los alumnos.

Marco teórico

Para afrontar el desarrollo profesional del profesor de matemáticas, nos posicionamos desde la perspectiva del modelo de categorías de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor de matemáticas (Godino et al., 2017) propuesto por el EOS. El modelo CCDM considera que las dos competencias claves del profesor de matemáticas para abordar los problemas didácticos básicos presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje, son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica. Para desarrollar esta última el docente necesita, por una parte, conocimientos que le permitan describir y explicar lo que ha sucedido en el proceso de estudio y, por otra, necesita conocimientos para valorar el proceso y hacer propuestas de mejora para futuras implementaciones (Godino et al., 2017). Esta competencia global se logra por medio de la articulación de cinco sub-competencias (Figura 1) asociadas a los distintos constructos teóricos y niveles de análisis de los procesos de instrucción propuestos por el EOS (Godino et al., 2017; Pino-Fan et al., 2015): a) análisis de significados globales (identificación de situaciones-problemas y prácticas operativas y discursivas involucradas en su resolución); b) análisis ontosemiótico de las prácticas (reconocimiento de la trama de objetos y procesos implicados); c) gestión de configuraciones y trayectorias didácticas (identificación de la secuencia de patrones de interacción entre profesor, estudiante, contenido y recursos); d) análisis normativo (reconocimiento de la trama de normas y metanormas que condicionan y soportan el proceso de instrucción), e) análisis de la idoneidad didáctica (valoración del proceso de enseñanza y aprendizaje e identificación de potenciales mejoras).

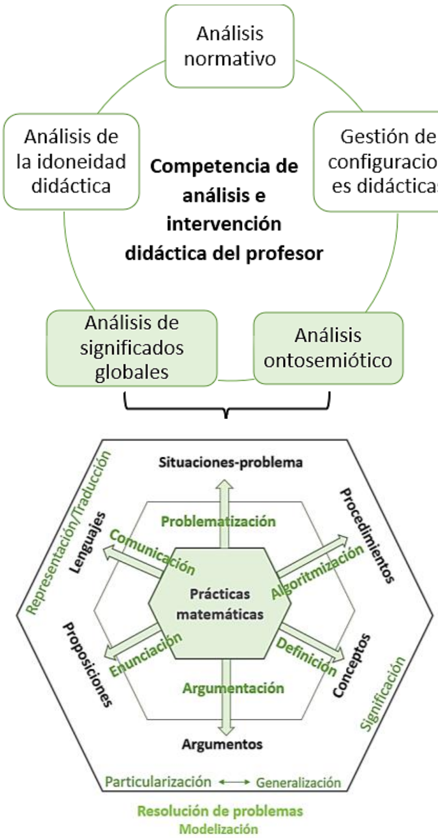
Desde el punto de vista del EOS, el análisis sistemático de una lección de un libro de texto, entendido como proceso instruccional previsto o planificado, requiere tener en cuenta las prácticas matemáticas implicadas en el estudio del contenido abordado y la identificación de la trama de objetos y procesos que estas movilizan. Estos análisis se apoyan en las nociones de significado pragmático y configuración ontosemiótica. Dichas herramientas se han empleado en el campo de la formación de profesores, a través de diversas estrategias y en distintos contextos matemáticos (Burgos & Godino, 2021; Giacomone et al., 2018; Nogueira, 2015).

En los sistemas de prácticas matemáticas, entendidas como acciones realizadas por un sujeto para resolver un problema, comunicar o generalizar su solución, participan y emergen los distintos tipos de objetos matemáticos: *situaciones-problema* (tareas que inducen la actividad matemática), *lenguajes* (expresiones matemáticas; notaciones, símbolos, representaciones gráficas), *conceptos* (entidades matemáticas que pueden ser introducidas mediante definición), *proposiciones* (propiedades o atributos; enunciados sobre conceptos), *procedimientos* (técnicas de cálculo, operaciones y algoritmos), *argumentos* (enunciados requeridos para demostrar las proposiciones o explicar los procedimientos).

El EOS considera *proceso matemático* a toda secuencia de acciones desarrollada durante un cierto tiempo para conseguir un objetivo, normalmente la resolución de un tipo de situaciones-problema o la comunicación de su solución (Godino et al., 2007). Así, los objetos matemáticos, lenguajes, problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, emergen de los sistemas de prácticas mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, algoritmización y argumentación, determinando configuraciones ontosemióticas de prácticas, objetos y procesos. En la actividad matemática tienen una importancia especial los procesos duales de particularización – generalización. Como resultado de un proceso de generalización se obtiene un tipo de objeto matemático que en el EOS se denomina intensivo, el tipo o la regla que genera la clase. Mediante el proceso inverso de particularización se obtiene un objeto extensivo, esto es, que interviene en la práctica matemática como un ejemplar particular. Otros procesos como los de modelización o resolución de problemas, pueden entenderse más como mega procesos, dado que involucran a algunos o varios de los anteriores (Figura 1).

Figura 1.

Competencia de análisis e intervención didáctica y herramientas de análisis



Por *configuración didáctica* se entiende todo segmento de actividad de enseñanza y aprendizaje que se distribuye entre los momentos de inicio y fin de una tarea diseñada o implementada (Godino et al., 2007). Incluye los conocimientos implicados, las acciones de los estudiantes y del profesor y los medios previstos o usados para abordar la resolución de una situación-problema o la introducción de un determinado concepto o procedimiento. La noción de configuración didáctica proporciona criterios para descomponer el proceso de instrucción planificado en la lección de un libro de texto en unidades de análisis. Sobre cada una de estas unidades, el profesor o investigador debe delimitar el sistema de prácticas operativas y discursivas inherentes a los objetos matemáticos involucrados, que determinan su *significado institucional de referencia*.

Para explicar los desajustes en la enseñanza implementada o las posibles limitaciones de los aprendizajes, el EOS introduce la noción de conflicto semiótico, entendido como cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa (Godino et al., 2007). Cuando el desajuste se produce entre significados de tipo institucional (por ejemplo, entre el significado de referencia y el implementado en un libro de texto) se habla de *conflicto epistémico*, mientras que si la disparidad tiene lugar entre el significado manifestado por un sujeto y el de referencia se trata de un *conflicto cognitivo*.

Metodología

Este trabajo sigue un enfoque de investigación interpretativa de tipo exploratorio. Considerando el problema de investigación, el enfoque metodológico sigue las fases propias de una ingeniería didáctica en el sentido que proponen Godino et al. (2014): estudio preliminar, diseño del experimento (selección, secuenciación y análisis a priori de tareas), implementación (observación y evaluación de aprendizajes logrados) y análisis retrospectivo. Además, empleamos el análisis de contenido (Cohen et al., 2011) para examinar los protocolos de respuesta de los estudiantes del Grado de Educación Primaria (EPM en adelante) que intervinieron en la experiencia formativa.

Describimos a continuación el contexto en el que se desarrolló la intervención y parte del análisis a priori de la tarea de evaluación prevista en el diseño del experimento. El análisis didáctico completo de la lección fue realizado por el equipo investigador de manera independiente, y confrontado y consensuado después. Este análisis nos permite ejemplificar el tipo de conocimientos y competencias que esperamos logren los EPM, así como interpretar sus respuestas. La evaluación de los aprendizajes logrados por los EPM se incluye en la sección de resultados.

Contexto y participantes

La experiencia formativa se desarrolló con 61 estudiantes de tercer curso del Grado de Educación Primaria, en el marco de la asignatura Diseño y Desarrollo del Currículum de Matemáticas en Primaria en la Universidad de Granada. Dicha asignatura contempla: el diseño y secuenciación de tareas matemáticas de acuerdo con unos contenidos específicos y a determinadas expectativas de aprendizaje, el uso y análisis del libro de texto como recurso en el aula de matemáticas y la evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

De manera previa a esta intervención, los participantes habían recibido formación (dos sesiones de dos horas) sobre análisis de tareas, significados y tipos de objetos matemáticos en las prácticas matemáticas. Como parte de esta formación los EPM aprenden a analizar prácticas matemáticas, tanto desde el punto de vista epistémico como cognitivo y reconocer en ambos casos los objetos y procesos implicados. En la segunda sesión, centrada de forma más específica en el análisis didáctico de libros de texto se introducen y ejemplifican los tipos de conflictos (epistémicos, cognitivos) sobre una lección de proporcionalidad. Además, se propuso la lectura del documento Burgos et al. (2020), donde los EPM podían encontrar los conocimientos didácticos-matemáticos sobre proporcionalidad[1] más relevantes de cara a identificar potenciales conflictos en la lección, así como un ejemplo del tipo de análisis que debían llevar a cabo en la sesión práctica. En la siguiente sesión (dos horas de duración) los EPM debían realizar en equipo el análisis didáctico de la lección del libro de texto de

[1] La lectura del documento se planteó como apoyo, dado que dichos conocimientos didáctico-matemáticos se habían abordado previamente, tanto al ejemplificar, en el caso de la proporcionalidad, el análisis (de contenido, cognitivo e instrucción) que realizan para fundamentar el diseño de unidades didácticas, como en la sesión dedicada al análisis de lecciones de libros de texto.

González et al. (2015)[2] en cada una de las configuraciones didácticas en las que esta se había descompuesto: magnitudes proporcionales (C1), reducción a la unidad y regla de tres (C2), escalas y mapas (C3). Se indicó a los EPM que, en cada configuración didáctica, debían: 1) describir las prácticas matemáticas, 2) identificar los objetos y procesos matemáticos intervinientes, 3) reconocer los conflictos epistémicos (relativos a los significados y objetos institucionales puesto en juego en la lección) y cognitivos potenciales (conocimientos previos, progresión y grado de dificultad de las tareas) más importantes.

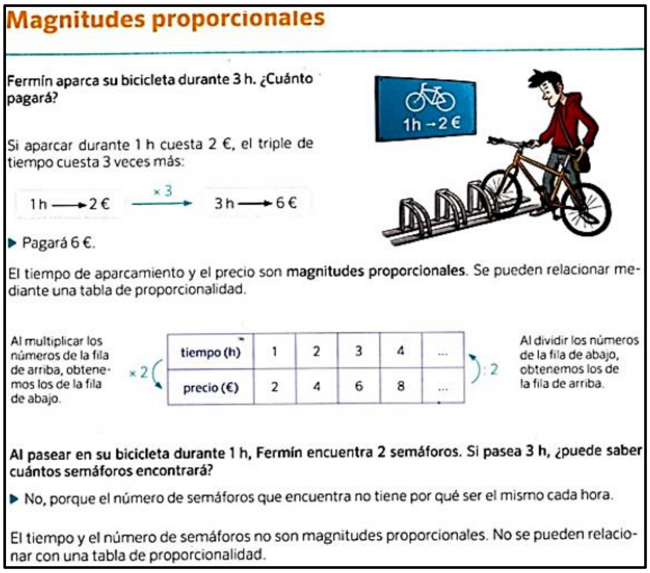
Se dispone de los informes producidos por 14 equipos formados por 4 o 5 EPM. Estos informes fueron entregados a través de la plataforma Prado. Tras la revisión por parte de la investigadora y profesora del grupo, se discutieron los resultados de manera individual con cada uno de los equipos de trabajo (retroalimentación a través de Prado) y de manera general en la siguiente clase, para conocer sus impresiones y dificultades.

Análisis didáctico. Ejemplificación con la configuración C1

En la Figura 2 se muestran las situaciones iniciales propuestas por los autores del libro de texto para introducir las magnitudes proporcionales. Incluimos una descripción de las prácticas matemáticas que hemos identificado en esta configuración.

Figura 2

C1 Magnitudes proporcionales. Fuente: (González et al., 2015, p. 116)



Magnitudes proporcionales

Fermín aparca su bicicleta durante 3 h. ¿Cuánto pagará?

Si aparcar durante 1 h cuesta 2 €, el triple de tiempo cuesta 3 veces más:

1 h ⟶ 2 € $\xrightarrow{\times 3}$ 3 h ⟶ 6 €

▶ Pagará 6 €.

El tiempo de aparcamiento y el precio son **magnitudes proporcionales**. Se pueden relacionar mediante una tabla de proporcionalidad.

Al multiplicar los números de la fila de arriba, obtenemos los de la fila de abajo. × 2

tiempo (h)	1	2	3	4	...
precio (€)	2	4	6	8	...

: 2 Al dividir los números de la fila de abajo, obtenemos los de la fila de arriba.

Al pasear en su bicicleta durante 1 h, Fermín encuentra 2 semáforos. Si pasea 3 h, ¿puede saber cuántos semáforos encontrará?

▶ No, porque el número de semáforos que encuentra no tiene por qué ser el mismo cada hora.

El tiempo y el número de semáforos no son magnitudes proporcionales. No se pueden relacionar con una tabla de proporcionalidad.

Prácticas matemáticas en C1

P1.1Formulación de una situación inicial sobre magnitudes proporcionales

[2] Se escoge dicho texto por ser de uso frecuente en los centros educativos en los que los EPM habían desarrollado sus prácticas y estar a su disposición en la biblioteca de la facultad.

(tiempo de aparcamiento y precio), que lleva a establecer la relación multiplicativa entre sus cantidades y representarla mediante un diagrama.

P1.2 Se afirma que las magnitudes son proporcionales y se construye una tabla de proporcionalidad que permite relacionarlas, identificando en la representación la relación multiplicativa.

P1.3 Formulación y discusión de una situación-problema que involucra magnitudes no proporcionales.

Además de las prácticas matemáticas antes descritas, los autores del libro de texto proponen una secuencia de siete situaciones-problemas que el alumno debe resolver. Estas implican: reconocer magnitudes proporcionales en situaciones contextualizadas, por medio del lenguaje verbal y tabular, respectivamente; completar datos en "tablas de proporcionalidad" asociadas a cantidades de magnitudes directamente proporcionales, averiguando cómo se relacionan las filas (es decir, determinando la constante de proporcionalidad, si bien no se introduce este término); buscar el valor faltante dados otros tres para que las cantidades puedan responder a una situación de proporcionalidad directa; proporcionar un ejemplo de magnitudes proporcionales y crear una tabla de proporcionalidad para representarlas; resolver dos problemas de valor faltante.

La tabla 1 resume los principales objetos y procesos asociados a las prácticas P1.1, P1.2, P1.3 implicadas en la configuración C1.

Tabla 1.

Objetos y procesos en C1

Objetos	Procesos
Situaciones-problema introductorias (identificación de magnitudes proporcionales) y de ejercitación.	*Problematización*: resolución y creación de problemas (inventar dos magnitudes proporcionales y construir una tabla de proporcionalidad).
Lenguaje: simbólico, verbal, icónico, tabular, diagramático.	*Representación/interpretación:* uso de los diferentes tipos de representaciones, conversión del lenguaje natural al tabular.
Proposiciones: si aparcar la bicicleta 1h cuesta 2€, el triple de tiempo cuesta 3 veces más…	*Enunciación*: de proposiciones como "el tiempo de aparcamiento y el precio son magnitudes proporcionales."
Conceptos: magnitud, magnitudes proporcionales, magnitudes no proporcionales.	*Conceptualización*: Se define magnitud ("aquello que se puede medir"). Las magnitudes proporcionales se introducen como dos magnitudes que se relacionan en una tabla de proporcionalidad.
	Generalización: el criterio general de la relación funcional, y = *k*x, se evoca mediante puntos suspensivos en la representación tabular.
	Particularización: de los contenidos teóricos a dos ejemplos de magnitudes
Argumentos: "no tiene por qué ser el mismo cada hora".	*Argumentación*: se basa en "dos magnitudes proporcionales se relacionan en una tabla de proporcionalidad".
Procedimientos: multiplicar, dividir.	*Algoritmización*: fijación de regla para hallar valor faltante por medio del registro tabular.

Como parte del mega proceso de *resolución de problemas* se consideran los procesos matemáticos que el alumnado debe ejecutar con la finalidad de resolver las situaciones que el autor propone: aplicar los conceptos involucrados, interpretar los tipos de expresión y representación utilizados, construir tablas de proporcionalidad y realizar procesos de conversión del lenguaje verbal al tabular, son acciones necesarias para resolver algunas de las actividades. También aplicar tratamientos en el registro numérico para hallar el valor faltante y explicar cómo se relacionan las cantidades de magnitudes (sólo en la actividad 19; Figura 3). Así, las situaciones propuestas implican la conceptualización, enunciación, argumentación, representación y algoritmización. Además, dado que el autor particulariza la presentación de los contenidos teóricos a ejemplos específicos de magnitudes, el alumno debe *generalizar* las definiciones y propiedades a otros casos. Por ejemplo, la descripción que se hace de magnitudes proporcionales queda restringida al caso particular de "tiempo de aparcamiento" y "precio a pagar"; se muestra cómo se relacionan algunas cantidades de estas magnitudes en una tabla de proporcionalidad, pero no se llega a dar una definición general para este término (Figura 2). También se puede asociar el proceso de generalización al reconocimiento de patrones numéricos entre las cantidades de magnitudes implicadas en los problemas. Finalmente, en la actividad 21 (Figura 3), el alumno debe indicar dos magnitudes proporcionales y asignarles valores numéricos específicos (*particularización*).

Figura 3.

Actividades 19 y 21 propuestas. Fuente: (González et al., 2015, p.117)

19 Copia y completa estas tablas de proporcionalidad.

a)

n.º de gafas	1	2	•••	4	5	6	•••
n.º de cristales	•••	4	6	•••	•••	•••	14

b)

n.º de arañas	•••	10	•••	•••	25	30	35
n.º de patas	•••	80	120	160	200	•••	•••

¿Cómo se relacionan las filas de cada una de las tablas?

21 **Encuentra un ejemplo de dos magnitudes proporcionales y construye la tabla de proporcionalidad.**

A continuación, se enumeran los conflictos epistémicos y cognitivos esenciales identificados por los autores de este artículo en C1, si bien podrían incluirse otros.

Conflictos epistémicos en C1

CE1.1. No se establece una definición clara y general de magnitudes proporcionales. La descripción se particulariza a los ejemplos introductorios.

CE1.2. No se considera la relación funcional $y=kx$, ni se introduce la constante de proporcionalidad. La única referencia al carácter general de la relación de proporcionalidad viene tímidamente establecida por el uso de puntos suspensivos en la representación tabular.

CE1.3. Puede ser confuso el uso de puntos suspensivos para indicar por un lado que la serie de números continúa en la representación tabular del ejemplo introductorio y posteriormente para representar el valor faltante en las situaciones.

CE1.4. Los convenios de representación de la relación de proporcionalidad mediante una tabla bidimensional y los diagramas indicativos de la relación multiplicativa precisan explicación. El papel dado al registro tabular, puede llevar a pensar que la presencia de una tabla bidimensional supone la existencia de una relación de proporcionalidad.

CE1.5. Algunas proposiciones son imprecisas; al enunciar que "al multiplicar los números de la fila de arriba, obtenemos los de la fila de abajo", el autor no indica el número por el que se deben multiplicar, que debe ser el mismo siempre, ni su significado: la constante de proporcionalidad (Figura 2).

CE1.6. Al no establecerse las proposiciones suficientes y necesarias para distinguir una situación proporcional, se deben asumir relaciones de proporcionalidad que no se especifican, como sucede en la tarea 22 (Figura 4) en la que debe aceptarse que "cada cuarto del queso cuesta lo mismo".

Figura 4.

Actividad 22 propuesta al alumnado. Fuente: (González et al., 2015, p.117)

CE1.7. La comprobación de la proporcionalidad entre dos magnitudes se limita a verificar la relación "entre filas y columnas" en una tabla, por lo que no se promueve la flexibilidad en los razonamientos ni la justificación en base a las propiedades que caracterizan la relación lineal.

Conflictos cognitivos potenciales en C1

CC1.1. No se vincula con conocimientos previos relativos a números racionales (fracciones, equivalencia de fracciones) ni a medida (magnitud, cantidad de magnitud).

CC1.2. Falta progresión en el grado de dificultad de las tareas.

Incluimos en Anexos las prácticas, objetos, procesos y conflictos identificados por los autores en las configuraciones C2 (Anexo1) y C3 (Anexo2).

Resultados

Esta sección incluye los resultados de la evaluación del análisis didáctico que han realizado los EPM (14 equipos de 4 o 5 integrantes cada uno). Para intentar responder a las cuestiones de investigación, analizamos en primer lugar la identificación de prácticas, objetos y procesos matemáticos y, en segundo lugar, los conflictos semióticos descritos por los participantes.

Análisis ontosemiótico de las configuraciones didácticas

El análisis de contenido de los informes muestra que, en general, los participantes hicieron un reconocimiento adecuado de las prácticas matemáticas, si bien prestaron más atención a las prácticas de tipo operacional que a las de tipo discursivo. En C2 y C3, nueve equipos identificaron correctamente todas las prácticas y de estos, cuatro equipos también lo hicieron en C1. En esta configuración, la práctica identificada mayormente (por once equipos) fue P1.2 (construcción de una tabla de proporcionalidad para la situación inicial) y la menos identificada (sólo 4 equipos) fue P1.3 (justificación de la no proporcionalidad entre magnitudes en base a que no se relacionan por medio de una tabla de proporcionalidad). En C2 la práctica que más reconocieron (12 equipos) fue la descripción de pasos en la reducción a la unidad y la menos identificada fue la explicitación del valor faltante.

Después de identificar las prácticas, los EPM debían indicar los conceptos, lenguajes, procedimientos, proposiciones y argumentos implicados en las mismas. En la Figura 5 se incluye la nube de objetos reconocidos por los participantes, en la que los tamaños de las letras son proporcionales a la frecuencia de cada término referido. En general, los EPM describieron adecuadamente las distintas situaciones-problema de la lección (tanto las de iniciación, como las propuestas para ejercitación o aplicación), la mayoría de los lenguajes, conceptos y procedimientos. Sin embargo, ningún equipo mencionó proposiciones o argumentos (ni explícitos ni implícitos) en las configuraciones. De manera más específica, comparando con los objetos identificados por el equipo investigador para cada configuración (ver Tabla 1 para C1) se observa que los objetos matemáticos identificados en C1 por la mayoría de los equipos corresponden a las situaciones-problema (13 equipos), la representación tabular (todos los equipos), los conceptos de magnitud y magnitudes directamente proporcionales (9 y 10 equipos, respectivamente) y los procedimientos aritméticos (10 equipos). Los menos identificados corresponden a la representación icónica y el concepto de magnitudes no proporcionales (sólo dos equipos en cada caso). En la configuración C2, todos los equipos de EPM identificaron situaciones, procedimientos ("regla de tres" y "reducción a la unidad") y representación tabular de forma correcta. Sin embargo, menos de la mitad de los equipos reconocieron las representaciones fraccionaria, icónica y diagramática como objetos lingüísticos. Finalmente, en C3 los objetos mencionados correctamente con mayor frecuencia fueron las situaciones-problema de iniciación y aplicación (11 equipos), el concepto de escala (12 equipos), el procedimiento de conversión de unidades (8 equipos) y la representación gráfica (12 equipos). Sin embargo, sólo dos equipos de los 14 mencionaron la representación simbólica como objeto lingüístico.

Figura 5.

Nube de objetos matemáticos identificados por los EPM.

En las prácticas matemáticas, los objetos matemáticos emergen y se relacionan a través de procesos que se espera que los futuros docentes también puedan reconocer. En general, se observa que aquellos equipos que hicieron una mejor identificación de los objetos también fueron los que reconocieron de manera pertinente una mayor variedad de procesos. Entre los procesos que identificaron mayoritariamente los EPM se incluyen:

- *Conceptualización.* Doce equipos indicaron en C1, como E7, la presencia de conceptualización: “la configuración tiene por objetivo presentar una definición de magnitudes directamente proporcionales y no proporcionales, utilizando un ejemplo”, y otros diez en C3, de manera similar a E6, “el capítulo tiene como objetivo presentar una definición clara de escala y de la proporcionalidad de la escala 1:50.000 con el mapa y la realidad”.
- *Representación-Interpretación*. Todos los equipos mencionaron este proceso en las configuraciones C1 y C2 y siete lo hicieron en C3. Consideraron frecuentemente

la "elaboración de tablas de proporcionalidad" o la "conversión del lenguaje natural al tabular y conversión de la tabla de proporcionalidad a equivalencia de fracciones" (E4).

- *Algoritmización.* Siete equipos la mencionaron en C1, como E10:

> Se fija un tipo de regla para obtener datos de una tabla que sean proporcionales, multiplicar el de arriba o dividir el de abajo, siempre por el mismo número, para que sea proporcional, como viene dado en el ejemplo de la bicicleta, con las horas y los euros.

Doce equipos lo indicaron en C2, apreciando como E7, "regulación de los pasos que componen el algoritmo de la regla de tres y la reducción a la unidad".

Recordemos al respecto que los EPM reconocieron con frecuencia el registro tabular como objeto matemático y los procedimientos de reducción a la unidad y regla de tres. Los procesos matemáticos más olvidados en el análisis fueron los de problematización, argumentación y particularización. Sólo tres equipos mencionaron la problematización en C1, y dos en C2 ("la actividad 27 es en parejas, en la cual hay que seguir las tres indicaciones que se dan e inventar y resolver una actividad relacionada con la proporcionalidad", E13). La argumentación apareció mencionada únicamente en C1 (cinco equipos). Al respecto notemos que ningún equipo identificó los argumentos empleados de manera implícita o explícita en la lección. Así, cuando algún equipo refirió a la argumentación como proceso matemático, señaló cierta explicación o justificación por parte del autor, pero no especificó el argumento empleado. Los equipos que indicaron la particularización (entre dos y cuatro en cada configuración) aclararon, de manera similar a E11, que "la regla general se ejemplifica con un caso concreto al inicio de la configuración". Por otro lado, nueve equipos identificaron el proceso de generalización en la configuración C1. Lo hicieron en el sentido de E7, que estableció que "el carácter general de la relación funcional $y=kx$ se evoca mediante puntos suspensivos", o como E4:

> La interpretación de la tabla de proporcionalidad conlleva un proceso de generalización de la relación de proporcionalidad, es decir, un aumento multiplicativo en una de las filas se corresponde con el mismo aumento multiplicativo en la otra.

Se puede concluir que, en general, los EPM tuvieron más éxito al identificar las prácticas matemáticas que al reconocer los objetos y procesos. La menor pertinencia en el reconocimiento de los objetos y procesos matemáticos asociados justificaría que reconociesen de manera limitada los conflictos epistémicos y cognitivos en la lección.

Identificación de conflictos semióticos

El análisis de los informes de los EPM muestra que gran parte de los conflictos identificados en el análisis a priori por el equipo investigador pasaron inadvertidos para los participantes. Sin embargo, debemos mencionar que los EPM describieron algunos conflictos epistémicos y cognitivos importantes en las distintas configuraciones. En C1, los conflictos más frecuentemente mencionados (por 11 equipos) refieren a la falta de definiciones claras de conceptos esenciales como los de magnitudes proporcionales y constante de proporcionalidad (CE1.1, CE1.2). Por ejemplo, E8 indicó:

> Se da por conocida la definición de magnitudes proporcionales, magnitudes no proporcionales… No se hace explícito que la razón entre las cantidades que se corresponden debe ser siempre la misma: constante de proporcionalidad.

Cuatro equipos indicaron la falta de especificación de las condiciones que garantizan la relación de proporcionalidad en las actividades propuestas (CE1.6). Por ejemplo, E7 indicó en relación con la actividad 22 (Figura 3) que "el alumno debe suponer por sí solo que las cuatro porciones en las que se ha dividido el queso son proporcionales, es decir, tienen el mismo tamaño y por lo tanto el mismo precio" (no explicitación de la condición de regularidad).

Cinco equipos reconocieron adecuadamente la ausencia o inexactitud de explicaciones y argumentaciones sobre los procedimientos (CE1.7):

> no se razona la relación entre magnitudes ni el procedimiento, por lo que no existe justificación. Tampoco se da explicación del porqué del proceso de multiplicación o división dentro de la tabla, es un proceso mecanizado. En el último problema se expone la respuesta, pero tampoco se da la explicación del por qué eso es así, como afirman (E3).

Sólo E7 y E10 indicaron además la poca pertinencia del lenguaje, ambigüedad de las proposiciones y falta de conexión con el bloque de aritmética y de magnitudes. Ningún equipo mencionó como conflicto la imprecisión de algunas proposiciones. Por ejemplo, el autor indica que "al multiplicar los números de la fila de arriba, obtenemos los de la fila de abajo", sin precisar cuál es el número por el que se deben multiplicar, que debe ser el mismo siempre, ni su significado: la constante de proporcionalidad.

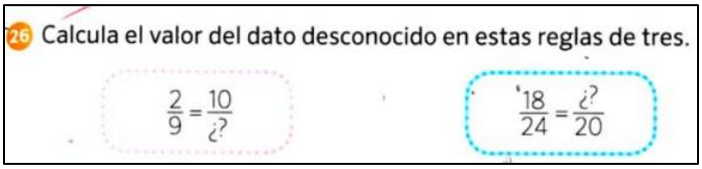
En la configuración C2, destinada a introducir y explicar los procedimientos de reducción a la unidad y regla de tres, diez equipos indicaron, de manera similar a E3, la falta de justificación sobre dichos procedimientos:

> se comparan dos procesos [procedimientos] distintos, regla de 3 y reducción a la unidad, del mismo ejemplo, sin justificación del por qué se pueden llevar a cabo, pudiendo llevar al alumnado a confusión en cuanto a que ambos procedimientos siempre sean aplicables (E3).

E7 fue bastante preciso al señalar que "la expresión dividimos entre 2, es decir, reducimos a la unidad, puede dar a entender al alumno que para reducir a la unidad siempre se divide entre 2", y que "se asocia incorrectamente el término de regla de tres a una ecuación proporcional en la tarea 26" (Figura 6).

Figura 6.

Actividad 26 propuesta al alumnado. Fuente: (González et al., 2015, p.119)



Además, cinco equipos apreciaron la carencia de explicación en el tratamiento y conversión entre las representaciones empleadas y la poca pertinencia de algunas de estas. Sin embargo, ningún equipo mencionó que no se analicen qué condiciones (regularidad) deben cumplirse en los problemas para que el modelo de proporcionalidad directa sea aplicable.

Únicamente cinco equipos indicaron conflictos epistémicos en C3; tres de ellos señalaron convenientemente la falta de representatividad en las situaciones propuestas y dos apuntaron a que el autor no incluye una definición general de escala, sino que la particulariza a un caso específico. Tampoco observaron que la falta de conexión con la relación de proporcionalidad entre magnitudes impide justificar en base a ésta los procedimientos que involucran la aplicación de escalas.

La mayoría de los equipos mencionaron algún conflicto de tipo cognitivo en las diferentes configuraciones. En concreto: once equipos consideraron que no se conectan o recuerdan conocimientos previos relativos a fracciones, números racionales o medida (CC1.1) en C1; seis equipos consideraron que los alumnos podrían tener dificultades en el trabajo con fracciones y en las conversiones entre el registro tabular y la representación fraccionaria durante la lección; trece equipos indicaron en C3 que se suponen conocidas las unidades de medida o las conversiones entre éstas y que se asume que el alumno, sin recuerdo adicional, conectará escalas con magnitudes. Respecto al nivel de dificultad de algunos contenidos, tres equipos comentaron que la ausencia de relaciones de divisibilidad entre los términos o bien el empleo de números no enteros podían suponer dificultad al alumno (CC1.2), aspecto ampliamente confirmado en estudios relacionados con la proporcionalidad (Lamon, 2007; Karplus et al., 1983). Por ejemplo, para E14 puede que "en algunos problemas como los de la segunda página sea difícil llegar a la reducción de la unidad… algunas cantidades no son múltiplos". Además, E3 y E10 echaron en falta que no se fomente el uso de diversas estrategias de solución ("el uso de las tablas de proporcionalidad es la única estrategia ofrecida y en la mayoría de los ejercicios piden trabajar con las tablas evitando descubrir otras estrategias", E10).

Para apreciar cómo repercute el análisis de prácticas, objetos y procesos en el reconocimiento de conflictos epistémicos y cognitivos potenciales presentes en el proceso instruccional planificado en la lección, observamos por un lado que los equipos que identificaron de forma más apropiada los objetos en toda la lección fueron E5, E7 y E3 (reconocieron correctamente varios objetos de la mayoría de los tipos en las tres configuraciones). Por otro lado, aquellos que describieron los procesos en toda la lección de forma más pertinente fueron E5, E7 y E10. Además, los equipos E7 y E10 fueron junto a E13, aquellos que tuvieron mayor éxito en la identificación de conflictos epistémicos (siendo E7 y E10 los que localmente mejor lo hicieron en C1 y C2). Así parece deducirse cierta relación entre el grado de éxito en la identificación de procesos y de conflictos epistémicos. Sin embargo, respecto a los conflictos cognitivos, los equipos que realizaron un mejor análisis de éstos (E9, E11, E14) realizaron una identificación de objetos adecuada (varios objetos de todos los tipos en C1, pero sólo alguno de cada tipo en C2 y C3), aunque no así de procesos. Esto puede venir explicado porque los conflictos cognitivos identificados tienen más carácter conceptual o procedimental que procesal. Además, los EPM expresaron en la puesta en común tener mayores dificultades para comprender la naturaleza de los procesos matemático y reconocerlos en las prácticas.

Conclusiones

Para garantizar que los docentes dispongan de criterios que les permita realizar un uso adecuado de las lecciones de libros de texto, los programas de formación deben asumir la responsabilidad de promover en los futuros docentes el desarrollo de conocimientos y competencias para el análisis didáctico de lecciones de libros de texto (Burgos et al., 2020). Con este compromiso, el objetivo de este trabajo ha sido describir el diseño, implementación y resultados de una acción formativa con estudiantes del Grado de Educación Primaria orientada a proporcionar a los futuros docentes una herramienta teórico-metodológica para el análisis didáctico de la lección de un libro de texto. La identificación de las prácticas, objetos y procesos implicados en la trayectoria didáctica planificada por medio de la lección permite al profesor identificar potenciales conflictos con el propio contenido matemático o con los conocimientos previos o requeridos, que pudieran mermar la progresión del aprendizaje por parte de los estudiantes.

De nuestros resultados se deduce que los participantes reconocieron de manera adecuada las prácticas matemáticas, teniendo más éxito en la identificación de las prácticas operativas que en las discursivas. Identificaron la situación-problema que induce la actividad matemática en un contexto de proporcionalidad, pero no llegaron a describir otros objetos, como son las proposiciones y argumentos, que se requieren o emergen de dichas prácticas a través de los respectivos procesos matemáticos. En consonancia, la identificación de conflictos, especialmente aquellos referentes a aspectos epistémicos y cognitivos específicos de la proporcionalidad o su tratamiento no fue suficientemente satisfactoria. De manera general, los conflictos cognitivos que indicaron con más frecuencia corresponden a la falta de atención a los conocimientos previos requeridos, mientras que, entre los conflictos epistémicos más habituales destacaron la ausencia o poca claridad de las definiciones y la falta de justificación de los procedimientos. Consideramos importante que los futuros docentes identifiquen estas carencias en las lecciones, dada la importancia que tiene la argumentación para lograr una adecuada comprensión conceptual (Lin, 2018) y la necesidad de desarrollar espacios para que los alumnos discutan, modelicen y argumenten sobre relaciones y propiedades de la proporcionalidad.

No identificar de manera conveniente los conflictos semióticos en la lección limita la toma de decisiones sobre la gestión del recurso. En una sesión posterior de trabajo, que por limitaciones de espacio no hemos descrito en este artículo, los mismos equipos debían indicar los cambios que introducirían para resolver los conflictos identificados y mejorar el proceso de estudio planteado en la lección del libro de texto. En este sentido, las propuestas de mejora de los EPM con relación a los conflictos cognitivos contemplaban recordar los conocimientos previos necesarios de manera previa, mientras que, en el aspecto epistémico, sugerían incorporar más definiciones, ejemplos y problemas. Los EPM esperan una "presentación adecuada del objeto matemático en el libro de texto" (Yang & Liu, 2019, p. 8).

Una posible causa de las limitaciones encontradas por los EPM puede deberse a un conocimiento didáctico-matemático deficiente en relación con la propia naturaleza de los objetos y procesos matemáticos o del contenido, en nuestro caso la proporcionalidad, que les impida analizar la actividad matemática implicada, los posibles conflictos y su naturaleza. En este sentido, los EPM se mostraron preocupados por su carencia y necesidad de mayor formación en aspectos epistémicos, cognitivos (además de afectivos o instruccionales) del conocimiento didáctico-matemático relativos a un contenido concreto, en este caso la proporcionalidad, para poder valorar sus procesos de enseñanza y aprendizaje (en particular, los previstos o planificados en lecciones de libros de texto). Sería necesario identificar de manera previa, en futuras implementaciones, cuál es este conocimiento y qué entienden realmente los EPM por objetos como proposición y procesos como enunciación o generalización-particularización.

Los profesores no están acostumbrados a cuestionar la naturaleza del conocimiento académico incluido en los libros de texto (Braga & Belver, 2016). Tienden a hacer una descripción general de los materiales curriculares y considerar escasamente elementos didáctico-matemáticos al proponer mejoras de los procesos instruccionales analizados (Beyer & Davis, 2012). Por ello, es importante analizar qué estrategias de formación mejoran las críticas de los profesores de matemáticas de los recursos educativos, en particular de las lecciones de libros de texto (Yang & Liu, 2019).

De acuerdo con autores como Braga y Belver (2016) para los que el análisis de libros de texto ofrece enormes posibilidades en la formación inicial de profesores, creemos que este tipo de intervención formativa sobre análisis didáctico de una lección de libro de texto permite a los futuros docentes reflexionar sobre aspectos importantes que afectan a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, desarrollando su competencia para el análisis e intervención didáctica. El análisis de las prácticas, objetos y procesos es un primer paso necesario para reconocer las disparidades de significado en una lección, sin embargo, los resultados de nuestra investigación muestran que este tipo de análisis no es suficiente para que los futuros docentes puedan identificar con éxito los conflictos semióticos. Se requiere de guías específicas, fundamentadas en los conocimientos didáctico-matemáticos sobre el contenido que se analiza, en nuestro caso la proporcionalidad, para que los docentes puedan llegar a reconocer aquellos aspectos que requieren de tomar decisiones de acción en la práctica efectiva del aula.

Agradecimientos

Trabajo elaborado en el marco del proyecto de investigación: PID2019-105601GB-I00/AEI /10.13039/501100011033 (Ministerio de Ciencia e Innovación), con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía).

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener ningún conflicto de intereses.

Contribuciones de los autores

Conceptualización, M.B, M.J.C, y J.D.G.; metodología, M.B, M.J.C, y J.D.G.; redacción del borrador original, M.B.; redacción, revisión y edición, M.B y M.J.C.; supervisión, J.D.G.

Referencias

Ahl, L. (2016). Research findings' impact on the representation of proportional reasoning in Swedish Mathematics textbooks. *REDIMAT*, *5(*2), 180–204. https://doi.org/10.4471/redimat.2016.1987.

Bel, J. y Colomer, J. (2018). Teoría y metodología de investigación sobre libros de texto: análisis didáctico de las actividades, las imágenes y los recursos digitales en la enseñanza de las Ciencias Sociales. *Revista Brasileira de Educação, 23*(353), e230082. http://dx.doi.org/10.1590/S1413-24782018230082

Beyer, C. J. y Davis, E. A. (2012). Learning to critique and adapt science curriculum materials: Examining the development of preservice elementary teachers' pedagogical content knowledge. *Science Education, 96*(1), 130–157. https://doi.org/10.1002/sce.20466

Braga, G. y Belver, J. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación, 27*(1), 199–218. http://dx.doi.org/10.5209/rev_RCED.2016.v27.n1.45688

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(6), 1893–1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Burgos, M., Castillo, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema, 34*(66), 40–69.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2021). Assessing the epistemic analysis competence of prospective primary school teachers on proportionality tasks. *IJSME, 20*, 367–389. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10143-0

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Routledge.

Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM, 45*(5), 633–646.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), 129–142.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89–105.

Gellert, U., Becerra, R. y Chapman, O. (2013). Research Methods in Mathematics Teacher Education. En K. Clements, A. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education,* (vol. 27, pp. 327–360). Springer International. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_11

Giacomone B., Godino J. D., Wilhelmi M. R. y Blanco T. F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación, 29*(4), 1109-1131. https://doi.org/10.5209/RCED.54880

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127–135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90–113.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *34*(2/3), 167–200.

González, Y., Garín, M., Nieto, M., Ramírez, R., Bernabeu, J., Pérez, M., Pérez, B., Morales, F., Vidal, J., Hidalgo, J. y Moratalla, V. (2015). *Matemáticas. 6 Primaria*. Savia, Ediciones SM.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. (1983). Early adolescents proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 219–233.

Kim, O. K. (2007). Teacher knowledge and curriculum use. En T. de Silva Lamberg y L. R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1114–1121). PME.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 629–668). Information Age Publishing,

Lin, P-J. (2018). The Development of Students Mathematical Argumentation in a Primary Classroom. *Educação y Realidade, 43*(3), 1171–1192.

Nogueira, I. (2015). Análise ontossemiótia de procesos instruccionales de matemática, melhoria de práticas e desenvolvimento profissional docente. *Revista de Estudios e investigación en Psicología y Educación, 6*, 209-2143.

Pino-Fan, L., Assis, A. y Castro, W. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *11*(6), 1429–1456.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME, 19*(1), 71–98.

Seckel, M. J. y Font, V. (2020). Competencia reflexiva en formadores del profesorado de matemática. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 12*(25), 127–144.

Shield, M. y Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(2),183–199.

Wijaya, A., Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, *89*, 41–65.

Yang, K-L., y Liu, X-Y. (2019). Exploratory study on Taiwanese secondary teachers' critiques of mathematics textbooks. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(1), em1655. https://doi.org/10.29333/ejmste/99515

Anexo 1.

Análisis ontosemiótico y conflictos en la configuración C2
Reducción a la unidad y regla de tres. Fuente: (González et al., 2015, p. 118)

Reducción a la unidad. Regla de tres

En un videojuego, Carmen obtiene 10 puntos por cada 2 monedas de oro que encuentra. Si en una partida encuentra 30 monedas, ¿cuántos puntos obtiene?

Para calcularlo tenemos que **reducir a la unidad.**

1.° Escribimos la tabla de equivalencias.

$\times$ ¿?

n.° de monedas	2	30
n.° de puntos	10	¿?

2.° Dividimos entre 2, es decir, reducimos a la unidad.

: 2

n.° de monedas	2	1
n.° de puntos	10	5

: 2

3.° Calculamos el dato que buscamos.

$\times$ 30

n.° de monedas	2		30
n.° de puntos	10	5	150

También podemos calcularlo mediante la **regla de tres.**

Si conocemos 3 términos, podemos calcular el cuarto así:

1.° Escribimos los datos de esta manera:

n.° de monedas n° de puntos

$$\frac{2}{30} = \frac{10}{¿?}$$

¿? representa el dato que queremos calcular.

2.° Multiplicamos los datos conocidos que están en cruz.

n.° de monedas n.° de puntos

$$\frac{2}{30} = \frac{10}{¿?}$$

$30 \times 10 = 300$

3.° Dividimos el resultado entre el número que no hemos utilizado aún.

n.° de monedas . n.° de puntos

$$\frac{2}{30} = \frac{10}{¿?}$$

$300 : 2 = 150$

Por tanto, el valor del dato que queremos calcular es:

$30 \times 10 : 2 = 150$

▶ Carmen ha obtenido 150 puntos.

Prácticas matemáticas

P2.1 Descripción de pasos a seguir en el procedimiento de reducción a la unidad y aplicación en situación contextualizada de valor faltante.

P2.2 Descripción de pasos a seguir en el procedimiento de regla de tres (escribir los datos como fracciones equivalentes, multiplicar en cruz, dividir el resultado entre el número que no se ha usado) y aplicación para resolver la misma problemática.

Tabla 2.

Objetos y procesos en C2

Objetos	Procesos
Situaciones de iniciación y ejercitación (valor faltante) de proporcionalidad directa.	*Problematización*: resolución y creación de problemas (encontrar dos magnitudes proporcionales y asignar valores numéricos).
Lenguaje: verbal, fraccionario, simbólico, icónico, tabular, diagramático.	*Representación/interpretación*: se usa el lenguaje natural, diagramático y simbólico para describir los algoritmos, conversión del lenguaje natural al tabular y al fraccionario.
Proposiciones: "Carmen ha obtenido 150 puntos".	*Enunciación*: "los métodos de reducción a la unidad y la regla de tres sólo se pueden aplicar cuando hay proporcionalidad entre las magnitudes".
Argumentos: no explícitos.	*Argumentación*: la justificación se basa en la aceptación de que los métodos de reducción a la unidad y regla de tres se aplican en situaciones de proporcionalidad directa.
Procedimientos: multiplicar, dividir, reducir a la unidad, regla de tres.	*Algoritmización*: regulación de los pasos para hallar el valor faltante mediante los algoritmos de reducción a la unidad y regla de tres.
	Particularización: la regla general que describe los procedimientos se ejemplifica con el caso particular del videojuego

Conflictos epistémicos en C2

CE2.1. El algoritmo de reducción a la unidad se asocia a la demediación ("dividimos entre dos, es decir, reducimos a la unidad") y no se introduce el valor unitario. En el procedimiento de regla de tres, no se explica por qué son iguales las fracciones, o por qué se resuelve multiplicando "los datos conocidos que están en cruz".

CE2.2. Se usa inadecuadamente el término "regla de tres" en lugar de proporción o fracciones equivalentes.

CE2.3. Es inadecuado el uso de expresiones como "tabla de equivalencia" (para la representación parcial de lo que había denominado tabla de proporcionalidad), "datos que están en cruz" al presentar la regla de tres.

CE2.4. No se analizan qué condiciones deben cumplirse para que el modelo de proporcionalidad directa sea aplicable (regularidad).

Conflictos cognitivos en C2

CC2.1. No reflexionar sobre el carácter proporcional o no de las situaciones puede llevar a los escolares a utilizar modelos lineales en situaciones no pertinentes para su aplicación (ilusión de linealidad).

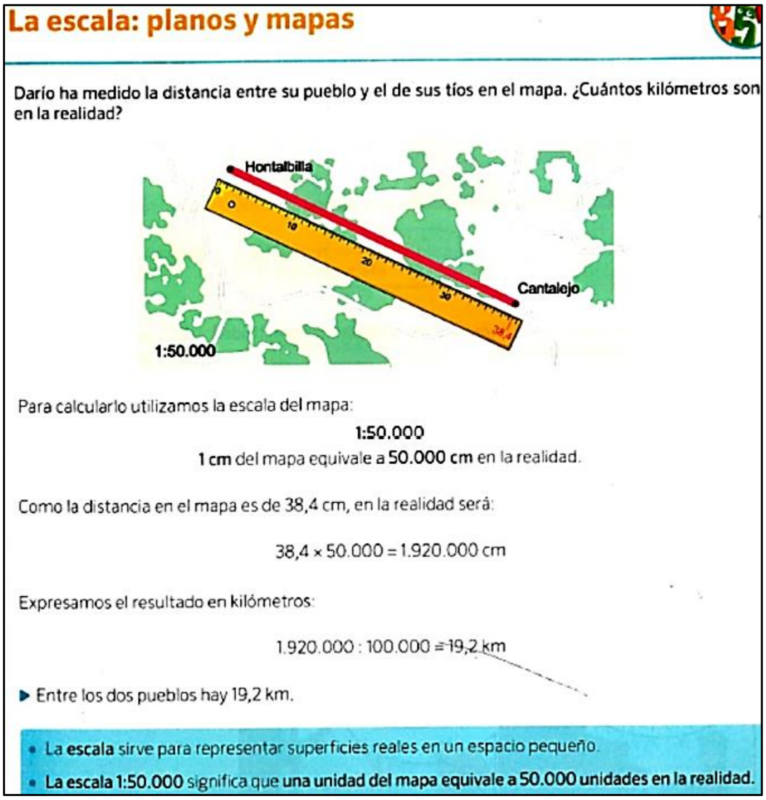
CC2.2. No se contemplan los conocimientos previos necesarios en el trabajo con fracciones.

CC2.3. Falta progresión en el nivel de dificultad de las tareas. En la situación inicial sólo se emplean números enteros mientras en las tareas a resolver se involucran decimales.

Anexo 2.

Análisis ontosemiótico y conflictos de la configuración C3

La escala. Fuente: (González et al., 2015, p.120)



La escala: planos y mapas

Darío ha medido la distancia entre su pueblo y el de sus tíos en el mapa. ¿Cuántos kilómetros son en la realidad?

Para calcularlo utilizamos la escala del mapa:

1:50.000

1 cm del mapa equivale a **50.000 cm** en la realidad.

Como la distancia en el mapa es de 38,4 cm, en la realidad será:

38,4 × 50.000 = 1.920.000 cm

Expresamos el resultado en kilómetros:

1.920.000 : 100.000 = 19,2 km

▶ Entre los dos pueblos hay 19,2 km.

- La **escala** sirve para representar superficies reales en un espacio pequeño.
- **La escala 1:50.000** significa que **una unidad del mapa equivale a 50.000 unidades en la realidad.**

Prácticas matemáticas

P3.1 Interpretación de la distancia en el mapa y aplicación del concepto de escala para abordar la situación inicial propuesta.
P3.2 Conversión de unidades de medidas.
P3.3 Explicitación de la distancia en kilómetros que responde a la situación inicial.
P3.4 Descripción del significado y utilidad de la escala.

Tabla 3.

Objetos y procesos en C3

Objetos	Procesos
Situaciones de ejercitación y aplicación en lectura e interpretación de escalas.	*Problematización:* resolución de problemas sobre obtención y aplicación de escalas.
Lenguaje: verbal, simbólico, icónico, gráfico.	*Representación*: uso de expresiones y representaciones, conversión de la representación como razón de escala al lenguaje verbal.
Proposiciones: 38,4×50.000=1.920.000cm	*Enunciación*: de proposiciones "entre los dos pueblos hay 19,2 km".
Conceptos: escala, medida, distancia.	*Conceptualización:* se define la escala 1:500000.
	Particularización: del concepto de escala a casos específicos.
Argumentos: no explícitos.	*Argumentación*: basada en la definición de escala "como la distancia en el mapa es de 38,4cm, en la realidad será…"
Procedimientos: multiplicar, dividir, conversión de unidades de medidas.	*Algoritmización*: establecer pasos para determinar distancias reales a partir de distancias representadas en un mapa según escala dada; delimitar los pasos para interpretar y construir representaciones gráficas.

Conflictos epistémicos en C3

CE.3.1. El autor no incluye una definición general de escala, sino que la particulariza a 1:500000.
CE3.2. La falta de conexión con la relación de proporcionalidad entre magnitudes impide justificar en base a ésta los procedimientos que involucran la aplicación de escalas.
CE3.3. Uso incorrecto del signo de igual al expresar el resultado de una operación aritmética como medida de cantidad de magnitud "38,4×50.000 =1.920.000 cm".

Conflictos cognitivos en C3

CC3.1. Se suponen conocidas las unidades de medida y las conversiones entre éstas y que el alumno conectará escalas con magnitudes.
CC3.2. Algunas tareas pueden resultar de mayor dificultad al alumno debido a que implican un cambio en el orden de los datos del problema al cual no se ha enfrentado anteriormente.