EL CONCEPTO DE DERIVADA: ALGUNAS INDICACIONES PARA SU ENSEÑANZA

TOMAS ORTEGA DEL RINCON
MODESTO SIERRA VAZQUEZ

RESUMEN

En el presente trabajo presentamos sucintamente algunos de los organizadores del tópico de derivada: el desarrollo histórico del concepto, concepciones de los alumnos, propuestas didácticas y, un poco más extenso, el contenido matemático, con la intención de facilitar el trabajo del profesor en el aula.

ABSTRACT

In the present paper we will summarize several aspects of differential function -the history of the concept, student preconceptions, ideas for presenting the concept in the classroom and, in greater depth, the mathematical content- with a view to aiding teachers in a classroom situation.

PALABRAS CLAVE

Concepto de derivada, Concepciones de alumnos, Evolución histórica del conocimiento Matemático.

KEYWORDS

The concept of derivative, Pupil' conceptions, Historical development of Mathematical knowledge.

1. INTRODUCCION

Es bien sabido por los profesores que la enseñanza de los principios del cálculo es bastante problemática. Se consigue, en general, en el Bachillerato que los alumnos resuelvan de modo más o menos mecánico algunos cálculos con límites, derivadas e integrales, pero en cuanto se hurga un poco en la comprensión de los estudiantes nos damos cuenta de que algo falla, de que no existe una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos del Análisis. Este hecho, suficientemente conocido por los profesores, está confirmado en numerosas investigaciones. De acuerdo con Artigue (1995) estas investigaciones muestran también que, frente a las dificultades encontradas, la enseñanza, aunque tenga otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en esencia las competencias adquiridas en este dominio. Este fenómeno se convierte en un círculo vicioso: para obtener niveles aceptables de éxito se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto es, a su vez, considerado por los estudiantes como lo esencial, ya que es lo que se evalúa.

Por otra parte, cuando los profesores reflexionamos acerca de las decisiones a tomar sobre la puesta en práctica de directrices curriculares hay que tomar decisiones que afectan a los objetivos, contenidos, metodología y evaluación. Sin embargo, de acuerdo con Rico

(1997), el grado de generalidad con que aparecen tres de los componentes contrasta con la mayor precisión con que aparecen detallados los contenidos. Esto lleva a la necesidad de definir los *organizadores* del currículo, definidos por Rico (1997) como "aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas".

En este trabajo presentamos sucintamente algunos de los organizadores del tópico derivada: el desarrollo histórico del concepto, concepciones de los alumnos, propuestas didácticas y contenido matemático.

2. DESARROLLO HISTORICO DEL CONCEPTO DE DERIVADA

El concepto de derivada, al igual que el de límite, continuidad o integral, no es un concepto aislado, sino que aparece en Matemáticas ligado a otros conceptos. Aunque en estos momentos la derivada se apoya en el concepto de límite, esto no fue así hasta tiempos recientes; reflexionando y refinando ciertos conceptos es como se ha llegado a la definición actual.

Este estudio, necesariamente breve, cumple varias funciones. En primer lugar pone de manifiesto que el concepto de derivada no se desarrolla de modo aislado sino en conexión con otros conceptos. En segundo lugar muestra el contexto de problemas en los que ha aparecido. En tercer lugar nos hace ver que no se ha desarrollado de modo lineal sino con avances, retrocesos, indecisiones; en fin, nos da cuenta de las distintas concepciones que han aparecido en su desarrollo. Algunas de estas concepciones aparecerán en el aprendizaje de los alumnos.

Para llevar a cabo este estudio nos hemos servido de trabajos generales de historia de la matemática como los de Boyer (1986), Bourbaki (1972) y Rey Pastor y Babini (1985), así como de algunos trabajos especializados como los de Boyer (1959) y Cornu (1983).

Como es bien sabido, uno de los primeros antecedentes del concepto de derivada que encontramos en la historia de las Matemáticas aparece en las *Cónicas* de Apolonio de Pérgamo (262-190 a.C.). En el libro II de este tratado, que consta de siete, se puede encontrar un estudio relativo a las tangentes de una cónica y en el V un estudio sobre máximos y mínimos, y trazados sobre tangentes y normales a una sección cónica. Pero, sin lugar a dudas, es Arquímedes (287-212 a.C.) el precursor de los métodos infinitesimales.

Precisamente la lectura de sus obras influyó en el resurgimiento de esos métodos. Según señala De Lorenzo (1971), ante una gran cantidad de cuestiones que surgen tras los trabajos de Galileo en mecánica, astronómicos, arquitectónicos, de navegación y que presentan un fondo común, los matemáticos del siglo XVII se enfrentan al mismo tema de cuadraturas y cubaturas. A comienzos del siglo XVII algunos de los problemas que se tratan de resolver son los siguientes:

i) Encontrar los límites de elementos geométricos (secantes a una curva que pasan por un punto fijo a la curva, polígonos inscritos en un círculo, etc.).

ii) Medir las magnitudes y los elementos "diferenciales" asociados a las curvas y superficies (tangentes, radios de curvatura, asíntotas, máximos y mínimos).

iii) Calcular las formas indeterminadas.

iv) Evaluar el orden de las magnitudes de sumas parciales de series divergentes o de restos de series convergentes.

Los matemáticos de esta época se dedican a resolver estos problemas.

Fermat (1601-1665) crea un método para resolver los problemas de máximos y mínimos. Según señala Boyer (1986) no disponía del concepto de límite, pero su método sigue un camino completamente paralelo al que podemos ver hoy en los libros de texto: ante el problema de dividir un segmento de longitud a en dos segmentos x y $a-x$ cuyo producto $x(a-x)=ax-x^2$ sea máximo, Fermat reemplaza x por $x+e$, de donde: $a(x+e) - (x+e)^2 = ax + ae - x^2 - 2xe - e^2$. Fermat piensa que esto debe ser poco diferente de $ax-x^2$; y, por tanto, $ae - 2xe - e^2 \cong 0$, $a \cong 2x+e$, es decir $a \cong 2x$, de donde $x \cong a/2$.

No habla del paso al límite, su razonamiento es puramente algebraico, pero aquí hay un germen de la noción de límite y de derivada. También aplicó su *método de los valores próximos* a la variable para hallar la tangente a una curva algebraica de la forma $y = f(x)$.

Pero, como es bien conocido, serán Newton y Leibniz los que den un impulso definitivo a la nueva manera de hacer, a la "matemática moderna" de la época.

Newton (1642-1717) tiene una visión cinemática del análisis. En su *De quadratura curvarum*, afirmará

> "No considero las magnitudes matemáticas como formadas por partes todo lo pequeñas que se quieran, sino como descritas por un movimiento continuo. Las líneas son descritas y engendradas, no por yuxtaposición de sus partes, sino por el movimiento continuo de sus puntos; las superficies, por el movimiento de líneas; los sólidos, por el movimiento de las superficies; los ángulos, por la rotación de sus lados; los tiempos, por un flujo continuo; y así sucesivamente".

Newton inventó su *método de fluxiones* en 1671, pero no se publicó hasta 1736. Esta tardanza en la publicación avivó la conocida polémica con Leibniz sobre la autoría en la invención del Cálculo. Su idea es asimilar las cantidades variables a cuerpos en movimiento, las variables x e y son cantidades que van fluyendo, de las cuales salen las fluxiones p y q o velocidades de variación, a las que denotará con las letras punteadas, $\dot{x}$, $\dot{y}$ (duplicando los puntos simbolizaba la fluxión de la fluxión); para ello utiliza, en un principio los infinitamente pequeños, que trata de evitar posteriormente en su obra *De quadratura curvarum,* donde sustituye las cantidades fluentes por la teoría de las llamadas "razones primera y última", hablando de la razón primera de los incrementos nacientes o la razón ultima de incrementos evanescentes, que son de una gran importancia en la historia de la noción de derivada.

La descripción que Rey Pastor y Babini (1985) hacen de este método es la siguiente:

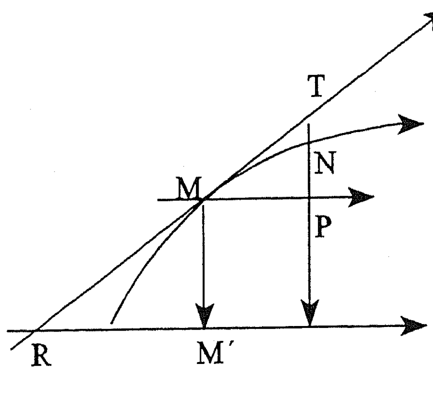

FIGURA 1

"Considera el «triángulo característico» mixtilíneo formado por los incrementos MP, PN y el arco MN que, compara con los triángulos MPN y MPT. Al coincidir N con M, la cuerda y el arco coinciden con la tangente y el triángulo mixtilíneo evanescente MPN en su última forma es semejante al MPT, y sus lados evanescentes MP, PN y MN son proporcionales a los lados del triángulo MPT, de donde las fluxiones de la abscisa, la ordenada y el arco son proporcionales a los lados del triángulo MPT, o lo que es lo mismo, a los lados del triángulo MRM' formado por la ordenada, la tangente y la subtangente. Pero esas fluxiones no son otra cosa que las razones de los incrementos evanescentes" (Rey Pastor y Babini, p. 92).

En palabras del propio Newton,

"Las razones últimas en las que las cantidades desaparecen no son realmente razones de cantidades últimas, sino los límites hacia los cuales las razones de las cantidades decrecientes sin límite se aproximan también, y hacia las cuales pueden aproximarse tanto como cualquier valor dado, pero que no pueden pasarlas o alcanzarlas antes de que las cantidades sean disminuidas indefinidamente" *(Opera Omnia,* citado en Cornu, 1983, p. 46).

Como bien hace observar Cornu (1983), el interés de Newton está en la razón de las cantidades, que se aproxima a un límite cuando las dos cantidades tienden a cero, esto es, la derivada no es una aplicación del concepto de límite sino todo lo contrario, el cálculo de derivadas es el que ha conducido hacia este concepto.

Por su parte Leibniz (1646-1716) desarrolló el cálculo infinitesimal con gran preocupación por la claridad de los conceptos y el aspecto formal de las Matemáticas, lo que le condujo a crear el simbolismo adecuado. Según Rey Pastor y Babini (1985) las consideraciones infinitesimales de Leibniz parten de la consideración del "triángulo característico" de Pascal. Mediante consideraciones sobre ese triángulo y sus semejantes, el de la ordenada y subtangente o el de la ordenada y subnormal, reconoció que los problemas de la tangente y la cuadratura son inversos. En efecto, este triángulo muestra que en el problema de la tangente interviene el incremento, es decir las diferencias de las ordenadas, mientras que en el problema de la cuadratura interviene la suma de las ordenadas, aspecto puramente formal de la cuestión que revela que ambos problemas son inversos. En 1684 escribió una memoria de apenas seis páginas sobre el cálculo diferencial, donde introduce la notación; aparecen las reglas comunes de la diferenciación de expresiones racionales e irracionales y aplica la diferenciación a la resolución de problemas de máximos y mínimos, que distingue según el signo de la segunda diferencial.

En esta época hay que destacar la publicación del primer libro de texto sobre Análisis. Se trata de la obra *Analyse des infiniment petit pour l'intelligence des lignes courbes*, apareciendo como anónimo en 1696 y con el nombre de Marqués de L'Hôpital a partir de 1715. Comprende: Integración, cuadraturas, rectificaciones, ecuaciones diferenciales y aplicaciones geométricas y mecánicas. Hoy está probado que este libro reproduce los apuntes de las clases particulares que Juan Bernoulli impartió a L'Hôpital.

Sin embargo, la oscuridad de las expresiones como cantidades evanescentes, fluentes y el uso de lo infinitamente pequeño desatarán una fuerte polémica entre los matemáticos, siendo el arzobispo Berkeley (1685-1753) con su obra *The Analyst*, el máximo exponente de esta crítica.

También D'Alembert (1717-1783) insistirá, en la misma línea que Berkeley, en que hay que despojar al cálculo de su "metafísica":

> "Quería saber qué idea clara y precisa se puede esperar que surja en el espíritu por una definición parecida. Una cantidad es algo o nada; si es algo, nos se ha desvanecido; si no es nada está desvanecida totalmente. Es una quimera pensar en un estado intermedio entre los dos anteriores" (citado en De Lorenzo, 1971, p. 121).

Para contestar a Berkeley, Maclaurin (1698-1746) escribe su *Teatrise of Fluxions* en el estilo riguroso de los antiguos griegos utilizando un enfoque geométrico; en dicho libro aparece la conocida serie que lleva su nombre.

Euler (1707-1783) publicó los primeros tratados sistemáticos del cálculo infinitesimal, integrando el cálculo diferencial y el método de fluxiones en una rama más general de las Matemáticas que ha recibido el nombre de "Análisis".

Lagrange (1736-1813) en su obra *Thèorie des fonctions analytiques* trata de desarrollar el Cálculo de modo que sea más riguroso, para lo que ensaya desembarazarse de los infinitamente pequeños; desarrollando $f(x)=1/(1+x)$ por la división larga, se obtiene:

$$f(x)= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

Al valor obtenido multiplicamos el coeficiente de x^n por $n!$ Lagrange lo denominó el valor de la función derivada n-sima de la función en el punto $x=0$. Lagrange pensó que por este método había conseguido eliminar la necesidad de infinitesimales o de límites, a pesar de lo cual continuó utilizándolos paralelamente a sus funciones derivadas. Lagrange es uno de los principales artífices en el paso al dominio numérico aplicando posteriormente sus resultados a la geometría y a la mecánica.

Será Cauchy (1789-1857) el que ponga las bases del análisis matemático. Rechazó el planteamiento de Lagrange basado en el desarrollo en series de potencias del Teorema de Taylor, tomando en cambio como fundamental el concepto de límite de D'Alembert, aunque dándole un carácter aritmético que lo hace más preciso. Prescindiendo tanto de la geometría como de los infinitésimos y de las velocidades de cambio, Cauchy formula la definición de límite y a partir de ella la de derivada junto con sus propiedades fundamentales. Para definir la derivada de una función $y=f(x)$ con respecto a x, le da a la variable x un incremento $\Delta x=i$ y forma el cociente

$$\Delta y/\Delta x = (f(x+i) - f(x)) / i$$

y al límite cuando $i \to 0$ lo define como la derivada de y con respecto a x, que es la definición de derivada tal y como la usamos hoy.

3. CONCEPCIONES DE LOS ALUMNOS

Diversas investigaciones se han llevado a cabo en los últimos años para estudiar las concepciones de los alumnos sobre la derivada. Uno de los trabajos pioneros es el de Orton (1983), que trata sobre un concepto subyacente al de derivada como es el de tasa de variación. Recogió respuestas de 110 alumnos (16 a 22 años) a un cuestionario. Los errores más frecuentes que suelen cometer los alumnos son: no saben qué hacer para calcular la tasa de variación en un punto genérico; creen que la fórmula de la derivada de una función en un punto mide la tasa de variación entre dos puntos; no distinguen entre la tasa de variación media y la tasa de variación en un punto referidas a una función lineal puesto que es constante; no asocian la variación negativa o nula con función decreciente y extremos, respectivamente; el significado de ciertos símbolos como dx, dy, dy/dx, Δx, Δy, $\Delta y/\Delta x$ no es claro para los alumnos.

Otras investigaciones que se pueden consultar son las de Maher (1991), Schneider (1992) y White y Mitchelmore (1996)

Entre nosotros, Azcárate (1990) ha llevado a cabo una investigación acerca del proceso de aprendizaje del concepto de derivada de una función, deteniéndose en el análisis de los perfiles cognitivos de los estudiantes y de su evolución a lo largo del proceso de aprendizaje. La descripción de estos perfiles es la siguiente, en resumen de la propia autora (Azcárate, 1996):

i) El perfil *primitivo*, corresponde a los alumnos que no han construido una concepción específica de las nociones de velocidad o tasa instantánea de variación de una función.

ii) El perfil *aproximación*, corresponde a los alumnos que en el caso del concepto de velocidad instantánea, han generalizado su concepción de la noción de velocidad media a la noción de velocidad media entre dos puntos próximos que les sirve ahora para describir de manera aproximada la velocidad en un punto dado. Por analogía han actuado de la misma manera en el caso de la tasa media de variación

iii) El perfil *límite* corresponde a los alumnos que durante la fase de aprendizaje han construido unas concepciones correctas tanto de la noción de velocidad instantánea como de tasa instantánea de variación y, por tanto, resuelven satisfactoriamente situaciones problemáticas.

Durante la investigación, a lo largo de la fase de aprendizaje, se ha producido un desplazamiento desde un gran número de perfiles primitivos a perfiles límites. La existencia del perfil cognitivo aproximación pone de manifiesto, según la autora, la importancia de ofrecer itinerarios didácticos que faciliten la comprensión de los fenómenos que implican un paso al límite.

4. PROPUESTAS DIDACTICAS PARA INTRODUCIR LA DERIVADA

Diversas investigaciones señalan la importancia de trabajar con ciertos conceptos de precálculo como: velocidad media y velocidad instantánea, pendiente de una recta y tasa de variación

Cuántos alumnos saben hacer manipulaciones algorítmicas para el cálculo de derivadas complicadas y en cambio no dominan, ya no el concepto de derivada, sino los conceptos de tasa media de variación o de pendiente de una recta y su significado. Son precisamente los conceptos ligados a la velocidad media y a la tasa media de variación, junto con el paso al límite lo que forma parte de la estructura profunda del análisis matemático. En la obra de Azcárate y colaboradores (1996), *Cálculo diferencial e integral*, se pueden encontrar numerosas actividades para trabajar estos conceptos del precálculo

A continuación se presentan tres propuestas diferentes para introducir el concepto de derivada.

A) La propuesta del *Grupo Cero de Valencia* (1982) (prácticamente la misma que la del *Grupo Zero de Barcelona*) comienza trabajando con la tasa de variación en diversos contextos.

"La tasa de variación es una manera general de indicar lo que de una manera específica se llama unas veces velocidad media, otras tasa de crecimiento anual, otra ritmo de respiración, otras pendiente de una secante, etc.".

A través de dos situaciones problemáticas que va desarrollando en paralelo trata de la tasa de variación instantánea y de la velocidad instantánea, lo que le conduce a afirmar que:

"Los problemas señalados nos conducen a considerar intervalos cada vez más y más pequeños".

Tomando intervalos más y más pequeños aparecen valores que se acercan a un número y entonces es cuando introducen la palabra límite, de un modo absolutamente informal. El límite no se formaliza; solamente al final del libro aparece un breve anexo con la formalización de los conceptos de límite y continuidad. Define la derivada de f en a y la interpreta como la velocidad instantánea en el momento $x=a$, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=a$ y la tasa de variación instantánea justamente cuando $x=a$ de un proceso que se rige por la ley $y=f(x)$. Posteriormente desarrolla el cálculo de derivadas de funciones elementales, máximos y mínimos con problemas de optimización y representación gráfica de funciones.

B) El *School Mathematics Project* (16-19 años) publicado por vez primera en 1990 (usamos la cuarta edición de 1996), es una nueva versión de este proyecto que se va renovando según pasan los años. Consta de varios libros conteniendo cada libro un tópico de Matemáticas o una unidad transversal como puede ser el dedicado a Métodos matemáticos. Los alumnos deben estudiar unos libros u otros según el nivel al que aspiren.

Por lo que se refiere al Análisis hay un libro titulado *Introductory Calculus* donde se trata los conceptos de derivada e integral y sus respectivas aplicaciones.

Se hace una presentación de la derivada sin tratar previamente el concepto de límite. Es un proyecto donde la actividad del alumno es intensa, el alumno aprende matemáticas haciendo Matemáticas y se utilizan calculadoras gráficas o programas de ordenador.

El desarrollo esquematizado es el siguiente:

1. Tasa de variación de una función, considerando distintas situaciones que se organizan mediante una función, estudiando de modo particular el caso lineal.

2. Pendiente de curvas (nótese que esta misma denominación aparece en el currículo oficial en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II)

- Curvas localmente rectas.
- Cálculo de pendientes.
- Gráficas de pendientes.
- Ecuaciones de gráficas de pendientes.
- Encontrando pendientes numéricamente.
- Función pendiente.
- Notación de Leibniz.

Hojas de tareas (no se hacen al final de la lección sino que a lo largo de la misma se van introduciendo estas tareas).

Una de las ideas básicas en esta parte es trabajar gráficas de curvas suficientemente suaves, que en un cierto punto se amplían mediante un *zoom* con la ayuda de un programa informático y considerar que "la pendiente de una curva en un punto es la misma que la pendiente de la tangente de la curva en el punto", tangente que se identifica con la recta a la cual se aproxima la función al ampliarla suficientemente; se ponen contraejemplos en los que se ve que por mucho que se amplíe la gráfica en el entorno de un punto, ésta nunca es una recta.

3. Optimización

- Gráficas y pendientes de gráficas (se introduce el concepto de máximo y mínimo local)

  - Funciones cuadrado y cubo.
  - Problemas de máximos y mínimos.
  - Optimización gráfica

En otro libro que se titula *Mathematical methods* se incluye la regla de la cadena y el cálculo de derivadas.

C) En los programas franceses se utilizan funciones de referencia al tratar de la derivada. Por ejemplo en el libro de texto de Terracher y Ferachoglan (Editorial Hachette, 1995) considera tres aspectos inseparables en la derivación:

- el aspecto geométrico, que conduce en el dominio gráfico a la noción de tangente,

- el aspecto numérico, que pone en juego la aproximación de una función numérica en el entorno de un punto por una función afín: desarrollos limitados de orden 1,

- el aspecto cinemático ligado notablemente al concepto de velocidad instantánea.

Comienza con actividades preparatorias en torno a un tema: la caída libre de un cuerpo, con el objetivo de considerar los tres aspectos anteriores que conducen a introducir la derivación de una función en un punto. Observa que en los tres casos todo gira en torno al cociente $(S(t_0+h) - S(t_0)) / h$ y el límite de este cociente cuando $h \to 0$.

Demuestra a continuación lo que llama teorema fundamental de la derivación en un punto.

"Sea f una función definida sobre un intervalo I y x un elemento de I. Los enunciados siguientes son equivalentes:

(1) La tasa de crecimiento de la función f en x_0 admite un límite cuando $h \to 0$.

(2) Para todo h tal que $x+h$ pertenece a I, se puede escribir $f(x_0+h) = f(x_0) + ah + hw(h)$, con $lim_{h \to 0}\ w(h)=0$".

- Define función derivable en el punto x_0 como la que satisface las condiciones 1 o 2 del Teorema Fundamental.

- Estudia la derivabilidad en un punto de las funciones de referencia:

$$f(x)=x, \quad f(x)=x^2, \quad f(x)=x^3, \quad f(x)=c, \quad f(x)=1/x, \quad f(x)=\sqrt{x}$$

- Interpreta el concepto de derivada en un punto desde los tres puntos de vista: cinemático, gráfico y numérico

- Define la función derivada. Operaciones.

- Derivada del seno y del coseno

- Trabajos prácticos: Curvas y tangentes. Aproximaciones de cuadrados, cubos, cocientes y raíces cuadradas.

Hasta aquí tres maneras diferentes de presentar el concepto de derivada, que pueden ser reutilizadas por cada profesor según su concepción de las Matemáticas y de su enseñanza en el Bachillerato.

5. CONTENIDO MATEMATICO

Es de todos conocido que el currículo de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (MACS) destaca el carácter aplicado por encima del formalismo, proponiendo que las justificaciones, ejemplos, gráficas y explicaciones deben ser la práctica habitual de aula en este bachillerato, mientras que en las Matemáticas de "Ciencias" debe considerarse cierto rigor matemático e introducir a los alumnos en la práctica deductiva. No todos los libros de análisis diferencial coinciden en la definición de los conceptos ni en los procedimientos y, por esta razón, se hará una revisión de los mismos con el objetivo de ser desarrollados en el aula de forma más coherente.

Aunque los conceptos de límite y continuidad, que constituyen la fundamentación del análisis diferencial, aquí no van a ser tratados conviene precisar la orientación de los mismos. En el caso de límite son más interesantes los procesos conceptuales que los algorítmicos y como indican Blázquez y Ortega (1998) en MACS conviene trabajar con una definición más ingenua, que teniendo cierto rigor esté alejada del formalismo. Por otra parte, es la interpretación local de continuidad, que no la puntual, la que permite representar funciones y la que soporta los teoremas fundamentales del análisis.

5.1. La derivada

El funcionamiento del radar de la policía de tráfico es un modelo muy adecuado para introducir el concepto de velocidad instantánea. El radar mide la velocidad media de los vehículos en un tramo muy pequeño y se suele decir que es la velocidad que lleva el vehículo al pasar frente a él y, por tanto, se considera que es una velocidad instantánea. Otro enfoque que debe estar presente en la introducción de este concepto es el epistemológico. Los conceptos no surgen como aparecen en los textos actuales, y su nacimiento y evolución suelen ser fuente de motivación para los alumnos, a la vez que suelen aportar las ideas básicas, que están subyacentes en el propio concepto, y que son las que suelen perdurar.

Los textos definen la derivada de la función f en el punto $x=p$, como $lím_{h\to 0}\ (f(p+h) - f(p)) / h$ ó $lím_{x\to p}\ (f(x) - f(p)) / (x-p)$, después se definen las derivadas laterales, $f'(p^-)$ y $f'(p^+)$, y a continuación se prueba f es derivable en $x=p$ si, y sólo si, $f'(p^-) = f'(p^+)$ y que la derivada en p es este valor.

La terminología cociente incremental es aprovechada por algunos autores para escribir la derivada en $x=p$ mediante el límite de los cocientes incrementales, que se denotan por $\Delta f(x)/\Delta x$ o bien $\Delta y/\Delta x$. Con esta notación, en muchos textos aparecen expresiones como éstas:

$$f'(p) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}\ .$$

$$f'(p) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}\ .$$

Esto no es muy correcto, ya que se iguala una expresión genérica (funcional) con una puntual (numérica). Así no debemos extrañarnos de que los alumnos confundan la derivada en un punto con la función derivada. Se debe indicar a partir de que punto se produce el incremento, identificando en primer lugar tales incrementos. Por una parte, $\Delta f(p)=\Delta y(p)=\Delta y\,|_p=f(x)-f(p)$ y, por otra, $\Delta p=\Delta x\,|_p=x-p$. Si se utilizara la segunda notación de derivada, $\Delta f(p)=\Delta y(p)=\Delta y\,|_p=f(p+h)-f(p)$ y, ahora, es suficiente poner $\Delta x=h$ sin precisar el punto. Por todo lo anterior, en la notación se debe precisar el punto donde se produce el incremento y escribir

$$f'(p) = \lim_{\Delta x\to 0} \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_p = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(p + \Delta x) - f(p)}{\Delta p}$$

Afortunadamente, cada vez aparecen con menor frecuencia expresiones como éstas:

$$f'(p^-) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p-h) - f(p)}{h} \quad \text{y} \quad f'(p^+) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

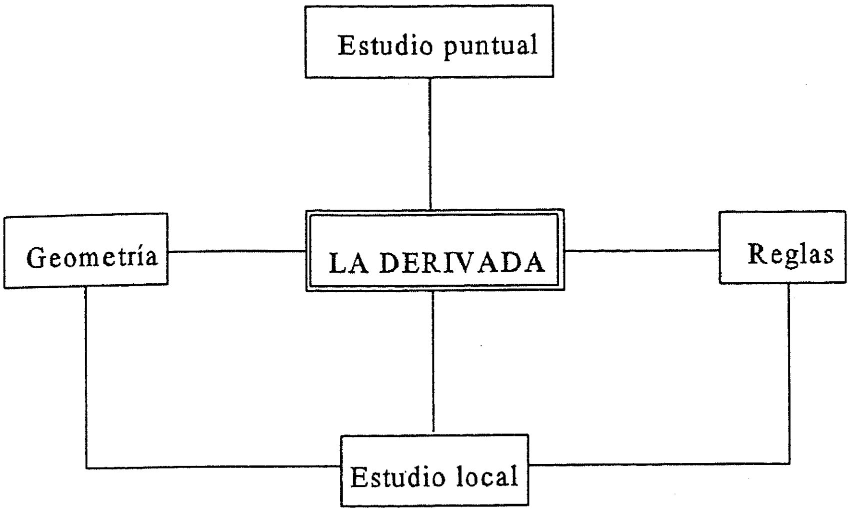

FIGURA 2

En ellas, sin duda, se interpreta como positivo el h que se suma y como negativo el h que se resta, sin tener en cuenta que cuando $h \to 0$ éste puede ser positivo o negativo.

Llegados a este punto conviene pensar el sentido que se quiere dar al estudio de la derivada y la secuenciación de contenidos. Sin duda alguna, lo más indicado es completar un estudio puntual -buscando la relación con la continuidad y con la geometría- para pasar después a un estudio funcional y con él a un estudio local de las funciones.

5.2. Continuidad y Derivabilidad

Establecer que derivabilidad implica continuidad es bien sencillo, pero en la práctica se utiliza el enunciado contrarrecíproco. Sin embargo, los alumnos no estudian Lógica Proposicional y, por tanto, ni saben ni pueden entender que $A \to B \leftrightarrow B' \to A'$ es una tautología. Así pues, hay que enfatizar su equivalencia y cuando se aplique se debe insistir en que si f es "no continua", entonces tiene que ser "no derivable", ya que si fuera derivable, entonces sería continua.

Este teorema, aparentemente inocente, deshace las ambigüedades que se pueden producir por una mala comprensión del teorema de lateralidad y manifiesta, con absoluta claridad, que, por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^2 - 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

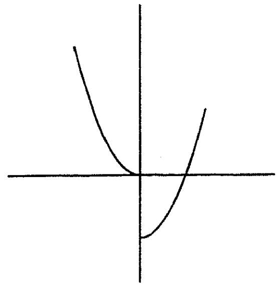

FIGURA 3

no es derivable en $x=0$. Una aplicación errónea del concepto de derivada por la izquierda, en este caso, y de los procesos "derivar y sustituir" o "trazado de tangentes" dan como resultado que "las derivadas laterales son cero" y, por tanto, que la función es derivable en $x=0$ y su derivada es 0". Un ejercicio interesante, a partir de esta función, es escribir los cocientes incrementales laterales.

5.3. Interpretación de la derivada o definición de tangente

Es frecuente que, una vez introducido el concepto de derivada, los libros dediquen un apartado titulado "Interpretación geométrica de la derivada" y con esto expresan el hecho de que la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto. Parece que llegados a este punto, la Comunidad Matemática sabe hallar la tangente a cualquier curva y distingue tangente de secante. Esto no es así, ya que, salvo en las cónicas, no se dispone de ningún criterio para decidir si una recta es tangente a la curva o no. Entonces, ¿cómo interpretar que la derivada en el punto $x=p$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $(p, f(p))$? ¿No debiéramos definir, previamente, el concepto de recta tangente a la curva en dicho punto?

Parece que Pierre de Fermat (1601-1665) al estudiar los lugares geométricos definidos por las ecuaciones $y=x^n$ ($n>0$ "Parábolas de Fermat" y $n<0$ "Hipérbolas de Fermat") y por ecuaciones polinómicas, después, fue el primero que descubrió un método para hallar máximos y mínimos de estas funciones, igualando $f(x)$ con $f(x+h)$. Fermat se dio cuenta de que estos valores están más próximos cuanto "más pequeño" sea h y, para hallar las abscisas de los extremos, resolvía la ecuación que resultaba de igualar a 0 el cociente entre $f(x+h) - f(x)$ y h.

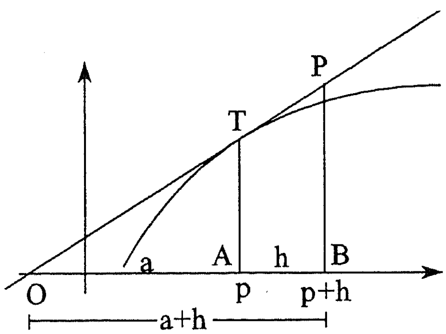

FIGURA 4

Fermat descubrió, también, como aplicar este "Método de los Valores Próximos" para hallar las tangentes a estas curvas. Para determinar la tangente a la curva de ecuación $y=f(x)$ en el punto $T=(a, f(a))$, pensó que, cuando h es pequeño, el punto $P=(a+h, f(a+h))$ estará tan cerca de la tangente, ver la figura 4, que se puede considerar que realmente está sobre ella. Con esta hipótesis los triángulos OAT y OBP son semejantes y, por tanto, $f(p)/a = f(p+h)/(a+h)$. Una sencilla manipulación algebraica transforma esta expresión en $f(p)/a = (f(p+h) - f(p))/h$. Fermat *calculaba* la pendiente de la recta tangente simplificando términos y haciendo $h=0$. Notemos que, en las funciones polinómicas, este proceso calcula la derivada de la función en $x=a$ y, por tanto, en estas funciones, parece natural *definir* la recta tangente a la curva en $(a, f(a))$ mediante la ecuación punto-pendiente.

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

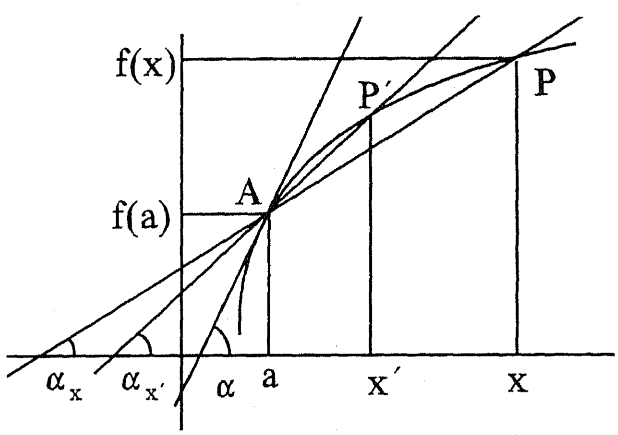

FIGURA 5. *Recta tangente*

Parece natural extender esta definición a las curvas definidas por funciones arbitrarias. La figura 5 representa a una curva arbitraria, definida por la función f. Sobre ella se consideran el punto fijo, $A = (a, f(a))$, y un punto móvil, $P = (x, f(x))$, que se desplaza hacia A siguiendo la curva (por P' se indica otra posición de P). Los puntos A y P determinan rectas, cuyas pendientes vienen determinados por los cocientes incrementales:

$$tan(\alpha_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{y} \quad tan(\alpha_{x'}) = \frac{f(x') - f(a)}{x' - a}$$

Esta situación permite *definir* la tangente a la curva de ecuación $y=f(x)$, en el punto $A=(a, f(a))$, como la recta determinada por el punto A y el punto posición límite de P cuando $x \to a$, cuya pendiente, $tan(\alpha)$, no puede ser otra que $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ y, por tanto, se recupera la ecuación anterior. Ahora, calcular la ecuación de la recta normal a la curva en el punto de abscisas $x=a$ es trivial.

Cuando la función es derivable en $x=a$, la curva tiene tangente y, por tanto, no puede cambiar de dirección con brusquedad en a. ¿Puede ser ésta una buena interpretación geométrica?

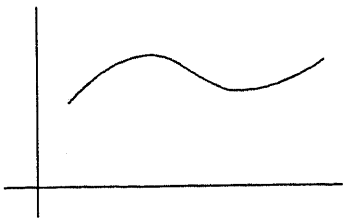

FIGURA 6. *Función derivable*

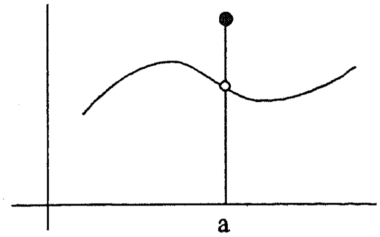

FIGURA 7. *No derivable en a*

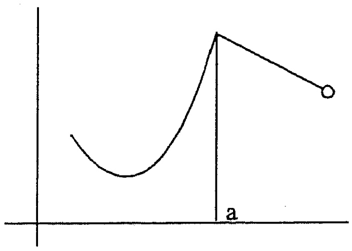

FIG. 8. *No derivable en* a

5.6. La función derivada

El límite del cociente incremental en un punto genérico x es una nueva función, f'. Esta función, f':R→R, permite calcular la derivada de f en todos los puntos donde f'esté definida. Se puede derivar de forma genérica, de nuevo, y así obtener f'', y así sucesivamente. Estas derivadas de orden superior se utilizarán en el análisis local de la función f. Aquí, el carácter genérico del cociente incremental da sentido a la expresión $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

El hecho de que disponiendo de f' la derivada en $x=p$ se halla sustituyendo x por p en $f'(x)$ aconseja buscar reglas de derivación, que permitan obtener las funciones derivadas de las funciones en general. Por otra parte, "todas las funciones que se manejan en Bachillerato" son sumas, productos, cocientes, potencias, raíces, composiciones y recíprocas de las funciones elementales simples. Por tanto, el problema de obtener funciones derivadas se reduciría si se dispusiera reglas para derivar:

- La suma, el producto y el cociente de funciones.
- La función compuesta y la función recíproca.
- Las funciones elementales simples: k, x, x^a, e^x, $ln(x)$ - a^x, $log_a(x)$ - $sen(x)$, $cos(x)$, $tan(x)$, $cot(x)$, $sec(x)$, $csc(x)$, $arcsen(x)$, $arccos(x)$, $arctan(x)$ y $arccot(x)$.

5.7. La diferencial

Considerando la función f y observando la gráfica de la figura 9, es claro que $f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \theta(x)(x-a)$ y que $\theta(x)$ tiende a 0 cuando x tiende a a. Por tanto, cuando x está muy cerca de a, $f(x) - f(a)$ y $f'(a)(x-a)$ son valores que difieren muy poco y, por consiguiente, $f'(a)(x-a)$ es una buena aproximación de $f(x) - f(a)$. Esta aproximación es la diferencial y se suele denotar por

$$df(x) = f'(a)dx,$$

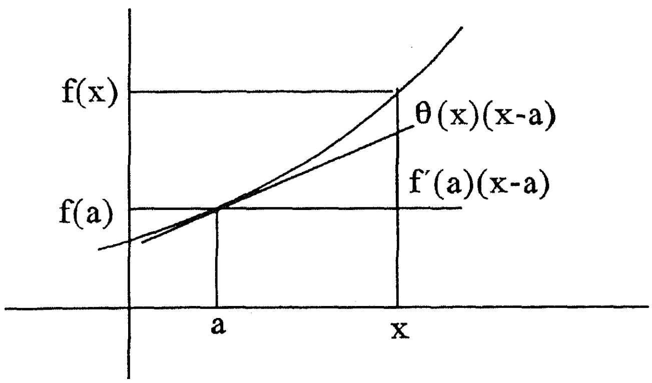

FIGURA 9. *Diferencial*

siendo $dx = x-a$. Esta notación que no es adecuada para los alumnos, ya que ni el primer miembro ni el factor dx expresan su relación con el punto $x=a$. Sería más adecuado escribir

$$df(x)\,|_a = f'(a)dx\,|_a\,,$$

Notemos que la derivada en $x=a$ es el "cociente de esas dos cantidades", que denotamos con una sola barra así:

$$f'(a) = \frac{df(x)}{dx}\Big|_a$$

Este simbolismo permite expresar la función derivada con la notación diferencial,

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

notación muy útil para obtener la regla de la cadena de forma sencilla, suficiente para Bachillerato:

$$[f(g(x))]' = \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

5.8. Algunos enunciados llamativos

Ejemplo 1. Para estudiar la derivabilidad de $f(x) = |x^2 - 2x-3|$ conviene examinar la estructura de la función y tras ello aplicar la teoría general. Concretamente, en este caso se trata de una función compuesta de la función valor absoluto, $h(x) = |x|$, y de la función polinómica $g(x) = x^2 - 2x - 3$. Como ésta es derivable en cualquier punto y $h(x) = |x|$ -que se debiera haber estudiado- no lo es, únicamente, en el punto $x=0$, la función de partida es derivable en toda la recta real salvo, quizás, en los valores de x que anulen a la función $g(x) = x^2 - 2x - 3$. Por tanto, sólo falta estudiar la derivabilidad de la función en las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$, que son: $x = -1$ y $x = 3$.

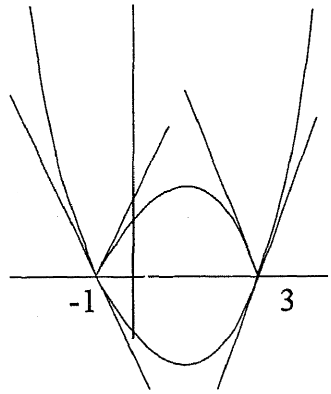

FIGURA 10

Llegados a este punto se suele hacer un estudio analítico de los signos del trinomio para escribirla como una función de varios criterios y se suele olvidar que $g(x) = x^2 - 2x - 3$ es una parábola, ver la figura 10, y que la función valor absoluto cambia el signo de todos los valores negativos (corta, da la vuelta y pega, también a las rectas tangentes), la gráfica de la función es inmediata y, por tanto, la función no es derivable ni en $x = -1$ ni en $x = 3$.

El proceso que suele seguir es perfecto: se calculan las derivadas laterales en $x = -1$ y en $x = 3$ mediante el límite del cociente incremental correspondiente y se aplica el correspondiente teorema de existencia. Sólo una objeción: para eso no es necesario representar la función.

Una vez que se han estudiado las reglas de derivación, el alumno se pregunta por qué, en ejercicios como el presente, no se calculan las derivadas laterales mediante los límites laterales de la función derivada. Así pues, parece más indicado que la propuesta de actividades como la anterior o como las siguientes se hagan tras el estudio de "derivabilidad implica continuidad" y antes de dar las reglas de derivación y si se han dado las reglas, esperar a poder aplicarlas.

Ejemplo 2. A veces se leen cosas como ésta "Calcular las derivadas laterales en $x=0$ de la función $f(x) = x^2sen(x^{-2})$". El autor, sin duda, ha querido escribir la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2\, sen(x^{-2}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

que es continua en toda la recta real.

Ejemplo 3. La función $h(x) = 2xsen(x^{-2}) - 2x^{-1}cos(x^{-2})$, que coincide con la función derivada de la función del ejemplo anterior en R-{0}, no está acotada en $(0,p)$ ni en $(p,0)$ y, por tanto, no se puede calcular $f'(0)$ sino a través del límite de los cocientes incrementales laterales. En efecto, f es derivable en $x=0$ y su derivada es:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\, sen(x^{-2})}{x} = \lim_{x\to 0} x\, sen(x^{-2}) = 0$$

Ejemplo 4. Otros enunciados son tan simplificados que es muy difícil que los alumnos puedan entenderlos:

"Hallar la tangente y la normal a la función $(x-1)^2 + 2(y-2)^2 = 4$ en $x=2$ e $y > 0$".

Convendría explicitar la función e indicar que se trata de hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva definida por dicha función

$$f(x) = \sqrt{\frac{4-(x-1)^2}{2} + 2}$$

Ejemplo 5. Tampoco suelen ser muy claros los problemas en los que se trata de hallar el valor de una función en un punto de forma aproximada, utilizando la diferencial en un punto, sobre todo porque los alumnos no llegan a entender que tienen que calcular la diferencial a partir de un punto concreto y que esto les puede llevar a calcular muchas aproximaciones.

Calcular de forma aproximada $\sqrt[3]{8'5}$ utilizando la diferencial.

Está claro que hay que utilizar la función raíz cúbica, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, pero, como los alumnos tienen calculadora no les importa tomar los puntos $x=8$, $x=8'1$, $x=8'2$ y $x=8'3$, etcétera. Conviene plantear las cuentas para que se percaten de que el cálculo en los tres últimos es inviable -porque aparece la misma raíz-, mientras que es factible evaluarlo, por ejemplo en $2'02^3$ ya que, en este caso, sólo va a ser necesario hallar $2'02^2$ y $2'02^3$, pero no hay que hacer raíces cúbicas.

$$\sqrt[3]{8} \approx d(\sqrt[3]{x})\,|_{8}\,(8'5) = f(8) + f'(8)(8'5-8) = \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}\,(8'5-8)$$

$$\sqrt[3]{8} \approx d(\sqrt[3]{x})\,|_{8'1}\,(8'5) = f(8'1) + f'(8'1)(8'5-8'1) = \sqrt[3]{8'1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{8'1^2}}\,(8'5-8'1)$$

$$\sqrt[3]{8} \approx d(\sqrt[3]{x})\,|_{2'02^3}\,(8'5) = f(2'02^3) + f'(2'02^3)(8'5-2'02^3) = \sqrt[3]{2'02^3} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(2'02^3)^2}}\,(8'5-2'02^3).$$

5.9. Derivada de la función recíproca

El propio título del enunciado es equívoco. Es claro que las funciones se pueden sumar, multiplicar y componer, y que la función en cada caso puede tener elemento simétrico: respecto de la suma siempre y el simétrico de una función dada, *f*, se llama función opuesta, *-f*; respecto del producto no siempre tiene simétrico, pero cuando una función dada, f, lo tiene recibe el nombre de función inversa, $1/f$; y, finalmente, respecto de la composición no siempre tiene simétrico, pero cuando una función dada, f, lo tiene, recibe el nombre de función recíproca, f^{-1}. Seguramente esta notación (algebraicamente $f^{-1} = 1/f$) y el hecho de que la derivada sea la inversa de la derivada ha llevado a denominar y a enunciar mal el "teorema de la función inversa": *la derivada de la función inversa es la inversa de la derivada*, que, sin duda, debiera denominarse y enunciarse así:

Teorema de la Función Recíproca: *La derivada de la función recíproca es la inversa de la derivada.*

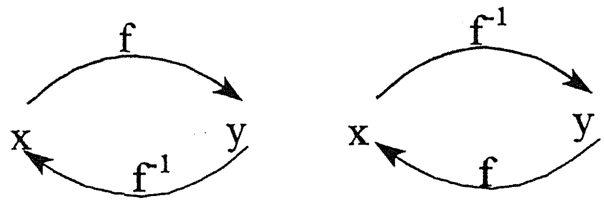

FIGURA 11. *Esquema de derivación*

Normalmente se aplica la regla de la cadena a la composición $f(f^{-1}(x)) = x$ y se obtiene $(f^{-1})'(x) = 1 / f'(y)$, lo que es enteramente correcto. Sin embargo, en ocasiones se hace un esquema, el primero de la figura 11, que no corresponde a la realidad. Cuando se trata de hallar la derivada de una función, por ejemplo, $y = arcsen(x)$ el esquema que se ajusta es el segundo. La función de partida, de la que se quiere hallar la derivada es *arcsen* y, por tanto:

$$(arc\ sen(x))' = \frac{1}{cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

5.10. Bases del estudio local

En este apartado se hace una revisión tanto de los conceptos como de los procedimientos que suelen hacer ciertos textos, que dan como resultado una disparidad de enunciados, en más de un caso, contradictorios.

5.10.1. Crecimiento y decrecimiento

Los textos suelen utilizar las siguientes definiciones de crecimiento y decrecimiento:

1. Una función f *definida en* x=p *y en sus proximidades, es decir, en un entorno de radio* d *de* p *es* creciente *en* x=p *si para todo* h, *tal que* $0<h<d$ *se verifica* $f(p-h) \leq f(p) \leq f(p+h)$.

También se dice que es monótona creciente *y si las desigualdades son estrictas que es estrictamente* creciente.

2. La función f *es creciente en* p *si para todos los puntos de un entorno de* p *se cumple que* $f(x) \leq f(p)$ *si* $x<p$ *y que* $f(p) \leq f(x)$ *si* $p<x$.

A la correspondiente definición le sigue el teorema de caracterización: "f es creciente en $x=p$ si, y sólo, si $f'(p)>0$" y, con la definición 2, se suele dar una demostración inmediata, que aunque matemáticamente es precisa, y formalmente no tiene nada que objetar, parece que contradice la idea intuitiva de crecimiento, ya que no es muy apropiado definir el crecimiento en un punto como si se tratara de una medida. Cuando se talla a un niño se obtiene una medida y para ver que el niño esta creciendo hay que comparar dos mediciones y, así, ver si ha crecido en un intervalo de tiempo, pero en un instante no crece. En otro orden de cosas, la justificación que hacen algunos autores basada en la representación gráfica de la función no es tal, ya que, en este caso, sólo pueden justificar que "si f es creciente, entonces su derivada es positiva". Esto estaría bien si se quisiera estudiar la función derivada, pero de lo que se trata es de estudiar la función de partida y, sin perder eficacia, aportar, sobre ella, toda la información que pueda proporcionar, en este caso, la función derivada. Igualmente, una ilustración gráfica debiera representar en primer lugar f' y una vez conocido el signo de esta función comprobar el crecimiento o decrecimiento de f. El programa FUNCIONES es muy apropiado para hacer esta orientación. La definición que se debe utilizar es la siguiente:

Definición 3. *La función* f *es creciente en un intervalo* I=[a,b] *si para cualquier pareja de puntos,* p *y* q, *pertenecientes a I, siendo* p<q *se verifica* f(p) ≤ f(q). *Si la última desigualdad es estricta, la función es estrictamente creciente en* I.

Con esta definición el enunciado del teorema es otro y la prueba debe ser diferente.

Teorema de Monotonía. Si la función f es derivable en un intervalo, $I=[a,b]$, y su derivada es positiva en (a,b), entonces f es estrictamente creciente en un intervalo I. Si la función f es estrictamente creciente en un intervalo $I=[a,b]$ y es derivable en (a,b), entonces $f'(x) \geq 0$ en (a,b). Idem para decreciente.

Para demostrar que "$f'(x) > 0$ implica que f es creciente" se necesita el Teorema del Valor Medio, para establecer éste se precisa del Teorema de Rolle y éste, a su vez, está basado en el Teorema de Singularidad. Esta secuenciación puede parecer que es dar un rodeo innecesario, pero la realidad es otra, ya que estos teoremas deben ser conocidos por los alumnos, siguiendo unos procedimientos justificativos en el caso de las MACS, y pudiendo ser deductivos en MCNyT.

No se debe perder el sentido de la enseñanza y en todo momento debe de estar presente la finalidad de los conceptos. En este caso se trata de averiguar el crecimiento o decrecimiento de una función mediante el signo de la derivada; la definición y el último teorema enunciado nos resuelve el problema y creemos que es el procedimiento más apropiado para desarrollarlo, justificándolo o demostrándolo, en Educación Secundaria. Sin embargo no estaría bien que no reflejáramos que las definiciones 1 y 2 son más generales que la definición 3 como manifiesta el siguiente ejemplo. Ni tampoco estaría bien que no comentáramos que en el estudio local de funciones, si no se puede aplicar la definición 3 el aporte de las definiciones 1 ó 2 es nulo.

Ejemplo. La función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^3 . sen^2(1/x) & x \neq 0 \end{cases}$$

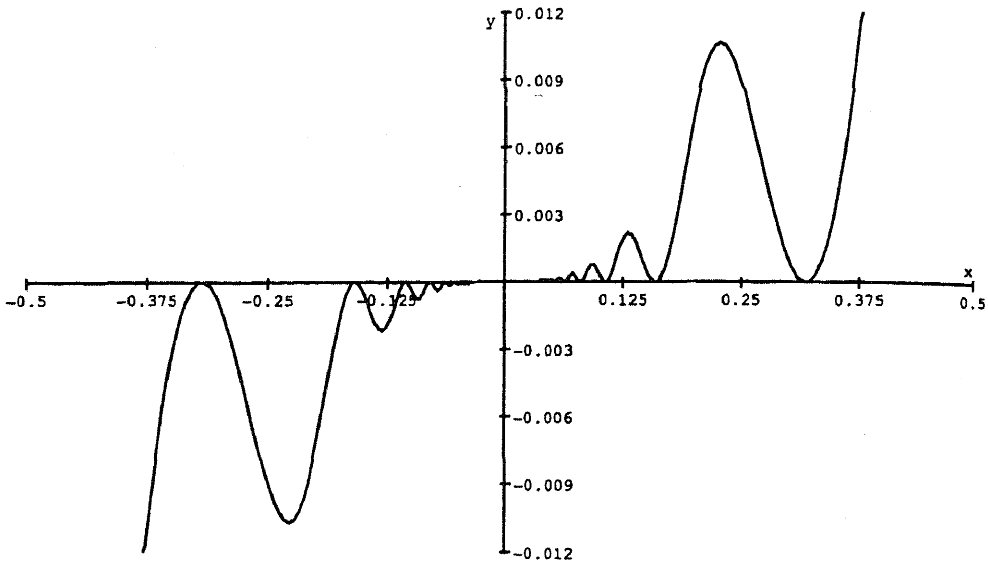

FIGURA 12. *Monotonía*

que está representada en la figura 12, es creciente en $x=0$ según las definiciones 1 y 2 pero no lo es según la definición 3. Ahora bien, ¿aporta algo esto en el estudio local? Muy poco, y, además, el teorema de monotonía no se puede aplicar, ya que en este caso $f'(0) = 0$.

Pasemos ahora a estudiar procedimientos que determinan de los extremos locales de una función.

Definición. La función f tiene un máximo relativo en $x=p$ si existe algún $h>0$ tal que, para todo x del intervalo $(p-h, p+h)$, se verifica que $f(x) \leq f(p)$. Análogo para mínimo. A los máximos y mínimos relativos se les llama extremos.

Teorema de Singularidad. Si f tiene un extremo relativo en $x=p$ y es derivable en ese punto, entonces $f'(p)=0$.

Demostración. Si $f(p)$ es máximo, entonces:

Si $p<x$, $\dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0$ y, por tanto, $\lim\limits_{x \to p^+} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0$.

Por otra parte, si $p>x$, $\dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0$ y, por tanto, $\lim\limits_{x \to p^-} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0$.

De las dos desigualdades se deduce que $f'(p) = 0$. Si $f(p)$ es mínimo se hace igual.

Teorema de Rolle. Si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a)=f(b)$, existe un punto p del intervalo (a,b) tal que $f'(p)=0$.

Demostración. Aunque no se conoce el Teorema de Weierstrass para funciones continuas, le vamos a considerar como punto de partida ya que, es muy intuitivo y fácil de justificar (se puede hacer a partir de la gráfica de f (fig.13-16), ya que este teorema establece una propiedad de la propia función). Por tanto, se considera que si la función es continua en $[a,b]$, es constante o tiene al menos un extremo relativo en un punto p de (a,b) y, por ser derivable en ese punto, $f'(p)=0$.

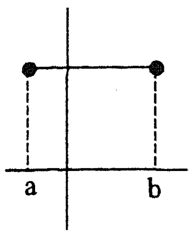

FIGURA 13

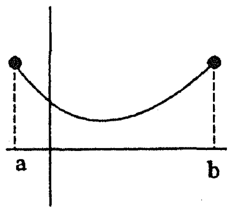

FIGURA 14

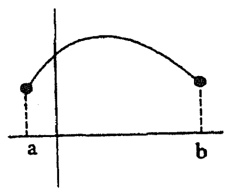

FIGURA 15

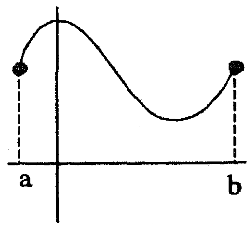

FIGURA 16

Teorema del Valor Medio. Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) existe un punto p de (a,b) tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(p) .$$

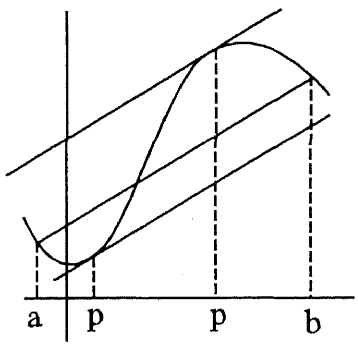

FIGURA 17

La demostración aparece en cualquier manual de cálculo diferencial y, como muestra la figura 17, se basa en probar que existe un punto $(p, f(p))$ de la curva de ecuación $y=f(x)$ siendo p un punto de (a,b) tal que la tangente a la curva en este punto es paralela a la secante que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$. Esto se puede ilustrar con el programa FUNCIONES representando la curva, la secante y las tangentes y se debieran proponer actividades en las que, a partir de la gráfica, los alumnos "vieran" si se verifica el teorema y dibujaran de forma aproximada las tangentes. Este programa tiene una opción para ir dibujando las tangentes a la gráfica de la función. Este teorema, sin duda es uno de los más importantes del cálculo diferencial, ya que permite obtener otros resultados del estudio local de forma sencilla y rigurosa.

Con estos resultados se pueden establecer el teorema de monotonía y el teorema de derivabilidad basado en la aplicación de las reglas de derivación.

Teorema de Derivabilidad. Si f es continua en $[a,b]$, p es un punto de (a,b) y $f'(x)$ existe en (a,p) y en (p,b), entonces:

- Si $\lim_{x \to p^-} f'(x)=h$, entonces $f'(p^-)$ existe y $f'(p^-)=h$.

- Si $\lim_{x \to p^+} f'(x)=k$, entonces $f'(p^+)$ existe y $f'(p^+)=k$.

- Si $h=k$ entonces f es derivable en $x=p$ y $f'(p)=h$.

El intervalo $[a,b]$ se fijará según la función que haya que estudiar en cada caso. La demostración de estos teoremas pueden verse en Blázquez y Ortega (1998).

Ejemplo: Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = |sen(x)|$ en $x=0$.

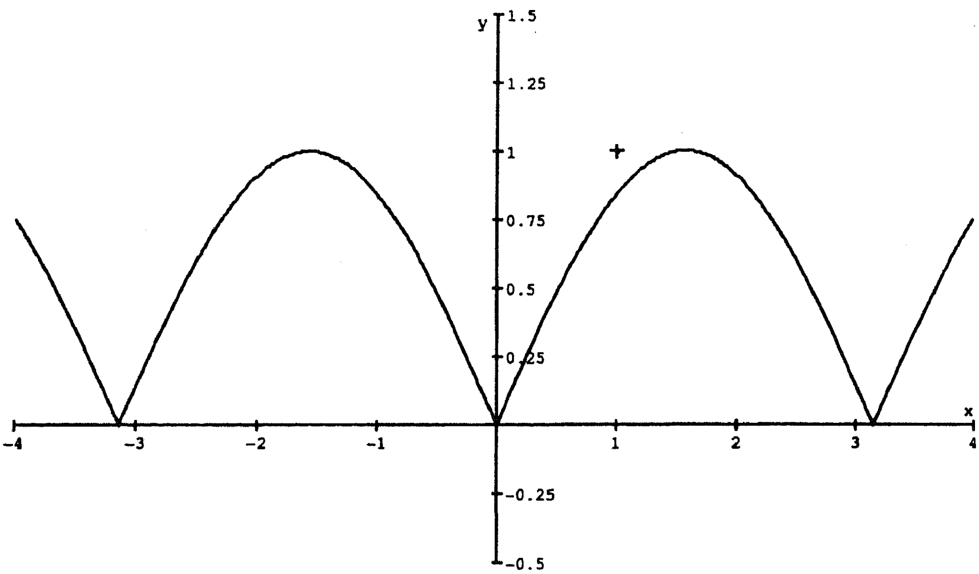

FIGURA 18

Es obvio que aplicar a esta función, figura 18, la definición de derivada en un punto no es fácil y, sin embargo, la aplicación del teorema anterior en $[-1,1]$ es trivial, escribiéndola como intervalos,

$$f'(x) = \begin{cases} -cos(x), & x < 0 \\ cos(x), & x > 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^-} (-cos(x)) = -1$ y $\lim_{x \to 0^+} cos(x) = 1$. Por tanto, la función f no es derivable en $x=0$.

5.11. Máximos y mínimos

Es de todos conocido que si f es dos veces derivable en $x=p$ y $f(p)$ es un valor extremo, entonces: si $f(p)$ es mínimo, $f''(x)>0$, y si $f(p)$ es máximo, $f''(x)<0$. Este enunciado, u otros parecidos, aparece en muchos textos; así, por ejemplo, en M. Spivak (1970), pág. 261 se lee:

"Supongamos que existe $f''(a)$. Si f tiene un mínimo local en a, entonces $f''(a)\geq 0$, si f tiene un máximo local en a, entonces $f''(a)\leq 0$".

Este enunciado no aporta nada sobre el conocimiento de f, ya que el enunciado presupone que f tiene mínimo o máximo en un punto. De lo que se trata es de obtener información sobre la función a partir de las derivadas y no al revés. Si la función es derivable, el teorema de singularidad aporta los puntos "valores de x candidatos" a extremos relativos. Ahora se trata de ver si, en efecto, los valores de la función en estos puntos son máximos o mínimos. Lo correcto es establecer el siguiente enunciado:

Primer Teorema de Caracterización. Si f es continua en $[a,b]$, dos veces derivable en un punto p de (a,b), $f'(p)=0$ y $f''(p)\neq 0$, entonces: si $f''(p)>0$, $f(p)$ es mínimo y si $f''(p)<0$, $f(p)$ es máximo.

A pesar de que su prueba está en cualquier manual se reproduce esquemáticamente por las observaciones que se harán sobre el crecimiento lateral en un entorno de p.

$f''(p)>0 \Rightarrow \lim_{x\to p} \dfrac{f'(x) - f'(p)}{x - p} > 0 \Rightarrow \dfrac{f'(x) - f'(p)}{x - p} > 0$ en un entorno de p y como $f'(p)=0$, entonces $\dfrac{f'(x)}{x - p} > 0$. Esta desigualdad permite establecer la siguiente discusión:

Si $p<x$, entonces $f'(x)>0$ y, por tanto, f es creciente a la derecha de p.

Si $x<p$, entonces $f'(x)<0$ y, por tanto, f es decreciente a la izquierda de p.

Por consiguiente, la única posibilidad es que $f(p)$ sea un máximo. En el caso de mínimo se hace de forma similar.

Un enfoque gráfico poco cuidadoso, mostrando la gráfica y trazando las tangentes, incidiría en este error de enseñanza. Si se dispone de la gráfica de la función, todo lo demás huelga, ya que, en este caso, ya "se ve" donde tiene los valores extremos y, por tanto, no es necesario trazar las tangentes. Este es un procedimiento demasiado frecuente: *se dibuja la gráfica, se trazan unas cuantas tangentes, se examina su crecimiento y se infiere el signo de la derivada segunda*. Sencillamente, se hace al revés. El signo de la segunda derivada indica el crecimiento o decrecimiento de la derivada primera y, a la vista de la demostración del teorema precedente, *el signo de la segunda derivada en un punto singular indica, según la demostración del teorema, el crecimiento o decrecimiento de la función en entornos de la forma* (x_1, p) *y* (p, x_2). Esta observación nos dará una solución más satisfactoria.

Si se quiere dar un enfoque gráfico adecuado se debería representar $f'(x)$ para localizar los puntos singulares y $f''(x)$ para ver el signo. También se pueden hacer comprobaciones de tipo numérico con la calculadora.

Un análisis sobre la demostración del teorema anterior nos indica que la caracterización viene dada por el signo de la derivada primera en un entorno del punto singular. Por otra parte, es de todos conocido que existen funciones que en ciertos puntos tienen nulas tanto la primera como la segunda derivada; por ejemplo, x^3, x^4 y $-x^4$ tienen nulas estas derivadas en $x=0$, sus comportamientos son diferentes en este punto y el teorema anterior no aporta ninguna luz al respecto. Algunos textos salvan esta deficiencia con el siguiente teorema de caracterización, que es más fuerte.

Segundo Teorema de Caracterización. Si f es continua en $[a,b]$, p un punto de (a,b), $f'(p)=0$ y la primera derivada no nula en p, $f^{n)}(p)\neq 0$, es de orden par, entonces: si $f^{n)}(x)>0$, $f(p)$ es mínimo y si $f^{n)}(x)<0$, $f(p)$ es máximo.

Quizás la demostración de este teorema esté lejos de la Enseñanza Secundaria. Una prueba del mismo puede verse en cualquier manual de Cálculo, por ejemplo en N. Piskunov (1983), pág. 186-87. Sin hacer la prueba, se puede convencer al alumno de la autenticidad del enunciado aplicando el siguiente procedimiento a varias funciones:

- Dibujar $f'(x)$.
- Dibujar $f^{n)}(x)$.
- Aplicar el Teorema y conjeturar.
- Dibujar la gráfica y comprobar las conjeturas.

Como ya se ha indicado, la observación realizada sobre el signo de la derivada en un entorno del punto singular nos permite enunciar el tercer teorema, que es más general y evita hallar derivadas de orden superior, derivadas que en ocasiones engorrosas de calcular.

Tercer Teorema de Caracterización. Sea f una función continua y derivable en un entorno E del punto singular p. Si $f'(x)\geq 0$ para cualquier x de E menor que p y $f'(x)\leq 0$ para cualquier x de E mayor que p, entonces $f(p)$ es un máximo relativo de f. Si $f'(x)\geq 0$ para cualquier x de E, $x<p$ y $f'(x)\leq 0$ para cualquier x de E, $x>p$, entonces $f(p)$ es un mínimo relativo de f.

La prueba de este teorema ya está hecha en el Primer Teorema de Caracterización. Todavía se puede enunciar un cuarto teorema más fuerte que el anterior, aplicable a puntos en los que la función no es derivable, pero si continua, como la que muestra la figura 19.

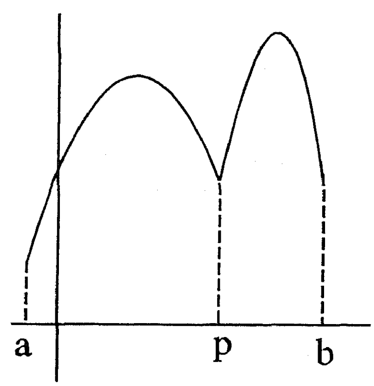

FIGURA 19

Cuarto Teorema de Caracterización. Sea f una función continua en $[a,b]$ y p un punto de (a,b). Si $f'(x) \geq 0$, para cualquier $x \in (a,p)$ y $f'(x) \leq 0$, para cualquier $x \in (p,b)$, entonces $f(p)$ es un mínimo relativo de f. Análogo para máximo.

La demostración de este teorema, aplicando el Teorema del Valor Medio, puede verse en Blázquez y Ortega (1998). Su generalidad es especialmente útil en funciones definidas a intervalos, incluso en los extremos de los intervalos de definición como indica el siguiente corolario, cuya demostración está implícita en la del teorema anterior.

Corolario. Sea f una función continua en su intervalo de definición $[a,b]$. Se verifica:

- Si $f'(x) \geq 0$ a la derecha de a, entonces $f(a)$ es un mínimo relativo.
- Si $f'(x) \leq 0$ a la derecha de a, entonces $f(a)$ es un máximo relativo.
- Si $f'(x) \geq 0$ a la izquierda de b, entonces $f(b)$ es un mínimo relativo.
- Si $f'(x) \leq 0$ a la izquierda de b, entonces $f(b)$ es un máximo relativo.

A pesar de todos estos resultados, todavía hay puntos en los que la función puede tener extremos relativos que se escapan a este test de caracterización: se trata de los puntos en los que la función es discontinua como muestra la figura 20 que requiere una aplicación directa de la definición. Ilustraciones de este tipo ayudan a que el alumno se de cuenta de que todas las funciones no son derivables y que todos los máximos y mínimos no se detectan y caracterizan a través de "derivadas". Funciones definidas a intervalos en lenguaje algebraico, como las que se muestran a continuación, le ayudarán a salir de su error.

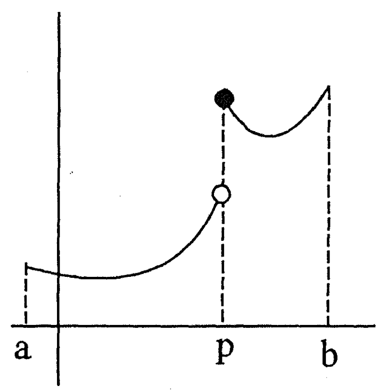

FIGURA 20

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2+1, & x>0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x\, sen(x), & x \in [-\pi,\pi]-\{0\} \\ x^2+1, & x=0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} (1-x)^2, & x \neq 1 \\ -2, & x=1 \end{cases}$$

5.11. Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

Aunque el estudio de la convexidad y concavidad, y por ende de los puntos de inflexión, en Educación Secundaria es, sin duda, menos importante, la disparidad de definiciones, la falta de interpretaciones y la existencia de enunciados, frecuente, contradictorios, en un caso, y poco eficaces, en otro, obligan a que sea tratada aquí. Así, la definición de convexidad varía de unos autores a otros y se llegan a enunciar teoremas como estos dos:

1. Si f es concava en p, entonces $f''(p)>0$.
2. Si f es concava en p, entonces $f''(p)<0$.

Para ir poniendo orden en todo esto, conviene introducir una terminología adecuada, que aclare la definición de convexidad y, en oposición a ella, la de concavidad. Comencemos por el concepto de conjunto convexo y, por oposición, conjunto cóncavo. La figura 21 muestra representaciones de ambos.

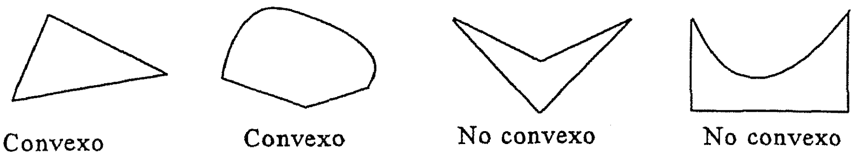

FIGURA 21. *Conjuntos convexos*

Definición. Un conjunto C de puntos del plano es convexo si para cualquier $X,Y \in C$ el segmento que los une $[X\text{-}Y]$ está contenido en C.

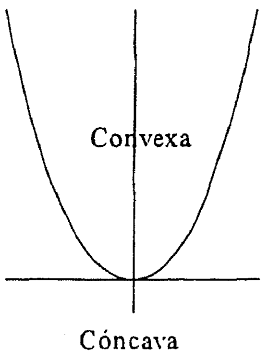

FIGURA 22

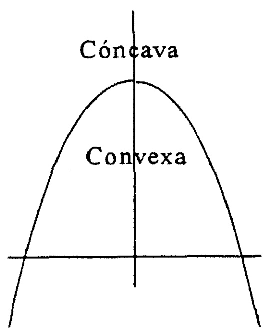

FIGURA 23

Al considerar funciones, como por ejemplo, $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$, es claro que, en cada caso, sus gráficas dividen al plano en dos regiones: una convexa y otra cóncava, como indican las figuras 22 y 23, y quizás por este motivo se quieran atribuir a la curva uno de los dos apelativos de las dos regiones del plano, cosa, que ya se ve, que es contradictoria. Algunos autores hablan de convexidad o concavidad hacia arriba o hacia abajo e incluso de la propia curva. Conviene pues, buscar otra definición que no sea relativa a las regiones del plano. Tal definición, que aparece en algunos libros de Análisis, W. Rudin (1972), pág. 101, W. Rudin (1974), pág. 72-74, E. Fisher (1983), pag. 342-243, pero no en otros de uso común, N. Piskunov, M. Spivak, es la siguiente:

Definición 1. Una función real f es convexa en un intervalo I si $\forall x_1,x_2 \in I$ y $\forall\lambda \in [0,1]$ se verifica la desigualdad $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$. Es cóncava si $\forall x_1,x_2 \in I$ y $\forall\lambda \in [0,1]$ se verifica la desigualdad $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$.

Geométricamente esta definición equivale a decir que el segmento que une los dos puntos de la curva $P = (x_1,f(x_1))$ y $Q = (x_2,f(x_2))$ está por encima del arco delimitado por estos puntos. Así, al variar λ en $[0,1]$, $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ determina todos los puntos del intervalo $[x_1,x_2]$ y $f(x) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ es la correspondiente ordenada sobre la curva definida por la función. Considerando la ecuación de la recta determinada por P y Q,

$$y - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1),$$

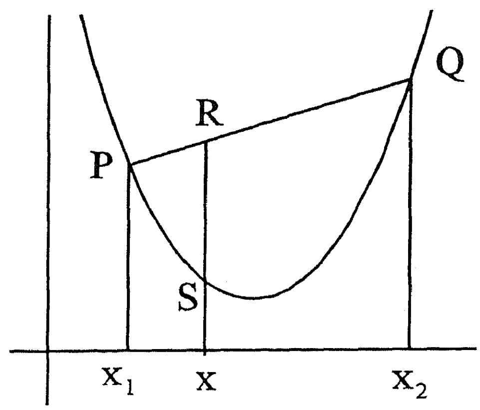

FIGURA 24. *Convexidad*

una sustitución directa manifiesta que $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2))$ satisface esta ecuación y, por tanto, se trata de las coordenadas del punto R mostrado en la figura 24. Esta discusión permite dar la siguiente definición en términos geométricos, que es equivalente a la anterior.

Definición 2. Una función f es convexa en un intervalo I si elegidos dos puntos arbitrarios x_1 y x_2 de I, el segmento del plano determinado por los puntos de la curva definida por la función, $P = (x_1, f(x_1))$ y $Q=(x_2, f(x_2))$, está por encima del correspondiente arco de curva. Es cóncava si el segmento está por debajo de la curva.

Al escribir estas relaciones de forma analítica se obtiene la definición 3, que es la que se utiliza en la práctica.

Definición 3. Una función f es convexa en un intervalo I si elegidos dos punto arbitrarios de I, x_1 y x_2 (se puede suponer $x_1<x_2$), para todo x de (x_1, x_2) se verifica la siguiente desigualdad:

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

Análogamente, f es cóncava en I si en los mismos supuestos

$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

Ahora que se dispone de una terminología adecuada, se puede establecer el siguiente teorema de caracterización.

Teorema. Si $f''(x)>0$ en todos los puntos de un intervalo I, entonces f es convexa en I. Si $f''(x)<0$ en todos los puntos de un intervalo I, entonces f es cóncava en I.

La demostración de este teorema puede verse en Blázquez y Ortega (1998).

Indudablemente una función puede ser convexa en un intervalo y cóncava en otro y si la función es suficientemente suave estos intervalos están unidos. Los puntos de separación de estos intervalos se llaman *Puntos de Inflexión*. La caracterización de estos puntos a partir de las derivadas de la función es la siguiente tarea. La aplicación del teorema anterior prueba el siguiente enunciado.

Condición Necesaria. Si existe $f''(p)$ y en $x=p$ la función tiene un punto de inflexión, $f''(p)=0$.

Seguidamente se enuncian tres teoremas de caracterización de los que se omiten sus demostraciones. Todos se pueden justificar, fácilmente, con el programa FUNCIONES.práctica, haciendo una reflexión sobre la forma de la gráfica y una interpretación sobre el crecimiento de la derivada. Si la función es convexa, es fácil observar que al recorrer la curva de izquierda a derecha las pendientes de estas rectas son cada vez mayores, esto es, la función derivada primera, f', es creciente; es decir, en la zona donde la función es decreciente, éste decrecimiento es cada vez más lento, mientras que en la zona donde la función es creciente, su crecimiento es cada vez más rápido. Si la función es cóncava la función se comporta al revés. Notemos, por otra parte, que no tiene sentido trasladar estos conceptos a las curvas que definen las funciones, a pesar de que algunos libros lo hacen, ya que, como conjuntos de puntos del plano que son, se incurriría en contradicción con los conceptos de conjuntos cóncavo y conjunto convexo. Finalmente, conviene destacar la generalidad del tercero, cuya demostración está implícita en la prueba del primero.

Primer Teorema de Caracterización. Si $f''(p)=0$ y $f'''(p)\neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en $x=p$. (Fácil de probar).

Segundo Teorema de Caracterización. Si $f''(p)=0$ y la primera derivada que no se anula en $x=p$ es de orden impar, entonces f tiene un punto de inflexión en $x=p$. (Para su prueba se requiere el teorema de Taylor).

Tercer Teorema de Caracterización. Si $f''(p)=0$ y $f''(x)$ tiene signos contrarios en (x_1, p) y en (p, x_2), entonces f tiene un punto de inflexión en $x=p$. (Fácil de probar).

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ARTIGUE, M. (1995). "La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos". En M. Artigue y otros (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo editorial Iberoamericano.

AZCARATE, C. y otros (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Madrid: Síntesis.

BALACHEFF, N. (1987). "Procesus de preuve el situations de validation". *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 147-176.

BELL, A.W. (1976). "A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations". *Educational Studies in Mathematics, 7,* 23-40.

BLAZQUEZ Y ORTEGA (1998). "Didáctica del Análisis en las Matemáticas de Bachillerato. El Cálculo Diferencial". En Ortega (Coord), *Temas Controvertidos en Educación Matemática. ESO y Bachillerato.* Universidad de Valladolid. Valladolid.

BOYER, C.B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development.* New York: Dover.

BOYER, C.B. (1986). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial S.A.

BOURBAKI, N. (1972). *Notas de historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

COURANT, R. & ROBINS, H. (1964). *¿Qué es la Matemática?.* Madrid: Aguilar de Ediciones.

CORNU, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles.* Grenoble: L'Université scientifique et Medical de Grenoble.

DAVIS, P. (1993). "Visual Theorems". *Educational Studies in Mathematics, 24,* 333-344.

FISCHER, E. (1983). *Intermediate real Analysis.* New York: Springer Verlag.

GRUPO CERO (1982). *Matemáticas de Bachillerato,* vol. 2. Barcelona: Teide.

GUZMAN, M. (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático.* Madrid: Ediciones Pirámide.

HANNA, G. (1995). "Challenges to the Importance of Proof". *For the Learning of Mathematics, 15(3),* 42-49.

HAREL, G. & SOWDER, L. (1996). "Students' proof schemes". *Research on Collegiate Mathematics Education.* En E. Dubinsky, A. Schoenfield y J. Kaput (Eds), American Mathematical Society.

HERSH, R. (1993). "Proving is convencing and explaining". *Educational Studies in Mathematics,* 24, 389-399.

IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (1997). "Mathematical Proobs: Classification and Examples for Use in Secondary Education". *The Association for Mathematics Education of South Africa* (pp. 109-155). Centrahil: South Africa.

LARSON, R.E. & HOSTETLER, R.P. (1988). *Cálculo y Geometría Analítica.* Madrid: Mcgraw-Hill/Interamericana de España.

MAHER, P (1991). "Calculus at A-level and its understanding". *The Mathematical gazette, 79,* 484, 47-51.

N.C.T.M. (1991). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática.* S.A.E.M. Editado por Thales: Utrera, Sevilla.

ORTEGA, T. (1996). "Modelo de valoración de textos matemáticos". *Números, 28,* 4-12.

ORTON, A.(1983). "Students'understand of differentiation". *Educational Studies in Mathematics, 14,* 235-250.

PISKUNOV, N. (1983). *Cálculo Diferencial e Integral.* Moscú: Mir.

REY PASTOR, J & BABINI, J. (1985). *Historia de la Matemática.* Barcelona: Gedisa.

RICO, L. (1997). "Los organizadores del currículo de Matemáticas". En L. Rico (Coord.), *La educación Matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona: ICE Universitat de Barcelona- Horsori edit.

SCHNEIDER, M. (1993). "A propos de l' apprentisage du taux de variation intantane". *Recherches en didactique des matthématiques, 23,* 317-350.

SCHOOL MATHEMATICS PROJECT (1996). *16-19 Mathematics: Introductory Calculus.* Cambridge: Cambridge University Press.

SPIVAK, M. (1972). *Cálculus.* Cálculo Infinitesimal. Barcelona: Reverté, S.A.

TERRACHER et FERACHOGLAN (1995). *Math 1er S.* París: Hachette.

VAN ASH, A.G. (1993). "To Proof, Why and How?". *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 24(2),* 301-313.

VILLIERS, M. de (1990). "The role and function of proof in mathematics". *Pythagoras, 24,* 17-24.

WHITE, P. & MITCHELMORE, M. (1996). "Conceptual knowledge in introductory calculus". *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 1, 79-95.