



# Análisis del conocimiento especializado en matemáticas con maestros en formación: una experiencia con la representación de fracciones<sup>1</sup>

## Analysis of mathematical expertise with preservice teachers: an experience with fraction representation

BLANCA ARTEAGA-MARTÍNEZ<sup>2</sup>

*Universidad Nacional de Educación a Distancia, España*

*blanca.arteaga@edu.uned.es*

*<https://orcid.org/0000-0002-1079-1526>*

MÓNICA ARNAL-PALACIÁN

*Universidad de Zaragoza, España*

*marnalp@unizar.es*

*<https://orcid.org/0000-0002-7725-3917>*

### Resumen:

La formación en matemáticas de los futuros maestros debe fijarse en contenidos que tradicionalmente se han enseñado desde procedimientos poco comprensivos, como las operaciones con fracciones, para diseñar pautas formativas que se anticipen a los posibles errores que se han adquirido de manera previa. En este trabajo, centramos nuestra atención en los registros de representación de las fracciones (pictórico,

### Abstract:

Preservice teacher preparation in mathematics must focus on content that has traditionally been taught through procedures which are not very comprehensive, such as operations with fractions, in order to design training guidelines that anticipate possible errors acquired previously. In this study, we focused our attention on the registers of representation of fractions (pictorial, symbolic and natural language), to

### 1 Como referenciar este artículo (How to reference this article):

Arteaga-Martínez, B., y Arnal-Palacián, M. (2022). Análisis del conocimiento especializado en matemáticas con maestros en formación: una experiencia con la representación de fracciones. *Educatio Siglo XXI*, 40(1), 107–130. <https://doi.org/10.6018/educatio.436461>

### 2 Dirección para correspondencia (Correspondence address):

Blanca Arteaga-Martínez. Departamento de Didáctica, Organización Escolar y Didácticas Especiales. Facultad de Educación. C/ Juan del Rosal, 14. 28040, Madrid (España)

simbólico y lengua natural), con el objetivo de favorecer la comprensión y uso de las operaciones. Presentamos la investigación realizada con una muestra de 85 estudiantes que cursan el Grado en Educación Primaria. Los datos se recopilaron antes y después de una instrucción con material manipulativo. Se analizan muestras de trabajo desde la perspectiva de análisis del MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*). Los resultados del diagnóstico inicial señalan que utilizan números que les facilitan la representación, y que pocos de los futuros maestros utilizan el registro pictórico. El error principal es no reconocer que las partes en que se divide el todo son de igual tamaño. Los resultados tras la formación señalan un cambio en la elección de la representación y una mejora conceptual en los registros pictórico y simbólico, convirtiéndose en más habituales tras la formación. El trabajo ha ayudado a identificar obstáculos en el aprendizaje de las operaciones con fracciones, que ponen de manifiesto la necesidad de trabajarlas desde una perspectiva que facilite potenciar la comprensión del contenido, y facilitar la enseñanza posterior desde el uso y conexión entre los distintos registros de representación.

**Palabras clave:**

Formación de maestros; didáctica; fracciones; representación; MTSK.

favor the construction of fractions and the understanding of operations. We present the research carried out with a sample of 85 students who are currently studying the Degree in Primary Education. Data were collected before and after instructions with manipulative materials. Work samples were analyzed from the perspective of MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*) analysis. The results of the pretest indicate that students use numbers that facilitate representation, and the pictorial record is used by a minority of the future teachers. The main error is not recognizing that the parts into which the whole is divided are of equal size. The results after the training indicate a change in the choice of representation and a conceptual improvement in the pictorial and symbolic registers which become more common after training. This study has helped to identify obstacles in the learning of operations with fractions, making clear the need to work on them from a perspective that targets the understanding of the content, while facilitating subsequent teaching from the use and connection between the different representation registers.

**Keywords:**

Preservice teachers; didactics; fractions; representation; MTSK.

**Résumé:**

La formation en mathématiques des futurs enseignants devrait se concentrer sur les contenus qui ont traditionnellement été enseignés à l'aide de procédures peu complètes, comme les opérations avec des fractions, afin de concevoir des directives de formation qui anticipent les éventuelles erreurs acquises précédemment. Dans cet article, nous portons notre attention sur les registres de représentation des fractions (pictural, symbolique et langage naturel), dans le but de favoriser la compréhension et l'utilisation des opérations. Nous présentons la recherche effectuée auprès d'un échantillon de 85 étudiants préparant un diplôme d'enseignement primaire. Les données ont été recueillies avant et après l'instruction avec le matériel de manipulation. Les échantillons de travail sont analysés du point de vue de l'analyse des MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*). Les résultats du diagnostic initial indiquent qu'ils utilisent les chiffres pour faciliter la représentation, et que peu de futurs enseignants utilisent le registre pictural. La principale erreur consiste à ne pas reconnaître que les parties dans lesquelles le tout est divisé sont de taille égale. Les résultats après la formation indiquent un changement dans le choix de la représentation et une amélioration conceptuelle dans les registres pictural et symbolique, plus fréquents après la formation. Ce travail a permis d'identifier des obstacles dans l'apprentissage des opérations avec des fractions, qui mettent en évi-

dence la nécessité de les travailler dans une perspective qui contribue à améliorer la compréhension du contenu, et de faciliter l'enseignement ultérieur basé sur l'utilisation et la connexion entre les différents registres de représentation.

**Mots clés:**

Formation des enseignants; didactique; fractions; représentation; MTSK.

Fecha de recepción: 10-07-2020

Fecha de aceptación: 20-12-2020

## Introducción

La investigación en didáctica de las matemáticas ha tomado un cierto apogeo en los últimos años gracias a los modelos de análisis descriptivo del conocimiento especializado del profesor, partiendo muchos de ellos del esquema de Shulman (1986), que incluyó por primera vez el *conocimiento pedagógico del contenido* (PCK) como elemento diferenciador entre el conocimiento matemático que debe tener un docente y cualquier otra persona que realice tareas matemáticas.

La observación de este PCK plantea la importancia de conocer qué dificultades surgen en contenidos concretos o qué ideas preconcebidas se tienen sobre algunos de ellos, que pueden condicionar su aprendizaje y por tanto su enseñanza posterior. Este análisis debe iniciarse cuando los maestros están aún en formación, para conocer y reforzar aquellos aspectos que les faciliten la adquisición de un conocimiento matemático adecuado, al tiempo que desarrollen destrezas didácticas que les faciliten su tarea posterior, que es enseñar.

Uno de estos modelos de análisis es el MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*) de Carrillo et al. (2018), que facilita un inventario de categorías de análisis de este conocimiento especializado, exclusivo del docente para desarrollar su labor. Este modelo lejos de pretender realizar una evaluación, se enmarca de alguna manera en un modo constructivista de observación de la tarea del docente de matemáticas, facilitando una comprensión e interpretación de sus acciones y conocimientos. El modelo señala que este conocimiento propio del docente se recoge de manera conjunta en el contenido matemático y pedagógico, no pudiendo enmarcarse como una categoría específica dentro de uno de ellos.

Dentro del MTSK se distinguen dos dominios, el conocimiento del contenido matemático (MK) y el PCK, ya mencionado de manera previa.

En este modelo de manera específica se sustituye la palabra pedagógico por didáctico, dada la acepción diferencial de la lengua castellana<sup>3</sup>. El PCK se denomina así *conocimiento didáctico del contenido*. Este trabajo pretende centrar su análisis en el primero, MK, y especialmente en uno de sus subdominios denominado KoT, que recoge los tópicos matemáticos, “afirmaciones, postulados, o principios fundamentales, centrales en las matemáticas” (Liñán, Contreras y Barrera, 2016, p. 12).

Desde este subdominio podríamos observar el conocimiento sobre un contenido concreto, por ejemplo las fracciones, partiendo desde lo más general que conllevaría a su comprensión, a lo particular como el manejo de los algoritmos, o la representación que se puede hacer tanto de ellas como de los procedimientos asociados a su tratamiento. La elección de este contenido tan específico se debe a que se considera un contenido complejo para estudiantes de todo el mundo (Rodríguez y Navarrete, 2020), además de que el conocimiento de las fracciones se considera un predictor del conocimiento posterior del álgebra (Siegler et al., 2012), bloque de contenidos que supone la base de las matemáticas superiores.

La enseñanza de las operaciones con fracciones en la escuela se ha centrado tradicionalmente en el procedimiento (KoT), mostrándose como una serie de repertorios que se expresan en maneras tales como “multiplicar en cruz” o “invertir y multiplicar” (Gómez, Figueras y Contreras, 2016, p. 47), en el caso de la división o “multiplicar en línea”, en el caso de la multiplicación; pero si intentamos que el estudiante razone sobre el verdadero sentido de estas acciones, no se muestra un conocimiento comprensivo de estos algoritmos particulares, probablemente porque la transición de la operación de los números naturales a las fracciones se ha querido hacer con los mismos argumentos.

La investigación centrada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las fracciones ha analizado aspectos de distinta naturaleza. En el apartado de aprendizaje, gran parte de ellas se han centrado en el algoritmo de la división (Ball, 1990; Lee, 2017; Tirosh, 2000), especificando también en la resolución problemas de división de fracciones (Liñán, Barrera y Infante, 2014); otras han trabajado la construcción de la noción de fracción (Escolano, 2007; Perera y Valdemoros, 2007), la eficacia de herramientas

---

3 Pedagógico (adj.): Expuesto con claridad y que sirve para educar o enseñar. Didáctico (adj.): Que tiene como finalidad fundamental enseñar o instruir. Fuente: RAE (<https://dle.rae.es/>)

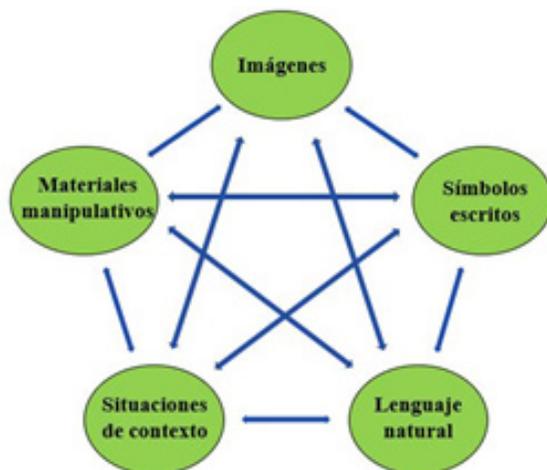
como manipuladores virtuales para su aprendizaje (Suh, Moyer & Heo, 2005), el tratamiento en los libros de texto (Ávila, 2019), e incluso los distintos significados que tiene el término fracción (Block, Mendoza y Ramírez, 2010; Fandiño, 2009; Kieren, 1976). Mientras que la investigación centrada en la enseñanza recoge resultados tanto de maestros en formación, como maestros con largas trayectorias de aprendizaje desde el análisis de modelos como el MTSK (Rojas, Flores y Carrillo, 2015), o el análisis de problemas aritméticos que resuelven estudiantes universitarios de magisterio desde este mismo modelo (Montes et al., 2015). Así, nuestro trabajo desde el análisis del KoT va a centrarse en estos procedimientos, pero relacionados con la representación, considerada como una categoría de análisis en este subdominio.

Las representaciones relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas “hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas” (Rico, 2009, p. 3), por lo tanto, parece razonable darle importancia a estos aspectos cuando tratamos el aprendizaje de las fracciones. “Todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no se dispone de ‘objetos’ para exhibir en su lugar” (D’Amore, 2005, p. 23). Ball (1990) descubrió que maestros en formación realizaban de manera correcta problemas utilizando el algoritmo de la multiplicación (invertir-multiplicar), aunque se centraban fundamentalmente en recordar reglas y aplicar el procedimiento estándar, pero muy pocos de ellos eran capaces de realizar la representación gráfica correctamente.

El uso de modelos y representaciones pictóricas es un tema común en matemáticas elementales en los libros de texto en general, y es particularmente preponderante en los contenidos de la fracción (Reys, Lindquist, Lambdin & Smith, 2007). Por lo tanto, resulta fundamental en este sentido y dado el uso generalizado del libro de texto en las aulas de primaria en España, que los futuros maestros conozcan en profundidad las representaciones de las fracciones, dado que, los libros de texto suelen presentar los problemas sin contexto, limitando así que solo se requieran de conocimientos procedimentales para su resolución (Son, 2005).

Sin embargo, hemos de ser conscientes que no toda representación es adecuada, “una representación no necesariamente indica una comprensión holística de los matices de un particular concepto matemático”

(Chinnappan & Forrester, 2014, p. 874), por lo tanto, el aprendiz de maestro necesita formarse en los tipos de representación existentes y en las posibles conversiones que es posible realizar entre ellas.



*Figura 1.* Cinco representaciones para las ideas matemáticas.

Fuente: Adaptado de Lesh y Landau (1983, citado en Reys et al., 2007, p. 101)

Las formas consideradas para trabajar la representación de fracciones son las que abordan al menos cuatro de las cinco representaciones recogidas en la figura 1, así como las relaciones entre ellas, para que no se aprendan de manera aislada unas de otras.

El análisis del conocimiento de los contenidos más básicos relacionados con las fracciones para un maestro de primaria no puede solo complementar estos aspectos de procedimientos y representaciones (KoT), sino que debe relacionarse con el papel que juegan los símbolos (KPM) en la comprensión de los contenidos relacionados con las fracciones y los conocimientos relacionados con la estructura matemática (KSM), establecidos en este caso desde la conexión entre las distintas representaciones.

## **Marco teórico**

La revisión teórica del presente estudio se sustenta dos pilares fundamentales relacionados con aprendizaje de las fracciones: el contenido matemático y los sistemas de representación que pueden utilizarse.

El conocimiento de las fracciones, desde la mirada de los estudiantes para maestro, ha sido analizando en multitud de estudios en los últimos años (Buform, Llinares y Fernández; 2018; Khoury & Zazkis, 1994; Liñán et al., 2014; entre otros).

Tomando el concepto de fracción con maestros en formación, tanto desde la perspectiva del contenido matemático (MK) como didáctico (PCK), y focalizándose en las percepciones que éstos tienen acerca de la preparación de sus conocimientos y el alcance que tienen sobre las matemáticas, Li y Kulm (2008) determinaron que los estudiantes para maestro tienen un conocimiento limitado para enseñar conceptualmente la división de fracciones.

Examinando las características de esta misma noción en maestros en formación desde la resolución de problemas, Buform et al. (2018) demostraron que éstos resuelven correctamente problemas de parte-todo, medida-recta numérica y cociente, situación proporcional de valor perdido y comparación de razones, pero tienen dificultades cuando deben reconstruir la unidad, reconocer una situación no proporcional y comparar situaciones cuantitativas y cualitativas. Estas dificultades vienen determinadas por las limitaciones en la comprensión del concepto matemático, dando lugar a que, sin haber desarrollado una comprensión de la noción de fracción, razón y proporción, pueden resolver de forma correcta problemas más procedimentales.

La investigación centrada en el aprendizaje de las operaciones con los números racionales en los estudiantes de educación primaria es abundante, señalando sobre todo las dificultades. Algunos de estos resultados, reflejan la complejidad para los estudiantes de educación primaria de la transición de los números naturales a los números racionales, por ejemplo, la debida al cambio conceptual, asociado principalmente a algunas de las propiedades, por ello los maestros necesitan de manera simultánea el CK y el PCK (Depaepe et al., 2018).

La comprensión de los estudiantes indica que aprender las fracciones y las operaciones con fracciones es un proceso complejo (Kara & Incikabi, 2018). Además, es habitual que los estudiantes utilicen fácilmente los algoritmos con fracciones, pero no entiendan el significado de los mismos (Mick & Snicrope, 1989). Para poder ayudar en estas dificultades Tunç-Pekkan (2015) propone utilizar múltiples sistemas de representación en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Los trabajos de investigación centrados en la enseñanza-aprendizaje

de las matemáticas donde se señale la importancia de los sistemas de representación han sido numerosos en los últimos años (Duval, 1998; Gómez y Pantoja, 2013; Janvier, 1987; Rico, 2009; Rodríguez-Domingo, 2016; Valdemoros, 2004).

No es posible recordar las reflexiones surgidas a partir de los conceptos, sino que necesitamos ayudarnos de las expresiones, dibujos o símbolos que las representen. Se necesita realizar una representación interna para pensar y razonar, pero para poder comunicar esas ideas se deberá realizar una representación externa: las palabras, las imágenes, los gráficos, las ecuaciones, etc. (Gómez y Pantoja, 2013).

Duval (1998) indica que para comprender un concepto es necesario la coordinación entre diferentes sistemas de representación, ya que uno solo no permite la comprensión total de concepto. Pero no es posible el desarrollo de un concepto sin la utilización de un lenguaje que le facilite un soporte (Valdemoros, 2004). La autora focaliza su interés en los contenidos semánticos, donde se identifica el significado y los procesos asociados a las fracciones; y también en aquellos contenidos sintácticos, en los que el niño traduce de su lenguaje natural al aritmético, pasando por una representación pictórica. Khoury y Zazkis (1994) examinaron las estrategias de razonamiento y los argumentos que ofrecían los maestros de educación primaria en formación cuando resolvían dos problemas de fracciones con diferentes representaciones simbólicas. En el primero debían comparar dos fracciones distintas con la misma representación numérica, y en el segundo comparaban distintas representaciones de la misma fracción. Para evitar la aplicación directa de cualquier algoritmo, se utilizaron sistemas de numeración en bases distintas de diez, pudiendo observar que el conocimiento del valor posicional y los números racionales de los docentes en formación es más sintáctico que conceptual.

Por otra parte, Rodríguez-Domingo (2016) realiza una categorización de los errores cuando los estudiantes abordan la traducción de los enunciados, en los que aparecen fracciones, de un sistema de representación al otro, en particular de simbólico a verbal y viceversa.

Desde el análisis del KoT, los registros de representación implican conocer distintas maneras en que se puede mostrar un contenido, incluyendo símbolos, notación y lenguajes asociados a las representaciones. Desde el contenido de las fracciones, consideramos fundamental el manejo de las representaciones pictóricas o geométricas, conjugado con

una adecuada representación verbal (lengua natural). Este dominio se observará desde el trabajo con las fracciones cuando

algunos de sus significados se relacionan de modo más natural con un tipo de representación (como el significado de operador con un modelo de representación discreto); conocer la definición del concepto de número racional y su relación con fracción y decimal; conocer distintos algoritmos para las operaciones básicas con fracciones y su fundamentación matemática (Carrillo, Flores-Medrano, Contreras y Climent, 2015, p. 464).

Partimos entonces de la necesidad del que enseña de una base de conocimiento sólido de las representaciones para facilitar la comprensión de los estudiantes y solucionar los obstáculos provocados por conceptos adquiridos erróneamente, en relación a las fracciones (Adu-Gyamfi, Schwartz, Sinicrope & Bossé, 2019).

Así, la literatura consultada en la elaboración de este marco inicial para situar nuestro problema de investigación, nos ha conducido a tener como objetivo dar respuesta a cuatro cuestiones, para mejorar el diseño de las sesiones de formación de futuros maestros de primaria en relación a una primera aproximación a las fracciones:

- ¿Qué conocimiento de las fracciones tienen los maestros de primaria en formación en relación con procedimientos (KoT)?
- ¿De qué manera utilizan la representación (KoT) como complemento a un procedimiento de realización de una operación con fracciones?
- ¿Cómo se utilizan los símbolos, incluida la lengua natural (KPM), en el aprendizaje de las fracciones en los futuros maestros?
- ¿Qué tipo de conexiones (KSM) se establecen entre las distintas representaciones utilizadas en las operaciones con fracciones?

## Marco empírico

La muestra está integrada por 85 estudiantes que asisten a una asignatura del segundo curso del Grado en Educación Primaria en el curso 2019/20, en una universidad pública española. Han asistido a un curso de contenido matemático y didáctico (centrado en el sentido de los números naturales y enteros) en el cuatrimestre previo, por lo que sus conocimientos específicos sobre fracciones los adquirieron de manera previa al acceso a la universidad.

Los elementos de análisis han sido las evidencias de las muestras de trabajo de dos tareas (tabla 1), una realizada de manera previa (diagnóstico) a la instrucción formativa y otra a posteriori. Estas tareas se analizan en base de los subdominios KoT, KPM y KSM, del MTSK. Como se puede ver se ha provocado un uso de la representación en los dos momentos, forzando que se trabajase de manera independiente con cada una de las operaciones aritméticas, para facilitar el análisis y la comparación, en términos de la eficacia de las sesiones de formación.

Dentro del KoT las categorías que van a observarse, corresponden a procedimientos y registros de representación. En concreto, estos serán las imágenes (representación pictórica), la operación (representación simbólica) y la explicación (representación lenguaje natural) que los futuros maestros hacen en las tareas de fracciones.

Tabla 1

*Descripción de las evidencias de trabajo: contenido y representación*

Tareas de diagnóstico	Tareas a posteriori
Describe las siguientes situaciones con fracciones, utilizando números, un dibujo y describe los pasos: 1. Suma 2. Resta 3. Multiplicación 4. División	Aporta un ejemplo y su representación gráfica en los siguientes ejemplos, describiendo los pasos: 1. Una fracción cuyo valor sea superior a 1 2. Una fracción cuyo valor sea inferior a 1 3. Una suma de dos fracciones 4. Una resta de dos fracciones 5. Una multiplicación de dos fracciones 6. Una división de dos fracciones Responde a las siguientes preguntas: 7. ¿Consideras que esta representación ayuda a los niños/as a entender el significado físico de la fracción? 8. ¿Qué dificultades has tenido para realizar esta actividad?

Fuente: Elaboración propia.

La intervención (formación) tiene una duración de 7 sesiones de 60 minutos, siendo cuatro de ellas (figura 2) de cohorte teórico con un modelo de clase magistral conducido por la docente, y el resto, son sesiones de trabajo en pequeños grupos de trabajo de los estudiantes, situadas de manera intercalada temporalmente (señaladas por \*), experimentando a través de problemas (resolución y diseño), representaciones (tratamiento y conversión), y uso de materiales no específicamente didácticos.

El objetivo durante estas sesiones es que los estudiantes desarrollen comprensiones del algoritmo a partir de las representaciones, y las conversiones entre ellas. Consideramos que los materiales pueden facilitar de alguna manera el uso de las representaciones, y lo situaríamos en el dominio PCK, y en particular, en el subdominio KMT (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas). Sin embargo, señalamos que no vamos a analizar estos aspectos concretos del KMT, dado que los recursos son utilizados por la formadora de la universidad durante la intervención, y no por los estudiantes que integran la muestra de estudio.

Los materiales que se utilizan durante el periodo de formación son fundamentalmente regletas y policubos. Además, los contenidos se muestran siempre por parte de la docente universitaria de manera simultánea en al menos dos registros, siendo siempre uno de ellos el simbólico.

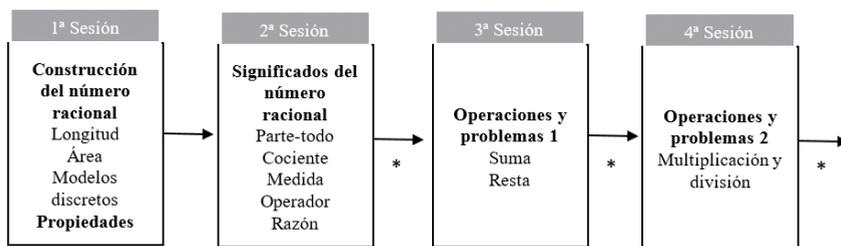


Figura 2. Estructura y contenidos del plan formativo en las sesiones teóricas.

Para facilitar la codificación de las muestras de trabajo se construye un sistema de códigos de análisis desde una revisión de investigaciones previas (tabla 2), que nos facilitaron la construcción de un código propio, para analizar e interpretar las subcategorías dentro del KoT.

Tabla 2  
*Revisión teórica de códigos de análisis de representaciones de las fracciones.*

Autor	Códigos
Chinnappan & Forrester (2014)	Construye 5 niveles basado en el conocimiento procesal (PK) y el conocimiento conceptual (CK). Se considera PK un dominio del algoritmo, mientras que CK se relaciona con la representación y/o explicación. Los niveles recogen la corrección o no del conocimiento, de fracción y operación.
Ivars, Fernández, Llinares & Choy (2018)	Recoge tres niveles de desempeño para la identificación y representación de las fracciones. Cada uno de los niveles se muestra detallado en términos de uso y comparación.

Fuente: Autores mencionados.

Para la construcción del código propio (tabla 3) se llevó a cabo un proceso de categorización deductivo-inductivo, integrando las categorías esperadas a partir de la revisión teórica sobre una muestra aleatoria de las evidencias de trabajo, de manera que todas las posibles situaciones estuviesen recogidas en los códigos.

Tabla 3

*Categorías de análisis de las operaciones de fracciones de acuerdo a su representación.*

Representación pictórica	Representación simbólica	Representación en lengua natural
0. No utiliza representación	0. No se presenta algoritmo	0. No incluye una explicación
1. Utiliza una representación incorrecta	1. El algoritmo no es correcto	1. Incluye una explicación no correcta
2. Utiliza una representación correcta	2. El algoritmo es correcto	2. Incluye una explicación correcta basada únicamente en el procedimiento
		3. Incluye una explicación correcta no basada únicamente en el procedimiento

Fuente: Elaboración propia.

Se incluyen además dos categorías específicas que señalarán si se seleccionan para los ejemplos (KMT) de fracciones tienen o no el mismo denominador, o si el tipo de los números que utilizan son múltiplos, hecho que facilita la representación. Así como, el tipo de representación pictórica que se utiliza.

Para garantizar la calidad de la categorización de las muestras de trabajo de los futuros maestros, se hace un análisis de fiabilidad del sistema de codificación entre las dos investigadoras. Se codificaron de manera independiente las respuestas de 17 participantes. Se utilizó el coeficiente Kappa, resultando un valor de .962 ( $p < .001$ ), lo que indica un acuerdo casi perfecto (Landis & Koch, 1977) entre los códigos asignados por cada investigadora.

Este trabajo se realiza desde dos enfoques complementarios. El primero, de tipo cuantitativo, que nos facilita una descripción numérica (estudio de frecuencias) del trabajo en las categorías y su posible relación, y el segundo de tipo cualitativo de tipo descriptivo y exploratorio (McMillan y Schumacher, 2005), que nos permite interpretar las muestras de trabajo de los estudiantes desde el modelo MTSK.

El software utilizado para realizar los cálculos de porcentajes y las pruebas no paramétricas ha sido el SPSS v. 25.

## Resultados y discusión

Los resultados del diagnóstico (tabla 4) señalan que los estudiantes utilizan de manera preferente el registro de la lengua natural, aunque es frecuente reflejar únicamente aspectos procedimentales, sobre todo en producto y división. En el caso del registro pictórico el dato de resultados correctos es mayor en la suma, mientras que en el simbólico lo es la multiplicación.

Tabla 4  
*Distribución de porcentajes de las tareas de diagnóstico en las categorías (cuatro operaciones).*

		Suma	Resta	Producto	División
Representación pictórica	No utiliza representación	72.46	78.26	78.21	84.06
	Utiliza una representación incorrecta	2.90	2.90	17.39	15.94
	Utiliza una representación correcta	24.64	18.84	4.35	.00
Representación simbólica	No se presenta algoritmo	79.71	81.16	73.91	78.26
	El algoritmo no es correcto	.00	.00	1.45	2.90
	El algoritmo es correcto	20.29	18.84	24.64	18.84
Representación en lengua natural	No incluye una explicación	2.90	4.35	5.80	8.70
	Incluye una explicación no correcta	75.36	78.26	57.97	55.07
	Incluye una explicación correcta basada únicamente en el procedimiento	8.70	8.70	17.39	23.19
	Incluye una explicación correcta no basada únicamente en el procedimiento	13.04	8.70	18.84	13.04

Fuente: Elaboración propia.

Desde el análisis cualitativo de las muestras de trabajo vemos que son pocos los futuros maestros que utilizan el registro pictórico, pero el 50% de quienes lo utilizan tiene la preferencia del uso geométrico de rectángulos; en el caso de suma y resta optan de manera preferente por poner el mismo denominador en el ejemplo (86.67%). Entre los que utilizan el registro pictórico en la multiplicación y división, son muchos (53.33 y 63.64%, respectivamente) los que cambian el tamaño de la unidad.

En cuanto a los resultados de las tareas a posteriori (tabla 5) vemos

en primer lugar un cambio de tendencia en la forma de trabajo, siendo los registros preferentes en la resolución de la tarea el pictórico y el simbólico.

Tabla 5

*Distribución de porcentajes en las tareas a posteriori en las categorías.*

		Fracción impropia	Fracción propia	Suma	Resta	Multiplificación	División
Representación pictórica	No utiliza representación	3.80	2.53	13.92	10.13	10.13	24.05
	Utiliza una representación incorrecta	5.06	7.60	18.99	21.52	20.25	37.98
	Utiliza una representación correcta	91.14	89.87	67.09	68.35	69.62	37.98
Representación simbólica	No se presenta algoritmo	5.06	5.06	12.65	8.86	12.66	22.79
	El algoritmo no es correcto	1.27	2.53	1.27	2.53	3.80	6.33
	El algoritmo es correcto	93.67	92.41	86.08	88.61	83.54	70.89
Representación en lengua natural	No incluye una explicación	84.81	87.34	83.54	81.01	77.22	77.22
	Incluye una explicación no correcta	2.53	.00	1.27	2.53	.00	1.27
	Incluye una explicación correcta basada únicamente en el procedimiento	8.86	8.86	10.13	11.39	12.66	11.39
	Incluye una explicación correcta no basada únicamente en el procedimiento	3.80	3.80	5.06	5.06	10.13	10.13

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados muestran porcentajes altos en el desempeño, por parte de los futuros maestros, en cada uno de los registros, excepto en el registro pictórico en la división. Y resultados bajos en el uso de la lengua natural. Esta situación de dificultad se refleja en los comentarios cualitativos de las preguntas que se les solicitan. Algunos ejemplos de estos comentarios son: “he encontrado dificultad y sigo teniendo dudas con la explicación de la división”, “me ha parecido un poco complicado,

ya que nunca había representado gráficamente las operaciones de las fracciones. La más complicada de todas me ha parecido la división, ya que todavía no la comprendo bien gráficamente”, “no he podido realizar uno de los ejercicios debido a que no comprendo en su totalidad el proceso de la división representada en fracciones”.

La representación pictórica más elegida por los futuros maestros, como ya ocurriese en el diagnóstico, son los rectángulos (90.79%).

La representación pictórica de la multiplicación presenta un porcentaje de éxito superior (69.20%) al resto de operaciones, mostrando la mayoría de estos casos una representación geométrica (figura 3).

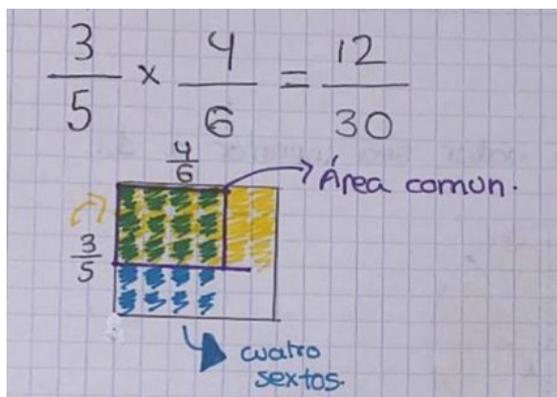


Figura 3. Muestra de trabajo para la multiplicación, con representación pictórica, simbólica y lengua natural.

A pesar del elevado porcentaje de éxito en la representación pictórica de las fracciones mayor y menor que la unidad, se han detectado errores asociados a la propia construcción de fracción, con una construcción donde las partes tienen distintos tamaños (figura 4).

Una fracción cuyo valor sea inferior a 1  
 $\frac{2}{3}$

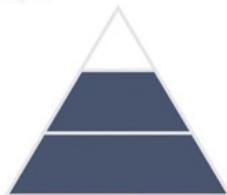


Figura 4. Muestra de trabajo para la representación de una fracción propia, con distinto tamaño en las partes.

El error más frecuente en la representación pictórica de suma y resta, se ha debido al uso de distintos tamaños para la unidad (figura 5).

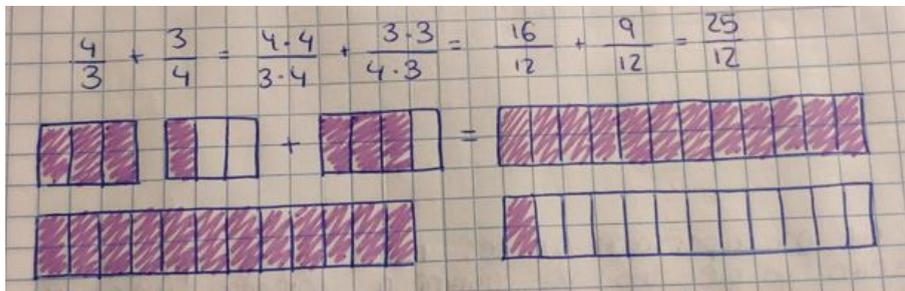


Figura 5. Muestra de trabajo para la representación de la suma con distintos tamaños para la unidad.

Relativo al registro simbólico, contemplamos que el porcentaje de éxito para cada una de las tareas planteadas es superior a cualquier otra representación. Entre todas estas tareas, los resultados con un porcentaje de logro menor se encuentran en la división, y como ocurre con la multiplicación, el futuro maestro se apoya en la lengua natural para acompañar a cada una de las igualdades. Tal y como afirman algunos estudiantes, esta representación era la única que habían utilizado hasta ese momento.

Finalmente, en los registros de la lengua natural encontramos un alto porcentaje de alumnos que no llegan a utilizar este sistema de representación. A pesar de estos bajos porcentajes de explicación correcta, los porcentajes mayores los encontramos en la multiplicación y la división, asociado tanto al procedimiento, donde los alumnos mencionan cada uno de los pasos realizados, como otro tipo de comentarios asociados al concepto y no tanto al procedimiento (figura 6).

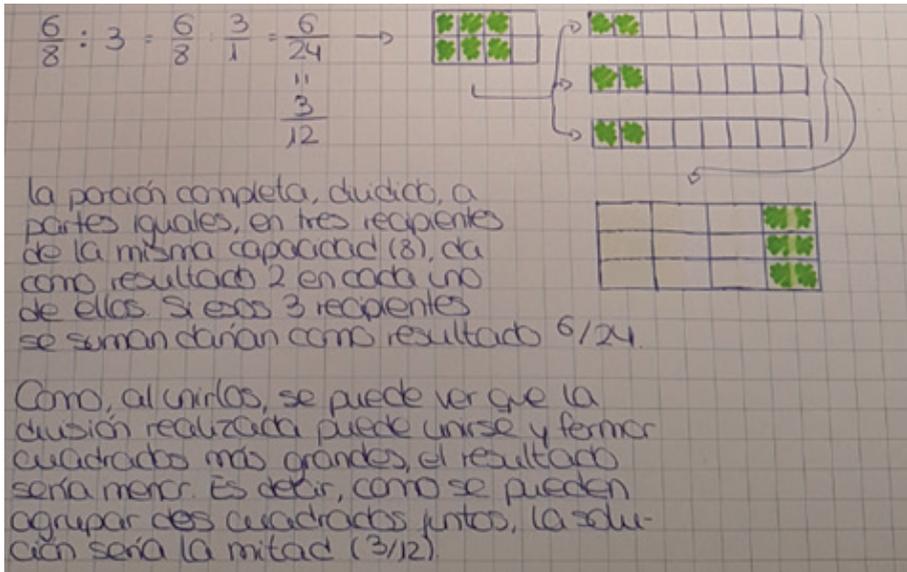


Figura 6. Muestra de trabajo para la representación simbólica, pictórica y lengua natural en la división.

En cuanto a la utilidad del uso de distintas representaciones, de manera general valoran positivamente este hecho, y señalan el desconocimiento previo de estos aspectos, ya que reconocen haber aprendido de manera mecánica sin reflexión alguna. Algunos de los comentarios proporcionados por los futuros maestros fueron: “Considero que la representación sí ayuda a los niños a entender el significado físico de la fracción pues, de no hacerlo, la fracción es un concepto abstracto”, “me parece necesario para que los alumnos puedan entender la naturaleza de los números racionales y su uso en matemáticas y en sus aplicaciones en la vida real, y no pensar que son unos números a los que se les ha atribuido unas cuantas reglas arbitrarias con las que funcionan”, “creo que a los niños les ayuda a entender el significado y a no ver las fracciones como algo abstracto”.

Se utilizó el coeficiente Tau de Kendall para evaluar la relación de los valores de los distintos registros y las operaciones, entre las tareas de diagnóstico y a posteriori ( $p < .001$ ), concluyendo que existe relación en todas las categorías.

## Conclusiones

Los resultados de este trabajo dadas las características particulares de la muestra de estudio no son generalizables, sin embargo, sí que nos sirven para “proporcionar información sobre aspectos de los docentes en formación relacionados con el conocimiento y el papel de las representaciones” (Dreher, Kuntze & Lerman, 2016, p. 368) que nos ayudarán a la mejora de los materiales en los procesos formativos relacionados con los contenidos de las fracciones, dado que podemos considerarlo como un contenido difícil de aprender y enseñar (Lamon, 2007; Newton, 2008).

Para concluir este trabajo intentamos dar respuesta a las preguntas de investigación que nos hicimos de manera previa comenzando por justificar el uso del modelo MTSK para el análisis, dado que el fin último de este trabajo de investigación es facilitar el análisis de una situación de enseñanza concreta que se utilizará en el futuro en la formación de maestros (Carrillo et al., 2018).

En relación a la representación (KoT), los futuros maestros de primaria en formación desconocen la representación pictórica de las fracciones de manera general, coincidiendo con los resultados de Ball (1990). Estos reconocen entre sus dificultades el hecho de que no ha habido reflexión en su aprendizaje, habiendo limitado su desempeño al uso de procedimientos.

El registro pictórico preferente en la resolución es el que utiliza rectángulos, tanto antes como después de la formación. Los principales errores en la representación pictórica son debidos al cambio del tamaño de la unidad (Llinares y Sánchez, 1997), por lo que consideramos que este debe ser un aspecto central en los planes formativos, al tiempo que se debe afianzar el conocimiento de las conexiones entre las distintas representaciones (KSM), y enseñar no priorizando el uso de procedimientos (KoT).

En cuanto al registro simbólico los resultados inferiores se muestran en la división, podemos pensar por la forma en que se muestran las distintas representaciones pictóricas que este hecho es debido a que la fracción se observa en este caso como dos números enteros independientes (Newstead & Murray, 1998).

Los futuros maestros utilizan de manera preferente el registro de la lengua natural (KPM) en un formato poco comprensivo, limitándose a

describir procedimientos o pasos ordenados para la realización de operaciones. Sin embargo, tras la formación el lenguaje natural pasa a un segundo plano, y los resultados mejoran excepto en la representación pictórica de la división. Este hecho nos muestra la importancia de dar oportunidades de uso de distintos registros para demostrar la comprensión (Rothery y Flores, 2014).

Los buenos resultados en la operación de la multiplicación en el registro pictórico pueden justificarse desde el hecho de que uno de los materiales utilizados fue el papel cuadriculado para la representación, siendo este tipo de representación el utilizado de manera preferente.

El plan formativo ha supuesto una mejora de los resultados, aunque lo que más valoramos como formadores es el proceso reflexivo al que se ha dado lugar, haciendo que los futuros maestros cuestionen la forma en que aprendieron dichos contenidos. Este hecho se refleja por ejemplo en el mayor uso del registro de la lengua natural en la multiplicación y división, complementando a los otros registros y describiendo de manera comprensiva la operación.

Los estudiantes valoran la comprensión de los conceptos relacionados con fracciones desde el uso de la representación y la conexiones con el concepto, coincidiendo con los resultados de Lee y Lee (2019).

Este trabajo nos ha permitido identificar alguno de los obstáculos con los que acceden los estudiantes al Grado en Educación, que pueden condicionar el aprendizaje de la noción de fracción. Aunque será necesario continuar el análisis con otros grupos de estudiantes que acceden a los grados de magisterio, para contrastar los resultados expuestos. Los planes formativos de los futuros maestros deben tener en cuenta las particularidades de este contenido, considerando las operaciones desde distintos registros de representación que faciliten su comprensión, para su posterior uso en contextos de resolución de problemas. De esta manera los estudiantes podrán aprender de manera conjunta desde la perspectiva del contenido matemático (MK) y el contenido didáctico (PCK), que les facilitará su posterior labor docente.

## Referencias

- Adu-Gyamfi, K., Schwartz, C.S., Sinicrope, R. & Bossé, M.J. (2019). Making sense of fraction division: domain and representation knowledge of preservice elementary teachers on a fraction division task. *Mathematics Education Research Journal*, 31, 507–528. doi:10.1007/s13394-019-00265-2
- Ávila, A. (2019). Significados, representaciones y lenguaje: las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria. *Educación matemática*, 31(2), 22-60. doi:10.24844/EM3102.02
- Ball, D.L. (1990). The mathematical understanding that preservice teachers bring to teacher education. *The elementary School Journal*, 90(4), 449–466. doi:10.1086/461626
- Block, D., Mendoza, T. y Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. México: SM.
- Bufor, Á., Llinares, S. y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista mexicana de investigación educativa*, 23(76), 229-251.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, M., Ribeiro, M. & Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. doi:10.1080/14794802.2018.1479981
- Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Contreras, L.C. y Climent, N. (2015). El profesor en el marco de los ETM: el papel del MTSK como modelo de conocimiento. En I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak, y P. Richard (Eds.), *Actas del ETM 4* (pp. 461-471). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
- Chinnappan, M. & Forrester, T. (2014). Generating procedural and conceptual knowledge of fractions by pre-service teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 871-896. doi:10.1007/s13394-014-0131-x
- D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México: Reverté.
- Depaepe, F., Van Roy, P., Torbeyns, B., Kleickmann, T, Van Dooren, W. & Verschaffel, L.J. (2018). Stimulating pre-service teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 99, 197–216. doi:10.1007/s10649-018-9822-7
- Dreher, A., Kuntze, S. & Lerman, S. (2016). Why use multiple representations in the mathematics classroom? Views of English and German preservice teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(2), 363-382. doi:10.1007/s10763-015-9633-6
- Duval, R. (1998). Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigación en Matemáticas Educativa II*. (pp. 173-202). México: CINVESTAV.
- Escolano, R. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: Un estudio desde los modelos de medida y cociente*. (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza.

- Fandiño, M. (2009). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos*. Colombia: Magisterio.
- Gómez, B., Figueras, O. y Contreras, M. (2016). Modelos de enseñanza de los algoritmos de la división de fracciones. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9, 43-63. doi:10.35763/aiem.v0i9.147
- Gómez, M. y Pantoja, Y. (2013). Límite de funciones, sistemas de representación y estándares de calidad: una metodología de análisis de textos escolares. *Revista Sigma*, 11(1), 26-38.
- Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S. & Choy, B.H. (2018). Enhancing noticing: Using a hypothetical learning trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourse. *Eurasia. Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(11), 1-16. doi:10.29333/ejmste/93421
- Janvier, C. (1987). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.
- Kara, F. & Incikabi, L. (2018). Sixth grade students' skills of using multiple representations in addition and subtraction operations in fractions. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 10(4), 463-474. doi:10.26822/iejee.2018438137
- Khoury, H.A. & Zazkis, R. (1994). On fractions and non-standard representations: Pre-service teachers' concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 191-204.
- Kieren, T.E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R.A. Lesh & D.A. Bradbard (Eds). *Number and Measurement. Papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC Information Analysis Center for Science, Mathematics and Environmental Education.
- Lamon, S.J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-668). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Landis, J.R. & Koch, G.G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics*, 33(1), 159-174.
- Lee, M.Y. (2017). Pre-service teachers' flexibility with referent units in solving a fraction division problem. *Educational Studies in Mathematics*, 96(3), 327-348. doi:10.1007/s10649-017-9771-6
- Lee, M.Y. & Lee, J. (2019). Pre-service Teachers' Perceptions of the Use of Representations and Suggestions for Students' Incorrect Use. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(9), em1745. doi:10.29333/ejmste/103055
- Li, Y. & Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: The case of fraction division. *ZDM*, 40(5), 833-843. doi:10.1007/s11858-008-0148-2
- Liñán, M.M., Barrera, V.J. y Infante, J.M. (2014). Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: la resolución de un problema con división de fracciones. *EA, Escuela Abierta*, 17, 41-63. doi:10.29257/EA17.2014.04
- Liñán, M.M., Contreras, L.C. y Barrera, V.J. (2016). Conocimiento de los Temas (KoT). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 12-20). Huelva: CGSE.
- Llinares, S. y Sánchez, M.V. (1997). Aprender a enseñar, modos de representación y

Arteaga-Martínez, B. y Arnal-Palacián, M. (2022). Análisis del conocimiento especializado en matemáticas con maestros en formación: una experiencia con la representación de fracciones. *Educatio Siglo XXI*, 40(1), 107-130.

- número racional. *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Zamora: Universidad de Granada, SEIEM.
- McMillan, J.H. & Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa* (5.a edición) Pearson educación.
- Mick, H.W. & Snicrope, R. (1989). Two meanings of fraction multiplication. *School Science and Mathematics*, 89(8), 632-639.
- Montes, M.A., Contreras, L.C., Liñán, M.M., Muñoz Catalán, M.C., Climent, N. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación*, 367, 36-62. doi:10.4438/1988-592X-RE-2015-367-282
- Newstead, K. & Murray, H. (1998). Young students' constructions of fractions. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education*: Vol. 3. (pp. 295-302). Stellenbosch, South Africa.
- Newton, K.J. (2008). An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions. *American educational research journal*, 45(4), 1080-1110. doi:10.3102/0002831208320851
- Perera, P.B. y Valdemoros, M.E. (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. En M. Camacho, P. Flores y M.P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 209-218). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Reys, R., Lindquist, M., Lambdin, D.V. & Smith, N.L. (2007). *Helping children learn mathematics* (9th edition). Boston: John Wiley & Sons.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.
- Rodríguez, P. y Navarrete, C.A. (2020). Influencia del conocimiento profundo del profesor sobre fracciones en el aprendizaje de alumnos de 4o. grado. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 22, e10, 1-18. doi:10.24320/redie.2020.22.e10.2285
- Rodríguez-Domingo, S. (2016). Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria. (Tesis doctoral). Universidad de Granada.
- Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema: Bolema de Educação Matemática*, 29(51), 143-166. doi:10.1590/1980-4415v29n51a08
- Rothery, T.G. y Flores, A. (2014). Orden y distancia de fracciones y decimales en la recta numérica: El caso de Abigail. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 5, 73-90.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. doi:10.3102/0013189X015002004
- Siegler, R.S., Duncan, G.J., Davis-Kean, P.E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M.I. & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological science*, 23(7), 691-697. doi:10.1177/0956797612440101
- Son, J.W. (2005). A comparison of how textbooks teach multiplication of fractions and division of fractions in Korea and in the U.S. 2005. In H.L. Chick & J.L. Vincent (Eds.).

Arteaga-Martínez, B. y Arnal-Palacián, M. (2022). Análisis del conocimiento especializado en matemáticas con maestros en formación: una experiencia con la representación de fracciones. *Educatio Siglo XXI*, 40(1), 107-130.

*Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 201-208). Melbourne: PME.

Suh, J., Moyer, P.S. & Heo, H.J. (2005). Examining technology uses in the classroom: Developing fraction sense using virtual manipulative concept tutorials. *Journal of Interactive Online Learning*, 3(4), 1-21.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 5-25. doi:10.2307/749817

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, 89(3), 419-441. doi:10.1007/s10649-015-9606-2

Valdemoros, M.E. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 7(3), 235-256.

