Corrección a árboles modales para KE. Un procedimiento de decisión

POR

ALFREDO BURRIEZA MUÑIZ

En [1] se ofrecen procedimientos de decisión para diversos sistemas modales, a saber, *KB, KE* y *SO.*5, que constituyen una extensión del sistema de árboles de R. C. Jeffrey para la lógica proposicional clásica. Sin embargo, el procedimiento presentado en [1] para *KE* (conocido también como *K5)* no es un procedimiento decisorio para dicho sistema; más aún, ni siquiera el método de árboles presentado resulta adecuado para KE sino que, más bien, lo que se expone en [1] es un procedimiento efectivo y un método adecuado para un sistema mas débil que KE (1).

El objetivo del presente articulo consiste en establecer un sistema de árboles adecuado para KE y ofrecer además un procedimiento decisorio para el mismo. Primeramente mostraremos porqué el sistema presentado en [1] no resulta adecuado para *KE* y finalmente expondremos un sistema que resulte adecuado resolviendo además el problema de la decibilidad.

En primer lugar, señalemos que en [1] tan sólo se esboza la prueba de Adecuación, enunciando para ello un lema fundamental que únicamente se demuestra de modo riguroso en una dirección (la parte «sólo si» del lema) mientras que la otra dirección (la parte «si») solamente queda indicada. Enunciaremos dicho lema referido a *KE* exclusivamente:

(1) Ignoro de qué sistema pueda tratarse.

Hay un árbol cerrado para $\neg A$ si sólo si A es un teorema de KE ($\vdash_{KE} A$).

La dirección «sólo si» del lema, probada en [1], nos indica que todo lo que puede demostrarse en el sistema de árboles dado para KE puede ser demostrado en el sistema axiomático KE (o *K5*). La otra dirección (la parte «si» del lema) se requiere para establecer finalmente la equivalencia deductiva de ambos sistemas: el método de árboles presentado para KE y el sistema axiomático KE. Pero esta última dirección falla en [1] como veremos seguidamente.

La prueba de la parte «si» del lema anteriormente enunciado descansa sobre un argumento de tipo inductivo que se reduce a lo siguiente:

(1) Todo (esquema de) axioma de KE tiene un árbol cerrado.
(2) Las reglas de Necesariedad y el Modus Ponens respecto de la implicación material preservan dicha característica. Esto es, si $\neg A$ tiene un árbol cerrado, entonces también lo tiene $\neg LA$ (Necesariedad). Si $\neg A$ y $\neg(A \rightarrow B)$ tienen árboles cerrados, también lo tiene $\neg B$ (Modus Ponens).

La comprobación de (1) es trivial. El esquema de axioma «$\neg L \neg LA \rightarrow LA$» (característico de KE) tiene un árbol cerrado con el método presentado en [1]. Respecto de (2), la regla de Necesariedad puede comprobarse trivialmente. Sin embargo, no siempre tenemos un árbol cerrado para $\neg B$ cuando tenemos, respectivamente, árboles cerrados para $\neg A$ y $\neg(A \rightarrow B)$ en el sistema que aparece en [1]. Para comprobar lo dicho basta reparar en que las siguientes fórmulas: «$\neg((MMp \rightarrow MLMp) \wedge (MLMp \rightarrow LMp))$» y «$\neg((MMp \rightarrow MLMp) \wedge (MLMp \rightarrow (MMp \rightarrow LMp))$», tiene. árboles cerrados; no así la fórmula «$\neg(MMp \rightarrow LMp)$». (Las negaciones respectivas de las fórmulas anteriores son teoremas del sistema axiomático KE). Con lo cual, no todo teorema de KE tiene un árbol cerrado en el sistema de árboles presentado en [1] para KE.

La causa de que el sistema presentado en [1] no sea adecuado para KE reside en la inapropiada formulación de la regla (LKE) como veremos seguidamente. Dicha regla dice así en [1]:

(LKE): LA/i

$\quad\quad\quad\quad |$

A/j donde $j = i$, si —para algún k— aparece en la rama $\langle k, i \rangle$ anteriormente a A/j; o j es cualquier índice tal que, anteriormente a A/j, aparezca en la rama $\langle i, j \rangle$ o bien —para algún k— $\langle k, i \rangle$ y $\langle k, j \rangle$.

Los índices representan —informalmente— los mundos posibles de un modelo y los pares ordenados de índices (marcadores) como $\langle i, j \rangle$ representan la relación de accesibilidad R entre los mundos j e i en el modelo, de forma que el marcador anterior significa que el mundo j es accesible al mundo i. Respecto del papel jugado por las distintas reglas en cuanto al establecimiento de una relación de accesibilidad entre los índices de una rama resulta lo siguiente: la regla *(MKE)* únicamente introduce índices en el árbol y suministra los distintos marcadores. La regla *(LKE)*, debido a sus condiciones de aplicación, relaciona dichos marcadores entre sí, de manera que las conclusiones que resulten de la aplicación de dicha regla se establezcan conforme a una relación de accesibilidad determinada. El resto de las reglas no juega ningún papel relevante.

Así pues, el conjunto de índices que aparecen en una rama dada junto con la relación de accesibilidad establecida entre ellos ha de constituir una estructura de un modelo para *KE*, que es lo mismo que decir que dicha estructura ha de ser euclidiana, y esto se consigue merced a las condiciones de aplicación de la regla *(LKE)*, que ha de tener en cuenta ese hecho. Si utilizamos una expresión como «iRj» para expresar que j es accesible a i, cualquiera que sean los indices j e i, diremos que la relación R es euclidiana si y sólo si para índices arbitrarios i, j y k en una rama dada resulta que si iRj e iRk entonces jRk. Pero la regla *(LKE)* formulada anteriormente posee las siguientes condiciones de aplicación: si un marcador como $< i, j >$ aparece en una rama dada entonces no solamente tendremos iRj (j es accesible a i), como indica el propio marcador, sino que además se cumple implícitamente que jRj (relación de reflexividad secundaria. Toda relación euclidiana es una relación tal). Esto último permite que, dado LA/j en la rama, podamos obtener –por $(LKE)–A/j$ (y para ello no ha sido necesario introducir el marcador $<j, j>$ en la rama). Por otro lado, si contamos con marcadores como $< i, j >$ e $< i, k >$ en la rama, entonces se cumple jRk (y también kRj, pues el orden de los marcadores resulta irrelevante). En este caso, tampoco se introducen los marcadores $<j, k>$ y $<k, j>$ en la rama. Ahora bien, como podremos apreciar a continuación, no tenemos una relación euclidiana entre los índices de una rama con estas condiciones; lo que trae consigo que haya teoremas de *KE* cuyas negaciones no tengan árboles cerrados en el sistema presentado en [1]. Veamos varios ejemplos para cuyo tratamiento presupondremos un conocimiento de las reglas y método formulados en [1].

Ejemplo **(a)**: la fórmula «$Mp \rightarrow LLMp$» es un teorema de *KE*, pero su negación no tiene un árbol cerrado como se muestra a continuación.

1.	$\surd \neg (Mp \rightarrow LLMp)/0$		
2.	$\surd Mp/0$		de 1 por $(\neg \rightarrow)$
3.	$\surd \neg LLMp/0$		de 1 por $(\neg \rightarrow)$
4.	$\surd M \neg LMp/0$		de **3** por $(\neg L)$
5.	$p/1$	$< 0,1 >$	de *2* por *(MKE)*
6.	$\neg LMp/2$	$< 0,2 >$	de **4** por *(MKE)*

7.	$\surd\ M \neg Mp/2$	de 6 por $(\neg L)$
8.	$\neg Mp/3 < 2{,}3 >$	de 7 por (MKE)
9.	$3\ L \neg p/3$	de 8 por $(\neg M)$
10.	$\neg p/3$	de 9 por (LKE)

Todas las posibles aplicaciones de las reglas han sido efectuadas en el árbol como puede comprobarse y sin embargo no cierra. Para conseguir cerrar el árbol tendríamos que obtener «$\neg$ p/1» a partir de la expresión «$L \neg p/3$» que aparece en la línea 9 por aplicación de *(LKE)*; pero la regla no lo permite y no hay otro modo de lograr esa conclusión. No obstante, si entendemos que los marcadores que aparecen en la rama (que constituye además la totalidad del árbol) expresan una relación de accesibilidad entre los índices de la manera que hemos especificado anteriormente tendremos $0R1$, $OR2$ y $2R3$, dado $< 0{,}1 >$, $< 0{,}2 >$ y $< 2{,}3 >$ respectivamente, de modo explícito. Si R es una relación euclidiana entonces se dará también $2R1$ —pues $0R1$ y $OR2$— y, de esto junto con $2R3$, llegamos finalmente a $3R1$, esto es, el índice *3* es accesible al índice *1* en la rama. Si la regla *(LKE)* hubiese tenido en cuenta este hecho hubiésemos podido concluir perfectamente «$\neg p/1$» a partir de «$L \neg p/3$» como se pretendía, cerrando el árbol.

Ejemplo (b): la fórmula «MLp $\rightarrow$ LLp» es un teorema de *KE*, pero su negación no tiene un árbol cerrado como mostramos seguidamente:

1.	$\surd \neg (MLp \rightarrow LLp)/0$	
2.	$\surd\ MLp/0$	de *1* por $(\neg \rightarrow)$
3.	$\surd \neg LLp/0$	de *1* por $(\neg \rightarrow)$
4.	$\surd\ M \neg Lp/0$	de *3* por $(\neg L)$
5.	$1\ \ 2\ Lp/1 \quad < 0{,}1 >$	de *2* por (MKE)
6.	$\surd \neg Lp/2 \quad < 0{,}2 >$	de 4 por (MKE)
7.	$\surd\ M \neg p/2$	de 6 por $(\neg L)$
8.	$\neg p/3 < 2{,}3 >$	de 7 por (MKE)
9.	$p/1$	de 5 por (LKE)
10.	$p/2$	de 5 por (LKE)

De nuevo resulta que todas las posibles aplicaciones de las reglas han sido hechas pero el árbol no cierra. Sin embargo, dado que contamos con los marcadores $< 0{,}1 >$, $< 0{,}2 >$ y $< 2{,}3 >$ tenemos, por tanto, $0R1$, $OR2$ y $2R3$. *A* partir de aquí (siendo R euclidiana) podemos obtener $2R1$ —pues $0R2$ y $0R1$— y finalmente, dado esto y $2R3$, $1R3$. Si la regla *(LKE)* tuviese esto en cuenta, en sus condiciones de aplicación, podríamos haber obtenido «$p/3$» a partir de la expresión «$Lp/1$» de la línea 5 y el árbol cerraría. Veamos un último ejemplo.

Ejemplo (c): la fórmula «$LLp \rightarrow LLLp$» es un teorema de *KE,* pero su negación no tiene un árbol cerrado como se muestra a continuación.

1.	$\surd \neg (LLp \rightarrow LLLp)/0$		
2.	$1\ LLp/0$		de *1* por $(\neg \rightarrow)$
3.	$\surd \neg\ 'LLLp/0$		de 1 por $(\neg \rightarrow)$
4.	$\surd\ M \neg LLp/0$		de *3* por $(\neg L)$
5.	$\surd \neg LLp/1$	$< 0,1 >$	de *4* por *(MKE)*
6.	$\surd\ M \neg Lp/1$		de 5 por $(\neg L)$
7.	$\surd \neg Lp/2\cdot$	$< 1,2 >$	de *6* por *(MKE)*
8.	$\surd\ M \neg p/2$		de *7* por $(\neg L)$
9.	$\neg p/3$	$< 2,3 >$	de 8 por *(MKE)*
10.	$1\ \ 2\ Lp/1$		de *2* por *(LKE)*
11.	$p/1$		de *10* por *(LKE)*
12.	$p/2$		de *10* por *(LKE)*

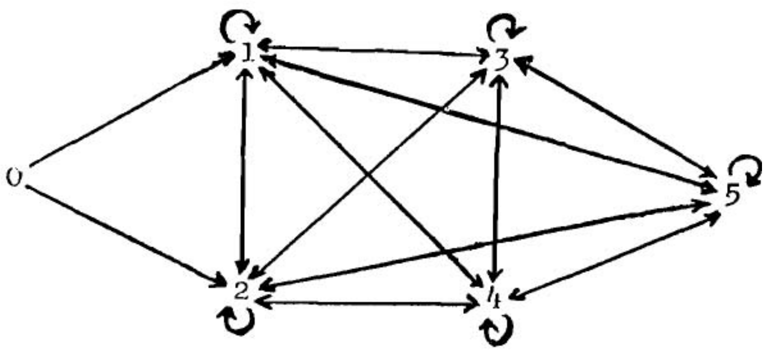
Como puede observarse el árbol no cierra y todas las posibles aplicaciones de las reglas han sido llevadas a cabo. Por otro lado, debido a que los marcadores $< 0,1 >$, $< 1,2 >$ *y* $< 2,3 >$ aparecen en la rama resulta que tenemos $0R1$, $1R2$ y $2R3$; pero esto conduce a $1R1$ –pues $0R1$ (por reflexividad secundaria)– y, dado $1R2$, tenemos entonces $2R1$, y finalmente, de aqui, junto con $2R3$, llegamos a $1R3$. Esta conclusión se desprende de una relación R euclidiana, y si la regla *(LKE)* tuviera en cuenta este hecho se podría obtener «$p/3$» a partir de la expresión «$Lp/1$» de la línea *10,* cerrando el árbol, pero la regla *(LKE)* tal y como está formulada no lo permite.

Debe advertirse que en los ejemplos que hemos visto el orden de aplicación de las reglas es irrelevante; no importa en qué orden se apliquen las reglas, los distintos árboles construidos estarán siempre abiertos. Queda claro, pues, que las condiciones de aplicación de la regla *(LKE)* no se ajustan a una relación euclidiana entre los índices de una rama.

Para solventar esta situación de modo general partiremos de un ejemplo ilustrativo. Sean $< 0,1 >$, $< 0,2 >$, $< 1,3 >$, $< 3,4 >$ *y* $< 2,5 >$ todos los marcadores que aparecen en una rama dada de un árbol en una determinada etapa de la construcción de dicho árbol. Obtengamos todas las relaciones posibles que se tendrian entre los índices (tratados como si fueran los mundos posibles de una estructura) conforme a una relación de accesibilidad euclidiana partiendo de lo establecido por los marcadores. Tendremos, pues, como punto de partida $0R1$, $0R2$, $1R3$, $3R4$ *y* $2R5$. Hagamos a continuación una tabla con el resto de las relaciones anotando a la derecha de cada relación obtenida su justificación correspondiente:

(a)	1R1	– pues 0R1 (reflex. sec.)	(m)	2R4	– por (f) y 3R4
(b)	1R2	– por 0R1 y OR2	(n)	4R2	
(c)	2R1		(ñ)	4R3	– por (i) y 1R3
(d)	2R2	– pues OR2 (reflex. sec.)	(o)	4R4	– pues 3R4 (reflex. sec.)
(e)	2R3	– por 1R3 y (b)	(p)	3R5	– por (e) y 2R5
(f)	3R2		(q)	5R3	
(g)	3R1	– por 1R3 y (a)	(r)	4R5	– por 3R4 y (p)
(h)	3R3	– pues 1R3 (reflex. sec.)	(s)	5R4	
(i)	1R4	– por (g) y 3R4	(t)	5R2	– por (k) y (b)
(j)	4R1		(u)	5R5	– pues 2R5 (reflex. sec.)
(k)	1R5	– por (c) y 2R5			
(l)	5R1				

El siguiente diagrama recoge lo expresado por la tabla anterior. La flecha trazada de un índice a otro refleja la relación de accesibilidad, indicando que este último índice es accesible al primero. Obviamente, la doble flecha expresa una relación de accesibilidad mutua y una flecha que parta de un índice y acabe en él indica que dicho índice es accesible a si mismo. Así:



Como puede apreciarse, todos los índices en el diagrama –excepción hecha de 0– se hallan relacionados entre si. A continuación, teniendo en cuenta los marcadores iniciales obtendremos todas las conclusiones posibles a partir de una fórmula como LA asociada a cualquier indice i ($0 \leqslant i \leqslant 5$), esto es, si contásemos con LA/i en una rama, por aplicación de la regla (LKE):

Para $i = 0$, tendríamos $A/1$ y $A/2$.
» $i = 1$, » $A/1$, $A/2$ y $A/3$.
» $i = 2$, » $A/1$, $A/2$ y $A/5$.
» $i = 3$, » $A/3$ y $A/4$.
» $i = 4$, » $A/4$.
» $i = 5$, » $A/5$.

Hemos obtenido entonces todas las conclusiones posibles permitidas por la regla *(LKE)* al aplicarse a LA/i ($0 \leqslant i \leqslant 5$) en una rama. Sin embargo, como puede observarse atendiendo al diagrama anterior, la regla *(LKE)* –tal *y* como está formulada– no permite obtener todas las conclusiones posibles que podrían obtenerse si sus condiciones de aplicación se ajustasen a una relación euclidiana entre los índices de una rama. Por ejemplo, si LA fuese verdadera en 1 (en el diagrama) A lo sería en *1, 2, 3, 4 y* 5. *Y* sin embargo, por aplicación de *(LKE)* a $LA/1$ sólo obtendremos (véase la lista de conclusiones anterior) $A/1$, $A/2$ *y* $A/3$; es decir, A sería verdadera en *1, 2 y 3,* pero nada se dice acerca de *4 y 5.* Así pues, *(LKE)* tiene unas condiciones de aplicación conformes con una relación de accesibilidad R más débil que una R euclidiana, pues ya sabemos que todo teorema del sistema de árboles presentado en [1] es un teorema de *KE* (véase la demostración en [1]).

Podemos generalizar la situación expuesta en el diagrama anterior, cualesquiera que sean los marcadores que intervienen en una rama en una etapa dada, de manera que siempre resulte una relación euclidiana entre los índices *y* reformular convenientemente la regla *(LKE)*. Pero para ello introduciremos la siguiente noción. Diremos que «hay una cadena desde un índice i_1 hasta un índice i_n $(n > 1)$ en una rama», o más simplemente «hay una cadena desde i_1 hasta i_n» si *y* sólo si hay una sucesión de índices $i_1, i_2, ..., i_n$ $(n > 1)$ tal que aparecen en la rama los marcadores $< i_1, i_2 >$, $< i_2, i_3 >$, ..., $< i_{n-1}, i_n >$. Nótese que un único marcador, $< i, j >$, para cualesquiera j e i, determina una cadena desde i hasta j. Si tomamos los marcadores con los cuales configuramos el diagrama anterior podemos establecer distintas cadenas de diversa longitud; valga como ejemplo la cadena desde 0 hasta *4* formada .por *0, 1, 3 y 4;* debido a la presencia de $< 0,1 >$, $< 1,3 >$ *y* $< 3,4 >$. Igualmente podríamos considerar la cadena (más corta) desde 0 hasta *3,* etc.

Con ayuda de este concepto podemos ahora señalar que, partiendo de la situación incial dada por los marcadores $< 0,1 >$, $< 0,2 >$, $< 1,3 >$, $< 3,4 >$ *y* $< 2,5 >$, hemos relacionado finalmente dos índices cualesquiera j e i pertenecientes al conjunto $\{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$ siempre que exista un marcador como $< i, j >$, o bien un índice k perteneciente a ese mismo conjunto tal que haya una cadena desde k hasta *i y* una cadena desde k hasta *j.* La situación final es la reflejada en el diagrama correspondiente. (Nótese además que ambas cadenas no tienen porqué ser necesariamente distintas. En este caso, $i = j$ y, por tanto, i $(= j)$ estaría relacionado consigo mismo, lo cual expresa la relación de reflexividad secundaria).

Podemos generalizar lo dicho estableciendo la siguiente condición para índices cualesquiera j e i en una rama: diremos que iRj (j es accesible a i) si y sólo si aparece en la rama $< i, j >$ o bien —para algún k en la rama—'hay una cadena desde k hasta i y una cadena desde k hasta j.

Resulta fácil demostrar que esta condición establece una relación euclidiana (recordemos: si iRj e iRk entonces jRk, para cualesquiera i, j, k en la rama).

Pero podemos expresar lo mismo de otra manera, a saber: diremos que iRj si y sólo si el marcador $< i, j >$ aparece en la rama, donde i es el índice inicial, o bien tanto i como j son distintos del indice inicial.

Esta condición es fácil de comprender teniendo en cuenta cómo se introducen los índices en el árbol y lo siguiente: el indice inicial no tiene porqué ser accesible a sí mismo (una relación euclidiana no es reflexiva pero es reflexiva secundaria, lo que conlleva que cualquier indice distinto del índice inicial ha de ser accesible a sí mismo pues siempre habrá una cadena, al menos, desde el índice inicial hasta dicho índice). Pero para índices cualesquiera i, j (distintos del índice inicial) siempre podemos encontrar un índice k, al menos el propio índice inicial, a partir del cual haya una cadena hasta cada uno de esos dos índices. Lo cual permite, consecuentemente, establecer entre ellos una relación de accesibilidad mutua. Lo demás es obvio. Después de lo dicho estamos en condiciones de reformular la regla *(LKE)* como sigue:

$$(LKE): \qquad \begin{array}{c} LA/i \\ | \\ A/j \end{array}$$

donde j es tal que, anteriormente a A/j, aparece la rama $< i, j >$ e i es el índice inicial; o bien i no es el índice inicial y j es cualquier índice que aparezca en la rama distinto del índice inicial.

Con ayuda de esta regla cierran todos los árboles de los ejemplos anteriores como puede comprobarse fácilmente.

La regla *(LKE)* así reformulada es apropiada para KE (o $K5$), pues las condiciones de aplicación de la regla se hallan conformes con una estructura euclidiana respecto a los índices, lo cual significa que es una estructura para *KE*.

Podemos dar una prueba de *Adecuación* para el sistema que resulta de sustituir la regla *(LKE)* de [1] por la regla *(LKE)* tal y como la hemos formulado anteriormente. Sin embargo, este nuevo sistema no es decidible con el procedimiento expuesto en [1] como procedimiento de decisión para *KE*. Para comprobarlo, basta con ver que la fórmula «$\neg (MLMp \rightarrow LMLp)$» tiene un árbol infinito. La prueba se deja al lector. En cambio, se obtiene un sistema más elegante e igualmente adecuado para *KE* si sustituimos además la regla *(MKE)* de [1] por la regla *(MKE)* que expondremos seguidamente. Más aún, para el nuevo sistema alcanzado —con las reglas *(LKE)* y *(MKE)* reformuladas— daremos un procedimiento de decisión; con lo cual, tendremos resuelto el problema de la decibilidad.

La nueva regla *(MKE)* reza como sigue:

(MKE): MA/i

$|$

$A/j < i, j >$ donde $j = k$ si —para algún k distinto del índice inicial— aparece en la rama A/k anteriormente a $A/j < i, j >$; si no, $j > i$ y j no aparece previamente en la rama.

A continuación ofrecemos el procedimiento de decisión: para construir un árbol para la fórmula dada, asociamos dicha fórmula con un índice arbitrario (el índice inicial del árbol, que usualmente será el índice «0»), aplicamos la regla de indiferencia apropiada a esa fórmula, luego a las fórmular resultantes y así sucesivamente. El orden de aplicación de las reglas es irrelevante. Al aplicar una regla de inferencia que no sea *(LKE)* o *(MKE)* a una fórmula determinada, anotamos la(s) lista(s) de conclusiones de esa regla al final de cada rama abierta que pase por dicha fórmula y acto seguido la marcamos, trazando a su izquierda el signo «$\surd$». Al aplicar la regla *(LKE)* a una fórmula, anotamos la conclusión al final de cada rama abierta que pase por esa fórmula, excepto en aquéllas ramas en las cuales —previamente a la aplicación de la regla— no aparezca el índice perteneciente a la conclusión o bien contengan ya dicha conclusión. En este caso no marcamos la fórmula a la cual hemos aplicado *(LKE)*. Por último, al aplicar la regla *(MKE)* a una fórmula, anotamos, al final de cada rama abierta que pase por esa fórmula, la conclusión pertinente a cada una de esas ramas según las especificaciones de *(MKE)*.

Ninguna regla puede aplicarse a una fórmula previamente marcada. Dado esto, que la fórmula inicial es finita en longitud y dadas las restricciones impuestas a la regla *(MKE)*, resulta que siempre contaremos con un número finito de índices en el árbol. Es claro que en todos los casos dispondremos de un árbol ***completo*** que sea finito; esto es, un árbol finito en el que las únicas fórmulas sin marcar en cada rama abierta serán: (i) variables proposicionales o sus negaciones y (ii) fórmulas de la forma LA, pero en este caso aparecerán en la rama todas las conclusiones posibles obtenidas por aplicación de *(LKE)* a cada una de esas fórmulas.

Respecto a la Adecuación, únicamente justificaremos que en el sistema resultante de sustituir las reglas (LKE) y (MKE) formulada en [1] por las reglas (LKE) y (MKE) tal y como las hemos formulado anteriormente se cumple que, para toda fórmula A, si $\neg A$ tiene un árbol cerrado entonces hay una prueba de A en el sistema axiomático KE. (De nuevo nos remitimos a [1] para los detalles). Enunciaremos el lema fundamental para alcanzar este resultado (véase [1]):

Sea $fbfc_1$ la fbf característica de la etapa inicial de la construcción de un árbol para una fbf dada, y sea $fbfc'$ la fbf característica de una etapa cualquiera de dicho árbol. Entonces $\vdash_{KE} fbfc_1 \rightarrow fbfc'$.

La demostración de este lema procede por inducción. Nos limitaremos a mostrar únicamente los casos que surgen por aplicación de (LKE) como sigue. Supongamos que (LKE) se ha aplicado a una fbf, LA, asociada a un índice i; esto es, tenemos LA/i como línea de una rama, P, en la enésima etapa de la construcción del árbol. Sea A/j la conclusión y sea P' la rama que se obtiene al añadir A/j a P como resultado de dicha aplicación. Por «$fbfc_P$» entenderemos la fbf característica de P y por «$fbfc_{P'}$» la fbf característica de P'. Probaremos que $\vdash_{KE} fbfc_P \rightarrow fbfc_{P'}$. De aquí se sigue fácilmente –por sustitución de equivalentes– que $\vdash_{KE} fbfc_n \rightarrow fbfc_{n+1}$, donde «$fbfc_n$» es la fbf característica del árbol en la enésima etapa y «$fbfc_{n+1}$» es la fbf característica del árbol en la etapa siguiente. A continuación procederemos a enumerar los distintos casos:

En lo que sigue, j no es el índice inicial en ningún caso.

(1) j es tal que $< i, j >$ aparece en P e i es el indice inicial. Entonces $fbfc_P$ es $—LA$ A $MB—$ y $fbfc_{P'}$ es $—$ LAA $M(A$ A $B)—$. Tenemos que demostrar $\vdash_{KE} LA$ A $MB \longleftrightarrow LA$ A $M(A$ A $B)$. La demostración de esta fórmula aparece en [1].

(2) i no es el indice inicial y:

(a) $j = i$, entonces $fbfc_P$ es $—M(LA$ A $B)—$ y $fbfc_{P'}$ es $—M((LA$ A $A)$ A $B)—$. La demostración de $\vdash_{KE} M(LA$ A $B) \longleftrightarrow M((LA$ A A) A $B)$ es trivial y se da en [1].

(b) $j \neq i$, entonces hay en P un k tal que hay una cadena desde k hasta i y una cadena desde k hasta j; de manera que:

– ambas cadenas sólo tienen un índice en común, a saber, el índice k. Sea $k, i_1, i_2, ..., i_n, i$ la cadena desde k hasta i, y sea $k, j_1, j_2, ..., j_m, j$ la cadena desde k hasta j. Esto quiere decir que habrá una serie de marcadores como $< k, i_1 >$, $< i_1, i_2 >, ..., < j_m$, i $>$ correspondientes a la cadena desde k hasta i, e igualmente una serie de marcadores como $< k, j_1 >, < j_1, j_2 >, ..., < j_m, j >$ correspondientes a la cadena desde k hasta j. Así pues, $fbfc_P$ es $—M(D_1$ A $M(D_2$ A ... A $M(D_n$ A $M(LA$ A $B))$ ...$))$ A M $(E_1$ A $M(E_2$ A ... A M $(E,$ A $MC)$ ...$))—$ y $fbfc_{P'}$ es $—M(D_1$ A $M(D_2$ A ... A M $(D,$ A $M(LA$ A $B))$ ...$))$ A M

(Ei *A M(E*2 *A ... A M (E$_m$ A M(A A C)) ...))*—. Llamemos la atención sobre lo siguiente: *fbfc$_p$* resulta de eliminar todos los índices de *P* siguiendo el proceso expuesto en [1] a tal efecto. Mediante dicho proceso obtendremos, en la parte izquierda de la conjunción escrita entre guiones, la fórmula *«M(LA A B)»* asociada a i_n, como el resultado final de eliminar **i** de P y, continuando dicho proceso, obtendremos la parte izquierda asociada a ***k***, resultante de eliminar i_1 de P. En la parte derecha de la conjugación obtendremos la fórmula *«MC»*, asociada a j_m, como resultado de eliminar *J* de *P* y, de igual manera –continuando el proceso– llegaremos a obtener la parte derecha asociada a ***k*** tras eliminar j_1 de P. Finalmente obtendremos *fbfc$_p$* siguiendo el mismo proceso. Consideraciones similares se aplican a *fbfc$_{p'}$*. En los casos siguientes ahorraremos comentarios.

La justificación de este caso se realiza por inducción. Nos limitaremos a tratar el paso base y nos atendremos en lo sucesivo a esta costumbre. Nos basta, pues, con demostrar $\vdash_{KE}$ *M(LA A B) A MC* $\longleftrightarrow$ *M(LA A B) A M(A A C)*. La justificación se da en [1].

– una cadena forma parte de la otra y *J* > *i*. Es decir, tomemos ***k*** de manera que sea ***k***, i la cadena desde ***k*** hasta *i*, y ***k***, *i*, h_1, h_2, ..., h_n, *J* la cadena desde ***k*** hasta ***j*** (donde h_1, h_2, ..., h_n pueden no aparecer). Este ***k*** siempre puede encontrarse. Entonces *fbfc$_p$* es —*M((L A A B) A M(D*1 *A M(D*2 *A ... A M(D$_n$ A MC) ...)))*— y *fbfc$_{p'}$* es —*M((L A A B) A M(D*1 *A M(D2 A ... A M(D$_n$ A M(A A C)) ...))*—. Tenemos que justificar entonces $\vdash_{KE}$ *M((L A A B) A MC)* $\longleftrightarrow$ *M((L A A B) A M(A A C))*. Pero adviértase que, en realidad, basta con demostrar $\vdash_{KE}$ *LA A MC* *LA A M(A A C)*, lo cual ha quedado justificado en el caso (1).

– una cadena forma parte de la otra e i > *J*. Tomemos ***k*** de modo que sea ***k, j*** la cadena desde ***k*** hasta ***j*** y ***k, j***, h_1, h_2, ..., h_n, ***i*** la cadena desde ***k*** hasta **i**. Entonces *fbfc$_p$* es —*M(C A M(D*1 *A M(D2 A ... A M(D$_n$ A M(LA A B)) ...)))*— y *fbfc$_{p'}$* es —*M((A A C) A M(D*1 *A M(D*2 *A ... A M(D$_n$ A M(LA A B)) ...)))*—. Antes de proceder a la justificación de este caso expondremos los nuevos teoremas de KE que vamos a utilizar en la prueba que sigue, añadidos a los teoremas que ya aparecen en [1]. Se trata de:

(CI) *M(A A MB)* → *M A A MB.*

(C2) *M A A MB* → *M(A A MB).*

(Por otro lado, mediante «CP» escrito a la derecha de una línea de la prueba indicamos que para la obtención de dicha línea hemos empleado los medios propios del Cálculo Proposicional clásico. Cuando utilicemos un esquema de [1] lo indicaremos dando su enumeración en [1]).

Vamos a mostrar $\vdash_{KE} M(C \land M(LA \land B)) \longleftrightarrow M((A \land C) \land M(LA \land B))$:

1.	$M(C \land M(LA \land B)) \rightarrow MC \land M(LA \land B)$	(c1)
2.	$M(LA \land B) \rightarrow MLA \land MB$	(b12) de [1]
3.	$MLA \rightarrow LA$	(a5) de [1], Def. M
4.	$M(LA \land B) \rightarrow LA$	de 2,3 **por CP**
5.	$MC \land M(LA \land B) \rightarrow LA \land MC$	de 4 **por CP**
6.	$LA \land MC \rightarrow M(A \land C)$	(b13) de [1] y **CP**
7.	$MC \land M(LA \land B) \rightarrow M(A \land C)$	de 5,6 **por CP**
8.	$MC \land M(LA \land B) \rightarrow M(A \land C) \land M(LA \land B)$	de **7 por CP**
9.	$M(A \land C) \land M(LA \land B) \rightarrow M((A \land C) \land M(LA \land B))$	(c2)
10.	$M(C \land M(LA \land B)) \rightarrow M((A \land C) \land M(LA \land B))$	de 1,8,9 **por CP**
11.	$M((A \land C) \land M(LA \land B)) \rightarrow M(A \land C) \land M(LA \land B)$	(c1)
12.	$M(A \land C) \rightarrow MA \land MC$	(b12) de [1]
13.	$M(A \land C) \rightarrow MC$	de 12 **por CP**
14.	$M(A \land C) \land M(LA \land B) \rightarrow MC \land M(LA \land B)$	de 13 **por CP**
15.	$MC \land M(LA \land B) \rightarrow M(C \land M(LA \land B))$	(c2)
16.	$M((A \land C) \land M(LA \land B)) \rightarrow M(C \land M(LA \land B))$	de 11,14,15 **por CP**
17.	$M(C \land M(LA \land B)) \longleftrightarrow M((A \land C) \land M(LA \land B))$	de 10,16 **por CP**

Con esto damos por concluida la prueba de Adecuación

REFERENCIAS

[1] A. BURRIEZA, «Arboles modales para *KB*, KE y *SO.5*», *Anales de Filosofía*, vol. III (1985), 17-26.

RESUMEN.—El presente artículo contiene una corrección a un pretendido procedimiento de decisión para el sistema KE de lógica modal proposicional, aparecido en un número anterior de esta revista. Dicho procedimiento se basa en el método de árboles de Jeffrey.

ABSTRACT.—This paper is a correction to an alleged decision procedure for the system KE of propositional modal logic. This procedure was appeared in a previous paper in this journal, and it is based on the Jeffrey's tree method.

Fe de erratas del artículo «Arboles modales para KB, KE y SO.5»:

pág.	*línea*	*donde dice*	*debe decir*
19	13	$\langle k, i \rangle$ o	$\langle k, i \rangle$ y
26	27	«$L(A \rightarrow A)$»	«$L(LA \rightarrow A)$»