Sobre la hipótesis en que se basa la matemática no-cantoriana

POR

PEDRO J. NAVARRO MONTESINOS

1. INTRODUCCION

Debemos a Georg Cantor la creación de los números transfinitos y su escala. Estos números suponen una extensión del concepto de "número" al infinito, a través de la concepción de ***número cardinal*** referido a *conjuntos.*

Según esta concepción, los números son ***propiedades de conjuntos*** por lo que la existencia de un número cardinal queda determinada por la existencia de un conjunto que tenga tal número cardinal. Al considerar, siguiendo dicha concepción, conjuntos infinitos, Cantor dio cuenta de la posibilidad lógica de ***números infinitos*** referidos a dichos conjuntos: estos números son los ***Aleph.***

Dentro de esta teoría de números transfinitos existe un ***problema*** que, si bien pudiera parecer a primera vista estrictamente limitado a un campo muy específico de dicha teoría cantoriana, va a protagonizar sin duda una nueva etapa en el pensamiento matemático, me refiero al ***problema del continuo*** (1).

(1) Cifrado en G. CANTOR, "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre" (1878), en *Gesammelte* ***Abhandlungen*** *Mathematischen* ***und*** *Philosophischen Inhalts* (E. Zerrnelo, ed.), Olms, Hildesheirn, 1966, p. 132.

1.1. EL PROBLEMA DEL CONTINUO

El ***problema del continuo*** de Cantor (2) es una pregunta acerca del lugar que ocupa el *continuo* en la escala de Aleph. Dicho con mayor precisión: ¿cuál es el Aleph del continuo?

Por el ***teorema de Cantor***

para todo cardinal a, $a < 2^{a}$ (3)

sabemos que el conjunto potencia de un conjunto tiene un número cardinal mayor que el de este conjunto y por consiguiente que

(i) $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ (4)

Dada la facilidad de probar que

(ii) $2^{\aleph_0} = c$

esto es, la equivalencia entre el conjunto potencia de los números naturales y el continuo (conjunto de puntos de una línea recta), el problema del continuo se reduce a la pregunta de cuantos puntos hay en una línea recta (5) de un

---

(2) Es, efectivamente. de extraordinaria importancia: por un lado resulta fundamental para la comprensión de los conjuntos infinitos; por otro, puede ser utilizado como instrumento de elección de aquellos axiomas que convenientemente modificados permitan la construcción de la teoría no-cantoriana de conjuntos e incluso puede que para la fundamentación de la propia teoría cantoriana. Ya David Hilbert remarcó la importancia del problema del continuo al situarlo en el número uno de entre los 23 problemas matemáticos de urgente solución ofrecidos en el I Congreso Internacional de Matemáticas de 1900. Cfr. D. HILBERT, "Mathematische Probleme", *Nachr.* K. ***Ges. Wiss. Gottingen Math.-phys. Kl.***, 1900, pp. 253-297 (hay trad. inglesa en ***Bull. Am. Math. Soc.***, 8, 1901-1902, pp. 437-479). Más aún, puso el empeño en solucionarlo personalmente en dos ocasiones, aunque sin conseguirlo. Cfr. D. HILBBRT, "Über das Unendliche", *Mathematische Annalen*, 95, 1926, pp. 161-190. Cfr. D. HILBERT, "Die Grundlagen der Mathematik", ***Abh. a.d. Math. Sem. d. Hamb. Universität***, 6. 1928, pp. 65-85 (hay trad. inglesa en J. V. Heijenoort (ed.): ***From Frege to Godel. A Source Book in Mathematical Logic,*** 1879-1931, Harvard University Press, Cambridge (Mass.), 1977, pp. 384-392 y 472-477 respectivamente).

(3) Cfr. G. CANTOR, "Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre" (1891), en *Gesammelte*, ed. cit., p. 278. El método de prueba utilizado por Cantor es el ***proceso de la diagonal***, el cual va a caracterizar el abismo que separa al carácter discreto del conjunto IN de los números naturales, del carácter continuo del conjunto IR de los números reales, o dicho en otras palabras, el abismo que separa la aritmética del análisis y la geometría. En este sentido, la tarea fundamental es salvar ese ***vacío*** entre ***número*** y ***espacio.***

(4) Siendo $\aleph_0$ la cardinalidad del conjunto de los números naturales, este teorema permite construir cardinales cada vez mavores

$$\aleph_0,\ 2^{\aleph_0},\ 2^{2^{\aleph_0}},\ \ldots$$

(5) ***O*** en cualquier otro continuo de cualquier número de dimensiones ,pues

$$c^n = (2^{\aleph_0})^n = 2^{\aleph_0} = c$$
$$c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 . \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$$

siendo n y $\aleph_0$ el número de dimensiones del espacio. Cfr. G. CANTOR, "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" (1897), en *Gesalmmelte,* ed. cit., p. 289. De este modo, el problema del continuo parece convertirse, en gran medida, en una pregunta sobre espacio euclídeo, o, lo que es lo mismo, de cuántos números reales hay. Por (ii) sabemos que al menos hay tantos como subconjuntos posibles de números naturales, por lo que una pregunta equivalente a la anterior y que caracteriza asimismo el problema del continuo sería la de cuantos conjuntos diferentes de números naturales existen (6).

1.2. LA **HIPOTESIS** DEL **CONTINUO**

Por (i) sabemos que $2^{\aleph_0}$ es un número cardinal transfinito mayor que $\aleph_0$, pero ¿qué cardinal es? (7). Cantor conjeturó que era $\aleph_1$ (8). Esta es la ***hipótesis del continuo*** (HC):

(iii) $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (9).

La hipótesis establece que $2^{\aleph_0}$ es tan pequeño como pueda serlo $\aleph_1$, lo que dado el resultado (i) es lo mismo que decir que sea el inmediato sucesor, esto es, tan pequeño como sea posible. Esta es la ***hipótesis generalizada del continuo*** (HGC):

(iv) $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, *para* **todo** *ordinal* α

La hipótesis generalizada establece, pues, que para la cardinalidad de un conjunto infinito la siguiente cardinalidad más alta es la de su conjunto potencia. Esto implica que si a es un cardinal transfinito, entonces no existe un cardinal β tal que $\alpha < \beta < 2^{\alpha}$, esto es, no existe un cardinal intermedio entre la cardinalidad de un conjunto infinito cualquiera y la de su conjunto potencia

---

la "tabla de multiplicar" de los números cardinales, a saber, el problema de evaluar un cierto producto infinito.

(6) Cfr. K. GODEL, "What is Cantor's continuum problem?" (1947), en P. Benacerraf-H. Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, 2.ª ed. 1983. p. 470.

(7) Del cardinal c poco sabemos, no sólo su ***cantidad*** nos es desconocida, sino también sus ***cualidades.*** En este sentido no sabemos aún si este número es regular o singular, accesible o inaccesible. Lo que sí sabemos es que la ***cardinalidad del continuo*** no es un número cardinal de tipo especial, es decir, no es. por ejemplo, un límite de una infinidad numerable de números cardinales menores, y que puede no ser un aleph. Cfr. J. KONIG, "Zum Kontinuumproblem", ***Mathematische Annalen***, 60, 1905, pp. 177-180. c es en definitiva un conjunto tremendamente grande, al cual no podemos aproximarnos a través de ningún proceso gradual de construcción. Cfr. P. J. COHEN, ***Set theory and the continuum hypothesis***, Benjamín. Reading (Mass.) 1980 (5.ª ed.), (1.ª ed. 1966), p. 151.

(8) "...bewiesenen sätze geschlossen werden dass das linearkontinuum die machtigkeit der zweiten Zahlenklasse (II.) hat". G. CANTOR, "Uber unendliche lineare punktman nigfaltigkeiten" (1884), en *Gesammelte*, ed. cit., p. 244.

(9) Cfr. G. CANTOR, ***op. cit.***, pp. 192 y 244. Cantor prueba aquí la equivalencia del intervalo [O, 1] y la segunda clase de números, lo que dicho cn nuestra cerminologín es (iii) o equivalentemente.

(iii)' $c = \aleph_1$

(10). De lo que se deduce que no existe estrictamente un conjunto infinito con cardinalidad entre χ_0 y c.

El problema del continuo consiste, en primera instancia, en determinar si esta hipótesis cantoriana es refutable, demostrable o si por el contrario es *indecidible (11).* El propósito de este trabajo es la exposición de las dos posibles interpretaciones que de la independencia de HC puede hacerse y la recopilación de las ideas y principios que sirven de base a un trabajo posterior que completa el presente.

2. LA ESTRUCTURA DE LA MATEMATICA CANTORIANA

Dado que las principales ramas de la matemática actual, incluyendo por supuesto la aritmética, sobre la que se ha fundamentado el resto de disciplinas matemáticas, están basadas en la teoría cantoriana de conjuntos, denominaremos *matemática* cantoriana a la totalidad de las disciplinas matemáticas que puedan ser caracterizadas por el siguiente conjunto de axiomas (12):

ZF1. $\forall x \forall y [\forall z (z \varepsilon x \longleftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x = y]$ (13)

ZF2. $\exists x \forall y (\neg \, y \varepsilon x)$ *(14)*

ZF3. $\forall x \forall y \exists z \forall w [w \varepsilon z \longleftrightarrow (w = x \vee w = y)]$

ZF4. $\forall x \exists y \forall z [z \varepsilon y \longleftrightarrow \exists t (z \varepsilon t \wedge t \varepsilon x)]$ (15)

ZF5. $\exists x [\varnothing \varepsilon x \wedge \forall y (y \varepsilon x \rightarrow y \, \varepsilon \quad) \quad]$ *(16)*

ZF6. $\forall x \exists y \forall z (z \varepsilon y \longleftrightarrow z \subseteq x)$ (17)

ZF7. $\forall k_1 \ldots \forall k_n \forall x [\forall u \, Y v \forall w (u \varepsilon x \wedge \varphi (u, v) \wedge \varphi (u, w) \rightarrow v = w) \rightarrow \exists y \forall z (z \varepsilon y \longleftrightarrow \exists t (t \varepsilon x \wedge \varphi (t, z)))]$ (18)

ZF8. $\forall t [\forall x [x \varepsilon t \rightarrow \exists z (z \varepsilon x) \wedge \forall y (y \varepsilon t \wedge y \neq x \rightarrow \neg \exists z (z \varepsilon x \wedge z \varepsilon y))] \rightarrow \exists u \forall x (x \varepsilon t \rightarrow \exists w \forall v [v = w \longleftrightarrow (v \varepsilon u \wedge v \varepsilon x)]))]$ *(19)*

ZF9. $\forall x \exists y [x = \varnothing \vee (y \varepsilon x \wedge \forall z (z \varepsilon x \rightarrow \neg \, z \varepsilon y))]$

---

(10) Esta versión de HGC implica el axioma de elección (AE). Este axioma es equivalente a la proposición de que *para todo ordinal* α, $2^{\alpha} = \chi_{\beta}$, *para algún* B. El axioma de elección resulta ser. así, una consecuencia de HGC. Véase P. J. COHEN, *op. cit.*, pp. 148-150.

(11) Las tres posibles respuestas supuesta la consistencia de la teoría de conjuntos. Una vez resuelta esta cuestión, el *problema del continuo* toma un sentido completamente distinto: se convierte en el "problema insoluble" que determina la extensión matemática necesaria para su solución.

(12) Siendo x, y z, ...: *conjuntos*; ε : *relación binaria de pertenecia*; C : *inclusión*; U : *unión*: $\varnothing$ *conjunto vacío*; $\forall$, $\exists$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$: *símbolos lógicos habituales*; $=$: *igualdad*.

Llamamos a esta estructura ZF (20) "matemática cantoriana", dado que permite por un lado una representación del conjunto de las *matemáticas* y por otro, recoger, en forma axiomática, la teoría *cantoriana* de conjuntos (21).

El sistema ZF representa, en este sentido, la estructura de la matemática actual, por lo que nuestra matemática bien pudiera ser denominada "cantoriana" (cfr. 5). Ahora bien, ¿cuál es la estructura de esta *matemática cantoriana?* De la interpretación ofrecida de ZF se sigue que la *estructura de la matemática cantoriana* constará de ZF más la hipótesis cantoriana HC (22), esto es, ZF + HC.

Una vez delimitada, podemos considerar la posibilidad de modificar la *superestructura* ZF + HC, con el fin de derivar otra matemática (cfr. 4). Pero antes de describir los dos posibles proyectos para HC, veamos algunas notas sobre nuestra situación respecto a la hipótesis cantoriana.

3. LA INDEPENDENCIA DE HC

Hemos calificado a la matemática actual de "cantoriana", por el hecho de que la teoría cantoriana representada por ZF permite una descripción de cualquier rama de la matemática, incluida la propia lógica, representando su estructura con las siglas ZF + HC.

Ahora bien, ¿qué importancia tiene HC para que sea ella la que modificada

(13) Este axioma aparece implícito en G. CANTOR, "Über unendliche lineare punktmannigfaltigkeiten", p. 145.

(14) O no aparece en los trabajos de Cantor, es decir, si un conjunto de puntos no contiene puntos de acumulación, no tiene derivación. Cfr. G. CANTOR, *@. cit.*, p. 140.

(15) Explícito en ***Carta de Cantor a Dedekind*** (Halle, 28-julio-1899), en ***Gesammelte,*** ed. pp. 443-444.

(16) Explícitamente nombrado por Cantor: "Beitrage zur Begründung der transfiniten Mengenlehre", p. 293.

(17) Implícito en G. CANTOR, *op cit.*, pp. 287-289.

(18) Implícito. aunque más oscuro, en G. CANTOR, *op. cit.*, p. 296. En ZF7 u, v, w, y no son libres en la fórmula φ (t, z) y k, ...k,, son las variables libres de φ (t. z) distintas de t y z.

(19) AE aparece, aunque desde el punto de vista de los teoremas de conjuntos bien ordenados, en G. CANTOR, *op. cit.*, p. 295.

(20) El conjunto de axiomas [ZF1-ZF9] se debe a los trabajos de axiomatización llevados a cabo por E. ZERMELO, "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre 1", ***Mathematische Anden***, 65, 1908, pp. 261-281 (hay trad. inglesa en J. V. Heijenoort (ed.), *op. cit.*, pp. 200-215) y A. A. FRAENKEL, "Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre", ***Mathematische Annalen,*** 86, 1922, pp. 230-237.

(21) El conjunto [ZF1-ZF9] admite, ciertamente, todas las nociones fundamentales de dicha teoría cantoriana completándola con las nociones contenidas en los axiomas ZF2. 3, 9 y evitándole caer en la paradoja de B. RUSSELL, ***The principles of Mathematics,*** G. Allen & Unwin, 1979 (1.ª ed. 1903), Londres, pp. 101-107.

(22) Es aquí donde HC juega un importante papel en la creación de nuevas estructuras matemáticas, pues ella ser3 el elemento a modificar de la estructura.

permita la construcción de una nueva matemática que será calificada de "no-cantoriana"?.

Para contestar a esta pregunta, es necesario mostrar primero la situación en que se halla HC respecto a ZF.

3.1. LA NO-REFUTABILIDAD DE HC

En 1938, Godel establece (23) que la negación de HC no puede ser deducida de los axiomas de ZF + *axioma* de constructibilidad, si estos son consistentes (24).

La prueba (25) consiste en suponer un modelo $M = \langle U, \varepsilon \rangle$ para ZF satisfaciendo el conjunto de axiomas [ZF1-ZF7, ZF9].

Si a es un conjunto de U entonces decimos que b es definible a partir de a (en M) si

$$b = \{ x / M \models \varphi^a(x, a_1, \ldots, a_n),\ a_1, \ldots, a_n \varepsilon a \}$$

para alguna fórmula φ (φ^a es la fórmula obtenida de φ restringiendo todas las variable a a).

Ahora definimos un mapeo en los ordinales de M por

$$\begin{cases} M(0) = \emptyset \\ M(\alpha + 1) = (M(\alpha))' \\ M(\lambda) = \bigcup\limits_{\alpha < \lambda} M(\alpha) \end{cases}$$

donde x' es el conjunto de todos los conjuntos definibles a partir de x.

Si ρ es el mayor de los ordinales en M, entonces los elementos de $L = M(\rho)$ son llamados "conjuntos constructibles" (en M).

La propiedad de un conjunto de ser constructible puede ser formulada en ZF por la fórmula

$$L(x) : \text{x es constructible} \longleftrightarrow M \models L(x)$$

y el axioma de constructibilidad que establece $\forall x\, L(x)$, esto es, que todos los conjuntos son constructibles, por la fórmula

$$V = L$$

---

(23) Cfr. K. GODEL. "The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis", *Proceedings of the National Academy of Scirnces.* 24, 1938, pp. 556-557.

(24) No hay prueba alguna de la consistencia del sistema ZF. Lo que sí sabemos, a través de la teoría de modelos, es que si ZF es consistente, el sistema NBG también lo es. Cfr. P. J. COHEN, *op cit.*, p. 77.

(25) Cfr. K. GODEL, "Consistency-proof for rhe generalized continuum-hypothesis", *Proceedings of the National Academy of Sciences,* 25, 1939, pp. 220-224. En su trabajo de 1940 utiliza para esta prueba el sistema NBG.

Dado que puede definirse un buen orden en los conjuntos constructibles, se sigue que L $\models$ AE. En concreto, Godel muestra que:

T1. Si A es cualquier axioma de **ZF,** entonces A_L es demostrable en **ZF** (que intuitivamente significa que los conjuntos constructibles son un modelo para **ZF)**

T2. $(V = L)_L$ es demostrable en **ZF**

T3. $(V = L) \rightarrow AE + HC$ es demostrable en **ZF**

de lo que se deduce que L $\models$ **ZF** $+ AE + HC + V = L$. De este modelo podemos, así, obtener lo siguiente:

ZF es consistente $\rightarrow$ **ZF** tiene un modelo $\rightarrow$
ZF $+ AE + HC + V = L$ tiene un modelo $\rightarrow$
ZF $+ AE + HC + V = L$ es consistente

De [T1-T3] se sigue que HC no puede ser ***refutada*** a partir de [ZF1-ZF9] $+ V = L$, lo que significa que HC es ***consistente*** con el sistema **ZF,** es decir, que no puede probarse que HC sea falsa, lo que permite añadir HC a **ZF** como un axioma adicional sin que por ello se haga a **ZF** inconsistente. Así pues, si **ZF** es consistente: **ZF** + HC también lo es.

La importancia del resultado de Godel está en que al probar éste la ***consistencia relativa de*** HC respecto a los axiomas de **ZF,** nos permite utilizar consistentemente HC en ZF + HC para caracterizar la matemática cantoriana.

3.2. LA NO-DEMOSTRABILIDAD DE HC

Dado que HC no puede ser refutada, cabe preguntarse ahora si puede ser demostrada a partir del conjunto [ZF1-ZF9]. En 1963 Cohen prueba **(26)** que HC ***no puede ser deducida de los axiomas de ZF + axioma de constructibilidad***, si éstos son consistentes.

La prueba consiste **(27)** en construir un modelo para ZF que satisfaga el conjunto de axiomas [ZF1-ZF7, ZF9], en el cual HC sea falsa, esto es, un modelo en donde la negación de HC pueda ser probada como teorema. Para este fin, Cohen supone un modelo M que puede ser considerado como la clase de conjuntos constructibles de Gödel.

Sabemos, a partir del trabajo de Godel, que a fin de que HC falle hemos

---

(26) Cfr. P. J. COHEN, "The independence of the continuum hypothesis. I y II", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **50, 1963,** pp. 1.143-1.148, y **51, 1964,** pp. **105-110.**

(27) Cfr. P. J. COHEN, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, ed. cit., p. **107** y ss.

de añadir a M al menos un conjunto no constructible. Para ello introducimos la letra a para representar a un objeto que ha de ser añadido a M. Se trata de determinar qué clase de cosa ha de ser *a*. Una vez añadido *a*, tenemos que añadir algo que pueda ser formado a partir de a mediante las operaciones permitidas en [ZF1-ZF7, ZF9]. La nueva colección de conjuntos engendrada de esta forma por M + *a* será llamada N. El problema es cómo escoger *a* de tal forma que:

(1) N sea un modelo de [ZF1-ZF7, ZF9], esto es, de ZF-AE
(2) *a* no sea constructible en N

Sólo así es posible negar HC. Al escoger el nuevo conjunto *a*, como un conjunto no constructible, engedramos un nuevo modelo M que consiste en todos los conjuntos obtenidos por las operaciones de ZF-AE aplicada a *a* y a los conjuntos de M. Así definido, es aceptable la negación de V = L. Dado el teorema T3 de Godel, éste es el primer paso para negar HC.

A fin de llevar a cabo este primer paso debe ser demostrado que:

(i) a puede escogerse de tal forma que siga siendo no constructible, no solamente en M, sino también en N
(ii) N, como M, sea un modelo de ZF-AE

Para definir *a* se sigue un proceso indirecto: imaginamos que vamos a hacer una lista de todas las proposiciones posibles acerca de a como un conjunto de N. Entonces a será definida si damos una regla mediante la cual podamos determinar si una cualquiera de tales proposiciones es verdadera o no.

La idea fundamental es escoger *a* de modo que sea un elemento "genérico", esto es, escoger a de tal forma que solamente aquellas proposiciones acerca de a son verdaderas para casi todos los conjuntos en M. Cuando escogemos a como un conjunto genérico se deduce que N es todavía un modelo de ZF-AE.

A fin de construir un modelo en el cual HC sea falsa, hay que añadir a M no solamente un nuevo elemento a. sino un número infinito de ellos. Esto puede hacerse en tal forma que los elementos añadidos tengan una cardinalidad

$$\chi_2 = 2\,({}_2\chi_0)$$

desde el punto de vista del modelo M. Tales elementos no pueden ser contados por ningún proceso disponible en M. Así obtenemos un nuevo modelo N' en el cual HC es falsa. Los nuevos elementos que en N' desempeñan el papel de los números reales, tienen una cardinalidad mayor que $2\,\chi^{o}$, logrando, así, un cardinal infinito, a saber, $2\,\chi^{o}$ que es mayor que χ_0 y menor que c, puesto que en el modelo N'

$$c = 2\,({}_2\chi_0)$$

Cohen presenta un modelo en el cual HC es falsa, mostrando así que HC no puede ser *demostrada* a partir de [ZF1-ZF9] + V = L, lo que significa que la *negación* de HC (que representaré HC^-) es también *consistente* con el sistema ZF, es decir, que no puede probarse que HC sea verdadera. El resultado de Cohen permite tomar consistentemente HC^- como axioma adicional y añadirlo a [ZF1-ZF9] sin que por ello vuelva a ZF inconsistente. Así pues, si ZF es consistente, $ZF + HC^-$ también lo es, dado que tiene un modelo (el construido por Cohen). La prueba de Cohen establece, por tanto, la *consistencia relativa* de HC^- respecto a los axiomas de ZF.

De los trabajos de Godel-Cohen se concluye que si ZF es consistente, ni HC ni HC^- pueden ser deducidos de [ZF1-ZF9], lo que significa que HC es *indecidible* (28) en el sistema ZF: HC no es *refutable* (Godel) *ni demostrable* (Cohen). En este sentido, tanto HC como HC^- resultan consistentes con ZF, lo que quiere decir que HC es *independiente* de ZF.

Este resultado es, sin duda, el más importante y decisivo, en *fundamentos de la matemática*, de las últimas décadas, ya que posibilita la demarcación de la matemática en dos grandes *estructuras*. En efecto, la independencia de HC hace que la matemática se abra en dos superestructuras (ambas consistentes):

(1) *Matemática cantoriana*: $ZF + HC$ para la que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$,

(2) *Matemática no-cantoriana:* $ZF + HC^-$ para la que $2^{\aleph_0} > \aleph_1$

que se obtienen, como puede verse, añadiendo a ZF bien HC, bien HC^-, como axioma adicional (29).

4. LA ESTRUCTURA DE LA MATEMATICA NO-CANTORIANA

En una primera aproximación, la *estructura de la matemática no-cantoriana* es, como acabamos de ver, $ZF + HC^-$.

(28) HC es, ciertamente. un buen ejemplo de *problema indecidible.* Aunque el teorema de incompletud de Godel da ejemplos de problemas indecidibles en el interior de sistemas formales, estos problemas se resuelven tan pronto construyamos sistemas superiores. HC es un problema más difícil, sólo puede ser solucionado a través bien de la introducción de nuevos principios de demostración, bien de la modificación o ampliación de los axiomas del sistema ZF.

(29) En la geometría tenemos un caso paralelo (cf. nota 37). Dada la *independencia* del quinto postulado (postulado de las paralelas: PP) del resto de los axiomas euclídeos, tanto PP como su negación PP^- resultan consistentes con el sistema Σ euclídeo, lo que permite reemplazar, sin contradicción, PP por PP— manteniendo el resto de axiomas de Σ. Tal posibilidad conlleva la formación de dos grandes estructuras geométricas:

(1) *Geometría euclídea*: $\Sigma + PP$ para la que $p = 1$ en $k = 0$.

(2) *Geometría no-euclídea*: $\Sigma + PP-$ para la que $p = \infty$ en $k < 0$
y $p = 0$ en $k > 0$

donde *p* es *paralela* y k es *curvatura*.

Ahora bien, ¿qué propiedades tiene $ZF+HC^{-}$?, ¿qué la diferencia de $ZF+HC$?, o dicho en otros términos ¿qué diferencia a la matemática no-cantoriana de la cantoriana?

De modo general, podemos decir que la matemática no-cantoriana tiene un número infinito de números transfinitos entre $\aleph_0$ y c, es decir, tiene cardinalidades intermedias. En este sentido, es fácil decir que la matemática no-cantoriana sería aquella en la cual HC^{-} es verdadera. Pero dado que no conocemos conjuntos que tengan tales números transfinitos intermedios (con los que suponemos debe trabajar la matemática no-cantoriana), sólo tenemos una salida, a saber, preguntarnos por la *versión* a tomar de HC que, negada, posibilite la construcción de esta nueva matemática "no-cantoriana". Pero si desconocemos, incluso, las consecuencias de elegir, para ZF, HC o HC^{-}, cuanto más la versión adecuada, de entre las infinitas, de HC (30).

En la actualidad, la investigación en teoría de conjuntos ofrece dos interpretaciones bien distintas del problema de la *indecidibilidad* de HC. La primera sugiere una *ampliación* del sistema ZF con el fin de completar su estructura haciendo así a HC decidible. La segunda, sin embargo, supone adecuada la estructura ZF e intenta, dada la independencia de HC, buscar una versión en la que HC^{-} produzca una *extensión* del sistema ZF. En este sentido, la primera provocaría sólo una "ampliación" de la matemática cantoriana, mientras que la segunda provocaría su "extensión", esto es, la creación de una matemática no-cantoriana. Veamos los argumentos de ambas perspectivas.

La primera perspectiva fue sugerida por Godel y Cohen y seguida por la práctica totalidad de los investigadores en teoría de conjuntos. Para esta primera perspectiva la prueba de indecidibilidad de HC no resuelve el problema: "De este modo, el problema del continuo de Cantor, independientemente del punto de vista filosófico que se adopte, tiene... el siguiente sentido: el de averiguar si a partir de [ZF] se puede deducir una respuesta, y, si así fuese, cuál" (31).

La teoría de conjuntos, sus conceptos, axiomas y teoremas, describe, según Godel, una realidad bien determinada y definida, en la cual HC debe ser verdadera o falsa. Si HC es indecidible a partir del conjunto [ZF1-ZF9] "sólo puede significar que estos axiomas no contienen una descripción completa de esa realidad" (32).

Así pues, la investigación deberá, siguiendo a Godel, centrarse en la búsqueda de los *buenos* axiomas de la teoría de conjuntos que permitan decidir HC. El conjunto de axiomas [ZF1-ZF9] no constituye un sistema cerrado en sí

(30) La diferencia entre ambas superestructuras debe ser, desde luego, abismal, aunque muy sutil.

(31) K. GODEL. "What is Cantor's continuum problem?", ed. cit., p. *475*.

(32) K. GODEL, *op*. cit., p. *476*.

mismo, la indecidibilidad de HC a partir de ellos prueba precisamente la insuficiencia del conjunto de axiomas utilizado actualmente en la investigación y, por tanto, la posibilidad (y necesidad) de completarlo sin arbitrariedad, mediante nuevos axiomas que desplieguen el contenido de la noción *iterativa* de conjunto (33), es decir, que afirmen algo sobre la definibilidad de los conjuntos.

La complementación del conjunto [ZF1-ZF9] debe efectuarse, para Godel, a través del análisis pormenorizado de los significados de términos como *conjunto*, relación, etc. y de los axiomas que subyacen a su uso. En este sentido, resulta útil partir de la noción iterativa de conjunto, base sobre la que están fundados los actuales axiomas, que sugiere su ampliación mediante nuevos axiomas que afirmen la existencia de posteriores iteraciones de la operación "conjunto de". Estos axiomas también pueden formularse como sentencias que afirmarían la existencia de números cardinales muy grandes, esto es, como axiomas de *fuerte infinitud* (34). Estos nuevos axiomas deberán ampliar el verdadero concepto de conjunto a través de la operación "conjunto de ". Incluso, dice Gödel, pueden existir otros axiomas de la teoría de conjuntos (hasta el momento desconocidos) que estén implicados en los conceptos fundamentales de la lógica y la matemática.

En resumen, Godel cree que el papel de HC en la teoría de conjuntos consistirá en conducir al descubrimiento de nuevos axiomas que permitan decidir y en concreto refutar la hipótesis cantoriana, esto es, probar que HC es falsa (35). De esta misma opinión es Cohen, para el que "HC es *obviamente* falsa... c es mayor a X,,, χ_ω , **%a**, donde a = χ_ω etc." **(36).**

En cualquier caso, tanto para Godel como para Cohen, los recursos matemáticos actuales no son suficientes para decidir HC, aunque puede haber ade-

(33) Según la cual, un *conjunto* es algo obtenible a partir de los números naturales (o cualquiera otros objetos bien definidos) mediante la aplicación iterada de la operación "conjunto de".

Esta noción ha resultado ser hasta el momento completamente autoconsistente (eludiendo la citada paradoja de Russell). Cfr. K. GODEL, *op. cit.*, pp. 476-477.

(34) Sin embargo. los posibles axiomas así obtenidos estarían ya contenidos en los axiomas de ZF. En efecto el método para obtener conjuntos de grandes cardinalidades en ZF es el siguiente: por ZF5 obtenemos conjuntos infinitos enumerables con cardinalidad χ_0. Por ZF6 podemos obtener, ahora, conjuntos de cardinalidades 2^{χ_0}, $2^{2^{\chi_0}}$,... Consideremos entonces el conjunto **A** = { ω, **P**ω, **PP**ω,... } donde **P** representa la operación conjunto potencia y ω es el primer ordinal transfinito. La cardinalidad a de su conjunto-unión UA puede ser presentada como mayor a todos sus miembros, esto es, $a > \chi_0, 2^{\chi_0}, 2^{2^{\chi_0}}, \ldots$ **A** través de la operación **P,** ofrecemos ahora los conjuntos **PUA. PPUA,** ..., de las respectivas cardinalidades 2^a. 2^{2^a},... Después consideremos el conjunto **B** = { **UA, PUA, PPUA, ...** } , la cardinalidad b de UB es así mayor que todos los cardinales considerados, y así puede seguirse indefinidamente.

(35) Cfr. K. GODEL, *op. cit.*, p. 480.

(36) **P. J.** COHEN, *op. cit.*, p. **151**.

más otras razones involucradas, como las antes citadas de la definibilidad de los conjuntos. En la actualidad, los seguidores de la primera perspectiva en teoría de conjuntos quieren modificar, de forma sólida, los axiomas de ZF, para así poder determinar si HC o HC^- pueden deducirse de ellos.

Respecto a la segunda perspectiva, ésta tiene como objetivo buscar la versión de HC que ***negada*** permita, junto al resto de axiomas no modificados de ZF, construir una nueva matemática, siguiendo un modelo paralelo al de la geometría (37). Pero el caso de HC es bien diferente al del axioma de las paralelas. Aquí nos hallamos en un terreno aritmético, más abstracto y difícil por tanto.

La pregunta de los investigadores que siguen esta segunda perspectiva es siempre la misma, ¿qué características tiene esa supuesta matemática no-cantoriana? Pero la respuesta a esta pregunta sólo vendrá dada a través de la respuesta a la siguiente: ¿qué tesis tomar de la matemática cantoriana que modificada permita construir dicha matemática? Las tesis posibles son tan sólo dos, a saber, AE y HC (38), pero sus versiones son ***infinitas.*** Consideremos ambas posibilidades.

Si elegimos AE como tesis independiente a modificar de la estructura cantoriana, ¿qué tenemos? La posible modificación de AE requiere su negación (AE^-), a la que podemos acudir en ZF negando ZF8. Pero es la versión de la negación de AE lo que resulta desde luego poco intuitiva. Más bien parece que negar AE supone rechazarlo, lo que provocaría no una ***extensión*** de la matemática cantoriana, sino todo lo contrario, un recorte en su potencia deductiva. En efecto

$$ZF + AE^- = ZF — AE$$

Esta estructura designaría una ***matemática no-zermeliana***, cuya característica es la supresión del axioma ZF8 (39), pero de ningún modo generaría una matemática no-cantoriana.

---

(37) El paralelismo entre geometría y teoría de conjuntos puede quedar representado gráficamente en la siguiente tabla:

Estadios de desarrollo	*Geometría*	*Teoría de conjuntos*
Teoría estandar (intuitiva)	Tales	Cantor
Paradojas	Zenón	Russell
Axiomatización de la teoría estandar	Euclides	Zermelo
Consistencia relativa de la teoría estandar	Hilbert	Gödel
Teoría no-estandar	Gauss, Riemann	X
Aplicación de la teoría no-estandar	Einstein	?

En este sentido, el objetivo de esta segunda perspectiva será por consiguiente, despejar la X, siendo aquí HC para la teoría de conjuntos lo que para la geometría fue PP.

(38) Debe recordarse que en los trabajos antes citados de Godel y Cohen se prueba concretamente la no refutabilidad ni demostrabilidad de HGC, afectando no sólo a HC sino también a AE (por la nota 10), haciéndola igualmente ***independiente*** del resto de los axiomas de ZF.

(39) Ha sido por esta razón por la que hemos incluido directamente AE en el sistema ZF

El caso de HC es diferente, aquí adoptarlo o negarlo nos adentra a "universos desconocidos". La negación de HC puede añadirse a ZF consistentemente, suponiendo su extensión. Pero las características de esta nueva matemática de estructura ZF + HC⁻ sólo serán conocidas cuando hallemos la versión apropiada de HC, cuya negación suponga una extensión de la matemática cantoriana, esto es, la admisión de nuevas nociones y operaciones.

5. ALGUNAS OBSERVACIONES GENERALES

5.1. Hemos utilizado la teoría cantoriana de conjuntos, caracterizada por el sistema ZF y la hipótesis HC, para representar la estructura interna de la matemática actual. Esta posibilidad teórica surge de la interpretación del trabajo de Cantor en matemáticas. En este sentido, puede verse el trabajo de Cantor como algo más que una teoría matemática local, pues su teoría trata de esa *fantástica* noción que permite describir la práctica totalidad de la matemática actual, me refiero a la noción de *conjunto*. Esta noción es lógica, por lo que la matemática que la trabaja (la teoría de conjuntos) resulta ser una cierta fusión entre lógica y matemáticas. De esta noción surge, en efecto, los conceptos y operaciones que constituyen ambas disciplinas formales.

5.2. Fue esta la razón de tildar de "cantoriana" a la actual matemática. Pero es precisamente esta posibilidad de tildar a la matemática actual lo que nos permite imaginar una matemática "no-cantoriana" confeccionada al modo como fue ideada la geometría no-euclídea.

En este sentido es de fundamental importancia despejar la X que aparece en la gráfica de la nota 37, y posterior estudio de sus aplicaciones (40).

La nueva matemática que surja de estos trabajos será, según hemos establecido, no-cantoriana (en ningún caso no-zermeliana). Pero además, dado que los teoremas limitativos de Gödel suponen, en nuestra interpretación, la limitación de la matemática cantoriana, la nueva matemática puede no quedar afectada por dichos teoremas, resultando ser, así, además no-gödeliana (41).

(ZF8). En la teoría de conjuntos resulta, en efecto, más útil AE que AE—: su uso permite la comparabilidad de cardinales además de generar teoremas tan bellos como el de Banach-Tarski, por ejemplo.

(40) El interrogante "?" de nuestra gráfica tiene la siguiente interpretación: sabemos en la actualidad que la teoría cantoriana de conjuntos no tiene fácil ni inutitiva aplicación a otras disciplinas distintas de las púramente formales. Esta es la razón por la que su utilización en ciencias no formales, como la física por ejemplo, sea escasa, no sólo en número. sino también en resultados.

Pero esta realidad no supone necesariamente que la teoría no-cantoriana de conjuntos vaya a correr la misma suerte. Es más, estoy convencido de que una teoría no-cantoriana puede ofrecer a la ciencia informal importantes y fundamentales nociones.

(41) Los sistemas no-godelianos, como el de H. WANG, "The formalization of mathema-

5.3. Pero despejar la X resulta de lo más improbable para los investigadores de la primera perspectiva, pues consideran que el paralelismo con la geometría no es del todo exacto, dado que mientras PP⁻ supone una extensión del sistema geométrico, HC⁻ no lo supone, por lo que resulta esteril (42). Para ellos hay una cierta *asimetría* entre un axioma de infinitud y su negación, por lo que la única perspectiva viable en relación a HC es encontrar *nuevos axiomas de infinitud* que permitan decidirla.

5.4. La posibilidad de conseguir describir las características de esta nueva matemática pasa necesariamente por la que hemos denominado *segunda perspectiva* en la investigación, cuyo objetivo es la búsqueda de un significado coherente de HC⁻, a través de nuevas concepciones del continuo, en las cuales éste no tenga ninguna "potencia". La idea acerca del conjunto que consta de elementos corre verdaderamente el riesgo de resultar adecuado sólo para los conjuntos finitos o enumerables, mientras que las "infinidades superiores" pueden resultar abstracciones de objetos de otro tipo totalmente.

tics", The *Journal of Symbolic Logic*, 19, n. 4, 1954, pp. 241-266, entre otros, son el intento de evitar los teoremas de Godel a través de diversos procedimientos: bien iterando indefinidamente sistemas (al modo sugerido en la nota 28) como hace Wang, bien limitando la porencia de los sistemas formales (Myhill y otros). Sin embargo, como es obvio, estos sistemas no-godelianos son "cantorianos", lo que dificulta su logro y da razón de su fracaso. Tal como son entendidas hoy día, las matemáticas no-zermeliana y no-godeliana no suponen una extensión de la matemática cantoriana. sino más bien todo lo contrario. Sólo una matemática no-cantoriana supone una extensión, y sólo en este sentido puede entonces resultar estrictamente *no-gödeliana.*

(42) Cfr. K. GODEL, *op. cit.*, p. 483.