



UNIVERSIDAD DE MURCIA

ESCUELA INTERNACIONAL DE DOCTORADO

Sobre la geometría de hipersuperficies en
espacios producto con la misma curvatura
media riemanniana y lorentziana

Dña. Eva María Alarcón Díaz
2021

A mis padres.

Índice general

Introducción	3
1. Preliminares	11
1.1. Las variedades producto riemanniano y lorentziano.	11
1.2. Hipersuperficies en las variedades producto.	14
1.3. Grafos en las variedades producto.	18
1.3.1. Métrica.	18
1.3.2. Vector normal.	19
1.3.3. Operador forma.	20
1.3.4. Curvatura media.	21
1.3.5. Curvatura media de grafos cuando $M^n = \mathbb{R}^n$	23
1.4. El principio del máximo.	24
1.4.1. El principio del máximo fuerte.	24
1.4.2. El principio del máximo interior.	32
2. Hipersuperficies en el espacio de Lorentz-Minkowski	39
2.1. Hipersuperficies espaciales en el espacio de Lorentz-Minkowski.	39
2.2. Hipersuperficies espaciales con $H_R = H_L$	44
2.3. Una EDP cuasilínea asociada a las hipersuperficies espaciales con $H_R = H_L$	48
2.4. Grafos espaciales rotacionalmente invariantes.	52
2.5. Sobre el inradio en el dominio de soluciones.	54
2.6. Parabolicidad.	58
3. Hipersuperficies en espacios producto	61
3.1. Los vectores normales.	62
3.2. Los operadores forma.	68
3.3. Las curvaturas medias.	71
3.4. Aplicaciones.	73
3.5. Las curvaturas de Gauss.	83
Bibliografía	87

Introducción

La teoría de las subvariedades minimales es una de las ramas más antiguas de la geometría diferencial y uno de los campos más fascinantes estudiados en dicho ámbito. En general, la teoría de subvariedades minimales involucra la mayoría de las ramas más importantes de las matemáticas. Entre ellas, y por mencionar simplemente unas pocas: análisis, topología diferencial y algebraica, cálculo de variaciones y ecuaciones en derivadas parciales. Como ejemplos clásicos de subvariedades minimales en el espacio euclídeo podemos encontrar geodésicas, planos, catenoides y helicoides. Uno de los principales resultados de la geometría global de superficies minimales es el conocido teorema de Bernstein (véase [Ber]), demostrado en 1915, que establece que

los únicos grafos minimales enteros en \mathbb{R}^3 son los planos.

Se dice que una hipersuperficie en el espacio de Lorentz-Minkowski es *no degenerada* si la métrica inducida es una métrica no degenerada. En ese caso, la hipersuperficie puede ser tanto espacial como temporal (véase el Capítulo 1 para más detalles). Teniendo eso en cuenta, décadas más tarde del resultado de Bernstein, en el año 1970, Calabi (véase [Cal]) demostró una versión análoga a dicho resultado para superficies espaciales en el espacio \mathbb{L}^3 de Lorentz-Minkowski. Recordemos que se dice que una superficie en \mathbb{L}^3 es *espacial* si su métrica inducida es riemanniana, y se dice que es *maximal* si además tiene curvatura media igual a cero. Teniendo esto en cuenta, el llamado teorema de Calabi-Bernstein en su versión no paramétrica nos dice que

los únicos grafos maximales enteros en \mathbb{L}^3 son los planos espaciales.

Un gran diferencia entre estos dos resultados es que, tal y como demostraron Bombieri, De Giorgi y Giusti (véase [BGG]), el resultado de Bernstein puede extenderse a grafos minimales en \mathbb{R}^{n+1} pero solo hasta $n = 7$, puesto que para dimensiones mayores ya no es cierto. Sin embargo, el teorema de Calabi-Bernstein sí puede extenderse a una dimensión arbitraria tal y como fue demostrado por Cheng y Yau (véase [CY]).

Es interesante observar que toda hipersuperficie espacial y completa en \mathbb{L}^{n+1} es necesariamente un grafo entero sobre cualquier hiperplano espacial (véase [ARS]). Consecuentemente, el teorema de Calabi-Bernstein también puede expresarse de una forma paramétrica asegurando que

las únicas hipersuperficies maximales completas en \mathbb{L}^{n+1} son los hiperplanos espaciales.

La versión análoga riemanniana al teorema anterior no es cierta, puesto que existe una amplia familia de hipersuperficies minimales completas en \mathbb{R}^{n+1} .

Dada una hipersuperficie no degenerada inmersa en el espacio de Lorentz-Minkowski, podemos otorgarle la métrica heredada del espacio euclídeo y, teniendo eso en cuenta, podemos considerar dos funciones curvatura media: la obtenida a través de la métrica inducida del espacio euclídeo y la del espacio de Lorentz-Minkowski. Como una consecuencia inmediata del resultado anterior, puede concluirse que

las únicas hipersuperficies completas que son simultáneamente minimales en \mathbb{R}^{n+1} y maximales en \mathbb{L}^{n+1} son los hiperplanos espaciales.

Por otro lado, y sin suponer la hipótesis de completitud, Kobayashi (véase [Ko]) estudió el problema para hipersuperficies con $H_R = H_L = 0$ en el espacio \mathbb{L}^3 de Lorentz-Minkowski. En este sentido, demostró que

las únicas superficies que son simultáneamente minimales en \mathbb{R}^3 y maximales en \mathbb{L}^3 son los planos espaciales y los trozos espaciales de helicoides.

En realidad, lo que Kobayashi demostró fue que dichas superficies deben ser regladas, donde recordemos que se dice que una hipersuperficie es *reglada* si admite una foliación por hipersuperficies que son subvariedades totalmente geodésicas del espacio ambiente. Sin embargo, tal y como se sabe gracias a un resultado de Catalan, las únicas superficies minimales y regladas en \mathbb{R}^3 son los planos y los helicoides.

Yendo un paso más adelante, podemos considerar hipersuperficies espaciales que tienen las mismas funciones curvatura media H_R y H_L constantes. En 1955, como una consecuencia directa del teorema clásico de la divergencia, Heinz (véase [He]) demostró que

dado un grafo en \mathbb{R}^3 definido sobre un disco en \mathbb{R}^2 de radio R y centrado en el origen, $B_0(R)$, si $|H_R| \geq c > 0$ para una constante c , entonces necesariamente $R \leq \frac{1}{c}$.

Años más tarde, Chern y Flanders (véase [Che, Fla]) extendieron este resultado a dimensión arbitraria de forma simultánea e independiente. Como consecuencia, los únicos grafos enteros con curvatura media constante H_R en \mathbb{R}^{n+1} son minimales. La versión lorentziana de este resultado no es cierta, puesto que hay ejemplos de grafos enteros y espaciales con curvatura media constante H_L en \mathbb{L}^{n+1} que no son maximales, como por ejemplo los espacios hiperbólicos. Sin embargo, teniendo en cuenta el teorema de Calabi-Bernstein (en su versión paramétrica), podemos concluir de nuevo que

las únicas hipersuperficies espaciales completas en \mathbb{L}^{n+1} con las mismas funciones curvatura media H_R y H_L constantes son los hiperplanos espaciales.

El siguiente paso natural es considerar superficies que tienen la misma curvatura media H_R y H_L en \mathbb{R}^3 y en \mathbb{L}^3 pero no necesariamente constante. Así, Albuje y Caballero (véase [AC]) continuaron con este estudio y demostraron que dichas superficies tienen curvatura de Gauss no positiva con respecto

a la métrica inducida de \mathbb{R}^3 en todos sus puntos, y obtuvieron varias consecuencias interesantes acerca de la geometría de dichas superficies.

Recapitulando, hasta ahora se ha realizado un breve resumen de algunas de las líneas de investigación referentes al estudio de las superficies que tienen la misma curvatura media H_R y H_L . Para el caso en el que son iguales a cero o a una constante tenemos resultados para hipersuperficies en dimensiones arbitrarias. Sin embargo, para el caso de hipersuperficies con la misma curvatura media pero no necesariamente constante sólo hemos mencionado resultados en dimensión $n = 2$. Así, lo interesante sería continuar con el estudio de este tipo de problemas para hipersuperficies en variedades $(n + 1)$ -dimensionales. Por ello, como un primer objetivo de esta tesis nos plantearemos generalizar los resultados de [AC], obteniendo además algunas propiedades geométricas de las hipersuperficies espaciales en \mathbb{L}^{n+1} con $H_R = H_L$. Concretamente, se demostrará que las hipersuperficies espaciales en \mathbb{L}^{n+1} con $H_R = H_L$ no tienen puntos elípticos. Este hecho, junto con un resultado clásico de existencia de puntos elípticos debido a Osserman (véase [Os]), dará lugar a varias consecuencias sobre la geometría de las hipersuperficies que estamos considerando. Por otro lado, teniendo en cuenta que toda hipersuperficie espacial en \mathbb{L}^{n+1} es localmente un grafo sobre cualquier hiperplano espacial (véase el Capítulo 2 para más detalles), las hipersuperficies que estamos estudiando con $H_R = H_L$ estarán localmente determinadas por las soluciones de una ecuación en derivadas parciales que será estudiada y para la cual se darán algunos resultados de unicidad.

Una vez realizado el estudio anterior, el siguiente paso sería estudiar qué resultados pueden darse en los espacios producto. Siguiendo esa línea, y en relación a los espacios producto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Masal'tsev (véase [Ma]) demostró que

las superficies regladas minimales y completas son los slices, los cilindros sobre geodésicas y los helicoides.

Unos años después, Kim, Koh, Shin y Yang (véase [KKSJ]), haciendo uso de una aproximación intrínseca, volvieron a obtener el resultado de Masal'tsev y encontraron helicoides que no estaban descritos en [Ma]. En particular, demostraron que

las únicas superficies simultáneamente minimales y maximales en el espacio producto riemanniano $M^2 \times \mathbb{R}$, con M^2 una variedad riemanniana orientable, son horizontalmente regladas.

Como una aplicación, obtuvieron que

las únicas superficies que son simultáneamente minimales y maximales en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ son los slices y los helicoides.

En dimensión general, Barbosa, Dajczer y Jorge (véase [BDJ]) describieron todas las subvariedades minimales regladas en los espacios riemannianos modelo de curvatura seccional constante. Demostraron que

toda subvariedad minimal reglada es, localmente, parte de un helicoides generalizado.

Recientemente, Lee y Lee (véase [LL]) también presentaron ejemplos no planos de grafos espaciales que son simultáneamente minimales y maximales en el espacio de Lorentz-Minkowski. Dichos ejemplos pueden ser vistos como superficies regladas generalizadas. De hecho, son la generalización natural de los helicoides.

Teniendo en cuenta lo anterior, el segundo objetivo de esta tesis será estudiar qué resultados pueden darse en espacios producto con dimensión arbitraria. Por ello, se estudiará la geometría extrínseca de hipersuperficies Σ^n no degeneradas inmersas en el espacio producto $M^n \times \mathbb{R}$, con $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ una variedad riemanniana, a las que se les otorgará dos métricas: la métrica riemanniana estándar $\langle \cdot, \cdot \rangle_M + dt^2$ y la métrica lorentziana $\langle \cdot, \cdot \rangle_M - dt^2$. Así, podremos considerar dos curvaturas medias y dos curvaturas de Gauss, una asociada a cada métrica. Entonces, suponiendo que Σ^n tiene curvatura media igual a cero con respecto a ambas métricas, se demostrará que está foliada por hipersuperficies que son subvariedades minimales del espacio ambiente. Además, como una aplicación, también se demostrará que las superficies no degeneradas en el espacio producto lorentziano $\overline{M}_L^3 = M^2(c) \times \mathbb{R}_1$ (donde $M^2(c)$ es el plano euclídeo \mathbb{R}^2 cuando $c = 0$, la esfera euclídea cuando $c = 1$ y el plano hiperbólico cuando $c = -1$) con curvatura media igual a cero con respecto a ambas métricas deben ser trozos abiertos de slices, cilindros sobre geodésicas o helicoides. Más aún, también se estudiará el caso en el que estas superficies no degeneradas tienen la misma curvatura de Gauss con respecto a ambas métricas.

Una vez presentado el contexto en el que se enmarca esta tesis y una vez expuestos los principales objetivos de esta, pasemos a describir cómo se encuentra estructurada. La tesis está dividida en tres capítulos, siendo el primero de ellos un capítulo preliminar dedicado a presentar los conceptos y propiedades generales que se necesitarán a lo largo de esta memoria.

Comenzaremos el primer capítulo definiendo los espacios producto $\overline{M}^{n+1} = M^n \times \mathbb{R}$ y dos métricas, $\langle \cdot, \cdot \rangle_R = \langle \cdot, \cdot \rangle_M + dt^2$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_L = \langle \cdot, \cdot \rangle_M - dt^2$, generalizando las métricas de \mathbb{R}^{n+1} y \mathbb{L}^{n+1} respectivamente, y con las cuales trabajaremos a lo largo de toda la tesis. Esto hará necesario distinguir los espacios producto como \overline{M}_R^{n+1} cuando estemos trabajando con la primera métrica y \overline{M}_L^{n+1} cuando estemos con la segunda. Sin embargo, en ocasiones trabajaremos simplemente con $\overline{M}_\delta^{n+1}$ teniendo en cuenta que si $\delta = 1$ estamos en el primer caso y si $\delta = -1$ estamos en el segundo. Con esta notación, se estudiará qué relación existe entre los operadores gradiente de la aplicación proyección $\pi_{\mathbb{R}}$ y el campo vectorial y unitario ∂_t . Asimismo, se demostrará que las conexiones de Levi-Civita de \overline{M}_R^{n+1} y \overline{M}_L^{n+1} son en realidad la misma. A continuación, se procederá a introducir las hipersuperficies espaciales y temporales como los elementos que serán objeto directo de estudio. Asimismo, se recordarán tanto las fórmulas de Gauss y Weingarten como la definición de función curvatura media y conceptos tales como hipersuperficies minimales y maximales. En este mismo primer capítulo también se estudiarán los grafos de $\overline{M}_\delta^{n+1}$ en profundidad, centrándonos en su métrica y en la expresión de su vector normal, su operador forma y su función curvatura media. Además, para la curvatura media se analizará el caso particular en el que la variedad M^n

es el espacio euclídeo \mathbb{R}^n . Por último, se recordarán las definiciones y algunas propiedades de los operadores lineales y cuasi-lineales elípticos, prestando especial atención al principio del máximo fuerte y al principio del máximo interior, puesto que ambos resultados serán necesarios más adelante en la tesis.

A lo largo del segundo capítulo se analizará la geometría de las hipersuperficies espaciales en \mathbb{L}^{n+1} que verifican que tienen la misma curvatura media tanto con la geometría de la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ como con la geometría de la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$. Es decir, aquellas que verifican $H_R = H_L$. Así, se comenzará recordando que toda hipersuperficie espacial puede ser vista localmente como un grafo sobre un hiperplano espacial, el cual puede suponerse sin pérdida de generalidad que es el hiperplano $x_{n+1} = 0$. Por tanto, también se describirán los campos vectoriales normales y las funciones curvatura media con respecto a ambas métricas en términos de los operadores diferenciales de la función que describe localmente la hipersuperficie. A continuación, se recordará un resultado de caracterización de Osserman (véase [Os]) para hipersuperficies en \mathbb{R}^{n+1} sin puntos elípticos y se demostrará su versión lorentziana para hipersuperficies espaciales en \mathbb{L}^{n+1} (Teorema 2.6, [AAC2]):

Una hipersuperficie espacial Σ en \mathbb{L}^{n+1} verifica la propiedad de la envoltura convexa si, y solo si, no hay puntos elípticos en Σ .

A partir de ese momento comenzaremos a estudiar las hipersuperficies espaciales con $H_R = H_L$, obteniendo que dichas hipersuperficies no pueden tener puntos elípticos y llegando a varias consecuencias geométricas como por ejemplo la siguiente (Teorema 2.10, [AAC2]):

Sea Σ una hipersuperficie espacial compacta en \mathbb{L}^{n+1} con frontera (necesariamente) no vacía y tal que $H_R = H_L$. Entonces Σ está contenida en la envoltura convexa de su frontera.

A continuación, se mostrará la ecuación de las hipersuperficies espaciales con $H_R = H_L$, ya que toda hipersuperficie objeto de nuestro estudio estará localmente determinada por una solución de esta ecuación satisfaciendo $\|Du\| < 1$, donde D y $\|\cdot\|$ son el gradiente euclídeo y la norma euclídea en \mathbb{R}^n , respectivamente. Se demostrará que dicha ecuación es una ecuación en derivadas parciales cuasilínea y elíptica salvo en los puntos en los que $Du = 0$. Además, se demostrará la unicidad del problema de Dirichlet asociado a esta ecuación bajo unas ciertas condiciones de frontera.

El siguiente objeto de estudio será el caso particular de los grafos espaciales rotacionalmente invariantes con respecto a un eje vertical y que verifiquen $H_R = H_L$. Se obtendrá un resultado de unicidad para ellos que nos dice lo siguiente (Teorema 2.15, [AAC2]):

Los únicos grafos enteros espaciales rotacionalmente invariantes con respecto a un eje vertical y tales que $H_R = H_L$ son los hiperplanos horizontales.

Sin embargo, es importante mencionar que, tal y como se mostrará, localmente sí existen soluciones a la ecuación $H_R = H_L$ rotacionalmente invariantes y que no son hiperplanos.

Continuaremos el estudio con otra consecuencia geométrica de los grafos espaciales que verifican nuestra ecuación. En esta ocasión comenzaremos relacionando la curvatura media de dichas hipersuperficies y la curvatura media de sus hipersuperficies de nivel para acabar obteniendo una cota para el supremo del radio de las bolas contenidas en el conjunto de los puntos en los que el gradiente de la función que define el grafo no se anula.

Terminaremos este estudio suponiendo que el factor M^n del producto $\overline{M}_\delta^{n+1}$ es parabólico. Así, entre otros, se obtendrá un resultado de unicidad que nos dice (Teorema 2.22):

Sea M^n una variedad riemanniana parabólica. Los únicos grafos enteros espaciales Σ_u en $\overline{M}_\delta^{n+1}$ tales que $H_R = H_L = H \geq 0$ y con la función u acotada superiormente por una función v superarmónica son las traslaciones verticales de Σ_v , siempre que Σ_v sea espacial con $H_R = H_L$.

Por último, en el tercer capítulo trabajaremos con hipersuperficies no degeneradas Σ^n inmersas en el espacio producto $M^n \times \mathbb{R}$ y a las que les otorgaremos las dos métricas, $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$, con las que se ha estado trabajando a lo largo de la tesis. Para ello, dada una hipersuperficie no degenerada en \overline{M}_L^{n+1} con campo vectorial normal y unitario N_L tal que $\langle N_L, \partial_t \rangle_L \leq 0$, comenzaremos estudiando qué relación existe entre dicho campo y el campo N_R que se obtiene al considerar la hipersuperficie inmersa en \overline{M}_R^{n+1} . A continuación, se hará notar un hecho interesante, y es que si tomamos el campo ∂_t y lo descomponemos en su parte tangente y normal cuando lo consideramos en \overline{M}_L^{n+1} y en \overline{M}_R^{n+1} , sucederá que las partes tangentes no tienen por qué ser iguales. De hecho, se propondrá un ejemplo en el que puede observarse que son distintas. Después, se estudiará qué relación existe entre los gradientes de la función altura y esto dará lugar a dos consecuencias. La primera de ellas es que una hipersuperficie es un slice en \overline{M}_R^{n+1} si y solo si es un slice en \overline{M}_L^{n+1} , mientras que la segunda es que una hipersuperficie tiene ángulo constante como hipersuperficie en \overline{M}_R^{n+1} si y solo si lo tiene viéndola como hipersuperficie en \overline{M}_L^{n+1} (Corolario 3.8, [AAS]). Siguiendo con el estudio de las relaciones existentes al considerar las dos métricas, el siguiente paso será estudiar tanto los operadores forma como las funciones curvatura media.

Posteriormente, en la penúltima sección, se usarán los resultados anteriores para demostrar lo siguiente (Lema 3.12 [AAS]):

Si Σ^n es una hipersuperficie no degenerada que tiene curvatura media igual a cero con respecto a ambas métricas, entonces las hipersuperficies de nivel de su función altura son subvariedades minimales en \overline{M}_L^{n+1} y en \overline{M}_R^{n+1} .

Como consecuencia, también se obtendrá el siguiente resultado acerca de dicha hipersuperficie (Teorema 3.13, [AAS]):

- *Si Σ^n es temporal, entonces está foliada por hipersuperficies espaciales que son subvariedades minimales de \overline{M}_L^{n+1} .*

- Si Σ^n es espacial y no es un slice, entonces está foliada por hipersuperficies que son subvariedades minimales de \overline{M}_L^{n+1} .

En particular, cuando $n = 2$, el resultado anterior caracterizará las superficies regladas como las únicas superficies no degeneradas que tienen curvatura media igual a cero con respecto a ambas métricas en $M^2 \times \mathbb{R}$ (Corolario 3.14, [AAS]).

A continuación, se estudiarán algunos ejemplos de hipersuperficies en distintos espacios producto y que tienen curvatura media igual a cero con respecto a las dos métricas estudiadas. Más aún, se caracterizarán los trozos abiertos de slices, los cilindros sobre geodésicas y los helicoides como las únicas superficies no degeneradas en el espacio producto $\overline{M}_L^3 = M^2(c) \times \mathbb{R}_1$ que tienen curvatura media igual a cero con respecto a ambas métricas (Teorema 3.19, [AAS]). Tal y como se indica en la tesis, este resultado puede verse como una aproximación alternativa y unificada de resultados previamente obtenidos por Kobayashi y por Kim et al. (véase [Ko, KKS Y]). Sin embargo, es importante destacar que en esta tesis se considerarán no solo superficies espaciales, sino que se extenderá a superficies no degeneradas (incluyendo, por tanto, tanto las superficies espaciales como las temporales).

Por último, se estudiará qué relación existe entre las curvaturas de Gauss de superficies en \overline{M}_R^3 y en \overline{M}_L^3 para terminar estableciendo el siguiente teorema de caracterización (Teorema 3.22, [AAS]):

Los trozos de planos, conos, cilindros y superficies tangentes desarrollables son las únicas superficies no degeneradas en el espacio tridimensional de Lorentz-Minkowski que tienen la misma curvatura de Gauss (no necesariamente constante) con respecto a ambas métricas.

Más aún, en el caso de que dicha curvatura de Gauss sea una constante no nula, tendremos el siguiente resultado (Teorema 3.23, [AAS]):

Las únicas superficies no degeneradas inmersas en el espacio producto lorentziano $\overline{M}_L^3 = M^2(c) \times \mathbb{R}$ y satisfaciendo $K_R = K_L = c \neq 0$ son los slices.

Capítulo 1

Preliminares

Sumario. El objetivo de este primer capítulo es introducir los conceptos básicos que van a ir apareciendo a lo largo de la tesis. Concretamente, se introducirán los espacios producto $\overline{M}^{n+1} = M^n \times \mathbb{R}$ y las dos métricas, $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$, con las cuales se trabajará. Esto permitirá definir las hipersuperficies espaciales y temporales, que serán estudiadas en profundidad en los capítulos posteriores. Asimismo, también se introducirán los grafos y se estudiará su geometría en detalle. Por último, se estudiarán los operadores lineales y cuasi-lineales, los cuales nos permitirán llegar al principio del máximo.

1.1. Las variedades producto riemanniano y lorentziano.

Sea $\overline{M}^{n+1} = M^n \times \mathbb{R}$ una variedad producto $(n + 1)$ -dimensional en la que M^n es una variedad riemanniana n -dimensional con métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$. A lo largo de esta tesis, dotaremos a esta variedad producto de dos métricas distintas, una riemanniana y una lorentziana. Así, \overline{M}_R^{n+1} denotará la variedad producto $M^n \times \mathbb{R}$ con la métrica riemanniana usual para productos

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_R = \pi_M^* (\langle \cdot, \cdot \rangle_M) + \pi_{\mathbb{R}}^* (dt^2),$$

mientras que \overline{M}_L^{n+1} denotará la misma variedad producto $M^n \times \mathbb{R}$ pero con la métrica lorentziana para productos

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_L = \pi_M^* (\langle \cdot, \cdot \rangle_M) - \pi_{\mathbb{R}}^* (dt^2).$$

Cuando sea conveniente, se denotará también $\overline{M}_L^{n+1} = M^n \times \mathbb{R}_1$ para enfatizar que en el segundo factor estamos trabajando con la signatura lorentziana.

Obsérvese que en la expresión de ambas métricas intervienen las proyecciones $\pi_M : M^n \times \mathbb{R} \rightarrow M^n$ y $\pi_{\mathbb{R}} : M^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de los espacios producto sobre los factores M^n y \mathbb{R} , respectivamente. No obstante, y con el fin de simplificar, haremos un abuso de notación y escribiremos, como es usual,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_R = \langle \cdot, \cdot \rangle_M + dt^2 \quad \text{y} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_L = \langle \cdot, \cdot \rangle_M - dt^2.$$

Por otro lado, con el fin de poder trabajar con las dos métricas al mismo tiempo, en ocasiones usaremos la notación $\overline{M}_\delta^{n+1}$ y la métrica

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta = \langle \cdot, \cdot \rangle_M + \delta dt^2,$$

teniendo en cuenta que si $\delta = 1$ estaremos trabajando en \overline{M}_R^{n+1} con la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y que si $\delta = -1$ estaremos en \overline{M}_L^{n+1} con la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$.

En particular, cuando M^n sea el espacio euclídeo n -dimensional, \mathbb{R}^n , tendremos que $\overline{M}_R^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ y $\overline{M}_L^{n+1} = \mathbb{L}^{n+1}$. Es decir, estaremos trabajando con el espacio euclídeo $(n+1)$ -dimensional y con el espacio de Lorentz-Minkowski $(n+1)$ -dimensional, respectivamente.

Como una primera observación tengamos en cuenta que

$$\partial_t = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{(x,t)}, \quad (x, t) \in \overline{M}_\delta^{n+1},$$

es un campo vectorial unitario y globalmente definido sobre los espacios $\overline{M}_\delta^{n+1}$ que verifica la condición $\langle \partial_t, \partial_t \rangle_\delta = \delta$. Esto nos permite descomponer todo campo vectorial U en $\overline{M}_\delta^{n+1}$ como

$$U = \widehat{U} + \delta \langle U, \partial_t \rangle_\delta \partial_t, \quad (1.1)$$

donde $\langle \widehat{U}, \partial_t \rangle_\delta = 0$.

A continuación, vamos a ver una serie de resultados que nos van a ser útiles para demostrar que las conexiones de Levi-Civita de las métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ que estamos considerando van a ser en realidad la misma.

Proposición 1.1. *Se verifican las siguientes igualdades:*

$$\overline{\nabla}^R \pi_{\mathbb{R}} = \partial_t \quad y \quad \overline{\nabla}^L \pi_{\mathbb{R}} = -\partial_t,$$

donde $\overline{\nabla}^R$ y $\overline{\nabla}^L$ denotan, respectivamente, el operador gradiente en \overline{M}_R y \overline{M}_L , y la aplicación $\pi_{\mathbb{R}} : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\pi_{\mathbb{R}}(x, t) = t$ es la proyección sobre \mathbb{R} .

Demostración. Como \overline{M}_δ es una variedad producto, dado $q = (x, t) \in \overline{M}_\delta = M \times \mathbb{R}$, podemos tomar un referencial ortonormal $\{E_1, \dots, E_n, \partial_t\}$, donde $\{E_1, \dots, E_n\}$ es un referencial local de campos en $\mathfrak{X}(M^n)$ y ∂_t es el campo natural de \mathbb{R} . Entonces, como $\overline{\nabla}^R \pi_{\mathbb{R}}$ es tangente a \overline{M}_δ , podemos expresarlo a partir de este referencial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}^R \pi_{\mathbb{R}} &= \sum_{i=1}^n \langle \overline{\nabla}^R \pi_{\mathbb{R}}, E_i \rangle_M E_i + \langle \overline{\nabla}^R \pi_{\mathbb{R}}, \partial_t \rangle \partial_t \\ &= \sum_{i=1}^n E_i(\pi_{\mathbb{R}}) E_i + \partial_t(\pi_{\mathbb{R}}) \partial_t = \partial_t(\pi_{\mathbb{R}}) \partial_t = \frac{d}{dt}(t) \partial_t = \partial_t. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}^L \pi_{\mathbb{R}} &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}^L \pi_{\mathbb{R}}, E_i \rangle_M E_i - \langle \bar{\nabla}^L \pi_{\mathbb{R}}, \partial_t \rangle \partial_t \\ &= \sum_{i=1}^n E_i(\pi_{\mathbb{R}}) E_i - \partial_t(\pi_{\mathbb{R}}) \partial_t = -\partial_t(\pi_{\mathbb{R}}) \partial_t = -\frac{d}{dt}(t) \partial_t = -\partial_t.\end{aligned}$$

□

Ahora, teniendo en cuenta la Proposición 1.1, si tenemos un vector $v \in T_{(x,t)} \bar{M}_\delta$ y tomamos la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$, obtenemos

$$(d\pi_{\mathbb{R}})_{(x,t)}(v) = v(\pi_{\mathbb{R}}) = \langle \bar{\nabla}^R \pi_{\mathbb{R}}, v \rangle_R = \langle \partial_t, v \rangle_R.$$

Por otro lado, con la métrica lorentziana y de forma análoga obtenemos

$$(d\pi_{\mathbb{R}})_{(x,t)}(v) = v(\pi_{\mathbb{R}}) = \langle \bar{\nabla}^L \pi_{\mathbb{R}}, v \rangle_L = -\langle \partial_t, v \rangle_L.$$

Así, hemos demostrado la siguiente proposición.

Proposición 1.2. *Para todo $X \in \mathfrak{X}(\bar{M}_\delta)$ se verifica $\langle X, \partial_t \rangle_L = -\langle X, \partial_t \rangle_R$.*

Como hemos adelantado antes, es interesante observar que las conexiones de Levi-Civita de las dos métricas que estamos considerando son la misma, por lo que a lo largo de toda la tesis no haremos distinción entre ellas y las denotaremos simplemente por $\bar{\nabla}$. Veámoslo en la siguiente proposición.

Proposición 1.3. *Las conexiones de Levi-Civita de \bar{M}_L^{n+1} y \bar{M}_R^{n+1} , denotadas respectivamente por $\bar{\nabla}^L$ y $\bar{\nabla}^R$, verifican $\bar{\nabla}^L = \bar{\nabla}^R$, por lo que de ahora en adelante las denotaremos por $\bar{\nabla}$.*

Demostración. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y denotando por D la conexión de Levi-Civita en $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$, la Proposición 56 del Capítulo 3 del libro de [ON] nos da las siguientes igualdades:

- $\bar{\nabla}_{\partial_t}^L \partial_t = 0 = \bar{\nabla}_{\partial_t}^R \partial_t$.
- $\bar{\nabla}_X^L \partial_t = \bar{\nabla}_{\partial_t}^L X = 0 = \bar{\nabla}_{\partial_t}^R X = \bar{\nabla}_X^R \partial_t$.
- $\bar{\nabla}_X^L Y = D_X Y = \bar{\nabla}_X^R Y$.

Por la unicidad de la conexión de Levi-Civita, se sigue que $\bar{\nabla}^L = \bar{\nabla}^R$ en los casos anteriores.

Para el caso general, es decir, tomando $X, Y \in \mathfrak{X}(\bar{M}_\delta)$, obsérvese que cuando estamos trabajando con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ podemos expresarlos a partir de (1.1) como

$$X = \hat{X} + \langle X, \partial_t \rangle_R \partial_t \quad \text{e} \quad Y = \hat{Y} + \langle Y, \partial_t \rangle_R \partial_t, \quad (1.2)$$

mientras que en el caso de la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ tenemos

$$X = \hat{X} - \langle X, \partial_t \rangle_L \partial_t \quad \text{e} \quad Y = \hat{Y} - \langle Y, \partial_t \rangle_L \partial_t. \quad (1.3)$$

Usando las expresiones (1.2) y (1.3), vamos a calcular $\overline{\nabla}_X^R Y$ para ver que efectivamente coincide con $\overline{\nabla}_X^L Y$.

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X^R Y &= \overline{\nabla}_{(\widehat{X} + \langle X, \partial_t \rangle_R \partial_t)}^R (\widehat{Y} + \langle Y, \partial_t \rangle_R \partial_t) \\ &= \overline{\nabla}_{\widehat{X}}^R (\widehat{Y} + \langle Y, \partial_t \rangle_R \partial_t) + \langle X, \partial_t \rangle_R \overline{\nabla}_{\partial_t}^R (\widehat{Y} + \langle Y, \partial_t \rangle_R \partial_t) \\ &= \overline{\nabla}_{\widehat{X}}^R (\widehat{Y} + \langle Y, \partial_t \rangle_R \partial_t) - \langle X, \partial_t \rangle_L \overline{\nabla}_{\partial_t}^R (\widehat{Y} + \langle Y, \partial_t \rangle_R \partial_t).\end{aligned}\tag{1.4}$$

Ahora, vamos a calcular por separado cada uno de los dos sumandos.

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{\widehat{X}}^R (\widehat{Y} + \langle Y, \partial_t \rangle_R \partial_t) &= \overline{\nabla}_{\widehat{X}}^R \widehat{Y} + \widehat{X} (\langle Y, \partial_t \rangle_R) \partial_t + \langle Y, \partial_t \rangle_R \overline{\nabla}_{\widehat{X}}^R \partial_t \\ &= \overline{\nabla}_{\widehat{X}}^L \widehat{Y} - \widehat{X} (\langle Y, \partial_t \rangle_L) \partial_t - \langle Y, \partial_t \rangle_L \overline{\nabla}_{\widehat{X}}^L \partial_t \\ &= \overline{\nabla}_{\widehat{X}}^L (\widehat{Y} - \langle Y, \partial_t \rangle_L \partial_t) = \overline{\nabla}_{\widehat{X}}^L Y.\end{aligned}\tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{\partial_t}^R (\widehat{Y} + \langle Y, \partial_t \rangle_R \partial_t) &= \overline{\nabla}_{\partial_t}^R \widehat{Y} + \partial_t (\langle Y, \partial_t \rangle_R) \partial_t + \langle Y, \partial_t \rangle_R \overline{\nabla}_{\partial_t}^R \partial_t \\ &= \overline{\nabla}_{\partial_t}^L \widehat{Y} - \partial_t (\langle Y, \partial_t \rangle_L) \partial_t - \langle Y, \partial_t \rangle_L \overline{\nabla}_{\partial_t}^L \partial_t \\ &= \overline{\nabla}_{\partial_t}^L (\widehat{Y} - \langle Y, \partial_t \rangle_L \partial_t) = \overline{\nabla}_{\partial_t}^L Y.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Entonces, si insertamos los resultados de (1.5) y (1.6) en la expresión (1.4), obtenemos

$$\overline{\nabla}_X^R Y = \overline{\nabla}_{\widehat{X}}^L Y - \langle X, \partial_t \rangle_L \overline{\nabla}_{\partial_t}^L Y = \overline{\nabla}_{(\widehat{X} - \langle X, \partial_t \rangle_L \partial_t)}^L Y = \overline{\nabla}_X^L Y.$$

Así, teniendo en cuenta la unicidad de la conexión de Levi-Civita, se sigue que $\overline{\nabla}^R = \overline{\nabla}^L$ como queríamos demostrar. \square

1.2. Hipersuperficies en las variedades producto.

Se dice que una variedad conexa n -dimensional Σ^n es una *hipersuperficie no degenerada* en \overline{M}_L^{n+1} si existe una inmersión diferenciable $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}_L^{n+1}$ que induce, a partir de la métrica lorentziana $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ sobre \overline{M}_L^{n+1} , una métrica no degenerada sobre Σ^n y que, como suele ser usual, denotaremos también por $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$. En ese caso, tenemos dos posibilidades:

- 1) La métrica inducida sobre Σ^n es riemanniana, en cuyo caso diremos que Σ^n es una *hipersuperficie espacial* sobre \overline{M}_L^{n+1} .
- 2) La métrica inducida sobre Σ^n es lorentziana, en cuyo caso diremos que Σ^n es una *hipersuperficie temporal* sobre \overline{M}_L^{n+1} .

De esta forma, en el primer caso el hiperplano tangente $d\psi_p(T_p\Sigma)$ es un hiperplano espacial de $T_{\psi(p)}\overline{M}_L$ para todo $p \in \Sigma$, mientras que en el segundo caso es un hiperplano temporal.

En el caso en que la hipersuperficie Σ^n sea espacial, como ∂_t es un campo vectorial temporal, unitario y globalmente definido sobre \overline{M}_L^{n+1} y el hiperplano tangente es espacial en cada punto de Σ^n , puede demostrarse que existe un único campo vectorial unitario, normal a Σ^n y temporal, definido globalmente sobre Σ^n , que tiene la misma orientación temporal que ∂_t y al que denotaremos por N_L . Así, podremos suponer que Σ^n está orientada por N_L . Vamos a demostrar esto.

Proposición 1.4. *Las hipersuperficies espaciales en \overline{M}_L^{n+1} son orientables en el sentido de que admiten un campo normal globalmente definido.*

Demostración. Sea Σ^n una hipersuperficie espacial y sea $p \in \Sigma$. Consideremos también el hiperplano tangente $d\psi_p(T_p\Sigma)$, que sabemos que es espacial. Existe entonces un vector $N(p)$ normal a dicho hiperplano, temporal y unitario.

Haciendo uso, con los vectores $N(p)$ y ∂_t , de la desigualdad invertida de Cauchy-Schwarz para vectores temporales, ocurre que

$$|\langle N(p), \partial_t \rangle_L| \geq \|N(p)\|_L \cdot \|\partial_t\|_L = 1,$$

siendo $\|\cdot\|_L$ la norma de un campo de vectores en \overline{M}_L con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$.

Esto nos da dos opciones:

- 1) $\langle N(p), \partial_t \rangle_L \leq -1$ y ambos vectores están en el mismo cono temporal (en este caso diremos que N apunta hacia el futuro).
- 2) $\langle N(p), \partial_t \rangle_L \geq 1$ y el vector temporal $N(p)$ pertenece a la orientación temporal opuesta a ∂_t (en este caso diremos que N apunta hacia el pasado).

Elegimos entonces, para cada $p \in \Sigma$, el vector normal $N(p)$ que verifica la primera condición, esto es, aquel que apunta hacia el futuro. \square

De esta forma, siempre que tengamos una hipersuperficie espacial en \overline{M}_L^{n+1} tomaremos como N_L el vector normal del resultado anterior que apunta hacia el futuro.

Por otro lado, una consecuencia que se tiene del hecho de que

$$\langle N_L(p), \partial_t \rangle_L \leq -1, \tag{1.7}$$

y de acuerdo con [ON], es que existe un único número $\varphi \geq 0$, llamado *ángulo hiperbólico entre N_L y ∂_t* , tal que

$$\langle N_L, \partial_t \rangle_L = -\cosh(\varphi). \tag{1.8}$$

Por otro lado, en el caso en que la hipersuperficie Σ^n sea temporal, no podemos asegurar la existencia de un campo vectorial unitario, normal a Σ^n y globalmente definido satisfaciendo (1.7). No

obstante, sí que es posible la elección de un campo normal verificando dicha condición en casi toda la hipersuperficie. En concreto, consideremos la región abierta de Σ^n dada por

$$\widehat{\Sigma}^n = \{p \in \Sigma^n : \text{existen } \mathcal{U}_p, N_L \text{ de modo que } \langle N_L, \partial_t \rangle_L \leq 0 \text{ en } \mathcal{U}_p\},$$

donde $\mathcal{U}_p \subseteq \Sigma^n$ es un entorno de p y N_L es un campo vectorial normal en Σ^n . Es inmediato comprobar que $\widehat{\Sigma}^n$ es un subconjunto abierto y denso de Σ^n , y que la elección de N_L , que en este caso será espacial, se puede hacer de modo global sobre cualquier componente conexa de $\widehat{\Sigma}^n$ de modo que

$$\langle N_L, \partial_t \rangle_L \leq 0.$$

En este caso, y de acuerdo con [FN], sabemos que en cada componente conexa de $\widehat{\Sigma}^n$ existe un único número $\varphi \geq 0$, llamado también *ángulo hiperbólico entre N_L y ∂_t* , tal que

$$\langle N_L, \partial_t \rangle_L = -\sinh(\varphi). \quad (1.9)$$

A modo ilustrativo, en la Figura 1.1 se ha representado una superficie temporal de revolución con respecto al eje temporal en \mathbb{L}^3 de modo que $\widehat{\Sigma}$ tiene dos componentes conexas y $\Sigma \setminus \widehat{\Sigma}$ consiste en una circunferencia.

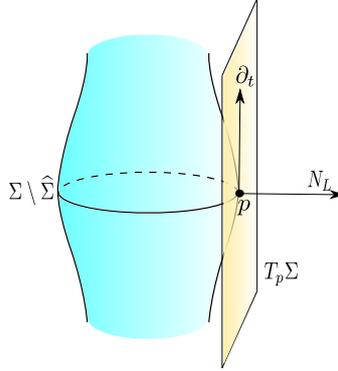


Figura 1.1: Ejemplo de $\widehat{\Sigma}^n$ con dos componentes conexas.

Denotaremos por ε el signo de $\langle N_L, N_L \rangle_L$, esto es,

$$\varepsilon = \begin{cases} -1 & \text{si } \Sigma^n \text{ es espacial,} \\ 1 & \text{si } \Sigma^n \text{ es temporal.} \end{cases}$$

Teniendo eso en cuenta, si denotamos por ∇^L la conexión de Levi-Civita en Σ^n con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$, tendremos que dados dos campos tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, las *fórmulas de Gauss y Weingarten* para la hipersuperficie $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}_L^{n+1}$ son, respectivamente, las siguientes:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X^L Y + \varepsilon \langle A_L X, Y \rangle_L N_L \quad \text{y} \quad A_L X = -\overline{\nabla}_X N_L, \quad (1.10)$$

donde $A_L : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ es el operador forma de Σ^n con respecto a N_L . Observemos además que A_L es autoadjunto con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$, es decir, se verifica la igualdad

$$\langle A_L X, Y \rangle_L = \langle X, A_L Y \rangle_L$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Sin embargo, A_L no tiene por qué ser diagonalizable en el caso de que Σ^n sea temporal (ver [ON], Capítulo 9). Por otro lado, la función curvatura media de Σ^n con respecto a N_L está definida por

$$H_L = \frac{\varepsilon}{n} \text{tr}(A_L),$$

y diremos que Σ^n es *minimal* (en el caso $\varepsilon = 1$) o *maximal* (en el caso $\varepsilon = -1$) si $H_L = 0$.

Además, en el caso en que Σ^n sea espacial, el operador A_L será diagonalizable y la función curvatura podrá expresarse como

$$H_L = \frac{-1}{n} (k_1^L + \dots + k_n^L),$$

donde k_i^L , $i = 1, \dots, n$ son las curvaturas principales de $(\Sigma^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$.

Más aún, en el mismo caso en el que Σ^n es espacial, es interesante observar que la función curvatura media tiene una expresión en términos de las curvaturas normales de cualquier conjunto de direcciones ortogonales. Esto es,

$$H_L = \frac{-1}{n} (\kappa_{v_1}^L + \dots + \kappa_{v_n}^L), \quad (1.11)$$

donde $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de $T_p \Sigma$ con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ y κ_{v_i} denota la curvatura normal en la dirección dada por v_i .

Centrándonos en \mathbb{L}^{n+1} , es bien conocido que no existen hipersuperficies espaciales compactas sin frontera (véase [AA] o [ARS]). Por tanto, toda hipersuperficie espacial compacta Σ^n en el espacio de Lorentz-Minkowski necesariamente tiene frontera no vacía.

Observemos ahora que, dada $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}_L^{n+1}$ una hipersuperficie no degenerada e inmersa en la variedad lorentziana \overline{M}_L^{n+1} , podremos verla tanto con la métrica de \overline{M}_L^{n+1} como con la métrica heredada de \overline{M}_R^{n+1} . En este último caso, tendremos garantizada la existencia de un único campo vectorial local, normal y unitario, N_R . Además, de forma análoga al caso lorentziano, denotaremos por ∇^R la conexión de Levi-Civita en Σ^n con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$. Por tanto, la *fórmula de Gauss* y la *fórmula de Weingarten* ahora son de la forma:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X^R Y + \langle A_R X, Y \rangle_R N_R \quad \text{y} \quad A_R X = -\overline{\nabla}_X N_R, \quad (1.12)$$

donde $A_R : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ es el operador forma de Σ^n con respecto a N_R . Además, A_R es autoadjunto con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$, es decir,

$$\langle A_R X, Y \rangle_R = \langle X, A_R Y \rangle_R$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. En contraste con el caso lorentziano, A_R siempre es diagonalizable.

Por otro lado, la función curvatura media de Σ^n con respecto a N_R está definida en este caso por

$$H_R = \frac{1}{n} \text{tr}(A_R) = \frac{1}{n} (k_1^R + \dots + k_n^R),$$

donde k_i^R , $i = 1, \dots, n$ son las curvaturas principales de $(\Sigma^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_R)$. Además, diremos que la hipersuperficie Σ^n es *minimal* si $H_R = 0$.

De forma análoga a lo que sucedía al considerar la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$, la función curvatura media puede expresarse en términos de las curvaturas normales de cualquier conjunto de direcciones ortogonales. Es decir,

$$H_R = \frac{1}{n} (\kappa_{v_1}^R + \dots + \kappa_{v_n}^R) \quad (1.13)$$

con $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de $T_p\Sigma$ con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y κ_{v_i} denota la curvatura normal en la dirección dada por v_i .

1.3. Grafos en las variedades producto.

Dado que en el siguiente capítulo de esta tesis trabajaremos con grafos en $\overline{M}_\delta^{n+1}$, el objetivo de esta sección es ver cómo son los grafos en dicha variedad. Así, estudiaremos su métrica y veremos cómo es la expresión de su vector normal, su operador forma y su función curvatura media.

1.3.1. Métrica.

Consideremos $\Omega \subseteq M^n$ un dominio conexo. Se verifica que toda función diferenciable $u \in C^\infty(\Omega)$ determina un grafo sobre Ω dado por

$$\Sigma_u = \Sigma(u) = \{(x, u(x)) : x \in \Omega\} \subseteq \overline{M}_\delta^{n+1}.$$

Es interesante observar que todo grafo Σ_u puede verse como la imagen de la inmersión

$$\begin{aligned} f_u : \Omega &\longrightarrow \overline{M}_\delta^{n+1} \\ x &\longmapsto f_u(x) = (x, u(x)). \end{aligned}$$

A continuación, como se ha indicado antes, vamos a estudiar la geometría de estos grafos, y para ello calcularemos en primer lugar la aplicación diferencial de la inmersión f_u .

Dados $x \in \Omega$ y $v \in T_x M^n$, por definición se tiene que

$$df_u(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_u(\alpha(t))$$

para cualquier curva diferenciable $\alpha : I \longrightarrow \Omega$, con I un intervalo abierto, tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces,

$$df_u(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_u(\alpha(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\alpha(t), u(\alpha(t))) = (v, du_x(v)) = (v, \langle v, Du \rangle_M), \quad (1.14)$$

donde Du denota el gradiente de u sobre Ω con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$.

A partir de la expresión obtenida para df_u se comprueba inmediatamente que f_u es, como se ha afirmado, una inmersión.

Veamos cómo queda la expresión general de la métrica inducida sobre Ω vía el grafo Σ_u . Dados $v, w \in T_x M^n$, usando (1.14) se tiene

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_\delta &= \langle df_u(v), df_u(w) \rangle_\delta = \langle (v, \langle v, Du \rangle_M), (w, \langle w, Du \rangle_M) \rangle_\delta \\ &= \langle v, w \rangle_M + \delta \langle v, Du \rangle_M \langle w, Du \rangle_M, \end{aligned}$$

es decir, la métrica inducida sobre Ω de la métrica del espacio ambiente $\overline{M}_\delta^{n+1}$ vía el grafo Σ_u viene dada por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta = \langle \cdot, \cdot \rangle_M + \delta du^2,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta = \langle \cdot, \cdot \rangle_L$ en el caso $\delta = -1$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta = \langle \cdot, \cdot \rangle_R$ en el caso $\delta = 1$ representan las métricas inducidas de \overline{M}_L^{n+1} y \overline{M}_R^{n+1} respectivamente.

1.3.2. Vector normal.

Definamos ahora el campo vectorial

$$\eta(x) = (-\delta Du(x), 1) = -\delta Du(x) + \partial_t.$$

Este campo es normal a la superficie, ya que para todo $v \in T_x M^n$ se verifica

$$\begin{aligned} \langle df_u(v), \eta(x) \rangle_\delta &= \langle (v, \langle v, Du(x) \rangle_M), (-\delta Du(x), 1) \rangle_\delta \\ &= -\delta \langle v, Du(x) \rangle_M + \delta \langle v, Du(x) \rangle_M = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, como

$$\langle \eta(x), \eta(x) \rangle_\delta = \langle (-\delta Du(x), 1), (-\delta Du(x), 1) \rangle_\delta = \|Du\|^2 \delta^2 + \delta = \|Du\|^2 + \delta,$$

entonces, en el caso $\delta = -1$, f_u determinará un grafo espacial en \overline{M}_L^{n+1} si, y solo si, se verifica la desigualdad $\|Du\|^2 < 1$ en todo Ω , siendo $\|Du\|$ la norma del gradiente de u con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ sobre $\Omega \subseteq M^n$. Supondremos en lo que resta de esta sección que en el caso de \overline{M}_L^{n+1} vamos a trabajar solo con grafos espaciales.

De esta forma, trabajaremos con el siguiente vector normal:

$$N_\delta(x) = \frac{\eta(x)}{\|\eta(x)\|} = \frac{(-\delta Du(x), 1)}{\sqrt{1 + \delta \|Du\|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta \|Du\|^2}} (-\delta Du(x) + \partial_t), \quad (1.15)$$

donde $N_\delta = N_L$ en el caso $\delta = -1$ y $N_\delta = N_R$ en el caso $\delta = 1$ representarán, respectivamente, el vector normal con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ y el vector normal con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$.

Es necesario mencionar que, por simplificar la notación, no vamos a poner $\|\eta\|_\delta$, pero téngase en cuenta que

$$\|\eta\| = \|\eta\|_\delta = \sqrt{1 + \delta\|Du\|^2} = \begin{cases} \sqrt{1 - \|Du\|^2} & \text{al trabajar con la métrica } \langle \cdot, \cdot \rangle_L. \\ \sqrt{1 + \|Du\|^2} & \text{al trabajar con la métrica } \langle \cdot, \cdot \rangle_R. \end{cases}$$

Obsérvese además que

$$\langle N_\delta, \partial_t \rangle_\delta = \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta\|Du\|^2}}$$

será positivo cuando estemos trabajando con la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ (es decir, con $\delta = 1$), mientras que será negativo al trabajar con la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ (esto es, con $\delta = -1$).

1.3.3. Operador forma.

Nuestro objetivo ahora es calcular el operador forma de Σ_u apoyándonos en la fórmula de Weingarten para hipersuperficies que, de acuerdo con (1.10) y (1.12) nos asegura que, dada una variedad M , para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se verifica

$$\bar{\nabla}_{df_u(X)} N_\delta = -df_u(A_\delta X), \quad (1.16)$$

siendo $A_\delta = A_L$ si $\delta = -1$ y $A_\delta = A_R$ si $\delta = 1$.

Teniendo en cuenta las propiedades básicas de la conexión de Levi-Civita y la definición de N_δ tenemos

$$\bar{\nabla}_{df_u(X)} N_\delta = \bar{\nabla}_{df_u(X)} \left(\frac{1}{\|\eta\|} \eta \right) = df_u(X) \left(\frac{1}{\|\eta\|} \right) \eta + \frac{1}{\|\eta\|} \bar{\nabla}_{df_u(X)} \eta. \quad (1.17)$$

Para calcular el valor del primer sumando, tendremos en cuenta que $df_u(X) = X + \langle Du, X \rangle_M \partial_t$ debido a (1.14) y que $\partial_t \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \delta\|Du\|^2}} \right) = 0$ porque u no depende de t . Entonces,

$$\begin{aligned} df_u(X) \left(\frac{1}{\|\eta\|} \right) &= df_u(X) \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \delta\|Du\|^2}} \right) = X \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \delta\|Du\|^2}} \right) \\ &= \frac{-2\delta \langle D_X Du, Du \rangle_M}{2\sqrt{1 + \delta\|Du\|^2} (1 + \delta\|Du\|^2)} = -\delta \frac{\langle D_X Du, Du \rangle_M}{(1 + \delta\|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

donde hemos usado que

$$X(\|Du\|^2) = 2\langle D_X Du, Du \rangle_M.$$

Ahora, para continuar con nuestro cálculo del operador forma, debemos tener en cuenta que, usando las expresiones de Levi-Civita que aparecen en el Proposición 56 del Capítulo 3 de [ON] y que ya se nombraron en la demostración de la Proposición 1.3, puede demostrarse que para cualesquiera

U y V campos de vectores tangentes sobre $\overline{M}_\delta^{n+1}$, la conexión de Levi-Civita del espacio ambiente producto, $\overline{\nabla}$, se expresa en función de la conexión de Levi-Civita de la hipersuperficie M^n , D , como

$$\overline{\nabla}_U V = D_{U^*} V^*,$$

donde $U^* = \pi_M^*(U) \in \mathfrak{X}(M)$ y $V^* = \pi_M^*(V) \in \mathfrak{X}(M)$ son las proyecciones de U y V sobre M^n .

Teniendo esto en cuenta obtenemos

$$\overline{\nabla}_{df_u(X)} \eta = \overline{\nabla}_{(X, \langle X, Du \rangle_M)} (-\delta Du, 1) = -\delta D_X Du. \quad (1.19)$$

Por tanto, usando (1.18) y (1.19) en la expresión (1.17), obtenemos

$$\overline{\nabla}_{df_u(X)} N_\delta = -\delta \frac{\langle D_X Du, Du \rangle_M}{(1 + \delta \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}} (-\delta Du + \partial_t) - \delta \frac{D_X Du}{\sqrt{1 + \delta \|Du\|^2}}. \quad (1.20)$$

Al mismo tiempo, si usamos (1.14), tenemos que

$$df_u(A_\delta X) = A_\delta X + \langle Du, A_\delta X \rangle_M \partial_t. \quad (1.21)$$

Finalmente, si combinamos la fórmula de Weingarten (1.16) con las ecuaciones (1.20) y (1.21), llegamos a la expresión

$$-\delta \frac{\langle D_X Du, Du \rangle_M}{(1 + \delta \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}} (-\delta Du + \partial_t) - \delta \frac{D_X Du}{\sqrt{1 + \delta \|Du\|^2}} = -A_\delta X - \langle Du, A_\delta X \rangle_M \partial_t,$$

de donde, igualando partes tangentes, obtenemos que para todo $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$, el operador forma tiene la siguiente expresión:

$$A_\delta X = \delta \frac{D_X Du}{\sqrt{1 + \delta \|Du\|^2}} - \frac{\langle D_X Du, Du \rangle_M}{(1 + \delta \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}} Du. \quad (1.22)$$

1.3.4. Curvatura media.

Sea $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ un referencial ortonormal local de $\mathfrak{X}(\Omega)$ con respecto a la métrica usual de M^n . Si denotamos por D^2 el operador hessiano en $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$, observemos que

$$\langle D_{E_i} Du, Du \rangle_M = D^2 u(E_i, Du) = D^2 u(Du, E_i) = \langle D_{Du} Du, E_i \rangle_M. \quad (1.23)$$

Asimismo, obsérvese también que el operador laplaciano en $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ de una función puede verse de la siguiente forma:

$$\Delta f = \operatorname{div}(Df) = \operatorname{tr}(D(Df)) = \operatorname{tr}(X \mapsto D_X Df) = \sum_{i=1}^n \langle D_{E_i} Df, E_i \rangle_M, \quad (1.24)$$

siendo div el operador divergencia en $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$.

A continuación vamos a tomar trazas en (1.22) teniendo en cuenta tanto (1.23) como (1.24).

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A_\delta) &= \delta \frac{\sum_{i=1}^n \langle D_{E_i} Du, E_i \rangle_M}{\sqrt{1 + \delta \|Du\|^2}} - \frac{\sum_{i=1}^n \langle D_{E_i} Du, Du \rangle_M \langle Du, E_i \rangle_M}{(1 + \delta \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \delta \frac{\Delta u}{\sqrt{1 + \delta \|Du\|^2}} - \frac{\sum_{i=1}^n \langle D_{D_u} Du, E_i \rangle_M \langle Du, E_i \rangle_M}{(1 + \delta \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \delta \frac{\Delta u}{\sqrt{1 + \delta \|Du\|^2}} - \frac{\langle D_{D_u} Du, Du \rangle_M}{(1 + \delta \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Ahora, recordemos que

$$nH_\delta = \delta \operatorname{tr}(A_\delta),$$

siendo $H_\delta = H_L$ si $\delta = -1$ y $H_\delta = H_R$ si $\delta = 1$.

Por tanto, la función curvatura media vendrá dada por

$$nH_\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta \|Du\|^2}} \Delta u - \delta \frac{1}{(1 + \delta \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}} \langle D_{D_u} Du, Du \rangle_M. \quad (1.25)$$

Esta última expresión puede reescribirse de un modo más compacto usando que el operador divergencia verifica

$$\operatorname{div}(fX) = X(f) + f \operatorname{div}(X),$$

y que por tanto

$$\operatorname{div}(f \cdot Dg) = Dg(f) + f \operatorname{div}(Dg) = \langle Df, Dg \rangle_M + f \Delta g. \quad (1.26)$$

Si comparamos las expresiones (1.25) y (1.26), observamos que son muy similares y que todo parece indicar que, tomando $f = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta \|Du\|^2}}$ y $g = u$, obtendremos una expresión de la función curvatura media en función del operador divergencia. Vamos a calcular Df para comprobar que esto es cierto.

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces, teniendo en cuenta que en (1.18) ya calculamos el valor de $X \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \delta \|Du\|^2}} \right)$ y usando (1.23), obtenemos lo siguiente:

$$\langle Df, X \rangle_M = X(f) = X \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \delta \|Du\|^2}} \right) = -\delta \frac{\langle D_X Du, Du \rangle_M}{(1 + \delta \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}} = -\delta \frac{\langle D_{D_u} Du, X \rangle_M}{(1 + \delta \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En consecuencia,

$$Df = -\delta \frac{D_{D_u} Du}{(1 + \delta \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Así, hemos obtenido una nueva expresión para la función curvatura media:

$$H_\delta = \frac{1}{n} \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + \delta \|Du\|^2}} \right).$$

De esta manera, obtenemos que la curvatura media obtenida a partir de la métrica \langle , \rangle_R es

$$H_R = \frac{1}{n} \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + \|Du\|^2}} \right),$$

mientras que la curvatura media obtenida a partir de la métrica \langle , \rangle_L en el caso de los grafos espaciales es

$$H_L = \frac{1}{n} \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 - \|Du\|^2}} \right).$$

Por tanto, es evidente la demostración de los siguientes resultados.

Proposición 1.5. *Dado Σ_u un grafo sobre \overline{M}_R^{n+1} , el grafo será minimal si, y solo si, la función u satisface la siguiente ecuación en derivadas parciales sobre el dominio Ω :*

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + \|Du\|^2}} \right) = 0.$$

Usualmente nos referiremos a esta ecuación como la ecuación de las hipersuperficies minimales.

Proposición 1.6. *Dado Σ_u un grafo espacial sobre \overline{M}_L^{n+1} , el grafo será maximal si, y solo si, la función u satisface la siguiente ecuación sobre el dominio Ω :*

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 - \|Du\|^2}} \right) = 0 \quad \text{y} \quad \|Du\|^2 < 1.$$

Usualmente nos referiremos a esta ecuación como la ecuación de las hipersuperficies maximales.

1.3.5. Curvatura media de grafos cuando $M^n = \mathbb{R}^n$.

A continuación vamos a tomar $M^n = \mathbb{R}^n$ con el objetivo de calcular las funciones curvatura media en función de las métricas \langle , \rangle_R y \langle , \rangle_L para grafos expresados en coordenadas. Para ello, recordemos que, en general, la función es de la forma

$$H_\delta = \frac{1}{n} \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + \delta \|Du\|^2}} \right).$$

Sea $\{\partial x_1, \dots, \partial x_n\}$ la base ortonormal usual de campos coordenados en \mathbb{R}^n . Entonces, la divergencia puede escribirse como

$$\operatorname{div}(X) = \sum_{i=1}^n \langle D_{\partial x_i} X, \partial x_i \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial x_i}.$$

Antes de continuar, recordemos la notación usual

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{y} \quad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

donde (x_1, x_2, \dots, x_n) son las coordenadas canónicas en \mathbb{R}^n .

De esta manera, si $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ en dicha base, obtenemos

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + \delta \|Du\|^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_{x_1}}{\sqrt{1 + \delta \|Du\|^2}} \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{u_{x_n}}{\sqrt{1 + \delta \|Du\|^2}} \right). \quad (1.27)$$

Vamos a calcular cada uno de los sumandos.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_{x_i}}{\sqrt{1 + \delta \|Du\|^2}} \right) &= \frac{u_{x_i x_i} (1 + \delta \|Du\|^2) - \delta u_{x_i}^2 u_{x_i x_i} - \sum_{j \neq i} \delta u_{x_j} u_{x_j x_i} u_{x_i}}{(1 + \delta \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{u_{x_i x_i} + \sum_{j \neq i} \delta u_{x_i x_i} u_{x_j}^2 - \sum_{j \neq i} \delta u_{x_j} u_{x_j x_i} u_{x_i}}{(1 + \delta \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Por tanto, volviendo a la expresión obtenida en (1.27), tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + \delta \|Du\|^2}} \right) &= \frac{\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \neq i} \delta u_{x_i x_i} u_{x_j}^2 - \sum_{j \neq i} \delta u_{x_j} u_{x_j x_i} u_{x_i} \right)}{(1 + \delta \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} \left(1 + \delta \sum_{j \neq i} u_{x_j}^2 \right) - 2\delta \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j}}{(1 + \delta \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Así que las ecuaciones en coordenadas de las funciones curvatura media con respecto a las métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ son, respectivamente, las siguientes:

$$H_R = \frac{\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} \left(1 + \sum_{j \neq i} u_{x_j}^2 \right) - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j}}{n (1 + \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}} \quad y \quad (1.28)$$

$$H_L = \frac{\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} \left(1 - \sum_{j \neq i} u_{x_j}^2 \right) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j}}{n (1 - \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.29)$$

1.4. El principio del máximo.

Recordemos en esta sección algunas propiedades de los operadores lineales y cuasi-lineales elípticos, centrándonos principalmente en el estudio de los principios del máximo fuerte y del máximo interior. Estos principios serán necesarios más adelante en el siguiente capítulo. Como referencias para esta sección puede consultarse [GT] (véase también [Fe]).

1.4.1. El principio del máximo fuerte.

Definición 1.7. Sea Ω un dominio regular en \mathbb{R}^n y sea L un operador diferencial dado por

$$\begin{aligned} L : C^\infty(\bar{\Omega}) &\longrightarrow C^\infty(\bar{\Omega}) \\ u &\longmapsto L(u) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n c_i(x) u_{x_i}, \end{aligned}$$

donde los coeficientes $b_{ij}(x)$ y $c_i(x)$ son funciones continuas definidas sobre $\overline{\Omega}$ y $B(x) = (b_{ij}(x))_{ij}$ es una matriz simétrica para cada $x \in \overline{\Omega}$. Diremos que dicho operador es un *operador lineal de tipo elíptico* si la matriz $B(x)$ es definida positiva.

Una forma equivalente de describir la actuación del operador L dado en la Definición 1.7 sobre una función $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ es

$$L(u) = \langle B(x), D^2u \rangle + \langle c(x), Du \rangle,$$

donde $c(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))$ y D^2u es la matriz hessiana de u con respecto a la métrica euclídea de \mathbb{R}^n . Es necesario destacar que, por simplificar la notación, se ha denotado indistintamente por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tanto el producto escalar en el espacio de las matrices simétricas, que viene definido por $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$, como el producto escalar en \mathbb{R}^n .

A continuación vamos a ver una serie de propiedades de los operadores lineales de tipo elíptico. Entre ellas, veremos el llamado principio del máximo débil.

Proposición 1.8. *Dado un operador lineal L de tipo elíptico definido sobre un dominio regular $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ y se verifica que $L(u) > 0$ en Ω , entonces u no puede alcanzar un máximo local en ningún punto de Ω .*

Demostración. Supongamos que x_0 es un máximo local de u en Ω . En ese caso se tendrá que $Du(x_0) = 0$ y que D^2u es semidefinido negativo en x_0 , por lo que el operador L sobre u en el punto x_0 se queda de la siguiente forma:

$$L(u)(x_0) = \langle B(x_0), D^2u(x_0) \rangle. \quad (1.30)$$

Como sabemos que la matriz $B(x_0)$ es simétrica por la definición de operador de tipo elíptico, se puede diagonalizar. Por tanto, supongamos que $\{\lambda_1(x_0), \dots, \lambda_n(x_0)\}$ es el conjunto formado por sus valores propios y que $\{e_1, \dots, e_n\}$ son sus vectores propios asociados.

Entonces, respecto de la base formada por los vectores propios, la igualdad (1.30) puede expresarse como

$$L(u)(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_0) D^2u(x_0)(e_i, e_i),$$

donde $\lambda_i(x_0) > 0$, $1 \leq i \leq n$, por ser B definida positiva. Como consecuencia, $L(u)(x_0) \leq 0$, por lo que se contradice la hipótesis de que $L(u) > 0$ en Ω . Por tanto, u no puede alcanzar un máximo local en ningún punto de Ω . \square

Proposición 1.9 (Principio del máximo débil). *Dado un operador lineal L de tipo elíptico definido sobre un dominio regular $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si Ω es acotado y la función $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ cumple que $L(u) > 0$, entonces $u \leq \max_{\partial\Omega} u$.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de la Proposición 1.8 anterior, ya que al ser Ω acotado, se tiene que $\bar{\Omega}$ es compacto. Por tanto, debe existir $x_0 \in \bar{\Omega}$ tal que $u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u$. Sin embargo, dicho x_0 debe pertenecer a la frontera del dominio, es decir, $x_0 \in \partial\Omega$, puesto que no puede haber un máximo en el interior de Ω . \square

Lema 1.10. *Sea L un operador lineal de tipo elíptico definido sobre un dominio regular $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Si Ω es acotado y las funciones $u, v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ cumplen $L(u) \geq 0$ y $L(v) < 0$ en Ω , entonces*

$$u \leq v \quad \text{en } \partial\Omega \quad \Rightarrow \quad u \leq v \quad \text{en } \Omega.$$

Demostración.

Vamos a aplicar el principio del máximo débil (Proposición 1.9), a la función $u - v$. Para ello, veamos si se cumplen las hipótesis necesarias.

- Ω es acotado.
- $L(u - v) = L(u) - L(v) > 0$, puesto que $L(u) \geq 0$ y $L(v) < 0$.

Entonces, $u - v \leq \max_{\partial\Omega}(u - v)$.

Ahora, si suponemos que $u \leq v$ en $\partial\Omega$, entonces $u - v \leq 0$ en $\partial\Omega$, por lo que tenemos

$$u - v \leq \max_{\partial\Omega}(u - v) \leq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Así que $u \leq v$ en Ω como queríamos probar. \square

Los siguientes dos lemas darán lugar al principio del máximo fuerte.

Lema 1.11. *Sea $A(r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < \|x\| < r_2\}$ con r_1 y r_2 verificando $0 < r_1 < r_2$ y sea L un operador lineal de tipo elíptico definido sobre $C^\infty(\bar{A}(r_1, r_2))$. Entonces, existe una función $v \in C^\infty(\bar{A}(r_1, r_2))$ que verifica las siguientes propiedades:*

- a) $v = 0$ sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r_2\}$.
- b) v es constante sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$, para cada r con $r_1 \leq r \leq r_2$.
- c) $\frac{\partial v}{\partial r} > 0$ en $[r_1, r_2]$, donde $r = \|x\|$. En particular, $v < 0$ en $[r_1, r_2)$.
- d) $L(v) < 0$.

Demostración. Dado un número real $\alpha > 0$ sin determinar, vamos a considerar la función

$$v(x) = e^{-\alpha r_2^2} - e^{-\alpha \|x\|^2} = e^{-\alpha r_2^2} - e^{-\alpha r^2}.$$

Para comenzar, observemos que es evidente que la función $v(x)$ verifica tanto la condición del apartado a) como la del apartado b).

Por otro lado, la función v definida crece estrictamente a lo largo de r , puesto que

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 2\alpha r e^{-\alpha r^2} > 0.$$

Entonces, como $v(x) = 0$ si $\|x\| = r_2$, la función cumple $v < 0$ en $[r_1, r_2)$ y también queda demostrado el apartado c).

Para el apartado d), obsérvese en primer lugar que, como

$$v = f \circ r \quad \text{con} \quad r(x) = \|x\| \quad \text{y} \quad f(r) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha r^2},$$

el gradiente euclídeo de v se puede expresar como

$$Dv(x) = f'(r(x))Dr(x). \quad (1.31)$$

Además, dados dos campos X e Y en Ω , el operador hessiano euclídeo de la función v sobre dichos campos puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D^2v(X, Y) &= \langle D_X Dv, Y \rangle = \langle D_X (f'(r)Dr), Y \rangle \\ &= X(f'(r))\langle Dr, Y \rangle + f'(r)\langle D_X Dr, Y \rangle \\ &= \langle D(f'(r)), X \rangle \langle Dr, Y \rangle + f'(r)D^2r(X, Y) \\ &= f''(r)\langle Dr, X \rangle \langle Dr, Y \rangle + f'(r)D^2r(X, Y). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Para poder seguir calculando el gradiente y el hessiano de v , antes necesitamos conocer tanto las dos primeras derivadas de la función f como el gradiente y el hessiano euclídeo de r .

Las derivadas de f pueden calcularse fácilmente, y son las siguientes:

$$f'(r) = 2\alpha r e^{-\alpha r^2} \quad \text{y} \quad f''(r) = 2\alpha e^{-\alpha r^2}(1 - 2\alpha r^2).$$

Por otro lado, el gradiente de $r(x) = \|x\|$ es $Dr = \frac{x}{r}$, ya que

$$Dr = \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x_n} \right) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \right) = \left(\frac{x_1}{r}, \dots, \frac{x_n}{r} \right) = \frac{x}{r}.$$

Por tanto, si $i \neq j$, tenemos

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_j}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} x_i x_j,$$

mientras que, si $i = j$,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{r} \right) = \frac{r^2 - x_i^2}{r^3} = \frac{1}{r^3} \sum_{j \neq i} x_j^2.$$

Es decir, que tomando la base de campos canónica $\{\partial x_1, \dots, \partial x_n\}$ en \mathbb{R}^n , obtenemos

$$D^2r(\partial x_i, \partial x_j) = -\frac{1}{r^3} x_i x_j \quad \text{si} \quad i \neq j \quad \text{y} \quad D^2r(\partial x_i, \partial x_i) = \frac{1}{r^3} \sum_{j \neq i} x_j^2 \quad \text{si} \quad i = j.$$

Entonces, si volvemos al cálculo del gradiente de v que teníamos en (1.31), obtenemos

$$Dv(x) = 2\alpha r(x)e^{-\alpha r(x)^2} \frac{x}{r(x)} = 2\alpha e^{-\alpha r(x)^2} x.$$

En el caso del hessiano, que habíamos comenzado a calcular en (1.32), si $i \neq j$ llegamos a

$$\begin{aligned} D^2v(\partial x_i, \partial x_j) &= 2\alpha e^{-\alpha r(x)^2} (1 - 2\alpha r(x)^2) \frac{1}{r(x)^2} x_i x_j - 2\alpha r(x) e^{-\alpha r(x)^2} \frac{1}{r(x)^3} x_i x_j \\ &= 2\alpha e^{-\alpha r(x)^2} \frac{1}{r(x)^2} x_i x_j (1 - 2\alpha r(x)^2 - 1) = 2\alpha e^{-\alpha r(x)^2} (-2\alpha x_i x_j), \end{aligned}$$

mientras que, si $i = j$, obtenemos

$$\begin{aligned} D^2v(\partial x_i, \partial x_i) &= 2\alpha e^{-\alpha r(x)^2} (1 - 2\alpha r(x)^2) \frac{1}{r(x)^2} x_i^2 + 2\alpha r(x) e^{-\alpha r(x)^2} \frac{1}{r(x)^3} \sum_{j \neq i} x_j^2 \\ &= 2\alpha e^{-\alpha r(x)^2} \frac{1}{r(x)^2} \left(x_i^2 - 2\alpha r(x)^2 x_i^2 + \sum_{j \neq i} x_j^2 \right) \\ &= 2\alpha e^{-\alpha r(x)^2} \frac{1}{r(x)^2} (r(x)^2 - 2\alpha r(x)^2 x_i^2) = 2\alpha e^{-\alpha r(x)^2} (1 - 2\alpha x_i^2). \end{aligned}$$

Es decir, resumiendo,

$$\begin{cases} Dv(x) &= 2\alpha e^{-\alpha r(x)^2} x, \\ D^2v(\partial x_i, \partial x_j) &= 2\alpha e^{-\alpha r(x)^2} (-2\alpha x_i x_j) \quad \text{si } i \neq j, \\ D^2v(\partial x_i, \partial x_i) &= 2\alpha e^{-\alpha r(x)^2} (1 - 2\alpha x_i^2) \quad \text{si } i = j. \end{cases} \quad y$$

Como consecuencia, la matriz hessiana de v se puede descomponer como

$$D^2v(x) = 2\alpha e^{-\alpha r(x)^2} (I - E(x)),$$

donde I es la matriz identidad de orden n y $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij}$ es una matriz simétrica dada por $a_{ij}(x) = 2\alpha x_i x_j$ para $i, j = 1, \dots, n$.

Por tanto, el operador L actuando sobre la función v es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L(v) &= \langle B(x), D^2v \rangle + \langle c(x), Dv \rangle \\ &= \langle B(x), 2\alpha e^{-\alpha r(x)^2} (I - A) \rangle + \langle c(x), 2\alpha e^{-\alpha r(x)^2} x \rangle \\ &= 2\alpha e^{-\alpha r(x)^2} (\langle B(x), I \rangle - \langle B(x), A(x) \rangle + \langle c(x), x \rangle) \\ &= 2\alpha e^{-\alpha r(x)^2} \left(\text{tr}(B(x)) - 2\alpha x^\top B(x)x + \langle c(x), x \rangle \right), \end{aligned} \tag{1.33}$$

donde x^\top denota la matriz fila $x^\top = (x_1 \dots x_n)$.

Ahora, observemos que podemos escribir cada $x \neq 0$ como

$$x = x' \cdot \|x\| \quad \text{con} \quad x' = \frac{x}{\|x\|}.$$

Usando la notación anterior, como $B(x)$ es definida positiva y $\overline{A(r_1, r_2)}$ es compacto, sabemos que existirá una constante $\mu > 0$ tal que $(x')^\top B(x) x' \geq \mu > 0$ en $A(r_1, r_2)$. Es decir, que para todo x se verifica que existe un $\mu > 0$ tal que

$$x^\top B(x) x \geq \mu \|x\|^2.$$

Teniendo esto en cuenta y retomando (1.33),

$$\begin{aligned} L(v) &\leq 2\alpha e^{-\alpha r(x)^2} (\operatorname{tr}(B(x)) - 2\alpha\mu \|x\|^2 + \langle c(x), x \rangle) \\ &\leq 2\alpha e^{-\alpha r(x)^2} (\operatorname{tr}(B(x)) - 2\alpha\mu \|r_1\|^2 + \langle c(x), x \rangle). \end{aligned}$$

Finalmente, como $\operatorname{tr}(B(x))$ y $\langle c(x), x \rangle$ están acotados en $A(r_1, r_2)$, podemos tomar un $\alpha > 0$ lo suficientemente grande como para que el miembro de la derecha sea estrictamente negativo en $A(r_1, r_2)$ tal y como queríamos. \square

A continuación, tengamos en cuenta que si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio regular, su frontera $\partial\Omega$ es una hipersuperficie de \mathbb{R}^n . Entonces, podemos definir sobre ella un campo normal unitario y exterior

$$\nu : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{S}^n$$

que verifique $\nu \perp \partial\Omega$ y $x + t\nu \in \Omega$ para todo $x \in \partial\Omega$ si $-\varepsilon < t < 0$ para un cierto $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$.

Observemos ahora que si Ω está acotado y $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ cumple que $u < 0$ y $L(u) > 0$ en Ω , entonces el principio del máximo débil (Proposición 1.9) implica que

$$u \leq \max_{\partial\Omega} u \leq 0$$

por continuidad, ya que $u < 0$ en Ω . Si además existe un punto $x_0 \in \partial\Omega$ con $u(x_0) = \max_{\partial\Omega} u = 0$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \nu_{x_0}(u) = \langle Du(x_0), \nu(x_0) \rangle \geq 0, \quad (1.34)$$

donde la última desigualdad se debe a que como Du siempre apunta en la dirección de máximo crecimiento, $u(x_0) = 0$ con $x_0 \in \partial\Omega$ y $u < 0$, entonces $Du(x_0)$ apunta hacia el exterior como $\nu(x_0)$.

El siguiente lema nos dice que, aún debilitando la hipótesis $L(u) > 0$ a $L(u) \geq 0$, la igualdad en (1.34) no puede darse.

Lema 1.12. *Dado un operador lineal L de tipo elíptico definido sobre un dominio regular $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y dada una función $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $u < 0$ y $L(u) \geq 0$ en Ω , si existe un punto $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $u(x_0) = 0$, entonces $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$.*

Demostración. Como Ω es un dominio regular, sabemos que existe una bola $B \subset \Omega$ de radio $r > 0$ tal que ∂B y $\partial\Omega$ son tangentes en x_0 . Bastará con probar el lema sobre la bola B que, sin pérdida de generalidad, supondremos que está centrada en el origen.

Por el Lema 1.11, existe una función radial $v \in C^\infty(\overline{A(\frac{r}{2}, r)})$ que verifica las siguientes condiciones:

$$v(x) = 0 \text{ si } \|x\| = r, \quad \frac{\partial v}{\partial r} > 0 \text{ en } \left[\frac{r}{2}, r\right], \quad v < 0 \text{ en } \left[\frac{r}{2}, r\right) \quad \text{y} \quad L(v) < 0.$$

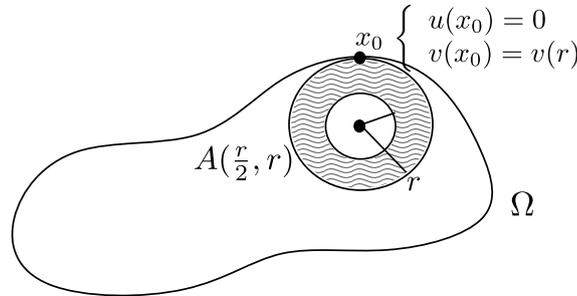


Figura 1.2: Dominio Ω con la bola B y el conjunto $A(\frac{r}{2}, r)$.

Ahora, definamos los conjuntos

$$C_{r/2} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \frac{r}{2}\right\} \quad \text{y} \quad C_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}.$$

Por un lado, como $C_{r/2}$ es compacto y $u < 0$ por hipótesis, tenemos

$$u|_{C_{r/2}} \leq \max_{C_{r/2}} u < 0. \quad (1.35)$$

Entonces, existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que

$$\max_{C_{r/2}} u \leq \varepsilon v\left(\frac{r}{2}\right), \quad (1.36)$$

y por tanto, uniendo (1.35) y (1.36), obtenemos que $u \leq \varepsilon v$ en $C_{r/2}$.

Por otro lado, como $v(r) = 0$ en C_r y $u \leq 0$, también se verifica que $u \leq \varepsilon v$ en C_r .

De esta forma, si aplicamos el Lema 1.10 teniendo en cuenta que

$$u \leq \varepsilon v \text{ en } \partial A\left(\frac{r}{2}, r\right), \quad L(u) \geq 0 \quad \text{y} \quad L(\varepsilon v) < 0,$$

obtenemos que $u \leq \varepsilon v$ en $A(\frac{r}{2}, r)$.

Finalmente, vamos a comparar las derivadas de las funciones u y v en la dirección de $\nu(x_0)$. Para ello, si definimos $f = u - \varepsilon v \leq 0$ en $A(\frac{r}{2}, r)$, observemos que $L(f) = L(u) - \varepsilon L(v) > 0$, por lo que el principio del máximo débil (Proposición 1.9) nos dice que

$$f \leq \max_{\partial A(\frac{r}{2}, r)} f \leq 0.$$

Como $x_0 \in \partial A(\frac{r}{2}, r)$ y $f(x_0) = \max_{\partial A(\frac{r}{2}, r)} f = 0$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0) = \nu_{x_0}(f) = \langle Df(x_0), \nu(x_0) \rangle \geq 0,$$

luego

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

donde la última desigualdad se debe a que r y ν apuntan en la misma dirección y $\frac{\partial v}{\partial r} > 0$. \square

Teorema 1.13 (Principio del máximo fuerte). *Sea L un operador lineal de tipo elíptico definido sobre un dominio regular $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Si una función $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ cumple que $u \leq 0$ y $L(u) \geq 0$ en Ω , entonces o bien $u < 0$ en Ω o bien $u = 0$ en Ω .*

Demostración. Demostraremos este resultado por reducción al absurdo suponiendo que $u \neq 0$ y que se anula en algún punto de Ω . Entonces, si consideramos el conjunto $S = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$, es evidente que $S \neq \Omega$ y $S \neq \emptyset$.

Ahora, recordemos que un espacio Ω es conexo si, y solo si los únicos subconjuntos de Ω que son abiertos y cerrados son el vacío y el total. Teniendo en cuenta esto, como S es cerrado y Ω es conexo por ser regular, entonces S no puede ser abierto, así que existe un punto $x \in S \setminus \text{int}(S)$.

Así, como Ω es abierto, sabemos que existe un $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B(x, 2\varepsilon)$ de centro x y radio 2ε está contenida en Ω . Al mismo tiempo, como $x \notin \text{int}(S)$, cualquier entorno de x contiene puntos que no pertenecen a S . Es decir, existe un punto $y \in B(x, \varepsilon) \setminus S$ que verifica lo siguiente:

$$\text{dist}(y, \partial\Omega) > \varepsilon \quad \text{y} \quad \text{dist}(y, S) \leq \text{dist}(y, x) < \varepsilon.$$

Si definimos $\delta = \text{dist}(y, S)$ y el conjunto $\Omega' = B(y, \delta)$ tenemos, por un lado, que como $u \leq 0$ en Ω por hipótesis, $u = 0$ en S y $\Omega' \subset \Omega \setminus S$, entonces $u < 0$ en Ω' . Por otro lado, por la definición de δ , sabemos que existe un punto $x_0 \in \partial\Omega' \cap S$ con $u(x_0) = 0$.

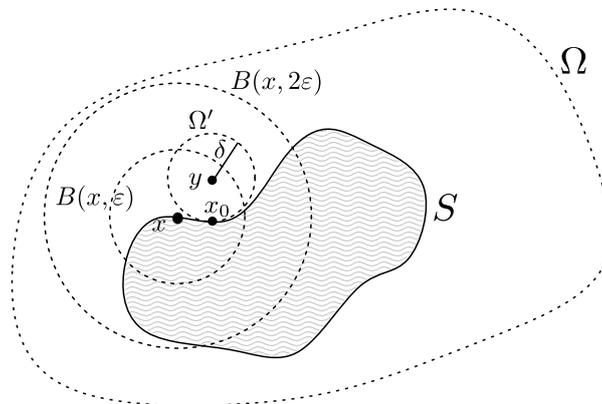


Figura 1.3: Dominio Ω con los conjuntos S , Ω' y las bolas $B(x, 2\varepsilon)$, $B(x, \varepsilon)$.

Entonces, teniendo en cuenta el párrafo anterior, obtenemos que la función u alcanza un máximo en $x_0 \in \partial\Omega' \subset \Omega$. Esto es, $Du(x_0) = 0$.

Finalmente, aplicando el Lema 1.12 a la función u en el conjunto Ω' , llegamos a que $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$, con ν el vector normal unitario exterior definido sobre $\partial\Omega'$. Sin embargo, al mismo tiempo,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \nu_{x_0}(u) = \langle Du(x_0), \nu(x_0) \rangle = 0,$$

por lo que ya hemos encontrado la contradicción que buscábamos y hemos demostrado el teorema. \square

1.4.2. El principio del máximo interior.

Definición 1.14. Dado Ω un dominio regular en \mathbb{R}^n , decimos que una aplicación Q es un *operador cuasilineal de tipo elíptico* si viene dada por

$$\begin{aligned} Q : \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \\ u &\longmapsto Q(u) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(Du)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n c_i(Du)u_{x_i}, \end{aligned}$$

donde, para cada $1 \leq i, j \leq n$, b_{ij} y c_i son aplicaciones diferenciables definidas en \mathbb{R}^n , siendo

$$B(y) = (b_{ij}(y))_{ij}$$

una matriz simétrica y definida positiva para cada $y \in \mathbb{R}^n$.

Una forma equivalente de describir la actuación del operador Q sobre una función $u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ es

$$Q(u) = \langle B(Du), D^2u \rangle + \langle c(Du), Du \rangle,$$

donde $c = (c_1, \dots, c_n)$.

Un primer ejemplo de operador cuasilineal elíptico es el operador curvatura media de un grafo. Para ver esto, vamos a comenzar recordando que, tal y como vimos en el Capítulo 1, sabemos que la función curvatura media de un grafo viene dada por la ecuación (1.28), es decir, viene dada por

$$H(u) = \frac{1}{n(1 + \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} \left(1 + \sum_{j \neq i} u_{x_j}^2 \right) - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j} \right). \quad (1.37)$$

El objetivo es ver que la expresión (1.37) puede escribirse como

$$H(u) = \langle B(Du), D^2u \rangle,$$

donde $B(y) = (b_{ij}(y))_{ij}$ viene dada por:

$$b_{ii}(y) = \frac{1 + \sum_{j \neq i} y_j^2}{n(1 + \|y\|^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{y} \quad b_{ij}(y) = -\frac{y_i y_j}{n(1 + \|y\|^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{si } i \neq j.$$

Obsérvese que el producto $B(Du) \cdot D^2u$ expresado en forma matricial es de la forma

$$\frac{1}{n(1 + \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 1 + \sum_{k \neq 1} u_{x_k}^2 & -u_{x_1} u_{x_2} & \cdots & -u_{x_1} u_{x_n} \\ -u_{x_2} u_{x_1} & 1 + \sum_{k \neq 2} u_{x_k}^2 & \cdots & -u_{x_2} u_{x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -u_{x_n} u_{x_1} & -u_{x_n} u_{x_2} & \cdots & 1 + \sum_{k \neq n} u_{x_k}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{x_1 x_1} & u_{x_1 x_2} & \cdots & u_{x_1 x_n} \\ u_{x_2 x_1} & u_{x_2 x_2} & \cdots & u_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{x_n x_1} & u_{x_n x_2} & \cdots & u_{x_n x_n} \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

Por tanto, como $\langle B(Du), D^2u \rangle = \text{tr}(B(Du) \cdot D^2u)$, si tomamos la traza de la matriz resultante del producto (1.38), obtenemos

$$\langle B(Du), D^2u \rangle = \sum_{i=1}^n \left(u_{x_i x_i} + u_{x_i x_i} \sum_{j \neq i} u_{x_j}^2 - \sum_{j \neq i} u_{x_j x_i} u_{x_i} u_{x_j} \right) \cdot \frac{1}{n(1 + \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}} = H(u).$$

Por otro lado, es evidente que la matriz $B(Du)$ es simétrica y definida positiva, por lo que acabamos de demostrar que, efectivamente, el operador función curvatura H es un operador cuasilineal elíptico.

El siguiente resultado, que relaciona los operadores lineales elípticos con los cuasilineales elípticos, nos servirá para poder acabar demostrando el principio conocido como principio del máximo interior.

Proposición 1.15. *Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio regular, sea $Q : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$ un operador cuasilineal elíptico y sean u, v dos funciones diferenciables sobre $\bar{\Omega}$. Entonces, existe un operador lineal elíptico L , que depende de u y v , tal que*

$$Q(u) - Q(v) = L(u - v).$$

Demostración. Tomando $u_t = tu + (1 - t)v$ con $0 \leq t \leq 1$, se tiene

$$\begin{aligned} Q(u) - Q(v) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} Q(u_t) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} (\langle B(Du_t), D^2u_t \rangle + \langle c(Du_t), Du_t \rangle) dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \frac{d}{dt} (B(Du_t)), D^2u_t \right\rangle dt + \int_0^1 \left\langle B(Du_t), \frac{d}{dt} (D^2u_t) \right\rangle dt \\ &\quad + \int_0^1 \left\langle \frac{d}{dt} (c(Du_t)), Du_t \right\rangle dt + \int_0^1 \left\langle c(Du_t), \frac{d}{dt} (Du_t) \right\rangle dt. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Por otro lado, como

$$Du_t = tDu + (1 - t)Dv \quad \text{y} \quad D^2u_t = tD^2u + (1 - t)D^2v,$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(Du_t) &= \frac{d}{dt}(tDu + (1-t)Dv) = Du - Dv = D(u-v) \quad y \\ \frac{d}{dt}(D^2u_t) &= \frac{d}{dt}(tD^2u + (1-t)D^2v) = D^2u - D^2v = D^2(u-v).\end{aligned}$$

Ahora, dada una función cualquiera $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, veamos qué expresión tiene $\frac{d}{dt}f(Du_t)$. Para ello, tengamos en cuenta lo siguiente:

$$f(Du_t) = f(tDu + (1-t)Dv) = f\left(t \frac{\partial u}{\partial x_1} + (1-t) \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, t \frac{\partial u}{\partial x_n} + (1-t) \frac{\partial v}{\partial x_n}\right).$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f(Du_t)) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_k}(Du_t) \cdot \frac{d}{dt}\left(t \frac{\partial u}{\partial x_k} + (1-t) \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_k}(Du_t) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_k}(Du_t) \cdot \frac{\partial(u-v)}{\partial x_k}\end{aligned}\tag{1.40}$$

Por tanto, aplicando la expresión (1.40) al i -ésimo término del vector $c(Du_t)$ se tiene

$$\frac{d}{dt}(c_i(Du_t)) = \frac{d}{dt}(c_i(Du_t)) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial c_i}{\partial y_k}(Du_t) \cdot \frac{\partial(u-v)}{\partial x_k}\right),\tag{1.41}$$

mientras que si la aplicamos al ij -ésimo término de la matriz $B(Du_t)$, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(B_{ij}(Du_t)) = \frac{d}{dt}(b_{ij}(Du_t)) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial b_{ij}}{\partial y_k}(Du_t) \cdot \frac{\partial(u-v)}{\partial x_k}\right).$$

Teniendo en cuenta (1.41), el tercer sumando de la expresión (1.39) verifica

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left\langle \frac{d}{dt}(c(Du_t)), Du_t \right\rangle dt &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial c_i}{\partial y_k}(Du_t) \cdot \frac{\partial(u-v)}{\partial x_k}\right) \frac{\partial u_t}{\partial x_i} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial c_i}{\partial y_k}(Du_t) \cdot \frac{\partial u_t}{\partial x_i}\right) \frac{\partial(u-v)}{\partial x_k} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left\langle \frac{\partial c}{\partial y_k}(Du_t), Du_t \right\rangle \cdot \frac{\partial(u-v)}{\partial x_k} dt.\end{aligned}$$

Análogamente, el primer sumando de (1.39) verifica

$$\int_0^1 \left\langle \frac{d}{dt}(B(Du_t)), D^2u_t \right\rangle dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left\langle \frac{\partial B}{\partial y_k}(D^2u_t), Du_t \right\rangle \cdot \frac{\partial(u-v)}{\partial x_k} dt.$$

Por tanto, lo obtenido en (1.39) es igual a

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left\langle \frac{\partial B}{\partial y_k} (Du_t), D^2 u_t \right\rangle \cdot \frac{\partial(u-v)}{\partial x_k} dt + \int_0^1 \langle B(Du_t), D^2(u-v) \rangle dt \\ & + \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left\langle \frac{\partial c}{\partial y_k} (Du_t), Du_t \right\rangle \cdot \frac{\partial(u-v)}{\partial x_k} dt + \int_0^1 \langle c(Du_t), D(u-v) \rangle dt. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$Q(u) - Q(v) = \langle \bar{B}, D^2(u_1 - u_2) \rangle + \langle \bar{c}, D(u - v) \rangle,$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \int_0^1 B(Du_t) dt \quad y \\ \bar{c} &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \left(\left\langle \frac{\partial B}{\partial y_i} (Du_t), D^2 u_t \right\rangle + \left\langle \frac{\partial c}{\partial y_i} (Du_t), Du_t \right\rangle \right) dt \right) + \int_0^1 c(Du_t) dt. \end{aligned}$$

Así, $Q(u) - Q(v) = L(u - v)$, donde $L(v) = \langle \bar{B}, D^2 v \rangle + \langle \bar{c}, Dv \rangle$. Entonces, como \bar{B} es simétrica y definida positiva por serlo B , el operador lineal L es elíptico. \square

Teorema 1.16. *Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio regular, sea $Q : \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ un operador cuasilineal elíptico y sean u, v dos funciones diferenciables definidas sobre $\bar{\Omega}$ y tales que $Q(u) \geq Q(v)$ en Ω . Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

- Si $u - v$ alcanza un máximo local en $x_0 \in \Omega$, entonces la función $u - v$ es constante.*
- Si $u - v$ alcanza un máximo en $x'_0 \in \partial\Omega$, entonces, o bien $u - v$ es constante o bien*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x'_0) > \frac{\partial v}{\partial \nu}(x'_0),$$

donde ν es el campo normal unitario exterior definido sobre $\partial\Omega$.

Demostración. Aplicando la Proposición 1.15 al operador cuasilineal elíptico Q del enunciado, sabemos que existe un operador lineal elíptico L tal que $Q(u) - Q(v) = L(u - v)$. Usando este operador vamos a demostrar las dos propiedades.

- En primer lugar, supongamos que existe un punto $x_0 \in \Omega$ en el que $u - v$ alcanza un máximo y sea $M = (u - v)(x_0)$ dicho valor máximo. Entonces, si definimos $w \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ como

$$w = u - v - M,$$

tenemos que en Ω se verifica

$$w \leq 0 \quad y \quad L(w) = L(u - v) - L(M) = Q(u) - Q(v) - L(M) \geq 0,$$

ya que $Q(u) - Q(v) \geq 0$ por hipótesis y $L(M) = 0$ porque M es constante.

De esta manera, el principio del máximo fuerte (Teorema 1.13) nos indica que o bien $w < 0$ en Ω o bien $w = 0$ en Ω . Por tanto, como $w(x_0) = 0$ con $x_0 \in \Omega$, sabemos que estamos en el segundo caso. Así, $u - v$ es constante tal y como queríamos.

- b) Supongamos ahora que el punto en el que se alcanza un máximo es $x'_0 \in \partial\Omega$ y definamos la función $w' = u - v - M'$ con M' el valor máximo. Observemos que, puesto que $u - v$ alcanza un máximo en x'_0 , se tiene $w' \leq 0$ en Ω .

Ahora, por un lado, si w' también alcanzara un máximo local en Ω , entonces w' sería constante por el apartado a) de este teorema y como consecuencia $u - v$ también lo sería.

Por otro lado, si suponemos que w' no alcanza un máximo local en Ω , tenemos $w' < 0$ y, como $x'_0 \in \partial\Omega$, podemos aplicar el Lema 1.12 a w' , obtenemos $\frac{\partial w'}{\partial \nu}(x'_0) > 0$, lo que implica

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x'_0) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(x'_0) - \frac{\partial M'}{\partial \nu}(x'_0) > 0,$$

y por tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x'_0) > \frac{\partial v}{\partial \nu}(x'_0).$$

□

Teorema 1.17. *Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio regular acotado, sea $Q : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$ un operador cuasilineal elíptico y sean u, v dos funciones diferenciables definidas sobre $\bar{\Omega}$ y tales que $Q(u) \geq Q(v)$ en Ω . Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

- a) *Si $u \leq v$ en $\partial\Omega$, entonces $u \leq v$ en Ω .*
- b) *Si $Q(u) = Q(v)$ en Ω y $u = v$ en $\partial\Omega$, entonces $u = v$ en Ω .*

Demostración.

- a) Supongamos, por reducción al absurdo, que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) > v(x_0)$. Es decir, tal que $u(x_0) - v(x_0) > 0$.

Como Ω es acotado, entonces $\bar{\Omega}$ es compacto, así que $u - v$ alcanza un máximo en $\bar{\Omega}$. Sin embargo, como $u - v \leq 0$ en $\partial\Omega$ por hipótesis y $u(x_0) - v(x_0) > 0$ con $x_0 \in \Omega$, sabemos que dicho máximo se alcanzará en Ω . Ahora, usando la propiedad a) del Teorema 1.16, tenemos que la función $u - v$ es constante. Finalmente, como $u \leq v$ en $\partial\Omega$, entonces $u \leq v$ en Ω .

- b) Esta propiedad es consecuencia directa de la anterior. Simplemente hay que aplicarla dos veces a las funciones u y v para obtener $u \leq v$ y $v \leq u$ en Ω .

□

Si tenemos dos hipersuperficies del espacio euclídeo, M y M' , que son tangentes en un punto común $p \in M \cap M'$, entonces podremos expresarlas localmente como grafos sobre el mismo abierto del

espacio tangente $T_pM = T_pM'$ alrededor del origen. Denotemos por u y u' las funciones tales que $M = \Sigma_u$ y $M' = \Sigma_{u'}$ y consideremos en ambas hipersuperficies la misma orientación, esto es, $N(p) = N'(p)$. Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p = (0, u(0)) = (0, u'(0))$.

Definición 1.18. En la situación descrita antes, se dice que M está por debajo de M' en p , si $u \leq u'$ en un entorno de 0. Esto se denota por $M \leq M'$ (véase la Figura 1.4).

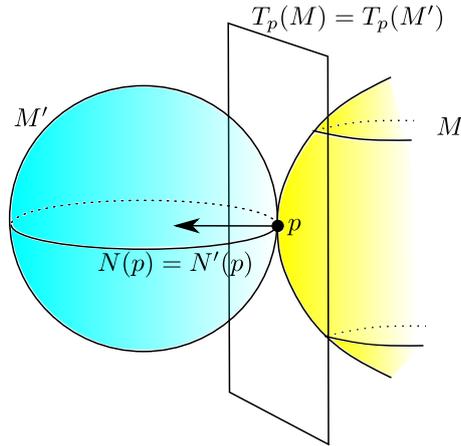


Figura 1.4: M está por debajo de M' en el punto p .

Obsérvese que si $M \leq M'$ en $p \in M \cap M'$, entonces la función $v = u' - u$ alcanza un mínimo local en 0. Por tanto,

$$v(0) = 0, \quad Dv(0) = 0 \quad \text{y} \quad D^2v(0) \geq 0.$$

Teniendo esto en cuenta, si tomamos la expresión de la curvatura media de (1.37), tenemos

$$H(v)(0) = \frac{1}{n} \text{tr}(D^2v(0)) \geq 0,$$

donde $H(v)$ es la curvatura media del grafo Σ_v .

Por tanto, las curvaturas medias $H(u)$ y $H(u')$ evaluadas en el punto 0 verifican la desigualdad

$$H(u')(0) \geq H(u)(0).$$

Teorema 1.19 (Principio del máximo interior). Sean M y M' hipersuperficies en \mathbb{R}^{n+1} cuyas curvaturas medias respectivas, H y H' , verifican $H \geq H'$. Si M y M' tienen los mismos vectores normales en un punto $p \in M \cap M'$, entonces M' no puede estar por encima de M en un entorno de p , a menos que las hipersuperficies coincidan localmente.

Demostración. Tal y como se ha hecho antes, expresemos localmente alrededor de p ambas hipersuperficies como grafos sobre el mismo abierto del espacio tangente, denotando por u y u' las funciones tales que $M = \Sigma_u$ y $M' = \Sigma_{u'}$.

Ahora, si suponemos que $M \leq M'$ en el punto p , obtenemos que $u \leq u'$ en un entorno de 0 y $u(0) = u'(0)$. Como consecuencia, la función $v = u - u'$ alcanza un máximo interior en 0. Entonces, si aplicamos el Teorema 1.16 al operador curvatura media que, por hipótesis, verifica $H \geq H'$, obtenemos que v es constante. Por tanto, M y M' coinciden en un entorno de p . \square

Hipersuperficies en el espacio de Lorentz-Minkowski

Sumario. En este capítulo estudiaremos en detalle cómo es la geometría de las hipersuperficies espaciales en \mathbb{L}^{n+1} que tienen la misma curvatura media riemanniana y lorentziana, es decir, tales que $H_R = H_L$. Así, entre otros resultados se obtendrá que dichas hipersuperficies no pueden tener puntos elípticos, lo cual dará lugar a interesantes consecuencias. A continuación, nos centraremos en el estudio de la ecuación de las hipersuperficies espaciales con $H_R = H_L$ y veremos que es una ecuación en derivadas parciales cuasilineal y elíptica salvo en los puntos en los que el gradiente se anula. Después, nuestro siguiente objetivo será estudiar el caso particular de los grafos enteros espaciales rotacionalmente invariantes con respecto a un eje vertical. De esta manera, se obtendrá que si dichos grafos verifican $H_R = H_L$, entonces son hiperplanos horizontales. Tras esto, y volviendo al caso general de los grafos espaciales, pasaremos a obtener una cota para el supremo del conjunto de los puntos en los que el gradiente no se anula. Por último, veremos qué sucede cuando suponemos que el factor M^n de nuestra variedad producto es parabólico.

2.1. Hipersuperficies espaciales en el espacio de Lorentz-Minkowski.

En esta sección introduciremos algunos resultados que serán necesarios más adelante para poder demostrar los enunciados principales de este capítulo. El primero de ellos es uno muy conocido, que nos asegura que toda hipersuperficie espacial en \mathbb{L}^{n+1} es localmente un grafo sobre un dominio abierto del hiperplano $x_{n+1} = 0$, que puede ser identificado con \mathbb{R}^n .

Proposición 2.1. *Toda hipersuperficie espacial en \mathbb{L}^{n+1} es, localmente, un grafo sobre el hiperplano $x_{n+1} = 0$.*

Demostración. Sea Σ una hipersuperficie espacial en \mathbb{L}^{n+1} y sea π la proyección de $\mathbb{L}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

sobre \mathbb{R}^n . Esto es,

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathbb{L}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Nuestro objetivo es demostrar que $\pi|_{\Sigma} : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es, localmente, un difeomorfismo. Para ello, sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) : I \longrightarrow \Sigma$ una curva diferenciable definida sobre un intervalo abierto I y con condiciones iniciales $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v = (v_1, \dots, v_{n+1}) \in T_p\Sigma$. Entonces

$$(d\pi|_{\Sigma})_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi(\alpha(t)) = (\alpha'_1(0), \dots, \alpha'_n(0)) = (v_1, \dots, v_n).$$

Así,

$$\left\langle (d\pi|_{\Sigma})_p(v), (d\pi|_{\Sigma})_p(v) \right\rangle = v_1^2 + \dots + v_n^2 \geq v_1^2 + \dots + v_n^2 - v_{n+1}^2 = \langle v, v \rangle_L.$$

Con lo cual, si $(d\pi|_{\Sigma})_p(v) = 0$ entonces $0 \geq \langle v, v \rangle_L$, y puesto que v es espacial por serlo Σ , se tiene $v = 0$, por lo que $(d\pi|_{\Sigma})_p(v) : T_p\Sigma \longrightarrow T_{\pi(p)}\mathbb{R}^n$ es inyectiva. Más aún, como las dimensiones de los espacios de salida y llegada son iguales, la aplicación diferencial es una biyección. Ahora, por el teorema de la función inversa, se tiene que $\pi|_{\Sigma}$ es un difeomorfismo local como queríamos demostrar. \square

Nótese que, en general, una hipersuperficie espacial es localmente un grafo sobre cualquier hiperplano espacial, ya que la demostración de la Proposición 2.1 es válida al sustituir el hiperplano $x_{n+1} = 0$ por cualquier hiperplano espacial.

Por tanto, para cada $p \in \Sigma$ existen un entorno abierto del punto $\mathcal{U} \subseteq \Sigma$, un dominio regular $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función diferenciable $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tales que $\mathcal{U} = \Sigma_u$ en dicho entorno, es decir,

$$\mathcal{U} = \Sigma_u = \{(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)) : (x_1, \dots, x_n) \in \Omega\}.$$

Recordemos que, tal y como vimos en la Sección 1.3 del Capítulo 1, Σ_u es una hipersuperficie espacial si, y solo si, $\|Du\| < 1$. En nuestro caso, como estamos tomando $M^n = \mathbb{R}^n$, tenemos que D y $\|\cdot\|$ son el operador gradiente y la norma en el espacio euclídeo respectivamente. Además, en dicha sección también calculamos las siguientes expresiones para los vectores normales N_L y N_R correspondientes, respectivamente, a las métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y que usaremos a lo largo de esta tesis,

$$N_L = \frac{(Du, 1)}{\sqrt{1 - \|Du\|^2}} \quad \text{y} \quad N_R = \frac{(-Du, 1)}{\sqrt{1 + \|Du\|^2}}. \quad (2.1)$$

Por otro lado, en la misma Sección 1.3, también obtuvimos expresiones para las funciones curvatura media, H_L y H_R , en términos de la función u . Concretamente, las fórmulas obtenidas fueron:

$$H_L = \frac{1}{n} \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 - \|Du\|^2}} \right) \quad \text{y} \quad H_R = \frac{1}{n} \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + \|Du\|^2}} \right), \quad (2.2)$$

donde div denota el operador divergencia en \mathbb{R}^n .

A continuación observemos que, a partir de (2.1), es posible obtener otras expresiones que determinarán tanto el coseno del ángulo entre N_R y ∂_t como el coseno hiperbólico del ángulo hiperbólico entre N_L y ∂_t .

Proposición 2.2. *Dado Σ_u^n un grafo espacial en \mathbb{L}^{n+1} , se verifican las siguientes relaciones:*

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|Du\|^2}} \quad \text{y} \quad \cosh(\psi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \|Du\|^2}},$$

donde θ y ψ representan el coseno del ángulo entre N_R y ∂_t y el coseno hiperbólico del ángulo hiperbólico entre N_L y ∂_t , respectivamente.

Demostración. Denotando

$$\|X\|_R = \sqrt{\langle X, X \rangle_R} \quad \text{y} \quad \|X\|_L = \sqrt{|\langle X, X \rangle_L|}$$

obtenemos, por un lado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + \|Du\|^2}} &= \left\langle \frac{(Du, 1)}{\sqrt{1 + \|Du\|^2}}, (0, \dots, 0, 1) \right\rangle_R = \langle N_R, \partial_t \rangle_R \\ &= \cos(\theta) \|N_R\|_R \|\partial_t\|_R = \cos(\theta), \end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\sqrt{1 - \|Du\|^2}} &= \left\langle \frac{(-Du, 1)}{\sqrt{1 - \|Du\|^2}}, (0, \dots, 0, 1) \right\rangle_L = \langle N_L, \partial_t \rangle_L \\ &= -\cosh(\psi) \|N_L\|_L \|\partial_t\|_L = -\cosh(\psi), \end{aligned}$$

ya que $\|N_R\|_R = \|\partial_t\|_R = 1$ y $\|N_L\|_L = \|\partial_t\|_L = -1$.

□

Más aún, si vemos \mathbb{L}^{n+1} como la variedad producto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_1$, recordemos que en (1.3) vimos que cada campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+1})$ puede expresarse como $X = \widehat{X} - \langle X, \partial_t \rangle_L \partial_t$ con $\widehat{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Gracias a esta descomposición, podemos dar el siguiente resultado.

Proposición 2.3. *Dada Σ una hipersuperficie espacial en \mathbb{L}^{n+1} , para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+1})$ a lo largo de Σ se verifica lo siguiente:*

$$\frac{\langle X, N_L \rangle_L}{\cosh(\psi)} = -\frac{\langle X, N_R \rangle_R}{\cos(\theta)}.$$

Demostración. Por la Proposición 2.1, Σ puede expresarse localmente como el grafo determinado por una función diferenciable u sobre un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Además, dado $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+1})$, tal y como se ha indicado, podemos escribirlo como

$$X = \widehat{X} + \alpha \partial_t = \left(\widehat{X}, \alpha \right) \quad \text{con} \quad \widehat{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \quad \text{y} \quad \alpha = -\langle X, \partial_t \rangle_L.$$

Entonces, en el entorno $\mathcal{U} \subseteq \Sigma$ para el cual $\mathcal{U} = \Sigma_u$ se tiene, por un lado

$$\langle X, N_L \rangle_L = \frac{\langle (\widehat{X}, \alpha), (Du, 1) \rangle_L}{\sqrt{1 - \|Du\|^2}} = \cosh(\psi) \left(\langle \widehat{X}, Du \rangle_{\mathbb{R}^n} - \alpha \right) = \cosh(\psi)S,$$

y por otro lado,

$$\langle X, N_R \rangle_R = \frac{\langle (\widehat{X}, \alpha), (-Du, 1) \rangle_R}{\sqrt{1 + \|Du\|^2}} = \cos(\theta) \left(-\langle \widehat{X}, Du \rangle_{\mathbb{R}^n} + \alpha \right) = \cos(\theta)(-S),$$

donde, en ambos casos, $S = \langle \widehat{X}, Du \rangle_{\mathbb{R}^n} - \alpha$.

Es decir, $\langle X, N_L \rangle_L = \cosh(\psi)S$ y $\langle X, N_R \rangle_R = \cos(\theta)(-S)$. Así, despejando S e igualando, se obtiene

$$\frac{\langle X, N_L \rangle_L}{\cosh(\psi)} = -\frac{\langle X, N_R \rangle_R}{\cos(\theta)}. \quad (2.3)$$

Observemos que, aunque el razonamiento se haya realizado localmente, la expresión (2.3) no depende de la función u , viniendo determinada únicamente por los vectores normales a la hipersuperficie y los ángulos que estos forman con ∂_t , por lo que en realidad se trata de una igualdad global. \square

De acuerdo con Osserman [Os], una hipersuperficie Σ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^{n+1} satisface la *propiedad de la envoltura convexa* si todo subconjunto compacto $D \subseteq \Sigma$ está contenido en la envoltura convexa de su frontera. En ese mismo artículo, muestra también la siguiente condición geométrica que caracteriza dichas hipersuperficies usando el concepto de punto elíptico. Recordemos que los *puntos elípticos* de una hipersuperficie en \mathbb{R}^n son aquellos puntos en los que todas las curvaturas principales tienen el mismo signo.

Teorema 2.4 (Osserman, [Os]). *Una hipersuperficie Σ en \mathbb{R}^{n+1} verifica la propiedad de la envoltura convexa si, y solo si, no hay puntos elípticos en Σ .*

Usando el siguiente lema, vamos a demostrar que el Teorema 2.4 de Osserman también se verifica para hipersuperficies espaciales en \mathbb{L}^{n+1} .

Lema 2.5. *Sea Σ una hipersuperficie espacial en \mathbb{L}^{n+1} . Dados $p \in \Sigma$ y $v \in T_p\Sigma$, denotemos por $\kappa_v^R(p)$ y $\kappa_v^L(p)$ las curvaturas normales en p en la dirección de v con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$, respectivamente. Entonces,*

$$\frac{\|v\|_R^2}{\cos(\theta(p))} \kappa_v^R(p) = -\frac{\|v\|_L^2}{\cosh(\psi(p))} \kappa_v^L(p).$$

Demostración. Dados $p \in \Sigma$ y $v \in T_p\Sigma$, sea α una curva diferenciable en Σ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces, por definición, obtenemos lo siguiente:

$$\kappa_v^R = \langle \bar{\nabla}_{t_R} t_R, N_R \rangle_R \quad \text{y} \quad \kappa_v^L = \langle \bar{\nabla}_{t_L} t_L, N_L \rangle_L,$$

siendo $t_R = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|_R}$ y $t_L = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|_L}$.

Ahora, tengamos en cuenta que

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{t_R} t_R, N_R \rangle_R &= \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|_R}} \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|_R}, N_R \right\rangle_R = \frac{1}{\|\alpha'\|_R} \left\langle \bar{\nabla}_{\alpha'} \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|_R}, N_R \right\rangle_R \\ &= \frac{1}{\|\alpha'\|_R} \left(\left\langle \frac{1}{\|\alpha'\|_R} \bar{\nabla}_{\alpha'} \alpha', N_R \right\rangle_R + \left\langle \alpha' \left(\frac{1}{\|\alpha'\|_R} \right), N_R \right\rangle_R \right) \\ &= \frac{1}{\|\alpha'\|_R^2} \langle \bar{\nabla}_{\alpha'} \alpha', N_R \rangle_R. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\langle \bar{\nabla}_{\alpha'} \alpha', N_R \rangle_R = \kappa_v^R \|\alpha'\|_R^2,$$

y de forma análoga también tenemos la igualdad

$$\langle \bar{\nabla}_{\alpha'} \alpha', N_L \rangle_L = \kappa_v^L \|\alpha'\|_L^2.$$

Entonces, usando la Proposición 2.3 y tomando en ella $X = \bar{\nabla}_{\alpha'} \alpha'$, obtenemos

$$\frac{\kappa_v^L \|\alpha'\|_L^2}{\cosh(\psi)} = -\frac{\kappa_v^R \|\alpha'\|_R^2}{\cos(\theta)}.$$

Así que

$$\frac{\|v\|_R^2}{\cos(\theta)} \kappa_v^R(p) = -\frac{\|v\|_L^2}{\cosh(\psi)} \kappa_v^L(p).$$

□

Consecuentemente, κ_v^R y κ_v^L siempre tienen signos opuestos. Y entonces, todas las curvaturas principales de Σ con respecto a \langle , \rangle_R son positivas si, y solo si, todas sus curvaturas principales con respecto a \langle , \rangle_L son negativas, y viceversa. Equivalentemente, un punto en Σ es elíptico con respecto a la métrica \langle , \rangle_L si, y solo si, es elíptico con respecto a \langle , \rangle_R . De esta forma, hemos probado la versión lorentziana del Teorema 2.4.

Teorema 2.6. *Una hipersuperficie espacial Σ en \mathbb{L}^{n+1} verifica la propiedad de la envoltura convexa si, y solo si, no hay puntos elípticos en Σ .*

El resultado anterior permite obtener una generalización del Teorema 3 de [AC], ya que gracias a él se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 2.7. *Si Σ^n es una hipersuperficie espacial y compacta en \mathbb{L}^{n+1} que no está contenida en la envoltura convexa de su frontera, entonces necesariamente tiene un punto elíptico.*

2.2. Hipersuperficies espaciales con $H_R = H_L$.

Pasemos ahora a establecer y demostrar el primer resultado principal de esta tesis, que nos dice que si en una hipersuperficie espacial de \mathbb{L}^{n+1} se verifica la condición $H_R = H_L$, entonces en dicha hipersuperficie no existen puntos elípticos. Sin embargo, antes de llegar a ese teorema, necesitaremos el siguiente resultado previo.

Lema 2.8. *Dada una hipersuperficie Σ en \mathbb{L}^{n+1} y un punto $p \in \Sigma$, consideremos una base ortonormal de $T_p\Sigma$ formada por las direcciones principales $\{e_1, \dots, e_n\}$. Entonces, para todo vector unitario $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, la curvatura normal en la dirección del vector v puede expresarse como*

$$\kappa_v^L = a_1^2 k_1^L + \dots + a_n^2 k_n^L,$$

donde $k_i^L = \langle A_L e_i, e_i \rangle_L$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Demostración. Dados $p \in \Sigma$ y $v \in T_p\Sigma$, sea α una curva diferenciable en Σ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Ahora, recordemos que, por definición, $\kappa_v^L = \langle \bar{\nabla}_{t_L} t_L, N_L \rangle_L$ con $t_L = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|_L}$. Entonces, como N_L y t_L son ortogonales, obtenemos que

$$t_L (\langle t_L, N_L \rangle_L) = 0,$$

es decir,

$$\langle \bar{\nabla}_{t_L} t_L, N_L \rangle_L + \langle t_L, \bar{\nabla}_{t_L} N_L \rangle_L = 0.$$

De esta forma, para un vector v unitario obtenemos la relación

$$\kappa_v^L = -\langle v, \bar{\nabla}_v N_L \rangle_L. \quad (2.4)$$

Ahora, usando las hipótesis y teniendo en cuenta que $\bar{\nabla}_{e_i} N_L = -A_L e_i = -k_i^L e_i$, concluimos que para todo $i \neq j$ se verifica

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} N_L, e_j \rangle_L = \langle -A_L e_i, e_j \rangle_L = -k_i^L \langle e_i, e_j \rangle_L = 0. \quad (2.5)$$

Uniendo lo obtenido en (2.4) y en (2.5) obtenemos que

$$\begin{aligned} \kappa_v^L &= -\langle \bar{\nabla}_v N_L, v \rangle_L = -\langle \bar{\nabla}_{a_1 e_1 + \dots + a_n e_n} N_L, a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \rangle_L \\ &= -(a_1^2 \langle \bar{\nabla}_{e_1} N_L, e_1 \rangle_L + a_2 a_1 \langle \bar{\nabla}_{e_2} N_L, e_1 \rangle_L + \dots + a_n^2 \langle \bar{\nabla}_{e_n} N_L, e_n \rangle_L) \\ &= -(a_1^2 \langle \bar{\nabla}_{e_1} N_L, e_1 \rangle_L + \dots + a_n^2 \langle \bar{\nabla}_{e_n} N_L, e_n \rangle_L) \\ &= a_1^2 k_1^L + \dots + a_n^2 k_n^L. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.9. *Sea Σ una hipersuperficie espacial en \mathbb{L}^{n+1} tal que $H_R = H_L$. Entonces no todas las curvaturas principales tienen el mismo signo. Es decir, no existen puntos elípticos.*

Demostración. Vamos a trabajar localmente, así que podemos suponer que para todo $p \in \Sigma$ existen un entorno abierto del punto $\mathcal{U} \subseteq \Sigma$, un subconjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función diferenciable $u \in C^\infty(\Omega)$ tales que $\mathcal{U} = \Sigma_u$. Es decir, tales que

$$\mathcal{U} = \{(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)) : (x_1, \dots, x_n) \in \Omega\}.$$

Definamos ahora Σ^* como el grafo de u sobre el conjunto

$$\Omega^* = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega : Du(x_1, \dots, x_n) \neq 0\}.$$

Dado $p \in \Sigma^*$, consideremos la hipersuperficie de nivel pasando por $\pi(p)$ y contenida en \mathbb{R}^n , \tilde{S}_c , y llamemos

$$S_c = \{(x_1, \dots, x_n, c) : u(x_1, \dots, x_n) = c\}$$

a su levantamiento en Σ . Al estar trabajando en un entorno de p , podemos suponer que dicho levantamiento está contenido, al menos localmente, en Σ^* .

Como $Du \neq 0$ en Ω^* , su distribución es integrable, por lo que podemos considerar la curva integral a través de $\pi(p)$, $\tilde{\alpha}$, denotando por α su levantamiento a Σ^* (véase la Figura 2.1).

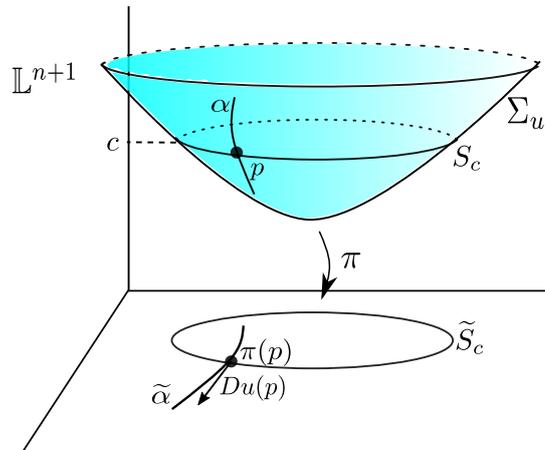


Figura 2.1: Hipersuperficies de nivel y curvas integrales de Du .

Vamos a expresar ahora el tangente a α en función de Du . Para ello, comenzaremos tomando una base de $T_p\Sigma$ de la forma $\{v_1, \dots, v_n\}$ con

$$v_1 = (1, 0, \dots, 0, u_{x_1}), \quad v_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, u_{x_2}), \quad \dots, \quad v_n = (0, 0, \dots, 0, 1, u_{x_n}).$$

Entonces α' vendrá dado por

$$(Du, ?) = \alpha' = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n.$$

Es decir,

$$(u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, ?) = (a_1, \dots, a_n, a_1 u_{x_1} + \dots + a_n u_{x_n}),$$

por lo que los coeficientes son $a_i = u_{x_i}$ y por tanto $\alpha' = (Du, \|Du\|^2) \circ \pi$.

Ahora, sea $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ una base de $T_p S_c$ que se puede considerar ortonormal simultáneamente con respecto a ambas métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$. Además, los vectores de esta base también son ortogonales a α' con respecto a las dos métricas. De esta forma, tenemos dos subvariedades definidas en un entorno de p , S_c y α , que son ortogonales en p con respecto a las dos métricas que estamos considerando.

Observemos que el Lema 2.5 y la Proposición 2.2 nos permiten obtener

$$\kappa_{e_i}^R = -\frac{\|e_i\|_L^2 \cos(\theta)}{\|e_i\|_R^2 \cosh(\psi)} \kappa_{e_i}^L = -\sqrt{\frac{1 - \|Du\|^2}{1 + \|Du\|^2}} \kappa_{e_i}^L$$

para todo $i = 1, \dots, n-1$ y también

$$\kappa_{\alpha'}^R = -\frac{\|\alpha'\|_L^2 \cos(\theta)}{\|\alpha'\|_R^2 \cosh(\psi)} \kappa_{\alpha'}^L = -\frac{\|Du\|^2 - \|Du\|^4}{\|Du\|^2 + \|Du\|^4} \sqrt{\frac{1 - \|Du\|^2}{1 + \|Du\|^2}} \kappa_{\alpha'}^L = -\left(\frac{1 - \|Du\|^2}{1 + \|Du\|^2}\right)^{\frac{3}{2}} \kappa_{\alpha'}^L.$$

Es decir, si denotamos $A = \sqrt{\frac{1 - \|Du\|^2}{1 + \|Du\|^2}}$ hemos llegado a

$$\kappa_{e_i}^R = -A \kappa_{e_i}^L \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n-1 \quad \text{y} \quad \kappa_{\alpha'}^R = -A^3 \kappa_{\alpha'}^L. \quad (2.6)$$

Ahora, como estamos trabajando con direcciones ortogonales en p con respecto a las dos métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$, y por hipótesis tenemos que $H_R = H_L$, entonces podemos aplicar las fórmulas de (1.11) y (1.13) para obtener

$$-\kappa_{e_1}^L - \dots - \kappa_{e_{n-1}}^L - \kappa_{\alpha'}^L = \kappa_{e_1}^R + \dots + \kappa_{e_{n-1}}^R + \kappa_{\alpha'}^R.$$

Teniendo en cuenta (2.6), llegamos a

$$-\kappa_{e_1}^L - \dots - \kappa_{e_{n-1}}^L - \kappa_{\alpha'}^L = -A \kappa_{e_1}^L - \dots - A \kappa_{e_{n-1}}^L - A^3 \kappa_{\alpha'}^L,$$

por lo que

$$(A - 1) \kappa_{e_1}^L + \dots + (A - 1) \kappa_{e_{n-1}}^L = -(A^3 - 1) \kappa_{\alpha'}^L.$$

Finalmente,

$$\kappa_{e_1}^L + \dots + \kappa_{e_{n-1}}^L = -\left(\frac{A^3 - 1}{A - 1}\right) \kappa_{\alpha'}^L = -(A^2 + A + 1) \kappa_{\alpha'}^L. \quad (2.7)$$

De esta forma, obtenemos

$$\left(\kappa_{e_1}^L + \dots + \kappa_{e_{n-1}}^L\right) \kappa_{\alpha'}^L \leq 0,$$

es decir, no todas las curvaturas normales tienen el mismo signo. Si usamos esto junto con el hecho de que en el Lema 2.8 se ha visto que podemos expresar la curvatura normal en la dirección dada por un vector unitario en función de las curvaturas principales, si suponemos que todas las curvaturas principales k_i^L tienen el mismo signo llegaremos a contradicción.

De esta forma, si $p \in \Sigma^*$ hemos probado que no todas las curvaturas principales tienen el mismo signo y, por tanto, no pueden existir puntos elípticos en Σ^* .

Por el contrario, si $p \in \Sigma \setminus \Sigma^*$, podemos distinguir dos casos:

- Si $p \in \text{int}(\Sigma \setminus \Sigma^*)$, entonces Σ es localmente un hiperplano, así que $k_i^L = k_i^R = 0$ para todo i .
- Si $p \in \partial\Sigma^*$ entonces no todas las curvaturas principales tienen el mismo signo por un argumento de continuidad.

□

Acabamos de demostrar que una hipersuperficie espacial Σ con $H_R = H_L$ no tiene puntos elípticos. Si juntamos este hecho con el Teorema 2.4 llegamos a algunas consecuencias geométricas interesantes. La primera de ellas es inmediata usando ambos resultados.

Teorema 2.10. *Sea Σ una hipersuperficie espacial compacta en \mathbb{L}^{n+1} con frontera (necesariamente) no vacía y tal que $H_R = H_L$. Entonces Σ está contenida en la envoltura convexa de su frontera.*

Recordemos que en la Proposición 2.1 vimos que toda hipersuperficie espacial es localmente un grafo Σ_u sobre un subconjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Desde ahora, nos centraremos en grafos espaciales.

A continuación veamos un resultado de unicidad para grafos que son asintóticos a un hiperplano espacial, donde el término asintótico se define como sigue.

Definición 2.11. Decimos que dos grafos enteros Σ_u y Σ_v sobre \mathbb{R}^n son *asintóticos* si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|u(x_1, \dots, x_n) - v(x_1, \dots, x_n)\| < \varepsilon$$

para todo $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus K$.

Obsérvese que, sin pérdida de generalidad, podemos considerar que los conjuntos compactos de la definición anterior son bolas euclídeas de un cierto radio. Si definimos el *inradio* de un conjunto en \mathbb{R}^n como el supremo del radio de las bolas cerradas contenidas en él, el concepto de grafos asintóticos está bien definido no solo en el caso de grafos enteros, sino que también lo está en el caso de grafos sobre un dominio simplemente conexo de inradio infinito, es decir, un dominio que contiene bolas cerradas de cualquier radio. Obsérvese también que este concepto de inradio generaliza el concepto de inradio de la geometría clásica.

Teorema 2.12. *Los únicos grafos espaciales Σ_u en \mathbb{L}^{n+1} definidos sobre un subconjunto abierto simplemente conexo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ de inradio infinito, con $H_R = H_L$, y asintóticos a un hiperplano espacial, son (trozos de) hiperplanos espaciales.*

Demostración. Veamos en primer lugar que Σ_u es un grafo sobre un dominio simplemente conexo de cualquier hiperplano espacial y, en particular, del hiperplano al que es asintótico. Para verlo, supongamos por reducción al absurdo que existe un hiperplano espacial sobre el que la proyección ortogonal no es sobreyectiva. En ese caso existirá una recta temporal que interseque a Σ_u al menos dos veces. Entonces el plano con vector director $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ y que contiene esa recta cortará a Σ_u en una curva que es temporal al menos en un punto, lo cual es una contradicción.

Denotemos por π el hiperplano al que Σ_u es asintótico y sea $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega')$ la función tal que $\Sigma_u = \Sigma_v$, siendo $\Omega' \subseteq \pi$ el dominio de definición de v . Obsérvese que el inradio de Ω' es también infinito.

Por definición de grafos asintóticos, para todo $\varepsilon > 0$ existen $y \in \Omega'$ y $R > 0$ tales que

$$\|v(x)\| < \varepsilon$$

para todo $x \in \Omega' \setminus \overline{B}_y(R)$, siendo $\overline{B}_y(R)$ la bola centrada en el punto y y de radio R .

Entonces, por argumentos de continuidad tenemos que

$$\|v(x)\| \leq \varepsilon$$

para todo $x \in \partial \overline{B}_y(R)$.

Ahora, usando el Teorema 2.10, sabemos que el grafo de la restricción de v a $\overline{B}_y(R)$ está contenido en la envoltura convexa de su frontera, así que la desigualdad

$$\|v(x)\| \leq \varepsilon$$

es cierta también para todo $x \in \overline{B}_y(R)$, luego la desigualdad se cumple de forma global en Ω' . Finalmente, tomando límites cuando ε tiende a 0, concluimos que $\Sigma_u = \Omega'$. \square

2.3. Una EDP cuasilineal asociada a las hipersuperficies espaciales con $H_R = H_L$.

Tal y como se ha mencionado en varias ocasiones, toda hipersuperficie espacial es, localmente, un grafo Σ_u sobre un subconjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, gracias a (2.2), si consideramos el operador diferencial dado por

$$Q(u) = \operatorname{div} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \|Du\|^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \|Du\|^2}} \right) Du \right),$$

los grafos espaciales que satisfacen $H_R = H_L$ van a ser soluciones de la ecuación

$$Q(u) = 0 \tag{2.8}$$

con $\|Du\| < 1$. Nos referiremos a la ecuación (2.8) como la *ecuación de las hipersuperficies espaciales con $H_R = H_L$* .

La ecuación de las hipersuperficies espaciales con $H_R = H_L$ es una EDP cuasilineal y elíptica salvo en los puntos en los que $Du = 0$. Para demostrar esto vamos a ver que podemos escribir

$$Q(u) = \langle B(Du), D^2u \rangle,$$

con B una matriz simétrica que depende de Du y que es definida positiva salvo si $Du = 0$.

Para ello, sea la función

$$f_\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta\|Du\|^2}} \quad \text{con} \quad \delta = \pm 1.$$

Entonces,

$$Q(u) = \text{div}(f_{-1}Du) - \text{div}(f_1Du).$$

Veamos ahora que podemos asociar a cada uno de los dos términos anteriores una matriz B_δ simétrica y dependiente de Du , de forma que

$$\text{div}(f_\delta Du) = \langle B_\delta(Du), D^2u \rangle \tag{2.9}$$

y así tendremos que la matriz que buscamos es de la forma $B = B_{-1} - B_1$.

Para ello, observemos que la divergencia se puede expresar de la siguiente manera:

$$\text{div}(f_\delta Du) = f_\delta \Delta u + Du(f_\delta). \tag{2.10}$$

A continuación vamos a desarrollar el segundo sumando de (2.10), pero para ello primero necesitamos conocer la expresión $\partial_i(f_\delta)$, puesto que

$$Du(f_\delta) = \sum_i u_{x_i} \partial_i(f_\delta).$$

Entonces,

$$\partial_i(f_\delta) = \partial_i \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \delta\|Du\|^2}} \right) = -\delta \frac{\langle Du, \partial_i Du \rangle}{(1 + \delta\|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}},$$

donde se ha usado que $\partial_i(\|Du\|^2) = 2\langle Du, \partial_i Du \rangle$.

Observemos ahora que

$$\langle Du, \partial_i Du \rangle = \left\langle \sum_j u_{x_j} \partial_j, \partial_i \left(\sum_j u_{x_j} \partial_j \right) \right\rangle = \left\langle \sum_j u_{x_j} \partial_j, \sum_j u_{x_i x_j} \partial_j \right\rangle = \sum_j u_{x_j} u_{x_i x_j}.$$

Así que

$$\partial_i(f_\delta) = -\delta \frac{\langle Du, \partial_i Du \rangle}{(1 + \delta \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}}} = -\delta f_\delta^3 \sum_j u_{x_j} u_{x_i x_j},$$

y por tanto,

$$\operatorname{div}(f_\delta Du) = f_\delta \Delta u + \sum_i u_{x_i} \left(-\delta f_\delta^3 \sum_j u_{x_j} u_{x_i x_j} \right). \quad (2.11)$$

Para hallar la matriz B_δ que verifica (2.9), basta con obtener los coeficientes que acompañan a $u_{x_i x_j}$, con $i, j = 1, \dots, n$, en (2.11). En el caso $i = j$, el coeficiente viene dado por $f_\delta + u_{x_i} (-\delta f_\delta^3 u_{x_i})$, mientras que si $i \neq j$ es inmediato comprobar que su expresión es $f_\delta^3 (-2\delta u_{x_i} u_{x_j})$.

Entonces, en consecuencia, la matriz B_δ es de la forma

$$B_\delta(Du) = f_\delta^3 \begin{pmatrix} 1 + \delta \sum_{j \neq 1} u_{x_j}^2 & -\delta u_{x_1} u_{x_2} & \dots & -\delta u_{x_1} u_{x_n} \\ -\delta u_{x_1} u_{x_2} & 1 + \delta \sum_{j \neq 2} u_{x_j}^2 & \dots & -\delta u_{x_2} u_{x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\delta u_{x_1} u_{x_n} & -\delta u_{x_2} u_{x_n} & \dots & 1 + \delta \sum_{j \neq n} u_{x_j}^2 \end{pmatrix}.$$

Luego, como $B(Du) = B_{-1}(Du) - B_1(Du)$, obtenemos

$$B(Du) = \begin{pmatrix} (f_{-1}^3 - f_1^3) - (f_{-1}^3 + f_1^3) \sum_{j \neq 1} u_{x_j}^2 & \dots & (f_{-1}^3 + f_1^3) u_{x_1} u_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_{-1}^3 + f_1^3) u_{x_1} u_{x_n} & \dots & (f_{-1}^3 - f_1^3) - (f_{-1}^3 + f_1^3) \sum_{j \neq n} u_{x_j}^2 \end{pmatrix}.$$

Es inmediato observar que B es una matriz simétrica, y será definida positiva si, y solo si, para todo $v \neq 0$ se tiene que $vBv^\top > 0$. Por tanto, vamos a tomar $v = (v_1, \dots, v_n)$ para calcularlo.

$$\begin{aligned} vBv^\top &= \sum_i v_i^2 \left(f_{-1}^3 \left(1 - \sum_{j \neq i} u_{x_j}^2 \right) - f_1^3 \left(1 + \sum_{j \neq i} u_{x_j}^2 \right) \right) + 2(f_{-1}^3 + f_1^3) \sum_{i < j} v_i v_j u_{x_i} u_{x_j} \\ &= \sum_i v_i^2 \left(f_{-1}^3 \left(\frac{1}{f_{-1}^2} + u_{x_i}^2 \right) - f_1^3 \left(\frac{1}{f_1^2} - u_{x_i}^2 \right) \right) + 2(f_{-1}^3 + f_1^3) \sum_{i < j} v_i v_j u_{x_i} u_{x_j} \\ &= (f_{-1} - f_1) \|v\|^2 + (f_{-1}^3 + f_1^3) \left(\sum_i v_i^2 u_{x_i}^2 + 2 \sum_{i < j} v_i v_j u_{x_i} u_{x_j} \right) \\ &= (f_{-1} - f_1) \|v\|^2 + (f_{-1}^3 + f_1^3) \langle Du, v \rangle^2 \geq 0, \end{aligned}$$

puesto que $f_{-1} \geq f_1 > 0$. Obsérvese que, si $\|v\| > 0$, entonces $vBv^\top = 0$ si, y solo si, $Du = 0$.

De esta forma hemos demostrado que la ecuación $Q(u) = 0$ es cuasilineal y elíptica en todo punto salvo en los que $Du = 0$ tal y como queríamos demostrar.

Es bien sabido que las soluciones de una ecuación en derivadas parciales de segundo orden cuasilineal y elíptica, determinada por un operador analítico Q son siempre analíticas (véase [Ho]). Por tanto, si u es una solución de la ecuación (2.8) con $0 < \|Du\| < 1$, va a ser necesariamente analítica. Sin embargo, en general, la analiticidad de las soluciones de (2.8) no puede ser garantizada.

Sea ahora Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n y sea $\psi \in C^0(\partial\Omega)$. El problema de Dirichlet asociado a la ecuación de las hipersuperficies espaciales con $H_R = H_L$ consiste en encontrar una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ para el problema con frontera

$$\begin{cases} Q(u) = 0 & \text{en } \Omega \\ \|Du\| < 1 & \text{en } \Omega \\ u = \psi & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.12)$$

Como consecuencia de un teorema de unicidad para el problema de Dirichlet asociado a operadores elípticos cuasilineales ([GT], Teorema 10.2), obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.13. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera diferenciable y sea $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ tal que el problema de Dirichlet (2.12) admite una solución u sin puntos críticos. Entonces la solución es única.*

Demostración. Es consecuencia directa del Teorema 10.2 de [GT]. Sin embargo, es importante observar que dicho teorema se verifica bajo cuatro hipótesis sobre el operador que define la ecuación y que una de ellas no se verifica en nuestro caso. Como estamos suponiendo la condición de espacialidad, $\|Du\| < 1$, los coeficientes de Q no están bien definidos en todo $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tal y como pide la última hipótesis, sino que lo están para todo punto en $\Omega \times \mathbb{R} \times B_0(1)$. Aún así, estudiando en detalle la prueba del citado teorema podemos darnos cuenta de que es suficiente con considerar los coeficientes definidos en $\Omega \times \mathbb{R} \times B_0(1)$. \square

Es todavía más interesante hacer énfasis en el hecho de que la demostración no funciona si la elipticidad falla en algún punto. Por tanto, no podemos omitir la hipótesis sobre el gradiente de u . Sin embargo, como consecuencia del Teorema 2.10, obtenemos el siguiente resultado de unicidad del problema de Dirichlet bajo unas apropiadas condiciones sobre la frontera.

Teorema 2.14. *Las únicas soluciones al problema de Dirichlet (2.12) con valores afines en la frontera son las funciones afines.*

Demostración. Sea u una solución de (2.12) con $u = \varphi$ en $\partial\Omega$ siendo φ una función afín y sea Σ_u su grafo asociado. Por el Teorema 2.10, Σ_u está contenido en la envoltura convexa de su frontera, la cual está contenida en un hiperplano. Por tanto, el grafo espacial Σ_u debe estar contenido en un

hiperplano y, consecuentemente, u es afín. Para este razonamiento seguido, obsérvese que es crucial observar que el que Teorema 2.10 también funciona para hipersuperficies que son \mathcal{C}^2 . \square

2.4. Grafos espaciales rotacionalmente invariantes.

En esta sección vamos a considerar grafos espaciales *rotacionalmente invariantes* con respecto a un eje vertical. De esta forma, podremos suponer sin pérdida de generalidad que los grafos Σ_u van a estar determinados por una función de la forma

$$u(x_1, \dots, x_n) = f(r), \quad r = x_1^2 + \dots + x_n^2, \quad (2.13)$$

donde $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ para un cierto intervalo $I \subseteq [0, +\infty)$.

Como consecuencia inmediata del Teorema 2.14, obtenemos el siguiente resultado de unicidad para los grafos espaciales enteros, rotacionalmente invariantes con respecto a un eje vertical y que verifican la condición $H_R = H_L$.

Teorema 2.15. *Los únicos grafos enteros espaciales Σ_u determinados por una función u dada por la ecuación (2.13) y tales que $H_R = H_L$ son los hiperplanos horizontales.*

Demostración. Dada una constante positiva R , cualquier solución entera a la ecuación de las hipersuperficies $H_R = H_L$ verificando (2.13) es solución del siguiente problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} Q(u) = 0 & \text{en } B_0(R) \\ \|Du\| < 1 & \text{en } B_0(R) \\ u = cte & \text{en } \partial B_0(R). \end{cases}$$

Por el Teorema 2.14, la función u debe ser constante en $\overline{B}_0(R)$. El resultado se demuestra tomando límites cuando R tiende a infinito. \square

Obsérvese que el teorema anterior no solo funciona para grafos enteros, sino que también puede usarse con grafos definidos sobre una bola centrada en el origen de \mathbb{R}^n .

A continuación vamos a ver que localmente sí existen soluciones a la ecuación $H_R = H_L$ rotacionalmente invariantes con respecto a un eje vertical y que no son hiperplanos, para lo cual vamos a hacer uso de las ecuaciones (1.28) y (1.29) que nos dan la expresión en coordenadas de la función curvatura media de grafos.

En primer lugar, tengamos en cuenta que si u satisface (2.13), entonces

$$u_{x_i} = 2x_i f', \quad u_{x_i x_i} = 2f' + 4x_i^2 f'' \quad \text{y} \quad u_{x_i x_j} = 4x_i x_j f'' \quad \text{si } i \neq j.$$

Así, el numerador de las expresiones (1.28) y (1.29) será de la forma

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} \left(1 + \delta \sum_{j \neq i} u_{x_j}^2 \right) - 2\delta \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j} = \\
 & = \sum_{i=1}^n (2f' + 4x_i^2 f'') \left(1 + \delta \sum_{j \neq i} 4x_j^2 (f')^2 \right) - 2\delta \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} 2x_i f' 2x_j f' 4x_i x_j f'' \\
 & = 2f' n + 8\delta (f')^3 \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} x_j^2 + 4r f'' + 16\delta f'' (f')^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} x_i^2 x_j^2 - 32\delta f'' (f')^2 \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} x_i^2 x_j^2 \\
 & = 2f' n + 8\delta (f')^3 \sum_{i=1}^n (r - x_i^2) + 4r f'' = 2 \left(f' n + 4\delta r (f')^3 (n - 1) + 2r f'' \right).
 \end{aligned}$$

En cuanto al denominador,

$$(1 + \delta \|Du\|^2)^{\frac{3}{2}} = \left(1 + \delta \left(4x_1^2 (f')^2 + \dots + 4x_n^2 (f')^2 \right) \right)^{\frac{3}{2}} = \left(1 + \delta 4 (f')^2 r \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Es decir,

$$H_R = \frac{2 \left(f' n + 4r (f')^3 (n - 1) + 2r f'' \right)}{n \left(1 + 4 (f')^2 r \right)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{y} \quad H_L = \frac{2 \left(f' n - 4r (f')^3 (n - 1) + 2r f'' \right)}{n \left(1 - 4 (f')^2 r \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Por tanto, si queremos resolver la ecuación $H_R = H_L$ tendremos que resolver la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{f' n + 4r (f')^3 (n - 1) + 2r f''}{\left(1 + 4 (f')^2 r \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{f' n - 4r (f')^3 (n - 1) + 2r f''}{\left(1 - 4 (f')^2 r \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.14)$$

Además, observemos que por ser Σ_u un grafo espacial se debe verificar $\|Du\|^2 = 4 (f')^2 r < 1$.

Mediante operaciones básicas a partir de (2.14) obtenemos la siguiente expresión para la segunda derivada de la función f :

$$f'' = \frac{\left(f' n - 4r (f')^3 (n - 1) \right) \left(1 + 4 (f')^2 r \right)^{\frac{3}{2}} - \left(f' n + 4r (f')^3 (n - 1) \right) \left(1 - 4 (f')^2 r \right)^{\frac{3}{2}}}{2r \left(\left(1 - 4 (f')^2 r \right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 + 4 (f')^2 r \right)^{\frac{3}{2}} \right)}. \quad (2.15)$$

Si nos fijamos, el denominador de f'' se anula si $r = 0$ o si $f' = 0$, así que dadas unas condiciones iniciales $(r_0, f(r_0), f'(r_0))$ tales que $r_0 > 0$, $f'(r_0) \neq 0$ y $4 (f'(r_0))^2 r_0 < 1$, la ecuación (2.15) estará bien definida en un entorno de r_0 .

Entonces, tomando $g = f'$, podemos transformar la ecuación (2.14) en el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} g' = \frac{(ng - 4rg^3(n-1))(1 + 4rg^2)^{\frac{3}{2}} - (ng + 4rg^3(n-1))(1 - 4(f')^2 r)^{\frac{3}{2}}}{2r \left((1 - 4rg^2)^{\frac{3}{2}} - (1 + 4rg^2)^{\frac{3}{2}} \right)} \\ g = f' \end{cases},$$

el cual tiene solución local por el teorema de Peano para las condiciones iniciales antes especificadas. Es interesante observar que estos ejemplos no son enteros debido al Teorema 2.15. Además, tengamos también en cuenta que, dado que $f'(r_0) \neq 0$, la solución obtenida no es localmente un hiperplano.

2.5. Sobre el inradio en el dominio de soluciones.

Como otra consecuencia, dado un grafo espacial satisfaciendo $H_R = H_L$ podemos determinar el inradio de Ω^* , siendo Ω^* el conjunto de los puntos en los que el gradiente de la función no se anula, tal y como ya se definió en el Teorema 2.9, o equivalentemente, los puntos en los que el hiperplano tangente a la hipersuperficie no es horizontal. Sin embargo, antes de nada necesitamos un resultado que nos va a relacionar la curvatura media de dichas hipersuperficies y la curvatura media de sus hipersuperficies de nivel.

Lema 2.16. *Sea Σ_u un grafo espacial en \mathbb{L}^{n+1} sobre un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $H_R = H_L$. Si \tilde{S}_c denota la hipersuperficie de nivel $u = c$ en Ω^* y H_c es su función curvatura media, entonces*

$$|H_L| < \frac{n-1}{n\sqrt{2}} |H_c| \circ \pi.$$

Demostración. Para esta demostración seguiremos la notación del Teorema 2.9. En este marco, recordemos que S_c denota el levantamiento en Σ^* de \tilde{S}_c , y dado un punto $p \in \Sigma^*$, $\tilde{\alpha}$ es la curva integral de Du a través de $\pi(p)$ y α denota su levantamiento en Σ^* . Consideremos una base ortonormal $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ de \tilde{S}_c en $\pi(p)$. Ahora, para cada $i = 1, \dots, n$, tomemos una curva en \tilde{S}_c , $\tilde{\alpha}_i$, con $\tilde{\alpha}_i(0) = \pi(p)$ y $\tilde{\alpha}_i' = \tilde{e}_i$. Sean α_i sus levantamientos a S_c . Observemos que $\alpha_i' = (\tilde{\alpha}_i', 0)$. Por otro lado, sean $t_i = \frac{\alpha_i'}{\|\alpha_i'\|_L}$ y $\tilde{t}_i = \frac{\tilde{\alpha}_i'}{\|\tilde{\alpha}_i'\|}$.

Teniendo en cuenta esta notación, y denotando $e_i = (\tilde{e}_i, 0)$, es posible relacionar la curvatura normal con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ de Σ_u en p en la dirección de α_i' , $\kappa_{e_i}^L$, con la curvatura normal de \tilde{S}_c en $\pi(p)$ en la dirección de $\tilde{\alpha}_i'$, denotada por $\kappa_{\tilde{e}_i}^c$, de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \kappa_{e_i}^L &= \langle \nabla_{t_i} t_i, N_L \rangle_L = \left\langle \nabla_{t_i} t_i, \frac{(Du, 1)}{\sqrt{1 - \|Du\|^2}} \right\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{1 - \|Du\|^2}} \left\langle D_{\tilde{t}_i} \tilde{t}_i, Du \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \circ \pi \\ &= \frac{-\|Du\|}{\sqrt{1 - \|Du\|^2}} \left\langle D_{\tilde{t}_i} \tilde{t}_i, \frac{-Du}{\|Du\|} \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \circ \pi = -\frac{\|Du\|}{\sqrt{1 - \|Du\|^2}} \kappa_{\tilde{e}_i}^c \circ \pi, \end{aligned}$$

donde recordemos que D y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ son, respectivamente, la conexi3n de Levi-Civita y la m3trica usual del espacio eucl3deo \mathbb{R}^n , y $\frac{-Du}{\|Du\|}$ es el campo de vectores unitario y normal a \tilde{S}_c en \mathbb{R}^n .

Entonces, si recordamos la ecuaci3n (2.7) del Teorema 2.9 llegamos a la igualdad

$$-\kappa_{\alpha'}^L = \frac{1}{A^2 + A + 1} \left(\kappa_{e_1}^L + \dots + \kappa_{e_{n-1}}^L \right). \quad (2.16)$$

Teniendo en cuenta (2.16) junto con el hecho de que, por definici3n, se tiene

$$(n-1)H_c = \kappa_{e_1}^c + \dots + \kappa_{e_{n-1}}^c,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} nH_L &= -\kappa_{e_1}^L - \dots - \kappa_{e_{n-1}}^L - \kappa_{\alpha'}^L = \frac{-(A^2 + A)}{A^2 + A + 1} \left(\kappa_{e_1}^L + \dots + \kappa_{e_{n-1}}^L \right) \\ &= \frac{A^2 + A}{A^2 + A + 1} \frac{\|Du\|}{\sqrt{1 - \|Du\|^2}} \left(\kappa_{e_1}^c + \dots + \kappa_{e_{n-1}}^c \right) \circ \pi \\ &= \frac{A + 1}{A^2 + A + 1} \frac{\|Du\|}{\sqrt{1 + \|Du\|^2}} (n-1)H_c \circ \pi. \end{aligned}$$

Es decir,

$$n|H_L| = (n-1) \frac{A+1}{A^2+A+1} \frac{\|Du\|}{\sqrt{1+\|Du\|^2}} |H_c| \circ \pi = (n-1)f(\|Du\|)|H_c| \circ \pi,$$

donde $f(t) = \frac{A(t)+1}{A(t)^2+A(t)+1} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ con $0 < t < 1$ y $A(t) = \sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$.

Sabemos que $f(t)$ es positiva, ya que recordemos que, por estar trabajando en Ω^* , u no tiene puntos cr3ticos, luego $\|Du\| \neq 0$. Vamos a ver que es creciente y vamos a buscar una cota superior. Para ello, observemos que

$$f(t) = g(t)h(t) \quad \text{con} \quad g(t) = \frac{A(t)+1}{A(t)^2+A(t)+1} \quad \text{y} \quad h(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

En primer lugar, est3 claro que, para $0 < t < 1$, $g(t) > 0$ y $h(t) > 0$. Ahora, si calculamos la derivada de la funci3n $h(t)$, obtenemos

$$h'(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

por lo que $h(t)$ es creciente. Por otro lado, podemos expresar la funci3n $g(t)$ como

$$g(t) = (l \circ A)(t) \quad \text{con} \quad l(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

y observar que, para $x > 0$ y $0 < t < 1$,

$$l'(x) = \frac{-x^2 - 2x}{(x^2 + x + 1)^2} < 0 \quad \text{y} \quad A'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2 \sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2}}} < 0.$$

Entonces, como $g(t) = l(A(t))$, si usamos la regla de la cadena llegamos a la desigualdad

$$g'(t) = l'(k(t))k'(t) > 0,$$

puesto que $t = \|Du\| \in (0, 1)$ y $A(t) > 0$ para todo $t \in (0, 1)$. Así, obtenemos que $g(t)$ también es una función creciente.

Por tanto, por ser el producto de dos funciones positivas y crecientes, tenemos que $f(t)$ es creciente para $0 < t < 1$. De esta forma, como $\|Du\| < 1$, para obtener una cota superior podemos simplemente tener en cuenta que $f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Finalmente, para todo $p \in \Omega^*$ se verifica

$$|H_L(p)| < \frac{n-1}{n\sqrt{2}} |H_c(\pi(p))|.$$

□

Teorema 2.17. *Sea u una solución a la ecuación de las hipersuperficies espaciales con $H_R = H_L$ definida en un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces*

$$\text{inradio}(\Omega^*) \leq \frac{n-1}{n\sqrt{2} \inf_{\Omega^*} |H_L|}.$$

Demostración. Si $\inf_{\Omega^*} |H_L| = 0$, entonces $\text{inradio}(\Omega^*) \leq \infty$ y no hay nada que probar.

En cualquier otro caso, tenemos $|H_L| \geq \inf_{\Omega^*} |H_L| = c > 0$ en Σ_u^* y, como consecuencia del Lema 2.16, tenemos

$$\frac{n-1}{n\sqrt{2}} |H_c| > |H_L| \geq c > 0,$$

por lo que

$$|H_c| > \frac{n\sqrt{2}c}{n-1} > 0 \quad \text{en} \quad \Omega^*. \quad (2.17)$$

Observemos además que Ω^* es un conjunto abierto de \mathbb{R}^n . Vamos a considerar todas las hipersuperficies de nivel en Ω^* ordenadas según el valor de u en cada una de ellas y las vamos a orientar de forma que los vectores normales apunten en la dirección en la que u disminuye.

Procederemos por reducción al absurdo suponiendo que el inradio de Ω^* es mayor que la cota propuesta en (2.17). Es decir, supondremos que

$$\text{inradio}(\Omega^*) > \frac{n-1}{n\sqrt{2}c}.$$

En ese caso, existirá necesariamente un punto $q \in \Omega^*$ tal que

$$\overline{B}_q \left(\frac{n-1}{n\sqrt{2}c} \right) \subset \text{int}(\Omega^*) = \Omega^*.$$

Como la bola $\overline{B}_q \left(\frac{n-1}{n\sqrt{2}c} \right)$ es compacta, entonces u alcanza un máximo en ella. Más aún, como Du no se anula en $B_q \left(\frac{n-1}{n\sqrt{2}c} \right)$, sabemos que dicho valor extremo se alcanza en la frontera de la bola.

Sea $p \in \overline{B}_q \left(\frac{n-1}{n\sqrt{2}c} \right)$ el punto en el que se alcanza el máximo. En ese caso, la hipersuperficie de nivel a través de p es tangente a la frontera de la bola, $\partial \overline{B}_q \left(\frac{n-1}{n\sqrt{2}c} \right)$, y está contenida en $\Omega^* \setminus B_q \left(\frac{n-1}{n\sqrt{2}c} \right)$, ya que en caso contrario llegaríamos a contradicción porque el máximo se alcanzaría en el interior de la bola pero al mismo tiempo Du no se anula en ella (véase la Figura 2.2).

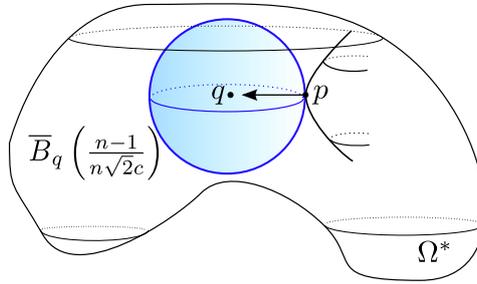


Figura 2.2: Bola $\overline{B}_q \left(\frac{n-1}{n\sqrt{2}c} \right)$ en Ω^* .

Por tanto, según la terminología introducida en la Definición 1.18, $\partial \overline{B}_q \left(\frac{n-1}{n\sqrt{2}c} \right)$ está por encima de la hipersuperficie de nivel en p , S_c . En consecuencia, teniendo en cuenta que $\partial \overline{B}_q \left(\frac{n-1}{n\sqrt{2}c} \right)$ tiene curvatura media constante $\frac{n\sqrt{2}c}{n-1}$, el principio del máximo interior (Teorema 1.19), implica que

$$H_c(p) < \frac{n\sqrt{2}c}{n-1},$$

lo que junto con (2.17) nos permite concluir que

$$H_c(p) < -\frac{n\sqrt{2}c}{n-1}.$$

Análogamente, también puede demostrarse que $H_c(\bar{p}) \geq \frac{n\sqrt{2}c}{n-1}$, siendo \bar{p} el punto en el que u alcanza un mínimo en $\overline{B}_q \left(\frac{n-1}{n\sqrt{2}c} \right)$.

Finalmente, por un argumento de continuidad, concluimos que existe un punto en la bola en el cual H_c se anula, lo cual entra en contradicción con (2.17). \square

Como consecuencia directa del Teorema 2.17 obtenemos los siguientes resultados.

Corolario 2.18. *Sea u una solución de la ecuación de las hipersuperficies espaciales con $H_R = H_L$ definida sobre un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y supongamos que Ω^* definido como antes es un conjunto con inradio infinito. Entonces, $\inf_{\Sigma_u} |H_L| = 0$. Equivalentemente, no existen grafos espaciales satisfaciendo $H_R = H_L$, $|H_L| \geq c$ para cierta constante $c > 0$ e $\text{inradio}(\Omega^*) = \infty$.*

Corolario 2.19. *Sea u una solución de la ecuación de las hipersuperficies espaciales con $H_R = H_L$ definida en un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ con curvatura media constante. Entonces*

$$\text{inradio}(\Omega^*) \leq \frac{(n-1)}{n\sqrt{2}|H_L|}.$$

2.6. Parabolicidad.

En esta última sección del Capítulo 2, para una variedad riemanniana M^n satisfaciendo ciertas hipótesis que describiremos más adelante, consideraremos hipersuperficies espaciales en el espacio producto $\overline{M}_\delta^{n+1} = M^n \times \mathbb{R}$ con las métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ definidas en el Capítulo 1 y tales que $H_R = H_L$. Sin embargo, antes de enunciar el resultado principal de esta sección, necesitaremos tener en cuenta los siguientes cálculos.

A partir de la expresión (1.25) obtenida en el primer capítulo de esta tesis, se tiene lo siguiente:

$$nH_\delta (1 + \delta\|Du\|^2)^{\frac{3}{2}} = (1 + \delta\|Du\|^2) \Delta u - \delta D^2 Du(Du, Du).$$

Por tanto, particularizando en el caso $\delta = 1$, y por tanto considerando la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$, obtenemos

$$H_R = \frac{\Delta u + \|Du\|^2 \Delta u - D^2 Du(Du, Du)}{n\sqrt{(1 + \|Du\|^2)^3}} = \frac{\Delta u - P_u}{n\sqrt{(1 + \|Du\|^2)^3}}, \quad (2.18)$$

donde $P_u = -\|Du\|^2 \Delta u + D^2 Du(Du, Du)$.

Análogamente, al considerar $\delta = -1$, es decir, la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$, llegamos a

$$H_L = \frac{\Delta u - \|Du\|^2 \Delta u + D^2 Du(Du, Du)}{n\sqrt{(1 - \|Du\|^2)^3}} = \frac{\Delta u + P_u}{n\sqrt{(1 - \|Du\|^2)^3}},$$

donde P_u es el mismo operador que interviene en la expresión (2.18).

Ahora, si despejamos P_u en las dos expresiones anteriores e imponemos la condición de que $H = H_R = H_L$, tenemos lo siguiente:

$$\Delta u - nH\sqrt{(1 + \|Du\|^2)^3} = nH\sqrt{(1 - \|Du\|^2)^3} - \Delta u.$$

Es decir,

$$H = \frac{2\Delta u}{n\left(\sqrt{(1 + \|Du\|^2)^3} + \sqrt{(1 - \|Du\|^2)^3}\right)}. \quad (2.19)$$

Para la siguiente definición, recordemos que se dice que una función es *subarmónica* si $\Delta u \geq 0$, mientras que se dice que es *superarmónica* si $\Delta u \leq 0$.

Definición 2.20. Decimos que una variedad M^n es *parabólica* si toda función subarmónica (resp. superarmónica) acotada superiormente (resp. inferiormente) es constante.

Bajo la hipótesis de parabolicidad de M^n , puede demostrarse el siguiente resultado de unicidad.

Teorema 2.21. *Sea M^n una variedad riemanniana parabólica. Los únicos grafos enteros espaciales Σ_u en $\overline{M}_\delta^{n+1}$ tales que $H_R = H_L = H$, que están acotados superiormente (resp. inferiormente), y tales que $H \geq 0$ (resp. $H \leq 0$) son los slices.*

Demostración. Supondremos que Σ_u está acotado superiormente y que $H \geq 0$, puesto que el otro caso es análogo. Entonces, bajo estas hipótesis, la expresión (2.19) nos permite obtener $\Delta u \geq 0$. Así, teniendo en cuenta que M^n es parabólica, llegamos a que u es constante y que por tanto Σ_u es un slice. \square

El Teorema 2.21 puede generalizarse de la siguiente forma.

Teorema 2.22. *Sea M^n una variedad riemanniana parabólica. Los únicos grafos enteros espaciales Σ_u en $\overline{M}_\delta^{n+1}$ tales que $H_R = H_L = H \geq 0$ (resp. $H \leq 0$) y con la función u acotada superiormente por una función v superarmónica (resp. subarmónica) son las traslaciones verticales de Σ_v , siempre que Σ_v sea espacial con $H_R = H_L$.*

Demostración. Supongamos el caso en el que tenemos $u \leq v$ con v una función superarmónica y $H \geq 0$, ya que el otro es análogo. Entonces, a partir de (2.19), obtenemos

$$0 \leq H = \frac{2 \Delta u}{n \left(\sqrt{(1 + \|Du\|^2)^3} + \sqrt{(1 - \|Du\|^2)^3} \right)} \leq \frac{2 \Delta(u - v)}{n \left(\sqrt{(1 + \|Du\|^2)^3} + \sqrt{(1 - \|Du\|^2)^3} \right)}.$$

Por tanto, como el denominador es positivo, tenemos que $\Delta(u - v) \geq 0$. Si además tenemos en cuenta que por hipótesis $u - v \leq 0$ y que M^n es parabólica, obtenemos que $u - v$ es constante, llegando así al resultado del enunciado. \square

Es un hecho bien conocido que \mathbb{R}^2 es una superficie parabólica, mientras que \mathbb{R}^n con $n \geq 3$ no lo es (véase por ejemplo [Gr]). En consecuencia, en el caso particular en el que $M = \mathbb{R}^2$, podemos obtener el siguiente corolario.

Corolario 2.23. *Los únicos grafos enteros espaciales en \mathbb{L}^3 tales que $H_R = H_L = H$, que están acotados superiormente (resp. inferiormente) por un plano espacial y tales que $H \geq 0$ (resp. $H \leq 0$) son los planos espaciales.*

Hipersuperficies en espacios producto

Sumario. En este capítulo, dada una hipersuperficie no degenerada inmersa en el espacio producto $\overline{M}^{n+1} = M^n \times \mathbb{R}$, se estudiará qué relación existe entre su geometría cuando se le otorga la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y cuando tiene la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$. Concretamente, se estudiará qué relación existe entre los campos vectoriales normales y unitarios N_R y N_L , entre los operadores forma A_R y A_L , y entre las funciones curvatura media H_R y H_L . A continuación, y usando los resultados obtenidos a lo largo del capítulo, se demostrará que si una hipersuperficie no degenerada verifica $H_R = H_L = 0$, entonces las hipersuperficies de nivel de su función altura son subvariedades minimales. Además, dicho resultado nos permitirá obtener una caracterización para las superficies regladas. Después, se darán algunos ejemplos de hipersuperficies que verifican $H_R = H_L = 0$ y se obtendrá otra caracterización. Por último, se estudiará qué relación existe entre las curvaturas de Gauss de superficies en \overline{M}_R^3 y en \overline{M}_L^3 para llegar a otro teorema de caracterización.

Sea $\overline{M}_\delta^{n+1}$ la variedad pseudo-riemanniana definida en el Capítulo 1, es decir, \overline{M}_R^{n+1} si $\delta = 1$ y \overline{M}_L^{n+1} si $\delta = -1$, y consideremos Σ una hipersuperficie no degenerada en \overline{M}_L^{n+1} . En las primeras secciones de este capítulo nos proponemos relacionar la geometría de $(\Sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ con la de $(\Sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle_R)$. Para ello, comencemos por obtener las siguientes relaciones interesantes entre la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ de \overline{M}_R y la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ de \overline{M}_L .

Proposición 3.1. *Dados dos campos tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M}_\delta^{n+1})$, se verifican las siguientes relaciones:*

$$\langle X, Y \rangle_R - \langle X, Y \rangle_L = 2\langle X, \partial_t \rangle_R \langle Y, \partial_t \rangle_R.$$

$$\langle X, Y \rangle_R - \langle X, Y \rangle_L = 2\langle X, \partial_t \rangle_L \langle Y, \partial_t \rangle_L.$$

Demostración. Tal y como hemos hecho otras veces, vamos a ver $\overline{M}_\delta^{n+1}$ como una variedad producto para así poder descomponer los campos X e Y de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X &= \widehat{X} + \langle X, \partial_t \rangle_R \partial_t, & Y &= \widehat{Y} + \langle Y, \partial_t \rangle_R \partial_t, \\ X &= \widehat{X} - \langle X, \partial_t \rangle_L \partial_t & \text{y} & & Y &= \widehat{Y} - \langle Y, \partial_t \rangle_L \partial_t, \end{aligned}$$

donde $\langle \widehat{X}, \partial_t \rangle_\delta = 0$ y $\langle \widehat{Y}, \partial_t \rangle_\delta = 0$.

Entonces, teniendo en cuenta la Proposición 1.2,

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle_R - \langle X, Y \rangle_L &= \langle \widehat{X}, \widehat{Y} \rangle + \langle X, \partial_t \rangle_R \langle Y, \partial_t \rangle_R \langle \partial_t, \partial_t \rangle_R - \langle \widehat{X}, \widehat{Y} \rangle - \langle X, \partial_t \rangle_L \langle Y, \partial_t \rangle_L \langle \partial_t, \partial_t \rangle_L \\ &= \langle X, \partial_t \rangle_R \langle Y, \partial_t \rangle_R + \langle X, \partial_t \rangle_L \langle Y, \partial_t \rangle_L \\ &= \langle X, \partial_t \rangle_R \langle Y, \partial_t \rangle_R + \langle X, \partial_t \rangle_R \langle Y, \partial_t \rangle_R \\ &= 2 \langle X, \partial_t \rangle_R \langle Y, \partial_t \rangle_R. \end{aligned}$$

La demostración de la otra igualdad es análoga. \square

3.1. Los vectores normales.

A continuación, y tal y como vimos en la Sección 1.2, dada una hipersuperficie no degenerada en \overline{M}_L^{n+1} , podemos considerarla con la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ o con la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$. Esto dará lugar a que podamos considerar su vector normal en \overline{M}_L^{n+1} , denotado por N_L , y su vector normal en \overline{M}_R^{n+1} , denotado por N_R . El siguiente resultado establece la relación existente entre ambos campos.

Lema 3.2. *Sea $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}_L^{n+1}$ una hipersuperficie no degenerada inmersa en el espacio producto lorentziano \overline{M}_L^{n+1} con campo vectorial normal y unitario N_L tal que $\langle N_L, \partial_t \rangle_L \leq 0$. Entonces*

$$N_R = \frac{1}{\omega_L} \left(\sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} \partial_t - N_L \right) \quad (3.1)$$

define el único campo vectorial normal en Σ^n con respecto a la métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ tal que $\langle N_R, \partial_t \rangle_R \geq 0$, donde

$$\omega_L^2 = \varepsilon + 2 \langle N_L, \partial_t \rangle_L^2 \geq 1 > 0. \quad (3.2)$$

Demostración. Vamos a comenzar comprobando que el campo N_R del enunciado es unitario con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$. Para ello, calculemos lo siguiente:

$$\langle N_R, N_R \rangle_R = \frac{1}{\omega_L^2} \left(2(\omega_L^2 - \varepsilon) \langle \partial_t, \partial_t \rangle_R - 2 \sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} \langle N_L, \partial_t \rangle_R + \langle N_L, N_L \rangle_R \right). \quad (3.3)$$

Puesto que $\langle N_L, \partial_t \rangle_L \leq 0$, se sigue de (3.2) que

$$\langle N_L, \partial_t \rangle_L = - \frac{\sqrt{\omega_L^2 - \varepsilon}}{\sqrt{2}} = - \frac{\sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)}}{2}, \quad (3.4)$$

y usando la Proposición 1.2 obtenemos

$$\langle N_L, \partial_t \rangle_R = -\langle N_L, \partial_t \rangle_L = \frac{\sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)}}{2}. \quad (3.5)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la Proposición 3.1 también obtenemos

$$\langle N_L, N_L \rangle_R = \langle N_L, N_L \rangle_L + 2\langle N_L, \partial_t \rangle_L^2 = \varepsilon + 2\langle N_L, \partial_t \rangle_L^2 = \omega_L^2. \quad (3.6)$$

Como $\langle \partial_t, \partial_t \rangle_R = 1$, si volvemos a (3.3) teniendo en cuenta (3.5) y (3.6), llegamos a

$$\langle N_R, N_R \rangle_R = \frac{1}{\omega_L^2} (2(\omega_L^2 - \varepsilon) - 2(\omega_L^2 - \varepsilon) + \omega_L^2) = 1.$$

A continuación, para comprobar si $\langle N_R, \partial_t \rangle_R \geq 0$, simplemente hay que usar la definición de N_R junto con (3.5) para comprobar que

$$\langle N_R, \partial_t \rangle_R = \frac{1}{\omega_L} \left(\sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} - \frac{\sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)}}{2\omega_L} \geq 0.$$

Por último, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle N_R, X \rangle_R &= \frac{1}{\omega_L} \left(\sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} \langle X, \partial_t \rangle_R - \langle N_L, X \rangle_R \right) \\ &= \frac{1}{\omega_L} \left(-\sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} \langle X, \partial_t \rangle_L - 2\langle N_L, \partial_t \rangle_L \langle X, \partial_t \rangle_L \right) \\ &= -\frac{\langle X, \partial_t \rangle_L}{\omega_L} \left(\sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} - \sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} \right) = 0, \end{aligned}$$

donde se ha usado (3.4) junto con el hecho de que, por la Proposición 3.1,

$$\langle N_L, X \rangle_R = \langle N_L, X \rangle_L + 2\langle N_L, \partial_t \rangle_L \langle X, \partial_t \rangle_L = 2\langle N_L, \partial_t \rangle_L \langle X, \partial_t \rangle_L,$$

ya que $\langle N_L, X \rangle_L = 0$. Esto acaba la demostración. \square

A continuación, vamos a considerar el caso particular de los grafos espaciales en \overline{M}_L^{n+1} para comprobar que el resultado que acabamos de demostrar coincide con lo obtenido en la Sección 1.3.

Ejemplo 3.3. Sea $\Omega \subseteq M^n$ un dominio conexo y sea $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ una función diferenciable que determina un grafo espacial $\Sigma_u = \{(x, u(x)) : x \in \Omega\} \subseteq \overline{M}_L^{n+1}$.

Tal y como vimos en (1.15), el vector normal con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ es de la forma

$$N_L = \frac{1}{\sqrt{1 - \|Du\|^2}} (Du + \partial_t).$$

Vamos a calcular, en primer lugar, la expresión de ω_L^2 . Para ello, como $\varepsilon = -1$ se tiene

$$\omega_L^2 = -1 + 2\langle N_L, \partial_t \rangle_L^2 = -1 + 2 \left(\frac{-1}{\sqrt{1 - \|Du\|^2}} \right)^2 = -1 + \frac{2}{1 - \|Du\|^2} = \frac{1 + \|Du\|^2}{1 - \|Du\|^2}.$$

Entonces,

$$\sqrt{2(\omega_L^2 + 1)} = \sqrt{\frac{4}{1 - \|Du\|^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - \|Du\|^2}} \quad \text{y} \quad \omega_L = \sqrt{\frac{1 + \|Du\|^2}{1 - \|Du\|^2}}.$$

Teniendo esto último en cuenta,

$$\begin{aligned} N_R &= \frac{1}{\omega_L} \left(\sqrt{2(\omega_L^2 + 1)} \partial_t - N_L \right) \\ &= \sqrt{\frac{1 - \|Du\|^2}{1 + \|Du\|^2}} \left(\frac{2\partial_t}{\sqrt{1 - \|Du\|^2}} - \frac{Du + \partial_t}{\sqrt{1 - \|Du\|^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \|Du\|^2}} (-Du + \partial_t). \end{aligned}$$

El siguiente resultado es una recolección de varias fórmulas útiles que serán usadas a lo largo de este capítulo. Algunas de ellas incluso ya han aparecido en la demostración del Lema 3.2.

Lema 3.4. *Sea $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}_L^{n+1}$ una hipersuperficie no degenerada inmersa en el espacio producto lorentziano \overline{M}_L^{n+1} con campo vectorial normal y unitario N_L tal que $\langle N_L, \partial_t \rangle_L \leq 0$. Definiendo N_R como el dado por (3.1), se tienen las siguientes relaciones:*

$$\begin{array}{lll} a) \langle N_L, N_L \rangle_L = \varepsilon & d) \langle N_R, N_R \rangle_R = 1 & g) \langle N_L, \partial_t \rangle_L = -\frac{\sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)}}{2} \\ b) \langle N_L, N_L \rangle_R = \omega_L^2 & e) \langle N_L, N_R \rangle_L = -\omega_L & h) \langle N_R, \partial_t \rangle_R = \frac{\sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)}}{2\omega_L} \\ c) \langle N_R, N_R \rangle_L = \frac{\varepsilon}{\omega_L^2} & f) \langle N_L, N_R \rangle_R = -\frac{\varepsilon}{\omega_L} & \end{array}$$

Demostración. Únicamente vamos a demostrar los apartados *c)*, *e)* y *f)*, puesto que las otras relaciones ya han salido con anterioridad.

Para el apartado *c)*, calculemos la expresión directamente teniendo en cuenta la definición de N_R junto con (3.4), y se llega a que

$$\begin{aligned} \langle N_R, N_R \rangle_L &= \frac{1}{\omega_L^2} \left(2(\omega_L^2 - \varepsilon) \langle \partial_t, \partial_t \rangle_L - 2\sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} \langle N_L, \partial_t \rangle_L + \langle N_L, N_L \rangle_L \right) \\ &= \frac{1}{\omega_L^2} (-2(\omega_L^2 - \varepsilon) + 2(\omega_L^2 - \varepsilon) + \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega_L^2}. \end{aligned}$$

En la demostración del apartado *e)*, de nuevo hay que usar lo obtenido en (3.4), de modo que

$$\langle N_L, N_R \rangle_L = \frac{1}{\omega_L} \left(\sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} \langle N_L, \partial_t \rangle_L - \langle N_L, N_L \rangle_L \right) = \frac{1}{\omega_L} (-(\omega_L^2 - \varepsilon) - \varepsilon) = -\omega_L.$$

Por último, para el apartado *f*) se usarán las expresiones (3.5) y (3.6) para concluir que

$$\langle N_L, N_R \rangle_R = \frac{1}{\omega_L} \left(\sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} \langle N_L, \partial_t \rangle_R - \langle N_L, N_L \rangle_R \right) = \frac{1}{\omega_L} ((\omega_L^2 - \varepsilon) - \omega_L^2) = -\frac{\varepsilon}{\omega_L}.$$

□

Observemos que el Lema 3.2 expresa cómo escribir el campo vectorial N_R , normal a la hipersuperficie con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$, en términos del campo vectorial N_L , normal a la hipersuperficie con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$. Lo contrario también es posible. De hecho, de (3.1) tenemos

$$N_L = \sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} \partial_t - \omega_L N_R = \frac{1}{\omega_R} \left(\sqrt{2(1 - \varepsilon \omega_R^2)} \partial_t - N_R \right), \quad (3.7)$$

donde, por definición,

$$\omega_R = \frac{1}{\omega_L}, \quad \text{y por tanto} \quad \omega_L^2 - \varepsilon = \frac{1 - \varepsilon \omega_R^2}{\omega_R^2}.$$

Además, teniendo en cuenta el apartado *h*) del Lema 3.4, tenemos

$$2\langle N_R, \partial_t \rangle_R^2 = 1 - \varepsilon \omega_R^2,$$

de donde

$$\omega_R = \sqrt{\varepsilon (1 - 2\langle N_R, \partial_t \rangle_R^2)}.$$

Más aún, en términos de ω_R , el apartado *c*) del Lema 3.4 se escribe como

$$\langle N_R, N_R \rangle_L = \varepsilon \omega_R^2,$$

en analogía con la relación del apartado *b*) del mismo lema.

De ahora en adelante, siempre supondremos que toda hipersuperficie no degenerada Σ^n del espacio producto lorentziano \overline{M}_L^{n+1} está orientada por un único campo vectorial normal y unitario N_L tal que $\langle N_L, \partial_t \rangle_L \leq 0$. Como se ha observado anteriormente, cuando la hipersuperficie es espacial N_L está globalmente definido en Σ^n , mientras que si la hipersuperficie es temporal entonces N_L está al menos localmente definido. Teniendo eso en cuenta, si vemos dicha hipersuperficie Σ^n en el espacio producto riemanniano \overline{M}_R^{n+1} , Σ^n siempre estará orientada por el campo vectorial normal y unitario N_R dado por (3.1) y con $\langle N_R, \partial_t \rangle_R \geq 0$. En este contexto, denotaremos por h la *función altura*, esto es, $h : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la proyección de Σ^n en \mathbb{R} , $h = \pi_{\mathbb{R}} \circ \psi$, donde recordemos que $\pi_{\mathbb{R}}$ es la proyección de $\overline{M}_\delta^{n+1} = M^n \times \mathbb{R}$ sobre \mathbb{R} . Cuando $h = t_0$ es constante para un cierto $t_0 \in \mathbb{R}$, decimos que Σ^n está *contenida en el slice* $M^n \times \{t_0\}$ de $\overline{M}_\delta^{n+1}$.

Por otro lado, dados los campos normales N_R y N_L , obsérvese que el campo ∂_t puede descomponerse de las siguientes formas:

$$\partial_t = \partial_t^{\top R} + \langle N_R, \partial_t \rangle_R N_R \quad \text{y} \quad \partial_t = \partial_t^{\top L} + \varepsilon \langle N_L, \partial_t \rangle_L N_L, \quad (3.8)$$

donde \top^R y \top^L denotan, respectivamente, las componentes tangentes de un campo vectorial a lo largo de la inmersión $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}_\delta^{n+1}$ con respecto a las métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$. En particular, se tienen las expresiones

$$1 = \langle \partial_t, \partial_t \rangle_R = \left\langle \partial_t^{\top^R}, \partial_t^{\top^R} \right\rangle_R + \langle N_R, \partial_t \rangle_R^2 \quad (3.9)$$

$$\text{y} \quad -1 = \langle \partial_t, \partial_t \rangle_L = \left\langle \partial_t^{\top^L}, \partial_t^{\top^L} \right\rangle_L + \varepsilon \langle N_L, \partial_t \rangle_L^2. \quad (3.10)$$

Es interesante observar que, si tomamos las partes tangentes del vector ∂_t con respecto a ambas métricas, dichas partes tangentes no tienen por qué ser iguales tal y como vamos a ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.5. Sea $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ una función que determina un grafo espacial $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$ de la forma $\psi(x, y) = (x, y, u(x, y))$. Vamos a calcular $\partial_t^{\top^R}$ y $\partial_t^{\top^L}$ usando las expresiones dadas en (3.8) para ver que tienen valores distintos.

Antes de nada, veamos la expresión de los campos normales con respecto a las métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$, que no es más que adaptar a nuestro ejemplo la expresión de (1.15) como se hizo en el Ejemplo 3.3.

$$N_R = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}(-u_x, -u_y, 1) \quad \text{y} \quad N_L = \frac{1}{\sqrt{1 - u_x^2 - u_y^2}}(u_x, u_y, 1).$$

Entonces, por un lado,

$$\begin{aligned} \partial_t^{\top^R} &= \partial_t - \langle N_R, \partial_t \rangle_R N_R = (0, 0, 1) - \frac{1}{1 + u_x^2 + u_y^2}(-u_x, -u_y, 1) \\ &= \left(\frac{u_x}{1 + u_x^2 + u_y^2}, \frac{u_y}{1 + u_x^2 + u_y^2}, \frac{u_x^2 + u_y^2}{1 + u_x^2 + u_y^2} \right) = \frac{1}{1 + u_x^2 + u_y^2} (u_x, u_y, u_x^2 + u_y^2), \end{aligned}$$

mientras que por otro lado, y puesto que $\varepsilon = -1$,

$$\begin{aligned} \partial_t^{\top^L} &= \partial_t + \langle N_L, \partial_t \rangle_L N_L = (0, 0, 1) - \frac{1}{1 - u_x^2 - u_y^2}(u_x, u_y, 1) \\ &= \left(\frac{-u_x}{1 - u_x^2 - u_y^2}, \frac{-u_y}{1 - u_x^2 - u_y^2}, \frac{-u_x^2 - u_y^2}{1 - u_x^2 - u_y^2} \right) = \frac{-1}{1 - u_x^2 - u_y^2} (u_x, u_y, u_x^2 + u_y^2). \end{aligned}$$

Por tanto, $\partial_t^{\top^R} \neq \partial_t^{\top^L}$ en general tal y como se afirmaba.

Teniendo en cuenta las observaciones anteriores, es posible obtener una relación entre los gradientes de la función altura y las partes tangentes del campo ∂_t con respecto a las métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$.

Proposición 3.6. *Sea Σ^n una hipersuperficie no degenerada inmersa en el espacio producto lorentziano \overline{M}_L^{n+1} con función altura h . Entonces, se verifican las siguientes relaciones:*

$$\nabla^R h = \partial_t^{\top R} \quad y \quad \nabla^L h = -\partial_t^{\top L}.$$

Demostración. Para demostrar estas relaciones usaremos la Proposición 1.1 y tendremos en cuenta que la componente tangente de la proyección $\pi_{\mathbb{R}}$ con respecto a ambas métricas es igual a la función altura h . Así,

$$\nabla^R h = \left(\overline{\nabla}^R \pi_{\mathbb{R}} \right)^{\top R} = \partial_t^{\top R} \quad y \quad \nabla^L h = \left(\overline{\nabla}^L \pi_{\mathbb{R}} \right)^{\top L} = -\partial_t^{\top L}.$$

□

Obsérvese que si combinamos las expresiones de (3.8) junto con la Proposición 3.6, obtenemos lo siguiente:

$$\nabla^R h = \partial_t - \langle N_R, \partial_t \rangle_R N_R \quad y \quad \nabla^L h = -\partial_t + \varepsilon \langle N_L, \partial_t \rangle_L N_L. \quad (3.11)$$

Más aún, también es posible relacionar entre sí los dos gradientes de la función altura de nuestra hipersuperficie Σ^n .

Lema 3.7. *Sea Σ^n una hipersuperficie no degenerada en \overline{M}_L^{n+1} y sea h la función altura sobre Σ^n . Entonces,*

$$\nabla^R h = -\frac{\varepsilon}{\omega_L^2} \nabla^L h = -\varepsilon \omega_R^2 \nabla^L h.$$

Equivalentemente,

$$\nabla^L h = -\frac{\varepsilon}{\omega_R^2} \nabla^R h = -\varepsilon \omega_L^2 \nabla^R h. \quad (3.12)$$

Demostración. Teniendo en cuenta los apartados *g)* y *h)* del Lema 3.4, tenemos

$$\langle N_R, \partial_t \rangle_R = -\frac{1}{\omega_L} \langle N_L, \partial_t \rangle_L. \quad (3.13)$$

Entonces, si tenemos en cuenta la expresión (3.13) junto con la definición de N_R dada en (3.1), el apartado *g)* del Lema 3.4 y la observación de (3.11), obtenemos

$$\begin{aligned} \langle N_R, \partial_t \rangle_R N_R &= \frac{1}{\omega_L^2} \langle N_L, \partial_t \rangle_L N_L - \frac{1}{\omega_L^2} \langle N_L, \partial_t \rangle_L \sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} \partial_t = \frac{1}{\omega_L^2} \langle N_L, \partial_t \rangle_L N_L + \frac{\omega_L^2 - \varepsilon}{\omega_L^2} \partial_t \\ &= \partial_t + \frac{\varepsilon}{\omega_L^2} (-\partial_t + \varepsilon \langle N_L, \partial_t \rangle_L N_L) = \partial_t + \frac{\varepsilon}{\omega_L^2} \nabla^L h. \end{aligned}$$

Por último, volviendo a usar (3.11), concluimos que

$$\nabla^R h = -\frac{\varepsilon}{\omega_L^2} \nabla^L h. \quad (3.14)$$

El resto de expresiones se obtienen directamente de (3.14). □

De acuerdo con el Lema 3.7, podemos inferir los siguientes hechos.

1. Una hipersuperficie en $\overline{M}_\delta^{n+1} = M^n \times \mathbb{R}$ es un slice en \overline{M}_R^{n+1} si y solo si es un slice en \overline{M}_L^{n+1} (y por tanto espacial).
2. Denotando por $\theta \geq 0$ el ángulo riemanniano entre N_R y ∂_t , es decir, $\cos(\theta) = \langle N_R, \partial_t \rangle_R$, de las definiciones de los ángulos hiperbólicos (1.8) y (1.9), la relación dada en (3.13) y recordando que $\cosh^2(\varphi) - \sinh^2(\varphi) = 1$, es inmediato lo siguiente:

$$\cos(\theta) = \begin{cases} \frac{\sinh(\varphi)}{\sqrt{\sinh^2(\varphi) + \cosh^2(\varphi)}} & \text{si } \varepsilon = 1 \\ \frac{\cosh(\varphi)}{\sqrt{\sinh^2(\varphi) + \cosh^2(\varphi)}} & \text{si } \varepsilon = -1. \end{cases} \quad (3.15)$$

Se dice que una hipersuperficie orientable Σ^n en una variedad producto $M^n \times \mathbb{R}$ tiene ángulo constante si su campo vectorial normal tiene un *ángulo constante* con respecto a la dirección fijada por la recta real \mathbb{R} . En los últimos años, muchos geómetras han estado estudiando esta propiedad obteniendo importantes resultados de clasificación (véase por ejemplo [DFVV], [DM], [FN], [NRS], [To]). Teniendo en cuenta el segundo hecho observado sobre los ángulos en (3.15), tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.8. *Una hipersuperficie no degenerada en \overline{M}_L^{n+1} tiene ángulo constante si y solo si tiene ángulo constante como hipersuperficie en \overline{M}_R^{n+1} .*

3.2. Los operadores forma.

Al igual que sucede con los vectores normales, dada una hipersuperficie no degenerada en \overline{M}_L^{n+1} , podemos considerar su operador forma en \overline{M}_L^{n+1} , que denotamos por A_L , y su operador forma como hipersuperficie en \overline{M}_R^{n+1} , que denotamos por A_R . En el siguiente resultado vamos a establecer una relación entre ambos operadores forma que resultará muy útil en lo sucesivo.

Teorema 3.9. *Sea Σ^n una hipersuperficie no degenerada inmersa en \overline{M}_L^{n+1} con campo vectorial normal y unitario N_L tal que $\langle N_L, \partial_t \rangle_L \leq 0$. Sea N_R el único campo vectorial unitario y normal sobre Σ^n con respecto a la métrica producto riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ con $\langle N_R, \partial_t \rangle_R \geq 0$ y dado por (3.1). Entonces, los correspondientes operadores forma de Σ^n con respecto a N_L y N_R , A_L y A_R respectivamente, están relacionados de la siguiente manera:*

$$A_R X = -\frac{1}{\omega_L} A_L X - \frac{2\varepsilon}{\omega_L^3} \langle A_L \nabla^L h, X \rangle_L \nabla^L h. \quad (3.16)$$

Equivalentemente,

$$A_L X = -\frac{1}{\omega_R} A_R X + \frac{2\varepsilon}{\omega_R^3} \langle A_R \nabla^R h, X \rangle_R \nabla^R h. \quad (3.17)$$

Demostración. Vamos a comenzar demostrando la ecuación (3.16). Para ello, deberemos tener en cuenta la expresión (3.1) de N_R y la fórmula de Weingarten de (1.12) para obtener

$$\begin{aligned} A_RX &= -\bar{\nabla}_X N_R = \bar{\nabla}_X \left(\frac{1}{\omega_L} \left(N_L - \sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} \partial_t \right) \right) \\ &= X \left(\frac{1}{\omega_L} \right) N_L - X \left(\frac{1}{\omega_L} \right) \sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} \partial_t - \frac{1}{\omega_L} A_L X \\ &\quad - \frac{1}{\omega_L} X \left(\sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} \right) \partial_t - \frac{1}{\omega_L} \sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} \bar{\nabla}_X \partial_t \end{aligned} \quad (3.18)$$

Sin embargo, como ∂_t es paralelo tanto en \bar{M}_R^{n+1} como en \bar{M}_L^{n+1} , se tiene que $\bar{\nabla}_X \partial_t = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Entonces, la expresión de (3.18) queda de la siguiente forma:

$$A_RX = X \left(\frac{1}{\omega_L} \right) N_L - X \left(\frac{1}{\omega_L} \right) \sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} \partial_t - \frac{1}{\omega_L} A_L X - \frac{1}{\omega_L} X \left(\sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} \right) \partial_t. \quad (3.19)$$

A continuación vamos a calcular todas las derivadas que aparecen en (3.19). Pero antes, obsérvese que

$$X \langle (N_L, \partial_t)_L \rangle = \langle \bar{\nabla}_X N_L, \partial_t \rangle_L + \langle N_L, \bar{\nabla}_X \partial_t \rangle_L = -\langle A_L X, \partial_t \rangle_L. \quad (3.20)$$

Entonces,

$$X(\omega_L) = X \left((\varepsilon + 2\langle N_L, \partial_t \rangle_L^2)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{-2\langle A_L X, \partial_t \rangle_L}{\omega_L} \langle N_L, \partial_t \rangle_L.$$

Por tanto,

$$X \left(\frac{1}{\omega_L} \right) = \frac{-X(\omega_L)}{\omega_L^2} = \frac{2}{\omega_L^3} \langle A_L X, \partial_t \rangle_L \langle N_L, \partial_t \rangle_L. \quad (3.21)$$

Ahora, usando el apartado g) del Lema 3.4 obtenemos

$$X \left(\sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} \right) = X(-2\langle N_L, \partial_t \rangle_L) = 2\langle A_L X, \partial_t \rangle_L. \quad (3.22)$$

De esta manera, partiendo de (3.19) y teniendo en cuenta (3.21) y (3.22), llegamos a lo siguiente:

$$\begin{aligned} A_RX &= \frac{2}{\omega_L^3} \langle A_L X, \partial_t \rangle_L \langle N_L, \partial_t \rangle_L N_L - \frac{2}{\omega_L^3} \langle A_L X, \partial_t \rangle_L \langle N_L, \partial_t \rangle_L \sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} \partial_t \\ &\quad - \frac{1}{\omega_L} A_L X - \frac{2\langle A_L X, \partial_t \rangle_L}{\omega_L} \partial_t. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Para continuar con esta cuenta, vamos a sumar algunos términos de (3.23) por separado para intentar que las operaciones sean más sencillas visualmente. Para ello, asignemos los siguientes

números y volvamos a usar el apartado g) del Lema 3.4:

$$\begin{aligned} [1] &= -\frac{2}{\omega_L^3} \langle A_L X, \partial_t \rangle_L \langle N_L, \partial_t \rangle_L \sqrt{2(\omega_L^2 - \varepsilon)} \partial_t = \frac{2(\omega_L^2 - \varepsilon)}{\omega_L^3} \langle A_L X, \partial_t \rangle_L \partial_t \\ [2] &= -\frac{2 \langle A_L X, \partial_t \rangle_L}{\omega_L} \partial_t \end{aligned}$$

Usando la notación anterior, observemos que

$$[1] + [2] = \frac{2}{\omega_L} \langle A_L X, \partial_t \rangle_L \left(\frac{\omega_L^2 - \varepsilon}{\omega_L^2} - 1 \right) \partial_t = -\frac{2\varepsilon}{\omega_L^3} \langle A_L X, \partial_t \rangle_L \partial_t.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} A_R X &= -\frac{1}{\omega_L} A_L X - \frac{2\varepsilon \langle A_L X, \partial_t \rangle_L}{\omega_L^3} (-\varepsilon \langle N_L, \partial_t \rangle_L N_L + \partial_t) \\ &= -\frac{1}{\omega_L} A_L X - \frac{2\varepsilon}{\omega_L^3} \langle A_L X, \partial_t \rangle_L \partial_t^{\top L} \\ &= -\frac{1}{\omega_L} A_L X - \frac{2\varepsilon}{\omega_L^3} \langle A_L \nabla^L h, X \rangle_L \nabla^L h, \end{aligned}$$

donde para la última igualdad se ha tenido en cuenta la Proposición 3.6 y se ha usado que

$$\langle A_L X, \partial_t \rangle_L = \left\langle A_L X, \partial_t^{\top L} \right\rangle_L = -\langle A_L X, \nabla^L h \rangle_L = -\langle X, A_L \nabla^L h \rangle_L.$$

La demostración de la relación (3.17) es similar, pero empezando por la expresión de N_L dada en (3.7) y la ecuación de Weingarten de (1.10). \square

Corolario 3.10. *Sea Σ^n una hipersuperficie no degenerada inmersa en \overline{M}_L^{n+1} con campo vectorial normal y unitario N_L tal que $\langle N_L, \partial_t \rangle_L \leq 0$. Sea N_R el único campo vectorial unitario y normal sobre Σ^n con respecto a la métrica producto riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ con $\langle N_R, \partial_t \rangle_R \geq 0$ y dado por (3.1). Entonces, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, se tiene la relación*

$$\langle A_R X, Y \rangle_R = -\frac{1}{\omega_L} \langle A_L X, Y \rangle_L. \quad (3.24)$$

Equivalentemente,

$$\langle A_L X, Y \rangle_L = -\frac{1}{\omega_R} \langle A_R X, Y \rangle_R. \quad (3.25)$$

Demostración. Usando (3.16) junto con la expresión (3.12) del Lema 3.7, la Proposición 3.6 y la

Proposición 1.2, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \langle A_R X, Y \rangle_R &= \left\langle -\frac{1}{\omega_L} A_L X - \frac{2\varepsilon}{\omega_L^3} \langle A_L \nabla^L h, X \rangle_L \nabla^L h, Y \right\rangle_R \\
 &= -\frac{1}{\omega_L} \langle A_L X, Y \rangle_R + \frac{2\varepsilon}{\omega_L^3} \langle A_L \partial_t, X \rangle_L \langle \nabla^L h, Y \rangle_R \\
 &= -\frac{1}{\omega_L} \langle A_L X, Y \rangle_R + \frac{2\varepsilon}{\omega_L^3} \langle A_L X, \partial_t \rangle_L \langle -\varepsilon \omega_L^2 \nabla^R h, Y \rangle_R \\
 &= -\frac{1}{\omega_L} \langle A_L X, Y \rangle_R - \frac{2}{\omega_L} \langle A_L X, \partial_t \rangle_L \langle \nabla^R h, Y \rangle_R \\
 &= -\frac{1}{\omega_L} \langle A_L X, Y \rangle_R - \frac{2}{\omega_L} \langle A_L X, \partial_t \rangle_L \langle \partial_t, Y \rangle_R \\
 &= -\frac{1}{\omega_L} \langle A_L X, Y \rangle_R + \frac{2}{\omega_L} \langle A_L X, \partial_t \rangle_L \langle Y, \partial_t \rangle_L
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Por otro lado, usando la Proposición 3.1, tenemos

$$\frac{1}{\omega_L} \langle A_L X, Y \rangle_R = \frac{1}{\omega_L} \langle A_L X, Y \rangle_L + \frac{2}{\omega_L} \langle A_L X, \partial_t \rangle_L \langle Y, \partial_t \rangle_L, \tag{3.27}$$

y utilizando (3.27) en la última igualdad de (3.26) se tiene

$$\langle A_R X, Y \rangle_R = -\frac{1}{\omega_L} \langle A_L X, Y \rangle_L.$$

Para obtener (3.25) simplemente hay que partir de (3.24) y tener en cuenta que $\omega_R = \frac{1}{\omega_L}$. \square

3.3. Las curvaturas medias.

Una vez conocida la relación entre los operadores forma A_R y A_L , podemos estudiar qué relación existe entre las correspondientes funciones curvatura media.

Teorema 3.11. *Sea Σ^n una hipersuperficie no degenerada inmersa en \overline{M}_L^{n+1} con campo vectorial normal y unitario N_L tal que $\langle N_L, \partial_t \rangle_L \leq 0$. Sea N_R el único campo vectorial unitario y normal sobre Σ^n con respecto a la métrica producto riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ con $\langle N_R, \partial_t \rangle_R \geq 0$ y dado por (3.1). Entonces, las funciones curvaturas medias H_L y H_R dadas, respectivamente, por las métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$, están relacionadas por*

$$nH_L = -\frac{n\varepsilon}{\omega_R} H_R + \frac{2}{\omega_R^3} \langle A_R (\nabla^R h), \nabla^R h \rangle_R. \tag{3.28}$$

Equivalentemente,

$$nH_R = -\frac{n\varepsilon}{\omega_L} H_L - \frac{2\varepsilon}{\omega_L^3} \langle A_L (\nabla^L h), \nabla^L h \rangle_L. \tag{3.29}$$

Demostración. Como el operador A_R siempre es diagonalizable, fijemos un punto $p \in \Sigma^n$ y sea $\{E_1, \dots, E_n\}$ un referencial ortonormal en un entorno de $p \in \Sigma^n$ con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y tal que diagonaliza el operador forma A_R , es decir, tal que $A_R E_i = k_i^R E_i$. para todo $1 \leq i \leq n$. Entonces, tomando $X = E_i$ en la expresión del Teorema 3.9, llegamos a

$$\begin{aligned} A_L E_i &= -\frac{1}{\omega_R} A_R E_i + \frac{2\varepsilon}{\omega_R^3} \langle A_R \nabla^R h, E_i \rangle_R \nabla^R h \\ &= -\frac{k_i^R}{\omega_R} E_i + \frac{2\varepsilon k_i^R}{\omega_R^3} \langle E_i, \nabla^R h \rangle_R \sum_{j=1}^n \langle \nabla^R h, E_j \rangle_R E_j. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Por otro lado, sabemos que $A_L E_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}^L E_j$ con los $a_{ij}^L = \langle A_L E_i, E_j \rangle_R$. Entonces, teniendo en cuenta (3.30), obtenemos

$$a_{ii}^L = -\frac{k_i^R}{\omega_R} + \frac{2\varepsilon k_i^R}{\omega_R^3} \langle E_i, \nabla^R h \rangle_R^2 \quad \text{y} \quad a_{ij}^L = \frac{2\varepsilon k_i^R}{\omega_R^3} \langle E_i, \nabla^R h \rangle_R \langle E_j, \nabla^R h \rangle_R \quad \text{si } i \neq j. \quad (3.31)$$

Ahora, observemos que, como $\nabla^R h = \sum_{i=1}^n \langle \nabla^R h, E_i \rangle_R E_i$, tenemos

$$A_R(\nabla^R h) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla^R h, E_i \rangle_R A_R E_i = \sum_{i=1}^n \langle \nabla^R h, E_i \rangle_R k_i^R E_i,$$

por lo que

$$\langle A_R(\nabla^R h), \nabla^R h \rangle_R = \sum_{i=1}^n k_i^R \langle E_i, \nabla^R h \rangle_R^2.$$

De esta manera, teniendo en cuenta que $\sum_{i=1}^n k_i^R = \text{tr}(A_R) = nH_R$, obtenemos

$$\begin{aligned} n\varepsilon H_L &= \text{tr}(A_L) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^L = -\frac{1}{\omega_R} \sum_{i=1}^n k_i^R + \frac{2\varepsilon}{\omega_R^3} \sum_{i=1}^n k_i^R \langle E_i, \nabla^R h \rangle_R^2 \\ &= -\frac{1}{\omega_R} nH_R + \frac{2\varepsilon}{\omega_R^3} \langle A_R(\nabla^R h), \nabla^R h \rangle_R, \end{aligned}$$

de donde

$$nH_L = -\frac{n\varepsilon}{\omega_R} H_R + \frac{2}{\omega_R^3} \langle A_R(\nabla^R h), \nabla^R h \rangle_R.$$

Para la obtener la relación (3.29), vamos a partir de (3.28) pero teniendo en cuenta que $\omega_R = \frac{1}{\omega_L}$ y el Lema 3.7. Así,

$$\begin{aligned} nH_R &= -n\varepsilon\omega_R H_L + \frac{2\varepsilon}{\omega_R^2} \langle A_R(\nabla^R h), \nabla^R h \rangle_R \\ &= -\frac{n\varepsilon}{\omega_L} H_L + \frac{2\varepsilon}{\omega_R^2} \left\langle A_R \left(-\frac{\varepsilon}{\omega_L^2} \nabla^L h \right), -\frac{\varepsilon}{\omega_L^2} \nabla^L h \right\rangle_R \\ &= -\frac{n\varepsilon}{\omega_L} H_L + \frac{2\varepsilon}{\omega_L^2} \langle A_R(\nabla^L h), \nabla^L h \rangle_R. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta el Corolario 3.10 llegamos al resultado que queríamos, es decir,

$$nH_R = -\frac{n\varepsilon}{\omega_L}H_L - \frac{2\varepsilon}{\omega_L^3}\langle A_L(\nabla^L h), \nabla^L h \rangle_L.$$

□

3.4. Aplicaciones.

El propósito de esta sección es dar algunas aplicaciones geométricas de los resultados obtenidos hasta el momento en este capítulo. Desde ahora, Σ^n siempre denotará una hipersuperficie no degenerada inmersa en el espacio producto lorentziano \overline{M}_L^{n+1} para la cual existe un campo vectorial normal y unitario N_L tal que $\langle N_L, \partial_t \rangle_L \leq 0$ y N_R denotará su único campo vectorial normal con respecto a la métrica producto riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ satisfaciendo $\langle N_R, \partial_t \rangle_R \geq 0$ y dado por (3.1).

El primer resultado de esta sección nos garantiza que si $H_R = H_L = 0$, entonces toda hipersuperficie de nivel de la función altura de Σ^n es una subvariedad minimal de $\overline{M}_\delta^{n+1}$.

Lema 3.12. *Si Σ^n es una hipersuperficie no degenerada en la variedad producto lorentziano \overline{M}_L^{n+1} que tiene curvatura media cero con respecto a ambas métricas ($H_R = H_L = 0$), entonces las hipersuperficies de nivel de su función altura son subvariedades minimales en \overline{M}_L^{n+1} (o en \overline{M}_R^{n+1}).*

Demostración. Comenzamos con el caso lorentziano, con el objetivo de demostrar que las hipersuperficies de nivel de la función altura son subvariedades minimales de \overline{M}_L^{n+1} . Para ello, consideremos el conjunto $\Omega = \{p \in \Sigma^n : \nabla^L h(p) \neq 0\}$ y, para cada $c \in \mathbb{R}$, definamos la hipersuperficie de nivel de la función altura,

$$S_c^{n-1} = \Omega \cap (M^n \times \{c\}) = \{p \in \Omega : h(p) = c\},$$

y denotemos por $\eta = \frac{\nabla^L h}{\|\nabla^L h\|_L}$ al campo vectorial normal de S_c^{n-1} en Σ^n .

Observemos que, usando la Proposición 3.6 y la expresión (3.10), se obtiene

$$\langle \nabla^L h, \nabla^L h \rangle_L = \langle -\partial_t^{\top L}, -\partial_t^{\top L} \rangle_L = -1 - \varepsilon \langle N_L, \partial_t \rangle_L^2.$$

En particular, si $\varepsilon = 1$ (es decir, si la hipersuperficie Σ^n es temporal), entonces

$$\langle \nabla^L h, \nabla^L h \rangle_L = -1 - \langle N_L, \partial_t \rangle_L^2 \leq -1 < 0$$

y por tanto $\Sigma^n = \Omega$ y $\langle \eta, \eta \rangle_L = -1$. Consecuentemente, S_c^{n-1} es una hipersuperficie espacial en Σ^n .

Sin embargo, si $\varepsilon = -1$ (es decir, si Σ^n es espacial), entonces

$$\langle \nabla^L h, \nabla^L h \rangle_L = -1 + \langle N_L, \partial_t \rangle_L^2 > 0$$

en Ω y $\langle \eta, \eta \rangle_L = 1$.

Como consecuencia, siempre tendremos $\langle \eta, \eta \rangle_L = -\varepsilon$ y S_c^{n-1} es una subvariedad espacial con codimensión dos en \overline{M}_L^{n+1} .

Ahora, vamos a ver que S_c^{n-1} es una subvariedad espacial minimal de \overline{M}_L^{n+1} . De hecho, denotando por ∇ la conexión de Levi-Civita de S_c^{n-1} , a partir de las fórmulas de Gauss y Weingarten (1.12) podemos escribir

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X^L Y + \varepsilon \langle A_L X, Y \rangle_L N_L = \nabla_X Y - \varepsilon \langle A_\eta X, Y \rangle_L \eta + \varepsilon \langle A_L X, Y \rangle_L N_L \quad (3.32)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(S_c)$.

Por otro lado, por la relación dada en (3.11) tenemos $\partial_t = -\nabla^L h + \varepsilon \langle N_L, \partial_t \rangle_L N_L$. Si derivamos con la conexión de Levi-Civita del ambiente, $\overline{\nabla}$, y usamos (1.10) obtenemos que, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$,

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X \partial_t &= -\overline{\nabla}_X (\nabla^L h) + \varepsilon \overline{\nabla}_X (\langle N_L, \partial_t \rangle_L N_L) \\ &= -\nabla_X^L (\nabla^L h) - \varepsilon \langle A_L X, \nabla^L h \rangle_L N_L + \varepsilon X (\langle N_L, \partial_t \rangle_L) N_L + \varepsilon \langle N_L, \partial_t \rangle_L \overline{\nabla}_X N_L \\ &= -\nabla_X^L (\nabla^L h) - \varepsilon \langle A_L X, \nabla^L h \rangle_L N_L + \varepsilon X (\langle N_L, \partial_t \rangle_L) N_L - \varepsilon \langle N_L, \partial_t \rangle_L A_L X. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Entonces, como al mismo tiempo sabemos que $\overline{\nabla}_X \partial_t = 0$, la parte tangente de la expresión (3.33) debe ser igual a cero, esto es,

$$\nabla_X^L (\nabla^L h) = -\varepsilon \langle N_L, \partial_t \rangle_L A_L X. \quad (3.34)$$

Más aún, y aunque no nos hace falta ahora mismo, tomando la parte normal y teniendo en cuenta que también debe ser igual a cero, se tiene

$$X (\langle N_L, \partial_t \rangle_L) = \langle A_L X, \nabla^L h \rangle_L,$$

expresión análoga a la que ya obtuvimos en (3.20).

Así, teniendo en cuenta (3.34), obtenemos

$$\begin{aligned} X \left(\frac{1}{\|\nabla^L h\|_L} \right) &= -\frac{X (\|\nabla^L h\|_L)}{\|\nabla^L h\|_L^2} = -\frac{X \left(\langle \nabla^L h, \nabla^L h \rangle_L^{\frac{1}{2}} \right)}{\|\nabla^L h\|_L^2} = -\frac{X (\langle \nabla^L h, \nabla^L h \rangle_L)}{2\|\nabla^L h\|_L^3} \\ &= -\frac{2\langle \nabla_X^L (\nabla^L h), \nabla^L h \rangle_L}{2\|\nabla^L h\|_L^3} = \frac{\varepsilon \langle N_L, \partial_t \rangle_L \langle A_L X, \nabla^L h \rangle_L}{\|\nabla^L h\|_L^3}. \end{aligned}$$

Por tanto, el operador forma A_η de S_c^{n-1} en Σ^n viene dado por

$$\begin{aligned} A_\eta X &= -\nabla_X^L \eta = -\nabla_X^L \left(\frac{\nabla^L h}{\|\nabla^L h\|_L} \right) = -X \left(\frac{1}{\|\nabla^L h\|_L} \right) \nabla^L h - \frac{1}{\|\nabla^L h\|_L} \nabla_X^L (\nabla^L h) \\ &= -\frac{\varepsilon \langle N_L, \partial_t \rangle_L \langle A_L X, \nabla^L h \rangle_L}{\|\nabla^L h\|_L^3} \nabla^L h + \frac{\varepsilon \langle N_L, \partial_t \rangle_L A_L X}{\|\nabla^L h\|_L} \\ &= \frac{\varepsilon \langle N_L, \partial_t \rangle_L}{\|\nabla^L h\|_L} \left(-\frac{\langle A_L X, \nabla^L h \rangle_L}{\|\nabla^L h\|_L^2} \nabla^L h + A_L X \right) \\ &= \frac{\varepsilon \langle N_L, \partial_t \rangle_L}{\|\nabla^L h\|_L} (-\langle A_L X, \eta \rangle_L \eta + A_L X), \end{aligned} \quad (3.35)$$

y consecuentemente, a partir de (3.32) y (3.35), para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(S_c)$, la segunda forma fundamental $\alpha_L : \mathfrak{X}(S_c) \times \mathfrak{X}(S_c) \rightarrow \mathfrak{X}(S_c)^\perp$ de S_c^{n-1} en \overline{M}_L^{n+1} es la siguiente:

$$\begin{aligned} \alpha_L(X, Y) &= -\varepsilon \langle A_\eta X, Y \rangle_L \eta + \varepsilon \langle A_L X, Y \rangle_L N_L \\ &= -\frac{\langle N_L, \partial_t \rangle_L}{\|\nabla^L h\|_L} \left(-\langle A_L X, \eta \rangle_L \langle \eta, Y \rangle_L + \langle A_L X, Y \rangle_L \right) \eta + \varepsilon \langle A_L X, Y \rangle_L N_L \\ &= -\frac{\langle N_L, \partial_t \rangle_L}{\|\nabla^L h\|_L} \langle A_L X, Y \rangle_L \eta + \varepsilon \langle A_L X, Y \rangle_L N_L \\ &= -\langle A_L X, Y \rangle_L \left(\frac{\langle N_L, \partial_t \rangle_L}{\|\nabla^L h\|_L} \eta - \varepsilon N_L \right). \end{aligned}$$

Sea $\{E_1, \dots, E_{n-1}, E_n = \eta\}$ un referencial ortonormal de Σ^n adaptado a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ con E_1, \dots, E_{n-1} tangentes a S_c^{n-1} . Denotando por \mathcal{H}_L^c el campo de vectores curvatura media de S_c^{n-1} en \overline{M}_L^{n+1} , podemos obtener la siguiente fórmula.

$$(n-1)\mathcal{H}_L^c = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_L(E_i, E_i) = -\sum_{i=1}^{n-1} \langle A_L E_i, E_i \rangle_L \left(\frac{\langle N_L, \partial_t \rangle_L}{\|\nabla^L h\|_L} \eta - \varepsilon N_L \right). \quad (3.36)$$

Ahora, puesto que Σ^n tiene curvatura media cero con respecto a ambas métricas, del Teorema 3.11 obtenemos que $\langle A_L(\nabla^L h), \nabla^L h \rangle_L = 0$. Entonces, sumando y restando el término

$$\langle A_L \eta, \eta \rangle_L \left(\frac{\langle N_L, \partial_t \rangle_L}{\|\nabla^L h\|_L} \eta - \varepsilon N_L \right) = 0$$

a la ecuación (3.36), obtenemos

$$(n-1)\mathcal{H}_L^c = -\sum_{i=1}^n \langle A_L E_i, E_i \rangle_L \left(\frac{\langle N_L, \partial_t \rangle_L}{\|\nabla^L h\|_L} \eta - \varepsilon N_L \right) = -n\varepsilon H_L \left(\frac{\langle N_L, \partial_t \rangle_L}{\|\nabla^L h\|_L} \eta - \varepsilon N_L \right) = 0,$$

por lo que las hipersuperficies de nivel de la función altura son subvariedades espaciales minimales en \overline{M}_L^{n+1} .

A continuación, vamos a considerar en \overline{M}_R^{n+1} el conjunto $\widehat{\Omega} = \{p \in \Sigma^n : \nabla^R h(p) \neq 0\}$. Sin embargo, si tenemos en cuenta el Lema 3.12, nos damos cuenta de que, en realidad, $\widehat{\Omega} = \Omega$. Así, para cada $c \in \mathbb{R}$, las hipersuperficies de nivel S_c^{n-1} serán las definidas en el caso anterior pero ahora el campo vectorial normal será de la forma $\widehat{\eta} = \frac{\nabla^R h}{\|\nabla^R h\|_R}$.

Entonces, a partir de las fórmulas de Gauss y Weingarten (1.12) podemos escribir

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X^R Y + \langle A_R X, Y \rangle_R N_R = \nabla_X Y + \langle A_{\widehat{\eta}} X, Y \rangle_R \widehat{\eta} + \langle A_R X, Y \rangle_R N_R \quad (3.37)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(S_c)$.

Por otro lado, un cálculo similar al del caso anterior teniendo en cuenta (3.11) y (1.12) nos lleva a que, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$,

$$\overline{\nabla}_X \partial_t = \nabla_X^R (\nabla^R h) + \langle A_R X, \nabla^R h \rangle_R N_R + X(\langle N_R, \partial_t \rangle_R) N_R - \langle N_R, \partial_t \rangle_R A_R X.$$

Entonces, como $\bar{\nabla}_X \partial_t = 0$, igualando partes tangentes obtenemos

$$\nabla_X^R (\nabla^R h) = \langle N_R, \partial_t \rangle_R A_R X. \quad (3.38)$$

Así, teniendo en cuenta (3.38), obtenemos

$$X \left(\frac{1}{\|\nabla^R h\|_R} \right) = -\frac{X(\langle \nabla^R h, \nabla^R h \rangle_R)}{2\|\nabla^R h\|_R^3} = -\frac{2\langle \nabla_X^R (\nabla^R h), \nabla^R h \rangle_R}{2\|\nabla^R h\|_R^3} = \frac{\langle N_R, \partial_t \rangle_R \langle A_R X, \nabla^R h \rangle_R}{\|\nabla^R h\|_R^3}.$$

Por tanto, el operador forma $A_{\hat{\eta}}$ de S_c^{n-1} en Σ^n viene dado por

$$\begin{aligned} A_{\hat{\eta}} X &= -\nabla_X^R \hat{\eta} = -X \left(\frac{1}{\|\nabla^R h\|_R} \right) \nabla^R h - \frac{1}{\|\nabla^R h\|_R} \nabla_X^R (\nabla^R h) \\ &= \frac{\langle N_R, \partial_t \rangle_R}{\|\nabla^R h\|_R} (\langle A_R X, \hat{\eta} \rangle_R \hat{\eta} - A_R X), \end{aligned} \quad (3.39)$$

y consecuentemente, a partir de (3.37) y (3.39), para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(S_c)$, la segunda forma fundamental $\alpha_R : \mathfrak{X}(S_c) \times \mathfrak{X}(S_c) \rightarrow \mathfrak{X}(S_c)^\perp$ de S_c^{n-1} en \bar{M}_R^{n+1} es la siguiente:

$$\alpha_R(X, Y) = \langle A_{\hat{\eta}} X, Y \rangle_R \hat{\eta} + \langle A_R X, Y \rangle_R N_R = -\langle A_R X, Y \rangle_R \left(\frac{\langle N_R, \partial_t \rangle_R}{\|\nabla^R h\|_R} \hat{\eta} + N_R \right).$$

Sea ahora $\{E_1, \dots, E_{n-1}, E_n = \hat{\eta}\}$ un referencial ortonormal de Σ^n adaptado a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ con E_1, \dots, E_{n-1} tangentes a S_c^{n-1} . Denotando por \mathcal{H}_R^c el campo de vectores curvatura media de S_c^{n-1} en \bar{M}_R^{n+1} , obtenemos

$$(n-1)\mathcal{H}_R^c = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_R(E_i, E_i) = -\sum_{i=1}^{n-1} \langle A_R E_i, E_i \rangle_R \left(\frac{\langle N_R, \partial_t \rangle_R}{\|\nabla^R h\|_R} \hat{\eta} + N_R \right).$$

Entonces, teniendo en cuenta el Teorema 3.11 y procediendo de forma análoga al caso anterior, llegamos a

$$(n-1)\mathcal{H}_R^c = -\sum_{i=1}^n \langle A_R E_i, E_i \rangle_R \left(\frac{\langle N_R, \partial_t \rangle_R}{\|\nabla^R h\|_R} \hat{\eta} + N_R \right) = -nH_R \left(\frac{\langle N_R, \partial_t \rangle_R}{\|\nabla^R h\|_R} \hat{\eta} + N_R \right) = 0,$$

por lo que las hipersuperficies de nivel de la función altura también son subvariedades minimales en \bar{M}_R^{n+1} . \square

A partir del Lema 3.12 concluimos lo siguiente.

Teorema 3.13. *Sea Σ^n una hipersuperficie no degenerada en la variedad producto lorentziano \bar{M}_L^{n+1} y que tiene curvatura media cero con respecto a ambas métricas ($H_R = H_L = 0$).*

- a) *Si Σ^n es temporal, entonces está foliada por hipersuperficies espaciales que son subvariedades minimales de \bar{M}_L^{n+1} .*

b) Si Σ^n es espacial y no es un slice, entonces está foliada por hipersuperficies que son subvariedades minimales de \overline{M}_L^{n+1} .

Demostración. Comencemos por el caso en el que Σ^n es temporal, es decir, cuando $\varepsilon = 1$. En este caso, retomando la notación usada en la demostración del Lema 3.12, tenemos que $\Omega = \Sigma^n$, porque $\nabla^L h(p) \neq 0$ y $\langle \nabla^L h(p), \nabla^L h(p) \rangle_L < 0$ para todo $p \in \Sigma^n$. Entonces, para cada $c \in \mathbb{R}$, el conjunto $S_c = \{p \in \Sigma : h(p) = c\}$ es un conjunto vacío o es una hipersuperficie espacial de Σ^n con $\mathcal{H}_L^c = 0$ (donde recordemos que \mathcal{H}_L^c denota el campo de vectores curvatura media de S_c^{n-1} en \overline{M}_L^{n+1}). Por tanto, Σ^n está foliada por hipersuperficies espaciales que son subvariedades minimales de \overline{M}_L^{n+1} .

Por otro lado, si consideramos el caso en el que Σ^n es espacial, es decir, cuando $\varepsilon = -1$, tenemos que el conjunto $\Sigma^n \setminus \Omega = \{p \in \Sigma : \nabla^L h(p) = 0\}$ puede ser no vacío, pero como Σ^n no es un slice entonces debe ser necesariamente $\text{int}(\Sigma \setminus \Omega) = \emptyset$. Esto es debido a que si $\text{int}(\Sigma \setminus \Omega) \neq \emptyset$ entonces tendríamos que h sería constante en $\text{int}(\Sigma \setminus \Omega)$ y por lo tanto $\text{int}(\Sigma \setminus \Omega)$ sería un trozo de slice. Por tanto, como $H_L = 0$, Σ^n sería una hipersuperficie maximal de \overline{M}_L^{n+1} que coincide con un slice en un abierto y, por unicidad, Σ debería ser toda ella un slice. En definitiva, $\text{int}(\Sigma \setminus \Omega) = \emptyset$. Ahora, por el mismo razonamiento que en el caso temporal, Σ está foliada por las hipersuperficies S_c que son subvariedades minimales en \overline{M}_L^{n+1} . \square

Recordemos que se dice que una hipersuperficie es *reglada* si existe una foliación por hipersuperficies que son subvariedades totalmente geodésicas del espacio ambiente (véase la introducción de [BDJ]). En este contexto, el siguiente resultado nos da una caracterización en dimensión dos.

Corolario 3.14. *Si Σ^2 es una superficie no degenerada (que no es un slice) en la variedad producto lorentziano \overline{M}_L^3 y que tiene curvatura media cero con respecto a ambas métricas, entonces está reglada por geodésicas espaciales.*

Demostración. Por el Teorema 3.13, tenemos que Σ^2 está foliada por subvariedades minimales de \overline{M}_L^3 , pero en dimensión dos estas subvariedades son curvas en Σ^2 . Por tanto, como además son minimales, estas curvas son geodésicas en \overline{M}_L^3 y consecuentemente Σ^2 es reglada. \square

Ejemplo 3.15 (Slices y cilindros sobre geodésicas en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}_1$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$). El ejemplo más simple de superficies minimales y maximales en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}_1$ y en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ son los slices espaciales, los cuales se obtienen haciendo que la función altura h sea constante. Otro ejemplo es el cilindro sobre una geodésica, que no es más que la superficie parametrizada por $\phi(s, t) = (\gamma(s), t)$, donde γ es una geodésica en \mathbb{S}^2 o \mathbb{H}^2 .

Ejemplo 3.16 (Helicoides en \mathbb{R}^3 y \mathbb{L}^3). El helicoides clásico parametrizado por

$$\phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av), \quad a > 0, \quad (3.40)$$

es la única superficie completa en \mathbb{R}^3 reglada y minimal (véase [Cat]).

Veamos que (3.40) también satisface $H_L = 0$ como una superficie de \mathbb{L}^3 . Con este fin, comencemos por calcular el vector normal con la métrica lorentziana $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$. Para ello, observemos primero que

$$\phi_u(u, v) = (\cos v, \sin v, 0) \quad \text{y} \quad \phi_v(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, a),$$

por lo que

$$\phi_u \wedge \phi_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & -\vec{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & a \end{vmatrix} = (a \sin v, -a \cos v, -u)$$

y también

$$\|\phi_u \wedge \phi_v\|_L = \sqrt{|a^2 \sin^2 v + a^2 \cos^2 v - u^2|} = \sqrt{|a^2 - u^2|}.$$

Entonces, el campo vectorial normal es de la forma

$$N_L = \frac{1}{\sqrt{|a^2 - u^2|}} (a \sin v, -a \cos v, -u).$$

Por otro lado, los coeficientes de la primera forma fundamental son los siguientes:

$$E = 1, \quad F = 0 \quad \text{y} \quad G = u^2 - a^2.$$

En cuanto a los coeficientes de la segunda forma fundamental, primero observemos que

$$\phi_{uu}(u, v) = (0, 0, 0), \quad \phi_{uv}(u, v) = (-\sin v, \cos v, 0) \quad \text{y} \quad \phi_{vv}(u, v) = (-u \cos v, -u \sin v, 0).$$

Por tanto,

$$e = 0, \quad f = -\frac{a}{\sqrt{|a^2 - u^2|}} \quad \text{y} \quad g = 0.$$

Teniendo todo esto en cuenta, obtenemos que el helicoides verifica

$$H_L = \frac{\varepsilon (eG - 2fF + gE)}{2(EG - F^2)} = 0.$$

Más aún, obsérvese que las regiones abiertas de (3.40) en las que $u > a > 0$ o $u < -a < 0$ son maximales (es decir, espaciales con $H_L = 0$), mientras que la región abierta en la que $-a < u < a$ es minimal (esto es, temporal con $H_L = 0$).

Ejemplo 3.17 (Helicoides en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}_1$). Consideremos \mathbb{R}^4 con las coordenadas (x_1, x_2, x_3, t) y equipado con la métrica riemanniana estándar $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dt^2$. Si vemos $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ como la hipersuperficie de \mathbb{R}^4 que satisface la ecuación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, de acuerdo con [Ma], la superficie reglada parametrizada por

$$\phi(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v, bu), \quad b > 0, \quad (3.41)$$

es un helicoide en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ con $H_R = 0$. Vamos a comprobar que, cuando vemos esta misma hipersuperficie en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}_1$ con la métrica $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dt^2$ de \mathbb{R}_1^4 , también tenemos $H_L = 0$.

Comencemos observando que los vectores tangentes son de la siguiente forma:

$$\phi_u(u, v) = (-\sen u \cos v, \cos u \cos v, 0, b) \quad \text{y} \quad \phi_v(u, v) = (-\cos u \sen v, -\sen u \sen v, \cos v, 0).$$

El campo vectorial normal de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}_1$ en \mathbb{R}_1^4 no es más que el vector posición pero tomando la última componente nula. Es decir, es de la forma

$$\eta(u, v) = (\cos u \cos v, \sen u \cos v, \sen v, 0).$$

Entonces, el campo vectorial normal N_L de $\phi(u, v)$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}_1$ viene dado por

$$N_L(u, v) = \frac{1}{\sqrt{|b^2 - \cos^2 v|}} (-b \sen u, b \cos u, 0, \cos v),$$

puesto que

$$\phi_u \wedge \phi_v \wedge \eta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & -\vec{l} \\ -\sen u \cos v & \cos u \cos v & 0 & b \\ -\cos u \sen v & -\sen u \sen v & \cos v & 0 \\ \cos u \cos v & \sen u \cos v & \sen v & 0 \end{vmatrix} = (-b \sen u, b \cos u, 0, \cos v).$$

Los coeficientes de la primera forma fundamental son los siguientes:

$$E = \cos^2 v - b^2, \quad F = 0 \quad \text{y} \quad G = 1.$$

En cuanto a los coeficientes de la segunda forma fundamental, antes necesitamos observar que

$$\begin{aligned} \phi_{uu}(u, v) &= (-\cos u \cos v, -\sen u \cos v, 0, 0), \\ \phi_{uv}(u, v) &= (\sen u \sen v, -\cos u \sen v, 0, 0) \quad \text{y} \\ \phi_{vv}(u, v) &= (-\cos u \cos v, -\sen u \cos v, -\sen v, 0). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$e = 0, \quad f = -\frac{b \sen v}{\sqrt{|b^2 - \cos^2 v|}} \quad \text{y} \quad g = 0.$$

Finalmente,

$$H_L = \frac{\varepsilon (eG - 2fF + gE)}{2(EG - F^2)} = 0.$$

Más aún, obsérvese que la región de (3.41) en la que $\cos v > b > 0$ o $\cos v < -b < 0$ es maximal mientras que cuando $-b < \cos v < b$ es minimal.

Ejemplo 3.18 (Helicoides en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$). Consideremos ahora $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ como la hipersuperficie espacial embebida en el espacio de Lorentz-Minkowski $\mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}$ que verifica la ecuación $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1$ con $x_1 > 0$, donde $\mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}$ está equipado con la métrica $-dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dt^2$. Por otro lado, también podemos ver $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ como una hipersuperficie embebida en el espacio pseudo-euclidiano $\mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1$ dotado con la métrica pseudo-euclidiana $-dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dt^2$. De acuerdo con las Observaciones 3.6 y 4.6 de [KKSJ] (véase también [Ma]), las siguientes superficies en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ son regladas y tienen $H_R = 0$. Nosotros vamos a ver que, además, vistas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$, verifican $H_L = 0$.

a) El helicoides elíptico parametrizado por

$$\phi(u, v) = (\cosh v, \cos u \sinh v, \sin u \sinh v, bu), \quad b > 0. \quad (3.42)$$

Los vectores tangentes son de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \phi_u(u, v) &= (0, -\sin u \sinh v, \cos u \sinh v, b) \quad \text{y} \\ \phi_v(u, v) &= (\sinh v, \cos u \cosh v, \sin u \cosh v, 0). \end{aligned}$$

En este caso, el campo vectorial normal de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ en $\mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1$ es de la forma

$$\eta(u, v) = (\cosh v, \cos u \sinh v, \sin u \sinh v, 0).$$

Entonces, un campo vectorial normal de $\phi(u, v)$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ viene dado por

$$\phi_u \wedge \phi_v \wedge \eta = \begin{vmatrix} -\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & -\vec{l} \\ 0 & -\sin u \sinh v & \cos u \sinh v & b \\ \sinh v & \cos u \cosh v & \sin u \cosh v & 0 \\ \cosh v & \cos u \sinh v & \sin u \sinh v & 0 \end{vmatrix} = (0, b \sin u, -b \cos u, -\sinh v),$$

por lo que

$$N_L(u, v) = \frac{1}{\sqrt{|b^2 - \sinh v|}} (0, b \sin u, -b \cos u, -\sinh v).$$

En este caso, si tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned} \phi_{uu}(u, v) &= (0, -\cos u \sinh v, -\sin u \sinh v, 0), \\ \phi_{uv}(u, v) &= (0, -\sin u \cosh v, \cos u \cosh v, 0) \quad \text{y} \\ \phi_{vv}(u, v) &= (\cosh v, \cos u \sinh v, \sin u \sinh v, 0), \end{aligned}$$

los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental son los siguientes:

$$\begin{aligned} E &= \sinh^2 v - b^2, & F &= 0, & G &= 1, \\ e &= 0, & f &= \frac{-b \cosh v}{\sqrt{|b^2 - \sinh v|}} & \text{y} & g = 0. \end{aligned}$$

Así que, como se afirmaba,

$$H_L = \frac{\varepsilon(eG - 2fF + gE)}{2(EG - F^2)} = 0.$$

Obsérvese también que la región de (3.42) en la que $\sinh v > b > 0$ o $\sinh v < -b < 0$ es maximal, mientras que la región en la que $-b < \sinh v < b$ es minimal.

b) El helicoides parabólico parametrizado por

$$\phi(u, v) = \left(\cosh v + \frac{u^2 e^{-v}}{2}, \sinh v + \frac{u^2 e^{-v}}{2}, ue^{-v}, bu \right), \quad b > 0. \quad (3.43)$$

En este caso, para calcular el vector normal, deberemos tener en cuenta que

$$\begin{aligned} \phi_u(u, v) &= (ue^{-v}, ue^{-v}, e^{-v}, b), \\ \phi_v(u, v) &= \left(\sinh v - \frac{u^2 e^{-v}}{2}, \cosh v - \frac{u^2 e^{-v}}{2}, -ue^{-v}, 0 \right), \quad y \\ \eta(u, v) &= \left(\cosh v + \frac{u^2 e^{-v}}{2}, \sinh v + \frac{u^2 e^{-v}}{2}, ue^{-v}, 0 \right). \end{aligned}$$

Entonces, un campo vectorial normal de $\phi(u, v)$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ viene dado por

$$\phi_u \wedge \phi_v \wedge \eta = - (bue^{-v} (\cosh v + \sinh v), bue^{-v} (\sinh v + \cosh v), b, e^{-v})$$

y por tanto

$$N_L(u, v) = - \frac{1}{\sqrt{|b^2 - e^{-2v}|}} (bue^{-v} (\sinh v + \cosh v), bue^{-v} (\sinh v + \cosh v), b, e^{-v}).$$

Ahora, si tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned} \phi_{uu}(u, v) &= (e^{-v}, e^{-v}, 0, 0), \\ \phi_{uv}(u, v) &= (-ue^{-v}, -ue^{-v}, -e^{-v}, 0) \quad y \\ \phi_{vv}(u, v) &= \left(\cosh v + \frac{u^2 e^{-v}}{2}, \sinh v + \frac{u^2 e^{-v}}{2}, ue^{-v}, 0 \right), \end{aligned}$$

entonces los coeficientes son de la forma

$$\begin{aligned} E &= e^{-2v} - b^2, & F &= 0, & G &= 1 - u^2 e^{-2v}, \\ e &= 0, & f &= -be^{-v} & y & g = 0. \end{aligned}$$

Así que, de nuevo,

$$H_L = \frac{\varepsilon(eG - 2fF + gE)}{2(EG - F^2)} = 0.$$

Además, obsérvese que la región de (3.43) en la que $e^{-v} > b > 0$ es maximal, mientras que la región en la que $e^{-v} < b$ es minimal.

c) El helicoide hiperbólico parametrizado por

$$\phi(u, v) = (\cosh u \cosh v, \sinh u \cosh v, \sinh v, bu), \quad b > 0. \quad (3.44)$$

El campo vectorial normal de este helicoide en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$ viene dado por

$$N_L(u, v) = \frac{1}{\sqrt{|b^2 - \cosh^2 v|}} (b \sinh u, b \cosh u, 0, \cosh v),$$

ya que

$$\begin{aligned} \phi_u(u, v) &= (\sinh u \cosh v, \cosh u \cosh v, 0, b), \\ \phi_v(u, v) &= (\cosh u \sinh v, \sinh u \sinh v, \cosh v, 0) \quad \text{y} \\ \eta(u, v) &= (\cosh u \cosh v, \sinh u \cosh v, \sinh v, 0), \end{aligned}$$

y por tanto

$$\phi_u \wedge \phi_v \wedge \eta = (b \sinh u, b \cosh u, 0, \cosh v).$$

En este caso, los coeficientes son:

$$\begin{aligned} E &= \cosh^2 v - b^2, & F &= 0, & G &= 1, \\ e &= 0, & f &= \frac{-b \sinh v}{\sqrt{|b^2 - \cosh^2 v|}} & \text{y} & g = 0, \end{aligned}$$

puesto que

$$\begin{aligned} \phi_{uu}(u, v) &= (\cosh u \cosh v, \sinh u \cosh v, 0, 0), \\ \phi_{uv}(u, v) &= (\sinh u \sinh v, \cosh u \sinh v, 0, 0) \quad \text{y} \\ \phi_{vv}(u, v) &= (\cosh u \cosh v, \sinh u \cosh v, \sinh v, 0). \end{aligned}$$

Entonces,

$$H_L = \frac{\varepsilon(eG - 2fF + gE)}{2(EG - F^2)} = 0.$$

Obsérvese que, en esta hipersuperficie, la región de (3.44) en la que $\cosh v > b > 0$ es maximal y que la región en la que $\cosh v < b$ es minimal.

Teniendo en cuenta los ejemplos anteriores, vamos a considerar el espacio producto lorentziano $\overline{M}_L^3 = M^2(c) \times \mathbb{R}_1$, donde $M^2(c)$ es el plano euclídeo \mathbb{R}^2 cuando $c = 0$, la esfera euclídea cuando $c = 1$ y el plano hiperbólico cuando $c = -1$. A partir del Corolario 3.14 obtenemos la siguiente consecuencia.

Teorema 3.19. *Los trozos abiertos de slices, cilindros sobre geodésicas y helicoides son las únicas superficies no degeneradas en el espacio producto lorentziano $\overline{M}_L^3 = M^2(c) \times \mathbb{R}_1$ que tienen curvatura media igual a cero con respecto ambas métricas ($H_R = H_L = 0$).*

Demostración. Sea Σ^2 una superficie no degenerada tal que $H_R = H_L = 0$ en $M^2(c) \times \mathbb{R}_1$ con $c = 0, 1, -1$. Si no es un slice, por el Corolario 3.14 debe ser una superficie reglada.

- Cuando $c = 0$, puesto que $H_R = 0$, usamos el resultado clásico debido a Catalan (véase [Cat]) para concluir que Σ^2 es isométrica a un trozo de plano o a un helicoide.
- Por otro lado, para $c = 1$, puesto que $H_R = 0$ podemos aplicar el Teorema 3.4 de [KKSJ] para obtener que Σ^2 es isométrica a un trozo de cilindro sobre una geodésica o a un helicoide.
- Finalmente, si $c = -1$, como $H_R = 0$ podemos aplicar el Teorema 4.4 de [KKSJ] y obtenemos que Σ^2 es isométrica a un trozo de un cilindro sobre una geodésica o a un helicoide.

□

Observación 3.20. El resultado del Teorema 3.19 puede verse como una aproximación alternativa y unificada de los resultados previamente obtenidos por Kobayashi (véase [Ko]) para el caso en el que $c = 0$ y las superficies son espaciales, y los obtenidos por Kim et al. (véase [KKSJ]) para el caso en el que $c \neq 0$ y las superficies son espaciales. En realidad, en esta aproximación extendida se consideran, en vez de superficies espaciales, superficies no degeneradas, incluyendo tanto las superficies espaciales como las temporales. Más aún, la aproximación de esta tesis es paramétrica, mientras que la suya es no paramétrica y está basada en la ecuación diferencial de la curvatura media para grafos espaciales.

3.5. Las curvaturas de Gauss.

Otra aplicación del método usado en este capítulo es la relativa al estudio de la curvatura de Gauss de superficies no degeneradas en el espacio producto $\overline{M}^3 = M^2 \times \mathbb{R}$ dotado con las métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$. A partir de ahora, \overline{K}_R y \overline{K}_L denotarán la curvatura seccional de \overline{M}^3 relativa al plano tangente a Σ^2 con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ o a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$, respectivamente. Si recordamos la notación que se ha usado a lo largo de esta tesis, vamos a denotar $\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta = \langle \cdot, \cdot \rangle_M + \delta dt^2$ con $\delta = \langle \partial_t, \partial_t \rangle = \pm 1$. Por tanto, si $\delta = 1$ tendremos $\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta = \langle \cdot, \cdot \rangle_R$, y si $\delta = -1$ tendremos $\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta = \langle \cdot, \cdot \rangle_L$.

Teniendo en cuenta la Proposición 7.42 de [ON], el tensor curvatura de Riemann de un espacio producto $\overline{M}^3 = M^2 \times \mathbb{R}$ con el tensor métrico $\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta$ viene dado por

$$\begin{aligned} \overline{R}(X, Y)Z &= \kappa_M(\pi_M) (\langle X, Z \rangle_\delta Y - \langle Y, Z \rangle_\delta X) - \delta \kappa_M(\pi_M) \langle Z, \partial_t \rangle_\delta (\langle X, \partial_t \rangle_\delta Y - \langle Y, \partial_t \rangle_\delta X) \\ &\quad - \delta \kappa_M(\pi_M) (\langle X, Z \rangle_\delta \langle Y, \partial_t \rangle_\delta - \langle Y, Z \rangle_\delta \langle X, \partial_t \rangle_\delta) \partial_t, \end{aligned} \quad (3.45)$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, donde κ_M es la función curvatura de Gauss de M^2 . Entonces, si $\{E_1, E_2\}$ es un referencial local y ortonormal de Σ^2 con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$, teniendo en cuenta (3.45)

y (3.10) obtenemos

$$\begin{aligned}\bar{K}_L &= \langle \bar{R}(E_1, E_2)E_1, E_2 \rangle_L = \kappa_M + \kappa_M \langle E_1, \partial_t \rangle_L^2 + \kappa_M \langle E_2, \partial_t \rangle_L^2 \\ &= \kappa_M \left(1 + \langle \partial_t^{\top L}, \partial_t^{\top L} \rangle_L \right) = -\varepsilon \kappa_M \langle N_L, \partial_t \rangle_L^2.\end{aligned}\quad (3.46)$$

De forma análoga, si $\{E_1, E_2\}$ es un referencial local y ortonormal de Σ^2 con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$, a partir de (3.45) y (3.9) obtenemos

$$\begin{aligned}\bar{K}_R &= \langle \bar{R}(E_1, E_2)E_1, E_2 \rangle_R = \kappa_M - \kappa_M \langle E_1, \partial_t \rangle_R^2 - \kappa_M \langle E_2, \partial_t \rangle_R^2 \\ &= \kappa_M \left(1 - \langle \partial_t^{\top R}, \partial_t^{\top R} \rangle_R \right) = \kappa_M \langle N_R, \partial_t \rangle_R^2.\end{aligned}\quad (3.47)$$

Por tanto, de (3.13), (3.46) y (3.47), obtenemos la siguiente relación entre las curvaturas seccionales del espacio producto con respecto a ambas métricas:

$$\bar{K}_R = \kappa_M \langle N_R, \partial_t \rangle_R^2 = \kappa_M \cdot \frac{1}{\omega_L^2} \langle N_L, \partial_t \rangle_L^2 = -\frac{\varepsilon}{\omega_L^2} \bar{K}_L.\quad (3.48)$$

Ahora, denotando por K_R la curvatura de Gauss de Σ^2 con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y por K_L la curvatura de Gauss con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$, el siguiente resultado garantiza una relación entre ellas.

Proposición 3.21. *Sea Σ^2 una superficie no degenerada inmersa en el espacio producto lorentziano \bar{M}_L^3 . Entonces, las curvaturas de Gauss están relacionadas de la siguiente forma:*

$$K_R = -\frac{1}{\omega_L^4} K_L + \frac{(\omega_L^2 - \varepsilon)^2}{2\omega_L^4} \kappa_M.$$

Demostración. Primero vamos a demostrar la igualdad

$$\det(A_R) = -\varepsilon \omega_R^4 \det(A_L).$$

Para ello, de (3.31) sabemos que

$$a_{ii}^L = -\frac{k_i^R}{\omega_R} + \frac{2\varepsilon k_i^R}{\omega_R^3} \langle E_i, \nabla^R h \rangle_R^2 \quad \text{y} \quad a_{ij}^L = \frac{2\varepsilon k_i^R}{\omega_R^3} \langle E_i, \nabla^R h \rangle_R \langle E_j, \nabla^R h \rangle_R \quad \text{si } i \neq j,$$

donde $\{E_1, E_2\}$ es un referencial ortonormal de Σ^2 adaptado a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y tal que $A_R E_i = k_i^R E_i$. Entonces, al calcular el determinante del operador forma A_L obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\det(A_L) &= \begin{vmatrix} -\frac{k_1^R}{\omega_R} + \frac{2\varepsilon k_1^R}{\omega_R^3} \langle E_1, \nabla^R h \rangle_R^2 & \frac{2\varepsilon k_1^R}{\omega_R^3} \langle E_1, \nabla^R h \rangle_R \langle E_2, \nabla^R h \rangle_R \\ \frac{2\varepsilon k_2^R}{\omega_R^3} \langle E_2, \nabla^R h \rangle_R \langle E_1, \nabla^R h \rangle_R & -\frac{k_2^R}{\omega_R} + \frac{2\varepsilon k_2^R}{\omega_R^3} \langle E_2, \nabla^R h \rangle_R^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{k_1^R k_2^R}{\omega_R^2} - \frac{2\varepsilon k_1^R k_2^R}{\omega_R^4} \langle E_2, \nabla^R h \rangle_R^2 - \frac{2\varepsilon k_1^R k_2^R}{\omega_R^4} \langle E_1, \nabla^R h \rangle_R^2 \\ &= \frac{k_1^R k_2^R}{\omega_R^2} - \frac{2\varepsilon k_1^R k_2^R}{\omega_R^4} (\langle E_2, \nabla^R h \rangle_R^2 + \langle E_1, \nabla^R h \rangle_R^2) \\ &= \frac{1}{\omega_R^2} \det(A_R) - \frac{2\varepsilon}{\omega_R^4} \det(A_R) \|\nabla^R h\|_R^2.\end{aligned}$$

Por otro lado, (3.11) y el Lema 3.4 nos dan

$$2\varepsilon\|\nabla^R h\|_R^2 = 2\varepsilon - 2\varepsilon\langle N_R, \partial_t \rangle_R^2 = 2\varepsilon - 2\varepsilon \cdot \frac{\omega_L^2 - \varepsilon}{2\omega_L} = 2\varepsilon - \frac{\varepsilon\omega_L^2 - 1}{\omega_L^2} = \frac{\varepsilon\omega_L^2 + 1}{\omega_L^2},$$

así que

$$\begin{aligned} \det(A_L) &= \frac{1}{\omega_R^2} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{\omega_R^2} \|\nabla^R h\|_R^2 \right) \det(A_R) = \frac{1}{\omega_R^2} \left(1 - \frac{1}{\omega_R^2} \cdot \frac{\varepsilon\omega_L^2 + 1}{\omega_L^2} \right) \det(A_R) \\ &= \frac{1}{\omega_R^2} (-\varepsilon\omega_L^2) \det(A_R) = -\varepsilon\omega_L^4 \det(A_R). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Ahora, recordemos que la ecuación de Gauss de Σ^2 en \overline{M}^3 con respecto a ambas métricas viene dada por

$$K_R = \overline{K}_R + \det(A_R) \quad \text{y} \quad K_L = \overline{K}_L + \varepsilon \det(A_L). \quad (3.50)$$

Por tanto, combinando (3.48), (3.49) y (3.50), obtenemos

$$\begin{aligned} K_R &= -\frac{\varepsilon}{\omega_L^2} \overline{K}_L - \frac{\varepsilon}{\omega_L^4} \det(A_L) \\ &= -\frac{\varepsilon}{\omega_L^2} \overline{K}_L - \frac{1}{\omega_L^4} (K_L - \overline{K}_L) \\ &= -\frac{1}{\omega_L^4} K_L - \frac{\varepsilon}{\omega_L^4} (\omega_L^2 - \varepsilon) \overline{K}_L. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Por otro lado, de (3.46) y del Lema 3.4,

$$\overline{K}_L = -\varepsilon\kappa_M \langle N_L, \partial_t \rangle_L^2 = -\frac{\varepsilon(\omega_L^2 - \varepsilon)}{2} \kappa_M. \quad (3.52)$$

Por último, insertando (3.52) en (3.51) obtenemos lo que queríamos demostrar:

$$K_R = -\frac{1}{\omega_L^4} K_L + \frac{\varepsilon}{\omega_L^4} (\omega_L^2 - \varepsilon) \frac{\varepsilon(\omega_L^2 - \varepsilon)}{2} \kappa_M = -\frac{1}{\omega_L^4} K_L + \frac{(\omega_L^2 - \varepsilon)^2}{2\omega_L^4} \kappa_M.$$

□

De acuerdo con la Proposición 3.21, si se verifica $K_R = K_L = K$ (no necesariamente constante), entonces tenemos la siguiente igualdad:

$$K = \frac{(\omega_L^2 - \varepsilon)^2}{2(\omega_L^4 + 1)} \kappa_M. \quad (3.53)$$

En otras palabras, esto significa que en ese caso la curvatura de Gauss K de la superficie tiene el mismo signo que la curvatura de Gauss de la fibra. Este hecho da lugar a la siguiente consecuencia.

Teorema 3.22. *Los trozos de planos, conos, cilindros y superficies tangentes desarrollables son las únicas superficies no degeneradas en el espacio tridimensional de Lorentz-Minkowski que tienen la misma curvatura de Gauss (no necesariamente constante) con respecto a ambas métricas.*

Demostración. En este caso, tenemos $M^2 = \mathbb{R}^2$, por lo que $\kappa_M = 0$. Entonces, (3.53) implica que Σ debe ser una superficie llana en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 . Como es bien sabido, las superficies llanas en \mathbb{R}^3 están caracterizadas por planos, cilindros, conos y superficies tangentes desarrollables (véase [Spi]). Por *superficie tangente desarrollable* nos referimos a una superficie parametrizada por

$$\phi(s, t) = \gamma(s) + t\gamma'(s), \quad (s, t) \in I \times \mathbb{R},$$

con $t(\gamma''(s) \times \gamma'(s)) \neq (0, 0, 0)$ y siendo $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular. \square

Por otro lado, si $c \neq 0$ tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.23. *Las únicas superficies no degeneradas inmersas en el espacio producto lorentziano $\overline{M}_L^3 = M^2(c) \times \mathbb{R}$ y satisfaciendo $K_R = K_L = c \neq 0$ son los slices.*

Demostración. Puesto que $c \neq 0$ y $K_R = K_L = c$, de (3.53) obtenemos

$$2(\omega_L^4 + 1) = (\omega_L^2 - \varepsilon)^2,$$

de donde $\omega_L^4 + 1 + 2\varepsilon\omega_L^2 = 0$ y por tanto $(\omega_L^2 + \varepsilon)^2 = 0$. Entonces, obtenemos que $\varepsilon = -1$ y $\omega_L = 1$.

Ahora, sustituyendo en la definición de ω_L dada en (3.2), obtenemos:

$$1 = -1 + 2\langle N_L, \partial_t \rangle_L^2,$$

así que $\langle N_L, \partial_t \rangle_L^2 = 1$ y por tanto $N_L = \partial_t$.

Finalmente, teniendo en cuenta (3.11), llegamos a

$$\nabla^L h = -\partial_t + \varepsilon\langle N_L, \partial_t \rangle_L N_L = -N_L + \varepsilon \cdot \varepsilon N_L = 0.$$

Es decir, Σ^2 debe ser un slice de \overline{M}_L^3 . \square

Bibliografía

- [AAC1] E.M. Alarcón, A.L. Albuje y M. Caballero, *On the solutions to the $H_R = H_L$ hypersurface equation*, Proceedings Book of International Workshop on Theory of Submanifolds, 113-121, Istanbul Technical University, Turkey, 2016.
- [AAC2] E.M. Alarcón, A.L. Albuje y M. Caballero, *Spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski space with the same mean Riemannian and Lorentzian mean curvature*, Lorentzian geometry and related topics, 1-12, Springer Proc. Math. Stat., 211, Springer, Cham, 2017.
- [AC] A.L. Albuje y M. Caballero, *Geometric properties of surfaces with the same mean curvature in \mathbb{R}^3 and \mathbb{L}^3* , J. Math. Anal. Appl. **445** (2017), 1013-1024.
- [AAS] E.M. Alarcón, L.J. Alías y F. R. dos Santos, *A new approach to minimal and maximal hypersurfaces in product spaces*, Results Math. **74** (2019), Paper No. 116, 22 pp.
- [AA] J.A. Aledo y L.J. Alías, *On the curvatures of bounded complete spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski space*, Manuscripta Math. **101** (2000), 401-413.
- [ARS] L.J. Alías, A. Romero y M. Sánchez, *Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes*, Gen. Relativity Gravitation **27** (1995), 71-84.
- [BDJ] J.M. Barbosa, M. Dajczer y L.P. Jorge, *Minimal ruled submanifolds in spaces of constant curvature*, Indiana Univ. Math. J. **33** (1984), 531-547.
- [Ber] S.N. Bernstein, *Sur un théorème de géométrie et ses applications aux dérivées partielles du type elliptique*, Comm. Inst. Sci. Math. Mech. Univ. Kharkov **15** (1915), 38-45.
- [BGG] E. Bombieri, E. De Giorgi y E. Giusti, *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math. **7** (1969), 243-268.
- [Cal] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XV, Berkeley, Calif., 1968) pp. 223-230 Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.
- [Cat] E. Catalan, *Sur les surfaces réglées dont l'aire est un minimum*, J. Math. Pures Appl. **7** (1842), 203-211.

- [CY] S.Y. Cheng y S.T. Yau, *Maximal spacelike hypersurfaces in Lorentz-Minkowski space*, Ann. of Math. **104** (1976), 407-419.
- [Che] S.S. Chern, *On the curvatures of a piece of hypersurface in euclidean space*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **29** (1965), 77-91.
- [DFVV] F. Dillen, J. Fastenakels, J. Van der Veken y L. Vrancken, *Constant angle surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$* , Monatsh. Math. **152** (2007), 89-96.
- [DM] F. Dillen y M. I. Munteanu, *Constant angle surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Bull. Braz. Math. Soc. **40** (2009), 85-97.
- [Fe] M.C. Fernández Moya, Tesina de Licenciatura: *Hipersuperficies de curvatura media constante. El teorema de Alexandrov y sus generalizaciones*. Tesina de licenciatura. Universidad de Murcia, Murcia, 2004.
- [Fla] H. Flanders, *Remark on mean curvature*, J. London Math. Soc. **41** (1966), 364-366.
- [FN] Y. Fu y A.I. Nistor, *Constant Angle Property and Canonical Principal Directions for surfaces in $\mathbb{M}^2(c) \times \mathbb{R}_1$* , Mediterr. J. Math. **10** (2013), 1035-1049.
- [GT] D. Gilbarg y N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001, reprint of the 1998 edition.
- [Gr] A. Grigor'yan, *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1999), 135-249.
- [He] E. Heinz, *Über Flächen mit eineindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind*, Math. Ann **129** (1955), 451-454.
- [Ho] E. Hopf, *Über den funktionalen, insbesondere den analytischen der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung*. Math. Z. **34** (1932), 194-233.
- [KKSJ] Y.W. Kim, S.-E. Koh, H. Shin y S.-D. Yang, *Helicoids in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Pacific J. Math. **242** (2009), 281-297.
- [Ko] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space \mathbb{L}^3* , Tokyo J. Math. **6** (1983), 297-309.
- [LL] E. Lee y H. Lee, *Generalizations of the Choe-Hoppe helicoid and Clifford cones in Euclidean space*, J. Geom. Anal. **27** (2017), 817-841.
- [Lop] R. López, *Constant mean curvature surfaces with boundary*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Heidelberg (2013).
- [LM] R. López y M. Munteanu, *Constant angle surfaces in Minkowski space*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **18** (2011), 271-286.

- [Ma] L.A. Masal'tsev, *Minimal ruled surfaces in three-dimensional geometries $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. (2004), 46-52. In Russian; translation in *Russian Math.* **48** (2004), 43-49.
- [NRS] M. Navarro, G. Ruiz-Hernández y D.A. Solis, *Constant mean curvature hypersurfaces with constant angle in semi-Riemannian space forms*, Diff. Geom. Appl. **49** (2016), 473-495.
- [ON] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York, 1983.
- [Os] R. Osserman, *The convex hull property of immersed manifolds*, J. Differential Geometry **6** (1971/72), 267-270.
- [Spi] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, III, Publish or Perish, Washington, Del., 1979.
- [To] R. Tojeiro, *On a class of hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* , Bull. Braz. Math. Soc. **41** (2010), 199-209.

Índice terminológico

Ángulo hiperbólico entre N_L y ∂_t , 15, 16

Curvatura media

de un grafo con $M^n = \mathbb{R}^n$, 24

de un grafo en \overline{M}_δ , 22

Ecuación de las hipersuperficies

espaciales con $H_R = H_L$, 49

maximales, 23

minimales, 23

Fórmula

de Gauss, 16, 17

de Weingarten, 16, 17

Función

subarmónica, 59

superarmónica, 59

altura, 65

Grafo

rotacionalmente invariante, 52

asintótico, 47

Hipersuperficie

contenida en un slice, 65

por debajo de hipersuperficie, 37

espacial, 14

maximal, 17

minimal, 17, 18

no degenerada, 3, 14

reglada, 4, 77

temporal, 14

Inradio, 47

Operador

cuasilineal elíptico, 32

forma de un grafo en \overline{M}_δ , 21

lineal elíptico, 25

Principio

del máximo débil, 25

del máximo interior, 37

del máximo fuerte, 31

Propiedad de la envoltura convexa, 42

Punto elíptico, 42

Superficie

espacial, 3

maximal, 3

tangente desarrollable, 86

Teorema de

Barbosa et. al., 5

Bernstein, 3

Calabi-Bernstein, 3

Catalan, 4

Kim et. al., 5

Kobayashi, 4

Masal'tsev, 5

Heinz, 4

Variedad

con ángulo constante, 68

parabólica, 59

Vector normal de un grafo en \overline{M}_δ , 19