UNIVERSIDAD DE MURCIA

ESCUELA INTERNACIONAL DE DOCTORADO

El juego en el área de Matemáticas en la educación Primaria

Dña. Davinia Soto Clares

2020

EL JUEGO EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Recursos lúdicos para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje

Doctoranda: D.ª Davinia Soto Clares

Director: D. Francisco Balibrea Gallego

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2020

UNIVERSIDAD DE MURCIA

EL JUEGO EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Doctoranda:
Davinia Soto Clares

Director:
Francisco Balibrea Gallego

FACULTAD DE EDUCACIÓN
2020

AGRADECIMIENTOS

Si para llegar a un mismo punto existen infinitos caminos, ¿por qué no escoger el más divertido? Ésta es una frase que escribí hace unos años, cuando el juego y las Matemáticas comenzaron a unirse dentro de mi forma de entender la enseñanza. Trabajar con niños es el mayor de los regalos que puedo recibir. Me encanta mi profesión. Adoro ser maestra de Educación Primaria. En muchas ocasiones, la sociedad no es consciente de la relevancia de esta etapa. De lo importante que es divertirse aprendiendo.

Esta Memoria nació desde el amor que yo siento por mi trabajo y por las Matemáticas. ¡Qué importantes son para la vida y qué incomprendidas son a veces! Enseñar forma parte de mi ADN y conseguir que mis alumnos vengan con una sonrisa a la escuela mi objetivo.

Esta emoción tan sólo fue la semilla de un proyecto que aún estaba por nacer. Un proyecto que creció gracias a la dedicación y esfuerzo de mi director. Muchas gracias Paco por ser mi guía en todo este camino. Por aportarme la pureza de las Matemáticas que yo tanto necesitaba con la didáctica de mi profesión. Gracias por todas las manzanillas tomadas en la Cafetería del Cuartel servidas por nuestra amable camarera, por todas las servilletas de papel pintadas con demostraciones, fórmulas y ejemplos. Gracias por confiar en mí y creer en esta idea. He aprendido muchísimo durante todos estos años. Yo también he aprendido jugando. Sin tu ayuda esta Memoria sería sólo una idea sin concluir como otras tantas. Gracias también a Miguela, por aportarme la estadística que me faltaba y ser tan amable conmigo y a Enrique por ser la pieza que nos faltaba en este equipo perfecto.

Dentro de este largo proceso también es muy importante el apoyo emocional en tu entorno. Las personas que tenemos a nuestro alrededor son el motor de nuestras ideas. Gracias Ángel por hacerme sentir capaz de todo, por tus palabras de aliento y por ser la estrella que alumbra mi oscuridad.

Gracias a mi familia que me cuida tanto y que me pone las cosas tan fáciles para que yo pueda seguir trabajando y formándome a la vez. No me canso de deciros que si estoy donde estoy es gracias a vosotros.

Gracias a mis amigos por darme los momentos de respiro tan necesarios que me hacen volver al trabajo con muchas más ganas.

Gracias también a mi colegio, el Vista Alegre en Las Torres de Cotillas, a ese equipo directivo formado por Pedro, Julio y Natalia que me pusieron tan fácil el llevar a cabo esta propuesta en el aula.

En definitiva, gracias a todos los maestros que estáis orgullosos de serlo, que creéis que otra manera de enseñar es posible y que sentís que tenéis el futuro en vuestras manos. Efectivamente, así es. Cuidad el mayor de los tesoros que a mí la vida me brinda todos los días: aprender de los más sabios, los niños.

Este trabajo es de todas las personas a las que doy las gracias porque yo no sería quien soy ni estaría donde estoy sin cada uno de ellos.

ÍNDICE

CAPÍTULO 2. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 3. EL AJEDREZ EN EL AULA

CAPÍTULO 4. EL SUDOKU EN EL AULA

CAPÍTULO 5. EL TANGRAM EN EL AULA

CAPÍTULO 6. OTROS JUEGOS PARA TRABAJAR EN EL AULA

CAPÍTULO 7. EVALUACIÓN Y CONCLUSIONES DE LA PROPUESTA

RESUMEN

La Memoria titulada *El juego en el área de Matemáticas de Educación Primaria* es un estudio dirigido a analizar y poner en práctica el juego como herramienta de aprendizaje para el área de Matemáticas en 5.º de Educación Primaria.

La primera parte de esta investigación se centra en la fundamentación del juego en el ámbito escolar desde tres perspectivas: psicopedagógica, histórica y curricular. Más concretamente, establece las conexiones entre el juego y las Matemáticas escolares con el fin de justificar su aplicación en el área.

Del mismo modo, es importante determinar el tipo de metodología de investigación que se llevará a cabo. Este trabajo se ubica dentro de una metodología cualitativa ya que el investigador se concentra en las vivencias de los participantes dentro de un contexto social determinado a partir del cual establecer conclusiones y generalidades. Además, también es de tipo descriptivo debido a que el investigador forma parte activa del proceso ayudando a transformar la realidad con la que se encuentra.

La segunda parte de la misma presenta el diseño de una propuesta didáctica utilizando tres recursos principalmente: el ajedrez, el sudoku y el tangram. Un recurso por trimestre para trabajar de manera lúdica los contenidos curriculares del área. Para ello, serán relevantes los beneficios que cada uno aporta en relación con los contenidos que se quieren trabajar.

De forma más puntual, también se llevarán al aula pequeñas propuestas didácticas en donde el NIM, las Torres de Hanoi, la Matemagia y la Conjetura de Collatz cobrarán especial relevancia.

El siguiente paso de esta Memoria es su puesta en práctica. Se llevará a cabo con un grupo de 20 alumnos de 5.º curso de Educación Primaria de un centro educativo ubicado en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia. Dentro del grupo, 6 alumnos presentan dificultades asociadas a la lectoescritura, aspecto a tener en cuenta en el desarrollo de la propuesta didáctica.

La última parte de esta Memoria está dedicada a la valoración de los resultados a través de los cuales establecer las conclusiones de la investigación, sus implicaciones educativas y la discusión pertinente sobre los logros conseguidos.

En definitiva, de lo que se trata es de presentar una investigación innovadora y útil para el docente que le ayude a través del juego a cambiar su enseñanza para mejorar el aprendizaje de su alumnado.

Palabras clave: juego, metodología cualitativa, Educación Primaria, área de Matemáticas, ajedrez, sudoku, tangram.

ABSTRACT

The reported Memoir entitled Using the game on Mathematics of Primary School is dedicated to analyze the use of the game as a learning tool in the field of Mathematics at the level of 5th course in Primary School.

The first parto f the Memoir is devoted to state the basis for using of thegame at primary levels of the syllabus under three perspectivas: psycho-pedagogical, historical and curriculum development. More precisely, it explores the connections between the game and its applications in school Mathematics justifying them.

By other hand, it is relevant to fix and clarify the type of research methodology to be used. In fact, inthe Memoir it is introduced a qualitative methodology since the author is mainly concentrated inthe experiences that of all participants have inside their social setting which leads to state general conclusions. Besides, the methodology is also of descriptive type since the author plays an active role in the process trying to transform the social reality.

In the second part, the author presents the designo f a didactic proposal using mainly three resources: chess, sudokus and tangrams. They are stated in order to work with schoolchildren in a playful way, progressing at the same time in the currícula contains. It is underlined also in the Memoir, the particular beneficts of each research.

In a particular way it is also suggested to bring to classroom other proposals based in other games such as NIM's, Hanoi Towers, Mathemagia and Collatz conjecture.

Next step in the Memoir is to develop applications of the above games. It is proponed to work with groups of at most 20 students from *5th* course of Primary School in any acholar center in the Comunidad Autónoma de la Región de Murcia. In fact the proposal was applied in Orly a Group of 20 students. In this Group were dectected 6 students with important difficulties in reading-writing which need some additional considerationand work.

Last parto f the Memoir is devoted to valoration of results of the process and taking out some conclusiones, educational implications and discussions of them.

It is necessary to underline that the research is innovative and useful for teachers helping them to introduce some changes in their way of teaching in order to improve the level of knowledge of schoolchild.

Key words: game, qualitative methodology, Primary School, the field of Mathematics, chess, sudoku, tangram.

INTRODUCCIÓN GENERAL

A lo largo de los años, la Pedagogía ha sufrido renovaciones constantes con el fin de adaptar el proceso educativo a las necesidades e intereses del alumnado. Son muchas las corrientes educativas que partiendo del contexto sociocultural en el que se encontraban inmersas, han ido configurando nuevas metodologías que permiten concebir un proceso de enseñanza dinámico que fomente un aprendizaje significativo para el alumnado.

Sin embargo, el problema de este cambio es que trasladar la teoría a la práctica no es tarea fácil y en muchas ocasiones las buenas ideas se quedan a medio camino y sólo alcanzan a ser propósitos que jamás se llevan al aula. De hecho, si se quiere profundizar más en el problema, si hay un área que aún hace más difícil este salto de la teoría a la práctica, ésta es el área de Matemáticas.

Desde la Didáctica de las Matemáticas los docentes han ido configurando un proceso de enseñanza y aprendizaje que poco o nada tiene que ver con las inquietudes del alumnado.

Muchos autores a lo largo del tiempo han hecho referencia al espanto que para la mayoría de los estudiantes suponen las Matemáticas en su trayectoria académica.

Pero ¿qué tienen las Matemáticas que producen ese rechazo tan rotundo en el alumnado? En primer lugar, cuando nos remontamos a las matemáticas escolares, solemos recordar un tipo de algoritmos y números poco vinculados a la realidad del niño; un área que requería el máximo esfuerzo unido a la mínima satisfacción; y en algunos casos, un docente que en su infancia no adoraba precisamente las Matemáticas y, por consiguiente, quiere tanto o más que el alumnado terminar lo antes posible con ese *calvario*. Se trata del llamado *miedo matemático*, ¿es posible superarlo? Y sobre todo, ¿cómo conseguirlo?

De entre todas las propuestas encaminadas a resolver lo anterior, hay una estrategia que llama especialmente la atención y que ha ido abriéndose paso a lo largo de los años en la Educación por su capacidad de adaptación a los intereses del alumnado, por su alto poder motivador y por potenciar una formación integral que logra dotar de pragmatismo a los aprendizajes realizados en la escuela: el juego.

Pérez Sanz en [43] plantea la siguiente pregunta: *¿qué mejor actividad para el alumno que aquella que ocupa la mayor cantidad de su tiempo libre y que además le resulta interesante?*

Por tanto, a partir de esta reflexión en forma de pregunta, nace esta Memoria con el objetivo de analizar y poner en práctica el juego como recurso didáctico en el área de Matemáticas de 5.º curso de Educación Primaria.

Para ello, en el **primer capítulo** se fundamentan los aspectos psicopedagógicos y curriculares referidos al niño de esta etapa educativa con el fin de adaptar al máximo el proceso educativo a sus características.

Se presenta una justificación de por qué el juego es un recurso excelente para el aprendizaje del alumnado desde las perspectivas histórica, psicopedagógica y curricular. Además, para dar sentido a su puesta en práctica dentro del área se establecen las conexiones entre juego y matemáticas escolares.

Este capítulo define una de las dificultades de aprendizaje más comunes en el aula: la dislexia. No es extraño encontrar alumnos con este tipo de dificultad por lo que se debe tener muy en cuenta en la configuración de la propuesta.

Para acabar en este capítulo se hace mención a la vertiente actitudinal de proceso educativo: enseñar a pensar a través del juego. La actividad lúdica en el niño supone una oportunidad para su desarrollo cognitivo, emotivo y social sea cual sea su edad. Ayuda a reflexionar, tomar decisiones y encontrar soluciones creativas. Se trata de una forma de trabajar la Filosofía en el niño como forma de entender y modificar el mundo que les rodea y no como manera de crear pequeños filósofos.

En todo trabajo es imprescindible definir sus objetivos como punto de partida así como el tipo de metodología de investigación que se lleva a cabo para garantizar una validez de los resultados obtenidos. Éste es el objeto de estudio del **segundo capítulo**. En este capítulo se justifica por qué se trata de una metodología cualitativa descriptiva. Del mismo modo, se define el contexto al que va dirigida: un grupo formado por 20 alumnos de 5.º curso de Educación Primaria procedentes de un centro escolar de la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia. También se presenta la temporalización de la elaboración de la Memoria y su puesta en práctica con dichos alumnos.

El **tercer, cuarto y quinto capítulo** se centran en cada uno de los recursos lúdicos elegidos para llevar a cabo la propuesta: ajedrez, sudoku y tangram. Los tres tienen una estructura similar centrada en la justificación del juego seleccionado para el tipo de alumnado y los aprendizajes del área, el diseño de la propuesta metodológica y la valoración de los resultados obtenidos por parte del alumnado tras su puesta en práctica por su tutora, en este caso, la doctoranda.

Durante el desarrollo de la propuesta se han incluido otros juegos vinculados con el área de Matemáticas pero cuya puesta en práctica ha sido menor en el tiempo: NIM, Matemagia, Torres de Hanoi y Conjetura de Collatz. Estos recursos lúdicos se incluyen en el **sexto capítulo** de esta Memoria junto con su justificación, puesta en práctica y valoración de los resultados.

Por último, en el **séptimo capítulo** se establecen los instrumentos de evaluación y las conclusiones generales de la propuesta contrastándolas con las expuestas por otros autores sobre el mismo objeto de estudio, generándose la discusión de esta Memoria. También se exponen sus implicaciones educativas, es decir, qué se aporta a la comunidad educativa desde esta investigación así como las limitaciones encontradas en su puesta en práctica.

Todos estos apartados conforman los ingredientes que esta propuesta pretende utilizar en su objetivo de cambiar la forma de enseñar para mejorar la manera de aprender.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Introducción

Toda trabajo precisa de una fundamentación teórica que ayude a la construcción de unos pilares firmes sobre los que construir una investigación sólida, práctica y coherente.

Para tal fin, este capítulo abarca el estudio de la etapa de la Educación Primaria teniendo en cuenta aspectos psicopedagógicos del alumnado al que va dirigida la propuesta y aspectos curriculares de la actual Ley Educativa. Más concretamente, este capítulo también define los dos ejes principales de la propuesta: el área de Matemáticas en Educación Primaria y el juego.

Por un lado, se establecen los rasgos principales del área en 5.º curso de la etapa haciendo mención explícita a los contenidos que se deben fomentar tomando como referencia el Decreto 198/2014 [14].

Por otro lado, la fundamentación del juego en el ámbito educativo es imprescindible ya que toda la Memoria gira en torno a la aplicación de recursos lúdicos para la mejora de aprendizajes matemáticos. Para ello, se realiza un pequeño estudio sobre la evolución del juego desde un punto de vista histórico, psicopedagógico y curricular.

Establecidos ambos pilares, el siguiente paso es conectar juego y Matemáticas para que realmente tenga sentido la aplicación de recursos lúdicos en el área. Las conexiones entre ambos favorecen su aplicación en el contexto escolar.

Puesto que un rasgo importante en cualquier aula de Primaria es la diversidad, en este capítulo también se tiene en cuenta una dificultad de aprendizaje detectada en algunos alumnos del aula al que va dirigida la propuesta: la dislexia. Por ello, se establecen los rasgos principales a tener en cuenta, su vinculación con los aprendizajes matemáticos (discalculia) y los beneficios que el juego puede aportar para el aprendizaje de este alumnado.

Por último, se hace mención a la Filosofía entendida como una disciplina capaz de ayudar a pensar a los niños y su vinculación con el juego en el área de Matemáticas. Se trata de fomentar capacidades como el pensamiento crítico para ayudar a construir un aprendizaje significativo para el alumnado.

1.1 La etapa de Educación Primaria

1.1.1 Aspectos psicopedagógicos

Para poder definir los rasgos propios del niño es importante ubicarlo en el periodo de desarrollo que se encuentre. El proceso de construcción de las estructuras cognitivas del niño viene definido por Piaget en [45]. Dependiendo de la edad en la que se encuentre el niño, estará preparado para abordar ciertos aprendizajes. Este autor establece cuatro periodos que orientan sobre lo que el niño es capaz de hacer en cada etapa mostrados en la tabla 1.1 que a continuación se presenta:

Tabla 1.1. Periodos de desarrollo evolutivo según Piaget

PERIODOS DE DESARROLLO SEGÚN PIAGET
Periodo sensoriomotor (0-2 años)
En esta etapa que incluye desde el nacimiento hasta los dos años de edad, el niño comienza a percibir la realidad y a responder ante ciertos estímulos. Posee mecanismos que le permiten sobrevivir dentro del medio en el que se encuentra inmerso.
Periodo preoperacional (2-7 años)
Las capacidades sensoriales del niño casi alcanzan sus máximas posibilidades de discriminación distinguiendo símbolos, sonidos, sabores y texturas. Distingue letras, frases y mensajes orales.
Periodo de operaciones concretas (7-11 años)
En este periodo se encuentra incluida la etapa de Educación Primaria en la que se produce un perfeccionamiento de sus capacidades sensoriales. De hecho, es en este momento en donde el niño puede alcanzar sus máximas posibilidades de desarrollo sensorial. Al finalizar esta etapa se consolida el pensamiento lógico-concreto y, por tanto, actúa de manera más segura, rápida y eficaz.
Periodo de operaciones formales (a partir de los 12 años)
En esta etapa se desarrolla la capacidad para utilizar la lógica con el fin de alcanzar soluciones abstractas que no están vinculadas a situaciones experimentadas de primera mano. Se analizan los propios esquemas de pensamiento y también se utiliza el razonamiento hipotético-deductivo.

La etapa de Educación comprende desde los 6 a los 12 años. Según este autor el alumno comienza su educación obligatoria finalizando el periodo preoperacional y la termina a las puertas del periodo de las operaciones formales. Queda reflejada la evolución que el alumno tendrá desde el inicio hasta el final.

Es fundamental tener en cuenta lo que el alumno es capaz de hacer y lo que todavía no antes de comenzar el proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula para adaptarlo lo máximo posible a sus necesidades.

1.1.2 Aspectos curriculares LOMCE

Actualmente, la Ley que rige el sistema educativo es la LOMCE (Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa) detallada en [31]. Ésta define currículo del siguiente modo:

Se entiende por currículo la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas.

El currículo está integrado por los siguientes elementos:

a) Los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa.

b) Las competencias o capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos.

c) Los contenidos, o conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias. Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias, ámbitos, áreas y módulos en función de las enseñanzas, las etapas educativas o los programas en que participen los alumnos y alumnas.

d) La metodología didáctica, que comprende tanto la descripción de las prácticas docentes como la organización del trabajo de los docentes.

e) Los estándares y resultados de aprendizaje evaluables.

f) Los criterios de evaluación del grado de adquisición de las competencias y del logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa.

1.1.3 El currículo de Educación Primaria en la Región de Murcia

El currículo de Educación Primaria en la Región de Murcia viene definido por el *Decreto 198/2014*, ampliado en [14]. Éste establece los elementos básicos sobre los cuales construir el proceso de enseñanza y aprendizaje en esta etapa.

Algunos de los elementos principales que establece son los siguientes:

a) Competencias del currículo

A efectos del presente Decreto y de acuerdo con lo previsto en el artículo 2.2 del Real Decreto 126/2014, desarrollado en [46], se identifican siete competencias para su desarrollo en la Educación Primaria mencionadas en la tabla 1.2:

Tabla 1.2. Competencias establecidas por la LOMCE

<table>
<tr><th colspan="12">COMPETENCIAS</th></tr>
<tr><td colspan="3">Comunicación lingüística</td><td colspan="3">Competencia digital</td><td colspan="3">Aprender a aprender</td><td colspan="3">Competencias sociales y cívicas</td></tr>
<tr><td colspan="4">Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor</td><td colspan="4">Conciencia y expresiones culturales</td><td colspan="4">Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología</td></tr>
</table>

Es importante aclarar que el Decreto también establece que la Educación Primaria ha de contribuir a la consecución de las competencias a través de las distintas áreas. Dado su carácter instrumental, en esta etapa se potenciará el desarrollo de las competencias en comunicación lingüística, competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, de conformidad con lo establecido en el artículo 2.2 del Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero.

b) Principios pedagógicos

Los principios pedagógicos sobre los cuales ha de construirse cualquier metodología son los que se presentan a continuación:

- Las competencias del currículo para el aprendizaje permanente deberán estar integradas en los elementos curriculares.

- De conformidad con lo establecido en el párrafo segundo del artículo 6 del Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, la acción educativa en esta etapa procurará la integración de las distintas experiencias y aprendizajes de los alumnos, y se adaptará a sus ritmos de trabajo.
- El equipo docente deberá interrelacionar los contenidos de las áreas con un enfoque globalizador y abordar los problemas, las situaciones y los acontecimientos dentro de un contexto y en su totalidad garantizando, en todo caso, su conexión con las necesidades y características de los alumnos.
- Asimismo, la intervención educativa debe contemplar como principio la diversidad de los alumnos, poniendo especial énfasis en la atención personalizada, la prevención de las dificultades de aprendizaje, la realización de diagnósticos precoces y la puesta en práctica de mecanismos de apoyo y refuerzo para prevenir y, en su caso, intervenir tan pronto como se detecten estas dificultades.

c) Orientaciones metodológicas

El citado Decreto establece las siguientes recomendaciones a tener en cuenta con respecto a la metodología didáctica:

a) Se diseñarán actividades de aprendizaje integradas que permitan a los alumnos avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.

b) La acción docente promoverá que los alumnos sean capaces de aplicar los aprendizajes en una diversidad de contextos.

c) Se fomentará la reflexión e investigación, así como la realización de tareas que supongan un reto y desafío intelectual para los alumnos.

d) Se podrán diseñar tareas y proyectos que supongan el uso significativo de la lectura, escritura, tecnologías de la información y la comunicación (TIC) y la expresión oral mediante debates o presentaciones orales.

e) La actividad de clase favorecerá el trabajo individual, el trabajo en equipo y el trabajo cooperativo.

f) Asimismo, podrán realizarse agrupamientos flexibles en función de la tarea y de las características individuales de los alumnos con objeto de realizar tareas puntuales de enriquecimiento o refuerzo.

g) Se procurará organizar los contenidos en torno a núcleos temáticos cercanos y significativos.

h) El espacio deberá organizarse en condiciones básicas de accesibilidad y no discriminación necesarias para garantizar la participación de todos los alumnos en las actividades del aula y del centro.

i) Se procurará seleccionar materiales y recursos didácticos diversos, variados, interactivos y accesibles tanto en lo que se refiere al contenido, como al soporte.

Se hace especial mención a que los centros docentes podrán diseñar e implantar métodos pedagógicos propios, previo acuerdo del Claustro de profesores, teniendo en cuenta las características de los alumnos.

1.1.4 El currículo en el área de Matemáticas de Educación Primaria

El Decreto 198/2014 de 5 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia, configura los siguientes elementos en el área de Matemáticas:

a) Introducción

La finalidad de las Matemáticas en Educación Primaria es conseguir que todo el alumnado, al acabar la etapa, sea capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones, expresar verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema, y utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.

El área de Matemáticas debe construir los fundamentos del razonamiento lógico en los niños y niñas de esta etapa, y no sólo del lenguaje simbólico-matemático.

De esta manera se desarrollarán sus funciones formativa (desarrollando las capacidades de razonamiento y abstracción), instrumental (permitiendo posteriores aprendizajes tanto en el área de Matemáticas como en otras áreas) y funcional (posibilitando la comprensión y resolución de problemas de la vida cotidiana).

Los aprendizajes matemáticos se logran cuando el alumnado elabora abstracciones matemáticas a partir del análisis de la información obtenida, observar propiedades, establecer relaciones y resolver problemas concretos.

Para ello, es necesario traer al aula situaciones cotidianas que supongan desafíos matemáticos atractivos y el uso habitual de recursos variados y materiales didácticos para ser manipulados por el alumnado. Sólo después de haber comprendido el concepto, es adecuado presentar al alumnado el símbolo que lo representa y que empiece a practicar para alcanzar el dominio de los mecanismos que rigen su representación simbólica. No debe darse por conocido y dominado un concepto, propiedad o relación matemática por el hecho de haber logrado presentar el alumnado el dominio mecánico de su simbología.

En este proceso, la resolución de problemas constituye uno de los ejes principales de la actividad matemática. Esta se caracteriza por presentar desafíos intelectuales que el niño o la niña quiere y es capaz de entender, pero que, a primera vista, no sabe cómo resolver y que conlleva, entre otras cosas, leer comprensivamente; reflexionar; debatir en el grupo de iguales; establecer un plan de trabajo, revisarlo y modificarlo si es necesario; llevarlo a cabo y finalmente, utilizar mecanismos de autocorrección para comprobar la solución o su ausencia y comunicar los resultados. En este proceso, el alumnado se

enfrenta con su propio pensamiento, colocándose frente a situaciones o problemas abiertos, de ingenio, problemas con datos innecesarios, con soluciones múltiples o sin solución y otros en los que se conozca el resultado y las condiciones del problema y deba averiguar el punto de partida.

La automatización de estrategias y algoritmos también es importante, pero sólo después de la comprensión a través de la manipulación real de objetos y situaciones, la verbalización de lo observado y su trascripción a lenguaje gráfico y simbólico.

Las Matemáticas están en todo lo que nos rodea. Forman parte de la vida cotidiana como herramienta necesaria que permite desenvolverse en la complejidad de la sociedad actual. Además, con las matemáticas podemos analizar la realidad y obtener información para valorarla y tomar decisiones, por lo que su aprendizaje contribuye a aprender a aprender y al desarrollo cognitivo para una formación intelectual general.

El currículo se ha formulado partiendo del desarrollo cognitivo y emocional en el que se encuentra el alumnado de esta etapa, de la concreción de su pensamiento, de sus posibilidades cognitivas, de su interés por aprender y relacionarse con sus iguales y con el entorno, y de su paso hacia un pensamiento abstracto hacia el final de la etapa.

b) Bloques de contenido

El área de Matemáticas en la Educación Primaria se organiza en cinco bloques de contenido, que deben ser abordados de una manera entrelazada, construyendo unos contenidos sobre los otros, como una estructura de relaciones observables de forma que se facilite su comprensión y aplicación en contextos cada vez más enriquecedores y complejos. Esta agrupación no implica una organización cerrada, por el contrario, permitirá organizar de diferentes maneras los contenidos adoptando la metodología más adecuada a las características de los mismos y del grupo de alumnos. Estos bloques de contenidos se presentan en la tabla 1.3:

Tabla 1.3. Bloques de contenidos establecidos por el Decreto 198/2014 (página 33185)

BLOQUES DE CONTENIDOS
Bloque 1, Procesos, métodos y actitudes en matemáticas
Este bloque es el eje fundamental del área y debe desarrollarse de manera transversal y simultánea al resto de bloques de contenido. Se articula sobre procesos básicos e imprescindibles en el quehacer matemático: la resolución de problemas, proyectos de investigación matemática, la matematización y modelización, las actitudes adecuadas para desarrollar el trabajo científico y la utilización de medios tecnológicos.
Bloque 2, Números
Este bloque tiene un carácter instrumental para el desarrollo de los contenidos del resto de los bloques y pretende el dominio reflexivo de las relaciones numéricas que se expresan en la habilidad para descomponer números de forma natural, comprender y utilizar la estructura del sistema de numeración decimal, utilizar las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas, para realizar mentalmente cálculos; todo ello apoyado en la

manipulación de materiales (regletas, bloques, cinta métrica, calculadora, ábaco...). Los números han de ser usados en diferentes contextos, sabiendo que la comprensión de los procesos desarrollados y el significado de los resultados es un contenido previo y prioritario frente a la destreza de cálculo escrito. A lo largo de la etapa se pretende que el alumnado calcule con fluidez y haga estimaciones razonables, tratando de lograr un equilibrio entre comprensión conceptual y competencia en el cálculo.
Bloque 3, Medidas de longitud, peso/masa, superficie y capacidad
A partir de la percepción y conocimiento de la magnitud como atributo medible de los objetos, por comparación y ordenación de objetos, se pasa a la noción de medida y su realización, utilizando progresivamente un número más amplio de unidades. Debe considerarse la necesidad de la medición, manejándola en situaciones diversas, así como estableciendo los mecanismos para efectuarla: elección de instrumento y unidad, relaciones entre unidades y grado de fiabilidad y exactitud. Se partirá para ello de unidades corporales (palmo, pie...) y arbitrarias (cuerdas, varas...) para pasar a las medidas normalizadas, que surgen como superación de las anteriores.
Bloque 4, Geometría
El entorno del niño está lleno de elementos geométricos con significado concreto para él (pelotas, ventanas, mesas, etc.) Es preciso contextualizar las enseñanzas geométricas de una forma que resulte significativa para los alumnos: el estudio de su entorno próximo y familiar, por la motivación e interés que puede despertar puede ser fuente inagotable de objetos susceptibles de observación y manipulación.
Bloque 5, Estadística y probabilidad
Este bloque permite, por un lado, comprender la información que transmiten los distintos medios de comunicación y, por otro, realizar un tratamiento matemático de la información mediante diferentes tipos de gráficas.

c) Orientaciones metodológicas

Además de los principios y orientaciones metodológicas previstos en los artículos doce y trece del presente decreto, la acción docente en el área de Matemáticas tendrá en especial consideración las siguientes recomendaciones:

- Presentar las herramientas matemáticas como solución a problemas próximos a la vida e intereses propios de la edad. Los contenidos de aprendizaje deben partir de situaciones cercanas al alumno, y se deberán abordar en contextos de identificación y resolución de problemas. Las matemáticas se aprenden utilizándolas en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria, para ir adquiriendo progresivamente conocimientos más complejos a partir de las experiencias y los conocimientos previos. Por ejemplo, para aprender el sistema monetario se puede plantear una tarea del tipo *hacemos un mercadillo solidario en el que vendemos a nuestros padres objetos realizados por nosotros en Educación Artística*.
- Utilizar problemas ya resueltos para afianzar los procedimientos adquiridos y profundizar en ellos, planteando problemas análogos, con pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, etc.
- Fomentar el intercambio de puntos de vista entre los alumnos así como

las distintas formas de abordarlas tareas que se encomienden. La flexibilidad del pensamiento implica que el alumnado puede encontrar múltiples expresiones matemáticas equivalentes, estrategias de cálculo alternativas y resolver un problema de distintas formas, a veces utilizando vías de solución que no le han sido enseñadas previamente.

- Fomentar la participación de todos y cada uno de los alumnos en las discusiones o debates que se produzcan, ante la propuesta de un problema a resolver, procurando que ninguna idea sea calificada despectivamente por ningún compañero (y mucho menos por el maestro), analizando cada una de ellas y descartando aquellas que no conduzcan al objetivo planteado.
- Fomentar la creatividad matemática, dándole al alumno pautas para inventar problemas utilizando datos y operaciones desde el primer nivel que vayan creciendo en dificultad a medida que avanzan los cursos.
- Integrar el uso de las TIC en el aula, tanto para la búsqueda de información en los trabajos de investigación como para el uso de aplicaciones informáticas que contribuyan a la consecución de los estándares de aprendizaje del área (hojas de cálculo, procesadores de texto, aplicaciones para la presentación de trabajos, aplicaciones específicas relacionadas con el área...).
- Favorecer el trabajo individual y el trabajo en equipo como estrategias de trabajo en función de las tareas, actividades o proyectos a desarrollar, para lo cual se adaptará el espacio del aula. El trabajo en equipo y el dominio de las habilidades sociales en la interacción con el grupo de iguales servirán para desarrollar la escucha activa, intercambiar y confrontar ideas, y generar nuevo conocimiento.
- Realizar tareas manipulativas en las que, mediante el uso de técnicas plásticas, se puedan consolidar los aprendizajes propios del área (modelado con arcilla, plastilina, etc.).
- Manipular materiales para la generación de ideas matemáticas. Por ejemplo la idea de número, el concepto de suma o las estrategias de cálculo utilizando la recta numérica, palillos, multicubos, calendarios, tabla del 100, etc.
- Utilizar de forma lúdica diferentes procedimientos metodológicos, como los retos, desafíos y enigmas matemáticos, los acertijos, las pirámides numéricas, cuadrados o triángulos mágicos, etc., que, además de fomentar el cálculo mental, hagan de las matemáticas una asignatura más interesante para el alumnado.
- Trabajar la geometría a partir de situaciones que resulten familiares para los alumnos (recorridos habituales, formas de objetos conocidos...) y mediante actividades manipulativas, lúdicas (plegado, recorte, modelado, etc.), así como a través del uso de materiales (tangram, geoplanos y mecanos, tramas de puntos, libros de espejos, material para formar poliedros, etc.) A este mismo fin puede contribuir el uso de programas informáticos de geometría dinámica o el de juegos de estrategia como el ajedrez.

- Plantear proyectos alrededor de núcleos de interés, en los que haya que utilizar herramientas matemáticas, con objeto de fomentar la creatividad del alumnado y la conexión entre las diferentes áreas de la etapa.
- Realizar pequeñas investigaciones estadísticas con el fin de facilitar la lectura y representación de la realidad.
- Trabajar el azar y la probabilidad a través del juego y situaciones reales, mediante experimentos con objetos concretos tales como sacar fichas coloreadas de una bolsa, tirar una moneda o un dado, etc.

1.1.5 El currículo del área de Matemáticas en 5.º curso

Durante el análisis del currículo se ha podido comprobar cómo en algunos apartados del mismo se hace mención al juego como estrategia metodológica dentro del aula. El siguiente paso es que el docente tenga presente los contenidos curriculares a trabajar para que, a partir de éstos, dé forma a su intervención educativa.

En este caso, se ha realizado una selección de contenidos curriculares de 5.º curso que se pueden vincular con el juego y los recursos lúdicos escogidos. Estos contenidos se presentan en la tabla 1.4 que a continuación se presenta:

Tabla 1.4. Contenidos de 5.º curso vinculados con el juego

CONTENIDOS DE 5.º CURSO
Bloque 1, Procesos, métodos y actitudes en matemáticas
Explicación oral de los pasos seguidos en la resolución de un problema. Un buen uso del juego en el aula implica verbalizar el proceso del mismo. Es importante que el alumno explique cuál es el objetivo del juego y la estrategia para alcanzarlo.
Planificación del proceso de resolución de problemas: - *Análisis y comprensión del enunciado.* - *Estrategias y procedimientos puestos en práctica: hacer un dibujo, operaciones matemáticas adecuadas, ensayo y error razonado.* - *Resultados obtenidos.* El alumno necesita en todo momento comprender el funcionamiento del juego, pensar sobre la estrategia más adecuada, ponerla en práctica y valorar el resultado por si es necesario modificarla.
Reflexión sobre los resultados obtenidos en la resolución del problema. El juego es beneficioso tanto en su preparación, desarrollo y finalización. Al terminar el juego es importante reflexionar sobre las decisiones tomadas durante el mismo y las consecuencias que éstas han tenido sobre el resultado.
Planteamiento y creación de nuevos problemas partiendo de datos facilitados por el profesor o creados por el mismo. Cuando el alumno ya domina las reglas del juego interesa modificarlas para que el planteamiento del juego sea distinto y, de nuevo, suponga un reto para

el alumno.
Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo. En todo momento utilizar el juego en el aula supone favorecer actitudes proactivas: *saber ganar* y *saber perder*, confiar en uno mismo y perseverar hasta obtener lo que se desea.
Aplicación de los conocimientos adquiridos en la resolución de un problema en otros problemas similares. La repetición en el juego ayuda a afianzar los conocimientos adquiridos y aplicar estrategias a situaciones parecidas.
Gusto por compartir los procesos de resolución y los resultados obtenidos. El alumno disfruta explicando cuál fue su estrategia durante el juego, sobre todo, si trajo consigo la victoria en el mismo.
Bloque 2, Números
Operaciones: operaciones de suma, resta, multiplicación y división empleando diferentes metodologías. El juego que utiliza números en su ejecución implica la realización de cálculos básicos que permitan un avance en el mismo.
Uso de estrategias de cálculo mental. En relación con el contenido anterior, estos cálculos deben ser en su mayoría mentales para que la dinámica del juego no sea aburrida.
Resolución y creación de problemas en contextos reales, explicando oralmente y por escrito los procesos de resolución de los resultados obtenidos. El juego puede concebirse en sí mismo un problema a resolver. El juego como forma de aprendizaje también puede entenderse como un contexto real para el niño. Por último, es interesante realizar oralmente y por escrito una narración de proceso para detectar posibles errores y contribuir a un aprendizaje significativo.
Bloque 4, Geometría
Localización precisa de elementos en el espacio; sistemas de coordenadas. *Localización de puntos, dado un sistema de referencia ortonormal, utilizando coordenadas cartesianas.* Los juegos de tablero ayudan a la situación de puntos en el espacio en dos dimensiones.
Clasificación de figuras y cuerpos geométricos utilizando diversos criterios. *Figuras geométricas. Elementos básicos: lado, vértice, base, diagonal, ángulo, ejes de simetría.* *Clasificación de polígonos:* - *Triángulos: según sus lados (equiláteros, isósceles y escalenos); según sus ángulos (rectángulos, acutángulos y obtusángulos).* - *Cuadriláteros.* - *Paralelogramo: rectángulo, rombo, cuadrado y romboide.*

Cálculo del perímetro de un polígono regular e irregular.
Composición y descomposición de polígonos.

Los juegos formados por piezas con líneas rectas y formando ángulos permiten manipular figuras abstractas (tangram). Del mismo modo, a partir de éstas, se pueden realizar cálculos relacionados con el perímetro y el área, componer y descomponer figuras dando el carácter concreto previo que precisa la abstracción geométrica.

Estos contenidos se han elegido teniendo en cuenta los tres recursos lúdicos principales de esta Memoria: ajedrez, sudoku y tangram. Con ellos no se desarrolla la totalidad de contenidos del área, sin embargo, cada uno fomenta prioritariamente un bloque de contenidos como se resume en la figura 1.1:

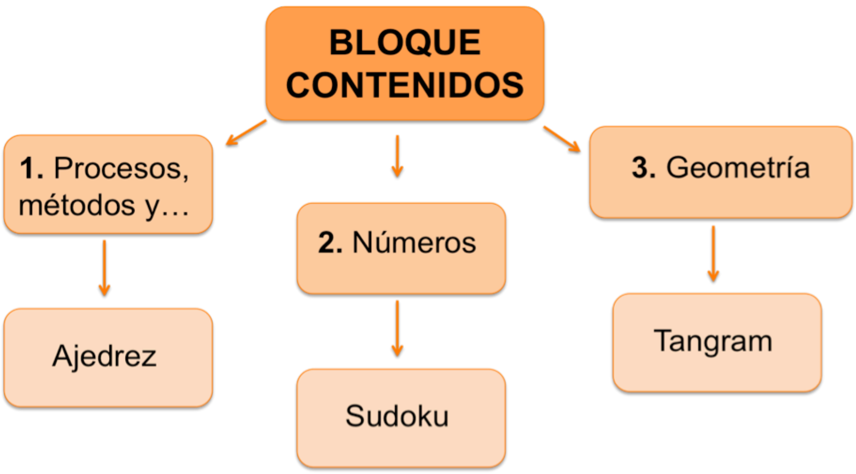


Figura 1.1. Bloque de contenidos en la etapa de Educación Primaria

Su contribución más específica al área se expone en los capítulos dedicados a cada recurso.

1.2 Los ejes vertebradores de las Matemáticas en Educación Primaria

Los ejes vertebradores en el área de Matemáticas en la etapa de Primaria se configuran a partir de:

- *La resolución de problemas*: en la etapa de Primaria es fundamental que el niño sea capaz de aplicar todos los aprendizajes adquiridos dentro de una situación problemática. Haciendo referencia a Alsina en [1], el objetivo dentro del área es ir más allá de los algoritmos básicos que permiten calcular resultados aislados y mostrar la cara útil de las Matemáticas. Durante la Primaria se les enseñan a los alumnos gran cantidad de conceptos, aspecto necesario pero no único dentro del aprendizaje matemático. Las Matemáticas realmente cobran sentido para el niño en el momento en el que es capaz de utilizarlas dentro de su contexto escolar o social.
  Además, la resolución de problemas no implica quedarse sólo en una solución numérica, supone elaborar una estrategia de resolución,

comprobar la veracidad del resultado y plantear posibles alternativas e implicaciones dentro del mismo problema.
Por tanto, utilizar el juego para plantear problemas a los niños supone crear el contexto idóneo para que surja en ellos la motivación necesaria que les permita llegar a una solución coherente.

- *Numeración y cálculo*: el trabajo con el sistema de numeración y el cálculo es uno de los pilares básicos en los inicios del aprendizaje matemático. La comprensión del sistema de numeración decimal así como el uso adecuado de una operación dependiendo del contexto contribuye a que la estrategia diseñada ante la resolución de un problema cobre verdadero sentido. No se trata de que el alumno realice sumas, restas, multiplicaciones o divisiones sin tregua, sino de conocer el algoritmo de cada una de estas operaciones y, una vez adquirido, aplicarlo dentro de una situación cercana a la vida cotidiana del alumno. Realizar cálculos básicos forma parte de nuestro día a día dentro y fuera del contexto escolar. Además, el dominio de los mismos ayuda a mejorar el cálculo mental y, en consecuencia, una mayor eficacia en la resolución de problemas y en la estimación de soluciones.

- *Pensamiento geométrico:* la geometría es una rama fundamental en Educación Primaria para que el alumno sea capaz de percibir el mundo que le rodea. Sin embargo, el estudio del a geometría requiere un grado de abstracción que en muchas ocasiones se les escapa a los alumnos ya que ellos se encuentran inmersos en el estadio de las operaciones concretas. Ayudar al alumno a dar ese paso entre *lo concreto* y *lo abstracto* no es tarea fácil. Es en este tipo de situaciones en las que el apoyo con materiales manipulativos se hace fundamental. Lados, vértices, paralelismo, son conceptos difíciles de percibir, por tanto, que el alumno experimente con estos recursos para que poco a poco los vaya interiorizando en su estructura cognitiva. Este tipo de pensamiento permite imaginar, diseñar y construir mentalmente distintos tipos de situaciones siendo capaces de anticipar situaciones problemáticas en muchas ocasiones.

1.3 El juego

1.3.1 El juego en la enseñanza

a) Perspectiva histórica

El juego y el niño son dos conceptos que siempre han ido de la mano. Una parte considerable del tiempo (o así debería ser), el niño se desenvuelve y evoluciona dentro de contextos basados en el juego. Sin embargo, la idea de juego como elemento enriquecedor en la vida del niño no siempre se ha entendido de la misma forma.

Aunque el objetivo de esta Memoria no es analizar en profundad la evolución del juego a lo largo de la historia, es conveniente dar unas pinceladas generales de la concepción qué éste ha tenido en ciertos momentos históricos.

Tal y como establece López Martín en [34], desde la Época Clásica, siempre ha existido una conexión entre niño, juego y educación. Es más, en griego, la palabra juego posee la raíz *niño* y semánticamente se le atribuye el significado de cosas de *niños/juego y enseñanza*.

Tomando como referencia a Payà en [41], entre los grandes pensadores de la citada Época, se ha constatado que algunos de ellos ya aludían al juego como fuente de aprendizaje, aunque desde perspectivas distintas. De hecho, tal y como muestra la figura 1.2, dentro del entorno escolar, se trata de un engranaje que permite un aprendizaje práctico en el alumno.

Figura 1.2. Elementos del aprendizaje

Concretamente Platón planteaba que los niños de tres a seis años debían ser educados a través del juego. Este recurso se entendía como un transmisor de cultura, como instructor de futuras profesiones ya que ayudaba a definir gustos y aficiones. Con el juego se asimilaban reglas y valores propios de la sociedad, por ello, lo concebía como una preparación previa en los primeros años de la infancia.

Otro filósofo al que alude en su investigación es Aristóteles. Éste lo entendía como una preparación para el camino de las ocupaciones futuras. Sin embargo, destacaba que no podía haber aprendizaje jugando puesto que el juego es una medicina para el placer, el descanso y la relajación. Cuestiona su valor para el aprendizaje ya que aprender es costoso y el esfuerzo no puede estar relacionado con la actividad lúdica. Esta forma de entender el juego establece una dicotomía entre el juego y la productividad y, por tanto, aparta la actividad lúdica de la educación del niño.

Desgraciadamente, ésta es la línea que va a predominar en las escuelas en muchos momentos históricos. La idea de esfuerzo unida a una *actividad seria*, eliminaría toda opción posible de ubicar el aprendizaje dentro de una perspectiva lúdica.

Avanzando en el tiempo, el Renacimiento vuelve a traer consigo los ideales de Grecia y Roma. Se revitaliza el pensamiento en torno al juego y sus posibilidades pedagógicas a las que ya hacían referencia en dicha época.

Dentro de este periodo destaca *Luis Vives*, el cual define el juego como un recurso ideal para el desarrollo de procesos instructivos y educativos para el niño. De hecho, desde su perspectiva, el juego es capaz de diagnosticar el ingenio y capacidades propias del niño. Se sitúa como una experiencia que permite al niño desarrollar capacidades necesarias para el resto de su vida.

Finalizando este periodo histórico, en el siglo XVII es imprescindible mencionar a *Comenio*, considerado el padre del Realismo Pedagógico. Esta corriente prioriza el conocimiento de las cosas en sí mismas y no sólo el conocimiento de la palabra como había sido hasta entonces. Este pedagogo propuso encontrar un método para enseñar *todo a todos totalmente*. Enfatizó la necesidad de la enseñanza mediante el juego y gracias a él, aparecieron los primeros juegos didácticos. Su concepción de aprendizaje radica en la idea de que los niños deben ir a la escuela con alegría, a disfrutar mientras progresan en su evolución.

Avanzando en el tiempo, en el siglo XVIII, Payà en [40] destaca que antes de que comenzaran a emerger los grandes pedagogos de este periodo, la escuela se limitaba al uso del juego debido a su forma atrayente, es decir, para *adornar la forma*. Hasta este momento, y como se ha podido comprobar en el estudio de las etapas anteriores, muchos son los autores que comienzan a irrumpir con el juego como recurso didáctico, pero pocos son los maestros que lo llevan a sus aulas. De nuevo se presenta la dicotomía entre teoría y práctica, la cual, esta Memoria quiere superar.

Progresivamente comienza a configurarse una nueva concepción del juego en el ámbito escolar: el juego pasa de ser el medio facilitador de la enseñanza a ser el fin en sí mismo, puesto que gracias a él se consigue el desarrollo de los sentidos y el descubrimiento de las estructuras cognitivas en el aprendizaje del niño. El juego es el contexto natural del niño y en donde se va a sentir más cómodo y predispuesto para el aprendizaje. Facilita el proceso y permite desarrollar al máximo las capacidades del alumno. Comienza a hablarse de los intereses del alumno como punto de partida de su aprendizaje. De lo que se trata es de conectar con la emoción y la motivación del niño para que se divierta aprendiendo y qué mejor manera que jugando.

Uno de los autores que da forma a esta idea es *Ovide Decroly*. Ubicado entre los siglos XIX y XX este pedagogo belga creó el método pedagógico denominado *centro de interés*. Éste es entendido como una estrategia que permite el tratamiento conjunto de contenidos relevantes para el alumnado y conectados entre sí gracias a un eje vertebrador. Por supuesto, el tema de cada centro de interés viene dado por las necesidades, intereses y contexto de los niños. Otro principio fundamental que incorpora a su perspectiva es el concepto de *globalización de las ideas*. Su esencia reside en la conexión de estructuras de aprendizaje para generar progresivamente una red de conocimientos más amplia que rompa con la parcelación del conocimiento.

Dentro del S. XX también es imprescindible destacar a *Maria Montessori*. Esta célebre educadora defendió que el desarrollo del niño transcurre a través del juego. De hecho, el juego permite investigar y aprender de una manera relajada y libre al niño creando un entorno favorable para su aprendizaje.

Su método establece tres elementos básicos: niño, ambiente y amor. En este proceso el docente debe ser guía y orientador para ayudar al alumno a construir una estructura de aprendizaje sólida.

En síntesis, la idea de juego como recurso en el aula se concibe como una herramienta útil que sitúa al niño en un ambiente adecuado a sus intereses y motivado hacia los nuevos retos del aprendizaje de forma lúdica.

Actualmente, utilizar el juego como herramienta didáctica en el aula forma parte de muchas propuestas y centros escolares. El paso que se quiere dar en esta Memoria es unir estos tres elementos: niño, juego y Matemáticas.

b) Perspectiva psicopedagógica

El juego es una actividad fundamental para todo ser humano, especialmente en la etapa infantil ya que éste se encuentra íntimamente relacionado con el desarrollo del niño.

El niño se siente impulsado a jugar puesto que, a partir del juego, construye un entrono seguro, un escenario en el que comienza a poner en práctica habilidades sociales y en especial normas, las cuales concibe esenciales para favorecer la dinámica del juego.

Piaget, mencionado por Fernández Zalazar en [20] establece la clasificación de los tipos de juego según la evolución del alumno como se puede ver en la figura 1.3:

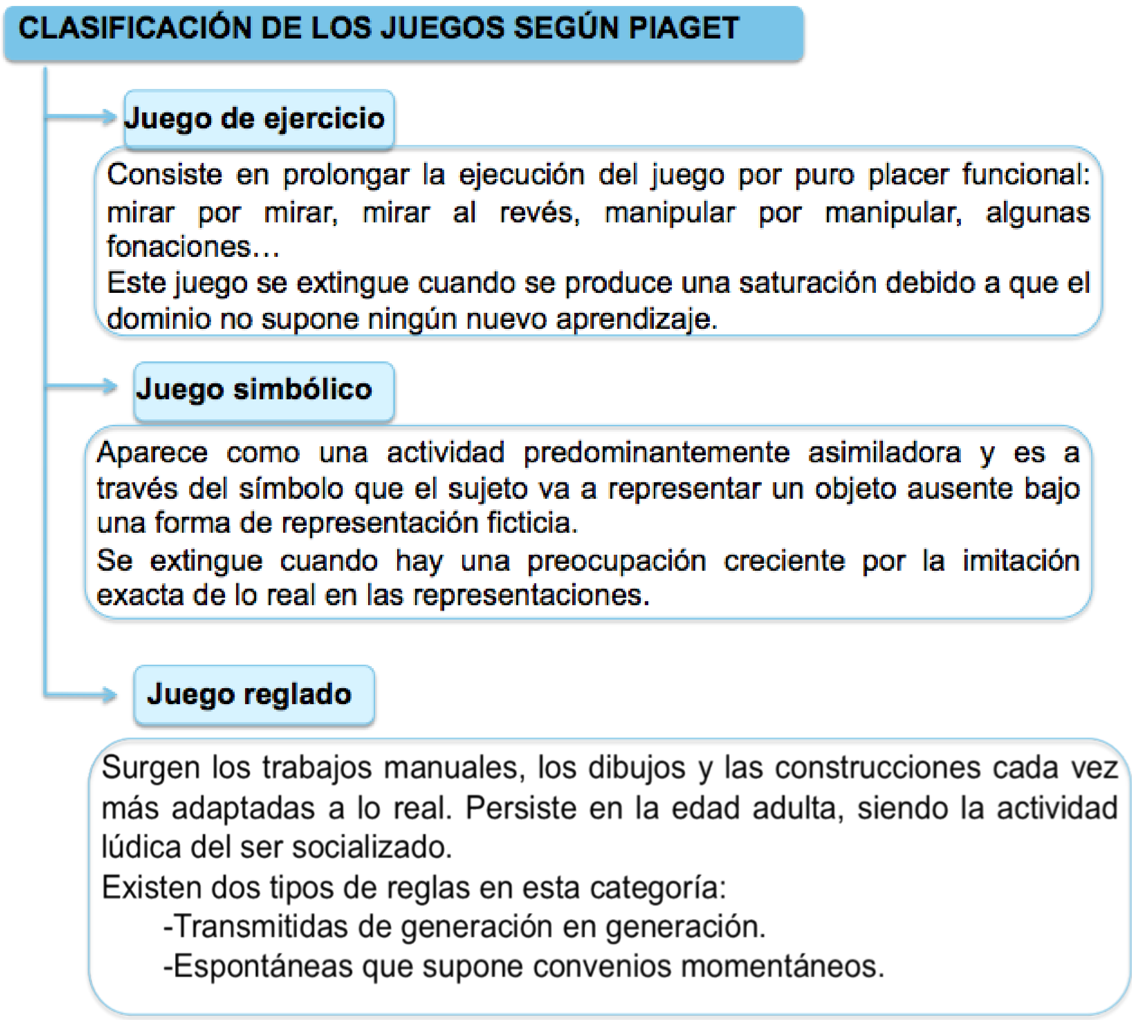


Figura 1.3. Clasificación de los juegos según Piaget

Además, pone de manifiesto que, a través del juego, se hace posible el desarrollo de las capacidades presentadas en la figura 1.4:

Figura 1.4 Capacidades que desarrolla el juego

La evolución de estas capacidades en el niño contribuye a la construcción de sus estructuras cognitivas de un modo progresivamente más complejo.

Paralelamente, aparecen diversos tipos de juegos en donde el grado de complejidad varía. Estas categorías nos permiten definir de forma más clara la estructura de pensamiento del niño.

La influencia de Piaget consigue que otros psicólogos y pedagogos lleguen a la conclusión de que la clase debe ser un lugar activo en donde el niño, a través del juego, se enfrente a situaciones que le permitan ampliar su red de conocimientos.

En esta línea, la profesora López Chamarro en [33] destaca que autores como Bruner y Garvey (1997) entienden el juego como una oportunidad para el niño de poner en práctica formas de conducta y patrones imprescindibles para el entorno social al que pertenecerán como adultos. Imaginar situaciones a través del juego ayuda a anticipar posibles respuestas en el futuro.

Esta autora también destaca las aportaciones de Vygotsky. En su teoría, entiende el juego como una situación simulada que modifica la conducta del niño, haciéndole redefinir sus mecanismos para dar respuesta a dicha situación imaginaria. La naturaleza social que posee el juego ayuda a la evolución del mismo. De hecho, ayuda el desarrollo de las funciones psicológicas superiores.

Vygotsky pone el acento, más que en el descubrimiento personal por parte del niño, en la interacción entre éste y el adulto o entre el niño y otro niño para ampliar sus esquemas cognitivos. Éstos, tendrán posibilidad de ser ampliados y reestructurados siempre que el niño se encuentre dentro de la zona de desarrollo próximo (ZDP) y el juego sitúa al niño en esta zona constantemente.

La ZDP se entiende como la distancia entre lo que es capaz de hacer el niño y aquello que sería capaz de hacer con ayuda de un adulto u otro niño que haya superado ese aprendizaje concreto. El instrumento que conecta estas dos zonas es el lenguaje.

En conclusión, el juego es una actividad imprescindible en el desarrollo motriz, cognitivo, social y emocional del niño desarrollándose paralelamente a la evolución de éste. El juego ofrece infinitas oportunidades para situarse en su ZDP y así propiciar nuevos aprendizajes.

Su desarrollo dentro del contexto educativo es fundamental de manera personal, puesto que permite conocer su mundo interior expresando con situaciones imaginarias lo que todavía no es capaz de expresar verbalmente y también de forma significativa ya que desarrolla habilidades que podrá aplicar en su vida cotidiana.

Cuando un niño juega se traslada a este tipo de situaciones o, más bien, a un escenario lúdico, lo que permitirá posteriormente enfrentarse con éxito a situaciones reales. ¿Y no es la educación el instrumento a través del cual contribuir a la formación de personas capaces de desenvolverse con éxito en situaciones de la vida cotidiana?

El juego puede ser el punto de partida, el canal y el fin en sí mismo de la educación. Los beneficios que proporciona al proceso de enseñanza y aprendizaje consiguen motivar, clarificar aprendizajes, contrastar opiniones, crear y resolver conflictos, trabajar en equipo, favorecer la atención, colaborar por un objetivo común… en definitiva, valores fundamentales para el resto de sus vidas.

Soto en [51] plantea la siguiente cuestión referida al juego: *si para llegar a un punto existen infinitos caminos, ¿por qué no utilizar el más divertido?*

El juego es un instinto natural en el niño y si además, nos aporta grandes ventajas en el proceso de aprendizaje, ¿por qué no utilizarlo como recurso didáctico? Más allá de la comodidad que las metodologías tradicionales de enseñanza aportan o el miedo a romper con la mismas, es necesario que el docente amplíe su campo de visión y dé un paso hacia metodologías en donde juego y educación van de la mano.

c) Perspectiva curricular

El objetivo de este apartado es analizar el grado de incidencia que el juego tiene en la actual legislación educativa desde ámbitos más generales hasta el ámbito referido a la Región de Murcia. A continuación se presenta la tabla 1.5 referida a los apartados en los que la LOMCE hace alusión a actitudes vinculadas al juego:

Tabla 1.5. Aspectos actitudinales referidos al juego en la LOMCE (página 14)

LOMCE: Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa
Aunque no hay una referencia directa al juego ni a la actividad lúdica, en la finalidad de la etapa de Educación Primaria se encuentra lo siguiente: <u>Apartado IV:</u> *Las habilidades cognitivas, siendo imprescindibles, no son suficientes; es*

necesario adquirir desde edades tempranas competencias transversales, como el pensamiento crítico, la gestión de la diversidad, la creatividad o la capacidad de comunicar, y actitudes clave como la confianza individual, el entusiasmo, la constancia y la aceptación del cambio. La educación inicial es cada vez más determinante por cuanto hoy en día el proceso de aprendizaje no se termina en el sistema educativo, sino que se proyecta a lo largo de toda la vida de la persona.   Modificación del apartado 2 del artículo 16:   *La finalidad de la Educación Primaria es facilitar a los alumnos y alumnas los aprendizajes de la expresión y comprensión oral, la lectura, la escritura, el cálculo, la adquisición de nociones básicas de la cultura y el hábito de convivencia así como los de estudio y trabajo, el sentido artístico, la creatividad y la afectividad, con el fin de garantizar una formación integral que contribuya al pleno desarrollo de la personalidad de los alumnos y alumnas y de prepararlos para cursar con aprovechamiento la Educación Secundaria Obligatoria.*   Artículo 17: Objetivos de la Educación Primaria: *b) Desarrollar hábitos de trabajo individual y de equipo, de esfuerzo y de responsabilidad en el estudio, así como actitudes de confianza en sí mismo, sentido crítico, iniciativa personal, curiosidad, interés y creatividad en el aprendizaje y espíritu emprendedor.*

Aunque no se hace una referencia explícita al juego, éstas son las palabras clave encontradas que se pueden vincular implícitamente al mismo: *creatividad, entusiasmo, sentido artístico, afectividad, formación integral, desarrollo de la personalidad, iniciativa personal, curiosidad e interés.*

El siguiente nivel de concreción es el Real Decreto 126/2014 en el que se definen de manera más concreta aspectos relacionados con la etapa de Educación Primaria. En la tabla 1.6 se presentan los apartados en los que se hace alusión al juego:

Tabla 1.6. Apartados vinculados al juego en el Real Decreto 126/2014

REAL DECRETO 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria
Contenidos del área de Matemáticas, Bloque 5. Estadística y probabilidad: *4.2 Realiza conjeturas y estimaciones sobre algunos juegos (monedas, dados, cartas, lotería…).*   Apartado referido a la Primera y Segunda Lengua Extranjera: *El empleo del juego, sobre todo en los primeros años, y la realización de tareas conjuntas, no sólo son elementos esenciales para sentar adecuadamente las bases para la adquisición de una lengua, sino que pueden además contribuir a que la materia, lejos de limitarse a ser un mero objeto de estudio, se convierta además en un instrumento de socialización al servicio del grupo.*

Apartado referido a la Educación Física: En varias ocasiones se hace mención al juego en equipo, los juegos tradicionales y el juego dramático como parte fundamental del área. Además, en el apartado final del área se encuentra la siguiente mención al mismo: *El juego es un recurso imprescindible en esta etapa como situación de aprendizaje, acordes con las intenciones educativas, y como herramienta didáctica por su carácter motivador. Las propuestas didácticas deben incorporar la reflexión y análisis de lo que acontece y la creación de estrategias para facilitar la transferencia de conocimientos de otras situaciones.*

En el Real Decreto sí se hace mención explícita al juego. De hecho, el último párrafo extraído, procedente del área de Educación Física, se puede aplicar al resto de áreas puesto que es un recurso motivador adaptado al contexto cotidiano del alumnado.

Por último, el tercer nivel de concreción en esta etapa educativa es el Decreto 198/2014. En la tabla 1.7 aparecen los aspectos que aluden al juego como recurso educativo:

Tabla 1.7. Apartados vinculados al juego en el Decreto 198/2014 (página 33186)

DECRETO 198/2014 de 5 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia
Orientaciones metodológicas del área de Matemáticas: - *Trabajar la geometría a partir de situaciones que resulten familiares para los alumnos (recorridos habituales, formas de objetos conocidos...) y mediante actividades manipulativas, lúdicas (plegado, recorte, modelado, etc.), así como a través del uso de materiales (tangram, geoplanos y mecanos, tramas de puntos, libros de espejos, material para formar poliedros, etc.) A este mismo fin puede contribuir el uso de programas informáticos de geometría dinámica o el de juegos de estrategia como el ajedrez.* - *Trabajar el azar y la probabilidad a través del juego y situaciones reales, mediante experimentos con objetos concretos tales como sacar fichas coloreadas de una bolsa, tirar una moneda o un dado, etc.* Apartado referido a la Primera y Segunda Lengua Extranjera: *El empleo del juego y la realización de tareas conjuntas, no sólo son estrategias válidas para sentar adecuadamente las bases para la adquisición de una lengua, sino que pueden además contribuir a que el área, lejos de limitarse a ser un mero objeto de estudio, se convierta además en un instrumento de socialización al servicio del grupo.* Orientaciones metodológicas de la Primera y Segunda Lengua Extranjera: - *En cuanto a los recursos utilizados en el aula, se podría habilitar un rincón de la lengua extranjera, donde materiales como el elaborado por*

el propio alumno, tales como cuentos, dibujos, juegos, grabaciones de voz; material propio del país de origen tales como cuentos, libros, cds, tarjetas con imágenes; e incluso materiales traídos por los propios alumnos como fotos de viajes, folletos publicitarios, envases, revistas, periódicos, etc. pudiera ser almacenado en este espacio.

Estándares de aprendizaje de la Primera Lengua Extranjera:

6. Participa de forma cooperativa (en parejas o pequeños grupos) en juegos.

Orientaciones metodológicas en Educación Artística:

La ludicidad como uno de los principios básicos de las corrientes pedagógicas musicales activas, pues el juego desarrolla las capacidades intelectuales, motrices y psicológicas.

Apartado referido a la Educación Física:

En varias ocasiones se hace mención al juego en equipo, los juegos tradicionales y el juego dramático como parte fundamental del área.

Orientaciones metodológicas en Valores Sociales y Cívicos:

Valorar el juego como elemento potenciador del aprendizaje en situaciones diversas.

Apartado referido a la Profundización en Matemáticas:

- *Partir de los intereses del alumnado, planteando puestas en común para encontrar aquellos centros de interés que estén más cerca de sus preferencias y trabajar los aprendizajes del área en torno ellos. Por ejemplo, para trabajar el cálculo mental, podemos decidir entre los pasatiempos o juegos matemáticos que resulten más atractivos para nuestro grupo de alumnos.*
- *El juego debe ser un vehículo prioritario en la sesión, partiendo de la premisa de que el alumno está siempre motivado en el desempeño de cualquier rol dentro del mismo. Este sentido lúdico puede ser visto como un medio, o bien como un fin en sí mismo cuando la naturaleza de la tarea así lo requiera.*

Contenidos referidos a Profundización en Matemáticas:

Juegos de estrategia y azar: ajedrez, pasatiempos, solitarios, tres en raya, etc.

Estándares de aprendizaje en Profundización en Matemáticas:

4.1 Analiza las posibles estrategias de participación en los juegos, buscando la ganadora.

Criterios de evaluación en Profundización en Matemáticas:

5. Conocer las distintas piezas del juego de ajedrez. ajedrez y sus movimientos.

Estándares de aprendizaje en Profundización en Matemáticas:

5.1 Conoce los nombres de las distintas piezas de ajedrez y sus movimientos

5.2 Realiza movimientos adecuados en ajedrez.

Orientaciones metodológicas en Refuerzo en la Competencia de

<u>Comunicación Lingüística:</u>

La adquisición de la ortografía arbitraria se promoverá mediante recursos TIC, juegos, y otros recursos que sirvan para ampliar el léxico visual.

<u>Contenidos Refuerzo en la Competencia de Comunicación Lingüística:</u>

Adquisición de la ortografía arbitraria: uso de las Tic, barajas ideo - visuales, juegos, deletrear hacia adelante y hacia atrás.

<u>Estándares de aprendizaje en Refuerzo en la Competencia de Comunicación Lingüística:</u>

2.1 Muestra, mediante juegos, sus conocimientos de ortografía arbitraria: medios informáticos, barajas de ortografía ideo-visual.

2.1 Utiliza diversos medios para afianzar sus conocimientos de ortografía arbitraria: medios informáticos, barajas de ortografía ideo-visual, juegos, etc.

En el Decreto de la Región de Murcia se hacen menciones más explicitas sobre el uso del juego como recurso educativo. De hecho, cabe destacar especialmente, como hace referencia al plegado, tangram o ajedrez dentro del área de Matemáticas. Estos dos últimos recursos se exponen en esta Memoria.

En definitiva, a medida que se concreta más la legislación educativa, se hacen referencias más claras sobre la necesidad de utilizar recursos lúdicos en el aula para fomentar un aprendizaje significativo en el alumnado. Con lo cual, desde un punto de vista legislativo, el juego también cobra sentido en las aulas escolares.

1.3.2 El juego en las Matemáticas

a) Relación entre el juego y las Matemáticas

El juego se constituye como un recurso atractivo para el alumnado y, además, se configura como actividad natural y espontánea en estas edades. Su alto poder motivador consigue implicar al alumno en su aprendizaje sin darse cuenta. En palabras de Antonio Pérez Sanz en [43]: las *clases de matemáticas en la enseñanza obligatoria deberían plantearse siempre así, como aventuras del conocimiento, con su carga afectiva de entusiasmo, de paciencia, de tenacidad y esfuerzo, de compartir, de ayudar al compañero o de recibir su apoyo, de consenso y solidaridad para llegar a la meta.*

La actividad lúdica en esta área apuesta por unas *Matemáticas divertidas* que hagan disfrutar al alumnado, rompiendo con el rechazo que se suele tener hacia las mismas. Convertir un contenido matemático en un juego no es casualidad puesto que tienen más rasgos en común de lo que aparentan. Ambos potencian la estrategia, el pensamiento lógico y el razonamiento ya que se tiene un problema inicial, una estrategia y la necesidad de resolverlo de manera adecuada para alcanzar una solución satisfactoria para todos.

Sin embargo, para que el juego cobre verdadero sentido en el aula, tendrá que apoyarse en otros recursos que garanticen una enseñanza y un aprendizaje de las Matemáticas de calidad. ¿Qué recursos se pueden seleccionar para garantizar la eficacia del juego y por qué? Es primordial hacer una selección de juegos que permitan fomentar capacidades propiamente matemáticas ayudando así al niño a aprendizajes posteriores.

Por tanto, aunque se pudiera pensar lo contrario, el juego no se encuentra del todo incluido en el área Matemáticas. Sin embargo algunas líneas de pensamiento y propuestas invitan al juego a que se convierta en un recurso imprescindible en el aula.

b) Situación actual del juego en las Matemáticas

Tal y como se establece Blasco en [5] y [6] los docentes enseñan contenidos establecidos por el currículo que contestan preguntas que ningún alumno ha hecho y esto, como comienzo no es muy motivador, sobre todo en el área de Matemáticas.

Los docentes siempre han querido dar un carácter serio a las áreas que imparten, sin embargo, sin querer eliminar el respeto que cada una posee, divertido es lo contrario de aburrido, no de serio (ver [42]).

Tomando como referencia a Edo y Deulofeu en [15] y [16], el juego aplicado a la enseñanza se configura como una actividad universal que no conoce fronteras y que abre el paso a un tipo de aprendizaje que entusiasma, intriga y lo que es aún mejor, enamora puesto que:

- Es una actividad natural: todos sabemos jugar.

- Despierta los aspectos afectivos, relacionales y motivacionales según se establece en [10].

- Favorece el desarrollo de capacidades cognitivas como el uso de estrategias, pensamiento divergente y el razonamiento, así como la imaginación (ver [23]).

- Por primera vez aprender en la escuela va a ser sinónimo de diversión (ver [35]).

Además, como determina Chamoso en [9] el juego como herramienta para el proceso de enseñanza y aprendizaje posee las características reflejadas en la tabla 1.8:

Tabla 1.8. Características del juego según Chamoso

CARACTERÍSTICAS DEL JUEGO		
Lúdico	Libre	Improductivo
Con reglas propias	Competitivo	Intenso
Limitado espacial y temporalmente	Se acompaña de tensión y alegría	Produce satisfacción en sí mismo

Por supuesto, esta propuesta también tiene en cuenta las dificultades que el juego puede tener en su puesta en práctica, las cuales han sido establecidas por Corbalán en [12]:

- Limitaciones financieras.
- Inconvenientes topográficos.
- Excesivo número de alumnos.
- Presiones psicológicas.
- Presiones sociales.
- Dictadura de los programas.

En cualquier caso son dificultades superables ya que siempre existen alternativas que permiten adaptarse a un presupuesto muy ajustado, al lugar en el que se vive, al alumnado y a las exigencias fruto de los programas educativos.

En definitiva, desde esta perspectiva y tal y como propone López Martín en [34] la meta de la pedagogía del juego debe ser averiguar los recursos lúdicos que faciliten el aprendizaje del alumno y además éste los acepte de buen grado.

1.3.3 El juego en las Matemáticas y la dislexia

a) La dislexia en niños de Educación Primaria

La definición de dislexia, según la Asociación Internacional de Dislexia (2002) y recogida en [11] es *la dificultad específica de aprendizaje, de origen neurobiológico, que se caracteriza por dificultades en el reconocimiento preciso y fluido de las palabras y por problemas de ortografía y decodificación. Esas dificultades resultan de un déficit en el componente fonológico*.

Dentro del sistema educativo está catalogada con una dificultad específica de aprendizaje que afecta tanto a la fluidez y velocidad lectora como a la comprensión. Su tratamiento específico se realiza a través de un diagnóstico psicopedagógico que permite determinar el tipo y grado de dislexia y las medidas a tener en cuenta.

En este sentido, la dislexia puede producirse antes o después de adquirir la lectura. En la tabla 1.9 se distinguen los siguientes tipos según la mencionada guía:

Tabla 1.9. Tipos de dislexia según la guía presentada por la Consejería de Educación y cultura de la Región de Murcia

TIPOS DE DISLEXIA
Dislexia adquirida
Se produce cuando una persona, habiendo logrado un nivel lector específico, pierde algunas habilidades lectoras, fruto de una lesión cerebral.
Dislexia del desarrollo
Tiene lugar cuando un niño, sin ninguna razón aparente presenta dificultades en la lectura como: - *Estrategia fonológica*: el alumno pronuncia la palabra y la identifica usando la ruta fonológica, es decir, a través de la conversión de grafemas (letras) a fonemas (sonidos). Se le llama indirecta, pues se construye la frase a partir de la palabra y está a partir de las sílabas, y estas a su vez, desde los fonemas. Cuando está afectada esta estrategia, la lectura se produce por la ruta visual y se le conoce en la literatura científica como dislexia fonológica, dislexia subléxica, dislexia disfonética o dislexia lingüística. - *Estrategia visual global*: el alumno utiliza la ruta visual, ortográfica o semántica, comparando la forma ortográfica de la palabra escrita (secuencia de letras) con las representaciones de palabras de que dispone en su léxico visual (a modo de "diccionario visual"). Se le llama directa porque de un solo golpe visual se llega al conocimiento de la palabra. Cuando está afectada esta estrategia, la lectura siempre se produce por la ruta fonológica y se le conoce en la literatura científica como dislexia visortográfica o léxica, dislexia superficial, dislexia diseidética - dislexia perceptiva. - *Dislexia profunda:* cuando las dificultades se presentan en las dos estrategias anteriores, se habla de dislexia profunda o combinada.

Aunque no está claro que haya una relación directa entre la dislexia y la discalculia, ambas dificultades afectan a la comprensión lectora y a la habilidad del niño para entender palabras relacionadas con las Matemáticas.

Es común que los niños tengan más de una dificultad de aprendizaje asociada al lenguaje y la comprensión lectora. Del mismo modo, en muchas ocasiones esas dificultades de comprensión afectan al ámbito matemático.

b) La dislexia en el aprendizaje de las Matemáticas: discalculia

La discalculia es una dificultad específica de aprendizaje que afecta a la habilidad de entender y trabajar con números y conceptos matemáticos lo que dificulta la comprensión en la lógica del proceso.

Los síntomas para detectar la discalculia en el alumnado de Educación Primaria son los siguientes:

- Presenta problemas en el reconocimiento de números y símbolos.
- Tiene dificultades en el reconocimiento y uso de los signos matemáticos pertenecientes a las operaciones.
- No es capaz de construir estrategias de cálculo mental como por ejemplo, las parejas de números que suman 10, suma de decenas, etc.
- Le cuesta escribir las cifras claramente y colocarlas en la columna correcta.
- No comprende los enunciados de problemas y plantear una estrategia de resolución.
- Su sentido de la orientación es deficiente.
- Tiene problemas interpretando la hora en un reloj.

Sin embargo, es importante destacar que no se trata de una discapacidad, sino de una dificultad en muchos casos salvable. A través de adaptaciones metodológicas y de la ampliación de canales para llegar al alumno (visual, manipulativo…) se puede lograr el aprendizaje de dichos contenidos matemáticos como las que se presentan a continuación:

- Utiliza un enfoque de aprendizaje multisensorial involucrando varios sentidos: vista, oído, tacto y movimiento.
- Incluye actividades lúdicas para que su grado de concentración sea mayor y la implicación en su aprendizaje.
- Cambiar de tarea más rápidamente que con otros alumnos para que su interés no decaiga.
- Establecer instrucciones claras y sencillas para la realización de cada actividad propuesta con el fin de asegurarse de que el niño haya asimilado bien las explicaciones.
- Utilizar diferentes materiales que apoyen el mismo aprendizaje y que permitan concretar aprendizajes más abstractos.
- Hacer uso de las TIC como recurso motivador apoyando la idea de aprendizaje multisensorial.
- Respetar su ritmo de aprendizaje adaptándose a sus necesidades y empatizando en todo momento con el niño de modo que sienta que el docente es su apoyo y guía en todo el proceso.

c) El juego en las Matemáticas como recurso de aprendizaje para el alumnado con dislexia

Tanto para el alumnado con dislexia como para el alumnado que no la presenta es imprescindible ofrecer una amplia variedad de recursos en la enseñanza para lograr un mejor aprendizaje.

De hecho, como se ha comentado en apartados anteriores, incluir la actividad lúdica en el alumnado favorece el grado de concentración y aumenta la motivación. Por tanto, trabajar habilidades matemáticas tales como la lógica, la estrategia, la abstracción geométrica y el cálculo mental mediante el juego permite que el alumno se encuentre seguro en un escenario que domina, entre iguales y sin la sensación de inseguridad.

Además, el juego reduce la cantidad de carga escrita en su desarrollo. Se trata de manipular piezas para lograr una estrategia ganadora. De forma visual y experimental se consigue, por ejemplo, que alumno entienda que dos triángulos siempre forman un cuadrilátero, utilizando para ello el tangram.

En definitiva, el juego beneficia al conjunto del alumnado en general y específicamente al alumnado con dislexia ya que el objetivo en todo momento es crear un contexto adaptado a sus intereses en donde el alumno se sienta seguro.

1.3.4 El juego en Matemáticas para enseñar a pensar: iniciación a la filosofía

a) Filosofía para enseñar a pensar a los niños

Tal y como explica Nomen en [37], la Filosofía y el niño pueden ocupar un marco común dentro del contexto educativo. Sin embargo, no es habitual hablar de la Filosofía en las aulas cuando se trata de la Educación Primaria.

Trabajar la Filosofía en clase no requiere una edad concreta ni tampoco centrarse en grandes pensadores de diferentes épocas. Abrir las puertas a la Filosofía desde la educación escolar significa brindar la oportunidad a los niños de ser capaces de pensar por sí mismos desde una perspectiva crítica, capaces de entender y modificar el mundo que les rodea.

Hablar de la Filosofía y de los niños también implica, como se hace en [37], hacer mención a Matt Lipman. Matt Lipman fue un filósofo y educador estadounidense que al trabajar con sus alumnos se dio cuenta de la importancia de tener un pensamiento crítico para ayudar a conformar un mundo mejor. Lipman escribió algunos relatos para trabajar la Filosofía con sus alumnos. El primero de ellos se titula El *descubrimiento de Harry* (1988). La idea es que estos relatos lancen una cuestión para reflexionar en clase.

Este autor demostró los beneficios de trabajar la Filosofía con sus alumnos desde la escuela y gracias a ello creó, junto con Ann Margaret Shart, el *Institute for the Advancement of Philosophy for Children*. Ambos continuaron escribiendo relatos a partir de los cuales trabajar diferentes cuestiones enmarcadas en la Filosofía.

Un aspecto muy interesante es que los beneficios obtenidos por parte de los alumnos de Lipman no sólo se percibieron en el área de Filosofía, sino también en el resto de áreas, por tanto, ¿por qué no abordarla en Educación Primaria?

Cuando se presenta la idea de que un niño aprenda Filosofía no se trata de que se convierta en un filósofo sino de que adquiera las habilidades necesarias para poder crecer personal y científicamente. Con relación a las reflexiones, Nomen en [37] determina que de lo que se trata es de dar luz al conocimiento del niño abriendo todas las ventanas que sean posible. Y la Filosofía puede proporcionar muchas ventanas que iluminen el saber.

La Filosofía es curiosidad, investigación e interés por todo lo que ocurre a alrededor de los seres humanos, preguntarse el porqué de las cosas, cualidad innata en cualquier niño. Se debe proporcionar a los alumnos herramientas para ser capaces de contemplar el mundo con una mirada crítica en cualquier ámbito de su vida (ver [27]). Por todo ello, incluir esta forma de entender la Filosofía en las aulas beneficia las capacidades referidas en la figura 1.5:

Pensamiento divergente	Reflexión	Uso del diálogo
Contemplar diferentes puntos de vista	**BENEFICIOS DE LA FILOSOFÍA EN EL AULA**	Construcción de un autoconcepto ajustado
Empatía	Escala de valores más sólida	Error: fuente de aprendizaje

Figura 1.5. Beneficios de la Filosofía en el aula

Por tanto, no se trata de que el niño conozca en sí misma la vida de grandes filósofos y sus teorías de conocimiento. Consiste en que el niño sea capaz de pasar de la comprensión a la reflexión según la figura 1.6 que se presenta a continuación:

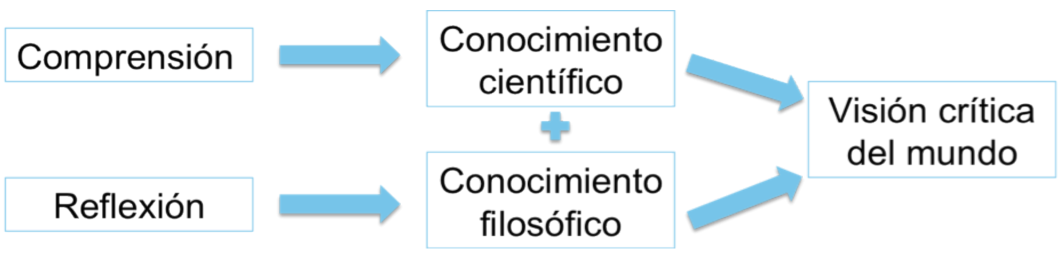


Figura 1.6. Capacidades para fomentar en el aluno una visión crítica del mundo

Este gran paso es muy valioso para el conjunto de todas las áreas de conocimiento, tanto en Primaria como en Secundaria. El ser humano ha de ser capaz de comprender el medio en el que se desenvuelve pero también reflexionar sobre el mismo para mejorarlo.

Una vez justificada la necesidad de trabajar aspectos filosóficos en el aula, habrá que conectarlo con el propósito de esta Memoria: el juego y las Matemáticas. Sin embargo, antes cabe realizar la siguiente cuestión: ¿tiene sentido trabajar la Filosofía para que nuestros alumnos mejoren en su aprendizaje?

Realmente el trabajo matemático implica el desarrollo de un pensamiento crítico, diseñar estrategias útiles para alcanzar la resolución de un problema, valorar los resultados obtenidos, fruto de la decisión tomada y aprender de los errores cometidos.

Además, aunque éste no es el objetivo de la presente Memoria, los grandes matemáticos siempre han estado ligados al estudio de la Filosofía. Por tanto, tiene sentido apostar por la Filosofía como parte transversal de la propuesta.

b) Juego, Matemáticas y Filosofía

Dar un paso más en esta investigación supone resaltar las conexiones existentes entre la Filosofía y nuestro objeto de conocimiento: el juego en el área de Matemáticas. Durante toda la Memoria se han ido resaltando las conexiones entre juego y Matemáticas y, además, también se ha hecho mención a la relación existente entre Matemáticas y Filosofía; ¿por qué entre el juego matemático y la Filosofía?

De nuevo, en [37] se realiza una reflexión sobre el juego. Entiende éste como una actividad para todo el mundo, una oportunidad para el desarrollo cognitivo, emotivo y social de la persona, sea cual sea su edad.

Además, este autor, en palabras de Huizinga (2004) propone la idea del que el ser humano en el fondo sería un *Homo ludens*. De hecho, establece que el juego ayuda al alumno en las capacidades mencionadas en la figura 1.7:

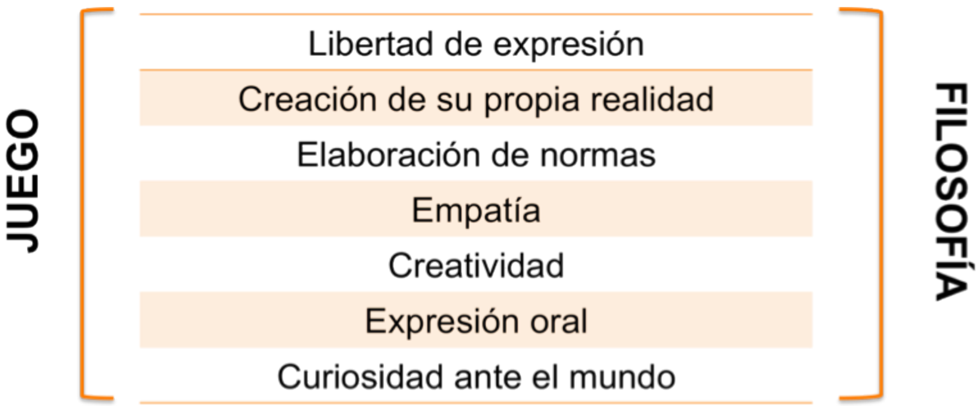


Figura 1.7. Capacidades que fomentan el juego y la Filosofía en las aulas

De lo que se trata es de otorgar al juego la importancia que merece. No entenderlo como una mera herramienta de entretenimiento cuando no sé sabe qué hacer o cuando los contenidos *importantes* ya se han trabajado en el aula. El juego es una adaptación a los diferentes ritmos de aprendizaje que posee cada alumno.

Los niños aprenden jugando de manera reflexiva ya que se presenta como el escenario perfecto para ensayar una realidad futura. Tienen libertad de actuación, *crean* su propio mundo y determinan de manera consensuada unas normas que hay que cumplir para el buen funcionamiento del mismo. En este momento estarían dando el gran paso de la comprensión a la reflexión comentado anteriormente. De hecho, están dando un sentido práctico a la Filosofía en su vida cotidiana.

Si, además, se ubica el juego dentro de un contexto matemático en el que el niño desarrolle estructuras válidas para la resolución de problemas, se estará dotando al juego de un poder absoluto para el proceso educativo. En los siguientes apartados se presentan juegos concretos para trabajar y mejorar destrezas matemáticas.

CAPÍTULO 2

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

ÍNDICE

Introducción

El capítulo dos se inicia plateando las cuestiones que esta Memoria quiere resolver a través de su puesta en práctica. Fruto de éstas cobra sentido establecer un objetivo principal y, a partir de éste, seis objetivos específicos para alcanzar el mismo.

Fijadas las metas que quiere lograr este trabajo es necesario centrarse en el diseño de la investigación. Para ello, se debe de tener muy en cuenta las fuentes que, al igual que en la fundamentación teórica, determinarán el punto de partida: histórica, psicopedagógica y curricular.

Del mismo modo, hay que definir el tipo de metodología de investigación que se llevará a cabo. Existen dos tipos de investigación: cuantitativa y cualitativa. Este trabajo se enmarca dentro de un enfoque cualitativo ya que se trata de un proceso inductivo. Se estudia un hecho específico, en este caso el proceso de aprendizaje de un grupo de alumnos concreto en el área de Matemáticas. El investigador se concentra en las vivencias de los participantes dentro de un contexto social.

Además, la metodología de tipo cualitativo puede ser descriptiva o interpretativa. Esta Memoria es del tipo descriptivo ya que el investigador forma parte activa del proceso ayudando a transformar la realidad con la que se encuentra. Por ello, es importante tener un conocimiento previo del contexto a partir del cual se desarrolla la propuesta.

El grupo de alumnos al que se dirige está formado por 20 niños y niñas de entre 10 y 11 años. Se encuentran en 5.º curso de Educación Primaria en un centro ubicado en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia.

Por último, en este capítulo se organizan los tiempos en la realización de la investigación previa (curso 2016-2017), la puesta en práctica (curso 2017-2018) y la valoración de los resultados (curso 2018-2019).

2.1 Cuestiones a resolver

En todo trabajo es imprescindible establecer las preguntas que dan origen a la Memoria y, a su vez, la dotan de significado pues, a partir de éstas es cuando realmente genera la necesidad de investigar el ámbito de las Matemáticas y su vinculación con el juego:

- ¿Cuál ha sido la evolución del juego a lo largo del tiempo y en ámbitos como la psicología y la pedagogía?

- ¿Cuáles son las características propias de un niño de Primaria? ¿Y sus motivaciones?

- ¿Qué relación existe entre las Matemáticas y el juego?

- ¿Cuáles son las conexiones existentes entre el juego, las Matemáticas y la actual legislación educativa?

- ¿Qué propuestas se han llevado a cabo utilizando estos recursos para trabajar las Matemáticas? ¿Cuáles han sido sus beneficios y aportaciones a la didáctica de las Matemáticas?

- ¿Pueden ser el ajedrez, el sudoku y el tangram recursos lúdicos para trabajar los contenidos del área de Matemáticas en 5.º de Educación Primaria?

- ¿Qué otros recursos lúdicos se pueden utilizar para trabajar las Matemáticas en el aula?

Contestar a estas preguntas es la idea principal de esta Memoria y, para ello, habrá que transformarlos en objetivos.

2.2 Objetivos generales y específicos de la investigación

El objetivo principal a partir del cual surge esta Memoria es el siguiente:

Analizar y poner en práctica el juego como herramienta de aprendizaje para el área de Matemáticas en 5.º de Educación Primaria.

Éste se considera el eje central que permite establecer los objetivos específicos de esta propuesta presentados en la tabla 2.1:

Tabla 2.1. Objetivos específicos de la Memoria

OBJETIVOS ESPECÍFICOS
OBJETIVO 1. Analizar el uso y evolución del juego a lo largo de la historia y en el currículo de la Educación Primaria.
Este objetivo se plantea debido a que toda investigación precisa de una fundamentación teórica que ubique el juego a lo largo de la historia y que permita establecer una línea de trabajo. Del mismo modo, los contenidos que se desarrollan durante la propuesta deben estar conectados con el currículo que establece la Región de Murcia.
OBJETIVO 2. Definir las características propias del alumnado de Educación Primaria para adaptarse a sus necesidades de aprendizaje.
Se debe delimitar un contexto, en este caso las características del alumnado de 5.º curso, para adaptar el proceso de enseñanza a sus necesidades.
OBJETIVO 3. Establecer los puntos en común entre juego y Matemáticas así como sus beneficios didácticos.
Es preciso fundamentar por qué el juego puede ser un buen aliado en el aprendizaje de las Matemáticas. Para su justificación se establecen los puntos que tienen en común.
OBJETIVO 4. Justificar la elección del ajedrez, el sudoku y el tangram como recursos lúdicos para trabajar en el área de Matemáticas.

La elección de estos tres recursos debe justificarse atendiendo a investigaciones previas que hayan valorado su eficacia dentro del contexto educativo. En el caso de que no existan, será la propuesta la encargada de demostrar dicho beneficio.
OBJETIVO 5. Elaborar y poner en práctica una propuesta didáctica utilizando el ajedrez, el sudoku y el tangram como recursos de carácter lúdico para favorecer el aprendizaje de las Matemáticas en 5.º curso.
Justificados todos los elementos que forman parte de la propuesta es necesario elaborar una propuesta didáctica que permita llevar a la escuela, en este caso a 5.º curso, el trabajo con el juego en el área de Matemáticas.
OBJETIVO 6. Iniciar al alumnado en el conocimiento del NIM, las Torres de Hanoi, la Matemagia y la conjetura de Collatz.
Como complemento, es interesante trabajar con otros juegos matemáticos para enriquecer la propuesta.

2.3 Diseño de la investigación

2.3.1 Fuentes de la investigación

El elemento principal del que parte esta propuesta es el juego, la forma más antigua que ha tenido el ser humano y con el cual ha logrado grandes avances en su desarrollo personal y social desde la infancia hasta su fase de adulto. Para analizar el juego hemos realizado su estudio desde cuatro fuentes fundamentales:

- *Histórica:* recorriendo la evolución del juego en el aprendizaje del niño desde diferentes épocas históricas hasta el Siglo XX.

- *Psicopedagógica:* diferentes perspectivas conciben el juego como una herramienta que favorece el crecimiento personal y social del niño ya que es una preparación para su futura vida adulta. Autores como Piaget o Vigotsky ponen de manifiesto sus grandes ventajas en el proceso de maduración. Como consecuencia, no es de extrañar que en el ámbito escolar cobre una especial relevancia. Esto es debido, principalmente, a su alto poder motivador, al interés que suscita y a su preparación para situaciones propias de la vida cotidiana.

- *Curricular:* desde un punto de vista legislativo, el juego debe conectarse con los elementos prescriptivos que se determinan dentro de cada uno de los cursos de la etapa de Educación Primaria, por ello, es preciso analizar en qué medida el currículo está vinculado a la metodología que se plantea desde nuestra propuesta.

Progresivamente la investigación profundiza más enlazando el juego con el aprendizaje matemático, incidiendo en la gran cantidad de semejanzas que estos dos ámbitos comparten o más bien, pueden compartir en las aulas escolares. Autores como Martín Gadner en [25] o Miguel de Guzmán en [26] enfatizan dichas semejanzas para conseguir aprender Matemáticas jugando.

De manera más concreta nuestra investigación se centra en los cuatro pilares fundamentales que componen el área de Matemáticas en la Educación Primaria: geomería, numeración, resolución de problelmas y probabilidad.

2.3.2 Metodología de investigación

Hernández Sampieri en [28] establece que la investigación es el estudio de un fenómeno de manera sistemática y rigurosa. Es decir, se trata de delimitar un objeto, a partir de éste plantear hipótesis, comprobarlas y establecer unas consecuencias.

La metodología de investigación permite al investigador orientar su trabajo con el fin de que sea útil y significativo para el ámbito de estudio en el que se encuentra inmerso.

Existen dos tipos de investigación: cuantitativa y cualitativa. A partir de éstas, todo estudio evolucionará de manera distinta. El contexto en el que se desarrolla el mismo delimita el tipo de investigación que se trata.

Enfoque cuantitativo

El enfoque cuantitativo es un estudio secuencial, delimitado paso a paso. Este orden en el proceso no puede alterarse y ha de ser riguroso. Parte de preguntas de las cuales se establecen hipótesis. Con estas hipótesis se delimitan variables. Este enfoque se basa en la estadística ya que los resultados que aporta son numéricos. Esto garantiza un alto grado de objetividad en el proceso.

Enfoque cualitativo

El enfoque cualitativo es un proceso inductivo. Se estudia un hecho concreto y, a partir de éste, se establecen generalidades. En este caso, el investigador se concentra en las vivencias de los participantes dentro de un contexto social. Se basa en la recopilación de datos, la observación y la evaluación de experiencias. Como consecuencia, se interpreta el significado de las acciones de los seres vivos que se estudian.

Definidos ambos enfoques, esta Memoria se enmarca dentro de una metodología cualitativa ya que estudia una realidad dentro de un contexto escolar delimitado, analiza la evolución de las personas implicadas (en este caso los 20 alumnos que forman la clase de 5.º de Primaria) y las consecuencias que tales cambios suponen.

En una investigación de estas características, el investigador se adentra en el contexto delimitado por el estudio de forma holística para poder describir los acontecimientos y establecer conclusiones. Otros rasgos que también definen la metodología de investigación de esta Memoria son los que aparecen en la tabla 2.2 :

Tabla 2.2. Rasgos que definen el enfoque de investigación de la Memoria

ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN			
Subjetiva	Inductiva	Abierta y flexible	Contacto directo con el objeto de estudio
Describe la información proporcionada	En ocasiones vuelve a etapas previas	Parte de las observaciones iniciales	Estudia a las personas en sus ambientes naturales

La metodología cualitativa puede clasificarse en dos tipos: descriptiva o interpretativa.

Esta Memoria se enmarca en la investigación descriptiva, más concretamente dentro del diseño investigación-acción. En este caso el investigador forma parte activa del proceso ayudando a transformar la realidad con la que se encuentra. Por ello, es importante tener un conocimiento de la situación de la que se parte para que a partir de ésta se diseñe un plan de acción.

Definida la metodología de actuación, éstas son las fases de la propuesta:

- *Fundamentación teórica de la propuesta y su vinculación con el área de Matemáticas (capítulos 1 y 2)*. Para ello, se han llevado a cabo las siguientes técnicas:
    - *Recogida y organización de la información*: consulta de fuentes pedagógicas e históricas y artículos e investigaciones previas vinculadas al tema estableciendo ítems que permitan organizar y destacar la información más relevante en el proceso de evolución.
    - *Análisis de la información*: contraste de los aspectos más valiosos para la investigación que permitan conectar la evolución de las metodologías vinculadas a la actividad lúdica en diferentes periodos.
    - *Enfoque metodológico*: establecimiento de los principios fundamentales que conforman una metodología fundamentada en el juego de modo que favorezca la construcción de las bases para una metodología adaptada a la escuela actual.
- *Elaboración y aplicación de la propuesta (capítulos 3, 4, 5 y 6).* En esta segunda parte se diseña y pone en práctica la propuesta. Las técnicas que se han aplicado para su elaboración son:
    - *Análisis de los elementos curriculares de 5.º curso*: estudio de competencias, objetivos, contenidos, criterios de evaluación y

estándares de aprendizaje en el área de Matemáticas para contextualizar los aprendizajes a desarrollar.

- *Elección de recursos*: selección de tres recursos lúdicos que permitan desarrollar aprendizajes matemáticos enmarcados en la Educación Primaria.

- *Diseño de la propuesta didáctica*: confección de una propuesta didáctica teniendo en cuenta las bases teóricas concluidas en la primera fase y las características del contexto al que se dirige.

- *Valoración de la propuesta didáctica (capítulo 7)*. Establecimiento de conclusiones e implicaciones educativas una vez aplicada la propuesta en el contexto previamente definido (curso de tercer ciclo de Educación Primaria).

  - *Establecimiento de conclusiones e implicaciones educativas*: análisis de los resultados obtenidos tras la práctica con el fin de determinar las conclusiones del proyecto así como sus implicaciones para la actividad docente en el área de Matemáticas en la Educación Primaria.

Aunque el diseño de la propuesta didáctica se establece de forma más detallada en los capítulos 3, 4 y 5, se ha establecido una estructura básica para el desarrollo de la propuesta dentro del aula con cada uno de los juegos: ajedrez, sudoku y tangram. Las fases de la misma son las siguientes:

- Lluvia de ideas: en el inicio de cada propuesta didáctica se plantea una sesión inicial para descubrir cuáles son los aprendizajes previos del alumnado respecto al juego que se va a iniciar.

- Fundamentos del juego: las primeras sesiones se dedican a explicar los fundamentos y reglas del juego y los alumnos comienzan a practicar las normas básicas.

- Puesta en práctica: cuando los alumnos ya han adquirido la mecánica del juego, es momento de que comiencen a jugar de forma más meditada y estratégica.

- Reflexión sobre lo aprendido: es importante dedicar algunas sesiones al análisis de jugadas llevadas a cabo, planteamiento de situaciones hipotéticas y justificación de la elección de una u otra alternativas en el transcurso del juego.

- Cultura del juego: la última sesión siempre se dedica al origen del juego trabajado y la evolución del mismo a lo largo de los años.

2.4 Contexto y población

Nuestra propuesta está diseñada para un grupo de 20 alumnos de 5.º curso de Educación Primaria del colegio Vista Alegre en Las Torres de Cotillas (Murcia). Sus edades están comprendidas entre los 10 y 11 años de edad. Entre ellos se encuentran 6 alumnos con dislexia en el aula. El centro está ubicado en una zona deprimida económicamente. Como consecuencia, el contexto socioeconómico es bajo, con alto nivel de inmigración y con escasa participación de las familias en el proceso educativo de sus hijos.

Según Piaget en [45] se encuentran casi finalizando el estadio de las operaciones concretas (7-11 años). Esto implica que están culminando el desarrollo de sus capacidades sensoriales y consolidando su pensamiento lógico-concreto. Por tanto, cuantos más sean los recursos presentados para trabajar los aprendizajes del curso, más se podrá asegurar un aprendizaje significativo en el alumno.

De manera más concreta, el conocimiento que tienen sobre los tres recursos principales a partir de los cuales se basa la propuesta: ajedrez, sudoku y tangram es sólo superficial, es decir, saben cuál es la mecánica de cada uno pero apenas han jugado. Esto supone partir de cero en la puesta en práctica de cada uno de ellos.

2.5 Temporalización

La organización temporal es fundamental en toda investigación. Establecer diferentes fases en el proceso permite fundamentar, poner en práctica y valorar los resultados obtenidos de la propuesta. Por tanto, se han establecido tres fases principales reflejadas en la tabla 2.3:

Tabla 2.3. Organización temporal de la Memoria

CURSO 2016/2017											
Sep.	Oct.	Nov.	Dic.	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.
CURSO 2017/2018											
Sep.	Oct.	Nov.	Dic.	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.
CURSO 2018/2019											
Sep.	Oct.	Nov.	Dic.	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.

Fase 1. Fundamentación de la propuesta a través del estudio sobre el juego en la escuela y en el área de Matemáticas y diseño de la propuesta didáctica para el alumnado de 5.º curso de Educación Primaria. Se consideró oportuno dedicar un curso académico al estudio previo del juego: beneficios, propuestas diseñadas por otros autores y aportación al contexto escolar.

Fase 2. Puesta en práctica de la propuesta didáctica durante todo un curso escolar. Era necesario dedicar todo un curso a su aplicación ya que cada trimestre está dedicado a un recurso lúdico: ajedrez (1.º trimestre), sudoku (2.º trimestre) y tangram (3.º trimestre).

Fase 3. Valoración de los resultados y establecimiento de conclusiones e implicaciones educativas. El último curso académico estuvo dedicado al análisis de los resultados obtenidos con el fin de obtener las conclusiones y discusión que toda investigación precisa.

En cuanto a la puesta en práctica dentro del aula, ésta se realizó dentro del horario lectivo del alumnado concretamente los lunes, miércoles y viernes en la sesión de Matemáticas. Sin embargo, es importante destacar que, una vez adquirida la dinámica del juego, no había un horario determinado para jugar a estos recursos lúdicos. Siempre actuaron como elemento flexible y enriquecedor dentro del área de Matemáticas.

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

CAPÍTULO 3

EL AJEDREZ EN EL AULA

ÍNDICE

Introducción

El capítulo tres está dedicado al primer juego: el ajedrez. En primer lugar, este capítulo se centra en el origen del juego, su evolución en el contexto escolar en diferentes momentos en el tiempo así como las nociones básicas que el alumno deberá adquirir.

Son muchos autores los que apuestan por introducir el ajedrez en el aula. Destacan autores como Fernández Amigo [17] y Salazar [50] por el diseño de propuestas y aplicación en contextos escolares. Ésta última autora determina distintos niveles de aprendizaje en el ajedrez de los que esta propuesta se nutre y toma como referencia.

Del mismo modo, es importante establecer las conexiones entre el ajedrez y las Matemáticas ya que este juego es un recurso que fomenta aprendizajes en tal área de conocimiento: anticipación, pensamiento divergente, anticipación, coordenadas en el plano…

Este capítulo presenta el diseño de la propuesta con sus 5 fases de aprendizaje formando un total de 14 sesiones. La estructura siempre es la misma: detección de ideas iniciales, realización de actividades para la adquisición de los nuevos aprendizajes y habilidades matemáticas y una fase final dirigida al contexto histórico y cultural del juego.

Tras su aplicación, se desarrolla una valoración de su puesta en práctica y resultados obtenidos así como una relación de los contenidos curriculares que conectan con la programación docente del curso.

La realización de cada apartado responde a una estructura común con el fin de que cualquier docente pueda utilizarlo como guión y llevarlo a la práctica en su aula.

3.1 Contextualización

a) Definición y orígenes

Como es conocido, el ajedrez es un juego de mesa para dos personas que se desarrolla en un tablero formado por 64 cuadrados distribuidos en 8 filas y 8 columnas. Estos cuadrados o casillas son de color blanco o negro, de manera alternada. Cada jugador dispone de un grupo de 16 piezas con diferentes funciones entre las que se distinguen: un rey, una dama, dos alfiles, dos caballos, dos torres y ocho peones. Las piezas de cada contrincante pueden ser blancas o negras.

Un probable origen del ajedrez se encuentra en la leyenda de *los granos de trigo*. Allá, por el siglo V, un príncipe persa se aburría y su criado inventó para él un juego llamado ajedrez. Al príncipe le gustó tanto el juego que le dijo a su criado que le pidiera lo que quisiera. Éste le pidió lo siguiente: *quiero que me des un grano de trigo por la primera casilla, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta… así hasta las 64 casillas que tiene el tablero*.

En lenguaje matemático esto implica lo siguiente:

$$1+2+2^2+\ldots+2^{63}=\frac{2^{63}\cdot 2-1}{2-1}=2^{64}-1<2^{64}\approx 18\cdot 10^{18}$$

Sumados todos los granos no había trigo suficiente en todo el mundo para pagar a ese criado puesto que hacían un total de ¡18 trillones de granos de trigo!

En el siglo VIII los musulmanes traen el ajedrez a España y comienza a extenderse. A finales del siglo XIII Alfonso X, *El Sabio*, popularizó este juego a través del tratado que escribió sobre el mismo. En él estableció lo siguiente: *el ajedrez es una herramienta muy útil para la buena convivencia de judíos, musulmanes y cristianos*, entendiendo este juego como un nexo de conexión entre diferentes culturas.

El ajedrez con las normas que se conoce hoy día se inventó en España hace poco más de 500 años. Parece que son los españoles los que incorporan la dama al juego porque hasta entonces, no existía ninguna figura femenina. Esta pieza es la más potente del tablero y la incluyeron en homenaje a Isabel La Católica.

b) Evolución histórica del ajedrez como recurso en la escuela

Según la opinión de Payà en [41] se pueden destacar diferentes autores que, a lo largo del tiempo, han ido poniendo de relieve la diversidad de beneficios que el ajedrez aporta al aprendizaje del niño. A continuación se presenta la tabla 3.1 con autores destacables en esta evolución del ajedrez en la escuela:

Tabla 3.1. Evolución histórica del ajedrez en la escuela española

EL AJEDREZ EN LA ESCUELA ESPAÑOLA
Mariano Carderera (1815-1893)
Considerado uno de los primeros autores que destaca el ajedrez como un juego muy útil para el aprendizaje matemático y el desarrollo cognitivo.
Rufino Blanco (1861-1936)
En su tratado de pedagogía pone de relieve que al hablar sobre educación intelectual el ajedrez se concibe como un excelente medio del aprendizaje y ejercicio cognitivo.
Pau Vila (1881-1980)
Destaca los juegos instructivos y su relación con el desarrollo intelectual subrayando el ajedrez como uno de los mejores medios para que el niño realice cálculos mentales mientras juega en el tablero.
Antonio Onieva (1886-1977)
Cita el ajedrez como ejemplo del adelanto científico y desarrollo intelectual puesto que el juego es un recurso que plantea diversos problemas matemáticos.
Francisco Mascláns (1905-1999)
Considera que el ajedrez brinda muchas y muy variadas posibilidades educativas, especialmente en el aprendizaje matemático puesto que durante el

<table>
<tr><td>juego se plantean gran cantidad de problemas numéricos. Afirma que el ajedrez puede introducirse en la escuela y establece tres virtudes pedagógicas del mismo:
1.ª Usado con discreción, el ajedrez puede introducirse en la escuela primaria.
2.ª Ante el niño, el ajedrez es a la par agradable y útil, placentero y educativo.
3.ª Actualmente el aprendizaje de este juego satisface una necesidad social y moral.
En [41] se destaca que este discurso teórico se lleva a cabo en varias escuelas, entre las que cabe mencionar la Escola del mar, en Barcelona, en la que se comenzó a llevar a cabo campeonatos de ajedrez entre sus alumnos. Estas competiciones se siguen llevando a cabo en la actualidad.</td></tr>
<tr><th>Etapa democrática</th></tr>
<tr><td>El ajedrez comienza a tener más presencia en los centros escolares, de hecho en el periodo educativo de la EGB se plantean proyectos de introducción del ajedrez en la EGB dado su poder motivador, el desarrollo de múltiples habilidades cognitivas y su capacidad de desarrollar estrategias aplicables a otros aprendizajes.
En 1995, destaca el autor, se propuso como asignatura optativa aunque esta iniciativa fue rechazada.</td></tr>
<tr><th>Actualidad</th></tr>
<tr><td>La inclusión del ajedrez en las aulas se sigue extendiendo en cada vez más centros escolares. De hecho, la actual normativa educativa incluye el ajedrez como recurso dentro de las orientaciones metodológicas del área de Matemáticas.</td></tr>
</table>

3.2 Nociones básicas

El ajedrez se considera un juego de estrategia cuyo objetivo es derrocar al rey adversario. La captura no se completa nunca, pero cuando el rey no puede escapar de esa captura se denomina *jaque mate* y es entonces cuando el juego finaliza. Algunos aspectos a tener en cuenta son los siguientes:

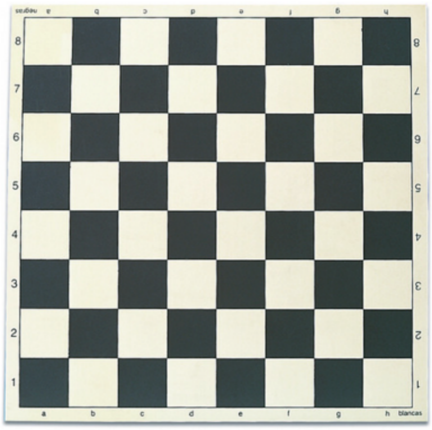


Figura 3.1. Tablero de ajedrez

a) *El tablero*

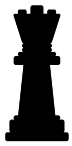
   El tablero del ajedrez tal y como se refleja en la figura 1.8 está compuesto por 64 casillas blancas y negras de manera alternada formando un cuadrado de 8x8. Para comenzar la partida el tablero debe estar colocado de manera que la casilla de la esquina derecha más cercana a cada jugador sea blanca. Como se puede ver en la imagen, se forman dos ejes de coordenadas: el eje de abscisas, en el que se presentan las letras de la *a* a la *h* y el eje de las ordenadas, en el que aparecen los números del uno al ocho.

El tablero en sí mismo es un buen recurso para trabajar las coordenadas en el plano.

b) Las piezas

En el ajedrez hay seis tipos de piezas distribuidas del siguiente modo: 1 rey, 1 dama, 2 torres, 2 alfiles, 2 caballos y 8 peones. Cada una tiene su función y su movimiento en el juego. En la tabla 3.2 que se presenta a continuación se describe brevemente cada una de las piezas:

Tabla 3.2. Piezas y movimientos en el ajedrez

PIEZA	MOVIMIENTO	PIEZA	MOVIMIENTO
	El rey sólo puede desplazarse una casilla en cualquier dirección: horizontal, vertical y diagonal.		La dama puede moverse a cualquier casilla horizontal, vertical o diagonalmente.
	La torre puede desplazarse a cualquier casilla a través de la horizontal o vertical que se encuentre.		El alfil se puede mover por el tablero a la casilla que se quiera dentro de las dos diagonales en las que se ubique.
	El caballo se desplaza en forma de “L”, es decir, avanzando dos casillas y después desplazándose una casilla o bien a la izquierda o bien a la derecha. Es la única pieza que puede saltar a otras.		El peón se mueve una casilla hacia adelante siempre que ésta no esté ocupada salvo en dos situaciones: - Sólo una vez, al inicio o durante la partida, se desplaza dos casillas hacia delante (siempre y cuando ambas casillas estén libres). - Para capturar una pieza del adversario, el peón se desplaza moviendo una casilla en diagonal y siempre hacia delante.

b) Tácticas y estrategias

Tal y como establece Fernández Amigo en [18], el ajedrez es un juego que no depende del azar sino de la estrategia. No existe una única estrategia ganadora y, algunas veces, una misma estrategia puede llevar al jugador a la victoria o a la derrota. Pese a que se trata de un juego con un número limitado de casillas y piezas, el número de combinaciones posibles dentro de una partida es de 10^{123}, conocido como el número de Shannon.

Saber jugar al ajedrez no implica solamente conocer las piezas y movimientos. Supone saber aplicar estrategias para alcanzar el *jaque mate* al oponente.

Asimismo, según el citado autor, existe una distinción entre los diferentes enfoques del ajedrez tal y como aparece en la figura 2.2:

Figura 3.2. Enfoques del ajedrez

Hay una gran infinidad de tácticas y estrategias. Incluso a los más expertos jugadores de ajedrez se les haría imposible dominar todas ellas. Por tanto, desde el ámbito escolar el aprendizaje del ajedrez no es un objetivo que el alumno domine estrategias propias del juego, pero sí que sea capaz de elaborar pequeños planes de actuación a partir de las siguientes cuestiones:

- ¿Qué pieza debería mover primero?
- Si muevo esta pieza, ¿correrá algún peligro?
- ¿Qué pieza moverá mi adversario si yo muevo ésta?
- ¿Es necesario sacrificar alguna de mis piezas para capturar alguna de las de mi adversario?

3.3 Beneficios pedagógicos

Puesto que en esta Memoria el objetivo básico es utilizar y analizar el juego como fuente de aprendizaje, el enfoque del ajedrez será como juego dado la cantidad de beneficios que éste reporta al proceso de enseñanza y aprendizaje (ver [2]).

En el artículo escrito por Leontxo García en [22], éste expone los beneficios para el desarrollo educativo del niño derivados del ajedrez.

Destaca el estudio científico de Trier (Alemania). En uno de los cursos de Primaria (grupo A) se sustituyó una hora de Matemáticas por ajedrez. El otro grupo, sin embargo, seguía teniendo esa hora de Matemáticas. El estudio refleja que durante cuatro años consecutivos, la nota media en matemáticas del grupo A fue mejor que la del grupo B.

Realmente no consiste en que el alumnado domine estrategias y tácticas complejas, ya que muchos de ellos no volverán a jugar en su etapa adulta, sino dar nociones básicas que les permitan desarrollar las capacidades presentadas en la tabla 3.3:

Tabla 3.3. Capacidades que fomenta el ajedrez y que favorecen el proceso educativo

CAPACIDADES QUE FOMENTA EL AJEDREZ			
Persistencia	Sentido del humor	Flexibilidad	Escucha atenta
Control emocional	Estrategias para tomar decisiones	Motivación ante los nuevos aprendizajes	Pensamiento divergente

Puede comprobarse cómo tras la práctica del ajedrez el alumno desarrolla capacidades relacionados con muchos ámbitos, incluido el referido a las actitudes. Estas destrezas pueden aplicarse no sólo al área de Matemáticas, sino al resto de áreas de la etapa.

Una propuesta que se desarrolla en el aula con el fin de demostrar los beneficios del ajedrez en la competencia cognitiva y socioafectiva es el realizado por García, Aciego y Betancort en [24]. El objetivo de esta investigación es el siguiente: *analizar empíricamente si la práctica del ajedrez proporciona beneficios en la competencia cognitiva así como en la socioafectiva del alumnado.*

La propuesta se llevó a cabo en ocho centros escolares de la Isla de Tenerife (cinco de Primaria y tres de Secundaria). Esta muestra de alumnos asistió regularmente a clases de ajedrez como actividad complementaria durante todo un curso escolar.

Para ello, se utilizaron los siguientes instrumentos de evaluación:

- Escala de inteligencia para niños de Wechsler, WISC-R.
- Test Autoevaluativo Multifactorial de Adaptación Infantil (TAMAI).
- Hoja de registro a cumplimentar por el profesorado tutor centrándose en aspectos como ajuste personal, afrontamiento y resolución de problemas, adaptación escolar y adaptación social.

Estos instrumentos se pusieron en práctica antes de comenzar el curso escolar y al finalizarlo para poder realizar una comparación de la evolución cognitiva y socioafectiva del alumnado.

Los aspectos en los que obtuvo una notable mejoría se reflejan en la tabla 3.4:

Tabla 3.4. Aspectos cognitivos y socioafectivos desarrollados a través del ajedrez

ASPECTOS COGNITIVOS		**ASPECTOS SOCIOAFECTIVOS**	
Abstracción verbal	Atención	Satisfacción con la escuela y el profesor	
Resistencia a la distracción	Organización perceptiva	Mayor agrado por el estudio	
Análisis	Síntesis	Aceptación de sí mismo	
Coordinación vasomotora	Rapidez	Afrontamiento y resolución de problemas.	
Planeamiento	Previsión	Confianza	Seguridad

Un aspecto curioso que también destaca en el análisis de la propuesta es que los niños que escogen el ajedrez son el alumnado que, a priori, está más adaptado y más satisfecho en la escuela.

A modo de conclusión de esta investigación los autores enfatizan que el ajedrez puede ser un gran recurso dentro del contexto educativo. Después de haberlo llevado a la práctica durante todo un curso escolar, el alumnado mejoró notablemente en sus habilidades cognitivas como son la atención, percepción, organización, rapidez en la ejecución de estrategias y anticipación de resultados. Además, también se sienten más satisfechos en la escuela. En otras palabras, el ajedrez también ayuda a construir un autoconcepto más ajustado y mejorar el autoestima del alumnado, es decir, contribuye al desarrollo de su inteligencia emocional.

Por tanto, el ajedrez es la escuela se concibe como un recurso lúdico motivador capaz de desarrollar capacidades cognitivas para las áreas de Educación Primaria pero también afectivas, fundamentales para el resto de sus vidas.

Salazar en su libro referido en [50] también hace mención a los valores que desde el ajedrez se trabajan transversalmente en los niños pero que, sin duda, se extienden al resto de situaciones. Comenta la autora en primera instancia, la necesidad de mantener el respeto durante toda la partida. El jugador ha de ser capaz de esperar en silencio mientras su adversario decide qué pieza mover al tiempo que deben ser responsables de sus actos, es decir, la pieza que se toque será necesariamente la que se mueva. Esta norma permite que el momento de espera no se dilate en exceso.

Otro valor importante a transmitir es la capacidad de saber ganar y peder. La autora establece los siguiente: *ganar es un riesgo, perder una oportunidad*. El éxito en la partida puede llevar a la confianza extrema y el perder a las ganas de mejorar para volver a repetir la partida. También hay que llevar cuidado con poner etiquetas ya que no debe haber un ganador ni tampoco un perdedor absoluto en el aula. En el aula se gana o se pierde de igual modo, por tanto, el que alcanza el éxito debe saber alegrarse de manera respetuosa y el oponente felicitar al ganador.

Es evidente que a nivel general, el alumnado mejora sus capacidades cognitivas y emocionales trabajando con el ajedrez en el aula pero, de forma más específica, ¿reportará los mismos beneficios para el alumnado con dislexia? ¿Es adecuado para este tipo de alumnado?

El ajedrez supone para el alumnado disléxico eliminar el código escrito, el cual resulta una dificultad añadida para ellos, y lo sustituye por figuras con movimientos con las que todos los niños tienen que familiarizarse, por lo que, el código de comunicación se revierte positivamente hacia este alumnado.

Además, otro aspecto que beneficia a este alumnado es la mejora de la atención. En ocasiones, el alumnado disléxico pierde el interés y la motivación puesto que la mayoría de aprendizaje se presentan en un código poco accesible para él. Este alumnado es más propenso a despistarse y a desconectarse de la *clase*. con el ajedrez, se fomenta la paciencia, la atención en la partida y las ganas de llegar al objetivo de todo jugador, conseguir el *jaque mate*.

3.4 El ajedrez y las Matemáticas

En el apartado anterior se han expuesto las capacidades cognitivas y emocionales que el ajedrez desarrolla en el niño pero, ¿son éstas capacidades beneficiosas para el aprendizaje de las Matemáticas?

Salazar en [50] expone en primer lugar una capacidad fundamental para este aprendizaje: la atención.

Si bien es cierto que la atención se puede mejorar, la motivación intrínseca que supone jugar al niño, favorece desde el principio un foco de atención que de otro modo sería más difícil conseguir. El cerebro está en constante actividad y debe pensar, valorar, juzgar, decidir y analizar. Y si se analizan todas estas capacidades, el maestro puede darse cuenta de que son capacidades indispensables para la resolución de problemas matemáticos en donde se necesita pensar, planificar, ejecutar, analizar y comprobar el resultado.

Otra capacidad importante que se fomenta es la anticipación. Es decir, a medida que el alumno consolida las reglas del juego es capaz de anticipar movimientos y valorar sus consecuencias antes de ejecutarlos, en otras palabras imagina cuál sería la reacción de su oponente si moviera esa pieza determinada, sin necesidad de moverla. Por tanto, favorece el estadio cognitivo que aún está por aparecer el niño, *el estadio de las operaciones formales*.

De la mano de la anticipación, a medida que se practica el ajedrez, aparece la capacidad de tomar decisiones (ver [38]). De manera más habitual, el niño adquiere la habilidad de decidir qué opción es la más adecuada para alcanzar su objetivo en la partida. Cuando anticipamos valoramos los resultados de posibles jugadas y esta valoración desemboca en una toma de decisiones que, a priori, se escoge como la más adecuada para garantizar el éxito.

Decisión tras decisión, ambos jugadores componen la partida hasta llegar a su fin. Pero, paradójicamente éste no es el fin. Cuando una partida se termina es momento de y ver qué fallos o que aciertos se han llevado a cabo para entender el porqué de la victoria o la derrota. Dicho de otro modo, ése hábito de analizar y comprobar la resolución de un problema que tantas veces los docentes insisten a sus alumnos para garantizar una correcta ejecución.

Por último, y teniendo como referencia las capacidades mencionadas por Salazar, la creatividad y el pensamiento divergente son dos habilidades que también irán evolucionando partida a partida. Probar nuevas estrategias, realizar movimientos aparentemente ilógicos para lograr un objetivo proporcionan diferentes formas de llegara una misma solución cada una más ingeniosa que la anterior, brindando así no sólo en el ámbito académico, la capacidad de ser creativos en la resolución de problemas en su vida cotidiana.

Y puesto que de manera prioritaria las habilidades cognitivas desarrolladas se vinculan estrechamente al ámbito matemático, es por ello que esta Memoria apuesta por el uso del ajedrez como recurso lúdico en el aula. Fernández Amigo en [18] señala las capacidades intelectuales que se desarrollan jugando al ajedrez y que se reflejan en la tabla 3.5:

Tabla 3.5. Capacidades matemáticas que proporciona el ajedrez según Fernández Amigo

<table>
<tr><th colspan="4">CAPACIDADES MATEMÁTICAS</th></tr>
<tr><td>Razonamiento lógico</td><td>Cálculo mental</td><td>Atención y concentración</td><td>Análisis y síntesis</td></tr>
<tr><td>Creatividad e imaginación</td><td colspan="2">Resolución de problemas y toma de decisiones</td><td>Memoria</td></tr>
</table>

3.5 El ajedrez en el aula

Expuestos los beneficios que el ajedrez reporta al alumnado, no es de extrañar que hayan sido muchas las propuestas llevadas a cabo en el aula. Incluso las editoriales han diseñado materiales para que su puesta en práctica se más sencilla. De entre todas ellas destaca la propuesta planteada por Fernández Amigo en [17] titulada *La educación emocional en el ajedrez. Propuestas para aplicar en los centros educativos*.

A continuación se presenta en la tabla 3.6 los módulos que forman el programa de IE junto con las actividades que plantean desde esta investigación utilizando el ajedrez como recurso:

Tabla 3.6. Módulos del programa de inteligencia emocional (IE) por Fernández Amigo

<table>
<tr><th colspan="2">IE APLICADA AL AJEDREZ</th></tr>
<tr><td>Módulo 1:

Autoconocimiento</td><td>Actividad: ¿Qué siento después de la partida?

A través de preguntas como: ¿qué siente el perdedor? ¿Y el ganador? ¿Qué hizo bien cada uno de ellos? ¿Qué hicieron mal? Se pondrá de relieve las emociones de los</td></tr>
</table>

	jugadores durante la partida.
Módulo 2: **Autonomía**	*Actividad: ¿Ya sé jugar al ajedrez?* Se presentan en el tablero diversas posiciones y se comprobará si el jugador es capaz de resolver la situación solo.
Módulo 3: **Autoestima**	*Actividad: Mi juego es único* Se jugará una partida de ajedrez y posteriormente se pondrán de relieve los aciertos y errores de cada movimiento.
Módulo 4: **Comunicación**	*Actividad: Aprendo a describir las piezas del ajedrez* A partir de una lámina con las siluetas de las piezas del ajedrez se les pedirá a los alumnos que las describan de la manera más detallada posible.
Módulo 5: **Habilidades sociales**	*Actividad: Silencio, se juega* Durante la partida de ajedrez cada jugador apuntará las acciones ya actitudes positivas de su rival y las negativas. Al finalizar, se elaborará un decálogo con las normas para jugar al ajedrez.
Módulo 6: **Escucha**	*Actividad: Ya sé escuchar al monitor* Durante la partida de ajedrez se les pedirá a los alumnos que se fijen en el resto de la clase y detecten las señales de escucha activa para realizar, posteriormente un debate en clase.
Módulo 7: **Solución de** **conflictos**	*Actividad: ¿Qué ha pasado en la partida?* Ante actitudes no correctas en el desarrollo de la partida, se reconducirá la situación con preguntas como: ¿cómo creéis que se siente? ¿Cómo se ha llegado a esta situación? ¿Cómo podemos solucionarlo?...
Módulo 8: **Pensamiento positivo**	*Actividad: Blancas y negras* Se trata de hacer una tabla con dos columnas (una blanca y otra negra). En la columna blanca se apuntarán los pensamientos positivos que se tienen respecto a la partida y en la negra los negativos.
Módulo 9: **Asertividad**	*Actividad: Tengo muchas ganas de aprender a jugar al ajedrez* A través de un tablero-mural, que sea más grande para que todos puedan verlo mejor, los alumnos mostrarán las jugadas que saben hacer y después las que les gustaría

	aprender. Posteriormente, para favorecer la cooperación los alumnos más avanzados pueden enseñarles a sus compañeros aquellas jugadas que todavía no han aprendido.

Otra propuesta es la planteada por Salazar que es maestra internacional de ajedrez y pionera a nivel mundial de la enseñanza del ajedrez en la escuela. En la página de su equipo de trabajo (ver www.ajedrezenelaula.com), exponen de manera resumida los ocho niveles (cada uno de los cuales se llevan a cabo en un curso escolar) que se desarrollan en su programa *Ajedrez en el aula* y que esta Memoria pretende poner en práctica. A continuación se presentan dichos niveles en la tabla 3.7:

Tabla 3.7. Niveles de aprendizaje del ajedrez según Salazar

AJEDREZ EN EL AULA	
NIVEL 1	Partes del tablero y las piezas de ajedrez. Movimientos de los peones, las torres y los alfiles. Ejercicios simples de cálculo y visualización.
NIVEL 2	Movimiento de la dama, el caballo y el rey. Jaque y el jaque mate. Ejercicios simples de observación, cálculo y visualización. Solución de problemas sobre jaque y jaque mate.
NIVEL 3	Valor de las piezas, el enroque, la coronación, tablas, técnica del jaque mate con dos torres, captura al paso. Solución de problemas sobre jaque mate en una jugada, cambios iguales y desiguales, análisis de posiciones.
NIVEL 4	Nomenclatura del ajedrez, reproducción de partidas breves, técnica de jaque mate con rey y dama, diferentes tipos de combinaciones tácticas: ataque doble, la clavada, ataque a la descubierta. Solución de problemas de jaque mate. Ejercicios de cálculo.
NIVEL 5	Conceptos básicos de la estrategia en el ajedrez: centralización, desarrollo de piezas, tiempo, fuerza, espacio, movilidad, estructura de peones, seguridad del rey, alfiles buenos y malos, columnas abiertas y semiabiertas. Técnica de jaque mate con rey y torre. Solución de problemas de jaque mate en dos jugadas.
NIVEL 6	Ataques directos al rey en el centro y al rey enrocado. Aproximación a las aperturas y defensas, fundamentos de los finales de reyes y peones, acercamiento a la historia de los campeones del mundo. Solución de problemas de jaque mate en dos jugadas.
NIVEL 7	Reproducción y análisis de partidas de campeones mundiales. Finales de reyes y peones. Análisis de las

	propias partidas. Solución de problemas de jaque mate en dos y tres jugadas. Solución de problemas encaminados a encontrar la mejor jugada sin especificar el tema al cual se refiere el problema.
NIVEL 8	Reproducción y análisis de partidas de las campeonas mundiales. Análisis de las propias partidas. Solución de problemas de jaque mate en dos y tres jugadas. Solución de problemas encaminados a encontrar la mejor jugada sin especificar el tema al cual se refiere el problema. Finales de reyes y peones. Finales de torres. Problemas artísticos y posiciones curiosas.

Para el diseño de la propuesta del ajedrez en el aula, esta Memoria tendrá muy en cuenta los niveles establecidos anteriormente con el fin de adaptar el proceso al alumnado.

3.6 Ideas previas del alumnado

El ajedrez es un juego conocido por parte de los alumnos aunque no sepan llevar a cabo una partida. Éstas fueron las ideas iniciales recogidas en la lluvia de ideas realizada:

- El rey se puede mover solo por un color del tablero.
- Si el rey muere es “jaque mate”.
- El rey sólo puede dar un paso.
- Si el peón llega al final se puede convertir en una ficha que le hayan matado.
- El peón avanza una casilla hacia delante y para comer piezas en diagonal.
- La reina se puede mover en todas direcciones.
- La torre se mueve en horizontal y en vertical.
- Son necesarias 16 piezas de cada color (blancas y negras).
- Hay que avisar cuando vas a matar al rey con “jaque”.
- El caballo se mueve en “L” y hacia delante y hacia atrás.

3.7 Propuesta metodológica

Teniendo en cuenta las referencias anteriormente mencionadas y las ideas previas del alumnado se ha diseñado esta propuesta para poner en práctica el ajedrez en el aula.

Este módulo está formado por 14 sesiones. Las fases de la propuesta atienden a los niveles de aprendizaje del ajedrez configurados en [50] y establecidos en la tabla 3.8:

Tabla 3.8. Fases de la propuesta metodológica del ajedrez en el aula de 5.º curso

MÓDULO I: EL AJEDREZ EN EL AULA DE 5.º
Fase 1: ¿Qué sabemos sobre el ajedrez? (1 sesión)
En esta sesión lo que se pretende es, por un lado, averiguar lo que los alumnos conocen sobre el ajedrez: piezas, reglas, tablero… y, por otro, presentar este recurso como un juego, deporte y disciplina que favorece nuestras habilidades matemáticas.
Fase 2: fundamentos del ajedrez (6 sesiones)
Primero se presenta el tablero, forma de colocarlo antes de cada partida. Trabajo de coordenadas en el plano tomando los ejes de abscisas y ordenadas. Después, se sitúa cada una de las piezas en el tablero y sus movimientos en el siguiente orden: peón, torre, alfil, dama, caballo y rey. Puesto que esta fase consta de 6 sesiones, en cada una se añadirá una pieza más.
Fase 3: comienza la partida (4 sesiones)
Antes de comenzar las partidas con todas las piezas, se establecen algunas normas básicas del ajedrez como: - El movimiento excepcional del peón de dos casillas sólo una vez en la partida. - Qué significa “jaque”, “jaque mate” y “tablas”. - La llegada de un peón al final de tablero. En este momento comienzan las partidas de ajedrez con todas las piezas y poniendo en práctica los fundamentos básicos adquiridos. Al finalizar cada sesión se representarán en el tablero grande situado en la pizarra jugadas interesantes de algunos alumnos.
Fase 4: valores deportivos (2 sesiones)
Tras cada partida se analizará el comportamiento de un mismo y de los compañeros en el transcurso de la partida incidiendo en la importancia de “saber ganar” y “saber perder”.
Fase 5: cultura del ajedrez (1 sesión)
Esta última sesión se dedicará a trabajar un texto adaptado sobre la historia del ajedrez, de dónde procede y cuál ha sido su evolución en España. La razón de hacerla al final de la propuesta es para garantizar la motivación de la lectura puesto que ya los alumnos se sentirán involucrados en este juego. También los

alumnos evaluarán la propuesta redactando sus impresiones de la misma (ver anexo I).

3.8 Puesta en práctica y valoración de los resultados

La inclusión del ajedrez en el aula de 5.º curso la he llevado a cabo en función de cada una de las fases previamente establecidas.

Las ideas iniciales sobre el ajedrez fueron pocas, más allá del reconocimiento de algunas piezas y del tablero. Por lo tanto, prácticamente todo el alumnado empezó de cero este proyecto. Todas esas ideas quedaron reflejadas en la *nube de ideas* en donde cada gota de la tormenta representaba una idea previa.

Desde el primer momento, la motivación hacia el ajedrez y su estrategia fue alta ya que se trataba de introducir un juego dentro de su horario lectivo, lo que les resultó muy atractivo.

Establecidas las normas generales del juego, el paso siguiente fue introducir progresivamente las piezas en la partida en el siguiente orden:

1.ª sesión: se juega la partida con los peones.

2.ª sesión: se añaden las torres.

3.ª sesión: se añaden los alfiles.

4.ª sesión: se añade la dama.

5.ª sesión: se añade el caballo.

6.ª sesión: se añade el rey.

Las cuatro sesiones pertenecientes a la siguiente fase se dedicaron a partidas con la totalidad de las piezas sobre el tablero. Si bien es cierto que semanalmente se reservaron dos sesiones durante el proyecto, el ajedrez en el aula se ha introducido como un elemento transversal en el aula. Es decir, de manera complementaria en el aula se ha creado el *rincón del ajedrez* donde piezas y tablero están esperando a los alumnos que ya han acabado sus tareas y quieren embarcarse en el mundo de la estrategia.

Desde esta propuesta considero muy apropiado trabajar el ajedrez de esta forma y no como área propiamente dicha. No se trata de establecer elementos curriculares y que alumno alcance determinados estándares sino que evolucione en su razonamiento lógico-matemático a través del ajedrez.

Durante las sesiones reservadas concretamente a las partidas de ajedrez, pude observar en mayor o menor medida cómo el alumnado comenzaba a configurar sus propias estrategias aprendiendo de errores anteriores. Las estrategias incorporadas al juego, se analizaban posteriormente en el tablero de la pizarra para que el resto de compañeros pudieran aprenderlas y aplicarlas.

Finalmente, llegaron a la última sesión con las nociones básicas del ajedrez adquiridas y concibiendo este juego como un recurso divertido para el alumnado. Por tanto, al trabajar un texto dedicado al origen del ajedrez, la atención de los niños estuvo más que garantizada porque sentían que era un texto vinculado a sus intereses.

En definitiva, esta propuesta desarrolló en el alumnado las siguientes capacidades beneficiosas para el área de Matemáticas:

- Ubicación de puntos en los ejes de coordenadas.
- La capacidad de atención durante la partida.
- Poner en práctica la estrategia "ensayo-error" mentalmente para no precipitarse en sus movimientos.
- El respeto al turno del contrincante.
- La habilidad de anticipar movimientos del adversario.
- "Saber ganar" y "saber perder" en una partida.
- Interesarse por los orígenes del ajedrez.
- Utilizar el ajedrez como un recurso para el ocio.

A nivel curricular, estas capacidades contribuyeron al desarrollo de los siguientes contenidos recogidas en la tabla 3.9:

Tabla 3.9. Contenidos del área de Matemáticas vinculados a las capacidades desarrolladas por el ajedrez

CONTENIDOS CURRÍCULO DECRETO 198/2014
Explicación oral de los pasos seguidos en la resolución de un problema.
Planificación del proceso de resolución de problemas: - Análisis y comprensión del enunciado. - Estrategias y procedimientos puestos en práctica: hacer un dibujo, operaciones matemáticas adecuadas, ensayo y error razonado. - Resultados obtenidos.
Reflexión sobre los resultados obtenidos en la resolución del problema.
Planteamiento y creación de nuevos problemas partiendo de datos facilitados por el profesor o creados por el mismo.
Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo.
Aplicación de los conocimientos adquiridos en la resolución de un problema en otros problemas similares.
Gusto por compartir los procesos de resolución y los resultados obtenidos.
Resolución y creación de problemas en contextos reales, explicando oralmente y por escrito los procesos de resolución de los resultados obtenidos.
Localización precisa de elementos en el espacio; sistemas de coordenadas.
Localización de puntos, dado un sistema de referencia ortonormal, utilizando

coordenadas cartesianas.

Trasladado al resto de sesiones en el área de Matemáticas, comprobé cómo los alumnos mantenían un alto nivel de atención durante más tiempo. Sobre todo en la resolución de problemas, la insistencia y la paciencia para ser capaz de resolverlo aumentaba, a diferencia de situaciones anteriores en las que desistían tras el primer intento. También me sorprendió el hecho de que encontraran diferentes formas de resolver una situación problemática. Por último, en este sentido cabe destacar que el alumnado mejoró sus relaciones sociales en el aula ya que comenzó a tomar conciencia de que no siempre se gana en la vida.

Los resultados obtenidos quedan representados en la figura 3.3 que he elaborado. Los datos recogidos están en función de las pruebas de evaluación que realicé (ver anexo IV) en el aula de 5.º curso antes y después de la propuesta a los 20 alumnos que forman el grupo.

Los ámbitos de evaluación están definidos por los contenidos anteriormente mencionados del Decreto 198/2014. Éstos se asocian al sistema de coordenadas en el plano y la resolución de problemas (RP):

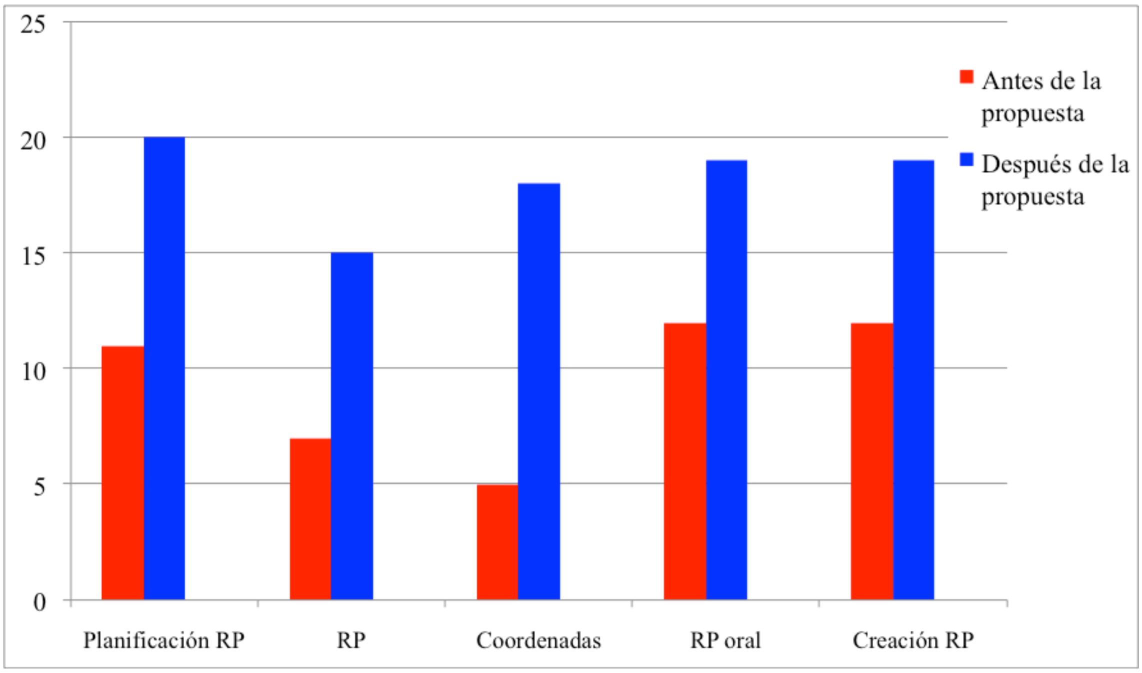


Figura 3.3. Gráfico de los resultados académicos obtenidos por parte del alumnado antes y después de la propuesta

Como se refleja en el gráfico, antes de comenzar la propuesta los alumnos presentaban dificultades en la resolución de problemas: no existía una planificación previa o una explicación oral para aclarar sus ideas y estrategias de resolución. También les resultaba complejo la ubicación de puntos en el plano a partir de coordenadas.

Al terminar con la propuesta del ajedrez casi la totalidad del grupo mejoró en la resolución de problemas. Sobre todo, en la referida a la planificación antes de la resolución. Ésta permite estudiar previamente las posibles opciones y anticiparse a un posible resultado. Así, aumentan las posibilidades de alcanzar la solución del problema.

Por tanto, queda reflejada la evolución positiva de los alumnos en todas las capacidades trabajadas a través del ajedrez.

Del mismo destacan los aprendizajes que comenzaron a desarrollar sobre el ajedrez. Todo el grupo sabe cómo colocar el tablero, respeta el turno de su adversario, conoce los movimientos de cada pieza y desarrollan valores deportivos durante el transcurso de la partida.

En el caso del alumnado con dislexia, no hubo barrera alguna que provocara que éstos no pudieran seguir el ritmo normal de la propuesta. En ningún momento utilizar el ajedrez suponía presentar al alumnado una carga excesiva de información escrita, al contrario, la transmisión del conocimiento era fundamentalmente oral, lo que pudo integrar a estos niños sin ningún tipo de problema. Todos tenían claro el movimiento de cada pieza y el objetivo. También ayudó a sus capacidades de atención y recepción de información. Esto es principalmente debido a que el lenguaje que utiliza es el de las piezas, el cual su cerebro es capaz de decodificar fácilmente a diferencia del código escrito, por lo que la motivación ante la tarea era más duradera que con otros juegos en donde se utiliza la lengua escrita.

Por supuesto, haber acabado este módulo dentro de la propuesta no implica que el ajedrez abandone el aula, de hecho seguirá siendo un recurso transversal que permite adaptarse a los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado.

CAPÍTULO 4

EL SUDOKU EN EL AULA

ÍNDICE

Introducción

El capítulo cuatro hace referencia al sudoku. Durante el segundo trimestre se pone en práctica este juego como un recurso lúdico para mejorar habilidades relacionadas con los números y el cálculo.

El primer apartado se centra en el origen y evolución del sudoku a lo largo del tiempo: desde cuadrado mágico hasta el sudoku que hoy en día se conoce. Continúa con las nociones básicas que todo jugador debe conocer antes de iniciar su resolución.

A diferencia de otros juegos, el sudoku es un juego poco utilizado en el contexto escolar aunque sí se han llevado a cabo estudios que demuestran sus beneficios para el desarrollo de habilidades tal y como establece Olivares en [39]: mejora de la actividad cerebral, memoria, razonamiento, adaptación al nivel del jugador y desarrollo de los dos hemisferios cerebrales.

No se han encontrado diseños de propuestas didácticas concretas ni tampoco su puesta en práctica en el entorno escolar por lo que desde esta Memoria se considera una gran apuesta desde un punto de vista innovador.

Por supuesto, este capítulo también presenta un apartado en el que vincula el sudoku con las Matemáticas puesto que este recurso se desarrolla en el aula para mejorar aprendizajes matemáticos. La relación con el área es más que evidente ya que la esencia del sudoku reside en la numeración. Al mismo tiempo ayuda al desarrollo de la anticipación y la técnica de ensayo y error.

Este capítulo establece el diseño de la propuesta con sus 6 fases de aprendizaje formando un total de 11 sesiones. La estructura siempre es la misma: detección de ideas iniciales, realización de actividades para la adquisición de los nuevos aprendizajes y habilidades matemáticas y una fase final dirigida al contexto histórico y cultural del juego.

Tras su aplicación, se desarrolla una valoración de su puesta en práctica y resultados obtenidos así como una relación de los contenidos curriculares que conectan con la programación docente del curso.

La realización de cada apartado responde a una estructura común con el fin de que cualquier docente pueda utilizarlo como guión y llevarlo a la práctica en su aula.

4.1 Contextualización

El sudoku (en japonés significa aproximadamente *número único*) es un juego numérico cuyo objetivo es completar una cuadrícula de 9×9 celdas dividida en subcuadrículas de 3 × 3 con las cifras del 1 al 9 como se puede comprobar en la figura 4.1. El requisito indispensable es que

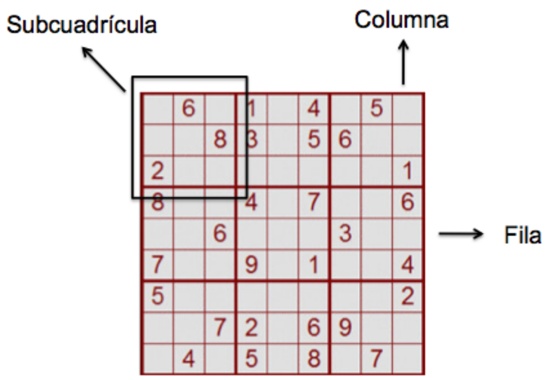


Figura 4.1. Elementos de un sudoku

ninguna cifra puede repetirse en cada una de las filas, columnas y subcuadrículas. Este juego finaliza cuando la cuadrícula queda totalmente completa.

Un sudoku inicialmente presenta algunos números en las celdas. Dependiendo de la disposición o cantidad de los mismos, la dificultad varía. La condición básica de un sudoku bien hecho es que en ninguna fila, columna o subcuadrícula debe coincidir el mismo número.

Para situarse en el origen del sudoku es importante hacer referencia a los cuadrados mágicos, de los cuales proviene éste.

Según *Cilleruelo* y *Córdoba* en [8], *por cuadrados mágicos se entiende una disposición de números en un cuadrado de manera que todas las sumas de los elementos de cada fila, de cada columna y de cada diagonal principal sean iguales. A esta suma se la denomina constante mágica del cuadrado. El orden del cuadrado mágico indica de cuántas filas y columnas esta formado el mismo.*

Los cuadrados mágicos más conocidos constan de los n^2 primeros números naturales ubicados en un cuadrado de nxn celdas. Partiendo de que la suma de todos los números que componen el cuadrado es 1 + … + n^2= $\frac{n^2+1}{2}$ y la suma de los números en cada una de las n filas ha de ser igual, la constante mágica es $\frac{n\left(n^2+1\right)}{2}$.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Figura 4.1. Cuadrado mágico de 3x3

El único cuadrado de 3x3 posible es el de la figura 4.1 aunque no es difícil construir ejemplos de cuadrados mágicos de orden mayor. Sin embargo, calcular el número de cuadrados mágicos posibles de cada orden es una tarea ardua.

Sólo se tiene constancia de que hay 1 de 3x3, 880 de 4x4 y 275305224 de 5x5. No se sabe el número de cuadrados mágicos de 6x6 pero se estima que debe de haber 1,7745 · 10^{19} aproximadamente.

En definitiva, los cuadrados mágicos siempre han despertado mucha curiosidad a lo largo de los tiempos pero, *¿cómo nacen a partir de éstos los sudokus?*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b & d & c \\ b & c & a & d \\ c & d & b & a \\ d & a & c & b \end{bmatrix}$$

Figura 4.2. Cuadrados latinos

En el siglo XVIII, el matemático suizo *Leonhard Euler* (1707-1783) creó un sistema de probabilidades para representar una serie de números sin repetirlos, el llamado *cuadrado latino* como aparece en la figura 4.2. Éste consiste en una matriz de nxn elementos en donde cada casilla está ocupada por uno de los n símbolos de modo que cada uno de ellos sólo aparece una vez en cada columna y fila. Actualmente se sabe que todo sudoku es un cuadrado latino, aunque el recíproco no suele ser cierto.

Si se superponen dos cuadrados latinos las n^2 parejas ordenadas de símbolos son todas distintas, se dice que son ortogonales y el cuadrado formado por las parejas de símbolos se denomina *cuadrado grecolatino* (figura 4.3).

Aα	Bγ	Cβ
Bβ	Cα	Aγ
Cγ	Aβ	Bα

Figura 4.3. Cuadrado grecolatino

Tal y como se expresa en [8], el nombre de cuadrado grecolatino obedece a que se suele representar con una letra latina el primer símbolo de cada par y, el segundo, con una griega.

Avanzando en el tiempo, algunas fuentes indican que el origen del sudoku como tal puede situarse en Nueva York (EEUU) a finales de los años 1970. Allí fue publicado con el nombre de *Number Place* en la revista *Math Puzzles and Logic Problems*.

En 1986 se popularizó en Japón dándose a conocer en el ámbito internacional en 2005 cuando numerosos periódicos de todo el mundo empezaron a publicarlo en su sección de pasatiempos.

Pueden usarse colores, letras o figuras. Lo que importa, es que sean nueve elementos diferenciados, que no se deben repetir en una misma fila, columna o subcuadrícula. Normalmente se utilizan números ya que resulta más fácil su trazo y todo el mundo está familiarizados con ellos. Un sudoku está bien planteado si la solución es única.

4.2 Nociones básicas

Como se ha comentado en el apartado anterior, el sudoku se presenta en una cuadrícula de 9x9, compuesta por cuadrículas más pequeñas de 3x3 a las que se les llama subcuadrículas. Algunas de las celdas ya contienen números, a partir de los cuales comienza el juego. El objetivo es rellenar las celdas que quedan vacías con un sólo número (del 1 al 9). Cada número sólo puede aparecer una vez en la fila, columna y subcuadrícula en la que está inmerso.

El matemático Gary Mcguire en [36] demostró que para que un sudoku esté resuelto correctamente debe tener una única solución, lo cual sólo es posible si hay un mínimo de 17 cifras presentadas al principio del juego. Curiosamente un sudoku siempre es un cuadrado latino, aunque un cuadrado latino generalmente no es un sudoku puesto que el sudoku establece la dificultad añadida de que no se puede repetir un mismo número en una subcuadrícula.

Tomando como referencia las nociones básicas e imágenes de la plataforma del Ministerio de Educación INTEF en [29], en el ejemplo que se plantea en la figura 4.4, el número "4" debe estar solo tanto en la línea vertical, horizontal como en la subcuadrícula en la que se encuentra ubicado.

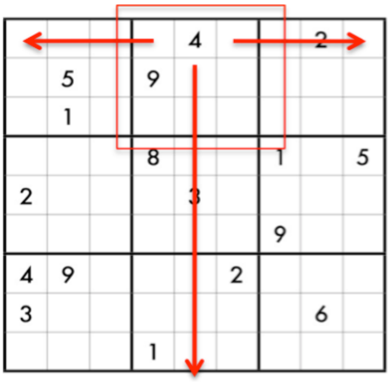


Figura 4.4. Ejemplo de sudoku de 9x9

Aunque el sudoku es un recurso reciente en el ámbito escolar, a través de dicha plataforma, se establecen las siguientes recomendaciones y estrategias para resolver un sudoku:

1. *Eliminación por filas, columnas y subcuadrículas:* se trata de eliminar posibles números por filas, columnas y subcuadrículas, reduciendo las posibilidades de cada celda. Es importante empezar por el número que más se repite para ir descartándolos progresivamente hasta que la opción sólo pueda ser una. Comienzan a eliminarse posibles números a través de las filas y las columnas y, por último, se comprueba que dentro de la subcuadrícula no esté ya ese número. En el ejemplo de la figura 4.5 se puede ver que los "2" que hay en las subcuadrículas (marcados con el círculo) "eliminan", otros posibles 2 de sus mismas filas y columnas. Tras la eliminación sólo queda una posible casilla para este número.

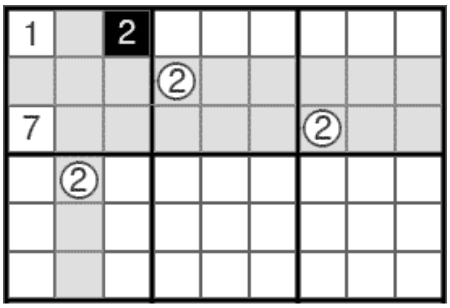


Figura 4.5. Ubicación en subcuadrícula del número 2

2. *Números que faltan:* éste es el proceso inverso al anterior, en lugar de descartar posibles candidatos, se seleccionan los números que pueden ubicarse en cada región teniendo en cuenta la fila y columna a la que pertenecen. En la figura 4.6, los números que aparecen rodeados son números que anteriormente no estaban, pero que son los que "faltan" y, por tanto, no puede haber otro en tales huecos.

1	7	8						
9	2	3	1	7	8	6	5	4
6	5	4						

Figura 4.6. Ubicación de los números 5 y 6 en el sudoku

3. *Casillas en cruces de filas y columnas:* este método es bastante útil cuando los dos anteriores no consiguen localizar el número que falta. Consiste en fijarse en una fila y columna que se crucen y que, además, haya en ellas bastantes números. Seguidamente hay que comprobar todos los posibles números por orden, atendiendo a aquéllos que no pueden ser, puesto que ya están en esas filas o columnas. En la figura 4.7, haciendo una revisión número a número se puede comprobar que el número que falta es el 9.

				5				
1	2	3	4			7	8	
				6				

Figura 4.7. Ubicación del número 9 en el círculo marcado

4. *Parejas de números:* consiste en escribir en las celdas correspondientes los posibles números que pueden ubicarse. Esta estrategia se realiza cuando son dos los números los que pueden ir en dos celdas diferentes. Se escriben en pequeño los posibles dígitos y desde ese instante esta pareja de números se comporta de modo que se pueden eliminar esos números de todas las demás casillas de esa fila, columna o subcuadrícula (aunque no se sepa exactamente todavía dónde va cada uno de ellos). Esto posibilita que, mientras tanto, se puedan situar otros números. En la figura 4.8 se han escrito el 2 y 3 en la esquina de cada una de las dos celdas puesto que ambos son candidatos. Esto significa que en esas casillas pueden ir el 2 o el 3, pero no sé sabe aún en qué orden.

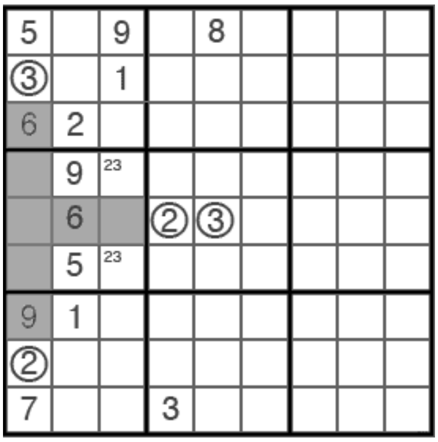


Figura 4.8. Parejas de números ubicadas en sus posibles celdas

Como se puede comprobar, estas estrategias son sencillas y aplicables en el ámbito de Educación Primaria. Además, una cualidad del sudoku y que lo configura como un buen recurso para utilizar en el ámbito escolar es que hay distintos niveles de dificultad. El hecho de que presente mayor número de cifras no implica que el sudoku sea más fácil. El nivel de dificultad radica en las posiciones que dichas cifras ocupen. Al estar planteando sudokus en 5.º nivel de Primaria, la ubicación de las cifras siempre va a facilitar su resolución planteando como máximo dos candidatos para una misma celda (rápidamente será descartada una de las cifras al realizar un rastreo a través de la fila, columna o región en la que se encuentra inmerso).

Teniendo en cuenta el artículo de Becerra en [3], existen variaciones con respecto al clásico sudoku. A continuación se hace una breve mención a alguno de ellos y que se puede adaptar a Primaria reflejados en la figura 4.9:

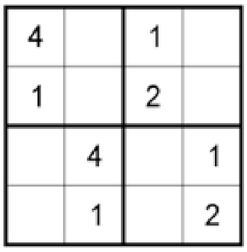
- *Kid sudoku*: éste es el sudoku más sencillo y el ideal para comenzar a practicar con los alumnos. Las reglas son las mismas que las del sudoku salvo que éste está formado por cuatro subcuadrículas y en cada una cuatro celdas, por lo que hay que rellenar con los números del 1 al 4.

- *Kenken*: esta variante del sudoku incluye operaciones (suma, resta, multiplicación y división). Al igual que el sudoku, consiste en no repetir ningún número en filas, columnas o regiones marcadas. Sin embargo, cada una de éstas debe estar ocupada por las cifras exactas, de modo que al aplicar la operación que aparece, también aparezca el resultado que se indica.

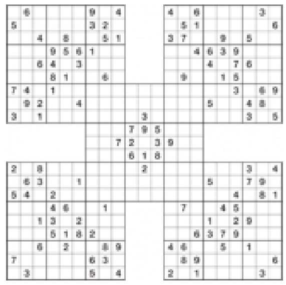
- *Saumrai sudoku*: fusiona cinco sudokus en uno tal y como puede apreciarse en la imagen.

- *Hachi sudoku*: este sudoku está formado por un cuadrado de 8x8 celdas y está dividido en ocho subcuadrículas de 2x4 celdas. Las reglas son las mismas que las del sudoku con la salvedad de que hay que rellenar con las cifras del 1 al 8.

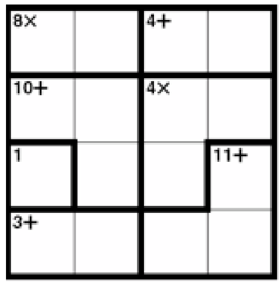
- Roku sudoku: de manera similar al anterior, este sudoku está formado por 6x6 celdas y está dividido en seis subcuadrículas de 2x3 celdas.



Kid sudoku

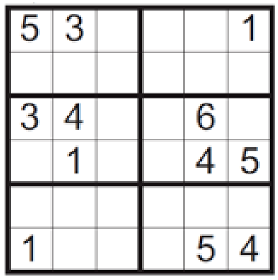


Samurai sudoku



Kenken sudoku

Hachi sudoku



Roku sudoku

Figura 4.9. Tipos de sudokus que pueden adaptarse a la Educación Primaria

4.3 Beneficios pedagógicos

Aunque la inclusión del sudoku en las aulas es reciente, estudios científicos han demostrado que este recurso se concibe como una buena estrategia para mejorar la actividad cerebral. De hecho, puede considerarse una ayuda para que aumente el interés del alumno en el área de Matemáticas (ver [2]).

Gran poder motivador

Al ser planteado a modo de juego incrementa considerablemente el interés del alumnado por su resolución. De hecho, está demostrado tal y como afirma Olivares en palabras de Portellano en [39] mientras se juega a resolver un sudoku se liberan endorfinas, produciendo bienestar en la persona.

Adaptación a las capacidades de la persona

Una de las ventajas de este juego matemático es que no necesita grandes habilidades cognitivas ni lingüísticas pero sí ayuda al desarrollo de las mismas. Esto es debido a que sus reglas son muy fáciles de entender. Además, permite graduar su nivel de dificultad lo que ofrece la oportunidad de adaptarlo a las características individuales de cada alumno. En Inglaterra se ha creado el Picdoku, una versión del Sudoku en donde, en lugar de números, se utilizan distintos colores y formas. Es una buena manera de introducir a los niños en la mecánica de juego.

Mejora la memoria y las estrategias de razonamiento

El Sudoku no es un juego de probabilidad, es decir, no se trata de ir probando números para llegar a su solución, por tanto, el niño tiene que memorizar la posición de los números o pictogramas para ir construyendo sus propias estrategias de razonamiento. De este modo, el niño progresivamente irá automatizando estas estrategias, permitiendo ascender a un nivel superior de dificultad.

Desarrollo de los dos hemisferios cerebrales

Al iniciarse en la práctica del sudoku se trabajan habilidades propias del hemisferio izquierdo como la lógica, el razonamiento y el análisis. Sin embargo, cuando se progresa en los niveles de dificultad se trabajan capacidades vinculadas al hemisferio derecho como el reconocimiento y la intuición. También previene el deterioro de ambos hemisferios ya que obligan a utilizar estrategias de razonamiento, memoria, atención y lógica, fundamentales para crear y fortalecer conexiones neuronales.

Fomenta actitudes positivas hacia el aprendizaje

La paciencia y la confianza con los números favorece en el alumno la concentración que se precisa para dar un paso más en la numeración: el cálculo.

Por último, es importante destacar la importancia que tiene el hecho de que este recurso se plantee desde una función lúdica ya que haciendo de nuevo referencia al artículo de Olivares en [39], Portellano afirma que los pasatiempos, incluidos los sudokus *nos producen bienestar y liberación de endorfinas. Al que le guste hacer este tipo de pasatiempos, está activando los centros de placer dentro de la corteza cerebral.*

4.4 El sudoku y las Matemáticas

La relación entre el sudoku y las Matemáticas es más que evidente puesto que, como se comentó en apartados anteriores, todo apunta a que nace fruto del denominado cuadrado latino ideado por Leonhard Euler. Tanto desde el planteamiento como en la resolución, además de las habilidades generales expuestas anteriormente, se fomentan otras propias del ámbito matemático como son:

Familiarización con los números

Dentro del campo de las Matemáticas escolares, este juego propicia el acercamiento de los niños con los números. De este modo, se favorece una primera conexión con los mismos de una manera lúdica y motivadora, al tiempo que permite derivar aprendizajes en relación con las características propias de los números: números pares, impares, capicúa… es decir, éste puede ser el trampolín para el desarrollo de un aprendizaje cada vez más complejo dentro del ámbito de la numeración en el área.

Desarrollo del pensamiento analítico y habilidades intuitivas

Una vez que se han interiorizado estrategias básicas en el inicio del Sudoku, comienza a desarrollarse en el niño el desarrollo del pensamiento analítico que le permite extraer conclusiones a partir de la ubicación de los números en las celdas. Sólo hay una solución posible de cada sudoku pero más de una estrategia por cada persona que se propone resolverlo. A medida que el niño se siente más seguro en el transcurso del juego, comienza a intuir posibles posiciones de números y, de nuevo, construir estrategias de razonamiento pero, esta vez, desde un nivel más complejo.

Razonamiento deductivo y generalización

La intuición de la que se ha hablado en el apartado anterior, es la fase previa a la generalización de estrategias comunes ante cualquier sudoku. Dicho de otro modo, las predicciones que el niño comienza a realizar una y otra vez, le permiten constatar que está en lo cierto (o no y, por tanto, desecharlas) y así generalizar mecanismos de resolución de sudokus. Asimismo, la generalización desembocará en la deducción, habilidad fundamental para el aprendizaje de otras materias.

Estas tres capacidades son fundamentales para resolución de cualquier tipo de problema de forma comprensiva por lo que el cerebro consolida circuitos neuronales aplicables a diferentes contextos matemáticos.

4.5 El sudoku en el aula

Expuestas todas la virtudes de los sudokus para el desarrollo cognitivo y, en particular, para el aprendizaje matemático basado en la lógica, es esperable que se hayan diseñado proyectos para ponerlo en práctica en el aula, así como un posterior establecimiento de conclusiones. Para ello, se ha realizado un barrido por la red para localizar alguna propuesta didáctica al respecto.

Sin embargo, a diferencia de otros recursos, no se han encontrado propuestas didácticas para su aplicación en el aula. Por tanto, desde esta Memoria se ha diseñado una propuesta metodológica a partir de los sudokus más sencillos (4 subcuadrículas), pasando por los cuadrados mágicos, hasta llegar a los sudokus de 9 subcuadrículas que posteriormente será presentada.

4.6 Ideas previas del alumnado

El alumnado prácticamente nunca había realizado un sudoku, sin embargo la imagen del mismo les resultaba familiar. Éstas son las ideas previas que tenían al respecto:

- Está formado por cuadrados.

- En cada casilla se escriben números diferentes.
- Hay por niveles.
- Hay que completarlo con números.
- Los números que se utilizan son del 1 al 9.
- Hay que terminarlo.

4.7 Propuesta metodológica

Teniendo en cuenta las ideas previas del alumnado he diseñado esta propuesta de trabajo formada por 11 sesiones. En ella se introduce el sudoku como recurso para consolidar el pensamiento lógico y favorecer la técnica de resolución de problemas "ensayo-error". La tabla 4.1 establece cada una de las fases de dicha propuesta:

Tabla 4.1. Fases del sudoku en el aula de 5.º de Educación Primaria

MÓDULO II: EL SUDOKU EN EL AULA DE 5.º
Fase 1: ¿qué sabemos sobre los sudokus? (1 sesión)
En esta primera sesión se realiza una lluvia de ideas para conocer realmente si los alumnos saben qué es un sudoku, si lo relacionan con colocar números en un cuadrado o si, alguna vez, han visto uno en un periódico, revista, sudokus digitales…
Fase 2: fundamentos del sudoku (1 sesión)
En esta sesión inicial se establecen las normas básicas de un sudoku, incidiendo en que, además de no poder coincidir el mismo número en ninguna fila o columna, tampoco pueden repetirse en el mismo cuadrado. Dentro de esta sesión también realizan dos sudokus de orden 4, es decir, colocando las cifras del 1 al 4.
Fase 3: comienza el juego (4 sesiones)
Durante estas cuatro sesiones se le presentan a los alumnos sudokus convencionales, es decir, de orden 9, con un progresivo nivel de dificultad con el fin de establecer dos estrategias básicas: 1. Identificar la fila, columna o cuadrado en el que sólo se necesite un número para completarlo. 2. Aprender a situar los números en pequeño cuando hay varias posibilidades en las que ubicarlo.
Fase 4: los cuadrados mágicos (2 sesiones)
Para enriquecer la propuesta, además de los sudokus, en estas dos sesiones se presentan cuadrados mágicos para seguir desarrollando la lógica numérica

y mejorar el cálculo mental.
Fase 5: campeonato de sudokus (1 sesión)
Casi terminando la propuesta, una de las sesiones consiste en realizar un “campeonato de sudokus”. La clase se organiza en parejas (menos un grupo que será de tres alumnos) las cuales deben superar distintos niveles: - 1.º nivel: los alumnos realizan un sudoku de orden 4. Las cinco primeras parejas que lo realicen pasarán a la siguiente fase. - 2.º nivel: los alumnos realizan un sudoku de orden 9. Las tres primeras parejas que lo realicen pasan a la fase final. - 3.º nivel: los alumnos realizan un sudoku de orden 9 pero que no implica una solución tan directa como en el nivel anterior. La primera pareja en terminarlo ganará el campeonato.
Fase 6: cultura del sudoku y los cuadrados mágicos (2 sesiones)
Por último, el módulo finaliza relacionando estos “juegos matemáticos” con su historia con fin de que el alumnado pueda conocer de dónde proceden e incluso identificar cuadrados mágicos en obras de arte (ver anexo II).

4.8 Puesta en práctica y valoración de los resultados

De manera similar al ajedrez, el sudoku se ha introducido en el aula de 5.º siguiendo las fases anteriormente explicadas y enriqueciendo la variedad de juegos matemáticos en el aula.

De nuevo, el sudoku se incluye dentro del horario lectivo del alumnado de manera de flexible, es decir, en función de las necesidades del alumnado había días en los que podíamos dedicar más tiempo y otros menos, por lo que siempre se ha presentado como un recurso complementario y enriquecedor.

La lluvia de ideas inicial determinó que todos los alumnos sabían que “existía un pasatiempo llamado sudoku” pero, tan solo dos alumnos conocían cuáles eran sus reglas básicas, aunque no habían practicado mucho. Por tanto, la mayoría del grupo partía de cero. Todas esas ideas quedaron reflejadas en la *nube de ideas* en donde cada gota de la tormenta representaba una idea previa.

Tras esta sesión, comenzamos con la realización de un sudoku de nivel cero (sudoku de 4x4). El objetivo era que la facilidad de este tipo de sudoku introdujera al alumnado en la dinámica. La impresión obtenida fue muy interesante puesto que a todo el grupo les pareció un sudoku “demasiado sencillo y querían enfrentarse a un *sudoku de verdad*.

Tras esto, en las siguientes sesiones se presentaron sudokus de nivel 1 en los que en alguna fila, columna o subcuadrícula tan solo faltaba un número para ser completado y, al completar éste, de nuevo ocurría lo mismo. Este nivel se adaptó muy bien a las necesidades del momento y ayudó muchísimo a que el alumnado se familiarizara con la mecánica del juego.

Superado este nivel, empezaron a trabajar sudokus en los que no bastaba con colocar un solo número, había varias posibilidades en función del resto de columnas o filas. En este momento, se comenzó a trabajar la estrategia de comprobación previa, es decir, se pone en números pequeños los dos posibles candidatos y, posteriormente, miramos el resto de columnas o filas para comprobar que no se repite ningún número, descartando así uno de los candidatos.

En este momento de la propuesta hubo algunos alumnos (25% del grupo) que se desanimaron porque el sudoku ya no tenía una resolución directa y no acababan de comprender la nueva estrategia. La manera de afrontar esta situación fue trabajando por parejas con el fin de poner en práctica la dinámica *alumno-tutor*. A modo de competición, los niños ubicados por parejas tenían que resolver el sudoku. La distribución de las parejas fue equilibrada, intentando ubicar al alumno con más dificultades con un compañero que ya tuviera adquirida la estrategia.

Los resultados con esta dinámica fueron positivos puesto que estos alumnos comenzaron a comprender la estrategia a desarrollar motivados por el carácter lúdico que planteó la actividad.

Cuando ya se percibió que la resolución de sudokus adaptada a su nivel estaba más que adquirida el siguiente paso fue incluir *cuadrados mágicos*. Los cuadrados mágicos son el origen de los sudokus y además de fomentar la lógica en la ubicación de las cifras, mejoran el cálculo mental.

Los cuadrados mágicos trabajados fueron de un nivel básico (3X3), lo cual implicó que, tras presentar el número final que debían sumar filas, columnas y diagonales, los alumnos tenían que averiguar qué números poner para que siempre se cumpliese el resultado. Al completar una fila, columna o diagonal, el resto se irían completando fácilmente. También se trabajó por parejas para que, una vez más, adquiriera ese carácter lúdico que motiva al alumnado.

En particular, para el alumnado con dislexia, el sudoku supuso un reto adaptado a sus necesidades ya que los números actúan como símbolos a los que hay que ubicar para cumplir ciertas normas, lo cual es un estímulo visual ante el que no presentan ninguna dificultad. Esto permitió generalizar la realización del sudoku al grupo en su totalidad. Se pueden destacar los siguientes aspectos.

- El alumnado, aunque trabaja con números, para él se trata de símbolos (como podrían ser corazones, rombos, triángulos…) por lo que de manera visual podía completar fácilmente filas, columnas y subcuadrículas.

- El hecho de que el sudoku presente niveles también facilita la adaptación del mismo a cada alumno.

- Emocionalmente los resultados fueron favorables puesto que en todo momento el alumnado se sentía integrado con el resto de la clase evolucionando al mismo nivel.
- En la resolución de los cuadrados mágicos, al realizarse por parejas, evitó la frustración del alumnado ante posibles dificultades de cálculo y favoreció una actitud positiva ante la actividad.

Tras varias sesiones, el interés fue incrementándose y la puesta en práctica de estrategias básicas para su resolución, principalmente la denominada estrategia de descarte, se fue extendiendo y, por tanto, el éxito en su resolución también. Además, la actitud positiva se incrementó en la resolución de cuadrados mágicos ya que, dado su nivel de dificultad, el alumnado lo abordó por parejas. Esto permitió transformarlo en un juego por equipos garantizando, así, la motivación ante su resolución.

Del mismo modo, es importante destacar a nivel de grupo, los beneficios adquiridos tras la puesta en práctica del segundo módulo en lo que al área de Matemáticas se refiere:

- Desarrollo de la lógica ante la ubicación única de cada número.
- Fomento de estrategias alternativas que permitan un resolución indirecta del sudoku.
- Actitud positiva ante los números.
- Mejora en el cálculo mental en la realización de cuadrados mágicos.
- Puesta en práctica de la dinámica *alumno-tutor* o enseñanza entre iguales.
- Enriquecimiento del área de Matemáticas al proporcionar un carácter lúdico a la misma.
- Presentación del sudoku como un recurso para el razonamiento lógico-matemático y como recurso de ampliación para atender a los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado.

A nivel curricular, los contenidos del Decreto 198/2014 trabajados fueron los presentados en la tabla 4.2:

Tabla 4.2. Contenidos del Decreto 198/2014 trabajados con el sudoku

CONTENIDOS CURRÍCULO DECRETO 198/2014
Explicación oral de los pasos seguidos en la resolución de un problema.
Planificación del proceso de resolución de problemas: - Análisis y comprensión del enunciado. - Estrategias y procedimientos puestos en práctica: hacer un dibujo, operaciones matemáticas adecuadas, ensayo y error razonado. - Resultados obtenidos.
Reflexión sobre los resultados obtenidos en la resolución del problema.
Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y

afrontar las dificultades propias del trabajo.
Aplicación de los conocimientos adquiridos en la resolución de un problema en otros problemas similares.
Gusto por compartir los procesos de resolución y los resultados obtenidos.
Operaciones: operaciones de suma, resta, multiplicación y división empleando diferentes metodologías.
Uso de estrategias de cálculo mental.
Resolución y creación de problemas en contextos reales, explicando oralmente y por escrito los procesos de resolución de los resultados obtenidos.

Los resultados obtenidos por los alumnos a nivel académico quedan representados en la figura 4.10. Los datos recogidos están en función de las pruebas de evaluación que realicé (ver anexo V) en el aula de 5.º curso antes y después de la propuesta a los 20 alumnos que forman el grupo.

Los ámbitos de evaluación están definidos por los contenidos anteriormente mencionados del Decreto 198/2014. Éstos se asocian al cálculo y la resolución de problemas (RP):

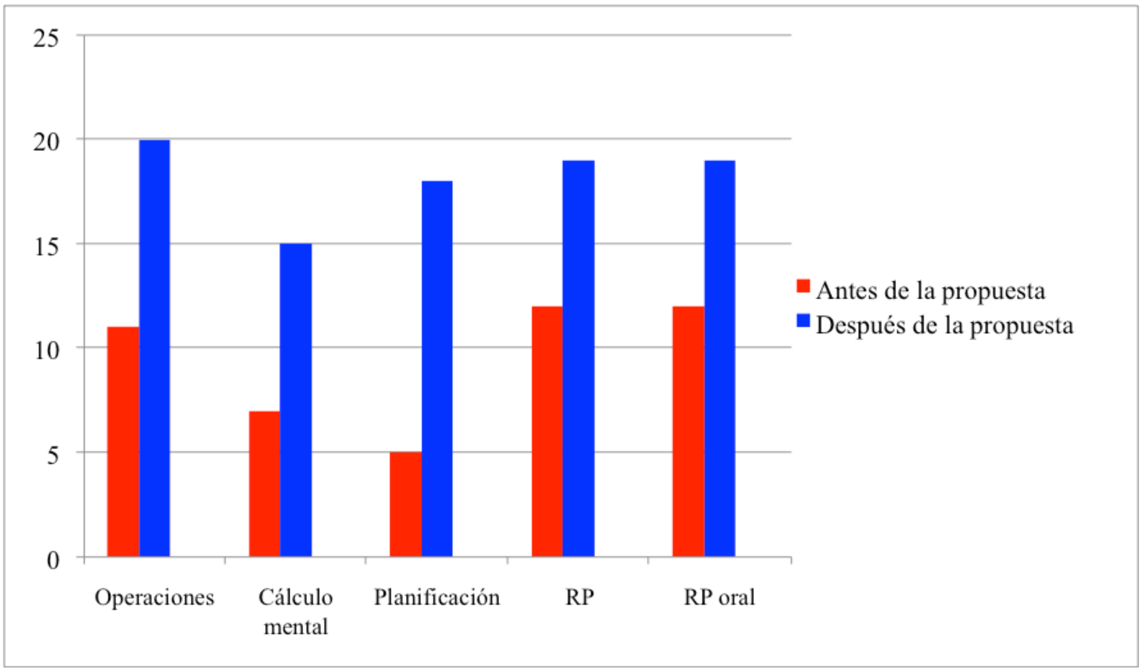


Figura 4.10. Gráfico de los resultados académicos obtenidos por parte del alumnado antes y después de la propuesta

Tal y como refleja el gráfico, los resultados al final de la propuesta mejoran sustancialmente los resultados del alumnado. Especialmente cabe destacar la evolución positiva que se produjo en el manejo y aplicación de operaciones. La totalidad del alumnado obtuvo muy buenos resultados. También ayudó a los alumnos con el cálculo mental: tras el trabajo realizado eran capaces de realizar más cálculos mentalmente y de forma más rápida utilizando sencillas estrategias.

Otro aspecto significativo es la resolución de problemas. Muchos de los contenidos trabajados en el área de Matemáticas están orientados a su aplicación en situaciones problemáticas. El carácter lúdico de la propuesta dio confianza a los alumnos afrontando la resolución de problemas de una manera más relajada y planificada.

Por tanto, el desarrollo de la propuesta fue muy beneficioso a nivel académico y curricular pero también desde un punto de vista actitudinal.

UNIVERSIDAD DE MURCIA

CAPÍTULO 5

EL TANGRAM EN EL AULA

ÍNDICE

Introducción

El capítulo número cinco se centra en el juego utilizado en el tercer trimestre: el tangram. En este momento los contenidos que se trabajan en el aula son los relacionados con la Geometría.

Al igual que en el resto de capítulos dedicados a los recursos didácticos, el primer apartado se inicia con el origen y evolución del tangram a lo largo del tiempo así como a las nociones básicas de este puzle. Se realiza una descripción de sus piezas y de la pieza generadora a partir de la cual se originan el resto.

Son muchas las investigaciones y propuestas didácticas para llevar el tangram al aula. En esta Memoria destacan dos autores: Cuadrado [13] y Fernández Blanco [19]. Es evidente que el tangram es un recurso lúdico para abordar aprendizajes geométricos de forma manipulativa.

El alumnado de Educación Primaria se encuentra en un momento evolutivo en el que para comenzar aprendizajes abstractos, en este caso vinculados a la Geometría, requiere previamente una construcción de aprendizajes basados en lo concreto y en la manipulación de materiales. Esto contribuye a construir unos cimientos sólidos con el fin de darle sentido a aprendizajes posteriores que requieren un nivel de abstracción mayor.

Esta Memoria toma como referencia los niveles de van Hiele para el aprendizaje geométrico. El siguiente apartado de este capítulo aborda dichos niveles y los que se desarrollan dentro de la Educación Primaria.

El concepto de figuras equidescomponibles también es una parte importante de este capítulo. La idea principal es que dos polígonos son equidescomponibles si al descomponer el *polígono uno* en varios polígonos se puede componer el *polígono dos*. En líneas generales, con el tangram se están formando constantemente polígonos equidescomponibles ya que se utilizan las mismas piezas para formar distintas figuras. Este concepto ayuda al cálculo de áreas y a la diferencia entre área y perímetro.

Otro apartado específico de este capítulo es el dedicado a las paradojas que ofrece el tangram. Este puzle tiene la particularidad de que se pueden construir dos figuras (con todas la piezas) que visualmente sean parecidas pero que dé la impresión de que una de ellas está construida con una pieza más. Se trata de una paradoja visual. Esta idea planteada a los niños como un juego puede ser un elemento motivador para utilizar este recurso en el aula.

Este capítulo presenta el diseño de la propuesta con sus 12 fases de aprendizaje formando un total de 19 sesiones. La estructura siempre es la misma: detección de ideas iniciales, realización de actividades para la adquisición de los nuevos aprendizajes y una fase final dirigida al contexto histórico y cultural del juego.

Tras su aplicación, se desarrolla una valoración de su puesta en práctica y resultados obtenidos así como una relación de los contenidos curriculares que conectan con la programación docente del curso.

La realización de cada apartado responde a una estructura común con el fin de que cualquier docente pueda utilizarlo como guión y llevarlo a la práctica en su aula.

5.1 Contextualización y nociones básicas

El tangram es un juego planteado a modo de rompecabezas basado en la geometría plana. Existen varios tipos de tangram, el más conocido es el tangram chino, que es un puzle cuyas piezas son el resultado de dividir un cuadrado en siete piezas llamadas “tans” (figura 5.1).

Figura 5.1. Tangram chino con sus siete piezas formando un cuadrado

Su origen se remonta a tan sólo 200 o 300 años. Los chinos llamaron a este rompecabezas *tabla de la sabiduría* y *tabla de la sagacidad* debido a las capacidades que este juego requiere y que, a su vez, desarrolla.

Los primeros libros sobre el tangram surgieron en Europa a principios del siglo XIX. En éstos aparecían figuras de animales, flores,… y sus soluciones. Durante todo este siglo fueron apareciendo diversos libros sobre el tangram chino en Estados Unidos, Inglaterra, Francia, Alemania, Austria e Italia.

Tal y como puede verse en la imagen está compuesto por: 2 triángulos rectángulos grandes, 2 triángulos rectángulos pequeños, 1 triángulo rectángulo mediano, 1 cuadrado y 1 romboide. Del mismo modo, es fácil comprobar cómo el triángulo pequeño es el generador del resto de figuras (figura 5.2):

- El cuadrado está formado por dos triángulos pequeños unidos por sus hipotenusas.

- El romboide está compuesto por dos triángulos unidos por sus catetos siendo ambas hipotenusas los lados de mayor longitud del romboide.

- El triángulo mediano está formado por dos triángulos pequeños unidos por sus catetos de modo que los otros dos catetos forman la hipotenusa del triángulo mediano.

- El triángulo grande está formado por dos triángulos medianos, es decir, por cuatro triángulos pequeños.

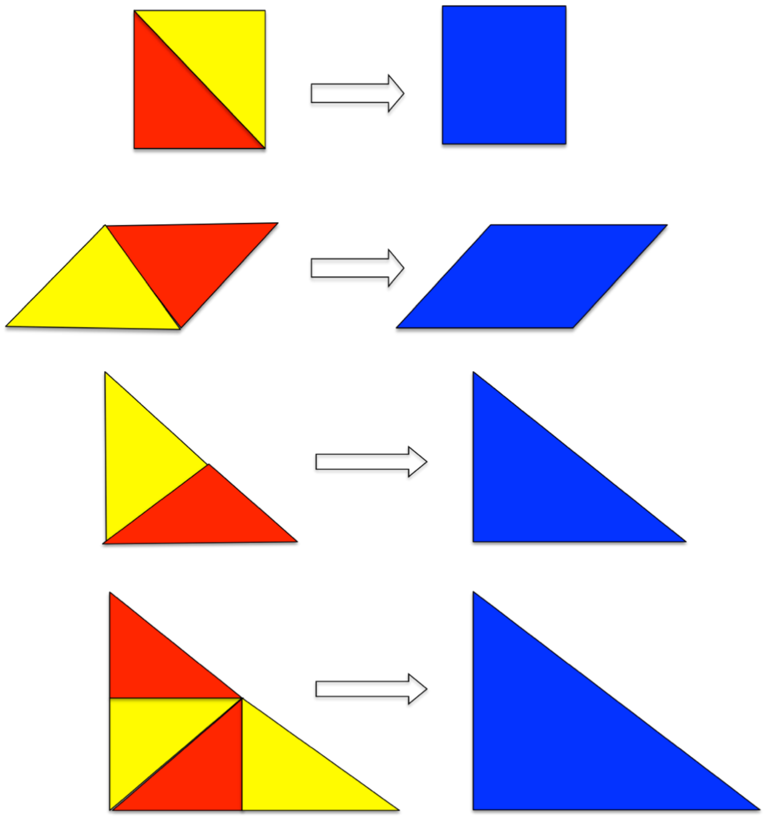


Figura 5.2. Formación de figuras a partir del triángulo más pequeño del tangram

El objetivo de este juego es formar siluetas de figuras con dichas piezas sin solaparlas. La descomposición del cuadrado en piezas más pequeñas no se realiza de forma arbitraria puesto que éstas mantienen entre sí las siguientes relaciones geométricas:

- Todos los vértices tienen ángulos múltiplos de 45º.
- Todas las piezas contienen al triángulo pequeño un número entero de veces como visualmente puede comprobarse.
- Tomando como unidad de longitud un cateto del triángulo pequeño, los lados de las restantes piezas serán 1, 2, $\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$.

Evidentemente, el tangram es un recurso en donde priman conceptos geométricos básicos y el pensamiento abstracto puesto que ambas capacidades permiten abstraer la figura hasta la mente humana y descomponerla en figuras geométricas básicas.

Aunque el tangram anteriormente presentado es el más conocido y con el que se trabajará en el aula de 5.º, es importante destacar que existen más tipos de tangram:

Tangram ovoide o *huevo mágico*

Como se puede ver en la figura 5.3 este tangram está formado por 9 figuras:

- Dos triángulos isósceles con un lado curvo.
- Dos triángulos rectángulos con un lado curvo.
- Dos triángulos rectángulos.
- Un triángulo rectángulo pequeño.
- Dos trapecios con un lado curvo.

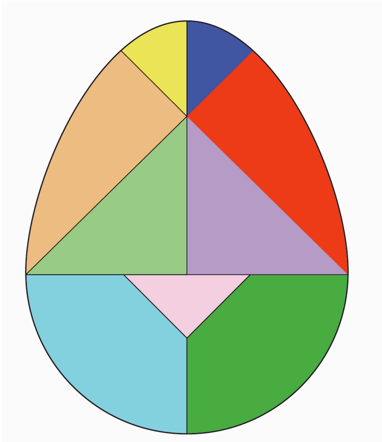


Figura 5.3. Tangram ovoide o huevo mágico

El hecho de que los bordes sean curvos, permite darle mayor realismo y originalidad a las figuras que se construyen.

Tangram triangular

En este tangram, creado por el profesor de la Universidad Autónoma de Barcelona, Jaume Llibre, aparecen figuras propias en la Educación Primaria. En total está formado por 8 piezas:

- Dos triángulos equiláteros de diferente tamaño.
- Tres trapecios isósceles de diferentes tamaños.
- Un rombo.
- Un romboide.
- Un hexágono.

Figura 5.4. Tangram triangular

El tangram mínimo de Brügner

Como muestra la figura 5.5, el tangram mínimo de Brügner es un tipo de tangram que forma un rectángulo, el cual, a su vez está compuesto por tres triángulos rectángulos semejantes. El matemático Georg Brügner lo estudió en el año 1984. Su división se realiza trazando una de las diagonales del rectángulo y desde ésta, una perpendicular que llegue al vértice.

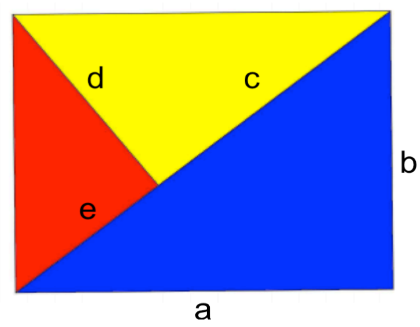


Figura 5.5. Tangram mínimo de Brügner

Rodríguez Vidal y Rodríguez Rigual en [47] explican que *si los segmentos a, b, c, d y e son desiguales entre sí, este tangram permite construir once figuras convexas. Cuando los segmentos b y c sean iguales, entonces pueden construirse con el tangram 16 figuras convexas*.

El tangram mínimo de Brügner es un tangram muy interesante para trabajar con los primeros cursos de Primaria debido al bajo número de piezas que lo forman. Dentro de esta etapa se pueden trabajar algunas figuras poligonales, conceptos como lado, vértice, tipos de ángulos y para cursos de finales de la etapa aspectos como perímetro y área.

5.2 Beneficios pedagógicos

Tal y como se establece Cuadrado en [13] el tangram fomenta la creatividad y ayuda a introducir conceptos geométricos de una manera distinta. Además, favorece el desarrollo de capacidades intelectuales y psicomotrices..

Asimismo, este artículo presenta los múltiples beneficios que el tangram reporta al alumnado:

- Introducción de conceptos de geometría de forma manipulativa.
- Creatividad e imaginación.
- Desarrollo del niño y su perfeccionamiento.
- Motivación hacia nuevos aprendizajes.
- Capacidades intelectuales y psicomotrices.
- Relaciones espaciales.
- Lógica.

- Estrategias para resolver problemas.
- Atención.
- Trabajo en equipo.
- Paciencia.

Todas estos beneficios se traducen en el aprendizaje de los contenidos de Educación Primaria dentro del área de Matemáticas que aparecen en la figura 5.6:

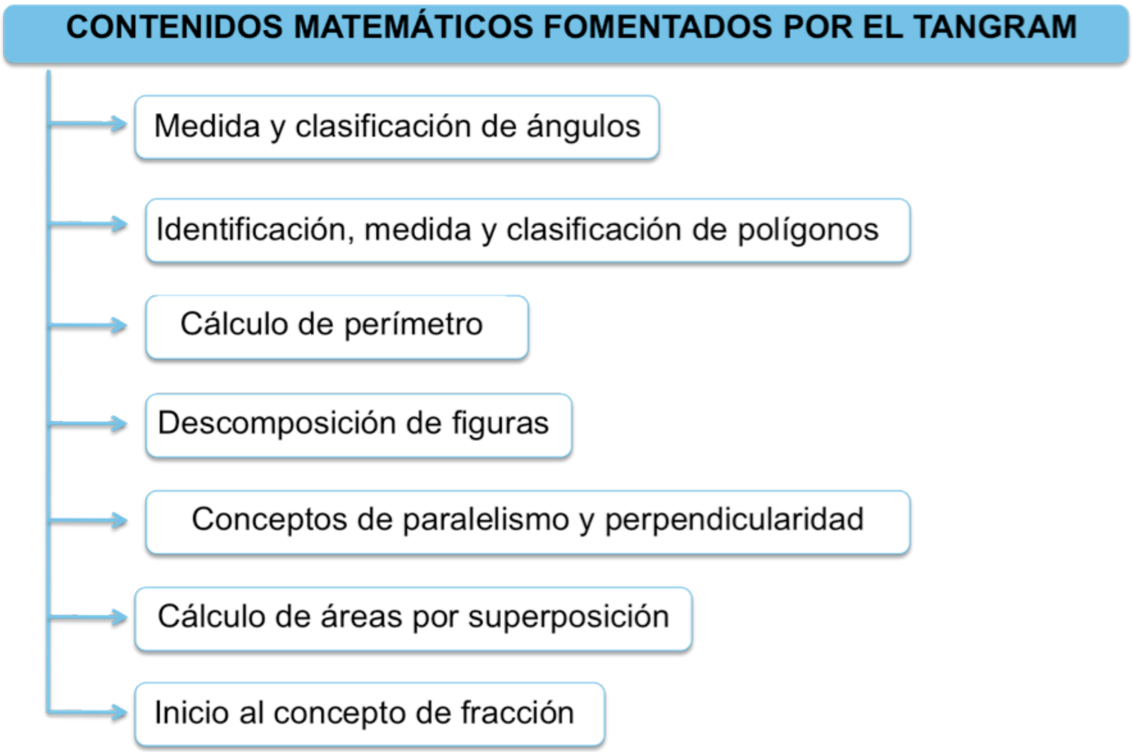


Figura 5.6. Contenidos del área de Matemáticas de Educación Primaria que fomenta el tangram

Puede comprobarse que el tangram permite relacionar contenidos de diferentes bloques matemáticos como la medida de magnitudes, la numeración y la resolución de problemas puesto que a partir de este recurso se pueden plantear cuestiones matemáticas en donde es preciso hacer uso de contenidos matemáticos propios de la etapa.

De hecho, como ya se ha mencionado en esta Memoria, el Decreto 198/2014 hace mención explícita al uso del tangram para el aprendizaje de la geometría en el apartado *orientaciones metodológicas*:

*Trabajar la geometría a partir de situaciones que resulten familiares para los alumnos (recorridos habituales, formas de objetos conocidos...) y mediante actividades manipulativas, lúdicas (plegado, recorte, modelado, etc.), así como a través del uso de materiales (**tangram**, geoplanos y mecanos, tramas de puntos, libros de espejos, material para formar poliedros, etc.) A este mismo fin* *puede contribuir el uso de programas informáticos de geometría dinámica o el de juegos de estrategia como el ajedrez.*

Es importante destacar que la geometría se hace manipulando, por tanto, es necesario que los alumnos puedan desarrollar conceptos geométricos a través de recursos como el tangram puesto que ello le permite concretar aprendizajes que posteriormente serán más abstractos.

También destaca el poder motivador del mismo puesto que se dotan de significado los conceptos estudiados, viendo el nacimiento de algunos de ellos como respuesta a problemas o situaciones concretas.

5.3 El tangram y las Matemáticas

La conexión entre el tangram y las Matemáticas es evidente ya que el campo de aplicación directo de este recurso es la geometría. Por tanto, los ámbitos matemáticos en los que se incide son los siguientes:

Relación directa con la geometría plana

Las figuras por las que está formado el tangram (triángulos, cuadrado y romboide) son polígonos trabajados expresamente en Educación Primaria. Por tanto, la manipulación en sí misma de las piezas ya supone un contacto directo con los polígonos de manera general y otras muchas características de los mismos a medida que se familiarizan con ellos: lados, ángulos, lados paralelos, vértices, diagonales, etc.

Construcción de los pilares básicos de la geometría plana

El tangram es un recurso que se presta muy bien para trabajar los niveles básicos de la Geometría de forma manipulativa. Este aspecto permite configurar en el niño los rasgos generales de las piezas y, posteriormente, profundizar en la descripción de sus elementos.

Paso previo a la abstracción geométrica

Si se quiere desarrollar la abstracción de figuras geométricas, en primer lugar es necesario concretar al máximo las mismas a través de materiales manipulativos. Por ello, éste puede concebirse como un paso previo hacia el pensamiento geométrico.

Descripción y análisis de propiedades de los polígonos

En relación con el apartado anterior, manipular polígonos permite percibir de manera directa características propias de cada uno de manera directa. Además, la composición y la descomposición de figuras facilita el establecimiento de propiedades no tan evidentes a simple vista.

5.4 La teoría de van Hiele: aplicación didáctica

El trabajo realizado por el matrimonio van Hiele es el desarrollo de una teoría de enseñanza y aprendizaje en el ámbito de la Geometría. Se establecen cinco niveles por los que el alumno va pasando en función de los conocimientos que va construyendo. Alcanzar el siguiente nivel requiere necesariamente haber adquirido el anterior. Los niveles no van asociados a una edad sino al nivel de conocimiento que el estudiante posee respecto a la Geometría. Este modelo de aprendizaje fue recogido por Pierre y Dina van Hiele en [53].

Haciendo referencia a Fouz en [21] y a Vargas en [54] estos son los niveles establecidos por van Hiele (tabla 5.1):

Tabla 5.1. Nivel de Van Hiele en el aprendizaje de la geometría

<table>
<tr><th colspan="2">NIVELES DE VAN HIELE</th></tr>
<tr><td>NIVEL 0</td><td>Visualización o reconocimiento: este nivel está vinculado con la vida diaria del estudiante y sus experiencias. Las figuras geométricas que se identifican en el entorno se perciben de manera global. No se diferencias sus características específicas y se comparan con objetos cotidianos.

Ejemplos:
- Identifica polígonos en el entorno.
- Identifica ángulos, rectas perpendiculares y paralelas en imágenes.
- Realiza figuras con instrumentos.
- Identifica ángulos en las agujas de un reloj.</td></tr>
<tr><td>NIVEL 1</td><td>Análisis: el estudiante puede percibir características de las figuras geométricas de forma experiencial. En este nivel son capaces de identificar las figuras por sus propiedades pero no relacionan unas propiedades con otras.

Ejemplos:
- Identifica que un triángulo tiene tres lados y tres ángulos.
- Identifica que un cuadrado tiene cuatro lados y ángulos iguales.
- Identifica que un rectángulo tiene cuatro ángulos iguales y lados iguales dos a dos.</td></tr>
<tr><td>NIVEL 2</td><td>Clasificación: reconocen figuras por sus propiedades y cómo algunas de estas propiedades derivan de otras estableciéndose relaciones entre sí.

Ejemplos:</td></tr>
</table>

	- Selecciona propiedades que caracterizan una serie de figuras geométricas. - Contesta razonadamente a preguntas sobre las características de figuras geométricas. - Justifica la igualdad de los ángulos opuestos de un paralelogramo.
NIVEL 3	*Deducción formal*: se realizan deducciones y demostraciones. Se establecen axiomas. Se trata de dar el paso hacia un nivel más global de la Geometría. Ejemplos: - Identifica las propiedades suficientes para definir un paralelogramo. - Prueba que la suma de los ángulos de un triángulo suman 180º. - Demuestra que si un ángulo es isósceles los ángulos de la base son iguales.
NIVEL 4	*Rigor*: se estudia la Geometría sin que sean necesarias figuras geométricas. Se conocen los axiomas y se trabaja a partir de ellos. Se trata de trabajar el área desde un nivel más abstracto. Ejemplos: - Establece teoremas en diferentes sistemas axiomáticos. - Compara sistemas axiomáticos. - Inventa métodos generalizables para resolver diferentes clases de problemas.

Los tres primeros niveles están vinculados a los estudiantes no universitarios. El resto requiere un nivel de abstracción mayor. En cualquier caso, el objetivo es construir una red de conocimientos que permita dar solución a problemas geométricos de manera significativa y con un lenguaje adecuado.

Y puesto que la propuesta se desarrolla dentro de un contexto didáctico, la cuestión es: *¿qué actividades trabajar para que favorezcan el paso de un nivel a otro?* Este modelo otorga mucha importancia a las actividades que se realizan ya que establecen que el salto al siguiente nivel depende más de éstas que de la edad de maduración.

Del mismo modo, tomando como referencia las fases que se deben seguir en la organización de las actividades geométricas expuestas por Pitsch en [44] y por Bedoya en [4] se establece la tabla 5.2:

Tabla 5.2. Fases en la organización de actividades geométricas

ACTIVIDADES GEOMÉTRICAS	
1. Información	Consiste en una primera toma de contacto con el ámbito de estudio. Se le informa al alumnado qué tipo de problemas se les va a presentar y el material que van a utilizar. Al mismo tiempo, se aprovecha para que el docente recopile información sobre el nivel de razonamiento del que parte cada estudiante.
2. Orientación dirigida	En este momento los estudiantes comienzan a analizar el campo de estudio utilizando el material proporcionado. Se les proponen actividades vinculadas con su vida cotidiana en las que puedan descubrir propiedades de las figuras geométricas que están estudiando.
3. Explicitación	En esta fase hay que fomentar que los estudiantes narren e intercambien sus experiencias, lo que implica que deben justificar sus razonamientos y explicitar de manera clara sus ideas a través del diálogo en grupo.
4. Orientación libre	Los alumnos aplican en esta fase los conocimientos adquiridos en los niveles anteriores a problemas. Para ello se les plantea situaciones con diversas soluciones con el fin de perfeccionar y combinar sus conocimientos.
5. Integración	En este punto el alumnado debe adquirir un estructura global de los aprendizajes adquiridos permitiendo establecer relaciones entre ellos. La finalidad es desarrollar una recopilación de todo el conocimiento construido durante el proceso. También sirve para detectar posibles errores en dicha estructura y reorganizarlos en caso necesario.

De lo que se trata es que las actividades que se presenten al alumno permitan generar una estructura de conocimientos basada en sus aprendizajes previos y que culmine en la resolución de problemas geométricos prácticos vinculados a su vida cotidiana.

Cabe destacar que la puesta en práctica de esta Memoria se va a llevar a cabo en la etapa de Educación Primaria, concretamente en el 5.º curso por lo que como máximo el alumno podrá iniciarse en el 2.º nivel (el resto de nivel comienza a iniciar al alumno en un grado mayor de abstracción). Igualmente es importante destacar que todos los alumnos no tienen por qué partir del mismo nivel y, tampoco, alcanzar el mismo al finalizar el curso.

Además, se ha seleccionado el tangram como material lúdico para ayudar a que el alumnado vaya progresando en los niveles del modelo van Hiele. La elección de este modelo unido al tangram reside en que el alumnado consigue desarrollar aprendizajes geométricos partiendo de su experiencia y de forma manipulativa para poder concretar aprendizajes que en el futuro se desarrollarán de manera abstracta.

5.5 Introducción al concepto de *figuras equidescomponibles*

En el apartado anterior ya se han definido los niveles de van Hiele, a partir de los cuales esta propuesta configura su apartado geométrico. Sin embargo, trabajar la idea de figuras equidescomponibles ayuda al alumno a descomponer figuras geométricas en otras más sencillas. De este modo, se pueden trabajar conceptos como el área de forma más comprensiva.

A continuación se va a presentar más detalladamente la idea de *figuras equidescomponibles* teniendo en cuenta los siguientes apartados.

a) Conceptos básicos

La primera cuestión que cabe preguntarse es *¿qué son polígonos equidescomponibles?*

Dos polígonos son equidescomponibles si al descomponer el polígono 1 en varios polígonos de forma específica se puede componer el polígono 2.

Tal y como se expresa en [44], en el famoso teorema establecido por Pitágoras: *El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual al área de los dos cuadrados construidos sobre sus dos catetos*, está contenida la siguiente definición:

Dos figuras poligonales son equidescomponibles si y solo si se puede cortar una en trozos poligonales y con estos trozos recomponer la segunda. Se dice entonces que las dos figuras tienen la misma área.

Como se puede comprobar en la figura 5.7, tomando como referencia la altura del triángulo, al realizar un corte sobre la mitad de la misma, los dos triángulos rectángulos pequeños que se forman se pueden poner a ambos lados para formar un rectángulo. Por tanto, el triángulo y el rectángulo son polígonos equidescomponibles.

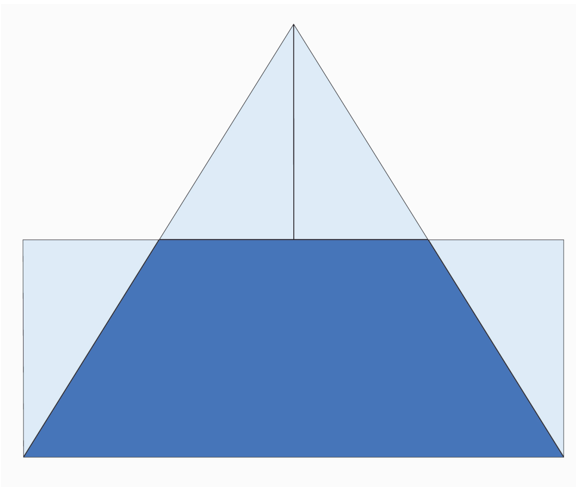


Figura 5.7. Ejemplo de dos figuras equidescomponibles

Esta equivalencia puede comprobarse de manera manipulativa, lo cual, lo transforma en un contenido muy interesante para trabajar con el alumnado de Educación Primaria. En otras palabras, es una definición que puede demostrarse con papel y tijeras.

De manera intuitiva también se puede deducir, utilizando la imagen como referencia, el área del triángulo con respecto a la del rectángulo:

$$A_{Triángulo} = \frac{A_{rectángulo}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Asimismo, este autor expone las propiedades que se deducen de esta definición:

- Si el polígono *A* puede convertirse en el polígono *B*, entonces el polígono *B* también puede convertirse en el polígono *A*.
- Si los polígonos *A* y *B* son equidescomponibles y *B* y *C* también lo son, entonces *A* y *C* son equidescomponibles.

Otro aspecto interesante el teorema planteado por Bolyai y Gerwien citados en [44]:

Dos figuras poligonales tienen la misma área si y sólo si son equidescomponibles.

Esta correspondencia entre áreas nos da la oportunidad de trabajar con el alumnado de Educación Primaria de manera manipulativa la composición y descomposición de figuras planas a través del tangram. De hecho, es una forma muy interesante para trabajar el cálculo de áreas en polígonos mediante la descomposición en polígonos más familiares para ellos como puede verse en la figura 5.8:

Figura 5.8. Descomposición de un polígono en otros más sencillos para calcular su área

b) Problemas asociados al concepto equidescomponbile

Uno de los problemas que plantea Pitsch en [44] en su artículo es el siguiente:

Dado un círculo de radio uno, construir un cuadrado que tenga la misma área.

Dicho de otro modo, ¿es posible la cuadratura del círculo? En el caso de que fuera posible estaríamos ante dos figuras equidescomponibles.

Fueron necesarios más de 2000 años para resolver este famoso problema. Primeramente, si el radio de este círculo es 1, el área del mismo sería igual a π. Por tanto, habría que construir un cuadrado (con regla y compás solamente) cuyo lado fuera $\sqrt{\pi}$, lo cual, es imposible ya que no se puede construir un segmento de longitud irracional y $\sqrt{\pi}$ es un número irracional puesto que π lo es (ver [8]).

Por tanto, se estableció el siguiente teorema:

El número π no es construible con regla y compás, en consecuencia la cuadratura del círculo es imposible.

Sin embargo, un aspecto muy interesante establecido en [44] es que los griegos sí consiguieron la cuadratura de algunas figuras no poligonales como las lúnulas de Hipócrates de Chios. El área de las dos lúnulas azules es igual a la del triángulo de la imagen. Por tanto, estaríamos hablando de *figuras equidescomponibles* tal y como se aprecia en la figura 5.9:

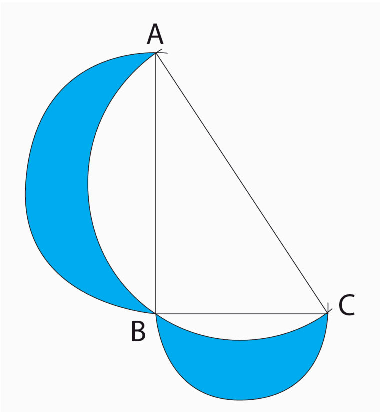


Figura 5.9. Correspondencia entre las dos lúnulas azules y el triángulo blanco

c) Concepto de equidescomponibilidad en figuras con volumen

Siguiendo la línea de este autor, es cierto que la siguiente cuestión es plantear si el concepto de equidescomponibilidad también ocurre en el caso de las figuras con volumen. En los *Elementos de Euclides* se demuestra que el volumen de un prisma es:

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot altura$$

Por tanto, recomponiendo polígonos para formar otros de igual superficie se recomponen poliedros del mismo volumen siempre y cuando tengan la misma altura.

En lo referido a las pirámides, no es tan evidente demostrar que:

Dadas dos pirámides con la misma base y altura el volumen es el mismo.

En este caso Euclides lo demostró por el *método de exhaucción* que consiste en aproximar una figura complicada por figuras poligonales cuya área o volumen es conocido.

Puesto que nos encontramos en Educación Primaria intuitivamente se llegará a dicha idea en las áreas de algunos polígonos para el caso plano y se manipularán algunas pirámides con la misma base y altura.

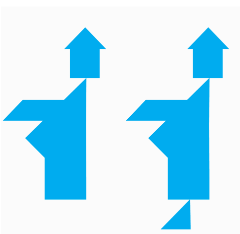
En definitiva, es factible trabajar el concepto de figuras equidescomponibles en Educación Primaria ya que ofrece la oportunidad de comparar áreas de distintos polígonos de manera manipulativa. Esta idea sirve para trabajar los conceptos asociados al nivel 2 de van Hiele *ordenación y clasificación* (nivel máximo que el alumnado podrá alcanzar).

Del mismo modo, el tangram facilita la idea de que dos figuras distintas pueden tener la misma área. De hecho, siempre y cuando formemos figuras con las mismas piezas, esta idea se está cumpliendo.

5.6 Paradojas del tangram

El tangram tiene la peculiaridad de que se pueden construir dos figuras (evidentemente con todas la piezas) pero que visualmente sean parecidas, lo que implica una paradoja visual y parece que una de ellas está construida con una pieza más.

En la figura 5.10 que se presenta a continuación, se puede ver con mayor claridad:



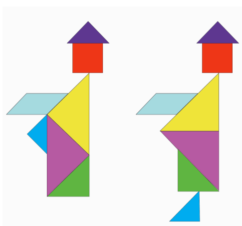


Figura 5.10. Paradoja del tangram

En realidad, las dos figuras ocupan la misma superficie ya que entran en juego todas las piezas de este rompecabezas. Sin embargo, la ubicación de las mismas es determinante para hacer creer que una de ellas está formada por un número de piezas mayor.

Dentro del aula de Primaria, aunque el alumno no sea capaz de construir por sí solo ambas figuras sin ayuda, es interesante presentarle ambas imágenes: las de las figuras al completo y las figuras con las marcas de división. La finalidad es que sean capaces de discriminar, comparar y construir ambas figuras cambiando la ubicación de ciertas piezas. Del mismo modo, se puede deducir con los alumnos que el área de ambas figuras es la misma pese a que la intuición pueda decir lo contrario.

5.7 El tangram en el aula

Actualmente existen diversas propuestas para trabajar contenidos matemáticos con el tangram, principalmente los vinculados a la geometría.

A partir de varias experiencias de aprendizaje con el tangram entre las que destaca la de Fernández Blanco en [19] y tomando como fundamentación los niveles de van Hiele en [53], éstas son las actividades recomendables a la geometría y al tangram para trabajar en el contexto en el que se encuentra el alumnado:

Conocer las piezas

Es importante que en primer lugar, los niños manipulen libremente las piezas para que se vayan familiarizando con las mismas.

Trabajar las características de cada una de las piezas (polígonos)

Una vez que los niños ya conocen las piezas que forman el tangram, se comienza a focalizar la atención de los mismos en las características de cada una de las piezas: lados, ángulos, vértices, tipos de polígonos, ejes de simetría…

Relacionar las áreas

Las piezas del tangram se pueden superponer para descomponer o componer polígonos y para relacionar las áreas de éstos. Por ejemplo, partiendo del cuadrado que forman todas las piezas, se puede comprobar que los dos triángulos grandes equivalen a la mitad del área y cada uno de los mismos a un cuarto del cuadrado. Otro ejemplo es que el triángulo mediano corresponde a una octava parte del total ya que coincide con la mitad de uno de los triángulos grandes.

En este proceso, la guía del maestro es fundamental para que el niño pueda llegar a conclusiones como éstas. Además, es curioso comprobar cómo paralelamente se trabajan contenidos vinculados a las fracciones.

Construir polígonos

Un paso más adelante es construir polígonos a partir de los polígonos iniciales que forman el tangram. Por ejemplo, se puede formar un trapecio isósceles con el cuadrado y los dos triángulos pequeños.

Construir figuras

Una vez construidos los polígonos más habituales para los niños también se pueden construir figuras usando las piezas libremente con el fin de desarrollar la imaginación de los niños. Es decir, se pueden crear personajes, animales, edificios…

Dibujar con el tangram

Cuando las figuras ya están creadas se pueden dibujar sus siluetas en un papel para que, a partir de ésta, se creen personajes, animales u objetos inventados por los niños.

Calcular áreas y perímetros

El tangram también permite trabajar contenidos con el cálculo de áreas y perímetro puesto que de forma sencilla el niño es capaz de medir las dimensiones de las piezas y poner en práctica fórmulas vistas de forma más teórica en clase. Asimismo, puede calcular el área de piezas más complejas a través de la descomposición en piezas más pequeñas.

Por último, relacionando ambos conceptos, pueden comprobar visualmente cómo al componer figuras utilizando las mismas piezas, tienen la misma área pero distinto perímetro.

Formar figuras establecidas

Cuando se llega a esta fase del proceso, el niño ya conoce con profundidad las piezas del tangram y, por tanto, es momento de presentar figuras previamente formadas para que intente construirlas. Se debe llevar a cabo de forma gradual:

1. Rellenar la figura a partir de una plantilla en donde aparece la figura descompuesta en cada una de las piezas que la forman.

2. Construir la figura utilizando la silueta de la figura final.

3. Construir la figura sin la ayuda de un patrón establecido.

Contar historias

Puesto que el tangram también desarrolla aspectos creativos en el niño, se pueden crear historias cuyos protagonistas sean las figuras formadas con sus piezas. Para ello, sería conveniente trabajar con el tangram interactivo y capturar esas imágenes, a partir de las cuales crear la historia.

Conocer el origen del tangram

Por último, una vez que el alumnado conoce el tangram y ha trabajado con él distintos contenidos geométricos, es momento de profundizar en su origen para proporcionar a esta secuencia un enfoque histórico-cultural que sea capaz de motivarlos.

5.8 Ideas previas del alumnado

Las nociones iniciales que los alumnos tenían sobre el tangram se recogen en la siguiente tabla:

- Es un juego muy antiguo.
- Está formado por varias piezas.
- El tangram es un rompecabezas.
- Hay cuadriláteros y triángulos.
- Se forman figuras.
- Todas las piezas forman un cuadrado.

5.9 Propuesta metodológica

Este módulo, formado por 19 sesiones (tabla 5.3), tiene como prioridad mejorar el pensamiento geométrico del alumnado, teniendo como referencia los tres primeros niveles de van Hiele y utilizando el tangram como recurso.

Tabla 5.3. Fases del tangram en el aula de 5.º de Educación Primaria

MÓDULO III: EL TANGRAM EN EL AULA DE 5.º
Fase 1: ¿qué sabemos sobre el tangram? (1 sesión)
La primera sesión está destinada a averiguar qué saben los alumnos sobre este juego de manera individual. Se hará una lluvia de ideas representada en la *nube de ideas* como en el resto de módulos.
Fase 2: identificación de figuras del tangram en el entorno (1 sesión)
En este momento se presenta cada pieza del tangram como figura geométrica intentando relacionarla con algunos elementos del entorno con formas similares. Se trabajará en pequeños grupos (nivel 0).
Fase 3: creación de objetos con las piezas del tangram (1 sesión)
Superada la fase de relación de las figuras con la vida cotidiana del alumno, en esta punto de lo que se trata es de que con una pieza el alumno cree un objeto con esa forma. Por ejemplo, un reloj con forma de romboide, un sillón con forma de triángulo rectángulo, etc. Se llevará a cabo en pequeños grupos (nivel 0).
Fase 4: descripción de características propias de las piezas (3 sesiones)
Consiste en trabajar las características específicas de cada pieza teniendo en cuenta: lados, tipos de ángulos, diagonales, etc. Tendrá lugar en gran grupo y posteriormente de manera individual (nivel 1).

Fase 5: cálculo de perímetro de las piezas (1 sesión)
Continuando el trabajo individual de cada pieza, en este momento se debe calcular el perímetro de cada una de ellas a escala real individualmente (nivel 1).
Fase 6: cálculo del área de las piezas (2 sesiones)
De forma análoga, también se realiza el cálculo de áreas de cada figura geométrica individualmente (nivel 1).
Fase 7: formación de nuevas figuras a partir de las piezas del tangram para calcular su perímetro y área (2 sesiones)
En este momento se construyen polígonos cóncavos y convexos en pequeños grupos para que el alumnado calcule tanto su perímetro como su área por descomposición, es decir, calculando cada figura del tangram por separado para luego sumarlas. Se podrá comprobar cómo habrá figuras con la misma área que tienen diferente perímetro. Se trabaja en pequeños grupos (nivel 2).
Fase 8: deducción de características (1 sesión)
Esta fase consiste en que el alumnado comience a ser capaz de derivar características de cada figura no directamente explicitadas. Por ejemplo, en un paralelogramo lados opuestos implican lados opuestos paralelos. Para ello, se presentan enunciados que el alumnado tiene que calificar como verdaderos o falsos. Se realiza en pequeños grupos (nivel 2).
Fase 9: formación de figuras establecidas (3 sesiones)
Puesto que se ha hecho un estudio de manera global y específica de cada una de las piezas, es momento de hacer uso del tangram para crear figuras previamente establecidas: animales, personajes, objetos, etc. (nivel 2).
Fase 10. Paradojas del tangram (1 sesión)
Consiste en que los alumnos construyan dos figuras similares. De lo que se trata es que sean capaces de percibir que, aunque aparentemente en una de ellas parece que hay una pieza más, ambas tienen la misma área. Para ello, será importante presentarle las figuras con las divisiones pertinentes. De otro modo, sería demasiado difícil para el alumnado (nivel 2).
Fase 11: invención de historias (2 sesiones)
Fruto de la creación de figuras establecidas los alumnos tienen que crear historias en donde las figuras creadas serán las protagonistas. Tendrán que dibujarlas en la propia narración. Esta fase se lleva a cabo individualmente.
Fase 12: cultura del tangram y paradojas (1 sesión)
Por último y al igual que en el resto de módulos, trabajado el recurso, se realiza una comprensión lectora dedicada al origen del tangram (ver anexo III). Primero se lee en gran grupo para trabajar las preguntas sobre el texto de manera individual. Como curiosidad también se les presentó a los alumnos las

denominadas *paradojas del tangram* en donde pudieron comprobar cómo figuras realizadas con las mismas piezas del tangram parecían tener una pieza más de diferencia.

5.10 Puesta en práctica y valoración de los resultados

A diferencia de los otros dos recursos, la dinámica del tangram es aparentemente más sencilla, lo que dio pie a que los alumnos manipularan las piezas y compusieran figuras utilizando todas o algunas de ellas. Sin embargo, no sabían hasta qué punto podían trabajar con ella contenidos geométricos.

A continuación se va a realizar una valoración de los resultados siguiendo las fases de las sesiones previamente establecidas en la propuesta metodológica.

La primera actividad que se realizó dentro de esta fase fue la *lluvia de ideas* con el fin de averiguar qué saben los niños sobre este juego. Los niños conocían aspectos generales referidos al tangram. Principalmente focalizaron su atención en el hecho de que se encontraban ante un puzzle formado por cuadriláteros y triángulos. La impresión que tenían es que era un juego muy antiguo porque no lo ubicaban en su vida cotidiana y algunos recordaron que todas las piezas juntas formaban un cuadrado. De hecho, pensaban que la finalidad del juego era formar el cuadrado.

Al igual que en el resto de módulos, todas esas ideas quedaron reflejadas en la *nube de ideas* en donde cada gota de la tormenta representaba una idea previa.

En la segunda fase, *Identificación de figuras del tangram en el entorno* hubo un contacto directo con el juego y sus piezas de forma libre, es decir, no se plantearon actividades específicas para hacer con el rompecabezas. Tan sólo, al inicio de la sesión, la maestra fue presentando las figuras de forma general, ubicándolos dentro del nivel 0 de van Hiele. El objetivo fue que los alumnos relacionaran las figuras del tangram de manera global con su entorno.

Tras esto, llegó el momento de unir piezas para componer figuras libremente. Esta fase destacó especialmente por la originalidad de los niños frente a figuras geométricas. Los alumnos fueron tocando las piezas y componiendo y descomponiendo figuras a su antojo. Tras esto, en su cuaderno, debían dibujar el contorno de cada pieza y a partir de éste, crearon gran cantidad de objetos y figuras sorprendentes: toboganes, animales con gran pico, sillones, coches, hasta incluso alguna nave espacial. Esta actividad permitió afianzar el nivel 0, previamente iniciado en la fase anterior.

Conocidas de manera global cada una de las piezas del tangram, en la siguiente fase llegó el momento de profundizar en cada una de ellas. El alumnado de nuevo dibujó el contorno ayudándose de las piezas del tangram para realizar una descripción de cada polígono. Se analizaron los siguientes conceptos:

- Número de lados.

- Número de ángulos.
- Tipo de ángulos.
- ¿Existen lados paralelos?
- ¿Cóncavo o convexo?

Esta actividad les resultó bastante sencilla ya que tenían frente a ellos mismos de manera concreta la figura geométrica con la que estaban trabajando. Por tanto, manipular cada pieza permitió extraer sus características de una manera muy intuitiva. En este instante, el alumnado comenzó a profundizar en el nivel 1 y dar pequeños pasos hacia el nivel 2 de van Hiele puesto que comenzaron a realizar clasificaciones de polígonos atendiendo a diferentes características.

Otro concepto importante para trabajar en geometría es el perímetro de polígonos, el cual inicia la fase 5. El alumno ya comienza a trabajar conceptos geométricos más allá de los elementos cualitativos e intuitivos. En este caso, se propuso al alumnado calcular el perímetro de cada pieza con una regla. Debían calcularlo en milímetros y posteriormente, transformar sus resultados a otras unidades de medida. Fue muy fácil afianzar el concepto de perímetro ya que estaban poniendo en práctica este aprendizaje con elementos reales y no trabajando a escala con un dibujo.

De forma análoga a la fase anterior, fue muy beneficioso trabajar de forma manipulativa las áreas de estas figuras, dando un paso más hacia la abstracción geométrica. A diferencia de otras situaciones en las que de manera mecánica se utilizan las fórmulas para calcular el área de cada polígono, cada alumno medía las distancias para realizar los cálculos precisos sin mayor dificultad. Su buena predisposición dio pie a explicar la razón de por qué en el área del triángulo hay que dividir por dos ya que todos los cuadriláteros pueden dividirse en dos triángulos.

Conocidas todas las fórmulas para calcular el área de las piezas del tangram, los alumnos estuvieron construyendo figuras cóncavas y convexas a partir de las cuales calcularon su perímetro y su área.

Avanzando en la propuesta, el siguiente paso fue plantearles esta idea: utilizando las mismas piezas del tangram se pueden crear figuras con la misma área y diferente perímetro. Al principio, esta propuesta no fue del todo comprendida por el alumnado debido a su carácter abstracto. Por tanto, se le proporcionó cuatro piezas del tangram con las que crear diferentes figuras en pequeños grupos. Tras realizar los cálculos de dos figuras, comprendieron de forma empírica que, efectivamente, según colocaran las figuras, aunque el área no cambiara el perímetro sí que lo iba a hacer. Esta relación pudo ubicar del todo al alumnado en el nivel 2 de van Hiele.

Inconscientemente y de forma intuitiva, el alumnado comenzó a trabajar con el tangram el concepto de figura equidescomponible desarrollado en el apartado *3.3.5* de la Memoria. Realmente el tangram muestra de manera clara a qué alude este concepto: a partir de un cuadrado formado por las 7 piezas que lo componen, se pueden formar figuras nuevas con estas 7 piezas. Es decir, a modo de recordatorio:

Dos polígonos son equidescomponibles si al descomponer el polígono 1 en varios polígonos de forma específica se puede componer el polígono 2.

También trabajamos la idea de que siempre y cuando se utilicen las mismas piezas al formar una figura, aunque ocupen otro lugar, el área de ambas composiciones será la misma. Sin embargo, el perímetro cambiará.

Avanzando en la propuesta, es evidente que, pese a que el *nivel 3* establecido por van Hiele se escapa para el alumnado de Primaria, sí que fue interesante lo trabajado en esta sesión. Se plantearon enunciados que los niños tenían que verificar utilizando las piezas del tangram:

- Todos los ángulos de un triángulo suman 180º.
- Todos los ángulos de un cuadrilátero suman 360º.
- Los lados de un cuadrado, rectángulo o romboide siempre son paralelos.

Haciendo sus mediciones y dibujos en el cuaderno y utilizando las piezas como plantillas, demostraron muchos de estos enunciados cortando los ángulos del papel y componiéndolos en un sólo ángulo.

Para conectar directamente con el carácter lúdico de este recurso, tras un estudio profundo de cada figura geométrica, se le presentaron a los alumnos figuras de animales, personas u objetos para realizar con las piezas del tangram.

En una primera parte de la sesión aparecían las figuras con las divisiones de cada pieza para que el alumno pudiera construirlas de manera sencilla y, posteriormente, se le presentaban figuras sin dichas divisiones, aumentando el nivel de dificultad. Al principio fue sencillo para todos, sin embargo, no todos los alumnos lograron hacer todas las figuras sin las divisiones de cada pieza.

Puesto que ya se estaba llegando al final de la propuesta, en la siguiente fase se le propuso al alumnado crear una historia a partir de las figuras que habían sido creadas en la fase anterior.

La sorpresa fue muy grata al comprobar cómo a partir de unos triángulos y cuadriláteros surgieron de su imaginación gran variedad de personajes: superhéroes, animales fantásticos, objetos mágicos… todo un descubrimiento.

Como broche final de cada módulo, fue interesante realizar con ellos una comprensión lectora sobre el tangram. La idea de hacerla al final de la propuesta fue por el hecho de que, tras haber trabajado con este recurso, el alumno se sentía más vinculado al texto y le interesaba mucho más lo que estaba leyendo.

Por último, se les presentaron algunas *paradojas del tangram* a modo de curiosidad. Fue un aspecto que les llamó mucho la atención ya que no conseguían entender cómo era posible construir dos figuras con el mismo número de piezas y que pareciera faltar una en una de las dos composiciones. Al mostrarle ambas composiciones con las divisiones de cada pieza, conseguían ver la diferencia. Fue una manera de enriquecer los aprendizajes adquiridos.

Los contenidos a nivel curricular desarrollados utilizando el tangram como recurso son los establecidos en el Decreto 198/2014 y que se muestra en la tabla 5.4:

Tabla 5.4. Contenidos del Decreto 198/2014 trabajados con el tangram

CONTENIDOS CURRÍCULO DECRETO 198/2014
Explicación oral de los pasos seguidos en la resolución de un problema.
Planificación del proceso de resolución de problemas: - Análisis y comprensión del enunciado. - Estrategias y procedimientos puestos en práctica: hacer un dibujo, operaciones matemáticas adecuadas, ensayo y error razonado. - Resultados obtenidos.
Reflexión sobre los resultados obtenidos en la resolución del problema.
Planteamiento y creación de nuevos problemas partiendo de datos facilitados por el profesor o creados por el mismo.
Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo.
Aplicación de los conocimientos adquiridos en la resolución de un problema en otros problemas similares.
Gusto por compartir los procesos de resolución y los resultados obtenidos.
Resolución y creación de problemas en contextos reales, explicando oralmente y por escrito los procesos de resolución de los resultados obtenidos.
Clasificación de figuras y cuerpos geométricos utilizando diversos criterios.
Figuras geométricas. Elementos básicos: lado, vértice, base, diagonal, ángulo, ejes de simetría.
Clasificación de polígonos: - Triángulos: según sus lados (equiláteros, isósceles y escalenos); según sus ángulos (rectángulos, acutángulos y obtusángulos). - Cuadriláteros. - Paralelogramo: rectángulo, rombo, cuadrado y romboide.
Cálculo del perímetro de un polígono regular e irregular.
Composición y descomposición de polígonos.

Los resultados obtenidos quedan representados en la figura 5.11. Los datos recogidos están en función de las pruebas de evaluación que realicé (ver anexo VI) en el aula de 5.º curso antes y después de la propuesta a los 20 alumnos que forman el grupo.

Los ámbitos de evaluación están definidos por los contenidos anteriormente mencionados del Decreto 198/2014. Éstos se asocian a la definición de figuras planas y al cálculo del perímetro y el área para la resolución de problemas:

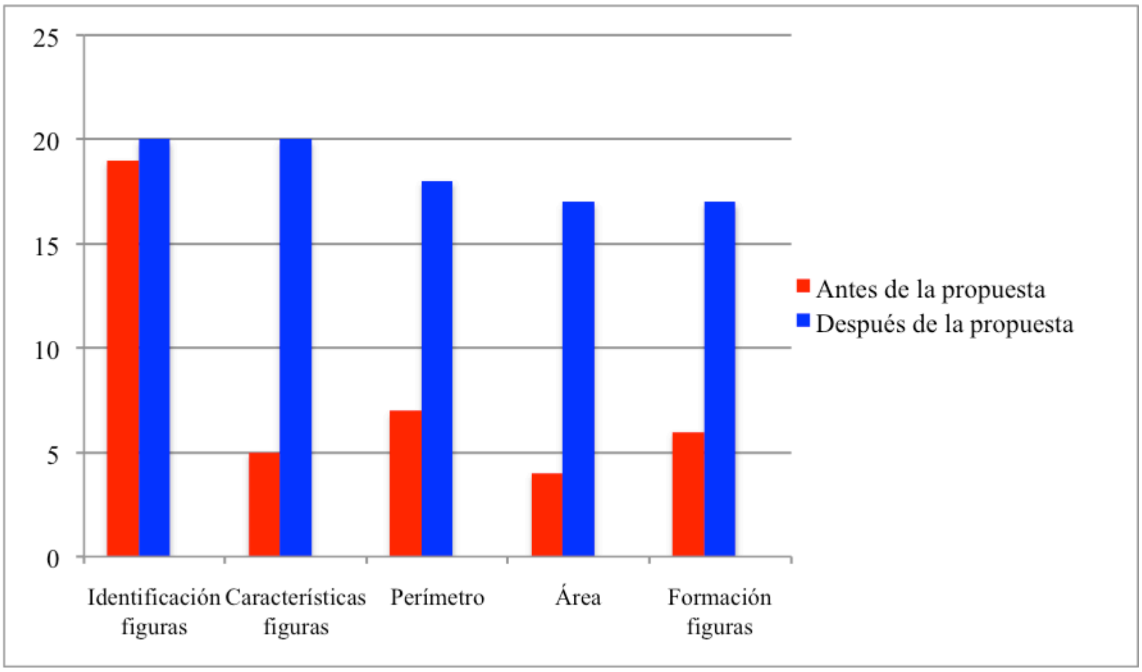


Figura 4.10. Gráfico de los resultados académicos obtenidos por parte del alumnado antes y después de la propuesta

Teniendo como referencia los resultados antes de llevar a cabo la propuesta, se ha mejorado sustancialmente en todos los ámbitos geométricos. Donde se produce una menor evolución es el contenido referido a la identificación de figuras. Desde el principio, la casi totalidad del grupo conocía el nombre de la figuras que se iban a trabajar y eran capaces de identificarlas en el entorno.

En el resto de aprendizajes tuvieron una evolución más significativa. Al inicio de la propuesta, menos de la mitad de los alumnos eran capaces de establecer las características de un polígono, sobre todo si se trataba de comprobar el paralelismo de sus lados o el cálculo de los grados de sus ángulos. Al finalizarla, la totalidad del grupo sabía definir las características básicas de cada polígono.

Dos conceptos en los que de manera general había problemas al inicio eran el perímetro y el área de los polígonos del tangram. Trabajar con las figuras de manera manipulativa consiguió que al final de la propuesta interiorizaran la idea de perímetro y aplicaran las fórmulas para calcular el área de forma más significativa. Por ejemplo, entendían por qué en el área del triángulo hay que dividir entre dos o que el área del romboide sea la misma que la de un rectángulo. Otro aspecto interesante es que consiguieron comprender que dos figuras con la misma área no tienen necesariamente el mismo perímetro.

También hubo una mejora en la formación de figuras con la totalidad de las piezas, si bien es cierto que el conjunto de la clase no pudo realizar todas las composiciones posibles. Sin embargo, al existir variedad de figuras, se pudo adaptar al nivel de cada alumno.

Traducido todo esto al área de Matemáticas, supuso un avance a nivel cognitivo ya que fueron capaces de trabajar manipulativamente conceptos abstractos. De hecho, se mejoraron en la siguientes aprendizajes propios del curso:

- Identificación de polígonos así como sus características.
- Descomposición de figuras en polígonos más sencillos.
- Aplicación de la descomposición de polígonos para el cálculo de áreas.
- Cálculo y relación entre perímetro y área de polígonos.
- Desarrollo de la imaginación a través de la geometría.

Por tanto, el tangram desarrolló capacidades en el alumnado que ayudaron al cumplimiento de parte de los contenidos del currículo que hay que desarrollar en el área de Matemáticas.

Por otro lado, al alumnado con dislexia no se les planteó ningún problema fruto de su dificultad de aprendizaje. Trabajar con las piezas no suponía ningún problema de decodificación que impidiera su progreso. En todo momento siguieron el ritmo del resto del grupo. El tangram permitió concretar aprendizajes geométricos abstractos para el alumnado de esta edad y visualizar las características de los polígonos de forma más sencilla y motivadora.

En resumen, utilizar material manipulativo, en este caso el tangram, favoreció en todo momento la construcción de un aprendizaje geométrico afincado en lo concreto, que es el paso previo a aprendizajes de un nivel superior.

UNIVERSIDAD DE MURCIA

CAPÍTULO 6

OTROS JUEGOS PARA TRABAJAR EN EL AULA

ÍNDICE

Introducción

Durante el desarrollo de cada una de las propuestas en el aula, también surgió la posibilidad de llevar a cabo algunos juegos matemáticos basados en el razonamiento lógico y la estrategia. Éstos están recopilados en el capítulo seis. Se abordan de forma más breve en el tiempo y de manera transversal con el fin de enriquecer las habilidades matemáticas que se estaban fomentando con el resto de recursos. Estos juegos son:

- El NIM: un juego aparentemente sencillo pero en el que se generan estrategias ganadoras según las estructuras formadas.
- Algunos juegos de Matemagia: los trucos de magia basados en ciertos conceptos matemáticos son un atractivo para el alumnado así como una oportunidad para poner en práctica ciertos aprendizajes del área.
- Las Torres de Hanoi: este juego de habilidad basado en el número mínimo de movimientos para trasladar los discos de un lugar a otro ayuda al alumnado al cálculo y a la concentración.
- El juego de Collatz: este recurso está basado en la Conjetura de Collatz. De ningún modo se pretende presentar esta conjetura como una función ni tampoco como una conjetura. La idea es que se apliquen determinados cálculos a un número dependiendo de si es par o impar.

Estos recursos se trabajaron en el aula como un complemento al resto de recursos trabajados (ajedrez, sudoku y tangram) y presentan una temporalización menor. Igualmente en los sucesivos aparatados se establecen las nociones básicas de cada juego, la propuesta metodológica que se ha llevado en el aula y la valoración tras su puesta en práctica.

6.1 El NIM

a) Contextualización

El NIM es un juego de estrategia muy antiguo del que no se sabe exactamente su origen. Se cree que el origen de la palabra procede del inglés antiguo ya que *animan* en este idioma significa *quitar*. Otro aspecto morfológico de su nombre es que, al girar la palabra NIM 180º grados, aparece la palabra WIN (ganar en inglés).

Es más conocido gracias al cine a través de la película *El año pasado en Marienbad* (Alain Resnais, 1997). De hecho, en honor a esta película, existe una modalidad de NIM conocida como *NIM Marienbad*.

Su mecánica de juego es sencilla pero compleja tras sus *piezas* ya que requiere un pensamiento matemático ágil para colocarse en la posición del vencedor.

Este juego está concebido para dos jugadores y la preparación es la siguiente: se disponen *m* filas, cada una de ellas con un número de piezas: $n_1, n_2, ..., n_m$. En la figura 6.1 se presenta un ejemplo de su organización. Se puede jugar con cualquier tipo de objetos (éstos harán las veces de piezas) y con el número que se quiera en cada fila.

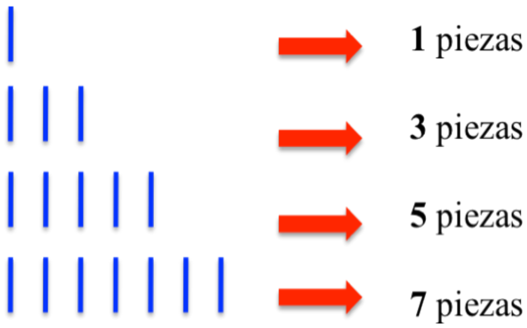


Figura 6.1. Disposición de las piezas más común para jugar al NIM

El objetivo del juego tiene dos vertientes: gana el último que coge un objeto o gana el que consigue que su contrincante coja el último en cuestión.

Comienza el juego y cada jugador, por turnos, quita los objetos que desee, siempre y cuando pertenezcan a una misma fila. El NIM, al ser un juego de estrategia, posee una clave para ganar, siempre y cuando se dominen ciertos aspectos matemáticos desarrollados en los siguientes apartados.

a) Preliminares del NIM

Antes de abordar los fundamentos básicos de este juego, conviene presentar algunos juegos de menor complejidad pero que cuya esencia reside en el NIM.

> <u>Juego 1 (dos jugadores):</u> se preparan 20 fichas colocadas en una misma fila. En cada turno, el jugador en cuestión puede coger una o dos piezas. Gana el jugador que coge la ficha número 20.
>
> En este primer juego, se puede establecer una estrategia ganadora comenzando por el final del juego. Es decir, para que el jugador 1 gane, éste necesariamente deberá coger la pieza número 17. De este modo, el jugador 2 podrá coger una ficha (ficha número 18) o dos fichas (ficha número 19). Por tanto, quedarían una o dos fichas que, según las normas del juego, podrá coger el jugador número 1.
>
> La cuestión es: ¿cómo llegar a la pieza número 17? De manera análoga, el jugador 1 tendrá que coger la pieza número 14 ya que, de nuevo, sólo dejaría dos opciones al jugador número 2:
>
> - Coger la pieza número 15 (sólo quitaría una pieza).
> - Coger la pieza número 16 (quitaría dos piezas).
>
> Tras estas dos apreciaciones, es fácil comprobar cómo se establece una serie decreciente de razón 3. Se resta 3 al número hasta llegar al

número 2, lo cual implica que si el jugador 1 comienza la partida cogiendo dos piezas, será el ganador:

17 14 → 11 → 8 → 5 → 2

A partir de este mismo ejemplo se puede establecer una variante: *pierde el jugador que coge la última pieza*. Para ello, de forma paralela habrá que conocer a qué ficha debe llegar el jugador 1 para ganar la partida.

En esta ocasión, habrá que llegar a la pieza número 19 para dejar así una sola pieza al jugador 2, el cual deberá cogerla obligatoriamente. Del mismo modo, para poder coger la pieza número 19 habrá que coger la pieza 16 para que el jugador 2 tenga estas dos opciones:

- Coger la pieza número 17 (sólo quitaría una pieza).
- Coger la pieza número 18 (quitaría dos piezas).

De nuevo se comprueba que se establece una serie decreciente de razón 3. Con lo cual, si se resta 3 a cada número, finalmente se llega a la conclusión de que para ganar el jugador 1 tendrá que coger una pieza al iniciar el juego:

19 → 16 → 13 → 10 → 7 → 4 → 1

<u>Juego 2 (dos jugadores):</u> para elevar la dificultad en este tipo de juegos, en este ejemplo se trabajará hasta el número 100. A diferencia del ejemplo anterior, el primer jugador escribe un número del 1 al 10 en un papel. El segundo jugador elige un número del 1 al 10 y lo suma al anterior. Ganará el jugador que obtenga una suma de 100.

De forma análoga, se comprueba que para llegar a 100, el primer jugador debe llegar previamente a 99 y para llegar a dicho número, debe alcanzar el 89… así sucesivamente hasta llegar a 9, que sería el número con el que debería empezar si quiere alcanzar la victoria.

Otra variante del NIM pero con mayor nivel de complejidad es el llamado NIM de Fibonacci. Las reglas son las siguientes:

Teniendo en cuenta la serie de Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233…

Sea N el número de piezas sobre la mesa en cualquier disposición:

1. Por turnos cada jugador tiene que coger alguna pieza.
2. El primero que juega no puede coger las N piezas.
3. En cada turno el jugador puede coger como máximo el doble de las fichas que ha cogido el anterior jugador.

4. Gana el juego quien coge la última pieza.

La cuestión reside en que si N es un número de Fibonacci, el jugador que juega primero pierde si el otro jugador sabe jugar adecuadamente. Sin embargo, si N no es un número de Fibonacci, entonces el jugador que juega primero gana si lo hace correctamente.

c) ¿Cómo conseguir ganar en el NIM?

Demostración

<u>Definiciones</u>

Teniendo en cuenta a Bouton en [7], para comprender el desarrollo de los siguientes apartados, es preciso establecer las definiciones de los siguientes conceptos:

- *Combinación segura*: un jugador establece una *combinación segura* si al representar el número de fichas en cada fila en sistema binario y colocando dichos números en columnas (con ceros a la izquierda si fuese necesario) el número de "1" que quedan en cada columna es par.

  Ejemplo: en el NIM que se ha considerado estándar (filas de 1, 3, 5 y 7 fichas) se transforman dichos números de fichas a sistema binario:

$$1 = 1 \cdot 2^0 \rightarrow 001$$

$$3 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \Rightarrow 011$$

$$5 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 \Rightarrow 101$$

$$7 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 \Rightarrow 111$$

  Colocando dichos números se puede comprobar que el número de "1" en cada columna es un número par:

$$\begin{array}{c} 001 \\ 011 \\ 101 \\ 111 \end{array}$$

  Si esta situación se presenta se tiene una *combinación segura*.

- *Combinación no segura*: un jugador se encuentra ante una *combinación no segura* cuando al representar el número de fichas de cada fila en sistema binario y colocarlos en columnas de manera análoga al ejemplo anterior, el número de "1" de alguna columna es impar.

Teorema:

Sea un NIM con m filas numeradas del 1 al m (siendo m un entero positivo) y en cada fila existe un número n_i *de piezas donde i = 1, …, m, tras una combinación segura, cualquier jugada conduce a una combinación no segura. Dada cualquier combinación no segura, siempre se puede hacer una jugada de tal forma que se obtenga una combinación segura.*

- Demostración (1.ª parte): se parte de una combinación segura. Como sólo se pueden quitar fichas en una sola fila, esto equivale en la representación digital a cualquiera de las dos situaciones siguientes.

    i. Si se quita un 1 de una fila, en una columna quedará un número impar de "1".

    ii. Si un cero se convierte en un "1", entonces ocurrirá que en la columna donde aparece el "0" quedará ahora un número impar de "1". Luego la combinación resultante no es segura.

- Demostración (2.ª parte): se supone que un jugador tras quitar fichas, ha dejado una combinación no segura. El jugador que ahora posee el turno debe elegir una fila para disminuirla. Para hacer esto, es preciso que observe de izquierda a derecha los números expresados en sistema binario con el fin de cambiar un "1" por un "0". Es importante remarcar que no se puede hacer el cambio de manera contraria, es decir, cambiar un "0" por un "1" puesto que se estarían añadiendo fichas a las filas (aspecto no permitido en el juego). Esto quedaría demostrado del siguiente modo:

> ¿Cómo demostrar que 011…1 < 100…0 en sistema binario existiendo un número *n* de "1" y de "0"? Su demostración se basa en la progresión geométrica:
>
> $$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = \frac{2^{n-1} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = \frac{2^{n-1}}{2-1} < 2^n$$

De esta deducción también es importante verificar que el hecho de que un número sea mayor en el sistema binario no reside en la cantidad de "1" que pueda tener, sino en la posición de sus cifras.

Dicho esto, considérese que el jugador se encuentra con una o más columnas en las que el número de “1” es impar. Entonces, comienza de izquierda a derecha a cambiar “1” por “0” hasta llegar a una combinación segura.

Este proceso se continúa del mismo modo hasta que el jugador que construye combinaciones seguras gane o más exactamente, el jugador que consigue en cualquier momento de la partida una de tales combinaciones.

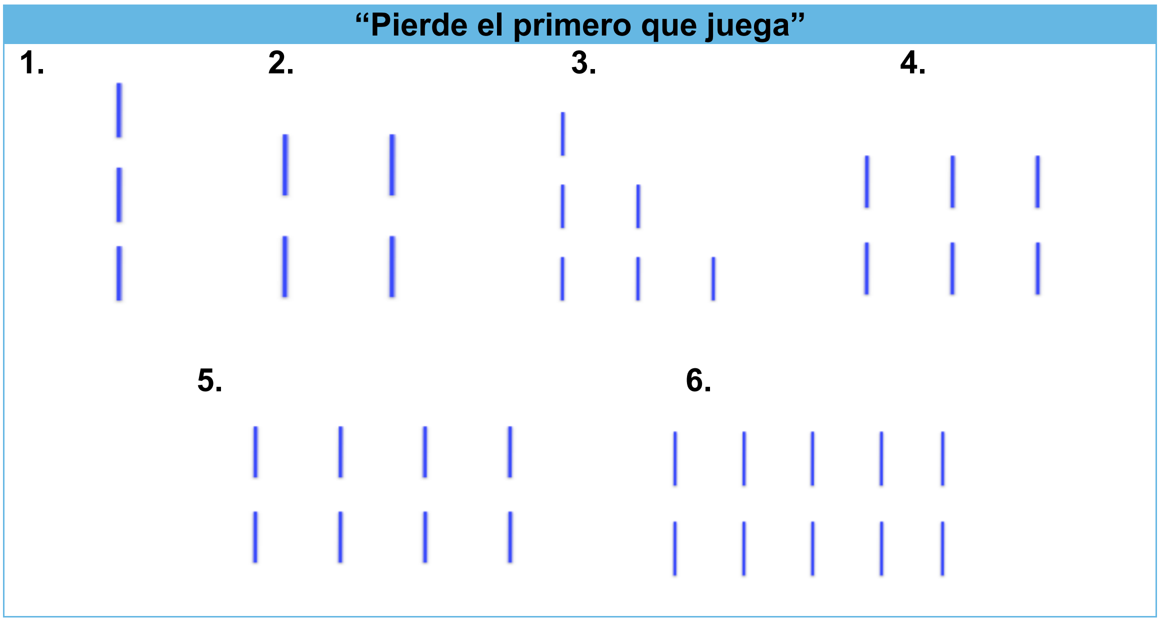
Si la regla del juego es que pierde el que toma la última ficha, entonces el jugador que lleva la iniciativa debe jugar de manera que el número de filas que se quedan con un “1” sea impar.

De este teorema se deduce que, tras la representación del número de piezas que compone cada fila en el sistema binario, la combinación ganadora será siempre aquella que, al sumar sus columnas, obtenga como resultado la cifra “0”.

b) Visualización de estructuras seguras (aplicable al aula)

En la tabla 6.1 se establecen estructuras básicas de juego en las que pierde o gana el primero que juega del siguiente modo (ver [49]):

Tabla 6.1. Estructuras básicas en la que pierde el que primero juega



<u>Posición 1:</u>

Es fácil comprobar cómo en la *posición 1* el primero que comienza a jugar será el perdedor.

<u>Posición 2:</u>

En la *posición 2*, el primer jugador, ya coja 1 pieza o 2, el segundo jugador le podrá dejar una ficha tanto en la fila de arriba como en la de abajo, lo cual, desemboca en una derrota.

Posición 3:

En la *posición 3*, haga lo que haga el primer jugador, se llega a la posición 1 o 2, quedando de nuevo en desventaja el primero que empieza a jugar.

Tal y como muestra la figura 6.2, asignando al primer jugador el color naranja y al segundo el amarillo, irremediablemente aparecerán estructuras perdedoras para el jugador naranja:

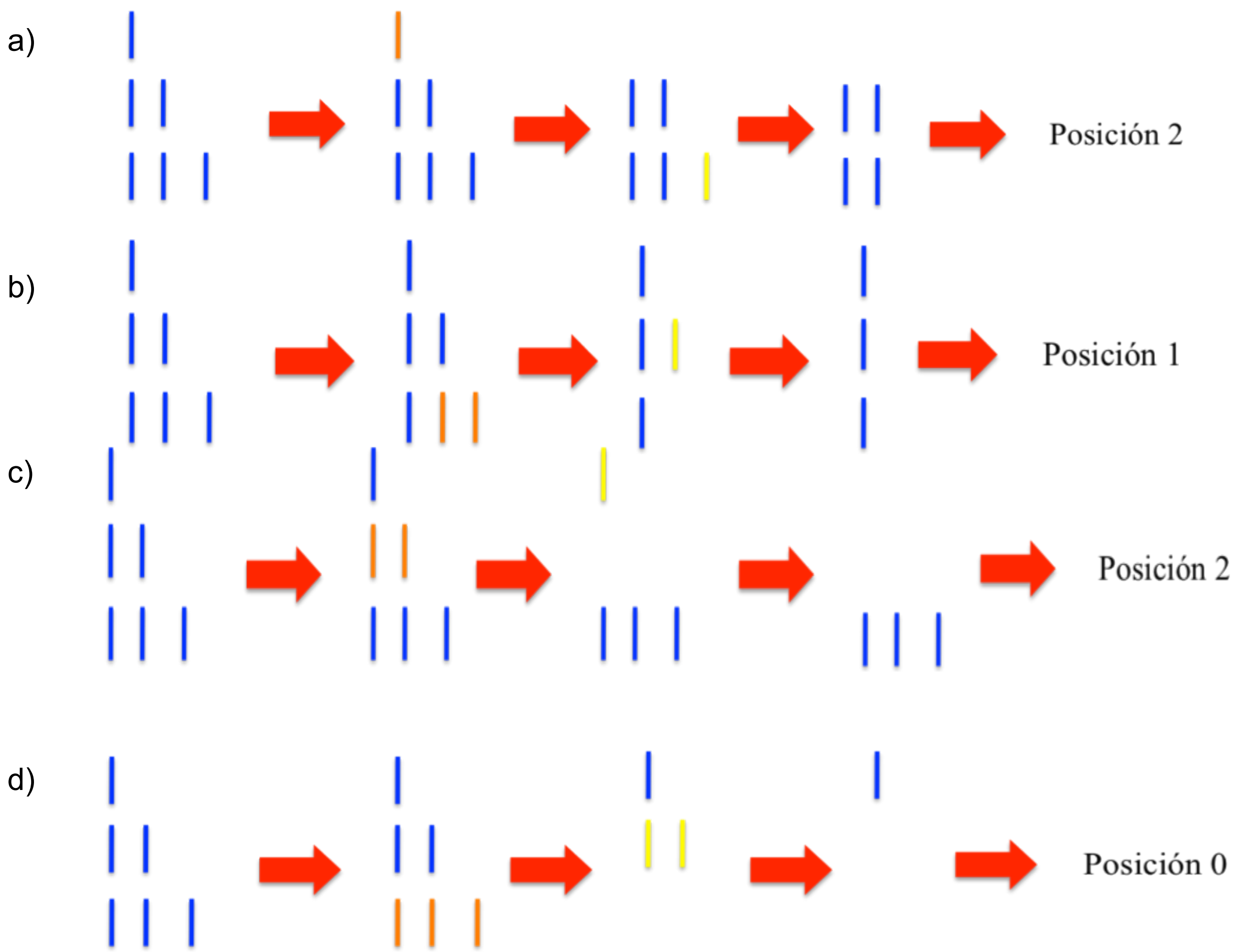


Figura 6.2. Estructuras perdedoras para el jugador que juega primero

Posiciones 4, 5 y 6:

En las *posiciones 4, 5 y 6*, haga lo que haga el primer jugador, el segundo en jugar, si anticipa las jugadas, ganará siempre. Quite las fichas que quite de una de la filas, podrá copiar el movimiento en la otra fila para que aparezca la *posición 2*. En el que caso de que sólo quede una ficha en una de las filas, se pueden quitar las fichas que están en la otra fila. Así, sólo quedará una ficha y, por tanto, perderá el primero que juegue.

A continuación, en la figura 6.3 se pone como ejemplo la *posición 6* ya que se puede plantear la estrategia de manera análoga a las *posiciones 4 y 5*:

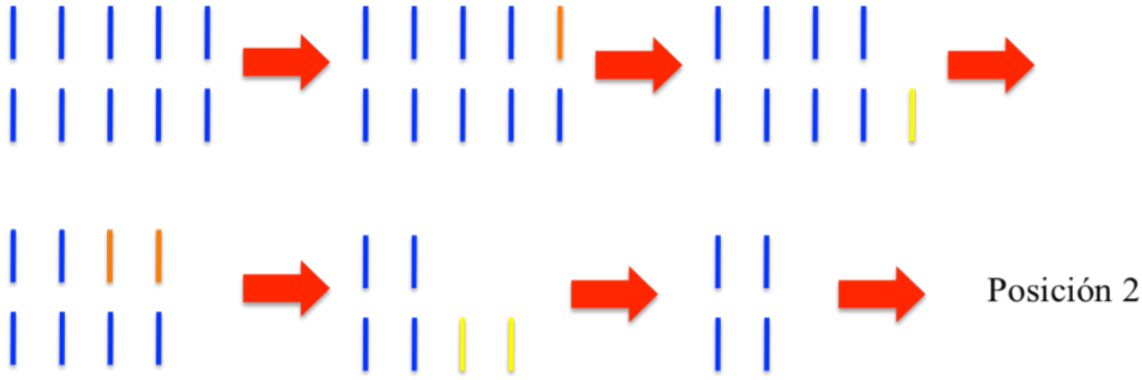
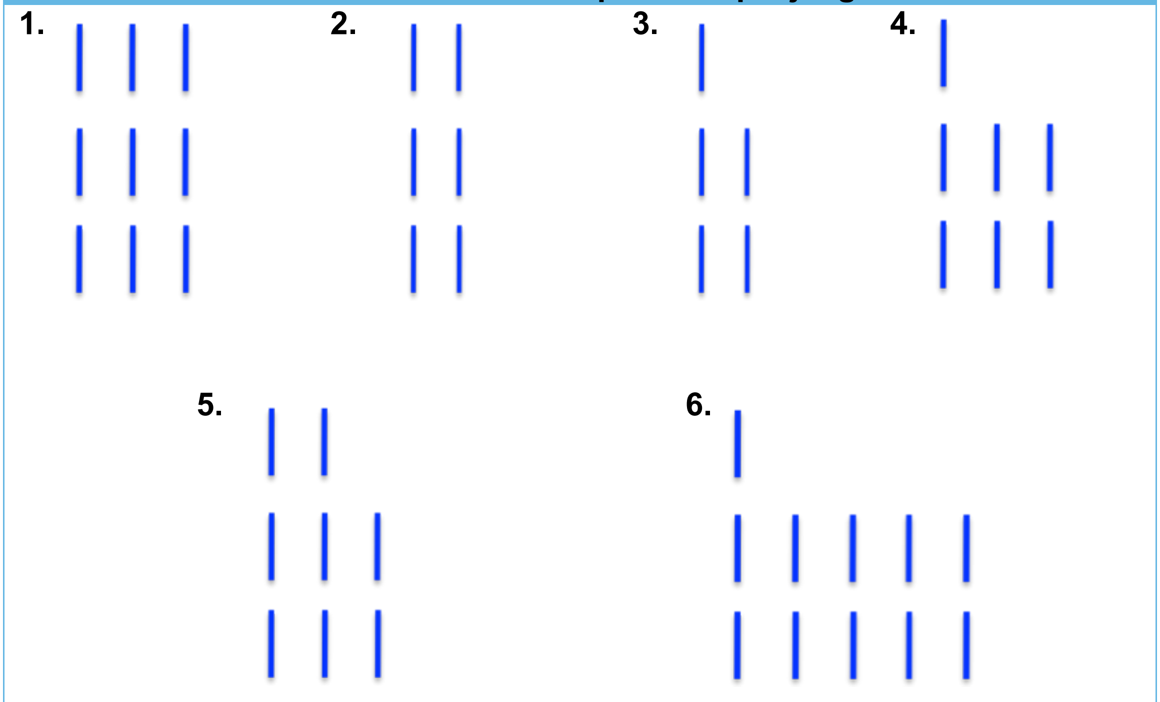


Figura 6.3. Ejemplo de estructura en la que el jugador que primero juega pierde

En la tabla 6.2 se presentan estructuras básicas en las que gana el jugador que comienza el juego:

Tabla 6.2. Estructuras básicas en la que gana el que primero juega

Posiciones. "Gana el primero que juega"



De manera sencilla se puede comprobar cómo en sólo un turno se puede reducir la estructura a las presentadas en el cuadro anterior:

<u>Posición 1 y 2:</u>

Eliminando por completo una de las filas, quedan dos filas con el mismo número de fichas.

Posición 3, 4 y 6:

Eliminando la fila formada por una sola ficha se reduce de nuevo a una estructura con dos filas y con el mismo número de fichas arriba y abajo.

Posición 5:

En este ejemplo se debe eliminar la fila formada por dos fichas para que, otra vez, quede una estructura análoga a las anteriores.

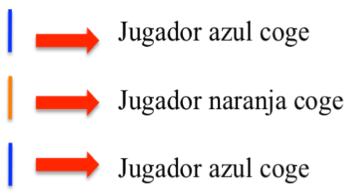
d) Propuesta metodológica

Aunque la mecánica de este juego es aparentemente sencilla, puesto que el objetivo en sí mismo lo es, llegar a él no es tan fácil. Para ello, se plantean una serie de sesiones con el fin de que el alumno, poco a poco, establezca una estrategia de juego.

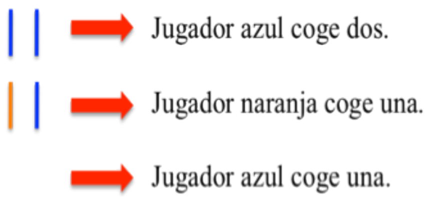
En lo referido a la preparación del juego, el NIM en el aula se jugará de la manera tradicional: 16 piezas ubicadas del modo 1-3-5-7 en diferentes filas teniendo en cuenta las fases presentadas en la tabla 6.3 de la propuesta metodológica:

Tabla 6.3. Fases del NIM en el aula de 5.º de Educación Primaria

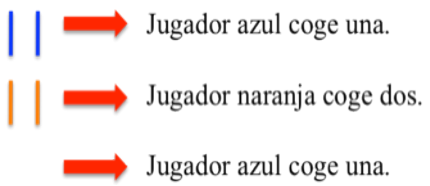
MÓDULO IV: EL NIM
Fase 1: preliminares del NIM (1 sesión)
Tal y como se establece en el apartado 6.1.2, antes de abordar el juego en sí mismo, se trabajarán los dos modelos de juego más sencillos para introducir al alumno en la práctica de juegos de lógica en los que hay que "quitar" cantidades para poder desarrollar la dinámica del mismo (ejemplos 1 y 2).
Fase 2: iniciación al NIM (1 sesión)
En esta sesión, se le explica al alumnado las dos reglas fundamentales del NIM: g) Pierde el último jugador que coja una pieza. h) Sólo se pueden coger piezas de una sola fila. Dicho esto, se ubican las piezas de la forma tradicional, anteriormente mencionada y se deja que el alumnado juegue por parejas quitando piezas de forma aleatoria, sin pensar una estrategia. Esto permite que se familiaricen con la mecánica del juego.
Fase 3: juego con estrategia (3 sesiones)
En las siguientes sesiones, lo que se pretende es que sea él mismo el que deduzca estructuras ganadoras. Es decir, que si sólo quedan tres piezas y cada una está ubicada en una fila y, además, es su turno (jugador azul), sepa irremediablemente perderá esa partida.



Por tanto, pierde el jugador azul.



Por tanto, el jugador azul pierde.



Por tanto, el jugador azul pierde.

Cuando ya hayan salido a la luz diversas estructuras ganadoras propuestas por los alumnos, el siguiente paso es analizarlas y añadir algunas sencillas (si el propio alumnado no ha sido capaz de verlas).

Por último, es fundamental que el alumnado interiorice estas estructuras y que sea capaz de anticiparse a la mismas y, por tanto, alcanzar la victoria en el juego.

e) Puesta en práctica y valoración de los resultados

Como paso previo al NIM el alumnado estuvo durante una sesión practicando con los dos juegos del apartado 6.1.2. la idea general era la misma: eliminar piezas progresivamente hasta que pierda o gane (se trabajaron ambas modalidades) el último que coja una pieza.

Su primera reacción fue manifestar la simpleza que veían en este juego y se ubicaron frente a él con la seguridad absoluta de que siempre ganarían. Sin embargo, percepción fue cambiando a medida que se adentraban en cada una de las fases propuestas.

En la primera fase se comenzó proponiendo juegos parecidos al NIM: ser capaz de conseguir la pieza número 20 pudiendo coger tan sólo una o dos piezas. Los alumnos por parejas colocaron las piezas en fila (puede ser cualquier tipo de objeto) y comenzaron a coger una o dos piezas indistintamente. En las primeras rondas de juego ganaba un jugador u otro de forma aleatoria, sin ninguna estructura de juego.

Tras varias partidas, algunos alumnos fueron llegando a la conclusión de que tenían el juego ganado siempre que llegaban a coger la pieza número 17.

Cuando la mayoría de alumnos llegó a esa conclusión, en gran grupo fuimos retrocediendo paso a paso para averiguar cuántas piezas ha de coger el jugador 1 (J1) por primera vez para ganar la partida anticipando las piezas que podría coger el jugador 2 (J2):

J1: coge hasta la *pieza 2* → **J2**: coge hasta la *pieza 3* o hasta la *pieza 4*.

J1: coge hasta la *pieza 5* → **J2**: coge hasta la *pieza 6* o hasta la *pieza 7*.

J1: coge hasta la *pieza 8* → **J2**: coge hasta la *pieza 9* o hasta la *pieza 10*.

J1: coge hasta la *pieza 11* → **J2**: coge hasta la *pieza 12* o hasta la *pieza 13*.

J1: coge hasta la *pieza 14* → **J2**: coge hasta la *pieza 15* o hasta la *pieza 16*.

J1: coge hasta la *pieza 17* → **J2**: coge hasta la *pieza 18* o hasta la *pieza 19*.

J1: coge hasta la *pieza 20* → **J1 gana la partida.**

Este proceso requirió su tiempo ya que había que analizar las dos posibilidades que siempre se plantean, es decir, que nuestro oponente coja una o dos piezas.

Es cierto que no todos los alumnos conseguían entender el desarrollo hasta llegar a la primera jugada pero sí comprendieron todos que era necesario llegar a la pieza número 17 si se quería ganar la partida.

Tras una sesión completa practicando la estrategia ganadora en esta dinámica, con el fin de “romper” todos sus esquemas se le planteó el mismo juego con una norma diferente: “pierde el que coja la pieza 20”.

Acostumbrados a la mecánica anterior, no fue fácil dar la vuelta al juego y encontrar una estrategia ganadora. A través del “ensayo y error” fueron comprobando que en esta ocasión, coger la pieza 17 automáticamente te lleva a la derrota, había que seguir probando. Tras varias partidas, como ya tenían práctica con respecto a la dinámica anterior, tardaron menos en darse cuenta de que para asegurarse la victoria debían coger hasta la pieza número 19. De este modo, forzaban a su rival a coger la pieza número 20.

De manera análoga, en gran grupo se retrocedió jugada a jugada hasta llegar a la jugada inicial:
J1: coge hasta la *pieza 1* → **J2**: coge hasta la *pieza 2* o hasta la *pieza 3*.

J1: coge hasta la *pieza 4* → **J2**: coge hasta la *pieza 5* o hasta la *pieza 6*.

J1: coge hasta la *pieza 7* → **J2**: coge hasta la *pieza 8* o hasta la *pieza 9*.

J1: coge hasta la *pieza 10* → **J2**: coge hasta la *pieza 11* o hasta la *pieza 12*.

J1: coge hasta la *pieza 13* → **J2**: coge hasta la *pieza 14* o hasta la *pieza 15*.

J1: coge hasta la *pieza 16* → **J2**: coge hasta la *pieza 17* o hasta la *pieza 18*.

J1: coge hasta la *pieza 19* → **J2**: coge hasta la *pieza 20* → **J1 gana la partida.**

Para acabar esta fase preliminar al NIM, se le planteó el último juego numérico por parejas: "sumando números del 1 al 10, gana el jugador que sume antes 100". Puesto que 100 piezas serían muchas, es más conveniente realizarlo con papel y lápiz al tiempo que aumentábamos la dificultad para trabajar así el cálculo mental.

Al inicio, la estructura de juego siempre es la misma: elegir números al azar hasta probar si ha habido suerte. Los alumnos se dieron cuenta, tras alguna que otra partida, que el truco ganador estaba en llegar al 99 ya que el rival necesariamente debía sumar el mínimo, o lo que es lo mismo, debía sumar 1. En este caso el proceso de retroceso para comprobar con qué número se debe empezar es más complejo por lo que este tercer juego preliminar acabó cuando los alumnos comprendieron cuál era el número anterior a 100 que otorgaba la victoria al jugador.

Puestos en situación sobre juegos en los que hay que ir "quitando elementos", en este momento se llegó a la segunda fase de la propuesta: presentación del NIM. Se les explicó que el NIM tiene infinitas estructuras de juego, es decir, se pueden poner el número de filas y el número de elementos de cada fila como se quiera. Sin embargo, a mayor número de piezas, mayor dificultad.

Se establecieron las dos condiciones principales del juego: se pueden coger las piezas que se quieran siempre y cuando pertenezcan a la misma fila y pierde el último jugador en coger una pieza.

Se comenzó con estructuras sencillas para que, posteriormente fueran capaces de identificarlas en la estructura estándar con la cual trabajarían (1-3-5-7).

Comenzaron con las estructuras que pueden verse en la figura 6.4, las cuales pertenecen al grupo de *pierde el primero que juega*:

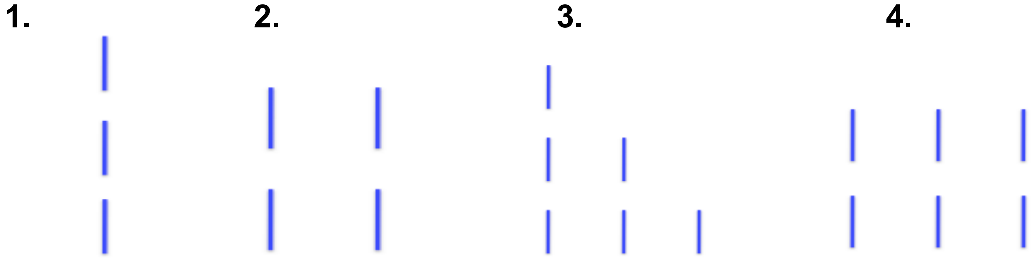


Figura 6.4. Estructuras en las que pierde el primero que juega

Al principio, eliminar unas piezas u otras se realizó de manera aleatoria. Sin embargo, tras varias partidas, vieron fácilmente que con las estructuras 1 y 2 el jugador que empieza pierde ya que puede anticipar la jugada del rival rápidamente al presentarse tan pocas piezas. Ambas estructuras tienen mucha importancia ya que el resto que se presentarán se pueden reducir a dichas estructuras.

Dominadas estas dos estructuras pasaron a las estructuras 3 y 4. Éstas son más complejas, sin embargo, fueron comprobando lo siguiente:

- La estructura 3 puede reducirse a la estructura 1 y 2. Por tanto, si llegaban a esta estructura ya eran capaces de anticipar quién ganaría.

La estructura 4 puede reducirse a la estructura 2. De manera análoga, cuando llegaban a la misma, de nuevo podían anticipar quién alcanzaría la victoria.

Por último, trabajadas las estructuras más sencillas, llegó el momento de adentrarse en la última fase propuesta y presentarles la estructura que representa la figura 6.5:

Figura 6.5. Estructura de juego 1-3-5

Ésta es la que más se aproxima a la estructura habitual del juego (1-3-5-7). De nuevo, la intención de los alumnos fue quitar piezas aleatoriamente. Sin embargo, progresivamente orientaban sus jugadas a conseguir las estructuras trabajadas en la fase anterior, sobre todo las representadas en la figura 6.6:

1-1-1 *2-2*

Figura 6.6. Estructuras en las que pierde el primero que juega

Aunque no consiguieron en todos los casos alcanzar las estructuras denominadas ganadoras, sí que es cierto que cuando conseguían llegar a ellas, ambos jugadores eran capaces de anticipar quién sería el perdedor y quién el ganador. Por tanto, en la mayoría de los casos, el alumno interiorizó la estructura ganadora jugando con una estrategia y no de forma aleatoria.

Por último, dentro de esta fase, se les presentó la estructura de juego más habitual dentro del NIM, la conocida como 1-3-5-7.

En este caso, fue más complicado jugar estableciendo una estrategia ganadora, si bien es cierto que, en algunos casos lograron alcanzar las estructuras 1-1-1 y 2-2, lo cual suponía que pierde el primero que juega.

Aunque ante la estructura más conocida del NIM les fue casi imposible llegar a una estructura ganadora, sí que es cierto que ante estructuras más sencillas comenzaron a memorizar ciertas posiciones mentales, lo cual aumentó sus posibilidades de éxito.

La propuesta no se dilató en el tiempo por lo que se trabajaron habilidades muy concretas vinculadas al área de Matemáticas. Principalmente, el NIM ayudó a que el alumnado fuera de capaz de establecer regularidades frente a un fenómeno. Es decir, tras la práctica, el alumnado fue capaz de establecer ciertos patrones que le podían asegurar tanto la victoria como la derrota.

Este aspecto es muy relevante en el aprendizaje matemático del niño ya que consigue que sea capaz de observar, comprobar y deducir patrones que se repiten y que, además, les ayudan a resolver problemas no sólo en la vida escolar.

6.2 La Matemagia

a) Contextualización

Como la propia palabra indica, la Matemagia consiste en hacer magia usando las Matemáticas. Como todo en el universo, hay siempre una explicación matemática tras de sí. Por tanto, unir ambos conceptos dota a las Matemáticas de un carácter lúdico que es uno de los referentes de esta Memoria: unir Matemáticas y juego. Trasladar la Matemagia a la escuela es interesante por esta misma razón: de nuevo se parte de una enseñanza de las Matemáticas divertidas. Ruiz Domínguez en [48] habla también de una Magia educativa capaz de ayudar al alumno a mejorar su atención, memoria, creatividad y para trabajar de una manera diferente algunas áreas curriculares, en este caso, las Matemáticas.

Probablemente Martin Gardner sea uno de los matemagos más conocidos. La idea de unir ambos términos fomenta unas Matemáticas lúdicas que es el objetivo principal de esta investigación. No se trata de retos complicados sino de trucos que precisen un nivel básico en Matemáticas, ideal para el alumnado de Educación Primaria.

b) Ejemplos de Matemagia

A continuación se presentan algunos trucos para llevar al aula y su explicación basándose en las Matemáticas como muestra la tabla 6.4:

Tabla 6.4. Trucos de Matemagia para el alumnado de 5.º de Educación Primaria

MATEMAGIA EN EL AULA
Las tarjetas
1. Puesta en escena Este truco está formado por 6 tarjetas de colores. En cada tarjeta aparecen una serie de números tal y como muestra la imagen. 2. Comienza el truco Para empezar el juego habrá que seguir los siguientes pasos: a) Elegir a un voluntario. b) Decirle a éste que elija un número del 1 al 63 sin mencionarlo. c) Mostrar una a una las cartas pidiéndole que diga si el número elegido se encuentra en la misma. d) Terminadas todas las tarjetas, el mago sabrá de qué número se trata. 3. Truco del mago Cada vez que el voluntario nos diga que sí se encuentra el número en la tarjeta mostrada, el mago memorizará el primer número que aparece en la tarjeta. En caso de que no esté el número en una tarjeta, no habrá que hacer nada. A medida que el mago va pasando las tarjetas, va sumando el primer número de cada (siempre y cuando el voluntario diga que su número se encuentra en la misma). El resultado final será el número que el voluntario previamente habría pensado. 4. Explicación La fundamentación de este truco matemático se basa en el sistema de numeración binario. El sistema binario consiste en representar cualquier número utilizando las cifras “0” y “1”. Para ello, se deben utilizar potencias en base 2 y los coeficientes “0” o “1”. Por ejemplo, el número 7 en base dos (sistema binario), vendría expresado del siguiente modo: $7 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 111$ Es importante destacar que para la explicación de este juego, los números deben expresarse con seis cifras por lo que se añaden tres ceros a la izquierda ya que esto no cambia el valor de propio número siete. Quedaría del siguiente modo: 000111. A continuación, se muestran las tarjetas con las que se realiza el truco

matemático:

2	3	6	7	10	11
14	15	18	19	22	23
26	27	30	31	34	35
38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59
62	63				

1	3	5	7	9	11
13	15	17	19	21	23
25	27	29	31	33	35
37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59
61	63				

8	9	10	11	12	13
14	15	24	25	26	27
28	29	30	31	40	41
42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61
62	63				

4	5	6	7	12	13
14	15	20	21	22	23
28	29	30	31	36	37
38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61
62	63				

32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61
62	63				

16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61
62	63				

Como se puede comprobar, en ellas aparecen 32 números en orden creciente coincidiendo éstos en alguna característica del siguiente modo si todos estos números se transforman en números binarios:

i) En la tarjeta verde se comprueba como todos cumplen que en la sexta posición el coeficiente siempre es 1.

j) En los números de la tarjeta rosa el coeficiente correspondiente a la quinta posición es 1.

k) En los números pertenecientes a la tarjeta roja el coeficiente de la cuarta posición es 1.

l) Los números de la tarjeta de color azul coinciden en que la tercera cifra del coeficiente es 1.

m) Los números de la tarjeta amarilla de nuevo tienen de coeficiente un 1, en este caso en la segunda posición.

n) Por último, los números de la tarjeta naranja tienen un 1 en el primer coeficiente.

De modo que, aquí está el truco: si la persona que ha pensado el número nos dice que éste está en la tarjeta que se muestra, significa que tiene un 1 en base 2 en la posición que corresponda según el color de la tarjeta, es decir, la potencia en base dos que aparece como primer número en la tarjeta formará parte de la suma que compone el número.

En definitiva, cada vez que se muestre una tarjeta y el voluntario diga que sí se encuentra su número en la misma habrá que sumar el primer número de cada tarjeta hasta componer el número en cuestión.

Por ejemplo, si el voluntario elige el número 24 pasará lo siguiente:

o) Tarjeta verde → No está el 24.

p) Rosa → No está el 24.

q) Roja → No está el 24.

r) Azul → Sí está el 24 → 8.

s) Amarilla → Sí está el 24 → 8 + 16 = 24.

t) Naranja → No está el 24.

Por tanto, el número que se busca es el 24 (la suma total de todos los números que aparecen esquina superior izquierda pertenecientes a las tarjetas en donde el voluntario decía que sí se encontraba su número).

5. <u>Para el alumnado</u>

Es evidente que, aunque la explicación matemática se escapa para el alumnado de 5.º de Educación Primaria, sí que pueden practicar el truco ya que sólo requiere de agilidad en el cálculo mental.

La palabra escondida

1. <u>Puesta en escena</u>

Para este truco tan sólo se necesita un libro de lectura, no importa de qué tipo.

2. <u>Comienza el truco</u>

Para comenzar el truco se deben seguir los siguientes pasos:

a) Seleccionar a un voluntario y entregarle un libro y una palabra escrita en un papel relacionada con el libro. El voluntario deberá custodiar ambas cosas durante todo el truco.

b) Se elige otro voluntario y se le pide que elija un número *n* de tres cifras que no sea capicúa, es decir: *siendo* n_1 *= abc, se debe cumplir que* $a \neq c$.

c) Se le dice al voluntario que invierta las cifras del número escogido del siguiente modo: que las centenas pasen al lugar de las unidades y viceversa. De modo que el número quedaría así: n_2 = *cba.*

d) En el siguiente paso el voluntario debe restar los números obtenidos, n_1 y n_2 (el número mayor se resta al menor). El resultado será llamado n_3 , siendo $n_3 = n_1 + n_2$.

e) Después se le pide que invierta del mismo modo que se ha hecho anteriormente el número n_3 para obtener el número n_4 y que sume ambos números.

f) El resultado final al que se le puede llamar N, será 1089. Por lo tanto, al primer voluntario se le pedirá que busque en el libro la página 108 y que lea en voz alta la novena palabra comenzando por la primera línea.

g) Esta palabra coincidirá con la palabra escrita previamente en el papel.

3. Truco del mago

El número llamado N siempre será 1089 por lo que previamente se habrá escrito en el papel anteriormente entregado al primer voluntario. De este modo, cuando lea la palabra en voz alta, todos comprobarán que la palabra leída en el libro coincide con la palabra escrita en el papel.

4. Explicación

El porqué de que N siempre sea igual a 1089 reside en la siguiente demostración:

Como ya se ha dicho en la descripción del truco tenemos que n_1 = *abc* y n_2 = *cba*. Suponiendo que n_1 > n_2 la resta quedaría del siguiente modo:

$$\begin{array}{rccc} & a & b & c \\ - & c & b & a \\ \hline & a-(c+1) & 10+b-(b+1) & (10+c-a) \end{array}$$

Para comprender mejor esta resta habrá que explicar cómo se ha ido realizando. Comenzamos restando las unidades, es decir, c – a. Anteriormente se ha establecido que a > c, por lo que se necesitará una decena para poder restar o lo que es lo mismo, 10 unidades. Por tanto, de esta primera parte obtenemos (10 + c – a) y nos llevamos 1 a la siguiente columna.

Pasamos a las decenas. Como hemos dicho que nos llevamos para la siguiente columna, el b que se encuentra en la segunda fila pasa a ser b + 1 que es mayor que b, por lo que de nuevo, se necesitan 10 decenas procedentes de la columna de las centenas. Por tanto, el b de la primera fila se convierte en b + 10. Al restar ambos número queda de la siguiente manera:

10 + b – (b + 1) = 10 + b – b – 1 = 10 – 1 = 9.

Otra vez nos volvemos a llevar 1 a la columna de las centenas por lo que el c de la segunda fila se convierte en c + 1. Puesto que a > c, necesariamente $a > c \Rightarrow a \geq c+1$, por lo cual, no habría ningún problema para restar: a – (c + 1).

En definitiva, $n_3 = [a-(c+1)][9][10+c-a]$.

Por tanto, ya podemos saber el valor de n_4:

$$\begin{array}{cccc} & a-(c+1) & 9 & 10+c-a \\ - & 10+c-a & 9 & a-(c+1) \\ \hline & a-(c+1)+(10+c-a)+1 & 9+9=8 & (10+c-a)+a-(c+1)=9 \end{array}$$

Es importante aclarar que al sumar las unidades y por simplificación, el resultado obtenido es 9, por lo que no me llevo ninguna. Es fácil comprobar cómo de las decenas obtengo 18 y me llevo una a las centenas quedando así:

a – (c + 1) + (10 + c – a) +1 = a – c – 1 + 10 + c – a + 1 = 10.

En conclusión, sea cual sea el valor de a, b y c, el resultado obtenido siempre será 1089.

5. <u>Para el alumnado</u>

La demostración de por qué siempre se obtiene 1089 sobrepasa los conocimientos del alumnado de 5.º de Educación Primaria pero si es conveniente probar con varios números para comprobar de forma empírica que el resultado que se obtiene siempre es el mismo.

El truco de los tres montones

1. <u>Puesta en escena</u>

Para poder realizar este truco se necesitan 27 cartas de cualquier tipo de baraja.

2. <u>Comienza el truco</u>

Los pasos para realizar este truco son los siguientes:

a) Le pedimos a un voluntario que escoja un número del 1 al 27.

b) Seguidamente le decimos a ese voluntario que elija una de las 27 cartas barajándolas y mezclándolas él mismo sin decir de qué carta se trata.

c) Posteriormente vamos colocando las cartas en tres montones de una en una (9 cartas en cada montón). El voluntario tendrá que memorizar en qué montón está la carta elegida. Cuando estén hechos los tres montones, el voluntario tendrá que indicar en qué montón se encuentra su carta y, tras esto, se juntan los tres montones en uno solo.

d) El paso *c)* habrá que repetirlo dos veces más.

e) Finalmente, unidos todos los montones y comenzando a contar las cartas de una en una desde arriba, la carta escogida por el voluntario estará precisamente en el lugar indicado también por dicho voluntario.

3. <u>Truco del mago</u>

Colocar la carta elegida precisamente en la posición que el mismo voluntario indica implica realizar los siguientes cálculos: restar 1 al número elegido y posteriormente, pasar ese número a base 3. La descomposición de este número nos dirá en qué posición colocar el montón en donde se encuentra la carta con respecto a los demás montones.

4. Explicación

Para llevar a cabo la explicación de este truco, supongamos que el voluntario ha escogido el número 12 (es decir, que la carta que elija ocupe la posición 12 al final del truco). Para que el truco salga como esperamos, primero hay que restarle a 12 una unidad, en total 11. Vamos a ver cómo se representa el número 11 en base 3:

$11 = 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 102$

Este número será muy importante ya que va a determinar en qué posición colocar el montón en el que se encuentra la carta seleccionada en cada una de las tres rondas. Para ello, habrá que tener en cuenta la siguiente tabla:

Cifra	Posición
0	Arriba
1	En medio
2	Abajo

Para poder interpretar esto, habrá que fijarse en la última cifra del número 11 en base 3, es decir, en la cifra 2. Esto implica que en la primera ronda, el montón en donde esté la carta seleccionada habrá que dejarlo abajo (el orden de los otros dos es indiferente).

En la segunda ronda nos fijamos en la siguiente cifra, el 0. Por tanto, el montón en cuestión se colocará arriba.

Por último, la cifra 1 nos indica que el montón seleccionado habrá que colocarlo en medio de los otros dos.

Siguiendo estas instrucciones, al unir todos los montones y mostrar las cartas de una en una empezando desde arriba, la carta en la posición número 12, será la elegida por el voluntario.

5. Para el alumnado

Éste es un truco que se puede realizar en clase a los niños, sin embargo, ellos no pueden realizarlo ya que transformar un número en base 3 es un concepto demasiado complicado.

Adivina el día de la semana en que nací

1. Puesta en escena

Para este truco tan sólo se necesita agilidad mental.

2. Comienza el truco

Se pide un voluntario para que seleccione una fecha cualquiera pasada o futura, indicando el número de día, mes y año.

3. <u>Truco del mago</u>

Puesto que no se puede utilizar lápiz y papel, el matemago tendrá que hacer uso de su agilidad mental en el cálculo evitando cometer errores.

4. <u>Explicación</u>

Este truco se basa en la "Regla del fin de los días". Algunos días del año siempre coinciden en el mismo día de la semana y son los siguientes:

- 4 de abril (4-4).
- 6 de junio (6-6).
- 8 de agosto (8-8).
- 10 de octubre (10-10).
- 12 de diciembre (12-12).
- 9 de mayo (9-5).
- 5 de septiembre (5-9).
- 11 de julio (11-7).
- 7 de noviembre (7-11).
- El último de día de febrero (28 o 29 en caso de año bisiesto).

Para seguir con la explicación del truco es necesario hacer algunas aclaraciones:

- Un año siempre será bisiesto cuando sus dos últimas cifras sean divisibles por 4. Además, si se trata del año perteneciente al final de siglo, las cuatro cifras deben ser divisibles por 400.
- Las fechas anteriormente mencionadas siempre van a coincidir en el mismo día, es decir, si el 4 de abril fue viernes, el resto de días también lo serán. Ese día de la semana se llamará *Doomsday del año.*

Se tomará como el ejemplo la fecha del nacimiento de Gauss: 30 de abril de 1777.

El primer paso a seguir es el cálculo de una variable imprescindible en este truco: *Doomsday del siglo*. Para esto, es preciso quedarse con el año en el que empieza el siglo de la fecha en cuestión: 1700.

A continuación se aplica la siguiente regla: el *Doomsday* del siglo del año 1600 es martes, el de 1700 domingo, el de 1800 viernes, el de 1900 miércoles, el de 2000 vuelve a repetirse el martes, el de 2100 domingo y así sucesivamente se repiten estos cuatro días de la semana cada 100 años hacia delante o hacia atrás: martes – domingo – viernes – miércoles.

Como estamos trabajando con e l700, el *Doomsday* del siglo será domingo.

Ahora cogemos las dos últimas cifras del año 1777, es decir, 77 y dividimos este número entre 12 obteniendo un cociente y un resto: 77 : 12 = 6, siendo el resto igual a 5. El cociente será llamado *docenas* y el resto, *restante*.

El restante (5) lo dividimos entre 4 de tal modo que quedará: 5 : 4 = 1, siendo el resto igual a 1. Al cociente lo llamaremos *grupos de 4*.

Tras esto, sumamos los tres números obtenidos: 6 + 5 + 1 = 12, número que será llamado desplazamiento del *Doomsday del siglo.*

Ahora tan sólo tenemos que calcular el *Doomsday del año* que se halla desplazando el *Doomsday* del siglo el número de días que indica el *desplazamiento del Doomsday*, en esta situación se desplazará 12 veces. De este modo, al ser nuestro *Doomsday del siglo* domingo, si nos desplazamos 12 días será viernes ya que a los 7 días volveríamos a estar en domingo y solo habría que contar otros 5 días.

Por tanto, el *Doomsday del año* será viernes. En otras palabras, en el año 1777 el día 28 de febrero, el 4 de abril, el 6 de junio, el 8 de agosto, etc., cayeron en viernes.

Teniendo estos días como referencia, podemos elegir la fecha que más se aproxime a la que queremos averiguar, en este caso, el 30 de abril.

El más cercano sería el 4 de abril (viernes), por lo que el 11, 18 y 25 también lo fueron. Así, el *30 de abril de 1777 fue miércoles*.

5. Para el alumnado

Este truco es demasiado complicado para que el alumnado pueda hacerlo por lo que se plantea solamente para que el matemago pueda deleitarlos con su agilidad mental.

Todos estos trucos se pusieron en práctica en el aula para despertar el interés del alumnado aunque no todos podrán ser realizados por el alumnado debido a su nivel de complejidad.

c) Propuesta metodológica

Como se ha comentado anteriormente, los juegos que se encuentran dentro de este apartado se han desarrollado de forma más breve. De hecho, por cada sesión se trabaja uno de los trucos seleccionados, los cuales aparecen en el título de cada fase. Tras mostrarles el truco a los alumnos, algunos de ellos podrán ser puestos en práctica por ellos mismos.

Tabla 6.5. Fases de la Matemagia en el aula de 5.º de Educación Primaria

MÓDULO V: LA MATEMAGIA
Fase 1: Las tarjetas (1 sesión)
Este módulo comienza con el truco de “las tarjetas”. Para empezar el matemago pondrá en práctica el truco con varios alumnos del aula. Captada su atención, pasará a la explicación del mismo y, por último, lo practicarán entre ellos.
Fase 2: La palabra escondida (1 sesión)
De manera análoga a la fase anterior, este nuevo truco se realizará en el aula por parte del matemago a los niños que se ofrezcan como voluntarios. Habrá una posterior explicación para que los alumnos puedan practicar el truco entre ellos.
Fase 3: Nos convertimos en matemagos (1 sesión)
Esta fase está dedicada a la puesta en escena de los alumnos con el fin de convertirlos en verdaderos matemagos. Para ello, se dividirá la clase en pequeños grupos. Cada grupo irá a una clase del colegio para mostrar a compañeros de otros cursos los trucos aprendidos: “las tarjetas” y “la palabra escondida”.
Fase 3: La magia del matemático (1 sesión)
Esta sesión será magistral ya que se mostrará al alumnado dos trucos muy llamativos para ellos: “el truco de los tres montones” y “el día en el que nací”. Sin embargo, no se les enseñará a los niños cómo hacerlos ya que el nivel de dificultad es demasiado elevado para su nivel. De lo que se trata es de que queden tan intrigados que quieran seguir con su formación matemática para que algún día sean capaces de lograr hacer estos trucos.

d) Puesta en práctica y valoración de los resultados

Este módulo, aunque tan sólo está compuesto por cuatro sesiones, fue el que más captó el interés del alumnado desde el principio. Desde el punto de vista docente, tampoco se era consciente del poder motivador que un truco de magia podía tener para ellos.

Esa técnica para llamar su atención, como menciona Ruiz Domínguez en [48] tuvo una gran repercusión en ellos y, sólo en ese instante, se es conciente de los beneficios que ya estaba reportando la *magia educativa* antes de comenzar.

Si encontrarse con la magia en las aulas ya les parecía raro a los alumnos, unir las Matemáticas con la magia ya les resultaba completamente desconocido.

Una vez presentado el matemago, comienza la función. El primer truco, “las tarjetas”, fue un buen candidato para empezar ya que su planteamiento era muy sencillo. La sorpresa vino ante el “poder de adivinación” del matemago. ¿Cómo podía averiguar el número que estaba pensando? Fue tan grande su sorpresa que se tuvo garantizado durante toda la sesión la atención y motivación del alumnado. Cuando el truco terminó destacó el hecho de que, la “explicación lógica” dada por todos los niños, en ningún caso se vinculaba con el ámbito matemático. Sus ideas se orientaban más al ámbito fantástico.

El porqué de este truco fue sencillo de entender para los niños, tan sólo era necesario un requisito: agilidad en el cálculo mental. La elección de este truco residía precisamente en el fomento de esta capacidad: ayudar al desarrollo del cálculo mental de una manera diferente. Practicarlo “porque sí”, como la mayoría de las cosas, no suele ser muy atractivo para el alumnado. Sin embargo, si para ello se convierten en matemagos, todo cambia.

Sin duda sus esfuerzos por acertar el número elegido por su compañero, hacían que se esmeraran más en realizar los cálculos y si no salía el resultado esperado, siempre había un segundo intento para conseguir averiguarlo.

En resumen, con tan sólo un truco de Matemagia ya se fomentaron las siguientes habilidades matemáticas como muestra la figura 6.7:

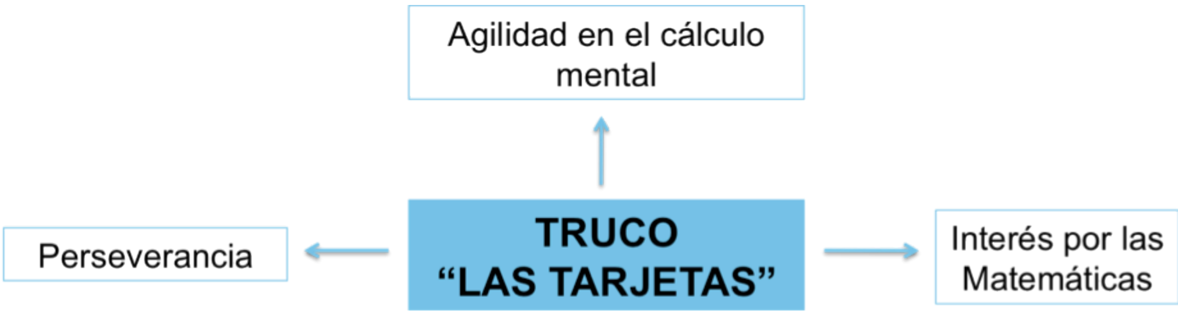


Figura 6.7. Habilidades matemáticas fomentadas por el truco las tarjetas

La segunda sesión de la propuesta comenzaba con el truco de “la palabra escondida”. Se podría decir que este truco fue el más aclamado ya que adivinar una palabra de entre todo un libro suponía un reto imposible para los alumnos. Conviene recordar que la edad del alumnado oscila entre 10 y 11 años por lo que algunos aspectos estrictamente matemáticos escapan a sus mentes.

Lo fascinante para los niños fue el hecho de que la persona voluntaria eligió el número de tres cifras que quiso, ¿cómo es posible que ese número perteneciera a una página y posición concretas?

Tras la realización del truco los niños comenzaron a exponer posibles soluciones para resolver el enigma como por ejemplo las siguientes:

- El matemago había memorizado todo el libro.
- Todas las páginas tenían escrito lo mismo.
- El matemago tiene una copia del mismo libro.

Todas estas hipótesis eran fácilmente desmontables y ante tal evidencia, los niños seguían sin dar respuesta a su curiosidad.

Sin embargo, para encender la “chispa” que les lleve a la solución de este truco, tan sólo fue necesario repetir el truco una vez más. Algunos niños comenzaron a darse cuenta de que el resultado era el mismo “1089”.

La explicación matemática de por qué siempre se obtiene el mismo número es demasiado compleja para un niño de Primaria aunque pudieron dar sentido al truco ya que, conociendo el resultado, el matemago puede mirar previamente de qué palabra se trata, escribirla en un papel y truco resuelto.

Con este truco los niños pusieron de relieve habilidades muy vinculadas al aprendizaje de las Matemáticas:

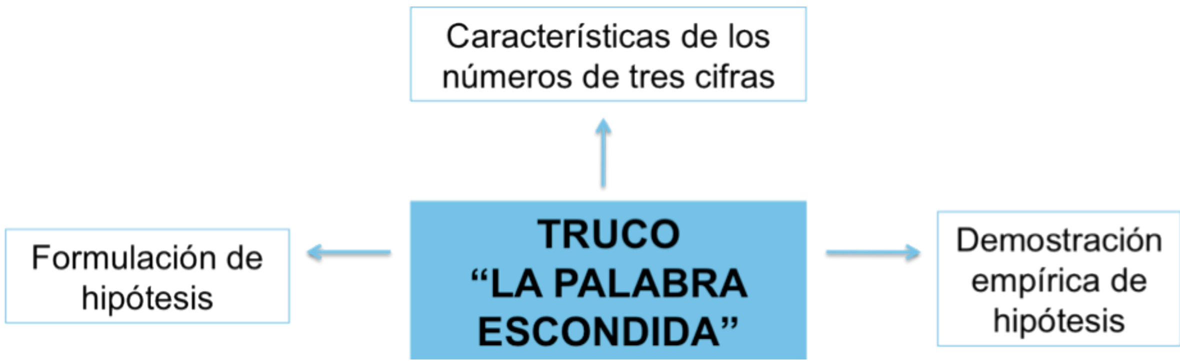


Figura 6.8. Habilidades matemáticas fomentadas por el truco la palabra escondida

Con tan sólo la experimentación de estos dos trucos la motivación del alumnado estuvo más que garantizada. Esta forma de trabajar con los números y sus relaciones permitió mostrar a los niños una cara distinta de las Matemáticas. Una perspectiva que ayuda a entender que hay regularidades en el mundo matemático que hacen de las Matemáticas un juego divertido.

En este momento de la propuesta y con una actitud muy positiva hacia el mundo de la Matemagia llegó el momento en el que ellos se convirtieran en verdaderos matemagos. Los alumnos fueron realizando estos trucos a compañeros de otras clases disfrazados como auténticos matemagos, todo un espectáculo. Además, también ejercieron las veces de maestros puesto que, no sólo llevaron a cabo el truco sin más, sino que después preguntaban a sus espectadores el porqué de estos trucos y, por último, daban la solución a los mismos.

Por último, y para que pudieran comprobar que con las Matemáticas siempre se puede ir un paso más allá, el matemago realizó dos trucos más: “el truco de los tres montones” y “el día en el que nací”. Ambos trucos requieren un grado de abstracción mucho mayor para comprender los mismos lo cual impedía su posterior explicación. A los niños les encantaron ambos trucos, incluso llegaron a la conclusión de que sin saber cómo ni por qué, las Matemáticas estaban escondidas en la “magia” que vieron aquel día.

Sin lugar a dudas, fue un recurso lúdico muy destacable en el aula, no sólo por el hecho de trabajar aspectos matemáticos durante su puesta en práctica, sino por el alto grado de motivación que tiene para el alumnado.

6.3 Las Torres de Hanoi

a) Contextualización y forma de juego

Las Torres de Hanoi son un juego de estrategia creado en 1883 por el matemático francés Édouard Lucas. Está formado por una serie de discos perforados de radio creciente y tres varillas fijas en un tablero como se aprecia en la figura 6.9. El objetivo es trasladar todos los discos a otra varilla ordenados en orden creciente. Las dos normas fundamentales son:

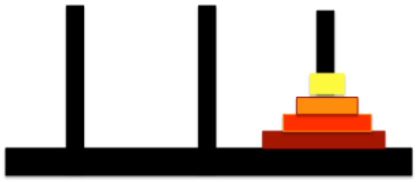


Figura 6.9. Ejemplo de juego las Torres de Hanoi

u) Los discos sólo pueden trasladarse de uno en uno.

v) Un disco de radio superior no puede estar sobre otro de radio inferior.

Cuenta la leyenda que en un monasterio, unos monjes tenían la misión de trasladar 64 discos perforados de radio creciente de una varilla a otra. Estos discos eran de oro y tan sólo se contaba con 3 varillas para realizar los movimientos. Había dos condiciones: tan sólo se podía mover un disco a la vez y un disco de radio mayor no podía estar sobre uno de radio menor. Estos monjes llevan a cabo esta tarea con el mínimo número de movimientos, es decir, sin cometer ningún error y tampoco paran de realizar esta tarea en ningún instante. Se dice que el día en que estos monjes acaben su tarea el templo se convertirá en polvo y el mundo se acabará.

No se sabe con certeza si Lucas creó el juego inspirado en esta leyenda o esta leyenda inspiró el juego. Lo cierto es que existe una fórmula matemática con la que se puede calcular el número de movimientos mínimos para conseguir trasladar la torre de discos: $2^n - 1$, en donde *n* es el número de discos con el que se juega.

b) Las Torres de Hanoi y las Matemáticas

Como ya hemos comentado en el apartado anterior, de las Torres de Hanoi se puede deducir una fórmula matemática que permite calcular los movimientos mínimos que se necesitan para resolver el juego.

De forma experimental se puede deducir que:

Siendo n el número de discos y T_n el número de jugadas mínimas para conseguir resolver el juego, se establece el siguiente cálculo reflejado en la tabla 6.6*:*

Tabla 6.6. Relación entre el número de discos y el número de jugadas mínimas necesarias

Número de discos	Número de jugadas
n = 1	T_1 = 1

n = 2	$T_2 = 2\ T_1 + 1 = 3$
n = 3	$T_3 = 2\ T_2 + 1 = 7$
n = 4	$T_4 = 2\ T_3 + 1 = 15$

Sea T_n el número de tiradas mínimo necesario para resolver el juego. Para poder conseguirlo el primer paso consiste en cambiar la Torre de Hanoi de los *n-1* discos más pequeños a otra varilla. En el segundo paso el disco mayor de los n discos se pasa a la varilla vacía. En el tercer paso la Torre de Hanoi de *n-1* discos habrá que ponerla encima del disco grande con lo que en total se dedican 2 T_{n-1} + 1 jugadas.

Se obtiene pues una ecuación en diferencias lineal:

$$T_n = 2\ T_{n-1} + 1$$

Para llegar a su resolución, se deben seguir los siguientes pasos:

1) Se resuelve la ecuación homogénea:

$$S_n = 2\ S_{n-1}$$

Probamos con la solución $S_n = \lambda^n$ por lo que al sustituir quedará:

$$\lambda^n = 2 - \lambda^{n-1} \rightarrow \lambda = 2$$

2) Se resuelve la ecuación completa:

Probamos con soluciones de la forma:

$$T_n = 2^n + c$$

y determinamos *c*.

Debe ocurrir entonces que $T_{n-1} = 2^{n-1} + c$ y sustituyendo en (1):

$$2^n + c = 2(2^{n-1} + c) + 1$$

$$2^n + c = 2^n + 2c + 1$$

$$- c = 1$$

$$c = - 1$$

Lo cual implica que la única solución de (1) es:

$$T_n = 2^n - 1$$

c) Propuesta metodológica

Puesto que se trata de un recurso ubicado dentro de “otros juegos para trabajar en el aula”, su desarrollo es menor y queda dividido en las siguientes fases según muestra la tabla 6.7:

Tabla 6.7. *Fases de las Torres de Hanoi en el aula de 5.º de Educación Primaria*

MÓDULO VI: LAS TORRES DE HANOI
Fase 1: ¿Qué son las Torres de Hanoi? (1 sesión)
La propuesta comienza con la presentación de las Torres de Hanoi a través de las reglas del juego y la leyenda que envuelve al mismo.
Fase 2: Iniciación a las Torres de Hanoi (1 sesión)
Se trata de que el alumno comience a manipular y jugar con sus piezas. En primer lugar de manera intuitiva, sin seguir ningún plan de actuación para que posteriormente comience a reflexionar sobre la idoneidad de sus movimientos.
Fase 3: Deducción sobre el número de movimientos (1 sesión)
De manera muy genérica se le plantea al alumnado la fórmula a partir de la cual se puede calcular el número de movimientos mínimos necesarios para pasar los discos concéntricos a una nueva varilla (en función de los discos utilizados). Se pretende que el alumno sea capaz de calcular el número de movimientos si bien es cierto que la deducción de la fórmula escapa de sus conocimientos.

d) Puesta en práctica y valoración de los resultados

La valoración de esta sección parte del hecho de que los niños, hasta ese momento, no habían escuchado hablar jamás de este juego. Les llamó la atención que el juego se presentara en madera y que, a simple vista, no tuviera ninguna complicación.

La primera pregunta fue: ¿por qué recibe el juego ese nombre? Lo cual dio pie a narrar la leyenda que envuelve al juego y su parentesco con las pagodas que alberga la ciudad de Hanoi.

Tras esto, se establecieron las normas y algunos voluntarios resolvieron el juego para uno, dos y tres discos, sin dificultad alguna.

En la siguiente sesión, los niños elaboraron su propio juego para poder practicar de manera intuitiva. Los niños aún no sabían que se puede calcular un número mínimo de movimientos.

Interiorizado el juego, llegó el momento de plantearles, de forma muy superficial, el cálculo del número mínimo de movimientos para alcanzar la victoria en cada partida, según el número de discos. A modo de recordatorio se presenta la tabla 6.8 a partir de la cual se deduce la fórmula general:

Tabla 6.8. Ejemplos de número de discos en relación con el número de jugadas mínimas posibles

Número de discos	Número de jugadas
n = 1	$T_1 = 1$
n = 2	$T_2 = 2\ T_1 + 1 = 3$
n = 3	$T_3 = 2\ T_2 + 1 = 7$
n = 4	$T_4 = 2\ T_3 + 1 = 15$

Por tanto, de manera evidente, comprobaron que el número de movimientos para un solo disco es uno; ¿y para dos? Se fueron anotando los resultados de manera ordenada en la pizarra y esto produjo que algunos alumnos se dieran cuenta de que para calcular el número de movimientos mínimo necesario, había que calcular el doble del resultado anterior y, después, sumar uno. De este modo, se puedo generalizar la fórmula:

N.º de movimientos = 2 x número de movimientos del caso anterior + 1

En cierta medida, los alumnos se familiarizaron de forma intuitiva con la idea de fórmula y cómo a partir de la repetición de casos pueden formalizar ideas y, tras esto, establecer teoremas.

Por supuesto, no se profundizó más ya que el siguiente paso pertenece a otro nivel madurativo dentro del ámbito matemático. Sin embargo, se produjo un paso importante dentro de tal ámbito: el paso de la intuición a la formalización a través de diferentes variables.

6.4 El juego de Collatz

a) Contextualización

El juego de Collatz nace a partir de la denominada “conjetura de Collatz”. Esta conjetura fue expuesta por el matemático Lothar Collatz en el año 1937 (ver [30]). Su enunciado es el siguiente:

Sea una función de los números naturales en ellos mismos dada por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & Si\ n\ es\ par \\ 3n+1 & Si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

La conjetura establece que dado un número *n* cualquiera en la sucesión de números siempre se alcanza la secuencia *4 – 2 – 1* de forma cíclica.

A continuación se presentan algunos ejemplos:

$$n = 4 \qquad 4 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 1$$

$$n = 5 \qquad 5 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 1$$

$$n = 6 \qquad 6 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 10 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 1$$

Como se puede comprobar, aunque a medida que *n* es mayor, hay que realizar un mayor número de cálculos, siempre se llega a la serie 4 → 2 → 1. De hecho, cuando se vuelve a aplicar la función *f(1)* se puede ver fácilmente cómo se llega de nuevo al 4 y así sucesivamente.

A medida que los números van creciendo hay que tener paciencia en los cálculos para llegar al ciclo 4 – 2 – 1.

Actualmente ningún matemático ha podido comprobar ni la falsedad ni la veracidad de este enunciado, de ahí que se considere una conjetura, es decir, es un problema abierto de las Matemáticas, aunque en 2017 y 2019 ha habido algunos progresos en el problema tras treinta años sin avances.

De hecho, el matemático Paul Erdös concluyó textualmente: “La Matemática actual no está preparada para este tipo de problemas matemáticos” (ver [32]).

En conclusión, la sencillez de su enunciado no implica necesariamente una sencilla demostración del mismo.

b) La conjetura de Collatz y las Matemáticas en Educación Primaria

En primer lugar, es importante destacar la evidencia de que la Conjetura de Collatz no es un contenido propio de esta etapa educativa.

En las Matemáticas de Primaria, los alumnos no suelen trabajar con problemas de este tipo. De ningún modo se pretende presentar esta conjetura como una función ni tampoco como una conjetura. La idea es que se apliquen determinados cálculos a un número dependiendo de si es par o impar (ver en [52]). Los contenidos matemáticos trabajados en esta sesión fueron los siguientes:

- Identificación de un número par e impar.
- Aplicación de cálculos matemáticos.
- Establecimiento de conclusiones.

Partiendo de la función *f* introducida anteriormente, la idea es que el alumnado entienda que si el número es par hay que realizar unos cálculos y si es impar otros. Es decir:

- Si se encuentran con un número par deben dividir entre dos.
- Si se encuentran con un número impar deben multiplicar por 3 y, después sumar 1.

El trabajo con fórmulas fáciles de traducir para el alumnado, como la anterior, permite (al igual que en las Torres de Hanoi) establecer regularidad mediante la experiencia.

En ningún momento se pretende profundizar en la conjetura ya que no es un concepto que es apropiado para el alumnado de Primaria.

c) Propuesta metodológica

Este último módulo, aunque sólo consta de una sesión, como puede verse en la tabla 6.9, es realmente interesante puesto que se trata de presentar a los niños una función, la cual es una conjetura en la actualidad de una manera experiencial.

Tabla 6.9. *Fases del juego de Collatz en el aula de 5.º de Educación Primaria*

MÓDULO VII: EL JUEGO DE COLLATZ
Fase 1: ¿qué es el juego de Collatz? (1 sesión)
Esta única sesión se dividirá en dos partes. En la primera se le explicará a los alumnos en qué consiste este juego. Para ello, habrá que aclarar previamente qué son los números par e impar. Dependiendo de si el número sea par o impar habrá que hacer unas operaciones distintas. La maestra aplicará “el juego de Collatz” a dos o tres números aleatorios con el fin de que comprueban que siempre se llega al mismo ciclo: 4 – 2 – 1. En la segunda parte de la propuesta, serán los alumnos lo que probarán con varios números con la finalidad de que experimenten de primera mano la curiosidad que presenta esta función.

d) Puesta en práctica y valoración de los resultados

La puesta en práctica tuvo lugar en tanto sólo una sesión ya que el objetivo era que conocieran muy generalmente que regularidad tiene esta conjetura (sin profundizar en la idea de conjetura).

En principio nada tiene que ver con Primaria si el docente piensa en el currículo. Sin embargo se pueden extraer muchas capacidades asociadas al área en esta etapa.

Fue muy interesante plantear a los alumnos un concepto que, a priori, para nada se ubicaría dentro del currículo de Primaria. Sorprendentemente los alumnos son capaces de llegar a conclusiones que en muchas ocasiones solemos dar por hecho que no entran en su nivel de desarrollo. Este es un ejemplo de cómo aspectos matemáticos más abstractos pueden concretarse y trabajarse con los niños.

De forma empírica pudieron comprobar con diferentes números cómo siempre se llegaba al mismo ciclo: 4 – 2 – 1. Les llamaba mucho la atención por lo que quisieron probar con varios números pares e impares. Concluyeron finalmente que era imposible.

Se incidió en la idea de que realmente es una conjetura porque no ha podido demostrarse que para todo número natural esto siempre se cumpla.

En ningún momento el alumnado esperaba que siempre se llegará a la misma secuencia cíclica 4 – 2 – 1. Como en la primera parte fue la maestra la encargada de llevarla a cabo, los alumnos insistían en presentar diferentes números para comprobar si volvía a suceder.

En la segunda parte fueron ellos mismos los que, intrigados por esta curiosidad, aplicaron a muchos números esta función. Se intentó en todo momento trabajar con números pequeños ya que, incluso con números de dos cifras los cálculos para llegar a la serie 4 – 2 – 1 son muy extensos.

La experiencia fue positiva porque sin ser muy conscientes de ello, se les acercó a los alumnos aprendizajes matemáticos que a priori no forman parte del currículo escolar pero que sí contribuyen al desarrollo de muchos otros como son:

a) Números naturales: números pares e impares.
b) Cálculo mental y escrito.
c) Establecimiento de conclusiones.

De una manera intuitiva y aplicando cálculos adquiridos desde cursos anteriores, se puede comprobar empíricamente cómo se llega a la sucesión cíclica 4 – 2 – 1.

También se puede acercar al alumno la idea de que a fecha de hoy ningún matemático ha podido demostrar que este enunciado se cumple para todos los números y que por eso, se denomina conjetura. Además, hablar de matemáticos en el área de Matemáticas dota a la misma de significado y relevancia para la vida. Otorga a las Matemáticas una importancia no sólo en la vida escolar sino para el mundo de la investigación y la ciencia.

En definitiva, no consiste en desarrollar ideas abstractas en el aula para las que el alumno aún no está preparado sino de aprovechar la parte concreta de dichas ideas para dar un paso más en el aprendizaje matemático. Dar a conocer ciertos aspectos matemáticos de manera muy concreta, ayudará a su abstracción matemática en el futuro.

CAPÍTULO 7

EVALUACIÓN Y CONCLUSIONES DE LA PROPUESTA

ÍNDICE

Introducción

El séptimo y último capítulo está dedicado a la evaluación y establecimiento de conclusiones de la Memoria. Una vez diseñada y aplicada la propuesta en el aula es momento de valorar si realmente se han alcanzado los objetivos previstos y de si ha habido una evolución en el aprendizaje del alumno.

Para ello, este capítulo dedica un apartado a los instrumentos de evaluación con los que recoger información valiosa para el establecimiento de conclusiones: diario de la maestra, controles de evaluación y ficha de seguimiento.

También es importante la percepción que el alumnado ha tenido de todo el proceso por lo que se presenta un cuestionario dedicado a que sean ellos los que determinen sus impresiones sobre la misma.

Por supuesto, toda investigación debe acabar plasmando sus impresiones tras su puesta en práctica. En este apartado se incide en cómo se ha contribuido al cumplimiento de cada objetivo y cuáles han sido las implicaciones educativas que su desarrollo tiene para la comunidad educativa.

Para acabar, durante el proceso de evaluación siempre hay aspectos que mejorar detectados durante su puesta en práctica y una discusión final que determine la línea de trabajo de la doctoranda atendiendo a la justificación que otros autores especializados en el juego en el contexto educativo plantean. Es decir, qué posición se toma analizados los resultados y comparados con la fundamentación teórica con la que esta investigación se inició. Se cierra así el círculo en este proceso.

7.1 Instrumentos de evaluación

La evaluación es un proceso intrínseco a toda propuesta didáctica. Su finalidad es valorar el grado de adecuación y de efectividad para el proceso de aprendizaje del alumnado.

En este caso nos ayuda a comprobar en qué medida se ha cumplido nuestro objetivo principal:

> *Analizar y poner en práctica el juego como herramienta de aprendizaje para el área de Matemáticas en 5.º de Educación Primaria.*

Para verificar si el alumnado ha mejorado en los aprendizajes del área de Matemáticas aplicando los recursos lúdicos anteriormente mencionados, es preciso establecer unos instrumentos de evaluación que nos permitan recoger información significativa.

En primer lugar, los instrumentos de evaluación escogidos se encuentran dentro de una perspectiva cualitativa, siendo los siguientes:

- *Diario de clase*: se trata de un cuaderno de observación del aula. En él se han tratado aspectos relevantes que surgen en el día a día del aula: motivación del alumno, respuestas dadas durante el desarrollo del juego, resolución de conflictos, etc. Esta información fue muy valiosa para el establecimiento de conclusiones.

- *Controles de evaluación*: cada alumno realizó un control escrito antes y después de la propuesta basado en los contenidos que establece el Decreto 198/2014 para 5.º curso de Educación Primaria. Su finalidad reside en comprobar si ha habido una mejora notable tras su aplicación. Estos controles se encuentran en los siguientes anexos:

    - *Anexo IV*: control de evaluación elaborado en función de los contenidos trabajados con el ajedrez.

    - *Anexo V*: control de evaluación elaborado en función de los contenidos trabajados con el sudoku.

    - *Anexo VI*: control de evaluación elaborado en función de los contenidos trabajados con el tangram.

- *Ficha de seguimiento de cada alumno*: recopilada la información obtenida con los controles de evaluación de cada alumno, se completó una tabla por cada alumno en donde se reflejó la evolución de su aprendizaje.

A continuación se presentan las tablas 7.1, 7.2, 7.3 y 7.4 como ejemplos de fichas de seguimiento de cada uno de los recursos utilizados durante el curso. La evaluación se centra en contenidos curriculares en el área de Matemáticas y también en contenidos propios del juego para comprobar si el alumno ha comprendido su dinámica y puede seguir practicándolo en el futuro:

Tabla 7.1. Ejemplo ficha de seguimiento para evaluar la propuesta de ajedrez en 5.º curso de Educación Primaria

MÓDULO I: EL AJEDREZ EN EL AULA DE 5.º			
Alumno/a:			
Ítems a valorar	**NA**	**EP**	**A**
Planifica y establece los pasos en la resolución de problemas.			
Ejecuta correctamente los pasos para la resolución de un problema.			
Sitúa las coordenadas en un plano.			
Explica de manera oral el proceso para resolver un problema.			
Crea problemas a partir de datos y/o operaciones.			

Coloca el tablero correctamente.			
Realiza correctamente los movimientos de las piezas.			
Anticipa jugadas de sus compañeros.			
Coloca las piezas en las casillas adecuadas.			
Intenta alcanzar el *jaque mate* durante la partida.			

NA = no adquirido, EP = en proceso, A = adquirido*

Tabla 7.2. Ejemplo ficha de seguimiento para evaluar la propuesta de sudoku en 5.º curso de Educación Primaria

MÓDULO II: EL SUDOKU EN EL AULA DE 5.º			
Ítems a valorar	**NA**	**EP**	**A**
Realiza operaciones sin dificultad (suma, resta, multiplicación y división).			
Realiza operaciones mentalmente.			
Planifica y establece los pasos en la resolución de problemas.			
Ejecuta correctamente los pasos para la resolución de un problema.			
Explica de manera oral el proceso para resolver un problema.			
Conoce las normas básicas del sudoku (no repetición en ninguna fila, columna y subcuadrícula).			
No rellena aleatoriamente.			
Utiliza la estrategia por descarte.			
Calcula cuadrados mágicos sencillos.			

NA = no adquirido, EP = en proceso, A = adquirido*

Tabla 7.3. Ejemplo ficha de seguimiento para evaluar la propuesta de tangram en 5.º curso de Educación Primaria

MÓDULO III: EL TANGRAM EN EL AULA DE 5.º			
Ítems a valorar	**NA**	**EP**	**A**
Identifica polígonos en el entorno.			
Identifica las características propias de cada polígono.			
Aplica el concepto de perímetro.			
Aplica el concepto de área.			
Relaciona los conceptos de perímetro y área.			
Calcula áreas mediante la descomposición de polígonos.			
Construye figuras con el tangram a partir de un patrón.			

NA = no adquirido, EP = en proceso, A = adquirido*

Tabla 7.4. Ejemplo ficha de seguimiento para evaluar la propuesta de otros juegos matemáticos en 5.º curso de Educación Primaria

MÓDULO IV: OTROS JUEGOS MATEMÁTICOS EN EL AULA DE 5.º			
Ítems a valorar	**NA**	**EP**	**A**
Conoce las reglas del NIM y sabe aplicarlas en una partida.			
Anticipa situaciones de ventaja a través de posiciones ganadoras sencillas.			
Realiza a sus compañeros el truco de magia “las tarjetas”.			
Realiza a sus compañeros el truco de magia “la palabra escondida”.			
Calcula el número de jugadas mínimas para resolver el juego según el número de discos utilizados.			
Aplica el “juego de Collatz” según sea un número par o impar.			

NA = no adquirido, EP = en proceso, A = adquirido*

La información recopilada a través de los instrumentos de evaluación contribuye a la elaboración de las conclusiones de cada juego en el aula y dicha información queda reflejada en los gráficos aportados en los *capítulos 3, 4 y 5* de esta Memoria.

7.2 Valoración del alumnado

Para conocer el grado de satisfacción del alumnado, después de cada módulo realizaron un pequeño cuestionario sobre los recursos utilizados. La tabla 7.5 muestra un ejemplo del mismo. Los alumnos tuvieron que marcar con una X "poco", "algo" o "mucho" según las preguntas. A continuación se presenta un ejemplo equivalente a cada recurso utilizado:

Tabla 7.5. Ejemplo de tabla de evaluación de la propuesta por parte del alumnado

EVALUACIÓN DEL ALUMNADO			
Ítems a valorar	**Poco**	**Algo**	**Mucho**
1. ¿Te ha parecido divertida la propuesta?			
2. ¿Te gusta trabajar de esta manera en el área de Matemáticas?			
3. ¿Te ha parecido la propuesta muy larga?			
4. ¿Te gustaría repetirla el curso que viene?			

Los aspectos a valorar por parte del alumno se sitúan sobre todo dentro del marco actitudinal puesto que es la base de cualquier aprendizaje con sentido.

Las preguntas 1 y 2 se centran la motivación que presenta al inicio y durante el transcurso del juego. Es decir, las ganas con las que se enfrenta a la tarea propuesta.

Del mismo modo, se valora la duración de la propuesta en la pregunta número 3. Una tarea puede ser motivadora pero si es escasa o excesiva en el tiempo el alumno perderá el interés por ella ya que no permite desarrollar al máximo las capacidades que dicha tarea necesita.

La pregunta número 4 permite averiguar si de manera global, el alumno ha disfrutado con la propuesta hasta el punto de querer repetirla en el siguiente curso.

Por tanto, al finalizar la propuesta en su totalidad y de manera individual, el alumnado realizó este pequeño cuestionario que permitió conocer realmente sus impresiones sobre la propuesta. Los resultados se presentan en la figura 7.1:

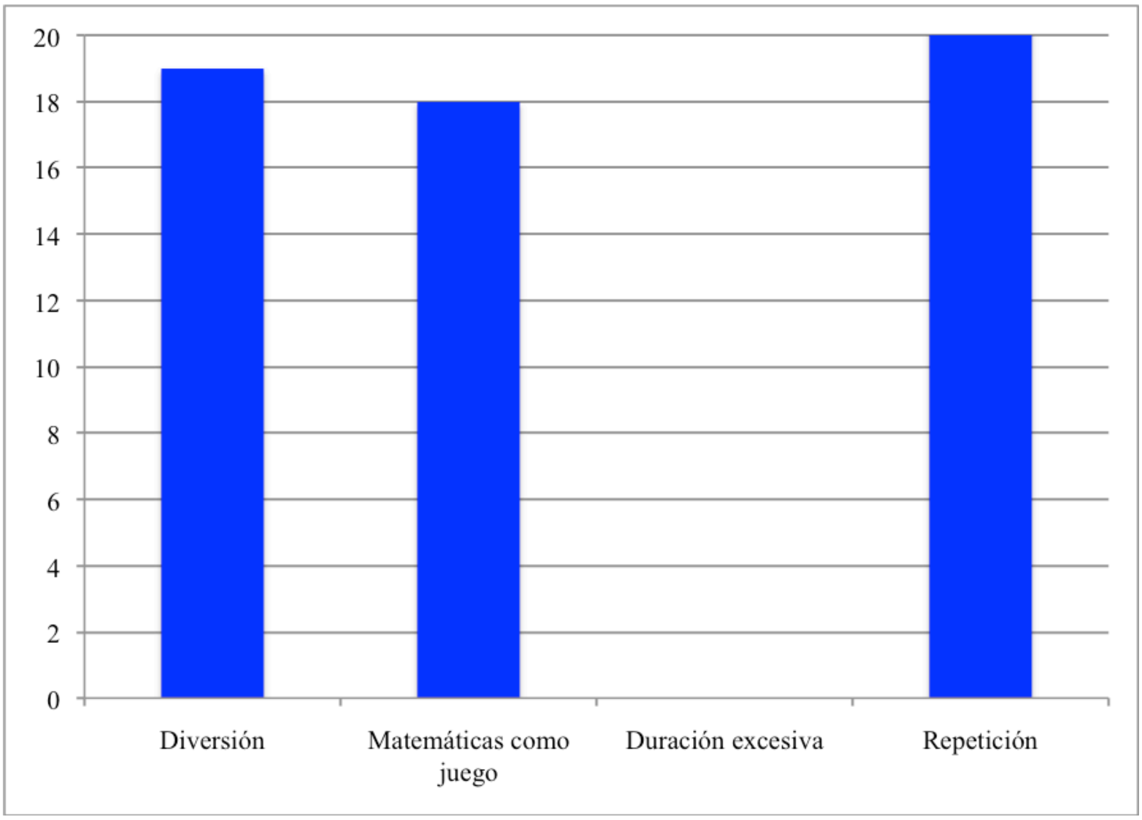


Figura 7.1. Gráfico con los resultados obtenidos de la evaluación por parte del alumnado

A nivel global, la valoración del grupo es positiva ya que 19 de los 20 alumnos consideraron la propuesta positiva. A 18 alumnos les pareció más interesante trabajar las Matemáticas a través de juegos. En ningún caso la consideraron demasiado larga y todos estarían dispuestos a repetirla el siguiente curso. Desde la perspectiva docente son unos resultados muy valiosos ya que conseguimos que alumnado disfrutara aprendiendo juegos vinculados a las Matemáticas.

7.3 Conclusiones

El objetivo principal de esta Memoria era conseguir un avance en el aprendizaje matemático en el alumnado de Educación Primaria (EP) a través del juego como recurso. Es decir, que la actividad lúdica ayudara a desarrollar destrezas matemáticas que le permitieran mejorar en el área. No se trataba de utilizar cualquier juego, sino de encontrar los adecuados para trabajar los contenidos y capacidades necesarias propias de la EP. Para ello, determiné como pilares básicos los siguientes:

1. El pensamiento lógico: fundamental para la resolución de problemas.
2. La numeración: indispensable para el cálculo.
3. La Geometría: rama principal de las Matemáticas en EP.

En lugar de abordar un procedimiento meramente abstracto, me he concentrado en estudiar en profundidad estos tres recursos: ajedrez, sudoku y tangram. Un juego por cada trimestre y, además, en ese mismo orden. Esta organización vino determinada por la secuenciación de contenidos previamente programados en los cursos de EP. También es importante tener en cuenta el contexto en el que realicé la experimentación de toda la propuesta: el aula de 5.º de EP formada por 20 alumnos durante el curso escolar 2017-2018.

Durante la Memoria, he mantenido el criterio de que el uso de los anteriores recursos no debe terminar en la usual petición de horas adicionales de Matemáticas al horario lectivo, sino que tales usos deben ser integrados en la dinámica del aula.

La selección de cada uno la establecí teniendo en cuenta los beneficios que estos recursos aportan al niño y que se pueden consultar en los *capítulos 3, 4 y 5* de esta Memoria. Cada propuesta (ajedrez, sudoku y tangram) tiene un número de sesiones distinto dependiendo de la cantidad de contenidos curriculares que se desarrollaron en el aula con cada recurso.

Los resultados obtenidos por el alumnado antes y después de la puesta en práctica de los recursos lúdicos determinan una mejora en los aprendizajes matemáticos del alumnado (*capítulos 3, 4 y 5*). Pero si realmente quiero comprobar si se ha cumplido el objetivo principal *analizar y poner en práctica el juego como herramienta de aprendizaje en el área de Matemáticas de 5.º de Educación Primaria* debo verificar si se han alcanzado los objetivos específicos de esta Memoria.

OBJETIVO 1. Analizar el uso y evolución del juego a lo largo de la historia en el currículo de la Educación Primaria.

En todo trabajo de investigación es imprescindible una fundamentación que permita establecer la base de cualquier estudio. Por ello, elaboré un apartado dedicado a la evolución del juego dentro del contexto educativo desde una perspectiva histórica.

Tomando como referencia a Payà en [41], partiendo de la Época Clásica hasta el siglo XX he constatado cómo algunos autores aluden al juego como fuente de aprendizaje y otros como una actividad vinculada al ocio que aparta al niño de su educación.

Afortunadamente, hoy en día el juego se vincula claramente con una forma de aprendizaje adaptada a las necesidades e intereses del alumno. Son muchas las propuestas educativas basadas en el juego para el desarrollo de cualquier aprendizaje ubicado en la EP.

Sus grandes beneficios para el desarrollo afectivo y cognitivo del niño han conseguido que en la actual legislación educativa se haga mención al juego, la actividad lúdica y algunos recursos en concreto para trabajar en el aula.

El siguiente paso es que el docente sea valiente y comienza a llevarlo a cabo en su rutina escolar.

OBJETIVO 2. Definir las características propias del alumnado de Educación Primaria para adaptarse a sus necesidades de aprendizaje.

Cualquier propuesta educativa que se ponga en marcha en el aula ha de tener en cuenta el contexto y las características del alumnado al que va dirigida. Todo el trabajo didáctico de esta Memoria está configurado para un grupo formado por 20 alumnos de 5.º curso de EP de un colegio de la Región de Murcia.

Según Piaget [45] se encuentran finalizando el periodo de operaciones concretas. En este momento se produce un perfeccionamiento de sus capacidades sensoriales. De hecho, es el periodo en donde el niño puede alcanzar sus máximas posibilidades de desarrollo sensorial. Al finalizar esta etapa se consolida el pensamiento lógico-concreto y, por tanto, actúa de manera más segura, rápida y eficaz.

Teniendo en cuenta todas estas características, es preciso elegir recursos lúdicos que ayuden a concretar los aprendizajes más abstractos de las Matemáticas escolares.

Aunque de manera más precisa se comprueba en los objetivos sucesivos, elegí el ajedrez, el sudoku y el tangram porque ayudan al niño a dar un salto entre el pensamiento concreto en el que todavía se encuentran al pensamiento lógico-formal que pronto iniciarán.

OBJETIVO 3. Establecer los puntos en común entre juego y Matemáticas así como sus beneficios didácticos.

Es más que evidente que el juego se constituye como un recurso atractivo para el alumnado y, además, se configura como actividad natural y espontánea en estas edades. Como ya cito durante esta Memoria, en palabras de Antonio Pérez Sanz en [43]: las *clases de matemáticas en la enseñanza obligatoria deberían plantearse siempre así, como aventuras del conocimiento, con su carga afectiva de entusiasmo, de paciencia, de tenacidad y esfuerzo, de compartir, de ayudar al compañero o de recibir su apoyo, de consenso y solidaridad para llegar a la meta.*

El objetivo de este trabajo es dar un paso más y establecer las conexiones que el juego tiene dentro del área de Matemáticas. Convertir un contenido matemático en un juego no es casualidad puesto que tienen más rasgos en común de lo que aparentan. Ambos potencian la estrategia, el pensamiento lógico y el razonamiento ya que se tiene un problema inicial, una estrategia y la necesidad de resolverlo de manera adecuada para alcanzar una solución.

A la vista de los resultados, tiene sentido aplicar el juego como recurso en el ámbito matemático ya que como muestran los *capítulos 3, 4 y 5*, hubo una mejora clara en los contenidos del área tras la aplicación del ajedrez, sudoku y tangram en el aula.

OBJETIVO 4. Justificar la elección del ajedrez, el sudoku y el tangram como recursos lúdicos para trabajar en el área de Matemáticas.

OBJETIVO 5. Elaborar y poner en práctica una propuesta didáctica utilizando el ajedrez, el sudoku y el tangram como recursos de carácter lúdico para favorecer el aprendizaje de las Matemáticas en 5.º curso.

El logro de ambos objetivos viene establecido por los beneficios que los tres recursos reportan (capítulos 3, 4 y 5) y el diseño y aplicación de la propuesta didáctica por mi parte como tutora.

Propongo que el primer trimestre de cada curso comience con este juego de estrategia, el cual requiere un gran nivel de comprensión y profundización. La meta dentro de la dinámica de juego es que los alumnos sean capaces de conocer los movimientos de cada pieza pero también de llevar a cabo partidas hasta conseguir el *jaque-mate*.

Es evidente que se deben dedicar sesiones específicas para su aprendizaje. Sin embargo, ya se ha expuesto durante toda la Memoria que la idea no era crear una nueva asignatura llamada *Ajedrez* sino presentar un recurso que les motivara para poder ponerlo en práctica de manera transversal.

Al principio, la puesta en escena del juego supone mover piezas de forma aleatoria. Sin embargo, a medida que había una mayor comprensión, la anticipación y la planificación de la jugada iba cobrando mayor protagonismo. Estas capacidades repercutieron positivamente en el área de Matemáticas, más concretamente en la resolución de problemas.

De manera más exhaustiva, en las conclusiones del *capítulo 3* destaco cómo el ajedrez ayuda a los alumnos a concentrarse en la resolución de una situación problemática. Su percepción y atención se focaliza en mover de forma adecuada cada pieza con el fin de capturar al rey. La inclusión progresiva de cada pieza logra que el alumno afiance las reglas del juego y que sus jugadas sean poco a poco menos mecánicas y más meditadas.

Para el segundo trimestre, sin olvidar el ajedrez, propongo entrar en la práctica de sudokus. La razón reside en que sus reglas son fáciles de comprender, sin embargo, requiere de mucha habilidad con los números para llegar a su resolución.

El sudoku es difícil de asimilar, puesto que es un juego de estrategia. Al principio su realización es aleatoria, no se piensa qué número poner en cada celda. Sin embargo, conforme el alumnado comprueba la validez de sus decisiones, comienza a pensar previamente las opciones posibles de cada celda. También es un recurso que permite adaptarse a las necesidades del alumnado ya que se presentan sudokus de diferente dificultad.

La realización de sudokus desarrolla en el alumnado la habilidad de establecer consecuencias según las decisiones que se toman, una mayor concepción del sistema de numeración y mejora en la atención y concentración del alumnado.

Como el sudoku es una variante de los cuadrados mágicos, pienso que éstos ayudan a la mejora del cálculo mental. La ubicación de los números es un factor importante ya que la suma en todos los casos debe ser la misma. La técnica de ensayo-error se desarrolla en la aplicación práctica de este recurso.

En el tercer trimestre considero oportuno incluir el tangram en esta familia de juegos. Los contenidos que permite desarrollar el tangram están vinculados a la Geometría: identificación y características de polígonos en el entorno, la composición y descomposición de polígonos en otros más sencillos (concepto de polígonos equidescomponibles), el perímetro y el área.

Este recurso ayuda a concretar aprendizajes abstractos a través de la manipulación de sus piezas: ideas sencillas pero importantes como que cualquier cuadrilátero está formado por dos triángulos o que un romboide tiene la misma área que un rectángulo. Otra aspecto muy interesante es relacionar el perímetro con el área. Los alumnos comprueban visualmente cómo con el mismo número de piezas (la misma área en todos los casos) el perímetro varía.

Estos aprendizajes favorecen el paso del alumnado al nivel 1 de pensamiento geométrico establecido por van Hiele en el que relacionan figuras geométricas con su entorno y comienzan a destacar características propias de las mismas.

Otro concepto que pienso que es enriquecedor dentro de la propuesta es el de *figuras equidescomponibles*. Se trata de formar polígonos planos distintos con las mismas piezas del tangram con el fin de comprobar cómo figuras con la misma área, según su construcción, tienen diferente perímetro.

Por otro lado, además de ayudar a la formación del pensamiento geométrico, el tangram también fomenta el desarrollo de la imaginación. La creación de composiciones que representan animales, personas u objetos motiva al alumnado a crear sus propias historias y personajes.

Estos tres recursos son el hilo conductor de mi propuesta didáctica. Su puesta en práctica permite comprobar los beneficios reales que aportan al aprendizaje del área de Matemáticas.

Son muchos los estudios a nivel teórico que destacan la importancia del juego en el desarrollo del niño pero existen muy pocos antecedentes sobre la inclusión de juegos en el desarrollo de las Matemáticas en la EP. Por tanto, considero este estudio pionero y un avance para los docentes que quieren unir juego y aprendizaje matemático en el aula.

Pude comprobar cómo los alumnos progresaron en aprendizajes curriculares del área mediante la realización de controles de Matemáticas antes y después del desarrollo de la propuesta. Los contenidos trabajados fueron:

- Ubicación de coordenadas en un plano.
- Organización en la resolución de problemas.
- Puesta en práctica de la técnica ensayo-error en la resolución de problemas.
- Mejora en el cálculo mental elemental.

- Identificación de figuras en el plano y en el espacio.
- Descomposición de figuras en polígonos más sencillos.
- Cálculo de perímetro y área.

Aunque cada recurso tuvo una puesta en escena específica, la evolución del alumno en cada una de ellas fue la reflejada en la figura 7.2:

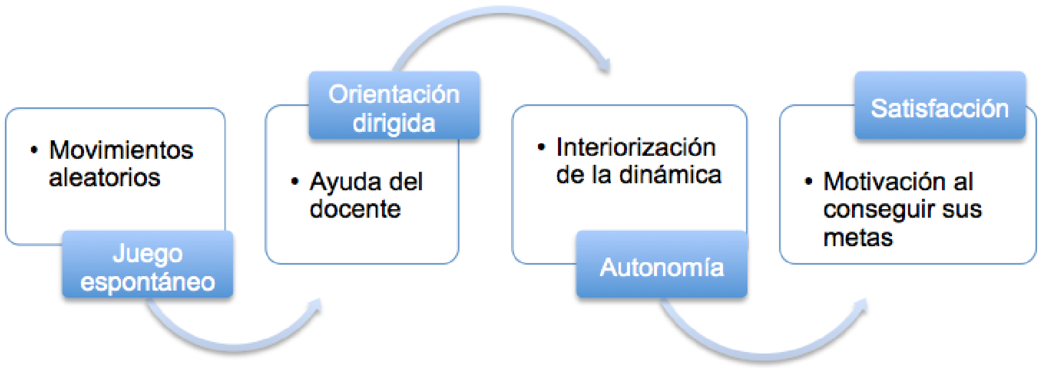


Figura 7.2. Evolución del alumnado en el proceso de aprendizaje durante la propuesta

En primer lugar el alumno se familiarizó con el juego de manera espontánea, realizando movimientos aleatorios y sin tener claro el objetivo del mismo. Progresivamente, gracias a mi supervisión marqué las pautas para transformar el juego espontáneo en un juego dirigido en donde hay una meta que lograr. Esto ayuda a que el alumno interiorice la dinámica de juego y le proporcione autonomía en su ejecución. Por último, cuando el alumno siente que es capaz de desarrollar una partida completa y que, en ocasiones, logra la victoria, consigue sentirse satisfecho y motivado con el juego. De este modo, garanticé su predisposición para jugar de nuevo.

OBJETIVO 6. Iniciar al alumnado en el conocimiento del NIM, las Torres de Hanoi, la Matemagia y la conjetura de Collatz.

Como complemento a los recursos anteriores, para cursos sucesivos con los alumnos de EP, propongo la introducción de otros recursos como son:

- NIM.
- Algunos juegos de Matemagia.
- Torres de Hanoi.
- Conjetura de Collatz.

La elección de estos juegos viene definida por la idea de que sean sencillos y fáciles de comprender puesto que su duración en el aula es mucho menor que la del resto de recursos. El objetivo es enriquecer la propuesta y, al mismo tiempo, trabajar aprendizajes matemáticos de una forma distinta.

Las reglas del *NIM* son sencillas y los alumnos no tienen dificultad en comprenderlas: sólo se pueden quitar piezas de una misma fila y pierde el jugador que coge la última pieza. Iniciar el juego de forma espontánea es fácil ya que los alumnos en su turno retiran piezas al azar, sin prever las consecuencias que sus jugadas pueden tener en su oponente.

Sin embargo, tras la práctica e interiorización de las reglas del juego, los jugadores comprueban cómo si llegan a algunas estructuras en concreto, el juego está perdido. Son estructuras que, por mucho que haga el jugador al que le toca retirar piezas, está perdido. La mayoría de los alumnos llegaron a esta conclusión sin que yo las estableciera explícitamente. De este modo el alumno puede anticipar lo que sucederá en el resto de partida y quién conseguirá ganarla.

Con este juego comprobé cómo con tan pocos recursos se puede crear una actividad lúdica que, tras la práctica, desarrolla patrones de juego ganadores, anticipación en la jugada y concentración durante el transcurso del mismo.

Dentro de este apartado también se encuentra la *Matemagia*. El primer paso es impresionar al alumnado; el segundo que ellos también sean capaces de impresionar a los demás. Ya no sólo se trata de que el alumno practique conocimientos aplicados al cálculo (requeridos por los trucos) sino de la motivación y confianza que se despierta en ellos mismos al ser capaces de sorprender y entusiasmar a otros compañeros.

Los otros dos juegos, las *Torres de Hanoi* y el *juego de Collatz* son un reto que surgieron durante el desarrollo de la propuesta: trabajar con ciertas “fórmulas” en Primaria.

De ninguna manera la idea era que los alumnos comprendieran el porqué o pudieran demostrar una fórmula matemática. El objetivo es que ellos mismos sustituyan una variable en una fórmula sencilla con el fin de calcular cuántos movimientos mínimos son necesarios para ganar (Torres de Hanoi) o que dado un número natural cualquiera, si se sustituye en una fórmula (dependiendo de si es par o impar) siempre se llega a la sucesión 4 – 2 – 1. Experimenté cómo algunos alumnos establecen regularidades sustituyendo n con diferentes números naturales.

En el caso de las Torres de Hanoi, aunque los alumnos no resuelvan la situación que plantea en el mínimo número de movimientos (salvo que el número de discos fuera muy bajo), esto les motiva para intentar rebajar su número de movimientos y acercarse así a la perfección.

El juego de Collatz sirve para que el alumnado sea capaz de observar resultados que se repiten realizando diversos cálculos. Además, es interesante que entiendan que se trata de una conjetura, es decir, aún hoy los grandes matemáticos no saben si esto ocurre para todos los números.

Dentro de este marco de juego y aprendizaje matemático es importante destacar la adaptación a las necesidades del alumnado con dislexia. En muchas ocasiones esta dificultad de aprendizaje también afecta al ámbito matemático (discalculia).

He comprobado cómo estos alumnos han seguido el mismo ritmo que el resto de sus compañeros. El juego elimina la carga excesiva de comunicación escrita ya que su puesta en práctica está basada en el lenguaje oral. En ningún momento detecté que este alumnado tuviera problemas en el desarrollo de la propuesta. Por tanto, no elaboré ninguna adaptación al respecto para este alumnado porque no hizo falta en ningún momento.

Gracias a propuestas como ésta, basada en el juego, el docente puede eliminar etiquetas en el aula y conseguir desarrollar al máximo las capacidades del alumnado.

Además, comprobé que contenidos que en principio no son propios de la EP, cuando se combinan con el juego, cambian por completo y brindan la oportunidad de trabajar con ellos en esta etapa.

Un último aspecto a valorar es el de concebir la Filosofía de manera transversal en esta propuesta didáctica. Los puntos de conexión son más que evidentes desde un primer momento.

Si se quiere dar un giro más crítico y reflexivo al área de Matemáticas en EP, hay que desterrar la idea de realizar sólo ejercicios mecánicos carentes de implicación alguna.

Incluir la reflexión, la puesta en práctica de estrategias y la valoración de los resultados implica trabajar las Matemáticas de manera crítica, apostando por el pensamiento propio del alumno y por su capacidad de elección frente a diferentes opciones. En otras palabras, en todo momento se estaba hablando de trabajar Filosofía en el aula sin la intención de crear pequeños filósofos.

Por tanto, el desarrollo de estas capacidades durante la experimentación de la propuesta son otro beneficio aportado por el juego en el área de Matemáticas.

El trabajo de estas capacidades durante cada uno de los juegos deja de lado la repetición de ciertos patrones y se comienzan a resolver situaciones desde diferentes puntos de vista, cuestionando posibles resultados y anticipando otros. Sin duda, un gran logro a nivel personal y social.

Por tanto, puedo determinar que cada uno de los objetivos alcanzados en esta Memoria consiguieron alcanzar el objetivo principal. En definitiva, abrir las puertas al juego para el aprendizaje de las Matemáticas supuso un reto ya que es un campo poco explorado a nivel práctico. Un reto que merece la pena afrontar. La puesta en práctica de esta investigación creó un ambiente idóneo para la construcción de nuevos aprendizajes en el área. Un contexto en el que el niño se siente cómodo y seguro y que además le permite mejorar capacidades para otros aprendizajes en el futuro.

7.4 Propuestas de mejora, implicaciones educativas y discusión

Si bien es cierto que durante toda la Memoria las conclusiones son positivas respecto al juego en la Educación Primaria, siempre se puede mejorar en muchos ámbitos.

Uno de los aspectos que definen a esta Memoria en su metodología es que es abierta y flexible por lo que la propuesta de intervención en el aula siempre está sujeta a posibles cambios y mejoras.

La planificación en papel siempre difiere de la realidad del aula. Aprendizajes que el docente piensa que el alumno podrá alcanzar en un tiempo determinado pueden verse alterados por muchos factores: tipo de alumnado, motivación, dificultad de los contenidos, etc.

Durante la puesta en práctica hubo que modificar el número de sesiones en dos de los recursos seleccionados: el ajedrez y el sudoku.

En un principio estaba previsto dedicar al ajedrez menos sesiones sobre las nociones básicas del juego. En el aula, comprobé cómo los alumnos necesitaron más tiempo para poder realizar una partida con todas las piezas.

El ajedrez es un juego que entraña dificultad y se necesita tiempo para, al menos, afianzar los movimientos de las piezas. En el caso de este alumnado, no estaban nada familiarizados con este juego y mucho menos con la técnica por lo que la temporalización se modificó durante el proceso.

En el caso del sudoku hubo que introducir los cuadrados mágicos porque, a diferencia del ajedrez, la propuesta necesitó menos sesiones de las previstas.

Otro aspecto a mejorar fue el referido al trabajo transversal de la Filosofía en el aula. Los problemas que surgían durante la puesta en práctica de los juegos ofrecían oportunidades para debatir, decidir y modificar acciones. Eran escenarios de actuación perfectos. Sin embargo, por cuestiones curriculares no siempre se le pudo dedicar todo el tiempo que me habría gustado.

Incluir el juego en el aula también implica trabajar los contenidos que el currículo determina, no se trata de sacrificar ningún aprendizaje. Todo lo contrario, abordar los máximos posibles de una manera divertida. En esta Memoria propongo el ajedrez, el sudoku y el tangram por su conexión con las Matemáticas y por las capacidades que fomentan vinculadas al área.

Los *capítulos 3, 4 y 5* presentan cada recurso de modo que cualquier docente que quiera aplicarlo en su aula pueda hacerlo. Es más, esta estructura puede trasladarse a otros juegos y otras áreas.

Es cierto que esta Memoria se ha llevado a cabo en una sola clase pero considero que siempre y cuando se tenga en cuenta el contexto del que se parte y los intereses del alumnado, el docente conseguirá conectar con ellos y aumentar su nivel de motivación hacia los nuevos aprendizajes.

Sería muy interesante desarrollar este tipo de *juegos matemáticos* durante toda la etapa educativa o, al menos, en este caso particular, proseguir el próximo curso. Esto supondría un continuo en la metodología de trabajo del aula y ayudaría a consolidar los aprendizajes iniciados en su momento. Para tal fin, se necesitaría la coordinación a nivel de tramo o centro y una propuesta metodológica adaptada a los diferentes niveles.

Durante la experimentación, aparecieron otros juegos que ofrecían la posibilidad de ayudar a construir un aprendizaje matemático basado en lo concreto, el razonamiento y la reflexión. Estos juegos fueron el NIM, las Torres de Hanoi, la Matemagia y el juego de Collatz. Por cuestiones de tiempo o por el recurso en sí mismo la intervención en el aula fue de menor. Sin embargo, ayudaron a trabajar conceptos de una manera más intuitiva y práctica. Enriquecieron al resto de juegos y demostraron que cualquier aprendizaje es posible con un niño de Primaria si se adapta al momento evolutivo en el que se encuentra. De hecho, estos juegos se podrían estudiar con mayor profundidad en las sucesivas etapas educativas del alumno.

Toda propuesta en el aula es revisable y mejorable pero de lo que se trata es de ofrecer una enseñanza que piense en el alumnado, en sus inquietudes, intereses y necesidades. Considero que unir juego y área de Matemáticas es un ámbito de estudio innovador. Es un campo poco experimentado en el contexto escolar. De este modo se consigue un aprendizaje realmente significativo para ellos, aplicable al resto de sus vidas.

Desde el establecimiento de las cuestiones a resolver que han sido las generadoras de los objetivos de esta Memoria, he apostado por los beneficios que los juegos seleccionados aportan. Basándome en investigaciones previas y autores que fundamentan esta propuesta, he comprobado que realmente el juego ayuda a aprender más y mejor, en particular, destrezas y conceptos matemáticos.

Por tanto, fruto de mi propia investigación y puesta en práctica en el aula me sitúo en la línea de trabajo de Fernández Amigo [17] y Salazar [50] en el caso del ajedrez ya que éste ayuda a fomentar en el alumno capacidades para la mejora del aprendizaje del alumno y no sólo para el área de Matemáticas. La atención, la memoria, la resolución de problemas y el razonamiento lógico son capacidades que enriquecen y proporcionan muchas más posibilidades al proceso de aprendizaje del alumno.

En lo referido al sudoku como recurso en el área de Matemáticas no puedo situarme en una línea de trabajo fundamentada con anterioridad ya que no he encontrado ninguna propuesta llevada al aula para trabajar ciertos aprendizajes en el alumno. Los estudios tenidos en cuenta valoran la importancia del sudoku para la mente humana favoreciendo múltiples de procesos cognitivos (Olivares [39]): por un lado habilidades propias del hemisferio izquierdo como la lógica, el razonamiento y el análisis; por otro, cuando se progresa en los niveles de dificultad se trabajan capacidades vinculadas al hemisferio derecho como el reconocimiento y la intuición.

A diferencia del sudoku, existen gran cantidad de propuestas para trabajar el tangram en el aula vinculándolo con la mejora de aprendizajes matemáticos. Los niveles establecidos por van Hiele [53] en el desarrollo del pensamiento geométrico han sido fundamentales para el diseño de la propuesta didáctica y para contribuir a aprendizajes geométricos basados en lo concreto para iniciarse progresivamente en conceptos más abstractos. Tras la valoración de la propuesta me ubico en la línea de trabajo de Cuadrado [13] y Fernández Blanco [19] que conciben la geometría en la etapa escolar como un aprendizaje en el que alumno aprende haciendo y manipulando con sus manos. El tangram se convierte en un recurso idóneo para comenzar estos aprendizajes geométricos y así construir unos pilares sólidos en el ámbito para aprendizajes futuros.

Las implicaciones educativas que se derivan de esta propuesta equivalen a abrir la puerta al juego y la motivación dentro del aula. Está más que justificado que el juego forma parte de la vida del alumno. Es su forma de vivir el mundo.

Considero fundamental que los docentes demos un giro a nuestra forma de enseñar porque sólo de ese modo mejoraremos la forma de aprender de nuestros alumnos. El juego como fuente de aprendizaje repercute de manera positiva en el proceso educativo del alumno. Las propuestas para trabajar el ajedrez, el sudoku y el tangram en el aula las he diseñado con el fin de que en el futuro cualquier docente con ganas de mejorar el aprendizaje de su alumnado lo tenga como referencia o guía en su nueva forma de enseñar contenidos matemáticos. Juego y escuela deben ir de la mano, por tanto, con esta Memoria apuesto por un trabajo práctico en el aula, que realmente muestre cómo llevarlo a cabo y cuáles son los resultados que se pueden obtener.

El juego en la enseñanza supone crear o recrear un contexto en el aula en el que el alumno se siente cómodo e integrado, pero sobre todo feliz. Si se consigue motivar, divertir y emocionar al alumnado el docente tendrá la mitad del camino hecho en su labor educativa. Por tanto, esta Memoria termina con la reflexión que produjo su nacimiento:

Si para llegar a un punto existen infinitos caminos, ¿por qué no escoger el más divertido?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ALSINA, C., BURGUÉS C., FORTUNY J.M., GIMÉNEZ J. y TORRA M. (2006). *Enseñar matemáticas*. Editorial Graó (Barcelona).

[2] BALIBREA, F. y SOTO, D. (2018). *El ajedrez y el sudoku como recursos para el aprendizaje en la Educación Primaria*, Revista Suma, n.º 90, pp. 9-16.

[3] BECERRA, A. y otros (2016). *¿Cuánta Matemática hay en los sudokus?,* Revista Pensamiento Matemático, n.º 1, pp. 113-136.

[4] BEDOYA, J. A. y otros (2007). *Fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele y su aplicación al concepto de aproximación local*, Revista Lecturas Matemáticas, n.º 28, pp. 75-99.

[5] BLASCO, F. (2016). *Matemagia. Los mejores trucos para entender los números*. Madrid. Editorial Grupo Planeta (Madrid).

[6] BLASCO, F. (2007). *Matemagia.* Editorial Ediciones Temas de Hoy (Madrid).

[7] BOUTON, C. L. (1901-1902). *Nim, a game with a complete Mathematical theory.* The annals of Mathematics, vol. 3, n.º ¼, pp. 35-39.

[8] CILLERUELO, J. y CÓRDOBA, A. (2010). *Los números*, Revista ¿Qué sabemos?, n.º 15.

[9] CHAMOSO, J.M., J. DURÁN, J.F. GARCÍA, J. MARTÍN y M. RODRÍGUEZ (2004). *Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas,* Revista Suma*,* n.º 47, pp. 47-58.

[10] COLL C., PALACIOS, J., MARCHESI, A. (2005). *Desarrollo psicológico y educación. 2. Psicología de la educación escolar*. Editorial Alianza (Madrid).

[11] Publicación de la Consejería de Educación de la Comunidad de Murcia (2016). *Guía para el éxito escolar del alumnado con dislexia*.

[12] CORBALÁN, F. (1992). *Los juegos en la enseñanza de las matemáticas,* Revista Aula, n.º 7, octubre de 1992.

[13] CUADRADO, J. F. (2010). *El tangram: un recurso educativo para trabajar la geometría en la educación primaria*, Csif.es, octubre de 2010, Granada.

[14] DECRETO de 5 de septiembre por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia. BORM 198/2014.

[15] DEULOFEU, J. (2010). *Prisioneros con dilemas y estrategias dominantes*. Teoría de juegos. Editorial RBA (Barcelona).

[16] EDO, M. Y DEULOFEU, J. (2002). *Investigación sobre juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos*, *Enseñanza de las Ciencias*, n.º 24, 257-268.

[17] FERNÁNDEZ AMIGO, J. y otros (2008). *La educación emocional en el ajedrez. Propuestas para aplicar en los centros educativos.* Asociación Paretana de Ajedrez. Recuperado de <www.paretana.com>

[18] FERNÁNDEZ AMIGO, J. (2008). *Utilización de material didáctico con recursos de ajedrez para la enseñanza de las matemáticas. Estudio de sus efectos sobre una muestra de alumnos de segundo de primaria*, Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

[19] FERNÁNDEZ BLANCO, M. T. (2003). *Geometría para futuros profesores: experiencias con el tangram chino*, Revista Suma, n.º 42, pp. 13-22.

[20] FERNÁNDEZ ZALAZAR, D. (2010). *Evolución del juego en el niño desde la Teoría Piagetiana*. Recuperado de <http://www.psicogenetica.com.ar/>

[21] FOUZ, F. (2006). *Test geométrico aplicando el modelo de van Hiele,* Revista Sigma, n.º 28, pp. 33-57.

[22] GARCÍA, L. (2015), *Ajedrez para enseñar a pensar*, Diario El País, 13 de febrero de 2015, 40.

[23] GARCÍA DEL CID, L. (2006). *La sonrisa de Pitágoras*. Editorial Debate (Barcelona).

[24] GARCÍA, L., R. ACIEGO y M. BETANCORT (2011). *Los beneficios de la práctica del ajedrez en el enriquecimiento intelectual y socioafectivo en escolares*. Universidad de la Laguna (Tenerife).

[25] GARDNER, M. (1988). *Circo matemático*. Editorial Alianza (Madrid).

[26] GUZMÁN, M. (2008). *Cuentos con cuentas*. Madrid: Nivola.

[27] HERNÁNDEZ, I. (2018). *Por qué los niños deben aprender Filosofía*, Diario El Mundo, 3 de abril de 2018.

[28] HERNÁNDEZ SAMPIERI, R. y otros (2010). *Metodología de la investigación*. Editorial Mc Graw Hill (México).

[29] Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y Formación del Profesorado (INTEF). *Descartes 3D: Sudoku*. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

[30] LAGARIAS, J.C. (2010). *The ultimate Challenge: the 3x+1 problem*. Publicaciones de la American Mathematical Society.

[31] Ley Orgánica para la mejora de la calidad educativa (LOMCE). BOE 8/2013.

[32] LLIBRE, J. (2008). *La conjectura 3x + 1 i els límits de la matemàtica*. Revista MAT^2, n.º 1, 15 pp.

[33] LÓPEZ CHAMORRO, I. (2010). *El juego en la Educación Infantil y Primaria*. Revista Autodidacta, pp. 19-37.

[34] LÓPEZ MARTÍN, R. (1997). *El juego como recurso educativo*. Publicaciones de la Universitat de València.

[35] MARTÍN, M. (2012). *Seis razones para trabajar matemáticas con juegos de mesa*, Aprendiendomatemáticas.com, 15 de diciembre de 2012.

[36] MCGUIRE, G. (2013). *There is no 16-cle sudoku: solving the sudoku minimum Lumber of clues problema via hitting set enumeration*. School of Matematical Sciences (Dublín).

[37] NOMEN, J. (2018). *El niño filósofo. Cómo enseñar a los niños a pensar por sí mismos.* Editorial Arpa (Barcelona).

[38] NORTES, R. y NORTES, A. (2015). *El ajedrez como recurso didáctico en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas*. Revista Números, n.º 89, 9-31.

[39] OLIVARES, P. (2014). *Sopa de letras y otros pasatiempos, puzzles para el cerebro*, Efesalud.com 12 de agosto de 2014, Madrid. Recuperado de <www.efesalud.com/noticias/pasatiempos-puzzles-para-el-cerebro/>

[40] PAYÀ, A. (2008). *Aprender jugando. Una mirada histórico-educativa*. Publicaciones de la Universitat de València.

[41] PAYÀ, A. (2007*). La actividad lúdica en la historia de la Educación Española Contemporánea*, Tesis Doctoral. Universitat de València.

[42] PEÑA, L. (2008). *El juego*. Revista Ventana Pedagógica, n.º 35, 92-93.

[43] PÉREZ SANZ, A. (2004). *¿Qué Matemáticas para todos en el siglo XXI?*, Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado, 15 de diciembre de 2004.

[44] PITSCH, W. (2017). *Una historia de corta y pega*. Revista MAT^2, n.º 4, 14 pp.

[45] PIAGET, J. (2015). *Psicología del niño*. Editorial Morata (Madrid).

[46] REAL DECRETO de 28 de febrero por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. BOE 126/2014.

[47] RODRÍGUEZ VIDAL, R. y RODRÍGUEZ RIGUAL, M.C. (2005). *Cuentos y cuentas de los matemáticos*. Editorial Reverté (México).

[48] RUIZ DOMÍNGUEZ, X. (2017). *Educando con magia. El ilusionismo como recurso didáctico*. Editorial Narcea (Madrid).

[49] RUPÉREZ, J.A y GARCÍA, M. (2009). *Estrategias simples (y no tan simples) para los juegos de NIM*. Revista Números, n.º 71, pp. 139-147.

[50] SALAZAR, A. (1999). *Juega el maestro y ganan los niños*. Fundación M. Pilar Mas (Barcelona).

[51] SOTO, D. (2012). *Curso de detectives en mi aula*, libros.um.es 10 de diciembre de 2012, Murcia. Recuperado de <http://libros.um.es/editum/catalog/book/101>

[52] SOTO, D. (2018). *Una idea sobre iteración en la Educación Primaria y Secundaria*. European Conference on Iteration Theory (ECIT), julio de 2018.

[53] VAN HIELE, P. (1986). Structure and insight. A theory of Matematics Education. Developmental Psychology Series. Editor Harry Beilin. Academic Press.

[54] VARGAS, G. (2013). *El modelo de van Hiele en la enseñanza de la geometría*, Revista Uniciencia, Vol. 27, n.º 1, pp. 74-94.

ANEXOS

Anexo I

Ejemplo de comprensión lectora sobre el ajedrez.

HISTORIA DEL AJEDREZ

El origen del ajedrez se encuentra en la leyenda de “los granos de trigo”. Allá, por el siglo V, un príncipe persa se aburría y su criado inventó para él un juego llamado ajedrez. Al príncipe le gustó tanto el juego que le dijo a su criado que le pidiera lo que quisiera. Éste le pidió lo siguiente: - “ quiero que me des un grano de trigo por la primera casilla, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta… así hasta las 64 casillas que tiene el tablero. Sumados todos los granos no había trigo suficiente en todo el mundo para pagar a ese criado puesto que hacían un total de ¡18 trillones de granos de trigo!

En el siglo VIII los musulmanes traen el ajedrez a España y comienza a extenderse. A finales del S XIII Alfonso X, “El Sabio”, escribe un libro sobre ajedrez diciendo que “el ajedrez es una herramienta muy útil para la buena convivencia de judíos, musulmanes y cristianos”.

El ajedrez con las normas que conocemos hoy día se inventó en España hace poco más de 500 años. Se cree que son los españoles los que incorporan la dama al juego porque hasta entonces, no existía ninguna figura femenina. Esta pieza es la más potente del tablero y la incluyeron en homenaje a Isabel “La Católica”.

Sin embargo, todas las piezas pueden ser muy importantes en una partida de ajedrez porque “los peones son el alma del ajedrez”. Esto quiere decir que hasta un peón puede convertirse en la pieza más poderosa si llega a su destino. Así que antes de empezar, tened en cuenta que cualquier pieza del tablero puede conseguir el “jaque mate”.

Hasta aquí sigue nuestro fascinante proyecto sobre el ajedrez. No os preocupéis porque esto no significa que no vayamos a jugar más, seguiremos nuestro camino para convertirnos en verdaderos jugadores de ajedrez. Habéis hecho muy buen trabajo, ¡enhorabuena!

PREGUNTAS

1. ¿Sobre qué siglo se inventó el ajedrez? ________
2. ¿Quién lo inventó?________________________________
3. ¿Crees que fue listo al pedir su recompensa? ¿Por qué?___________

____

4. ¿Quiénes trajeron el ajedrez a España?______________________

5. ¿Qué pieza se cree que incorporaron los españoles? ________________________

6. ¿Qué quiere decir que “el peón es el alma del ajedrez”? _____________

____

____

7. ¿Cuál es tu pieza favorita? ¿Por qué? ___________________________

____

____

7. ¿Te ha gustado el “proyecto ajedrez”? ¿Por qué?_________________

____

____

8. Inventa tu propia pieza de ajedrez.

Anexo II

Ejemplo de comprensión lectora sobre el sudoku.

HISTORIA DEL SUDOKU

El origen del sudoku (en japonés significa aproximadamente número único) está unido al de los primeros cuadrados mágicos, muy utilizados en civilizaciones antiguas como la china, egipcia o árabe.

Algunas fuentes indican que el origen del juego como tal puede situarse en Nueva York (EEUU) a finales de los años 1970. Allí fue publicado con el nombre de *Number Place* en la revista *Math Puzzles and Logic Problems*.

En 1986 se popularizó en Japón dándose a conocer en el ámbito internacional en 2005 cuando numerosos periódicos empezaron a publicarlo en su sección de pasatiempos.

El objetivo del sudoku es rellenar una cuadrícula de 9 × 9 celdas (81 casillas) dividida en subcuadrículas de 3 x 3 con las cifras del 1 al 9. Al inicio del juego algunos números ya están dispuestos en algunas de las celdas.

Aunque se podrían usar colores, letras o figuras, generalmente se utilizan números para mayor claridad. No se deben repetir en una misma fila, columna o subcuadrícula. Un sudoku está bien planteado si la solución es única.

Contesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el origen de la palabra sudoku?

____

____

2. ¿Con qué tipo de cuadrados se relacionan los sudokus?

____

3. Según algunas fuentes, ¿en qué ciudad nace el sudoku? ¿A qué país pertenece? ¿En qué año?

____

____

4. ¿En qué revista se publicó por primera vez?

____

5. ¿En qué año se popularizó en Japón?_________________________

6. ¿Cuándo se hizo mundialmente conocido?______________________

7. ¿En qué sección del periódico se publican los sudokus?

____

8. ¿Cuántas casillas tiene un sudoku en total? ¿Qué operaciones puedes hacer para averiguarlo?

____

____

9. ¿Por qué se utilizan números?

____

10. ¿Cuándo está bien planteado un sudoku?

____

11. ¿Te ha gustado el "proyecto sudoku"? ¿Por qué

____

____

12. Inventa un juego en el que haya que utilizar números del 1 al 9.

Anexo III

Ejemplo de comprensión lectora sobre el tangram.

HISTORIA DEL TANGRAM

El tangram es un rompecabezas basado en la geometría plana. Existen varios tipos de tangram, el más conocido es el tangram chino, que es un puzzle cuyas piezas son el resultado de dividir un cuadrado en siete piezas llamadas "tans".

Su origen se remonta a tan sólo 200 o 300 años. Los chinos llamaron a este rompecabezas *tabla de la sabiduría* y *tabla de la sagacidad* debido a las capacidades que este juego requiere y que, a su vez, desarrolla.

Los primeros libros sobre el tangram surgieron en Europa a principios del siglo XIX. En éstos aparecían figuras de animales, flores,… y sus soluciones. Durante todo este siglo fueron apareciendo diversos libros sobre el tangram chino en Estados Unidos, Inglaterra, Francia, Alemania, Austria e Italia.

El tangram está formado por 2 triángulos rectángulos grandes, 2 triángulos rectángulos pequeños, 1 triángulo rectángulo mediano, 1 cuadrado y 1 romboide.

Contesta a las siguientes preguntas:

1. ¿A qué juego se parece el tangram?

   ____

2. ¿En qué país tiene origen el tangram? ¿Cuántos años hace de ello?

   ____

3. ¿Cuántas piezas forman el tangram?

   ____

4. ¿En qué continente aparecieron los primeros libros sobre el tangram? ¿En qué siglo?

   ____

5. ¿Cómo llaman en China al tangram?

   ____

6. ¿Qué piezas forman el tangram?

7. ¿Te ha gustado el "proyecto tangram"? ¿Por qué?

8. Inventa tres figuras utilizando todas las piezas del tangram.

Anexo IV

¿Tienes un problema?

Nombre: ____________________________ Curso: ______ Fecha: ________

1. En el colegio de Ángel están recogiendo tapones de plástico para reciclaje. Tiene 1425 bolsas y 38 tapones sueltos. Si cada bolsa contiene 125 tapones, ¿cuántos tienen ya?

- Las bolsas son colocadas en cajas para llevar a la planta de reciclaje. Si caben 25 bolsas en cada caja, ¿cuántas cajas llenarán sin contar los 38 tapones sueltos?

2. Marta tiene que hacer un trabajo sobre la historia de las Matemáticas y elegir cuatro matemáticos célebres para elaborarlo.

Ha elegido a los siguientes matemáticos:

- Johannes Kepler (1571-1630)
- Pierre de Fermat (1607-1665)
- Carl Friedrich Gauss (1777-1855)
- Leonardo Fibonacci (1180-1241)

Escribe con números romanos el siglo en el que nacieron y murieron cada uno de ellos.

Matemático	Nació en el siglo…	Murió en el siglo…
Leonardo Fibonacci		
Johannes Kepler		
Pierre de Fermat		

3. Hace tres días se abrió la inscripción para un congreso sobre videojuegos. El primer día se inscribieron 560 personas; el segundo día, 104 personas más que el primer día, y el tercer día, 240 más que el segundo día. Si el máximo de inscriptos en la carrera es de 4000 personas, ¿podrán inscribirse más personas? ¿Cuántas personas más?

4. En una biblioteca de aula hay cuatro estanterías. En cada estantería hay 4 lejas y en cada leja 4 libros. ¿Cuántos libros hay en total?

5. En una librería un pen drive vale el cuadrado de lo que vale un protector de pantalla para el móvil y una tablet el cubo de lo que vale un pen drive. Si el protector de pantalla para el móvil vale 3 euros. ¿Cuánto vale el pen drive y la tablet?

- Si Carlos tiene 600 euros, ¿podrá comprarse la tablet? ¿Le falta o le sobra dinero? ¿Cuánto?

6. Una clase de 6.º de Primaria ha reunido 24875 € para el viaje de fin de curso. De esa cantidad, van destinados a pagar el transporte, a pagar el hotel y el resto a las entradas de los teatros que visitarán. ¿Cuánto dinero gastarán entre transporte y hotel? ¿Qué cantidad irá destinada para las entradas de los teatros?

Anexo V

Números y operaciones

Nombre: ______________________ Curso: ______ Fecha: __________

1. Lee detenidamente el número máximo de horas que viven algunos animales y resuelve los siguientes apartados.

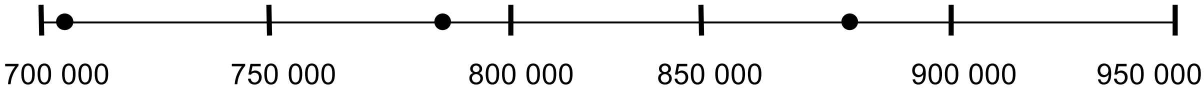
Animales	**Número máximo horas**
Tortuga	1 535 880
Humano	788 420
Ballena	1 566 378
Langosta	1 226 374
Cacatúa	702 046
Lagarto	877 204

- Ordena de mayor a menor el número máximo de horas que viven estos animales.

____

- Une mediante flechas las horas que viven el lagarto, el humano y la cacatúa con su representación en la recta numérica.

877 204 | 788 420 | 702 046



2. El Centro de Conservación de "El Valle Perdido" ha hecho el recuento del número de especies que viven en un bosque. Observa esta tabla con sus cálculos e indica si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes afirmaciones.

Árboles	1 356 404
Orquídeas	923 081
Hongos y setas	1 258 227
Hormigas	12 760 535
Aves	527 384
Monos	8 678
Reptiles y Anfibios	530 348

☐ Hay más aves que anfibios.

☐ Hay aproximadamente ocho mil monos.

☐ Las aves, los reptiles y los anfibios del bosque suman menos de un millón.

3. Averigua el término que falta para que se cumplan las igualdades y calcula la suma.

- 8 145 + 997 = 997 + 8 145 = ___________
- 901 + 3 085 = 3 085 + _________ = ___________
- (4 258 + 320) + 405 = 4 258 + (____________ + 405) = __________
- (622 + _________) + 1 198 = (622 + 126) + 1 198 = __________

4. Pablo, Sara y Luis han escrito en el ordenador un texto y han contado las palabras que ha escrito cada uno.

Pablo ha escrito algo más de 1 000 palabras.

Sara ha escrito alrededor de 2 000 palabras.

Luis ha escrito aproximadamente 3 000 palabras.

Texto 1 2 099 palabras	Texto 3 2 960 palabras	Texto 1 1 108 palabras

a) ¿Cuántas palabras ha escrito cada uno?

____

____

____

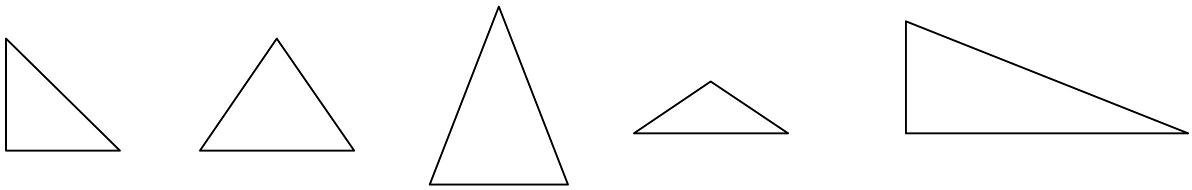
Anexo VI

Figuras planas

Nombre: ____________________________ Curso: ______ Fecha: ________

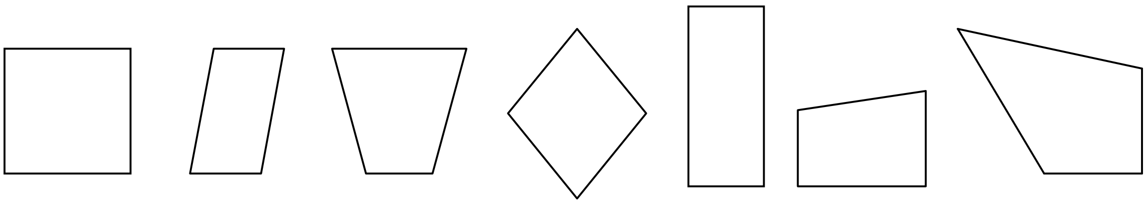
1. Clasifica los siguientes triángulos según sus lados y según sus ángulos.

Equilátero   Isósceles   Escaleno



Acutángulo   Rectángulo   Obtusángulo

2. Clasifica los siguientes cuadriláteros en paralelogramos y no paralelogramos. Después escribe qué tipo de cuadriláteros son.



Paralelogramo   No paralelogramo

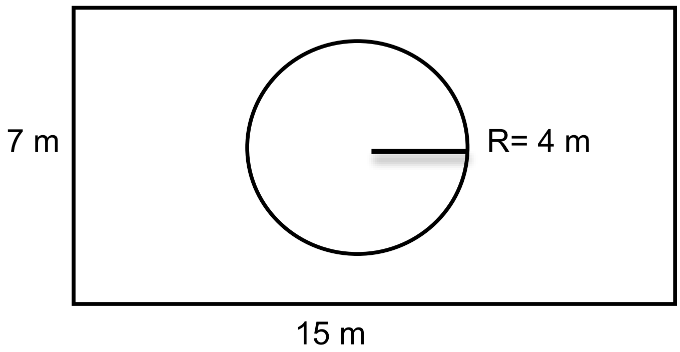
3. Inventa un problema en el que haya que calcular el área de un polígono (puedes elegir el que quieras). Después, resuélvelo.

4. Contesta a las siguientes preguntas:

- ¿En qué se diferencian y en que se parecen un cuadrado y un rombo?

- ¿Qué tienen en común y qué tienen distinto un rectángulo y un romboide?

5. María quiere cubrir con césped artificial su terraza salvo la piscina que tiene forma circular. Éstas son las medidas:



- Calcula cuántos metros cuadrados de césped necesita.

- Si quiere poner una valla alrededor de su terraza, ¿cuántos metros necesitará?

5. El parque de la ciudad de Rosa tiene esta forma. Descompón el polígono en polígonos conocidos y calcula el área en metros cuadrados.