Arboles modales para KB, KE y SO.5

Por Alfredo BURRIEZA MUÑIZ

1. En este articulo presentaremos procedimientos de decisión para los sistemas modales proposicionales ***KB, KE*** y ***S0.5,*** que constituyen una extensión del método de árboles de Jeffrey para la lógica proposicional clásica. Los procedimientos expuestos son una adaptación del utilizado por Copeland en [1] para el sistema de lógica temporal K_t de Lemmon. En lo que sigue, supondremos al lector familiarizado con el método de Jeffrey [4]. Por otro lado, mediante «*S*» denotaremos indistintamente a los sistemas ***KB, KE*** y ***S0.5.***

2. La sintáxis de ***S*** es estándar. No obstante, utilizaremos esquemas de axiomas en vez de axiomas. La lista de los esquemas de axiomas y las reglas de inferencia es la siguiente:

Esquemas de axiomas

(a1) A, donde A es una tautología veritativo-funcional
(a2) $LA \rightarrow A$
(a3) $L(A \rightarrow B) \rightarrow (LA \rightarrow LB)$
(a4) $\neg L \neg LA \rightarrow A$
(a5) $\neg L \neg LA \rightarrow LA$

Reglas de inferencia

MP: Si $\vdash_S A$ y $\vdash_S A \rightarrow B$, entonces $\vdash_S B$
N: Si $\vdash_S A$, entonces $\vdash_S LA$
N*: Si A es una tautología veritativo-funcional, entonces $\vdash_S LA$

Contamos además con las definiciones habituales para $\wedge$ (el conjuntor), $\vee$ (el disyuntor), $\leftrightarrow$ (el equivaledor), $-\!\!3$ (el implicador estricto), $=$ (el equivaledor estricto) y M (el operador de posibilidad).

Las definiciones son comunes a los tres sistemas. Respecto de los esquemas de axiomas y reglas tenemos lo siguiente:

KB: (al), **(a4), MP y N**
KE: (al), **(a5),** MP y N
S0.5: (al) - **(a3),** MP y N*

3. Los árboles que vamos a utilizar difieren de los árboles proposicionales de Jeffrey en que cada línea de un árbol contendrá un índice asociado a la **fbf** correspondiente a la **línea.** La notación **A/i** significa que la fbf A se halla asociada al índice i; diremos, también, que **A/i** es una **«fbf indizada»** (por **i).**

Las reglas para las constantes lógicas no modales y las reglas ($\neg$ **L)** y ($\neg$ M) son las mismas en los tres sistemas. Así:

($\neg\neg$):

$$\begin{array}{c} \neg\neg A/i \\ | \\ A/i \end{array}$$

($\rightarrow$):

$$\begin{array}{ccc} & A \rightarrow B/i & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg A/i & & B/i \end{array}$$

($\neg$ $\rightarrow$):

$$\begin{array}{c} \neg(A \rightarrow B)/i \\ | \\ A/i \\ \neg B/i \end{array}$$

($\neg$L):

$$\begin{array}{c} \neg LA/i \\ | \\ M\neg A/i \end{array}$$

($\neg$M):

$$\begin{array}{c} \neg MA/i \\ | \\ L\neg A/i \end{array}$$

Por otro lado, la regla *(M)* es común a KB y KE pero difiere respecto de ***S0.5;*** mientras que *(L)* es distinta en cada sistema. **Así:**

Arboles modales para KB, KE y SO.5

(MKB)/(MKE):

$$\begin{array}{c} MA/i \\ | \\ A/j \quad \langle i,j\rangle \end{array}$$

donde $j > i$ y j no aparece previamente en el árbol.

(MSO.5):

$$\begin{array}{c} MA/i \\ | \\ A/j \quad \langle i,j\rangle \end{array}$$

donde i es el índice inicial del árbol y, además, $j > i$ y j no aparece previamente en el árbol.

(LKB):

$$\begin{array}{c} LA/i \\ | \\ A/j \end{array}$$

Para cualquier j tal que, anteriormente a A/j, aparezca en la rama $\langle i,j\rangle$ o $\langle j,i\rangle$.

(LKE):

$$\begin{array}{c} LA/i \\ | \\ A/j \end{array}$$

donde $j = i$, si —para algún k— aparece en la rama, anteriormente a A/j, $\langle k, i\rangle$; o j es cualquier índice tal que, anteriormente a A/j, aparezca en la rama $\langle i, j\rangle$ o bien —para algún k— $\langle k, i\rangle$ o $\langle k, j\rangle$.

(LSO.5):

$$\begin{array}{c} LA/i \\ | \\ A/j \end{array}$$

donde i es el índice inicial del árbol y, $j = i$ o j es cualquier índice para el cual, anteriormente a A/j, aparezca en la rama $\langle i,j\rangle$.

En la regla (M), el par ordenado $\langle i,j\rangle$ forma parte de la conclusión. A expresiones de este tipo las denominaremos "marcadores", Informalmente, puede considerarse que los índices que ocurren en un árbol representan "mundos posibles" y que los marcadores expresan la relación de accesibilidad entre dichos mundos. **Así,** un marcador como $\langle i, j\rangle$ significa, entonces, que el mundo (posible) j es accesible al mundo (posible) i.

La relación de accesibilidad es simétrica en ***KB,*** esto es, siempre que en una línea dada ocurra un marcador, sea $\langle i, j\rangle$, implícitamente se cumple también que i es accesible a j. En ***KE,*** la relación de accesibilidad es euclidiana; de forma que, para cualquier marcador $\langle i,j\rangle$ que aparezca en una rama, se tiene de modo implícito que j es además accesible a sí mismo; y para cualesquiera $\langle i,j\rangle$, $\langle i,k\rangle$ que ocurran en una rama, se cumple implicitamente que k es accesible a j. En *SO.5*, dicha relación es reflexiva por lo que respecta a los "mundos normales". En cambio, ningún mundo es accesible a un mundo "no normal" (ni siquiera él mismo). En un árbol ***S0.5*** habrá siempre un único índice que represente —informalmente— un mundo normal, a saber, el que denominaremos "índice inicial del árbol" en los procedimientos de decisión expuestos seguidamente. El resto de los índices de un árbol ***S0.5*** —si los hay— pueden pensarse intuitivamente como si fueran mundos no normales.

4. Para construir un árbol para una fbf dada de S, indizarnos dicha fbf con un índice arbitrario (el índice inicial del árbol), aplicamos la regla apropiada a la fbf indizada, luego a las fbfs resultantes, y así sucesivamente. El orden en el cual apliquemos las reglas es irrelevante. Al aplicar una regla de inferencia, que no sea ***(L),*** a una fbf indizada, sea *A/i*, escribimos la (s) lista (s) de conclusiones de esa regla al final de cada rama abierta de la cual *A/i* es un miembro. Si la regla aplicada fuera ***(L),*** la conclusión sólo puede escribirse en aquellas ramas que previamente contengan el índice perteneciente a esa conclusión. A continuación marcamos (√) *A/i*, a menos que la regla aplicada sea ***(L),*** en cuyo caso escribimos a la izquierda de *A/i* el índice correspondiente a la conclusión de la regla y marcamos dicho índice. En ***S0.5*** marcamos igualmente *A/i* si fuera de la forma *MB/i*, aunque la regla ***(M)*** no fuese aplicable por no ser i el índice inicial.

Una regla de inferencia no puede aplicarse a una fbf indizada marcada, y una aplicación de *(L)* a una fbf indizada no puede dar lugar a una conclusión con un índice ya marcado a la izquierda de dicha fbf indizada. De modo que, cada aplicación de *(L)* a una línea en particular conduce a una conclusión con un índice diferente en cada ocasión.

Puesto que la fbf indizada inicial de un árbol es finita en longitud y dada la naturaleza de ***(L),*** el número de aplicaciones de *(L)* a una línea determinada es limitado; lo cual significa que el número de índices disponibles en el árbol es finito. Por otro lado, la (s) conclusión (es) de cada regla es (son) siempre —excepto en el caso de *(¬L)* y *(¬M)*— de menor longitud que la premisa correspondiente. Por tanto, sólo se necesita un número finito de aplicaciones de las reglas para producir un árbol "completo": un árbol finito en el cual toda fbf indizada que ocurra en una rama abierta está marcada excepto si se trata de (i) una variable proposicional indizada o su negación, o (ii) una fbf indizada de la forma *LA/i.* En este último caso, a la izquierda de *LA/i* se halla marcado todo índice "elegible" de acuerdo con las condiciones impuestas a *(L)* —según sea el caso para cada sistema. [Trivialmente se cumple (ii) cuando ningún índice está marcado a la izquierda de *LA/i* con tal de que no haya ningún índice disponible en la rama de acuerdo con las estipulaciones de ***(L)].***

En KB y KE, diremos que una rama está cerrada si contiene una variable proposicional y su negación, asociadas ambas al mismo índice; y abierta en otro caso. En S0.5 diremos que una rama está cerrada si contiene una fbf y su negación, asociadas ambas al mismo índice; y abierta en otro caso. Un árbol S está cerrado si toda rama en él está cerrada, y abierto en otro caso.

4. **Ejemplos:** La fbf "$L(Lp \rightarrow L\neg\neg p)$" no es un teorema de S0.5.

1. $\surd$	$\neg L(Lp \rightarrow L\neg\neg p)/0$	
2. $\surd$	$M\neg(Lp \rightarrow L\neg\neg p)/0$	de 1 por $(\neg L)$
3. $\surd$	$\neg(Lp \rightarrow L\neg\neg p)/1$ $\langle 0, 1\rangle$	de 2 por $(MS0.5)$
4.	$Lp/1$	de 3 por $(\neg \rightarrow)$
5. $\surd$	$\neg L\neg\neg p/1$	de 3 por $(\neg \rightarrow)$
6. $\surd$	$M\neg\neg\neg p/1$	de 5 por $(\neg L)$

y el árbol no cierra. La siguiente fbf "$(LMLp \rightarrow LLp)$" es un teorema de KE pero no de KB, como se muestra a continuación:

1. $\surd$	$\neg(LMLp \rightarrow LLp)/0$	
2.	$LMLp/0$	de 1 por $(\neg \rightarrow)$
3. $\surd$	$\neg LLp/0$	de 1 por $(\neg \rightarrow)$
4. $\surd$	$M\neg Lp/0$	de 3 por $(\neg L)$
5. $\surd$	$\neg Lp/1$ $\langle 0, 1\rangle$	de 4 por (MKB)
6. $\surd$	$M\neg p/1$	de 5 por $(\neg L)$
7.	$\neg p/2$ $\langle 1, 2\rangle$	de 6 por (MKB)
8. $\surd$	$MLp/1$	de 2 por (LKB)
9.	$Lp/3$ $\langle 1, 3\rangle$	de 8 por *(MKB)*
10.	$p/1$	de 9 por *(LKB)*

Este árbol no cierra en KB, como puede comprobarse, pero sí en KE. En este último caso, el árbol contiene las líneas 1-8 anteriores y además:

9'.	$Lp/3$	$\langle 1, 3\rangle$	de 8 por (MKE)
10'.	$p/2$		de 9' por (LKE)
11'.	X		de 7 y 10'

5. **Adecuación:** Esbozaremos la prueba de Adecuación como sigue: ***A*** es un teorema de S $(\vdash_S A)$ si y sólo si hay un árbol (completo) para $\neg A$ que está cerrado.

Para probar el teorema de izquierda a derecha es suficiente mostrar: (i) la negación de cada axioma de S tiene un árbol (completo) cerrado, (ii) si

$\neg A$ y $\neg(A \rightarrow B)$ tiene árboles (completos) cerrados, también lo tiene $\neg B$, (iii) si $\neg A$ tiene un árbol (completo) cerrado, igualmente lo tiene $\neg LA$, y (iv) si $\neg A$, donde A es una tautología veritativo-funcional, tiene un árbol (completo cerrado, también lo tiene $\neg LA$.

Para cada sistema *S* hay que probar (i) y (ii). Para KB y KE, además **(iii);** y para ***S0.5,*** (iv).

Para probar el teorema de derecha a izquierda vamos a hacer uso de los métodos de Kripke [5]. Así pues, para cada etapa de la construcción de un **árbol** obtendremos una fbf asociada (no indizada) denominada "fbf característica" (fbfc) del árbol en esa **estapa**, que será de la forma $E_1 \vee E_2 \vee \ldots\ldots \vee E_i$, donde El, $E_2, \ldots E_i$ **son** todas las fbfcs de las distintas ramas del árbol en esta etapa, y donde cada $E_j (1 \leq j \leq i)$ es de la forma $D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_k (1 \leq k)$, siendo $D_1, D_2, \ldots, D_k$ todas las fbfs obtenidas tras la eliminación de los índices de la rama .considerada.

La regla (M) es la regla introductora de índices en el árbol. Es más, diremos propiamente que un índice ha sido ((introducido))en una rama cuando resulte de una aplicación de (M).

A continuación describiremos un procedimiento para construir **la** *fbfc* de un árbol. Eliminaremos los índices de cada rama en una etapa en particular siguiendo un orden de mayor a menor: esto es, cuando nos dispongamos a eliminar un índice determinado, todos los índices mayores que **él** ya habrán sido eliminados de la rama en esa etapa. Consideremos ahora una rama en una etapa dada, donde *i* es un índice cualquiera introducido por aplicación de (M) a una fbf asociada al índice ***j.*** Llamemos Δ al conjunto de todas las fbfs indizadas a esa rama en la etapa en **cuestión;** por Δ' entenderemos el conjunto de fbfs indizadas que resulta de la eliminación de todos los índices mayores que ***i*** (pero no i). Formemos entonces Δ'' —donde ya no ocurre el índice *i*— a partir de Δ' como sigue:

(i) formamos la conjunción de todas las fbfs en Δ' asociadas al indice i;

(ii) prefijamos a dicha conjunción el operador M y la asociamos al índice *j*;

(iii) **añadimos** el resultado anterior a Δ' ; y

(iv) borramos de Δ' todas las ocurrencias del índice i.

Cuando en una rama, en una etapa cualquiera, hayamos eliminado todos los índices introducidos por (M), únicamente aparecerá el índice inicial en el resultado de dicha eliminación. Acto seguido, podemos suprimir el indice inicial y formar **la** *fbfc* de la rama en dicha etapa, y **finalmente,** tras hacer lo propio con todas las ramas, la fbfc del árbol.

En los casos que vamos a probar del lema enunciado más adelante haremos uso de lo siguiente (común a los tres sistemas excepto **(b14)**, propio de KE):

(b1)	$A \wedge B \rightarrow A$
(b2)	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
(b3)	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge C \rightarrow B \wedge C)$
(b4)	$(A \rightarrow B \wedge C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
(b5)	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A \wedge B)$
(b6)	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$
(b7)	$(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow A \wedge C)$
(b8)	$(A \rightarrow B) \rightarrow (D \wedge A \rightarrow D \wedge B)$
(b9)	$(A \rightarrow B \wedge C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D))$
(b10)	$(A \rightarrow B \wedge C) \rightarrow (D \wedge A \rightarrow D \wedge C)$
(b11)	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B))$
(b12)	$M(A \wedge B) \rightarrow MA \wedge MB$
(b13)	$LA \rightarrow (MB \rightarrow M(A \wedge B))$ [1]
(b14)	$M(LA \wedge B) \leftrightarrow M((LA \wedge A) \wedge B)$ [2]
(b15)	Si $\vdash_S A$ y $\vdash_S C \leftrightarrow D$, y B se diferencia de A únicamente en tener D en uno o más lugares en los que A tiene *C*, entonces $\vdash_S B$.

En lo que sigue, haremos abstracción del orden de los componentes de las conjunciones (disyunciones) de las *fbfcs*.

Lema: Sea $fbfc_1$ la *fbf* característica de la etapa inicial de la construcción de un árbol para una *fbf* dada, y sea fbfc' la *fbf* característica de una etapa cualquiera de dicho árbol. Entonces $\vdash_S fbfc_1 \rightarrow fbfc'$.

Prueba: Por inducción. Obviamente $\vdash_S fbfc_1 \rightarrow fbfc_1$. La hipótesis inductiva es $\vdash_S fbfc_1 \rightarrow fbfc_n$ para fbfc' $= fbfc_n$, donde $fbfc_n$ es la fbf característica de la n-ésima etapa. Demostraremos que esto mismo se cumple para la fbfc de la etapa siguiente, esto es, para $fbfc' = fbfc_{n+1}$. A partir de aquí, por transitividad de la implicación, se sigue fácilmente el lema.

Sea P una rama abierta en la n-ésima etapa, en la cual se ha aplicado la regla que ha dado lugar a la (n + 1)-ésima etapa. A continuación trataremos únicamente los casos para (L) como ejemplo. Así pues, sea LA/i la fbf indizada de P a la que se le ha aplicado (L); sea A/j la conclusión (luego j aparece en P). Llamemos ahora P' a la rama que resulta a partir de P en la (n+1)-ésima etapa tras dicha aplicación. P se ha extendido, pues, a P', de modo que P' es P más A/j. Por $fbfc_p$ entenderemos la fbfc de P y por $fbfc_{p'}$, la fbfc de P'. Seguidamente probaremos primero que $\vdash_S fbfc_p \leftrightarrow fbfc_{p'}$, y luego mostraremos el resultado para el árbol.

Sistema KB:

j es un índice para el cual aparece en P un marcador como $\langle i, j \rangle$ o bien como $\langle j, i \rangle$.

(1) si $j > i$, entonces j ha sido introducido en P a partir de i; de modo que j se elimina de P (y por supuesto también de P') antes que i. El resultado de la eliminación de j de la rama P contendrá una fbf como MB indizada por i. Así pues. $fbfc_p$ será ---$LA \wedge MB$--- y finalmente $fbfc_{p'}$ será ---$LA \wedge M(A \wedge B)$---. De manera que:

1.	$LA + (MB \rightarrow M(A \wedge B))$	(b13)
2.	$LAAMB \rightarrow M(A \wedge B)$	(b6), MP (1)
3.	$LAAMB \rightarrow LA \wedge M(A \wedge B)$	(b7), MP (2)
4.	$M(A \wedge B) \rightarrow MA \wedge MB$	(b12)
5.	$LA \wedge M(A \wedge B) \rightarrow LA \wedge MB$	(b10), MP (4)
6.	$LA \wedge MB \leftrightarrow LA \wedge M(A \wedge B)$	(b11), MP (3, 5)

A partir de aquí, por (b15), obtenemos $\vdash_{KB} fbfc_p \leftrightarrow fbfc_{p'}$. Ahora bien, P es una rama abierta cualquiera, luego una justificación similar vale para cualquier rama abierta —en la n-ésima etapa— que pase por LA/i y se extienda a una nueva rama —en la etapa n+1— mediante la adición de A/j. Obviamente, puede haber alguna rama en la n-ésima etapa que no se extienda tras la aplicación de *(LKB)*, con lo cual, la *fbfc* que dicha rama posea enfbfc, no sufrirá transformación alguna al construir $fbfc_{n+1}$. Así pues, al considerar las *fbfcs* del árbol en ambas etapas tendremos —por (b15)— $\vdash_{KB} fbfc_n \rightarrow fbfc_{n+1}$.

(2) si $i > j$, entonces i ha sido introducido en P a partir de j; tenemos, por tanto, que i se elimina de P antes que j y en el resultado de dicha eliminación habrá una fbf como $M(LA \wedge B)$ indizada por j. De manera que $fbfc_p$ será ---$M(LA \wedge B)$--- y $fbfc_{p'}$ será ---$M(LA \wedge B) \wedge A$---. Ahora;

1.	$M(LA \wedge B) \rightarrow MLA\ AMB$	(b12)
2.	$MLA \rightarrow A$	(a4), Def. M
3.	$M(LA \wedge B) \rightarrow A$	(b9), MP (1, 2)
4.	$M(LA \wedge B) \rightarrow M(LA \wedge B) \wedge A$	(b5), MP (3)
5.	$M(LA \wedge B) \wedge A \rightarrow M(LA \wedge B)$	(b1)
6.	$M(LA \wedge B) \leftrightarrow M(LA \wedge B) \wedge A$	(b11), MP (4, 5)

Y por el mismo razonamiento que antes, $\vdash_{KB} fbfc_n \rightarrow fbfc_{n+1}$.

Sistema KE:

(1) si $j = i$, entonces — para algún k— aparece en P $\langle k, i \rangle$. De modo que j (= i) se elimina de P antes que K. Luego $fbfc_p$ será ---$M(LA \wedge B)$--- y $fbfc_{p'}$ será ---$M(LA \wedge A) \wedge B)$---. El resultado se justifica por (b14) y (b15).

(2) sea $j \neq i$, entonces:

(a) si $\langle i, j \rangle$ aparece en P, tenemos el mismo caso que en (1) para *KB*.

(b) si j es tal que, para algún k, aparecen en P $\langle k, i \rangle$ y $\langle k, j \rangle$, entonces j e i han sido introducidos en P a partir de k y se eliminan de P antes que k. El resultado de la eliminación de i de la rama P contendrá una fbf como $M(LA \wedge B)$ indizada por k, y el resultado de la eliminación de j de esa misma rama contendrá una fbf, digamos MC, indizada por k. Así, $fbfc_p$ será ---$M(LA \wedge B) \wedge MC$--- y $fbfc_{p'}$ será ---$M(LA \wedge B) \wedge M(A \wedge C)$---. Entonces:

1.	$M(LA \wedge B) \rightarrow MLA \wedge MB$	(b12)
2.	$MLA \rightarrow LA$	(a5), Def. M
3.	$M(LA \wedge B) \rightarrow LA$	(b9), MP (1, 2)
4.	$M(LA \wedge B) \wedge MC \rightarrow LA \wedge MC$	(b3), MP (3)
5.	$LA \rightarrow (MC \rightarrow M(A \wedge C))$	(b13)
6.	$LA \wedge MC \rightarrow M(A \wedge C)$	(b6), MP (5)
7.	$M(LA \wedge B) \wedge MC \rightarrow M(A \wedge C)$	(b2), MP (4, 6)
8.	$M(LA \wedge B) \wedge MC \rightarrow M(LA \wedge B) \wedge M(A \wedge C)$	(b7), MP (7)
9.	$M(A \wedge C) \rightarrow MA \wedge MC$	(b12)
10.	$M(A \wedge C) \rightarrow MC$	(b4), MP (9)
11.	$M(LA \wedge B) \wedge M(A \wedge C) \rightarrow M(LA \wedge B) \wedge MC$	(b8), MP (10)
12.	$M(LA \wedge B) \wedge MC \leftrightarrow M(LA \wedge B) \wedge M(A \wedge C)$	(b11), MP (8, 11)

Y finalmente, al igual que en los casos anteriores, $\vdash_{KE} fbfc_n \rightarrow fbfc_{n+1}$.

Sistema SO.5:

En este caso, en LA/i, i es el índice inicial. Así pues: (1) si $j = i$, entonces $fbfc_p$ es ---LA--- y $fbfc_{p'}$ es ---$LA \wedge A$---. Luego:

1.	$LA \rightarrow A$	(a2)
2.	$LA \rightarrow LA \wedge A$	(b5), MP (1)
3.	$LA \wedge A \rightarrow LA$	(b1)
4.	$LA \leftrightarrow LA \wedge A$	(b11), MP (2, 3)

De modo que $\vdash_{SO.5} fbfc_n \rightarrow fbfc_{n+1}$.

(2) Si $j \neq i$, entonces procedemos como en (1) para *KB*

Ahora ya estamos en disposición de completar la prueba del teorema de Adecuación. Consideremos $E_1 V\ E_2 \vee\ \ldots\ V E$; como la *fbfc* de un árbol completo (cerrado) para una fbf A de S, donde $E_1, E_2, \ldots, E$; son las *fbfcs* de todas las ramas del árbol, todas ellas cerradas. Cada $E_j\ (1 \leq j \leq i)$ contendrá —en el caso de ***KB*** y ***KE***— alguna fbf atómica B tal que $B\ A \neg B$ sólo ocurre bajo el alcance de $\wedge$, M. En el caso de ***S0.5***, sucede lo mismo excepto que B no es necesariamente una fbf atómica. Por inducción, obtenemos $\vdash_S E_j \leftrightarrow B \wedge \neg B$ $(1 \leq j \leq i)$; y dado, por (al), $\vdash_S \neg (B\ A \neg B)$, llegamos, por (al) nuevamente y MP, a $\vdash_S \neg E_j$. A partir de este resultado tenemos, por (al), $\vdash_S \neg E_1 \wedge \neg E_2 \wedge \ldots \wedge \neg E_j$, y de aquí, otra vez por (al), y MP, $\vdash_S \neg (E_1 \vee E_2 \vee \ldots \vee E_j)$. Ahora, por el lema anterior, $\vdash_S \neg A \dashv\vdash (E_1 V\ E_2 \vee \ldots // E_j)$, y por último, por (al) y MP de nuevo, $\vdash_S A$.

REFERENCIAS

[1] B.J. COPELAND, "Tense Trees: A Tree Sistem for K_t", *Notrė Dame Journal of Formal Logic, vol. 24 (1983), 318-322.*

[2] B. DAVIDSON, F.C. JACKSON y R. PARGETTER, "Modal Trees for T and SS", ***Notre Dame Journal of Formal Logic,*** vol. XVIII (1977), 602-606.

[3] G. HUGHES y M.J. CRESWELL, ***Introducción a la Lógica Modal,*** Tecnos, Madrid (1973). Traducción española de Esperanza Guisan Seijas.

[4] R. JEFFREY, ***Formal Logic: Its Scope and Limits***, McGraw Hill, Nueva York, 1967 y 1981.

[S] S. KRIPKE, "A completeness theorem in modal logic", ***The Journal of Symbolic Logic,*** vol. 24. 1-14.

NOTAS

(1) Las demostraciones de (b12) y (b13) —como teoremas y no como esquemas de teoremas— aparecen en [3], en el sistema *T*, con los números 10 y 17 respectivamente. Dichas demostraciones valen igualmente en los sistemas ***KB, KE*** y ***S0.5.***

(2) (b14) se obtiene fácilmente a partir del conocido esquema de teorema *"L(A → A)"* de ***KE,*** (al), (a3), (b12) y usos de N y MP.

•RESUMEN

En este artículo se muestran procedimientos de decisión muy simples para los sistemas modales proposicionales ***KB, KE*** y ***S0.5.*** Los métodos se basan en el sistema de árboles de Jeffrey para la lógica proposicional clásica.

ABSTRACT

In this paper very simple decision procedures are expounded for the propositional modal systems ***KB, KE*** and ***SO.5.*** The methods are grounded on the Jeffrey's tree system for classical propositional logic.

Alfredo Burrieza Muñiz.