anales de psicología
1998, vol . 14, nº 2, 249-268

Efectos de la no esfericidad en el análisis de diseños multivariados de medidas repetidas

G. Vallejo*, A. M. Fidalgo y P. Fernández

Universidad de Oviedo

Resumen: El análisis de los datos obtenidos a partir de un diseño multivariado de medidas repetidas, por lo general, es realizado por medio del modelo doblemente multivariado (MDM), o también mediante el modelo mixto multivariado (MMM). Basados en el examen de las tasas de error Tipo I y potencia de los procedimientos referidos, la presente investigación pone de relieve, por un lado, la superioridad del enfoque MDM sobre el correspondiente MMM, salvo cuando las matrices de dispersión no se desvían del patrón de esfericidad multivariada o el tamaño de muestra es muy reducido y, por otro lado, el pobre funcionamiento de algunos de los factores de corrección usados para construir los modelos MMM ajustados, como por ejemplo el sugerido en la rutina MANOVA del popular programa SPSS.

Palabras clave: Medidas repetidas; Esfericidad multivariada; Estructura Kronecker; Modelo mixto.

Title : Effects of nonsphericity to the analysis of multivariate repeated measures designs.

Abstract: The analysis of the data obtained from a multivariate repeated measures design, generally, it is accomplished across through of doubly multivariate model (MDM) analysis, or also by means of multivariate mixed model (MMM) analysis. Based on the examination of the Type I error rates and power of the referred procedures, the present investigation puts of relief, on the one hand, the superiority of the MDM approach on the corresponding MMM, except when the dispersion matrix satisfies multivariate sphericity or the sample size is very small and, on the other hand, the poor functioning some of the correction factors used to construct ajusted MMM tests, as for example suggested it in the routine MANOVA of the popular program SPSS.

Key words: Repeated measures; Multivariate sphericity; Kronecker structure; Mixed model.

En las ciencias sociales, comportamentales y de la salud merece destacar el auge que durante la última década está recibiendo el empleo de los diseños de medidas repetidas, en especial, los que implican anidar las unidades experimentales respecto a los niveles de una o más variables y cruzarlos respecto a los niveles de otra u otras. Bajo el cumplimiento de los supuestos de normalidad conjunta multivariada, homogeneidad de las matrices de dispersión e igualdad de las varianzas correspondientes a las diferencias entre las medidas repetidas, dichos diseños han sido analizados tradicionalmente por medio del modelo mixto univariado de Scheffé (1956). Cuando se no se cumple el supuesto de esfericidad, lo usual es utilizar tanto el enfoque univariado con los grados de libertad corregidos, como el enfoque multivariado. Este último enfoque tiene la ventaja de permitir que la matriz de varianzas-covarianzas tenga cualquier estructura, aunque requiere, amén del cumplimiento de los supuestos de normalidad y homogeneidad, que el número de unidades experimentales sea mayor, o en el peor de los casos igual, que el medidas repetidas. De satisfacerse las condiciones expuestas, la elección entre el enfoque univariado con los grados de libertad corregidos o el enfoque multivariado descansa, sobre manera, en consideraciones de potencia. Por ejemplo, Davidson (1972) demuestra que cuando se dispone de moderados tamaños de muestra y la matriz de dispersión se desvía ligeramente del patrón de esfericidad requerido, el enfoque univariado es siempre más poderoso que el correspondiente enfoque multivariado, mientras que la situación se invierte paulatinamente a medida que la matriz de dispersión se desvía del patrón de esfericidad requerido.

***Dirección para correspondencia:** G. Vallejo. Departamento de Psicología. Universidad de Oviedo. Plaza Feijoo, s/n. 33003 Oviedo (España). E-Mail:gvallejo@sci.cpd.uniovi.es

Cuando las observaciones son multivariadas en sí mismas, se pueden extender ambos procedimientos al análisis de esta nueva situación. En concreto, si se cumplen los supuestos del modelo mixto univariado (normalidad, homogeneidad y esfericidad) en el conjunto de las variables dependientes consideradas simultáneamente, podemos efectuar el análisis del diseño multivariado de medidas repetidas mediante una generalización de aquel, extensión que usualmente es referida con el nombre de modelo mixto multivariado (*MMM*) y disponible en los paquetes estadísticos *BMDP* y *SPSS*. A su vez, cuando en el conjunto de las respuestas se cumplen los supuestos de normalidad y homogeneidad de las matrices de varianzas y covarianzas, el análisis multivariado también puede ser generalizado para analizar diseños multivariantes de medidas repetidas (Bock, 1985; Boik, 1988; Thomas, 1983; Timm, 1980); dicha generalización se denomina comúnmente modelo doblemente multivariado (*MDM*) y está incorporada en el paquete *SPSS*. López y Ato (1994) proporcionan las líneas maestras para su implementación en los paquetes *SAS* y *SYSTAT*, pues estos programas no recogen ninguna rutina específica para abordar estos procedimientos analíticos.

En orden a evaluar el comportamiento de ambos enfoques, Vallejo y Menéndez (1997) llevaron a cabo una investigación empírica en base a tres áreas de interés: Tamaño de muestra, tipo de matrices de dispersión y valor de los parámetros de no centralidad. Con respecto al primer criterio, utilizaron un diseño multivariado de medidas parcialmente repetidas (dos grupos de tratamiento, tres medidas repetidas y dos variables dependientes) con vectores de observaciones de tamaño seis, nueve y doce en cada uno de los dos diferentes grupos de tratamiento. Con respecto al segundo, seleccionaron matrices de dispersión tomando como punto de referencia la presencia o ausencia de estructura kronecker y de esfericidad, así como el tipo de corrector a utilizar. Por último, los valores de los parámetros de no centralidad se eligieron de manera tal que, para las diferentes matrices de dispersión escogidas, la potencia del enfoque *MDM* se situara en torno a 0.80 cuando el tamaño de muestra era 18 y el nivel de significación nominal se fijaba en el usual α=0.05. Bajo cada una de las tres variables independientes manipuladas la única hipótesis que se contrastó fue la referida a la igualdad de las condiciones de observación en ausencia de interacción (modelo aditivo).

Para el conjunto específico de parámetros utilizado, los resultados más relevantes del citado trabajo pusieron de manifiesto que bajo ciertas condiciones, en especial cuando el tamaño de muestra era reducido y la matriz de varianzas-covarianzas esférica, el enfoque *MMM* era siempre más poderoso que el enfoque *MDM* para detectar diferencias entre los efectos principales del diseño de medidas repetidas con dos variables dependientes. No obstante, conviene matizar que a medida que el tamaño de muestra se incrementaba la sensibilidad estadística de ambos enfoques guardaba un mayor parecido entre sí, sobre manera, cuando el nivel nominal se fijó en el α=0.05. A su vez, cuando las matrices de varianzas-covarianzas eran homogéneas y los datos se acomodaban a una distribución normal multivariante, pero la matriz de dispersión se desviaba del patrón de esfericidad multivariada requerido, inclusive en cantidades más bien modestas, las pruebas basadas en el enfoque *MMM* sin ajustar se tornaban excesivamente liberales, con tasas de error Tipo I por encima de 0.07 y 0.02 para niveles de significación α=0.05 y 0.01, respectivamente; mientras que las pruebas basadas en el enfoque *MMM* ajustado mediante la generalización del corrector ε de Greenhouse-Geisser se convertían en excesivamente conservadoras, con tasas de error Tipo I por debajo de 0.022 y 0.0019 para los niveles de significación especificados. Por consiguiente, en ausencia de esfericidad, ninguno de los dos enfoques reseñados en este apartado parece ser recomendable. Por lo que respecta al comportamiento de las pruebas basadas en el enfoque *MMM* ajustado mediante el corrector ε desarrollado por Boik (1991), destacar el razonable control que éstas ofrecían del tamaño del error, tanto cuando la ausencia de esfericidad acontecía en matrices de covarianza con estructura Kronecker como en matrices de covarianza que adolecían de dicha estructura. Además, dicho control no se veía afectado ni por tamaño de muestra ni por el nivel de significación elegido.

Dentro del contexto de las investigaciones referidas una de las cuestiones que aún permanece abierta es el comportamiento de estos enfoques cuando existe interacción entre las variables (modelo no aditivo), el número de variables dependientes es superior a dos y el grado en que la matriz de varianzas-covarianzas se desvía de la estructura kronecker es controlado. Con el objetivo de clarificar dichas cuestiones, se ha realizado un estudio de simulación en el que evaluaremos el comportamiento empírico, tanto bajo hipótesis nula como bajo hipótesis alternativa, de las cuatro estrategias analíticas que Vallejo y Menéndez utilizaron para ajustar diseños de medidas repetidas con múltiples variables dependientes. En concreto, compararemos el enfoque *MDM*, el enfoque *MMM* sin ajustar (en este caso se asume que el corrector ε=1, con independencia del cumplimiento del supuesto de esfericidad multivariada), el enfoque *MMM* ajustado mediante una generalización del corrector tipo Box sugerido por Greenhouse y Geisser (1959) (en adelante ε_1) e implementado en la rutina *MANOVA* del programa estadístico *SPSS* (véase López y Ato, 1994) y el enfoque *MMM* ajustado mediante la generalización multivariada del corrector tipo Box desarrollado por Boik (1991) (en lo sucesivo ε_2). De este modo, el objetivo final de la presente investigación será determinar como afectan las variables manipuladas a las diferentes estrategias analíticas y, desde un punto de vista practico, advertir al lector sobre la conveniencia de utilizar una u otra.

Antes de pasar a evaluar el comportamiento empírico de los diferentes enfoques, se expondrán los modelos subyacentes a ambos procedimientos, deteniéndonos especialmente en la forma de contrastar la hipótesis referida a la igualdad de las condiciones de observación cuando la interacción está presente. A este respecto, se hace preciso señalar que si no se toman las precauciones oportunas, algo por otra parte olvidado en los principales paquetes estadísticos, la presencia de interacción, sobre todo, la no ordinal, puede conducirnos a cometer un número excesivo de errores de tipo II a la hora de contrastar la hipótesis referida al factor intra o igualdad de las condiciones de observación.

Enfoque del modelo doblemente multivariado

El modelo lineal para un diseño multivariado de medidas parcialmente repetidas con *N* unidades experimentales puede ser escrito como sigue:

$$Y = XB + E$$

donde **Y**= Nxqr es la matriz de respuestas, **B**=pxqr es la matriz de parámetros, **X**=Nxp es la matriz de diseño de rango pleno y **E**=Nxqr es la matriz de errores aleatorios. Si denotamos por $\boldsymbol{\varepsilon}'_i$=1xqr el vector de errores aleatorios correspondiente al sujeto *ith*, es asumido que:

$$\varepsilon'_{i \sim N}(0,\Sigma)$$

donde la matriz de covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}$=qrxqr es una matriz definida positiva. El hecho de que la forma $\boldsymbol{\Sigma}$ no dependa de *i* supone que todos los vectores de errores aleatorios $\boldsymbol{\varepsilon}$ tienen la misma matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ y, por ende, son matrices homocedásticas. Podemos expresar lo dicho para todos los vectores de errores considerados conjuntamente como sigue:

$$\varepsilon \sim_N [0\,(I_N \otimes \Sigma)]$$

Las hipótesis de interés del modelo pueden ser expresadas como sigue:

$$H_0: C'BA = 0$$

donde **C'** es una matriz que consta de los coeficientes de las p-1 funciones lineales o contrastes entre los grupos de tratamiento y cuyo orden es (p-1)p, **B** ya ha sido definida anteriormente y **A**=$[I_r \otimes q(q\text{-}1)]$ tiene por rango r(q-1) y consta de los coeficientes de los q-1 contrastes entre las *q* ocasiones de observación o períodos de tiempo para cada una de las *r* variables dependientes.

Los estadísticos usados para comprobar las hipótesis de interés, asumiendo lo expuesto anteriormente para el vector de errores, son función de las raíces características de $\mathbf{HE}^{-1}$ donde las matrices *SCPC* correspondientes a la hipótesis y al error son rápidamente obtenidas como sigue:

$$H = (C'\hat{B}A)'[C'(X'X)^{-}C]^{-1}(C'\hat{B}A) \;\; y \;\; E = A'Y'[I - X(X'X)^{-}X']YA$$

Denotado por $W_{qr}(\nu,\mathbf{A'\Sigma A},\mathbf{\Xi})$ la distribución Wishart no central de dimensión *qr* con ν grados de libertad, matriz de covarianza $\mathbf{A'\Sigma A}$ y matriz de nocentralidad $\mathbf{\Xi}$ [$\mathbf{\Xi}=(\mathbf{A'\Sigma A})^{-1}\mathbf{\Phi}$], Boik (1988) muestra que **H** y **E** se distribuyen independientemente como sigue:

$$H_{\sim W_{qr}}[p-1, A'\Sigma A, (A'\Sigma A)^{-1}\Phi] \quad y \quad E \sim_{W_{qr}}[(N-p), A'\Sigma A, 0]$$

donde

$$\Phi = (C'BA)'[C'(X'X)^{-}C]^{-1}(C'BA) \;\; y \;\; \Sigma = (N-p)^{-1}\{Y'[I - X(X'X)^{-}X']Y\}$$

A continuación, para ver si se produce alguna desviación de la expresión H_0:**C'BA=0** comparamos las matrices *SCPC* correspondientes a la hipótesis **H** y al error **E** mediante alguno de los criterios estadísticos existentes (traza de Pillai, raíz característica mayor de Roy, traza generalizada de Hotelling o lambda de Wilks). Por ejemplo, Wilks (1932) propuso probar H_0 usando la razón de verosimilitud

$$\Lambda = \frac{|E|}{|H|+|E|}$$

y rechazar H_0 si $\Lambda < U_\alpha(u,\nu_h,\nu_e)$, donde $\nu_h=R(\mathbf{C})$ y $\nu_e=N-R(\mathbf{X})$ son los grados de libertad de la hipótesis y el error asociados con el criterio de la Λ de Wilks y $u=R(\mathbf{E})$, usualmente r(q-1).

Yendo al caso concreto del diseño utilizado en la presente investigación, se comienza probando la hipótesis nula que especifica que las diferencias entre los grupos no dependen de las condiciones de observación consideradas en el conjunto de las *r* variables dependientes examinadas simultáneamente, esto es:

$$H_{0_1} = \begin{bmatrix} \mu 11^{(1)} - \mu_{12}^{(1)} \\ . \\ \mu_{1q-1}^{(2)} - \mu 1q^{(2)} \\ . \\ \mu_{1q-1}^{(r)} - \mu_{1q}^{(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21}^{(1)} - \mu_{22}^{(1)} \\ . \\ \mu_{2q-1}^{(2)} - \mu_{2q}^{(2)} \\ . \\ \mu_{2q-1}^{(r)} - \mu_{2q}^{(r)} \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} \mu_{p1}^{(1)} - \mu_{p2}^{(1)} \\ . \\ \mu_{pq-1}^{(2)} - \mu_{pq}^{(2)} \\ . \\ \mu_{pq-1}^{(r)} - \mu_{pq}^{(r)} \end{bmatrix}$$

o, simplemente

$$H_{0_1}: C'BA = 0$$

donde las matrices **C**'y **A** adoptan la forma que sigue:

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 & -1 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 & -1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad A = I_r \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ -1 & -1 & . & . & . & -1 \end{bmatrix}$$

y **0** en una matriz de orden (p-1)x(q-1)r .

La hipótesis nula se rechaza al nivel α mediante al criterio de la Lambda de Wilks si

$$\Lambda = \frac{|E|}{|H+E|} < U[r(q-1), p-1, N-p]$$

donde $\Lambda \sim U_\alpha[r(q-1),(p-1),(N-p)]$

La ausencia de diferencias entre los grupos de tratamiento o valores de la variable de clasificación, puede abordarse desde un doble punto de vista en función de la aditividad o no aditividad del modelo. En el primer caso, la hipótesis nula multivariada de ausencia de diferencias entre los tratamientos promediando a través de las ocasiones de observación viene dada por:

$$H_{0_2}^{*}: \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{q} \frac{\mu_{1k}^{(1)}}{q} \\ \sum_{k=1}^{q} \frac{\mu_{1k}^{(2)}}{q} \\ . \\ \sum_{k=1}^{q} \frac{\mu_{1k}^{(r)}}{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{q} \frac{\mu_{2k}^{(1)}}{q} \\ \sum_{k=1}^{q} \frac{\mu_{2k}^{(2)}}{q} \\ . \\ \sum_{k=1}^{q} \frac{\mu_{2k}^{(r)}}{q} \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{q} \frac{\mu_{pk}^{(1)}}{q} \\ \sum_{k=1}^{q} \frac{\mu_{pk}^{(2)}}{q} \\ . \\ \sum_{k=1}^{q} \frac{\mu_{pk}^{(r)}}{q} \end{bmatrix}$$

o, simplemente

$$H_{o_2}^{*}: C'BA = 0$$

donde **C'** y **A** adoptan la forma especificada mas abajo, y **0** es una matriz de ceros de orden *(p-1)*x*r*.

$$C'_{(p-1)_{xp}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & -1 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 & -1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad A_{qrx_r} = I_r \otimes \begin{bmatrix} 1/q \\ 1/q \\ . \\ 1/q \end{bmatrix}$$

Especificadas la forma de las matrices **C'** y **A** la H_{02}^* se rechaza al nivel α si:

$$\Lambda = \frac{|E|}{|H+E|} < U_\alpha[r(1),(p-1),(N-p)]$$

donde $\Lambda \sim U_\alpha[r,(p-1),(N-p)]$.

Bajo el modelo no aditivo, la hipótesis nula multivariada de ausencia de diferencias entre los niveles de la variable de clasificación puede ser expresada como sigue:

$$H_{0_2}: \begin{bmatrix} \mu_{11}^{(1)} \\ \mu_{12}^{(1)} \\ . \\ \mu_{1q}^{(1)} \\ . \\ \mu_{1q}^{(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21}^{(1)} \\ \mu_{22}^{(1)} \\ . \\ \mu_{2q}^{(1)} \\ . \\ \mu_{2q}^{(r)} \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} \mu_{p1}^{(1)} \\ \mu_{p2}^{(1)} \\ . \\ \mu_{pq}^{(1)} \\ . \\ \mu_{pq}^{(r)} \end{bmatrix}$$

o, simplemente

$$H_{0_2}: C'BA = 0$$

donde **C'** tiene la misma forma que en el caso anterior, **A** es una matriz de identidad de orden *qr*x*qr* y **0** es una matriz de ceros de orden *(p-1)*x*qr*.

Con las matrices **C'** y **A** especificadas, la H_{02} se rechaza al nivel α si

$$\Lambda = \frac{|E|}{|H+E|} < U_\alpha(qr, p-1, N-p)$$

donde $\Lambda \sim U_\alpha[qr,(p-1),(N-p)]$.

Por último, presentamos la prueba para la hipótesis nula multivariada de igualdad de las condiciones en función de la aditividad o no aditividad del modelo. En el primer caso verificamos si existen diferencias entre los intervalos temporales promediando a través de los grupos de tratamiento como sigue:

$$H^*_{0_3}: \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{p} \frac{\mu_{j1}^{(1)}}{p} \\ \sum_{j=1}^{p} \frac{\mu_{j1}^{(2)}}{p} \\ . \\ \sum_{j=1}^{p} \frac{\mu_{j1}^{(r)}}{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{p} \frac{\mu_{j2}^{(1)}}{p} \\ \sum_{j=1}^{p} \frac{\mu_{j2}^{(2)}}{p} \\ . \\ \sum_{j=1}^{p} \frac{\mu_{j2}^{(r)}}{p} \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{p} \frac{\mu_{jq}^{(1)}}{p} \\ \sum_{j=1}^{p} \frac{\mu_{jq}^{(2)}}{p} \\ . \\ \sum_{j=1}^{p} \frac{\mu_{jq}^{(r)}}{p} \end{bmatrix}$$

o, simplemente

$$H^*_{0_3}: C'BA = 0$$

donde **C'** y **A** adoptan la forma que sigue:

$$C'_{(1xp)} = \left[\frac{1}{p}\frac{1}{p},\ldots,\frac{1}{p}\right] \quad A_{qrx\,(q-1)r} = I_r \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ -1 & -1 & . & . & . & -1 \end{bmatrix}$$

y **0'**es una matriz de ceros de orden 1x$(q\text{-}1)r$.

Una vez que tenemos especificada la forma de las matrices **C'** y **A** la H_{03}^* se rechaza al nivel α si:

$$\Lambda = \frac{|E|}{|H+E|} < U_\alpha[r(q-1),1,(N-p)]$$

donde $\Lambda \sim U_\alpha[r(q\text{-}1),1,(N\text{-}p)]$.

Bajo el modelo no aditivo la prueba para la hipótesis nula multivariada de igualdad de los efectos de las condiciones puede ser expresada como sigue:

$$H_{0_3}: \begin{bmatrix} \mu_{11}^{(1)} \\ \mu_{21}^{(1)} \\ . \\ \mu_{p1}^{(1)} \\ . \\ \mu_{21}^{(r)} \\ . \\ \mu_{p1}^{(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{12}^{(1)} \\ \mu_{22}^{(1)} \\ . \\ \mu_{p2}^{(1)} \\ . \\ \mu_{22}^{(r)} \\ . \\ \mu_{p2}^{(r)} \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} \mu_{1q}^{(1)} \\ \mu_{2q}^{(1)} \\ . \\ \mu_{pq}^{(1)} \\ . \\ \mu_{2q}^{(r)} \\ . \\ \mu_{pq}^{(r)} \end{bmatrix}$$

o, simplemente

$$H_{0_3}: C'BA = 0$$

donde **C'** es una matriz de identidad de orden *p*x*p*, **A** adopta una forma similar a la definida para probar la H_{01} y **0** es una matriz de ceros orden *p*x*qr*.

Especificadas la forma de las matrices **C'** y **A** la H_{03} se rechaza al nivel α si:

$$\Lambda = \frac{|E|}{|H+E|} > U_{\alpha}[r(q-1), p, N-p]$$

donde $\Lambda \sim U_{\alpha}[r(q-1),p,N-p]$.

Enfoque del modelo mixto multivariado

Thomas (1983) ha demostrado que si, además de cumplirse los supuestos especificados anteriormente para el vector de errores aleatorios, **A'ΣA** satisface:

$$A'\Sigma A = (I_{q-1} \otimes \Psi)$$

para alguna matriz definida positiva **Ω** de orden *r*x*r*, entonces el análisis llevado a cabo mediante el enfoque del modelo mixto multivariado es válido. La anterior condición se denomina esfericidad multimuestral y se reduce a la usual condición de esfericidad univariada cuando r=1. Como dijimos en la introducción este enfoque es una generalización del modelo mixto de AVAR desarrollado por Scheffé (1956) en el cual los sujetos son aleatorios y los tratamientos fijos.

Para llevar a cabo los análisis mediante este enfoque necesitamos reordenar los elementos de la matriz **Y** del modelo lineal anterior. Si designamos por $\mathbf{y}_i'$ la *ith* fila de la matriz de respuestas **Y** (por ejemplo, la respuesta de dimensión *qr* del sujeto *i*), este vector puede ser arreglado dentro de una matriz $\mathbf{Y}_i^{*'}$ de orden *r*x*q*, cuyas *q* columnas representan las ocasiones de observación y las *r* filas las correspondientes variables dependientes. De este modo, la matriz de respuestas para el modelo mixto multivariado puede ser expresada:

$$\widetilde{Y} = (\widetilde{y}_{1'} \widetilde{y}_{2'}, \ldots, \widetilde{y}_{N'})$$

Reordenando de una manera similar la matriz de parámetros **B** y de errores **E**, nos queda:

$$\widetilde{B}' = (\widetilde{B}_{1'} \widetilde{B}_{2'}, \ldots, \widetilde{B}_{p'}) \text{ y } \widetilde{E}' = (\widetilde{E}_{1'} \widetilde{E}_{2'}, \ldots, \widetilde{E}_{N'})$$

con lo cual el modelo lineal puede expresarse ahora como sigue:

$$\widetilde{Y} = \widetilde{X}\widetilde{B} + \widetilde{E} \qquad (\widetilde{X} = X \otimes I_q)$$

Las hipótesis de interés del modelo mixto multivariado pueden expresarse como sigue:

$$H_0 : \widetilde{C}\widetilde{B} = \widetilde{0} \qquad (\widetilde{C} = C \otimes F')$$

Los estadísticos para contrastar dichas hipótesis, asumiendo homocedasticidad y esfericidad multivariadas, son función de las raíces características de $\widetilde{H}\widetilde{E}^{-1}$. Las matrices *SCPC*s correspondientes a la hipótesis y al error vienen dadas por:

$$\widetilde{H} = (\widetilde{C}'\widetilde{B})'[\widetilde{C}'(\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-1}\widetilde{C}]^{-1}(\widetilde{C}'\widetilde{B}) \text{ y } \widetilde{E} = \widetilde{Y}'\{[I_N - X(X'X)^{-1}X] \otimes F'F\}\widetilde{Y}$$

De la misma manera que en el caso *MDM* la forma de las matrices **C** y **F** dependerá de las hipótesis de investigación que estén implicadas en cada caso particular.

Según Boik (1988), si se satisface el supuesto de esfericidad multivariada $\widetilde{H}$ y $\widetilde{E}$ se distribuyen independientemente como sigue:

$$\widetilde{H} \sim_{W_r} [(p-1)(q-1), \Psi, \Psi^{-1} T_p(\Phi)] \text{ y } \widetilde{E} \sim_{W_r} [(N-p)(q-1), \Psi, 0]$$

donde $\mathbf{\Psi}=T_p(\mathbf{A'\Sigma A})/(q-1)$. Para comprobar si se produce alguna desviación de la H_0 comparamos las matrices *SCPC* correspondientes a la hipótesis y al error mediante alguna de las pruebas al uso. Por ejemplo, mediante la Λ rechazamos la H_0 si $\Lambda<U_\alpha(r,\nu^*_h,\nu^*_e)$. Los grados de libertad asociados con el enfoque del *MMM* son obtenidos mediante la fórmula $\nu^*_h=\nu_h R(\mathbf{A})/r$ y $\nu^*_e=\nu_e R(\mathbf{A})/r$.

Si la esfericidad multivariada no es satisfecha ($\mathbf{A'\Sigma A}\neq\mathbf{\Psi}\otimes\mathbf{I}$), pero la matriz $\mathbf{A'\Sigma A}$ se acomoda a una estructura kronecker, formalmente,

$$A'\Sigma A = \Psi \otimes \Omega$$

entonces las distribuciones muestrales de las matrices hipótesis y error son, aproximadamente,

$$\widetilde{H} \approx W_r\{\varepsilon[(p-1)(q-1)], \Psi, \Psi^{-1} T_p(\Phi)\} \text{ y } \widetilde{E} \approx \{\varepsilon[(N-p)(q-1)], \Psi, 0\}$$

donde $\varepsilon=[tr(\mathbf{\Omega})]^2/[(q-1)tr(\mathbf{\Omega}^2)]$ y $\mathbf{\Psi}=[T_p(\mathbf{A'\Sigma A})/\varepsilon(q-1)]$. Utilizando Λ la H_0 se rechaza si $\Lambda<U_\alpha(r,\nu_{\sim h},\nu_{\sim e})$. Los grados de libertad asociados con el enfoque del *MMM* son obtenidos mediante la fórmula $\nu_{\sim h}=\varepsilon\nu_h R(\mathbf{A})/r$ y $\nu_{\sim e}=\varepsilon\nu_e R(\mathbf{A})/r$. De acuerdo con Boik (1991), un índice que nos indica si $\mathbf{A'\Sigma A}$ se desvía de la estructura Kronecker viene dado por la verosimilitud basada en la función de pérdida que sigue:

$$\delta(A'\Sigma A) = 1 - \underset{(\Psi>0,\Omega>0)}{MAX} \frac{\exp\{.5x[r(q-1) - tr\left|A'\Sigma A(\hat{\Psi}\otimes\hat{\Omega})^{-1}\right|)]\}}{\left|(A'\Sigma A)^{-1}(\hat{\Psi}\otimes\hat{\Omega})\right|^{1/2}}$$

El índice δ se encuentra comprendido entre los valores 0 y 1. Un valor de cero indica que la matriz $\mathbf{A'\Sigma A}$ no se desvía de la estructura Kronecker.

Por último, si la matriz $\mathbf{A'\Sigma A}$ carece de estructura kronecker las distribuciones muestrales de las matrices *SCPC* asociadas con la hipótesis y con el error son, aproximadamente,

$$\widetilde{H} \approx W_r\{\varepsilon_2[(p-1)(q-1)],\Psi,\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_2}\Psi^{-1}T_p(\Phi)\} \ \ y \ \ \widetilde{E} \approx \{\varepsilon_2[(N-p)(q-1)],\Psi,I\}$$

donde $\mathbf{\Psi}=[T_p(\mathbf{A'\Sigma A})/\varepsilon_2(q-1)]$, $\varepsilon_2=r\{(q-1)tr[(|T_p(\mathbf{A'\Sigma A})|^{-1}\otimes\mathbf{I}_{(q-1)})\mathbf{A'\Sigma A}(|T_p(\mathbf{A'\Sigma A})|^{-1}\otimes\mathbf{I}_{(q-1)})]\}^{-1}$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_2\{\frac{r(p-1)+2tr[(\_T_p(A'\Sigma A)\_^{-1}\otimes I_{q-1})\Phi]}{r(p-1)+2(q-1)\varepsilon_2 tr[(\_T_p(A'\Sigma A)\_^{-1}\otimes I_{q-1})A'\Sigma A(\_T_p(A'\Sigma A)\_^{-1}\otimes I_{q-1})\Phi]}\}$$

Bajo la H_0 cualquiera de los criterios multivariados puede utilizarse para obtener una aproximación a las distribuciones muestrales de las matrices error e hipótesis, pues $\varepsilon_2=\varepsilon_a$; sin embargo, bajo la H_I la única prueba que se comporta honradamente desde el punto de vista teórico es el criterio de la traza generalizada de Hotelling. De acuerdo con esta prueba, la H_0 se rechaza si

$$T^2 = \varepsilon_2 \nu_e^* tr(\widetilde{E}^{-1}\widetilde{H})$$

excede $T^2_0(1-\alpha,\varepsilon_2\nu^*_h,\varepsilon_2\nu^*_e)$. Una aproximación a la distribución de la traza generalizada de Hotelling en términos de la distribución *F* se recoge en el trabajo de van der Merwe y Crowther (1984).

Método

Para evaluar el objetivo que nos hemos marcado en el apartado anterior hemos diseñado un experimento de simulación Monte Carlo tomando como punto de referencia algunas de las condiciones incluidas en el trabajo de Vallejo y Menéndez (1997), amén de otras que es necesario considerar en la presente investigación. Las variables manipuladas han sido: 1) el tamaño de muestra, 2) el tipo de modelos estructurales, 3) el valor de los parámetros, 4) el grado en que la matriz de dispersión se desvía de la estructura kronecker y 5) la tasa de error de tipo I. Con respecto al primer criterio, las hipótesis a comparar son las referidas a diseños de medidas parcialmente repetidas (dos grupos de tratamiento, tres medidas repetidas y tres variables dependientes) con vectores de observaciones de tamaño nueve ($n_1=n_2=9$), catorce ($n_1=n_2=14$) y dieciocho ($n_1=n_2=18$) en cada uno de los dos diferentes grupos de tratamiento. Estos valores muestrales no se fijaron arbitrariamente sino que se eligieron de modo que el número de unidades experimentales y el número de medidas mantuviesen la relación siguiente: 1:1, 1.5:1 y 2:1. La manipulación de esta variable nos permite analizar en qué medida el tamaño de muestra afecta a la eficiencia de los diferentes enfoques, y si ésta se mantiene constante cuando se utilizan las mismas matrices de covarianza y de no centralidad bajo los dos niveles de significación empleados ($\alpha=0.05$ y 0.01).

En lo que se refiere al segundo criterio, los modelos seleccionados fueron el aditivo y el no aditivo. Bajo el modelo aditivo solamente el efecto principal intra o de igualdad de las condiciones de observación era distinto de cero, mientras que bajo el modelo no aditivo, además de la propia interacción, también lo era el principal referido a las ocasiones de observación. Se excusa decir que, tanto los efectos principales como secundarios fueron analizados mediante los distintos enfoques especificados con anterioridad.

Por lo que respecta al tercer criterio, se escogieron las matrices de parámetros $\mathbf{A'\Sigma A}$ y $\boldsymbol{\Xi}$. Las matrices de dispersión $\mathbf{A'\Sigma A}$ fueron seleccionadas sobre la base de las características que siguen:

a) Presencia de estructura kronecker [$\mathbf{A'\Sigma A}=\boldsymbol{\Psi}\otimes\mathbf{I}$] y el valor de ε_1=1.00 y el de ε_2=1.00
b) Presencia de estructura kronecker [$\mathbf{A'\Sigma A}=\boldsymbol{\Psi}\otimes\mathbf{I}$] y el valor de ε_1=0.50 y el de ε_2=1.00
c) Presencia de estructura kronecker [$\mathbf{A'\Sigma A}=\boldsymbol{\Psi}\otimes\boldsymbol{\Omega}$] y el valor de ε_1=0.50 y el de ε_2=0.75
d) Ausencia de estructura kronecker [$\mathbf{A'\Sigma A}\neq\boldsymbol{\Psi}\otimes\boldsymbol{\Omega}$] y el valor de ε_1=0.50 y el de ε_2=0.75
e) Ausencia de estructura kronecker [$\mathbf{A'\Sigma A}\neq\boldsymbol{\Psi}\otimes\boldsymbol{\Omega}$] y el valor de ε_1=0.33 y el de ε_2=0.57

Los valores de las matrices de parámetros y de no centralidad $\boldsymbol{\Xi}$, se eligieron de manera que para las cinco matrices de dispersión anteriores la potencia multivariada correspondiente a todas las hipótesis contrastadas, se situara en torno a 0.80 cuando α=0.05, el tamaño de muestra era de N=28 y el análisis se realizaba mediante el enfoque *MDM*. Como consecuencia de lo dicho, cuando el análisis se efectuaba mediante el enfoque *MMM* sin ajustar la potencia correspondiente a la interacción y al factor intra se situaba en torno a 0.915 para el mismo tamaño de muestra y nivel de significación, mientras que la correspondiente a las ocasiones de observación en presencia de no aditividad se situaba en torno 0.945. Las potencias teóricas que acabamos de referir se obtuvieron conforme al procedimiento propuesto por Muller, LaVange, Ramey y Ramey (1992), que es como sigue:

$$\text{Potencia }(\Lambda)\approx 1\text{-}FPROB[F_{\text{critica}}(\Lambda),\nu_1,\nu_2,\nu_1 F(\Lambda)]$$

La inversa de la función de distribución acumulada F no central se estimó utilizando el programa de cálculo técnico MATLAB (1997)

$$\{[\rho\approx 1\text{-}FDAFNC\,(F_{\text{crítica}},\ \nu_1=6,\nu_2=21,\ \lambda=17.889)=0.793]\text{ y}$$
$$[\rho\approx 1\ FDAFNC(F_{\text{crítica}},\nu_1=12,\nu_2=42,\ \lambda=21.558)=0.793]\}.$$

Finalmente, por lo que respecta al grado de desviación de la estructura kronecker, las matrices fueron seleccionadas de manera tal que éste fuese leve, como sucede con la matriz correspondiente al caso D (δ=0.014), o bien severo, como ocurre con la matriz correspondiente al caso E (δ=0.678). En la tabla 1 (ver Anexo) se muestran las matrices de dispersión y de no centralidad utilizadas en la presente investigación.

Seguidamente, vectores de observaciones pseudoaleatorios $\mathbf{y}'_{ij1}$, $\mathbf{y}'_{ij2}$,..., $\mathbf{y}'_{ijr}$ con vector de medias $\boldsymbol{\mu}'_j=[\mu^{(1)}_{j1}, \mu^{(1)}_{j2},...,\mu^{(1)}_{jk},...,\mu^{(r)}_{jk}]$ y matriz de varianzas-covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}$ fueron obtenidos desde distribuciones normales con μ=0 y σ^2=1 utilizando el programa Gauss (v.3.1.4). Las pertinentes observaciones multivariadas se consiguieron mediante la descomposición triangular o factorización de Cholesky de la matriz $\boldsymbol{\Sigma}_j$, esto es,

$$\mathbf{y}'_{ij}=\mathbf{T}\mathbf{z}_{ij}+\boldsymbol{\mu}_{ij}$$

donde $\mathbf{T}$ es la factorización Cholesky de $\boldsymbol{\Sigma}_j$ y $\mathbf{z}_{ij}$ es un vector de variadas normales generado de acuerdo al algoritmo propuesto por Kinderman y Ramage (1976). La precisión del procedimiento de normalización fue realizada a través del *SPSS PC* (v.5.0). En concreto, el examen de los criterios de sesgo y curtosis resultó completamente satisfactorio en la mayor parte de los casos verificados.

Por último, mediante un programa escrito en *GAUSS* (1992) se efectúo el análisis del conjunto de datos simulados mediante cada uno de los cuatro procedimientos referidos; esta operación permite comparar el comportamiento de las técnicas en relación con cada una de las variables manipuladas. Las comparaciones fueron efectuadas en dos áreas de interés: Efectos sobre las tasas de error Tipo I y efectos sobre la potencia de las pruebas. Bajo hipótesis nula la proporción empírica de errores Tipo I se obtuvo dividiendo el número de veces que cada estadístico excedía su valor crítico por el número de réplicas efectuadas, diez mil en nuestro caso. A su vez, tanto la potencia de prueba correspondiente al factor intra del modelo aditivo, como la correspondiente a la interacción y al factor intra del modelo no aditivo se obtuvo dividiendo el número de veces que la hipótesis nula era correctamente rechazada por el número de réplicas practicadas.

Resultados y discusión

Modelo aditivo

Las estimaciones empíricas correspondientes a la tasa de error Tipo I y a la potencia de prueba de cada uno de los procedimientos analíticos, bajo cada una de las cuatro estructuras de covarianza examinadas, aparecen recogidas en la tabla 2. Los errores estándar (ES) reportados para las estimaciones empíricas de los niveles de significación y potencia multivariada han sido obtenidos mediante $\sqrt{[\rho(1-\rho)/m]}$, donde ρ es la probabilidad teórica de cometer uno o más errores Tipo I y *m* es el número de experimentos efectuados. Las estimaciones empíricas que en la tabla 2 aparecen señaladas con asterisco son aquellas que han sido declaradas significativas por encontrase fuera de las bandas de $\pm$2ES.

Por lo que al tamaño del error se refiere, los datos presentados en la tabla 2 (ver Anexo) ponen de relieve los siguientes aspectos: En primer lugar, que la tasa de error Tipo I se mantiene inalterable para los tres tamaños muestrales; esto es, que el conservadurismo o liberalismo de los diferentes procedimientos analíticos es independiente del tamaño de muestra y muy probablemente del número de variables dependientes utilizadas. En segundo lugar, que el enfoque *MDM* siempre mantiene la tasa de error en su nivel nominal, tanto al α=0.01 como al α=0.05. En tercer lugar, si el supuesto de esfericidad multivariada es satisfecho las tasas de error empíricas obtenidas a partir del enfoque *MMM* también se ajustan estrechamente a sus valores nominales.

En cuarto lugar, si se incumple el supuesto de esfericidad multivarida el enfoque *MMM* sin ajustar no ofrece ningún control de las tasas de error fijadas inicialmente, de hecho, en nuestro caso, el estimador empírico de α excede en un 51% al teórico cuando el α elegido era igual a 0.05 y en un 146% cuando el nivel de α se fijó en el 0.01. En quinto lugar, si el supuesto de esfericidad no es satisfecho, pero se utiliza un corrector para ajustar los grados de libertad nos encontramos con dos resultados muy distintos, aunque no opuestos. Por un lado, el corrector ε_2 propuesto por Boik (1991) mantiene la tasa de error controlada en los umbrales elegidos cuando el nivel de α se fija en el 0.01; no obstante, cuando el nominal se fija en el usual α=0.05 el procedimiento se comporta de un modo ligeramente conservador (_=.0471), en especial, cuando la matriz de dispersión se desvía considerablemente de la estructura kronecker (caso E). Como se observa en la tabla 2, las estimaciones empíricas de α correspondientes a los casos C y D se hallan dentro de los dos errores estándar de los valores teóricos, mientras que las correspondientes al caso E se hallan fuera. Esto sugiere que la tendencia conservadora de los puntos estimados no es debida exclusivamente a la acción del azar, como se sugirió en el trabajo de Vallejo y Menéndez (1997), sino más bien al carácter sesgado del estimador ε_2. Con todo, nos inclinamos a pensar que los efectos negativos que se derivan de este descubrimiento tan sólo ocurrirán en aquellas situaciones en las cuales la matriz de dispersión se desvíe severamente de la estructura kronecker y el tamaño de muestra sea excesivamente reducido. Por otro, la generalización del corrector de Geenhouse-Geisser ε_1 ofrece estimaciones empíricas de α que son siempre más pequeñas que sus valores teóricos (_=0.0242 y _=0.0025), dichas estimaciones caen siempre fuera de las bandas de los dos errores estándar, lo cual implica que el procedimiento en cuestión es conservador bajo las condiciones especificadas.

En lo que se refiere a la estimación empírica de la potencia de prueba, de los resultados esquematizados en la tabla 2 merecen destacarse las cuatro consideraciones que siguen: En primer lugar, que cuando las diferencias entre los intervalos temporales promediadas a través de los grupos de tratamiento están presentes, la potencia no es independiente del tamaño de muestra. Esta tendencia se mantiene estable sea cual sea el procedimiento de análisis y el nivel de significación elegido. En segundo lugar, que cuando la matriz de varianzas-covarianzas es esférica, el enfoque *MMM* sin ajustar es siempre más poderoso que el *MDM*; no obstante, como se desprende de la tabla 2, las diferencias se estrechan a medida que el tamaño de muestra se incrementa. En tercer lugar, que en ausencia de esfericidad y con independencia del tamaño de muestra utilizado, el enfoque *MDM* resultó ser en todos los casos más poderoso que el enfoque *MMM* correctamente ajustado. Es más, salvo para el caso donde el tamaño de muestra era reducido (N=18), el umbral elegido se fija en el α=0.01 y la matriz de varianzas-covarianzas se desvía ampliamente de la estructura kronecker, la potencia del enfoque *MDM* resultó incluso superior a la del enfoque *MMM* sin ajustar. En cuarto y último lugar, destacar que la potencia empírica fue siempre superior a la teórica para los dos niveles de significación utilizados, sobre todo bajo el enfoque *MDM*, donde ésta fue alrededor de un 10% superior.

Modelo no aditivo

Comenzaremos comentando los resultados referidos a la igualdad de las condiciones de observación. Las estimaciones empíricas correspondientes a la tasa de error Tipo I y a la potencia de prueba de cada uno de los procedimientos analíticos bajo cada una de las cuatro estructuras de covarianza examinadas aparecen recogidas en la tabla 3. Como en el caso anterior, las estimaciones que aparecen con asterisco se encuentran fuera de las bandas ±2ES.

Por lo que al tamaño del error se refiere, los datos presentados en la tabla 3 (ver Anexo) de nuevo ponen de relieve que la tasa de error Tipo I se mantiene inalterable para los tres tamaños muestrales y que el enfoque *MDM* siempre mantiene la tasa de error en su nivel nominal, tanto al α=0.01 como al α=0.05. Si se satisface el supuesto de esfericidad multivariada las tasas de error empíricas obtenidas a partir del enfoque *MMM* también se ajustan estrechamente a sus valores nominales. Cuando se incumple dicho supuesto el enfoque *MMM* sin ajustar no ofrece ningún control de las tasas de error fijadas inicialmente, de hecho, en nuestro caso, el estimador empírico de α excede en un 61% al teórico cuando el α elegido era igual a 0.05 y en un 155% cuando el nivel de α se fijó en el 0.01. Cuando se aproximan los grados de libertad mediante el corrector ε_2 propuesto por Boik (1991) la tasa de error se mantiene controlada en los umbrales elegidos cuando el nivel α se fija al 0.01, sin embargo, al igual que sucedía bajo el modelo aditivo, el procedimiento se sigue comportando de un modo ligeramente conservador ($\hat{\alpha}$ =0.0471) cuando el nivel nominal se fija en el usual α=0.05; sobre todo, cuando la matriz de dispersión se desvía de una manera importante de la estructura kronecker (caso E). Como se observa en la tabla 3, todas las estimaciones empíricas de α se hallan dentro de los dos errores estándar de los valores teóricos, excepto las correspondientes al caso E donde δ=0.678. A su vez, cuando la aproximación de los grados de libertad se realiza por medio de la generalización del corrector de Geenhouse-Geisser ε_1 las estimaciones empíricas de α son siempre más pequeñas que sus valores teóricos ($\hat{\alpha}$ =0.0183 y $\hat{\alpha}$ =0.0023). Dichas estimaciones caen siempre fuera de las bandas de los dos errores estándar, lo cual implica que el procedimiento en cuestión es conservador bajo las condiciones especificadas.

Cuando existen diferencias entre los intervalos temporales sin promediar a través de los grupos de tratamiento, los resultados de la tabla 3 ponen de relieve que la potencia no es independiente del tamaño de muestra. Esta tendencia se mantiene estable sea cual sea el procedimiento de análisis y el nivel de significación elegido. Si la matriz de varianzas-covarianzas es esférica, el enfoque *MMM* sin ajustar es siempre más poderoso que el *MDM*. Si bien, como se desprende de la propia tabla 3, las diferencias se estrechan a medida que el tamaño de muestra se incrementa. En ausencia de esfericidad y con independencia del tamaño de muestra utilizado, el enfoque *MDM* resultó ser en todos los casos investigados más poderoso que el enfoque *MMM* correctamente ajustado, es más, exceptuando los cuatro primeros casos cuando el tamaño de muestra era reducido (N=18), la potencia del enfoque *MDM* resultó incluso superior a la del enfoque *MMM* sin ajustar. Bajo el caso E la potencia del enfoque *MDM* también fue superior a la del enfoque *MMM* sin ajustar, inclusive cuando el tamaño de muestra era reducido. La cuestión no es baladí, ya que la matriz de varianzas-covarianzas correspondiente al caso E es la más plausible de encontrarse en la realidad. También se hace preciso señalar, al margen del procedimiento analítico que se utilice, que las tasas de potencia correspondientes al efecto principal intra grupos fueron siempre ligeramente superiores bajo el modelo no aditivo que bajo el modelo aditivo. Por ejemplo, ciñéndonos al enfoque *MDM*, donde las potencia teóricas referidas a todos los efectos manipulados valían exactamente lo mismo, en concreto 0.793, el valor promedio de las diferentes tasas empíricas a través de las distintas matrices de dispersión y tamaños muestrales es 0.8191 *versus* 0.8005, cuando α=0.05 y 0.6262 *versus* 0.5894, cuando α=0.01. Repare el lector que bajo el enfoque *MMM* las tasas de potencia empírica correspondientes al modelo no aditivo también son mayores que las obtenidas bajo el modelo aditivo, no obstante, en este caso la comparación se hace menos precisa, pues como fue puesto de manifiesto en el apartado método, las potencias teóricas de partida diferían ligeramente entre ambos modelos.

Por lo que respecta a la interacción de los grupos de tratamiento con la variable condiciones de observación, desde la tabla 4 es fácil de verificar como el patrón de resultados encontrados para las tasas empíricas de error de tipo I, se comporta de un modo casi idéntico a como lo hacía el referido al efecto principal de igualdad de las condiciones, tanto bajo el modelo aditivo como bajo el modelo no aditivo. Destacar, si acaso, que en ausencia de esfericidad multivariada, la aproximación de los grados de libertad mediante el corrector propuesto por Boik, controla adecuadamente la tasa de error bajo las condiciones *C* y *D*; en el caso *E* se encuentra la misma tendencia conservadora que la exhibida en las tablas 2 y 3 para la susodicha condición cuando el nivel nominal se fija en el usual α=0.05. Este resultado sugiere que la tendencia ligeramente conservadora encontrada en la estimación de los puntos correspondientes al caso *C* (tablas 2 y 3) pudo ser debida a la mera acción del azar, sin embargo, no existe ninguna duda de la presencia de un sesgo sistemático en la estimación del valor del corrector tipo Box desarrollado por Boik cuando la matriz de dispersión se aparta de la estructura kronecker, sobre todo, cuando la desviación resulta de consideración y el nivel de significación utilizado es α=0.05.

Finalmente, resaltar que el patrón de resultados referido a la potencia también sigue en el caso de la interacción las mismas pautas que las halladas en los casos anteriores para las condiciones de observación, razón por la cual no vamos a repetir lo ya dicho. Apuntar tan sólo, que en esta situación la tasa de potencia empírica vale 0.8847 cuando α=0.05 y 0.6607 cuando α=0.01, lo cual representa que dicha tasas son prácticamente idénticas a la encontrada para el efecto intra bajo el modelo aditivo (0.8748 y 0.6653). Lo que nos hace pensar que la sensibilidad de los modelos a la hora de probar dichos efectos mediante el enfoque *MDM* es muy similar, repare el atento lector que la potencia teórica de la que partíamos era la misma en ambos casos, 0.793 cuando α=0.05 y alrededor de 0.60 cuando α=0.01. Es fácil de comprobar que se observa el mismo patrón de conducta cuando se analiza el efecto intra del modelo aditivo y el efecto correspondiente a la interacción mediante el enfoque del modelo mixto multivariado.

Conclusiones

Para el conjunto específico de parámetros utilizado, los resultados de nuestro estudio indican que, bajo ciertas condiciones, en especial, cuando el tamaño de muestra resulta reducido y la matriz de varianzas-covarianzas es esférica, el enfoque *MMM* es siempre más poderoso que el enfoque *MDM* para detectar diferencias entre los efectos principales e interacción del diseño multivariado de medidas parcialmente repetidas. No obstante, conviene matizar que a medida que el tamaño de muestra se incrementa las diferencias en cuanto a la sensibilidad estadística de los dos enfoques se van estrechando, sobre manera, cuando el nivel nominal se fija en α=0.05.

Cuando las matrices de varianzas-covarianzas son homogéneas y los datos se acomodan a una distribución normal multivariante, pero la matriz de dispersión se desvía del patrón de esfericidad multivariada requerido, inclusive en cantidades más bien modestas como ocurre en el presente estudio, las pruebas basadas en el enfoque *MMM* sin ajustar se tornan excesivamente liberales, con tasas de error Tipo I por encima de 0.09 y 0.03 para niveles de significación α=0.05 y 0.01, respectivamente; mientras que las pruebas basadas en el enfoque *MMM* ajustado mediante la generalización del corrector ε de Greenhouse-Geisser se convierten en excesivamente conservadoras, con tasas de error Tipo I por debajo de 0.010 y 0.0020 para los niveles de significación especificados. Por consiguiente, en ausencia de esfericidad, ninguno de los dos enfoques reseñados en este apartado puede ser recomendado. Por lo que respecta al comportamiento de las pruebas basadas en el enfoque *MMM* ajustado mediante el corrector ε desarrollado por Boik (1991), destacar, independientemente del valor de *N*, el satisfactorio control que éstas ofrecen del tamaño del error, tanto cuando la ausencia de esfericidad acontece en matrices de varianzas-covarianzas con estructura Kronecker (caso C), como en matrices de varianzas-covarianzas que se desvían ligeramente de dicha estructura (caso D). Sin embargo, la solución de aproximar los grados de libertad mediante el corrector propuesto por Boik deja de tener los efectos deseados a medida que las matrices de varianzas-covarianzas se apartan de la estructura kronecker, especialmente, cuando el nivel de significación elegido es α=0.05.

Finalmente, los resultados ponen de relieve que en ausencia de esfericidad la potencia relativa de los dos procedimientos que han logrado superar los diversos filtros, esto es, el enfoque *MDM* y el enfoque *MMM* ajustado mediante el corrector de Boik, depende de τ ($\tau = tr\boldsymbol{\Xi}^{*}/tr\boldsymbol{\Xi}$), donde $\boldsymbol{\Xi}$ es la matriz de no centralidad del enfoque *MDM,* y $\boldsymbol{\Xi}^{*}$ es la matriz de no centralidad del enfoque *MMM*. Si τ>1, entonces el enfoque *MMM* ajustado resulta más poderoso que el enfoque *MDM*; por el contrario, si τ<1 es el enfoque *MDM* quien detecta mejor las diferencias existentes entre los tratamientos. De resultar τ=1 indicaría que la matriz de varianzas-covarianzas no experimenta ninguna desviación del patrón de esfericidad. En la presente investigación, al igual que en la realizada por Vallejo y Menéndez (1997), el enfoque *MDM*, además de ejercer un control más adecuado de la tasa de error de Tipo I, también fue más poderoso que el enfoque *MMM* ajustado, con la particularidad añadida de que en esta situación se pudo poner claramente de manifiesto que la diferencia entre las tasas de potencia de los enfoques *MDM* y *MMM* se incrementaba conforme las matrices de dispersión se desviaban de la estructura kronecker, con independencia del tamaño de muestra y de que el modelo subyacente al diseño de medidas parcialmente repetidas fuera o no aditivo. Este hecho nos permite concluir que, salvo que la matriz de varianzas-covarianzas sea esférica y el tamaño de muestra muy reducido, lo cual se nos antoja muy poco probable de ocurrir en la práctica, el enfoque *MDM* debe ser el elegido, pues, como ha sido puesto de relieve de una manera exhaustiva y reiterada, dicho enfoque, además de controlar adecuadamente la tasa de error de tipo I, es siempre más poderoso que el enfoque *MMM* ajustado e inclusive, la mayoría de las veces, que el *MMM* sin ajustar, con independencia del tipo de ajuste utilizado.

Referencias

Bock, R.D. (1985). *Multivariate Statistical Methods in Behavioral Sciences* (2nd ed.). New York: Scientific Software.

Boik, R.J. (1988). The mixed model for multivariate repeated measures: Validity conditions and an approximate test. *Psychometrika,* ***53***, 469-486.

Boik, R.J. (1991). Scheffé's mixed model for multivariate repeated measures: A relative efficiency evaluation. *Communication Statitics. Theory and Methods,* ***20***, 1233-1255.

GAUSS (1992). *The Gauss System*(Vers. 3.1). Washington: Aptech Systems, Inc.

Greenhouse, S.W. y Geisser, S. (1959). On methods in the analysis of profile data. *Psychometrika,* ***24***, 95-112

Huynh, M. y. Feldt., L.S. (1970). Conditions under which mean square rate in repeated measures designs have exact-F distributions. *Journal of the American Statistical Association,* ***65***, 1982-1989.

Kinderman, A.J. y Ramage, J.G. (1976). Computer generation of normal random nuumbers. *Journal of American Statistical Associaton,* ***77***, 893-896.

López, J.J. y Ato, M. (1994). Procedimientos analíticos para el ajuste de diseños multivariantes de medidas repetidas. *Psicothema,* ***6***, 447-463.

MATLAB (1997). *MATLAB Toolbox*(Vers. 5.1). Natick, MA: The Math Works, Inc.

Mendoza, J.H., Toothaker, L.E. y Crain, B.R. (1976). Necessary and sufficent conditions for F ratios in the LxJxK factorial design with repeated factors. *Journal of the American Statistical Associations* ***7***, 992-999.

Muller, K.E.; LaVange, L.M.; Ramey, S.M. y Ramey, C. (1992). Power calculations for general linear multivariate models includind repeated measures applications. *Journal of American Statistical Association,* ***87***, 1209-1226

Reinsel, G. (1982). Multivariate repeated-measurement or growth curve models with multivariate randon-effects covariate structure. *Journal of the American Statistical Association,* ***77***, 190-195.

Rouanet, M. y Lépine, D. (1970). Comparison between treatments in a repeated-measurement design: ANOVA and multivariate methods. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology,* ***23***, 147-163.

Scheffé, H. (1956). A mixed model for the analysis of variance. *Annals of Mathematical Statistics,* ***27***, 23-36.

Thomas, D. R. (1983). Univariate repeated measures techniques applied to multivariate data. *Psychometrika,* ***48***, 451-464.

Timm, N. H. (1980). Multivariate analysis of variance of repeated measure. En P.R. Krishnaiah (Ed.), *Handbook of Statistics Vol. I*, pp. 41-87. Amsterdam: North-Holland Publishing Co.

Vallejo, G. y Menéndez, I. (1997). Una comparación de enfoques alternativos para el análisis de diseños multivariados de medidas repetidas. *Psicothema,* ***9***, 647-656.

van der Merwe, L. y Crowther, N.A.S. (1984). An aproximation to the distribution of Hotelling's generalized T^2_0-statistic. *South African Statistical Journal,* ***18***, 68-90.

Wilks, S.S. (1932). Certain generalisations in the analysis of variance. *Biometrika*, ***24***, 471-494.

(Artículo recibido: 21-3-98; aceptado: 10-10-98)

Anexo

Tabla 1: Valores numéricos de las matrices de dispersión y no centralidad usados en la investigación

$\mathbf{A'\Sigma A}$	$\Xi^\star$
$\begin{bmatrix} 4.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 4.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 4.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 4.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 4.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 4.0000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 21.9747 & 0.000 & 2.1974 & 0.000 & 0.2197 & 0.000 \\ 0.0000 & 0.000 & 0.0000 & 0.000 & 0.0000 & 0.000 \\ 2.1974 & 0.000 & 0.2197 & 0.000 & 0.0219 & 0.000 \\ 0.0000 & 0.000 & 0.0000 & 0.000 & 0.0000 & 0.000 \\ 0.2197 & 0.000 & 0.0219 & 0.000 & 0.0021 & 0.000 \\ 0.0000 & 0.000 & 0.0000 & 0.000 & 0.0000 & 0.000 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 5.6500 & 0.0000 & 4.0000 & 0.0000 & 4.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 5.6500 & 0.0000 & 4.0000 & 0.0000 & 4.0000 \\ 4.0000 & 0.0000 & 5.6500 & 0.0000 & 4.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 4.0000 & 0.0000 & 5.6500 & 0.0000 & 4.0000 \\ 4.0000 & 0.0000 & 4.0000 & 0.0000 & 5.6500 & 0.0000 \\ 0.0000 & 4.0000 & 0.0000 & 4.0000 & 0.0000 & 5.6500 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 23.151 & 0.000 & 2.315 & 0.000 & 0.231 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -7.724 & 0.000 & -0.772 & 0.000 & -0.077 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -10.821 & 0.000 & -1.082 & 0.000 & -0.108 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 6.000 & -3.464 & 3.000 & -1.732 & 3.000 & -1.732 \\ -3.464 & 6.000 & -1.732 & 3.000 & -1.732 & 3.000 \\ 3.000 & -1.732 & 6.000 & -3.464 & 3.000 & -1.732 \\ -1.732 & 3.000 & -3.464 & 6.000 & -1.732 & 3.000 \\ 3.000 & -1.732 & 3.000 & -1.732 & 6.000 & -3.464 \\ -1.732 & 3.000 & -1.732 & 3.000 & -3.464 & 6.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 22.861 & 0.000 & 2.286 & 0.000 & 0.228 & 0.000 \\ 13.199 & 0.000 & 1.319 & 0.000 & 0.131 & 0.000 \\ -5.616 & 0.000 & -0.561 & 0.000 & -0.056 & 0.000 \\ -3.242 & 0.000 & -0.324 & 0.000 & -0.032 & 0.000 \\ -8.464 & 0.000 & -0.846 & 0.000 & -0.084 & 0.000 \\ -4.886 & 0.000 & -0.488 & 0.000 & -0.044 & 0.000 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 6.000 & -3.464 & 2.875 & -1.659 & 2.875 & -1.659 \\ -3.464 & 6.000 & -1.804 & 3.046 & -1.804 & 3.041 \\ 2.875 & -1.804 & 6.000 & -3.464 & 3.000 & -1.732 \\ -1.659 & 3.046 & -3.464 & 6.000 & -1.732 & 3.000 \\ 2.875 & -1.804 & 3.000 & -1.732 & 6.000 & -3.464 \\ -1.659 & 3.041 & -1.732 & 3.000 & -3.464 & 6.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 22.828 & 0.000 & 2.282 & 0.000 & 0.228 & 0.000 \\ 13.393 & 0.000 & 1.339 & 0.000 & 0.133 & 0.000 \\ -5.091 & 0.000 & -0.509 & 0.000 & -0.050 & 0.000 \\ -3.251 & 0.000 & -0.325 & 0.000 & -0.032 & 0.000 \\ -8.066 & 0.000 & -0.806 & 0.000 & -0.080 & 0.000 \\ -4.975 & 0.000 & -0.497 & 0.000 & -0.049 & 0.000 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 39.231 & 0.000 & 0.000 & 18.475 & -32.000 & 0.000 \\ 0.000 & 7.232 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 7.232 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 18.475 & 0.000 & 0.000 & 17.898 & -18.475 & 0.000 \\ -32.000 & 0.000 & 0.000 & -18.475 & 39.231 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 7.232 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 19.543 & 0.000 & 5.807 & 2.224 & 0.228 & -0.001 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.131 & 0.000 \\ 9.985 & 0.000 & 2.937 & 1.212 & -0.056 & 0.000 \\ 4.135 & 0.000 & -1.228 & -0.041 & -0.032 & 0.000 \\ 14.054 & 0.000 & 4.176 & 0.141 & -0.084 & 0.000 \\ -0.002 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.044 & 0.000 \end{bmatrix}$

Los valores de las matrices $\mathbf{A'\Sigma A}$ son comunes a todas las condiciones, sin embargo, los valores de $\Xi^\star$ son los que corresponden al tamaño muestral N=28 bajo el modelo aditivo, pues $\Xi=(\mathbf{A'\Sigma A})^{-1}\mathbf{\Phi}$ y la matriz $\mathbf{\Phi}$ dependen del tamaño de muestra y de la matriz de parámetros **B**

Tabla 2: Tasas empíricas de error de Tipo I y de potencia referidas al efecto principal igualdad de las condiciones de observación bajo el *modelo aditivo*

Casos	Error de Tipo I						Potencia de prueba					
	N=18		N=28		N=36		N=18		N=28		N=36	
	α=0.05	α=0.01	α=0.05	α=0.01	α=0.05	α=0.01	α=0.05	α=0.01	α=0.05	α=0.01	α=0.05	α=0.01
CASO A: $[\mathbf{A'\Sigma A=\Psi\otimes I}]$												
MDM	0.0499	0.0096	0.0503	0.0105	0.0499	0.0105	0.5620	0.2605	0.8823	0.6663	0.9659	0.8632
MMM ($\varepsilon=\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$)							ES=0.0040					
	0.0498	0.0102	0.0499	0.0105	0.0508	0.0098	0.7366	0.4652	0.9365	0.8016	0.9829	0.9285
	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=0.0028					
CASO B: $[\mathbf{A'\Sigma A=\Psi\otimes I}]$												
MDM	0.0502	0.0104	0.0495	0.0092	0.0493	0.0104	0.5621	0.2527	0.8892	0.6714	0.9701	0.8714
MMM ($\varepsilon_2=1$)							ES=0.0040					
	0.0501	0.0106	0.0496	0.0099	0.0504	0.0098	0.7358	0.4703	0.9384	0.8131	0.9845	0.9392
MMM ($\varepsilon_1=0.50$)							ES=0.0028					
	0.0101*	0.0018*	0.0119*	0.0004*	0.0127*	0.0007*	0.4748	0.1264	0.8267	0.4673	0.9479	0.7261
	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=0.0049					
CASO C: $[\mathbf{A'\Sigma A=\Psi\otimes\Omega}]$												
MDM	0.0504	0.0098	0.0493	0.0107	0.0500	0.0101	0.5630	0.2552	0.8832	0.6648	0.9721	0.8657
MMM (sin ajustar)							ES=0.0040					
	0.0717*	0.0212*	0.0720*	0.0205*	0.0713*	0.0215*	0.5354	0.2886	0.7864	0.5523	0.9037	0.7344
MMM (ε_2=.75)												
	0.0487	0.0106	0.0496	0.0101	0.0498	0.0102	0.4493	0.1831	0.7159	0.4172	0.8650	0.6203
MMM (ε_1=.50)							ES=0.0046					
	0.0227*	0.0023*	0.0239*	0.0023*	0.0266*	0.0003*	0.3025	0.0719	0.5821	0.2257	0.7688	0.4086
	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=0.0049					
CASO D: $[\mathbf{A'\Sigma A\neq\Psi\otimes\Omega}]$												
MDM	0.0498	0.0113	0.0500	0.0104	0.0505	0.0092	0.5682	0.2541	0.8846	0.6584	0.9671	0.8688
MMM (sin ajustar)							ES=0.0040					
	0.0743*	0.0212*	0.0724*	0.0213*	0.0705*	0.0195*	0.5543	0.3075	0.8016	0.5718	0.9168	0.7589
MMM (ε_2=0.75)												
	0.0493	0.0102	0.0491	0.0100	0.0477	0.0100	0.4641	0.1978	0.7367	0.4428	0.8795	0.6476
MMM (ε_1=0.503)							ES=0.0046					
	0.0218*	0.0024*	0.0246*	0.0025*	0.0256*	0.0026*	0.3112	0.0721	0.6032	0.2248	0.7878	0.4302
	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=0.0049					
CASO E: $[\mathbf{A'\Sigma A\neq\Psi\otimes\Omega}]$												
MDM	0.0495	0.0100	0.0494	0.0100	0.0496	0.0096	0.5187	0.2269	0.8620	0.6250	0.9571	0.8368
MMM (sin ajustar)							ES=0.0040					
	0.0821*	0.0313*	0.0835*	0.0328*	0.0824*	0.0317*	0.6373	0.3843	0.8933	0.7254	0.9643	0.8791
MMM (ε_2=0.57)												
	0.0401*	0.0092	0.0446*	0.0102	0.0452*	0.0112	0.4461	0.1588	0.7908	0.4665	0.9179	0.6986
MMM (ε_1=0.33)							ES=0.0047					
	0.0135*	0.0013*	0.0179*	0.0018*	0.0196*	0.0022*	0.2164	0.0254	0.5906	0.1631	0.8045	0.3663
	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.0009	ES=0.0052					

Tabla 3: Tasas empíricas de error de Tipo I y de potencia referidas al efecto principal igualdad de las condiciones de observación bajo el *modelo no aditivo*

Casos	Error de Tipo I						Potencia de prueba					
	N=18		N=28		N=36		N=18		N=28		N=36	
	α=0.05	α=0.01	α=0.05	α=0.01	α=0.05	α=0.01	α=0.05	α=0.01	α=0.05	α=0.01	α=0.05	α=0.01
CASO A: **[A'ΣA=Ψ⊗I]**												
MDM	0.0492	0.0107	0.0507	0.0108	0.0494	0.0093	0.5576	0.2538	0.9080	0.7082	0.9841	0.9118
MMM ($\varepsilon=\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$)							ES=0.004					
	0.0501	0.0105	0.0491	0.0088	0.0502	0.0091	0.7679	0.5047	0.9680	0.8768	0.9953	0.9721
	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=0.0023					
CASO B: **[A'ΣA=Ψ⊗I]**												
MDM	0.0500	0.0098	0.0500	0.0103	0.0498	0.0099	0.5665	0.2620	0.9094	0.7050	0.9839	0.9098
MMM ($\varepsilon_2=1$)							ES=0.004					
	0.0499	0.0101	0.0499	0.0094	0.0499	0.0092	0.7676	0.5152	0.9673	0.8738	0.9950	0.9699
MMM ($\varepsilon_1=0.50$)							ES=0.0023					
	0.0088*	0.0004*	0.0011*	0.0005*	0.0098*	0.0007*	0.4801	0.1287	0.8745	0.5425	0.9726	0.8179
	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=0.0045					
CASO C: **[A'ΣA=Ψ⊗Ω]**												
MDM	0.0497	0.0101	0.0506	0.0098	0.0505	0.0099	0.5692	0.2624	0.9002	0.7052	0.9830	0.9109
MMM (sin ajustar)							ES=0.004					
	0.0763*	0.0223*	0.0756*	0.0220*	0.0733*	0.0206*	0.5854	0.3308	0.8408	0.6306	0.9454	0.8182
MMM (ε_2=.75)												
	0.0489	0.0099	0.0497	0.0088	0.0493	0.0096	0.4799	0.2085	0.7739	0.4917	0.9041	0.7079
MMM (ε_1=.50)							ES=0.0043					
	0.0193*	0.0016*	0.0223*	0.0013*	0.0216*	0.0025*	0.3027	0.0694	0.6320	0.2666	0.8227	0.4668
	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=0.0045					
CASO D: **[A'ΣA≠Ψ⊗Ω]**												
MDM	0.0506	0.0102	0.0501	0.0098	0.0494	0.0103	0.5662	0.2591	0.9121	0.7098	0.9851	0.9123
MMM (sin ajustar)							ES=0.004					
	0.0785*	0.0202*	0.0748*	0.0202*	0.0744*	0.0198*	0.5741	0.3188	0.8385	0.6288	0.9470	0.8204
MMM ($\varepsilon_2=0.75$)												
	0.0483	0.0096	0.0477	0.0106	0.0500	0.0099	0.4692	0.1984	0.7725	0.4837	0.9152	0.7083
MMM ($\varepsilon_1=0.503$)							ES=0.0045					
	0.0189*	0.0019*	0.0206*	0.0022*	0.0215*	0.0022*	0.2913	0.0644	0.6301	0.2567	0.8290	0.4919
	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=0.0043					
CASO E: **[A'ΣA≠Ψ⊗Ω]**												
MDM	0.0501	0.0104	0.0509	0.0101	0.0503	0.0104	0.5664	0.2623	0.9109	0.7087	0.9842	0.9110
MMM (sin ajustar)							ES=0.0040					
	0.0904*	0.0348*	0.0908*	0.0349*	0.0917*	0.0354*	0.5026	0.2666	0.7864	0.5516	0.9119	0.7473
MMM ($\varepsilon_2=0.57$)												
	0.0403*	0.0085	0.0443*	0.0103	0.0451*	0.0116	0.2971	0.0849	0.6128	0.2728	0.8009	0.4835
MMM ($\varepsilon_1=0.33$)							ES=0.0044					
	0.0102*	0.0007*	0.0147*	0.0015*	0.0168*	0.0073*	0.0988	0.0091	0.3450	0.0609	0.5795	0.4331
	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=0.0041					

Tabla 4: Tasas empíricas de error de Tipo I y de potencia referidas al efecto de la interacción bajo el *modelo no aditivo*

Casos	Error de Tipo I						Potencia de prueba					
	N=18		N=28		N=36		N=18		N=28		N=36	
	α=0.05	α=0.01	α=0.05	α=0.01	α=0.05	α=0.01	α=0.05	α=0.01	α=0.05	α=0.01	α=0.05	α=0.01
CASO A: **[A'ΣA=Ψ⊗I]**												
MDM												
	0.0494	0.0093	0.0508	0.0107	0.0504	0.0106	0.5557	0.2518	0.8848	0.6629	0.9681	0.8648
MMM (ε=ε1=ε2=1)									ES=0.0040			
	0.0473	0.0092	0.0498	0.0102	0.0512	0.0108	0.7288	0.4605	0.9320	0.8156	0.9827	0.9306
	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099				ES=0.0028		
CASO B: **[A'ΣA=Ψ⊗I]**												
MDM												
	0.0520	0.0105	0.0496	0.0099	0.0497	0.0096	0.5568	0.2555	0.8829	0.6689	0.9710	0.8643
MMM (ε2=1)								ES=0.0040				
	0.0514	0.0110	0.0498	0.0102	0.0500	0.0101	0.7364	0.4742	0.9386	0.8065	0.9859	0.9333
MMM (ε1=0.50)								ES=0.0028				
	0.0122*	0.0005*	0.0112*	0.0008*	0.0129*	0.0003*	0.4781	0.1310	0.8276	0.4676	0.9438	0.7202
	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099				ES=0.0049		
CASO C: **[A'ΣA=Ψ⊗Ω]**												
MDM												
	0.0485	0.0099	0.0503	0.0105	0.0511	0.0102	0.5704	0.2567	0.8857	0.6539	0.9706	0.8699
MMM (sin ajustar)									ES=0.0040			
	0.0697*	0.0199*	0.0747*	0.0216*	0.0691*	0.0200*	0.5398	0.2939	0.7890	0.5464	0.9090	0.7369
MMM (ε2=.75)												
	0.0479	0.0104	0.0512	0.0108	0.0495	0.0098	0.4497	0.1883	0.7176	0.4195	0.8654	0.6189
MMM (ε1=.50)								ES=0.0046				
	0.0203*	0.0006*	0.0259*	0.0024*	0.0231*	0.0028*	0.2988	0.0867	0.5818	0.2349	0.7704	0.4120
	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099				ES=0.0049		
CASO D: **[A'ΣA≠Ψ⊗Ω]**												
MDM												
	0.0501	0.0094	0.0507	0.0103	0.0498	0.0108	0.5640	0.2581	0.8854	0.6573	0.9679	0.8648
MMM (sin ajustar)									ES=0.0040			
	0.0737*	0.0225*	0.0728*	0.0223*	0.0697*	0.0204*	0.5353	0.2793	0.7809	0.5486	0.9033	0.7296
MMM (ε2=0.75)												
	0.0498	0.0100	0.0497	0.0105	0.0495	0.0098	0.4390	0.1789	0.7131	0.4187	0.8596	0.6142
MMM (ε1=0.503)									ES=0.0046			
	0.0231*	0.0019*	0.0239*	0.0028*	0.0263*	0.0032*	0.2831	0.0622	0.5798	0.2273	0.7283	0.4063
	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099				ES=0.0049		
CASO E: **[A'ΣA≠Ψ⊗Ω]**												
MDM												
	0.0495	0.0096	0.0491	0.0097	0.0509	0.0105	0.5610	0.2549	0.8816	0.6602	0.9691	0.8665
MMM (sin ajustar)									ES=0.0040			
	0.0823*	0.0329*	0.0801*	0.0307*	0.0843*	0.0326*	0.4739	0.2402	0.7290	0.4835	0.8679	0.6716
MMM (ε2=0.57)												
	0.0418*	0.0095	0.0426*	0.0101	0.0460*	0.0010	0.2913	0.0795	0.5659	0.2370	0.7505	0.4079
MMM (ε1=0.33)								ES=0.0047				
	0.0014*	0.0013*	0.0171*	0.0018*	0.0204*	0.0026*	0.1159	0.0093	0.3417	0.0542	0.5482	0.1376
	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099	ES=.00217	ES=.00099				ES=0.0052		